REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abou-bekr Belkaid Tlemcen
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE DE MASTER

OPTION : Probabilités et Statistiques

Thème :

Inégalités Exponentielles pour les Martingales.

Mémoire soutenu par : **MAZARI Asma**
Le : 25/09/2021

Devant le jury composé de :

Dr.	**M.Korso Feciane**	MCA UABB Tlemcen	Présidente de Jury
Dr.	**N.Bensmain**	MCB UABB Tlemcen	Examinatrice
Dr.	**W.Benyelles**	MCB UABB Tlemcen	Examinatrice
Dr.	**W.Benyahia**	MCB UABB Tlemce	Rapporteur

Année universitaire : 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mon père, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé.
A ma mère, pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices.
A la mémoire de ma grand-mère.
A mon cher frère Abdelkader.
A ma chère sœur Fatima.
A mes très chères amies Rania, Manel et Zoulikha.

Remerciements

Je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé et le courage d'entamer et de finir ce mémoire.

Je tiens à remercier mon encadreur ***Madame W. BENYAHIA*** pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour ses précieux conseils, sa rigueur et sa disponibilité durant toute la période du travail.

J'adresse mes sincères remerciements à ***Madame M.Korso Feciane*** maître de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, pour l'honneur qu'elle me fait de présider le jury de ce mémoire.

Mes vifs remerciement s'adresse aussi à ***Madame W. BENYELLES*** maître de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, d'avoir accepter d'examiner ce mémoire et faire partie du jury.

Je remercie également ***Madame N.BENSMAIN*** maître de conférences à l' Université Abou Bekr Belkaid de me faire l'honneur d'accepter d'examiner mon mémoire de Master.

Enfin je remercie gracieusement toute personne qui a contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Introduction **2**

1 Inégalités exponentielles classiques **3**

1.1 Inégalité de Bernstein 4

1.2 Inégalité de Bennett 8

1.3 Inégalité de Hoeffding 10

2 Inégalités exponentielles pour les martingales **13**

2.1 Introduction aux martingales 13

2.1.1 Généralités 13

2.1.2 Définitions et propriétés 14

2.1.3 Martingale conditionnellement symétrique 15

2.1.4 Martingale gaussienne 15

2.2 Inégalité de Azuma-Hoeffding 16

2.3 Inégalité de Freedman 17

2.4 Inégalité de De la Peña 20

Conclusion **26**

Références **27**

Introduction

Les inégalités exponentielles pour les martingales ont de nombreuses applications importantes en théorie des probabilités et statistiques. Ces inégalités sont à l'origine des inégalités exponentielles pour les sommes de variables aléatoires indépendantes.

Notre travail est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, on présente des inégalités exponentielles classiques pour les sommes de variables aléatoires indépendantes. On va revenir sur l'inégalité de **Bernstein**, puis l'inégalité de **Bennet** et on conclut par l'inégalité de **Hoeffding**, des précisions et des remarques sont données concernant leurs preuves.

Dans le deuxième chapitre, Nous annonçons tout d'abord les principales propriétés des martingales à temps discret, ensuite nous présentons les inégalités exponentielles pour les martingales en commençant par les inégalités de **Azuma-Hoeffding** et de **Freedman** puis on étudie les inégalités exponentielles obtenues par **De la Peña** pour les martingales auto-normalisées.

Chapitre 1

Inégalités exponentielles classiques

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans le développement dans presque toutes les branches des sciences quantitatives, et elles sont considérées même plus importantes que les égalités.
En probabilités et statistiques, cette question se pose très souvent : dans le cas où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$; pour tout x positif, comment arriver à trouver une borne à la quantité $\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}\left(S_n\right)| \geq x\right)$? Une première borne (faible à cause des hypothèses qui lui sont données) est celle établie par **Tchebychev** (1884-1953)

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}\left(S_n\right)| \geq x\right) \leq \frac{Var(S_n)}{x^2}. \tag{1.1}$$

Beaucoup d'auteurs ont essayé de trouver une autre borne à $\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}\left(S_n\right)| \geq x\right)$ en remplaçant la fonction quadratique dans (1.1) par une autre fonction qui est plus adéquate.

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}\left(S_n\right)| \geq x\right) \leq Y\left(x\right). \tag{1.2}$$

Le théorème central limite et la loi forte des grands nombres étaient source d'inspiration et ont permis a ces auteurs de considérer les situations où $Y\left(x\right)$ est de type e^{-cx^2}. cette forme a été obtenue par **Bernstein** (1924, [6]), **Bennett** (1962, [3]) et **Hoeffding** (1963, [9]). La plus part de ces résultats ont été obtenus par une approche basée sur l'utilisation de l'inégalité de Markov exponentielle. Le défi de cette méthode est de trouver la meilleure borne supérieure de la fonction génératrice des moments.

