République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Équations aux dérivées partielles et applications

présenté par

MOUSSAOUI Khaloub

Soutenu le : 13/09/2021

Résultats d'existence de solutions pour des problèmes elliptiques semi-linéaires contenant des termes indéfinis

Soutenu devant le jury composé de :

M. MAMCHAOUI Mohamed	MCA, Université de Tlemcen	Président
M. BENTIFOUR Rachid	MCA, Université de Tlemcen	Examinateur
M. BENSEDIK Ahmed	MCB, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- Ma mère ;
- Mon mari ;
- Ma sœur ;
- Mes frères.

"Il me semble n'avoir été qu'un enfant jouant sur le rivage, réjoui de trouver de temps à autre un galet plus poli, un plus joli coquillage qu'à l'ordinaire, tandis que le vaste océan de la vérité s'étendait devant moi, inconnu."
"Nos connaissances sont une goutte, notre ignorance un océan."
Isaac Newton ; Décembre 1642/Janvier 1643 - Mars 1727.

Remerciements

Louange à ALLAH qui nous a enseignés ce qui nous permet de voir la lumière pour ce monde et l'au-delà.

Je remercie M. Ahmed BENSEDIK pour le sujet qu'il m'a proposé ainsi que pour son accompagnement et sa disponibilité pour la finalisation et la rédaction de ce mémoire et la préparation de la soutenance.

Je tiens à remercier M. Mohamed MAMCHAOUI pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également à M. Rachid BENTIFOUR d'avoir accepté et pris de son temps pour examiner ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à ma petite famille, dont les encouragements et le soutien ont été indispensables à l'aboutissement de mes études.

Mes sincères remerciements vont également à l'ensemble des enseignants du Département de Mathématiques qui ont participé à ma formation durant mon cursus universitaire.

Table des matières

Notation	Définition
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Élément de $\mathbb{R}^N$
$r = \lvert x\rvert = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}$	Module de x
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de u
Δu	Laplacien de u
q	Exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	Exposant critique de Sobolev
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
supp (u)	Support de la fonction u
mes $(A) = \lvert A\rvert$	Mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$
$\lVert \cdot \rVert_s$	Norme l'espace $L^s(\Omega)$
$\lVert \cdot \rVert_X$	Norme dans l'espace X
X'	Espace dual de X
$p.p$	Presque partout
s.c.i.	Semi-continue inférieurement
s.c.s.	Semi-continue supérieurement
V^+	Partie positive de la fonction V, $V^+ = \max(V, 0)$

Notation	Définition
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ou $(,)$	Crochet de dualité X, X' / Produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$
$\mathcal{C}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω à support compact
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, c'est à dire espace des distributions
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \; mesurable \mid \int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \; mesurable \mid \exists C > 0$ telle que $\|u(x)\| \leq C$ en p.p. $x \in \Omega \}$
$L^q(\Omega)$	Espace dual de $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace des fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ à trace nulle
$W^{-k,q}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Introduction

Le présent mémoire de fin d'études en Master, est consacré à l'étude des résultats d'existence de solutions positives des problèmes elliptiques de la forme,

$$\begin{cases} -\Delta u + g\,(x,\lambda)\,u = a\,(x)\,f\,(u) & \text{dans } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière $\partial\Omega$, g une fonction continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$ et a est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ qui change de signe. La fonction f est une fonction sur-linéaire à croissance super-quadratique, et enfin la condition $Bu = 0$ représente, selon le cas, soit la condition de Dirichlet soit la condition de Neumann.
En plus de son intérêt en théorie des EDPs [2], le problème (P) a été largement étudié par plusieurs auteurs en raison de son lien avec, entre autres, les questions de géométrie [7] (courbature scalaire, déformation et métrique conformes,...) et de la théorie spectrale [5, 9] (bifurcation et perturbation des valeurs propres simples, asymptotiques des valeurs propres,...) etc...

Dans ce mémoire nous avons considéré les trois cas suivants :
1. $g\,(x,\lambda) = -\lambda_1$, λ_1 étant la première valeur propre du Laplacien, ce cas fera l'objet du deuxième chapitre où nous avons aussi étudié le spectre de l'opérateur de Laplace.
2. $g\,(x,\lambda) = 0$ ou $g\,(x,\lambda) = q(x) - \tau$ où q est une fonction à spécifier ultérieurement et τ est un réel. Ces deux cas sont traités dans le troisième chapitre.
Le premier chapitre est dédié aux résultats et au différents notions et théorèmes utilisés dans ce travail.