1.1 Inégalité de Bernstein

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Bernstein [5])**.** *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad v_n = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i). \tag{1.3}$$

Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall k \geq 2, \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_i - \mathbb{E}(X_i)|^k) \leq \frac{k! M^{k-2} v_n}{2} \text{ (condition de Cramer)}$$

alors pour tout $x \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2(xM+v_n)}}.$$

Démonstration. Soit $t \geq 0$, puisque la fonction e^x est une fonction croissante alors on a pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq x) = \mathbb{P}\left(e^{t(S_n - \mathbb{E}(S_n))} \geq e^{tx}\right).$$

Par l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(e^{t(S_n - \mathbb{E}(S_n))} \geq e^{tx}\right) &\leq e^{-tx}\mathbb{E}(e^{t(S_n - \mathbb{E}(S_n))}) \\
&= e^{-tx}\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{tY_i})
\end{aligned}$$

avec $Y_i = (X_i - E(X_i))$. De plus, par indépendance des X_i , on obtient

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{tY_i}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tY_i}).$$

Donc

$$\mathbb{P}(e^{t(S_n - \mathbb{E}(S_n))} \geq e^{tx}) \leq e^{-tx} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tY_i}). \tag{1.4}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{tY_i}) &= \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tY_i)^k}{k!}) \\ &= 1 + t\mathbb{E}(Y_i) + \mathbb{E}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(tY_i)^k}{k!}\right) \\ &\leq 1 + \mathbb{E}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|tY_i|^k}{k!}\right).\end{aligned}$$

On a par théorème de la convergence monotone $\left(car \left(\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{|tY_i|^k}{k!})\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante positive}\right)$ et l'inégalité $e^x \geq 1 + x$

$$\begin{aligned}1 + \mathbb{E}(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|tY_i|^k}{k!}) &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}(|Y_i|^k) \\ &\leq e^{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}(|Y_i|^k)}\end{aligned}$$

on obtient donc,

$$\mathbb{E}(e^{tY_i}) \leq e^{\left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}(|Y_i|^k)\right)}. \tag{1.5}$$

Des inégalités (1.4) et (1.5), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(e^{t(S_n - \mathbb{E}(S_n))} \geq e^{tx}) &\leq e^{-tx} \prod_{i=1}^{n} e^{\left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}(|Y_i|^k)\right)} \\ &= e^{-tx + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}(|Y_i|^k)}.\end{aligned}$$

Par la condition de Cramer

$$\begin{aligned}e^{-tx + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum\limits_{i=1}^{n} E(|Y_i|^k)} &\leq e^{-tx + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{k!}{2} M^{k-2} v_n} \\ &= e^{-tx + \frac{t^2 v_n}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (tM)^k}.\end{aligned}$$

Pour $0 \leq t < \frac{1}{M}$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (tM)^k = \frac{1}{1 - tM}.$$

Donc
$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geq x) \leq e^{-tx+\frac{t^2 v_n}{2(1-tM)}}.$$

Posons $\phi(t) = e^{-tx+\frac{t^2 v_n}{2(1-tM)}} = e^{h(t)}$ où $h(t) = -tx + \frac{t^2 v_n}{2(1-tM)}$.
Minimisation de la fonction $\phi(t)$:
Comme $\phi(t)$ est convexe alors le minimum est atteint au point t^* telle que $\phi'(t^*) = 0$

Calcul de la dérivée
$$\phi'(t) = \left(-x + \frac{2tv_n - t^2 v_n M}{2(1-tM)^2}\right) e^{-tx+\frac{t^2 v_n}{2(1-tM)}}$$

$$\phi'(t) = 0 \Rightarrow -(2M^2 x + v_n M)t^2 + (4Mx + 2v_n)t - 2x = 0. \tag{1.6}$$

Calculons le discriminant de l'équation (1.6)
$$\Delta = 4v_n^2 + 8Mv_n x > 0.$$

Alors l'équation possède deux solutions distinctes
$$t_1^* = \frac{1}{M}\left(1 - \sqrt{\frac{v_n}{2xM + v_n}}\right) < \frac{1}{M}.$$

$$t_2^* = \frac{1}{M}\left(1 + \sqrt{\frac{v_n}{2xM + v_n}}\right) > \frac{1}{M}. \qquad \text{(reffusée)}$$

On trouve alors
$$t_1^{*2} = \frac{1}{M^2}\left[1 + \frac{1}{2\frac{xM}{v_n} + 1} - \frac{2}{\sqrt{2\frac{xM}{v_n} + 1}}\right] \quad et \quad \frac{1}{1 - t_1^* M} = \sqrt{2\frac{xM}{v_n} + 1}.$$

Ce qui donne
$$\begin{aligned} h(t_1^*) &= -\frac{x}{M}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\frac{xM}{v_n}}}\right) + \frac{v_n}{2M^2}\left[\sqrt{2\frac{xM}{v_n} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2\frac{xM}{v_n} + 1}} - 2\right] \\ &= -\frac{v_n}{M^2}\left[\frac{xM}{v_n} + 1 - \sqrt{2\frac{xM}{v_n} + 1}\right] \\ &= -\frac{v_n}{M^2} K(\frac{xM}{v_n}). \end{aligned}$$

où $K(x) = x + 1 - \sqrt{2x+1}$, on obtient

$$\mathbb{P}((S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geq x) \leq e^{-\frac{v_n}{M^2} K(\frac{xM}{v_n})}.$$

On peut vérifier facilement que pour tout $x \geq 0$ que

$$K(x) \geq \frac{x^2}{2(1+x)} = L(x)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} e^{-\frac{v_n}{M^2} K(\frac{xM}{v_n})} &\leq e^{-\frac{v_n}{M^2} L(\frac{xM}{v_n})} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2(v_n + xM)}} \end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{P}((S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2(v_n + xM)}}$$

les mêmes calculs pour la variable aléatoire $(-X_i)$ sont nécessaires car

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x) = \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq x) + \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \leq -x)$$

et

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \leq -x) = \mathbb{P}(-(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geq x).$$