Enfin notons que nous avons exploité, comme références de base, les articles [1] et [3] pour l'élaboration de ce mémoire.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux définitions, théorèmes et aux différents résultats et notions utiles dans les chapitres suivants. La plupart de ces notions sont tirées des livres [4, 11].

1.1 Espace réflexif - Espace séparable

Définition : Soit E un espace de Banach, E' son dual et $\langle ., . \rangle$ le crochet de dualité sur $E' \times E$. On dit que la suite $(x_n)_n$ dans E converge faiblement vers $x \in E$ si,

$$\langle f, x_n \rangle \underset{n \to +\infty}{\to} \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E^{'}. \tag{1.1}$$

Et on note, $x_n \rightharpoonup x$ faibl. dans E.

1.1.1 Convergences faible et forte

Théorème : *Soit E un espace de Banach, E' son dual. Soient $(x_n)_n$ et $(x_n^*)_n$ deux suites de E et de E' respectivement. On a les implications suivantes.*
Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E alors,

$$\begin{cases} \exists C > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_E \leq C \\ \|x\|_E \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} \|x_n\|_E . \end{cases} \tag{1.2}$$

Si $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x$ fortement dans E, alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$ faiblement dans E.
Si $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$ dans E et $x_n^* \underset{n \to +\infty}{\to} x^*$ dans $E^{'}$, alors $\langle x_n^*, x_n \rangle \underset{n \to +\infty}{\to} \langle x^*, x \rangle$.

1.1.2 Définition

Soit E un espace de Banach et E' son dual muni de la norme duale définie par $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |\langle f, x\rangle|$.

Soit E'' son bidual muni de la norme $\|g\|_{E''} = \sup\limits_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle g, f\rangle|$

Définissons l'injection canonique $J : E \to E^{''}$ de la manière suivante : Soit $x \in E$ fixé, alors l'application $f \to \langle f, x\rangle$ de $E^{'}$ dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur $E^{'}$ i.e un élément de $E^{''}$ noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \quad \forall x \in E, \ \ \forall f \in E^{'}.$$

L'application linéaire J est une isométrie i.e. $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$; en effet

$$\|Jx\|_{E''} = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E \,.$$

L'espace E est dit réflexif si J est surjective .

Définition : On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.

1.1.3 Théorème d'Eberlein-Smulian et sa réciproque

Théorème : *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E, alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) de $(x_n)_n$ et $x \in E$ tels que*

$$(x_{n_k}) \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} x \quad \textit{faib. dans } E. \tag{1.3}$$

Théorème (Eberlein-Smulian) : *Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée (x_n) possède une sous-suite extraite (x_{n_k}) convergente pour la topologie faible. Alors E est réflexif.*

1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq +\infty$.

1.2.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition : L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\} \tag{1.4}$$

où $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N})$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est i^{ère} dérivée au sens des distributions de la fonction réelle u.
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme,

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \tag{1.5}$$

ou parfois de la norme équivalente,

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \quad (\text{si } 1 \leq p < +\infty). \tag{1.6}$$

1.2.2 L'espace $W_0^{1,p}(\mathit{\Omega})$

Définition : L'espace $W_0^{1,p}(\mathit{\Omega})$ est l'adhérence de $C_0^\infty(\mathit{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\mathit{\Omega})$ i.e :

$$W_0^{1,p}(\mathit{\Omega}) = \overline{C_0^\infty(\mathit{\Omega})}^{\|.\|_{W^{1,p}}}.$$

L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est noté par $W^{-1,q}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Remarques :

- Si $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est noté par $H^1(\Omega)$ et $W_0^{1,2}(\Omega)$ est noté par $H_0^1(\Omega)$.

- Comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ on a :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Théorème *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace*

- *de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$.
- *séparable pour* $1 \leq p < +\infty$.
- *réflexif pour* $1 < p < +\infty$. $\square$

Remarques :

- Les mêmes propriétés restent vraies pour $W_0^{1,p}(\Omega)$.
- Les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire issu de celui de $L^2(\Omega)$,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \tag{1.7}$$

1.2.3 Inégalité de Poincaré

Théorème : *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $1 \leq p < +\infty$. *Alors il existe une constante* $C(\Omega) > 0$ *telle que ;*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.8}$$

Remarques :

- l'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné dans une seule direction.
- l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Rappelons aussi l'inégalité de Hölder.

1.2.4 Inégalité de Hölder

Théorème : *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Alors pour tous* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$ *et* q *défini par* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *on a* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.2.5 Théorème de Rellich-Kondrachov

Théorème : *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^1. Alors on a les injections compactes suivantes :*

- si $1 \leq p < N$; $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ ou $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

- si $p = N$; $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$.

- si $p > N$; $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Remarque : L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte comme suit :
Soit $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$.
• Si $1 \leq p < N$, alors $u_n \to u$ fortement dans $L^q(\Omega), 1 \leq q < \dfrac{Np}{N-p}$.
• Si $p = N$, alors $u_n \to u$ fortement dans $L^q(\Omega), 1 \leq q < +\infty$.
• Si $p > N$, alors $u_n \to u$ fortement dans $L^\infty(\Omega)$.

1.2.6 Inégalité de Sobolev

Théorème : *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une constante $k(p, N)$ telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq k(p, N) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.3 Méthode variationnelle

1.3.1 Fonction semi-continue inférieurement (s.c.i)

Définition : Soit J une fonction définie sur un espace de Banach E, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Elle est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en u si, pour toute suite (u_n) convergeant vers u on a :

$$J(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n).$$

On dit qu'elle est faiblement semi-continue inférieurement si la convergence a lieu pour la topologie faible.
Définition : Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach séparable E est dite coercive si

$$\lim_{\|u\|_E \to +\infty} J(u) = +\infty.$$

1.3.2 Fonctionnelle minorée

Théorème : *Soit E un espace de Banach réflexif, K une partie non bornée faiblement fermée de E et $J : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive faiblement s.c.i sur K et non identiquement égale à $+\infty$. Alors J est bornée inférieurement et*

$$\exists u_0 \in K, \quad J(u_0) = \min_{u \in K} J(u).$$

Corollaire : *Soit E un espace de Banach réflexif, K une partie convexe fermée non bornée de E et $J : K \to \mathbb{R}$ une fonction coercive convexe et s.c.i sur K. Alors J est bornée inférieurement et*

$$\exists u_0 \in K, \quad J(u_0) = \min_{u \in K} J(u).$$

Si de plus J est strictement convexe alors u_0 est unique.

1.3.3 Points critiques et condition de Palais-Smale

Soit E un espace de Banach, $F \subset E$ un ouvert et $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1.

Définitions

- On dit que $u \in F$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.
  Si u n'est pas un point critique, il est dit un point régulier de J.
- Si $u \in F$ est un point critique de J alors le réel c vérifiant $J(u) = c$ est dit valeur critique de J, sinon c est une valeur régulière.
- Une suite $(u_n) \subset E$ est une suite de Palais-Smale pour J si :

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad |J(u_n)| \leq C \quad \textit{et} \quad \|J'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0$$

- On dit que la fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale, si de toute suite de Palais-Smale pour J on peut extraire une sous suite convergente.

1.3.4 Formules de Green

Proposition : *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné de classe* C^1*. Alors*

- *Si* $u \in (C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^N$ *et* $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *on a*

$$\int_\Omega v\mathrm{div}(u)\; dx = -\int_\Omega u.\nabla v\; dx + \int_{\partial\Omega} vu.\eta\; ds$$

- *Si* $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\; dx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\; dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i\; ds \quad \forall\; i = 1, ..., N$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)^T$ *est le vecteur normal unitaire sortant de* Ω *.*

- *Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *on a*

$$\int_\Omega v\Delta u\; dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v\; ds$$

avec $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \langle \nabla u, \eta \rangle = \nabla u.\eta.$

- *Si* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *on a*

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\; dx = \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial \eta} v - \frac{\partial v}{\partial \eta} u)\; ds.$$

Remarque : Ces formules restent valables dans les espaces de Sobolev. Plus précisément

- Si $u, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\; dx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\; dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i\; ds \quad \forall\; i = 1, ..., N$$

- Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega v\Delta u\; dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v\; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v\; ds$$

- Si $u, v \in H^2(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\; dx = \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial \eta} v - \frac{\partial v}{\partial \eta} u)\; ds.$$

1.3.5 Identité de Picone

Théorème : ([12, 13]) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors pour tous $u,\ \phi \in C^2(\Omega)$ on a*

$$\operatorname{div}\left[\frac{\phi}{u}\left(u\nabla\phi - \phi\nabla u\right)\right] = \phi\Delta\phi - \frac{\phi^2}{u}\Delta u + u^2\left|\nabla\left(\frac{\phi}{u}\right)\right|^2.$$

Remarque : L'identité de Picone se généralise à la suivante : Pour tous $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, et $u,\ \phi \in C^2(\Omega)$ avec $u > 0$, on a

$$\operatorname{div}\left[\psi\left(\frac{\phi}{u}\right)\left(u\nabla\phi - \phi\nabla u\right)\right] = \psi\left(\frac{\phi}{u}\right)\left(u\Delta\phi - \phi\Delta u\right) + \psi'\left(\frac{\phi}{u}\right)u^2\left|\nabla\left(\frac{\phi}{u}\right)\right|^2.$$

1.3.6 Inégalité de Young

Parmi les inégalités les plus importantes desquelles en résultent de nombreuses propriétés en analyse notamment celles des espaces de Lebesgue, on cite l'inégalité de Young.

Théorème : ([10]) *Pour tous réels positifs a, b, p, q tels que $1/p + 1/q = 1$, on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Corollaire : *Soit a, b, p, q des réels positifs tels que $1/p + 1/q = 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q.$$

Preuve : Dans l'inégalité de Young, remplaçons a par $\varepsilon^{\frac{1}{p}}a$ et b par $\varepsilon^{-\frac{1}{p}}b$ nous obtenons

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q}{q} \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q,$$

il suffit de prendre $C_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{q}{p}}$.

1.3.7 Lemme de Hopf et principes du maximum

Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{R}^N$ et L l'opérateur linéaire du second ordre défini par

$$\forall u \in C^2(\Omega), \forall x \in \Omega, \quad Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x)$$

où a_{ij}, b_i et $c \in L^\infty(\Omega)$ et $A = (a_{ij})$ est symétrique et uniformément définie positive.

Théorème (Principe du maximum faible) : *Supposons Ω borné et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ telle que $Lu \leq 0$ dans Ω, alors :*
i. Si $c \equiv 0$, alors u atteint son maximum dans $\bar{\Omega}$ sur $\partial\Omega$,

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

ii. Si $c \geq 0$, alors u atteint son maximum sur $\partial\Omega$ s'il est positif,

$$\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Théorème (Lemme de Hopf) : *On suppose que Ω est borné et régulier. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ telle que $Lu \leq 0$ dans Ω. Supposons en plus, qu'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $u(x_0) \geq u(x)$ alors :*
i. Si $c \equiv 0$ alors la dérivée normale sortante de u en x_0 est strictement positive,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

ii. Si $c \geq 0$ alors la dérivée normale sortante de u en x_0 est strictement positive si $u(x_0) \geq 0$.

Théorème (Principe du maximum fort) : *Soit $u \in C^2(\Omega)$ telle que $Lu \leq 0$ dans Ω, Ω non nécessairement borné. Alors :*
i. Si $c \equiv 0$ alors u n'admet pas de maximum dans Ω à moins d'être constante.
ii. Si $c \geq 0$ alors u n'admet pas de maximum positif dans Ω à moins d'être constante.

Terminons ces rappels par trois théorèmes importants dans l'approche variationnelle.

1.3.8 Théorème du col

Théorème : ([11]) *Supposons que la fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale, et que :*

- $J(0) = 0$,
- *il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geq a$,*
- *il existe $u_0 \in E$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < a$.*

Alors J admet une valeur critique c telle que $c \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$\Gamma = \{\varphi \in C([0,1], E);\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\}$$

et

$$c = \inf_{\varphi \in \Gamma} \max_{t \in (0,1)} J(\varphi(t))$$

alors c est une valeur critique de J. $\square$

1.3.9 Principe variationnel d'Ekeland

Théorème : ([14]) *Soit (M, d) un espace métrique complet et $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et minorée. S'il existe $\epsilon > 0$ et $\hat{u} \in M$ tels que*

$$\varphi(\hat{u}) \leq \inf_M \varphi + \epsilon.$$

Alors pour tout $\lambda > 0$, il existe $u_\lambda \in M$ tel que

$$\varphi(u_\lambda) \leq \varphi(\hat{u}),$$

$$d(u_\lambda,\ \hat{u}) \leq \lambda$$

et

$$\varphi(u_\lambda) < \varphi(u) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(u_\lambda,\ u) \quad \forall u \neq u_\lambda.$$

Corollaire : *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe* $\hat{v} \in M$ *tel que*

$$\varphi(\hat{v}) \leq \varphi(\hat{u}),$$
$$d(\hat{v}, \hat{u}) \leq \sqrt{\epsilon}$$

et

$$\varphi(\hat{v}) < \varphi(u) + \sqrt{\epsilon} d(\hat{v}, u) \qquad \forall u \neq \hat{v}.$$

1.3.10 Multiplicateurs de Lagrange

Théorème : *Soient* E *un espace de Banach et* $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ *telle que l'ensemble* $S = \{v \in E : \ F(v) = 0\}$ *ne soit pas vide et* $F'(v) \neq 0$ *pour tout* $v \in S$. *Soit* $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ *et* $M = \inf_S J(u)$.
On suppose qu'il existe $u_0 \in S$ *tel que* $M = J(u_0)$, *alors il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Chapitre 2

Spectre de l'opérateur de Laplace et application

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au problème de valeurs propres suivant,

$$(P_{vp}) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné de classe C^1 et $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ est le couple propre.

2.1 Première valeur propre de $-\Delta$

Posons

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 = 1} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2}$$

où

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx.$$

On montre que λ_1 ainsi défini est une valeur propre de $-\Delta$ et que le problème des valeurs propres admet, pour $\lambda = \lambda_1$, des solutions non nulles qui seront des vecteurs propres de $-\Delta$ associés à λ_1.

2.1.1 Propriétés de λ_1

Proposition : ([6]) *La valeur critique λ_1 est strictement positive et il existe $u \geqslant 0$, telle que $\|u\|_2 = 1$ et $\|\nabla u\|_2^2 = \lambda_1$. De plus u est un vecteur propre de $-\Delta$ associé à λ_1, à savoir $u \in H_0^1(\Omega)$ et $-\Delta u = \lambda_1 u$.*

Preuve : a. Montrons d'abord que $\lambda_1 > 0$. Par définition on a $\lambda_1 \geq 0$. Supposons, au contraire, que $\lambda_1 = 0$. Alors il existe une suite (u_n) dans $H_0^1(\Omega)$ telle que $\|u_n\|_2 = 1$ et $\|\nabla u_n\|_2 \to 0$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert, on peut alors extraire de (u_n) une sous-suite notée (u_n) qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers une fonction u. Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte on a $\|u\|_2 = 1$.
La sous-suite (u_n) converge vers u dans $L^2(\Omega)$ et (∇u_n) converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, donc (u_n) converge fortement dans $H^1(\Omega)$. Nous en déduisons que $\nabla u = \lim_{n\to\infty} \nabla u_n = 0$ d'où $u = 0$ car u est nulle sur $\partial\Omega$. Ce qui est en contradiction avec le fait que $\|u\|_2 = 1$. Donc $\lambda_1 > 0$.

b. Soit (u_n) une suite minimisante, ç.-à-d. $\|\nabla u_n\|_2^2 \to \lambda_1$ avec $\|u_n\|_2 = 1$. Cette suite est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc il existe une sous-suite encore notée (u_n) telle que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), \quad u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Nous avons donc $\|u\|_2 = 1$. La semi-continuité inférieure pour la topologie faible de la fonction $v \mapsto \|\nabla v\|_2^2$, nous donne,

$$\lambda_1 \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leqslant \underline{\lim} \|\nabla u_n\|_2^2 = \lambda_1.$$

D'où $\|u\|_2 = 1$ et $\|\nabla u\|_2^2 = \lambda_1$. Et sachant que $\|\nabla |u|\| = \|\nabla u\|$, nous déduisons qu'il existe une solution u positive.