Finalement, pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x) \leq 2e^{\frac{-x^2}{2(v + xM)}},$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité de Bernstein. $\square$

1.2 Inégalité de Bennett

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Bennett [2]). *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de carré intégrable. On suppose que, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe une constante $c > 0$ telle que $X_i - \mathbb{E}(X_i) \leq c$ p.s. Si*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i \quad ; \quad v = \sum_{i=0}^{n} Var(X_i).$$

Alors pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{E}(e^{t(X_i - \mathbb{E}(X_i))}) \leq e^{\frac{Var(X_i)}{c^2}\phi(tc)},$$

avec $\phi(x) = e^x - 1 - x$. De plus, pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x) \leq 2e^{-\frac{v}{c^2}h(\frac{cx}{v})},$$

avec $h(x) = (1+x)\log(1+x) - x$.
En particulier, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n| \geq x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2(v+\frac{xc}{3})}}.$$

Démonstration. [12] On a déjà vu que pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq x) \leq e^{-tx} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{tY_i}\right)$$

avec $Y_i = (X_i - \mathbb{E}(X_i))$. De plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tY_i}) &= 1 + \mathbb{E}(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(Y_i)^2(Y_i)^{k-2}) \\
&\leq 1 + \mathbb{E}(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(Y_i)^2(c)^{k-2}) \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c^{k-2}\mathbb{E}(Y_i^2) \\
&= 1 + \frac{Var(X_i)}{c^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c^k \\
&= 1 + \frac{Var(X_i)}{c^2} \left(e^{tc} - 1 - tc\right) \\
&\leq e^{\frac{Var(X_i)}{c^2}\left(e^{tc}-1-tc\right)}. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq x\right) &\leq e^{-tx} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{Var(X_i)}{c^2}\phi(tc)} \\ &= e^{-tx + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{Var(X_i)}{c^2}\phi(tc)} \\ &= e^{-tx + \frac{v}{c^2}\phi(tc)}.\end{aligned}$$

Posons $\vartheta(t) = e^{-tx+\frac{v}{c^2}\phi(tc)}$, en minimisant $\vartheta(t)$ on obtient $t^* = \frac{1}{c}\log(1+\frac{cx}{v})$
Alors

$$\phi(t^*c) = \frac{xc}{v} - \log(1+\frac{xc}{v}).$$

$$\begin{aligned}\vartheta(t^*) &= -\frac{x}{c}\log(1+\frac{xc}{v}) + \frac{v}{c^2}\left(\frac{xc}{v} - \log(1+\frac{xc}{v})\right) \\ &= -\frac{v}{c^2}\left(\frac{xc}{v}\log(1+\frac{xc}{v}) - \frac{xc}{v} + \log(1+\frac{xc}{v})\right) \\ &= -\frac{v}{c^2}h(\frac{xc}{v}).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq x) \leq e^{-\frac{v}{c^2}h(\frac{xc}{v})}.$$

Alors

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x) \leq 2e^{-\frac{v}{c^2}h(\frac{xc}{v})}.$$

Il est facile de vérifier que pour tout $x \geq 0$

$$h(x) \geq \frac{3x^2}{2(3+x)} = l(x).$$

On trouve alors

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2(v+\frac{xc}{3})}}.$$

□

1.3 Inégalité de Hoeffding

Théorème 1.3.1 (Inégalité de Hoeffding [5]). *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on peut trouver des constantes $a_i < b_i$ telles que $a_i \leq X_i \leq b_i$ p.s. Si*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

alors, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x\right) \leq 2e^{-\frac{2x^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}}.$$

La preuve de l'inégalité de Hoeffding repose sur le lemme suivant dit aussi de Hoeffding.

Lemme 1.3.1. *[5]*

Soit X une variable aléatoire réelle centrée telle que $a \leq X \leq b$ p.s. avec $a < b$. Alors, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\left(\frac{t^2}{8}(b-a)^2\right)}$$

Preuve du lemme. En écrivant $X = \frac{b-X}{b-a}a + \frac{X-a}{b-a}b$, et en utilisant la convexité de la fonction exponentielle, on a

$$\begin{aligned} e^{tX} &= e^{t\left(\frac{b-X}{b-a}a + \frac{X-a}{b-a}b\right)} \\ &\leq \frac{b-X}{b-a}e^{ta} + \frac{X-a}{b-a}e^{tb}. \end{aligned}$$

Par passage à l'espérance et comme $\mathbb{E}\left(X\right) = 0$,on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) &\leq \frac{b}{b-a}e^{(ta)} - \frac{a}{b-a}e^{(tb)} \\ &\leq (1-z)\,e^{-zy} + ze^{(1-z)y} \\ &= e^{-zy}\left((1-z) + ze^{y}\right) \\ &= e^{g(y)} \end{aligned}$$

avec

$$z = \frac{-a}{b-a} \quad et \quad y = (b-a)t$$

ce qui entraine que

$$bt = (1-z)y \quad et \quad at = -zy$$

et $g(y) = -zy + \log(1 - z + ze^y)$.
Par le théorème de Taylor Lagrange, il existe $\tau \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq |\tau| \leq |y|$ telle que

$$g(y) = g(0) + yg'(0) + \frac{y^2}{2}g''(\tau).$$

Cependant, il est clair que

$$g'(y) = -z + \frac{z}{z + (1-z)e^{-y}}$$

$$\begin{aligned} g''(y) &= \frac{z(1-z)e^{-y}}{(z + (1-z)e^{-y})^2} \\ &= \frac{AB}{(A+B)^2} \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

où l'on a posé $A = z$, $B = (1-z)e^{-y}$.
Comme $g(0) = 0$ *et* $g'(0) = 0$, la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{y^2}{2}g''(\tau) \\ &\leq \frac{y^2}{8} \\ &= \frac{t^2}{8}(b-a)^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{8}(b-a)^2}$$

□

Preuve du théorème de Hoeffding. Pour tout $t \geq 0$ et $x \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}\left((S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geq x\right) \leq e^{-tx} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{t(X_i - \mathbb{E}(X_i))}\right)$$

remarquons que

$$\mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}(X_i)) = 0 \quad et \quad a_i - \mathbb{E}(X_i) \leq X_i - \mathbb{E}(X_i) \leq b_i - \mathbb{E}(X_i)$$

alors, on peut appliquer le lemme (1.3.1) pour la variable aléatoire $X_i - \mathbb{E}(X_i)$, pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{E}(e^{t(X_i - \mathbb{E}(X_i))}) \leq e^{\left(\frac{t^2}{8}(b_i - a_i)^2\right)}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} e^{-tx} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{t(X_i-\mathbb{E}(X_i))}\right) &\leq e^{-tx} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t^2}{8}(b_i-a_i)^2} \\ &= e^{-tx+\frac{t^2}{8}\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2} \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq x\right) \leq e^{-tx+\frac{t^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}.$$

On minimise la fonction $e^{-tx+\frac{t^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}$, on trouve $t^* = \frac{4x}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}$, par suite on a

$$\mathbb{P}\left((S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geq x\right) \leq e^{\frac{-2x^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}}.$$

Finalement, pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq x\right) \leq 2e^{\frac{-2x^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}}.$$

$\square$

Chapitre 2

Inégalités exponentielles pour les martingales

2.1 Introduction aux martingales

La théorie des martingales est l'un des outils les plus puissants de la théorie des probabilités. On ne parlera ici que des principales propriétés des martingales à temps discret (Voir [10], p 173-175) avant d'aborder les inégalités de Azuma-Hoeffding, Freedman et De la Pena.

2.1.1 Généralités

Soit$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$(i.e $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$), $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P}\big)$ est appelé espace de probabilité filtré.
Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable .
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$ la tribu engendrée par les X_i alors, $(\mathcal{F}_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ appelée filtration naturelle pour la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.1.2 Définitions et propriétés

Définition 1. *Soit* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles intégrables, adaptée à* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *on dit que* (M_n) *est*

(i) *une martingale, si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n;$$

(ii) *une sous-martingale, si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n;$$

(iii) *une sur-martingale, si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n.$$

Exemple 1. *Soit* $(\xi_i)_{i\geq 0}$ *une suite de variables aléatoires intégrables et indépendantes avec* $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_i, 0 \leq i \leq n\}$ *et* $S_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$.
S_n *est adapté et intégrable. De plus,*

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1}) \quad p.s$$

Donc, (S_n) *est une martingale si* $\mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0$, $\forall n \geq 1$ *; une sous-martingale si* $\mathbb{E}(\xi_{n+1}) \geq 0$, $\forall n \geq 1$ *; et une sur-martingale si* $\mathbb{E}(\xi_{n+1}) \leq 0$, $\forall n \geq 1$.

Proposition 1. *Soit* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale, alors*

(i) $\forall n < m, M_n = \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n)$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0)$.

Démonstration. **(i)** soient $n < m$ on a

$$\begin{aligned} M_n &= \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+2}|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(M_{n+2}|\mathcal{F}_n) \\ &\vdots \\ &= \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

(ii) soit $n \in \mathbb{N}$,
$M_0 = \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_0) \Rightarrow \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_n)$.

□

Définition 2. *Une martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^p avec $p \geq 1$ si*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||M_n||_p^p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_n|^p) < \infty.$$

Remarque 1.
1. *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une sous-martingale, alors $(\mathbb{E}(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.*
2. *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une sur-martingale,alors $(\mathbb{E}(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
3. *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une-martingale,alors $(\mathbb{E}(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*

Définition 3. *[5] Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable. On appelle processus croissant associé à $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(< M >_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $< M >_0= 0$ et*

$$\forall n \geq 1, < M >_n= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\Delta M_k^2|\mathcal{F}_{k-1})$$

avec $\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$.

2.1.3 Martingale conditionnellement symétrique

Définition 1. *[5] Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)$. On dit que (M_n) est conditionnellement symétrique si pour tout $n \geq 1$, la loi de ΔM_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ est symétrique.*

2.1.4 Martingale gaussienne

Définition 1. *[5] Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)$. On dit que (M_n) est conditionnellement gaussienne si pour tout $n \geq 1$, la loi de ΔM_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ est la loi $\mathcal{N}(0, \Delta < M >_n)$.*

2.2 Inégalité de Azuma-Hoeffding

Cette inégalité a été obtenue par **Hoeffding** (1962), pour les sommes de variables aléatoires indépendantes (voir chapitre 1), et étendue aux martingales par **Azuma**(1967, [1]).

Théorème 2.2.1 (Inégalité de Azuma-Hoeffding [5])**.** *Soit (M_n) une martingale de carré intégrable avec $M_0 = 0$. On suppose que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on peut trouver des constantes $a_k < b_k$ telles que $a_k \leq \Delta M_k \leq b_k$ p.s. Alors, pour tout $x \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(|M_n| \geq x\right) \leq 2e^{-\frac{2x^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2}}.$$

Démonstration. D'abord, l'inégalité de Markov entraine que pour tout $x \geq 0$, $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq x\right) \leq e^{-tx}\mathbb{E}\left(e^{tM_n}\right). \tag{2.1}$$

D'autre part, comme $M_n = M_{n-1} + \Delta M_n$ pour tout $n \geq 1$, il est clair que pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{tM_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{tM_n}|\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(e^{tM_{n-1}}\mathbb{E}\left(e^{t\Delta M_n}|\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)\end{aligned}$$

et comme M_n est une martingale, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$$

de plus, $a_n \leq \Delta M_n \leq b_n$ *p.s*, alors, en appliquant le lemme (1.3.1), on a pour tout $t > 0$

$$\mathbb{E}\left(e^{t\Delta M_n}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \leq e^{\frac{t^2}{8}(b_n-a_n)^2}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{tM_n}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{tM_{n-1}}\mathbb{E}\left(e^{t\Delta M_n}|\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(e^{tM_{n-1}}\right)e^{\frac{t^2}{8}(b_n-a_n)^2}.\end{aligned}$$

On peut procéder de la même manière en conditionnant successivement par $\mathcal{F}_{n-2}, ..., \mathcal{F}_0$, on obtient alors

$$\mathbb{E}\left(e^{tM_n}\right) \leq e^{\frac{t^2}{8}\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2}. \tag{2.2}$$

Par suite, de (2.1) et (2.2), nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(M_n \geq x\right) &\leq e^{-tx+\frac{t^2}{8}\sum_{k=1}^n (b_k-a_k)^2}\\ &\leq e^{-\frac{2x^2}{\sum_{k=1}^n (b_k-a_k)^2}}\end{aligned}$$

avec $t = \frac{4x}{\sum_{k=1}^n (b_k-a_k)^2}$. En appliquant le même raisonnement avec $-M_n$, on trouve

$$\mathbb{P}\left(-M_n \geq x\right) \leq e^{-\frac{2x^2}{\sum_{k=1}^n (b_k-a_k)^2}}.$$

Finalement, pour tout $x \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(|M_n| \geq x\right) \leq 2e^{-\frac{2x^2}{\sum\limits_{k=1}^n (b_k-a_k)^2}}.$$

□

2.3 Inégalité de Freedman

Freedman(1975, [8]) a donné des extensions des inégalités de **Bennett** (1963) aux martingales à accroissements bornés.

Théorème 2.3.1 (Inégalité de Freedman [5])**.** *Soit (M_n) une martingale de carré intégrable avec $M_0 = 0$. On suppose que, pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe une constante $c > 0$ telle que $\Delta M_k \leq c$ p.s. Alors, pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq x, < M >_n \leq y\right) \leq e^{-\frac{x^2}{2(y+cx)}}.$$

Lemme 2.3.1. *[5] Soit (M_n) une martingale de carré intégrable. On suppose que (M_n) vérifie la condition de Cramer, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall k \geq 2, \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|\Delta M_i|^k | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \frac{k! c^{k-2} < M >_n}{2}.$$

Alors, pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(|M_n| \geq x, < M >_n \leq y\right) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2(y+cx)}}.$$

La preuve de l'inégalité de Freedman repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.3.2. *[5] Soit (M_n) une de carré intégrable avec $M_0 = 0$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, $\Delta M_k \leq c$ p.s. avec $c > 0$. Pour tout $t > 0$, on pose*

$$V_n(t) = \exp(tM_n - \frac{\phi(tc)}{c^2} < M >_n)$$

avec $\phi(x) = e^x - 1 - x$. Alors, $(V_n(t))$ est une sur-martingale positive avec $\mathbb{E}(V_n(t)) \leq 1$.

Preuve du lemme (2.3.2). Pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(V_n(t)|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left(V_{n-1}(t)\exp\left(t\Delta M_n - \frac{\phi(tc)}{c^2}\Delta < M >_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= V_{n-1}(t)\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n - \frac{\phi(tc)}{c^2}\Delta < M >_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\Delta < M >_n = \mathbb{E}\left((\Delta M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}\right)$, on a alors

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n - \frac{\phi(tc)}{c^2}\Delta < M >_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right) =$$

$$\exp\left(-\frac{\phi(tc)}{c^2}\mathbb{E}\left((\Delta M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right).$$

On a $\mathbb{E}\left(\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$. En utilisant l'inégalité (1.7), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= 1 + \frac{\phi(tc)}{c^2}\mathbb{E}\left((\Delta M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{\phi(tc)}{c^2}\mathbb{E}\left((\Delta M_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}\right)\right)\end{aligned}$$

ce qui entraine que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n - \frac{\phi(tc)}{c^2}\Delta < M >_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right) \leq 1 \tag{2.4}$$

on déduit de (2.3) et (2.4) que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}\left(V_n(t)|\mathcal{F}_{n-1}\right) \leq V_{n-1}(t).$$

Par passage a l'espérance et puisque $M_0 = 0$ et $< M >_0 = 0$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(V_n(t)\right) \leq \mathbb{E}\left(V_{n-1}(t)\right) \leq 1.$$

On conclut que, pour tout $t > 0$, $(V_n(t))$ est une sur-martingale positive avec $\mathbb{E}\left(V_n(t)\right) \leq 1$ □

Preuve du théorème 2.3.1. Pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$, soit

$$A_n = \{M_n \geq x, < M >_n \leq y\}.$$

Par l'inégalité de Markov, on a pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &\leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{2}M_n - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{I}_{A_n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{2}M_n - \frac{\phi(tc)}{2c^2} < M >_n + \frac{\phi(tc)}{2c^2} < M >_n - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{I}_{A_n}\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{\phi(tc)}{2c^2}y - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\frac{t}{2}M_n - \frac{\phi(tc)}{2c^2} < M >_n\right)\mathbb{I}_{A_n}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\phi(tc)}{2c^2}y - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{V_n(t)}\mathbb{I}_{A_n}\right).
\end{aligned}$$

Via l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 2.3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sqrt{V_n(t)}\mathbb{I}_{A_n}\right) &\leq \sqrt{\mathbb{E}(V_n(t))\,\mathbb{P}(A_n)} \\
&\leq \sqrt{\mathbb{P}(A_n)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \exp\left(\frac{\phi(tc)}{2c^2}y - \frac{tx}{2}\right)\sqrt{\mathbb{P}(A_n)}$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \exp\left(\frac{\phi(tc)}{c^2}y - tx\right).$$

On minimise cette majoration en prenant

$$t = \frac{1}{c}\log\left(1 + \frac{xc}{y}\right)$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \exp\left(-\frac{y}{c^2}h(\frac{xc}{y})\right)$$

avec $h(x) = (1+x)\log(1+x) - x$. Et comme

$$h(x) \geq \frac{3x^2}{2(3+x)} \geq \frac{x^2}{2(1+x)} \qquad \textit{pour tout } x \geq 0.$$

Finalement, pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$,

$$\mathbb{P}(M_n \geq x, < M >_n \leq y) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2(y+cx)}\right).$$

□

2.4 Inégalité de De la Peña

Afin de s'affranchir de toute hypothèse de bornitude ou de moment, **De la Peña** (1999, [7]) propose une inégalité exponentielle pour (M_n) conditionnellement symétrique, qui fait intervenir sa variation quadratique totale

$$[M]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_n^2.$$

Théorème 2.4.1 (Inégalité de De la Peña [5])**.** *Soit $(M)_n$ une martingale de carré intégrable et conditionnellement symétrique avec $M_0 = 0$. Alors, pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq x, [M]_n \leq y\right) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right).$$

Pour les martingales auto-normalisées, on a également le résultat suivant :

Théorème 2.4.2. *[5] Soit (M_n) une martingale de carré intégrable et conditionnellement symétrique avec $M_0 = 0$. Alors, pour toutes $x \geq 0$, $y > 0$ et $a \geq 0$, $b > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a + b\,[M]_n} \geq x\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\exp\left(-x^2\left(ab + \frac{b^2}{2}\,[M]_n\right)\right)\right]},$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a + b\,[M]_n} \geq x, [M]_n \geq y\right) \leq \exp\left(-x^2\left(ab + \frac{b^2 y}{2}\right)\right).$$

Dans la section suivante, nous supposons que (M_n) est *conditionnellement gaussienne*, cela nous permet d'obtenir une inégalité exponentielle pour $(M)_n$ semblable à celle de De la Peña en remplaçant la variation quadratique $[M]_n$ par le processus croissant $< M >_n$.

Théorème 2.4.3. *[5] Soit (M_n) une martingale de carré intégrable et conditionnellement gaussienne avec $M_0 = 0$. Alors, les résultats des théorèmes (2.4.1) et (2.4.2) sont vrais en remplaçant partout $[M]_n$ par $< M >_n$. De plus, pour tous $x \geq 0$, $a \geq 0$ et $b > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a + b < M >_n} \geq x\right) \leq \inf_{p>1}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(-(p-1)\,x^2\left(ab + \frac{b^2}{2} < M >_n\right)\right)\right]\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

Démonstration. La preuve s'inspire du papier de De la Peña [7].
Pour tout $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$, soit

$$W_n(t) = \exp\left(tM_n - \frac{t^2}{2} < M >_n\right).$$

D'une part, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(W_n(t)|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= W_{n-1}(t)\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n - \frac{t^2}{2}\Delta < M >_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right)\\ &= W_{n-1}(t)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\Delta < M >_n\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right).\end{aligned}$$

Comme (M_n) est conditionnellement gaussienne

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\Delta < M >_n\right).$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(W_n(t)|\mathcal{F}_{n-1}\right) = W_{n-1}(t).$$

Alors, $(W_n(t))$ est une martingale positive et $\mathbb{E}(W_n(t)) = \mathbb{E}(W_0(t)) = 1$.
D'autre part, pour tout $x \geq 0$ et $y > 0$, soit

$$A_n = \left\{M_n \geq x, < M >_n \leq y\right\}.$$

Par l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_n\right) &\leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{2}M_n - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{I}_{A_n}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{2}M_n + \frac{t^2}{4}\langle M\rangle_n - \frac{t^2}{4}\langle M\rangle_n - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{I}_{A_n}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\sqrt{W_n(t)}\exp\left(\frac{t^2}{4}\langle M\rangle_n - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{I}_{A_n}\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{t^2 y}{4} - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{W_n(t)}\mathbb{I}_{A_n}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Via l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du fait que $\mathbb{E}\left(W_n(t)\right) = 1$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \exp\left(\frac{t^2 y}{4} - \frac{tx}{2}\right)\sqrt{\mathbb{P}\left(A_n\right)}.$$

Ce qui implique

$$\mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \exp\left(\frac{t^2 y}{2} - tx\right). \tag{2.7}$$

En optimisant cette majoration, on obtient $t^* = \dfrac{x}{y}$, alors

$$\mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right).$$

On va continuer la preuve dans le cas particulier $a = 0$ et $b = 1$ car la démarche est exactement la même dans le cas général. Pour tout $x > 0$, soit

$$B_n = \left\{M_n \geq x < M >_n\right\}.$$

par l'inégalité de Markov, on a pour tout $t > 0$ et $q > 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(B_n\right) &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{t}{q}M_n - \frac{tx}{q} < M >_n\right)\mathbb{I}_{B_n}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{t}{q}M_n - \frac{t^2}{2q} < M >_n + \frac{t^2}{2q} < M >_n - \frac{tx}{q} < M >_n\right)\mathbb{I}_{B_n}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(W_n(t)\right)^{\frac{1}{q}}\exp\left(\frac{t}{2q}\left(t - 2x\right) < M >_n\right)\mathbb{I}_{B_n}\right].\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\mathbb{E}\left[\left(W_n(t)\right)^{\frac{1}{q}}\exp\left(\frac{t}{2q}\left(t - 2x\right) < M >_n\right)\mathbb{I}_{B_n}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{tp}{2q}\left(t - 2x\right) < M >_n\right)\right]\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.8}$$

Car $\mathbb{E}\left(W_n\left(t\right)\right) = 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En minimisant $\left(\exp\left(\frac{tp}{2q}\left(t - 2x\right) < M >_n\right)\right)$, on obtient $t = x$, et comme $\frac{p}{q} = p - 1$ on tire de (2.8)

$$\mathbb{P}\left(B_n\right) \leq \inf_{p>1}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(-\left(p-1\right)\frac{x^2}{2} < M >_n\right)\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ce qui montre (2.5).
Dans le cas particulier $p = 2$, on trouve que

$$\mathbb{P}\left(B_n\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2} < M >_n\right)\right]}.$$

Finalement, pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$, soit

$$C_n = \left\{M_n \geq x < M >_n, < M >_n \geq y\right\}.$$

Nous avons pour tout $0 < t < 2x$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_n) &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\sqrt{W_n(t)}\exp\left(\frac{t}{4}(t-2x)\langle M\rangle_n\right)\right)\mathbb{I}_{C_n}\right]\\ &\leq \exp\left(\frac{ty}{4}(t-2x)\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{W_n(t)}\mathbb{I}_{c_n}\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{ty}{4}(t-2x)\right)\sqrt{\mathbb{P}(C_n)}.\end{aligned}$$

On trouve alors

$$\mathbb{P}(C_n) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right)$$

Ce qui achève la démonstration. □

On propose dans la suite une inégalité exponentielle sans aucune hypothèse sur la martingale $(M)_n$. Tout d'abord, On va commencer par le lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *[4] Soit X une variable aléatoire réelle centrée et de carré intégrable, de variance $\sigma^2 > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose*

$$H(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(tX - \frac{t^2}{2}X^2\right)\right].$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$H(t) \leq 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2.$$

Démonstration. Par l'inégalité de Jensen, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}H(-t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-tX - \frac{t^2}{2}X^2\right)\right] &\geq \exp\left(\mathbb{E}\left[-tX - \frac{t^2}{2}X^2\right]\right)\\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\sigma^2\right)\\ &\geq 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}H(t) + H(-t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}X^2\right)(\exp(tX) + \exp(-tX))\right]\\ &= 2\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}X^2\right)\cosh(tX)\right] \leq 2. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Car on a bien que $\cosh(x) \leq \exp(\frac{x^2}{2})$. En appliquant (2.9) et (2.10), on obtient

$$H(t) \leq 2 - H(-t) \leq 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2.$$

□

Théorème 2.4.4. *[5] Soit (M_n) une martingale de carré intégrable avec $M_0 = 0$. Alors, pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(|M_n| \geq x, [M]_n + < M >_n \leq y\right) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right).$$

Lemme 2.4.2. *[4] Soit (M_n) une martingale de carré intégrable. Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, on pose*

$$V_n(t) = \exp\left(tM_n - \frac{t^2}{2}\left([M]_n + < M >_n\right)\right)$$

alors, $(V_n(t))$ est une sur-martingale positive avec $\mathbb{E}\left(V_n(t)\right) \leq 1$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(V_n(t)|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left(V_{n-1}(t)\exp\left(t\Delta M_n - \frac{t^2}{2}\left(\Delta\left[M\right]_n + \Delta < M >_n\right)\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= V_{n-1}(t)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\Delta < M >_n\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n - \frac{t^2}{2}\Delta\left[M\right]_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right).\end{aligned} \tag{2.11}$$

$\Delta\left[M\right]_n = \Delta M_n^2$ et $\mathbb{E}\left(\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$, alors en appliquant le lemme (2.4.1), on obtient

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\Delta M_n - \frac{t^2}{2}\Delta\left[M\right]_n\right)|\mathcal{F}_{n-1}\right) \leq 1 + \frac{t^2}{2}\Delta < M >_n.$$

Ce qui implique

$$\mathbb{E}\left(V_n(t)|\mathcal{F}_{n-1}\right) \leq V_{n-1}(t)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\Delta < M >_n\right)\left(1 + \frac{t^2}{2}\Delta < M >_n\right) \leq V_{n-1}(t)$$

via l'inégalité élémentaire $1 + x \leq \exp(x)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(V_n(t))$ est une sur-martingale positive avec $\mathbb{E}\left[V_n(t)\right] \leq 1$.

□

preuve du théorème (2.4.4). On pose

$$Z_n = [M]_n + < M >_n .$$

Pour tous $x \geq 0$ et $y > 0$, soit

$$A_n = \{|M_n| \geq x, Z_n \leq y\} .$$

On a alors

$$A_n = A_n^+ \cup A_n^-$$

avec $A_n^+ = \{M_n \geq x, Z_n \leq y\}$ et $A_n^- = \{M_n \leq -x, Z_n \leq y\}$.
Par l'inégalité de Markov, on a pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_n^+\right) &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{t}{2}M_n - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{I}_{A_n^+}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sqrt{V_n(t)}\exp\left(\frac{t^2}{4}Z_n - \frac{tx}{2}\right)\mathbb{I}_{A_n^+}\right] \\
&\leq \exp\left(\frac{t^2 y}{2} - \frac{tx}{2}\right)\sqrt{\mathbb{P}\left(A_n^+\right)}.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\mathbb{P}\left(A_n^+\right) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right) .$$

Pour $\mathbb{P}\left(A_n^-\right)$ on trouve la même majoration ce qui termine la démonstration. □

Pour les martingales auto-normalisées, on a également le résultat suivant :

Théorème 2.4.5. *[5] Soit $(M_{,n})$ une martingale de carré intégrable avec $M_0 = 0$. Alors, pour toutes $x \geq 0$, $y > 0$ et $a \geq 0$, $b > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\frac{|M_n|}{a + b < M >_n} \geq x, < M >_n \geq [M]_n + y\right) \leq 2\exp\left(-x^2\left(ab + \frac{b^2 y}{2}\right)\right),$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|M_n|}{a + b < M >_n} \geq x, [M]_n \leq y < M >_n\right) \leq$$

$$2\inf_{p>1}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(-(p-1)\frac{x^2}{(1+y)}\left(ab + \frac{b^2}{2} < M >_n\right)\right)\right]\right)^{\frac{1}{p}} .$$

La preuve de ce théorème est semblable à celle du théorème (2.4.3).

Conclusion

Nous avons étudié dans ce travail, quelques inégalités exponentielles pour les martingales.

Dans la première partie de ce travail nous avons rappelé les inégalités exponentielles classiques pour les sommes de variables aléatoires indépendantes de **Bernsteien**, **Bennet** et **Hoeffding**, avec une motivation pour l'obtention de ces inégalités.

Dans la seconde partie, nous avons présenté les inégalités exponentielles pour les martingales de **Azuma**, **Freedman** et **De la Peña** en donnant des précisions et des remarques concernant leurs preuves.

Références

[1] Azuma K. 1967. *Weighted sums of certain dependent random variables.* Tôkuku Mathematical Journal, vol. 19, p. 357-367.

[2] Ben-Hamou A. 2019. *Inégalités de concentration.* Master 2 Probabilités Sorbonne Université.

[3] Bennett G. 1962. *Probability inequalities for sum of independent random variables.* Journal of the American Statistical Association, vol. 57, p.33-45.

[4] Bercu B. and Touati A. 2008. *Exponential inequalities for self-normalized martingales with applications*, to appear in Annals of Applied Probability, 18.

[5] Bercu B. 2008 *Inégalités exponentielles pour les martingales.* Journées ALEA, p. 1-33.

[6] Bernstein S. N. 1924. *Sur une modification de l'inégalité de Tchebichev.* Ann. Scl.Inst. Sav.Ukraine, Sect. Math. I.

[7] De la Peña V. H. 1999. *A general class of exponential inequalities for martingales and ratios.* Annals of Probability, vol. 27, p. 537-564.

[8] Freedman D. 1975. *On tail probabilities for martingales.* Annals of Probability, vol. 3, p. 100-118.

[9] Hoeffding W.1963. *Probability inequalities for sums of bounded random variables.* Journal of the American Statistical Association, vol. 58, p.13–30.

[10] Ledoux M, Barbe P. 1998. *Probabilité.* De la licence à l'agrégation. Espace 34, Belin, Montpellier.

[11] MOUSLI A. 2015. *Sur Les Inégalités Exponentielles dans l'estimation Fonctionnelle.* Mémoire de Magister en mathématique.

[12] Zheng S. *An improved Bennett's inequality.* Communications in Statistics-Theory and Methods, 2017, Vol. 0,No. 0, 1-8.

Résumé :

*Dans ce mémoire nous nous intéressons aux inégalités exponentielles pour les martingale, nous prouvons les inégalités de **Azuma** et de **Freedman,** nous étudions l'inégalité de **De la Peña** pour les martingales auto-normalisés.*

Abstract :

In this Master thesis, we study some exponential inequalities for martingales we prouve the **Azuma's** inequality and **Freedman's** inequality, we study exponential inequalities for self-normalized martingales similar to those established by **De la Peña**.

ملخص :

*في هذه الأطروحة نهتم بدراسة المتراجحات الأسية من اجل المارتنجال، نبرهن كلا من متراجحة **أزوما** و متراجحة **فريدمان،** ثم ندرس متراجحة **دي لابينا** من اجل المارتينجال الموحد ذاتيا.*