c. Montrons que u vérifie l'équation $-\Delta u = \lambda_1 u$.
Soit u solution du problème variationnel, telle que $\|u\|_2 = 1$. Fixons $\varphi \in D(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $2|t| < \|\varphi\|_2^{-1}$.
On a $u + t\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $\|u + t\varphi\|_2 \neq 0$ sinon $|t| = \|\varphi\|_2^{-1}$.
Par définition de λ_1 nous avons,

$$\int_\Omega |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx \geqslant \lambda_1 \int_\Omega |u + t\varphi|^2 dx.$$

D'où, puisque, $\|\nabla u\|_2^2 = \lambda_1$ on a,

$$2t \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + t^2 \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx \geqslant \lambda_1 (2t \int_\Omega u\varphi dx + t^2 \int_\Omega |\varphi|^2 dx).$$

Divisons par t supposé strictement positif et faisons tendre t vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \geqslant \lambda_1 \int_\Omega u\varphi(x) dx.$$

Les mêmes calculs pour $t < 0$, mènent à l'inégalité,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \leqslant \lambda_1 \int_\Omega u\varphi(x)dx.$$

Ainsi nous avons,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \lambda_1 \int_\Omega u\varphi dx.$$

En faisant une intégration par partie i.e. en utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u dx = \lambda_1 \int_\Omega u\varphi dx.$$

Ce qui donne au sens des distributions,

$$-\Delta u = \lambda_1 u.$$

d. Montrons que λ_1 est la plus petite valeur propre.
Soit $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ un couple propre avec v non identiquement nulle. Donc

$$-\Delta v = \lambda v.$$

Multiplions cette égalité par v, alors par intégration sur Ω et utilisation de la formule de Green nous obtenons,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \lambda \|v\|_2^2.$$

Mais par définition de λ_1 on a

$$\lambda_1 \leq \frac{\|v\|^2}{\|v\|_2^2}$$

d'où

$$\lambda_1 \|v\|_2^2 \leqslant \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \lambda \|v\|_2^2$$

et par suite $\lambda \geqslant \lambda_1$. □

Proposition : ([6]) *Si Ω est un ouvert borné connexe à frontière de classe $C^{1+\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, alors λ_1 est simple et la fonction propre associée u_1 est strictement positive dans Ω, i.e. $u_1(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$.* □

Remarque : Le fait que λ_1 soit simple implique que l'espace propre qui est lui associé est de dimension 1.

2.2 Spectre de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné à frontière lipschitzienne, alors le problème (P_{vp}) admet des solutions, plus exactement on a le théorème suivant.

2.2.1 Suite des valeurs propres

Théorème : ([8]) *Il existe une suite* $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \geq 1$ *la paire* (λ_n, u_n) *est solution du problème* (P_{vp})*. De plus on a,*
$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ *avec* $\lambda_n \to \infty$ *quand* $n \to \infty$ *et* $\{u_n\}$ *est une base orthonormée de l'espace* $L^2(\Omega)$.

2.2.2 Caractérisation des valeurs propres λ_n

Posons pour tout $u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$,

$$A(u) = \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2}$$

avec rappelons-le

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$ admettent la caractérisation variationnelle suivante.
Théorème : ([8]) *Soient* Ω *et* (λ_n, u_n) *comme dans le théorème précédent. Alors on a :*
i. $\lambda_1 = \min\{A(u)\,; u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0\} = A(u_1)$
ii. $\lambda_n = \min\{A(u)\,; u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0, u \perp vect[u_k, k = 1, ..., n-1]\} = A(u_n)$.
iii. *Si* D *est un domaine tel que* $D \subset \Omega$ *alors* $\lambda_1(-\Delta, H_0^1(\Omega)) < \lambda_1(-\Delta, H_0^1(D))$.

2.3 Application

Dans cette application, nous étudions l'existence de solutions positives pour problème elliptique de Dirichlet suivant,

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = W(x) f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ à frontière régulière $\partial\Omega$, $W \in C^\beta(\bar{\Omega}), 0 < \beta < 1$, est une fonction qui change de signe sur Ω, et f est une fonction non-linéaire à croissance super-quadratique en zéro et à l'infini, plus exactement f est telle que,

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{|u|^{q-2}u} = a > 0, \quad 2 < q < 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad N \geqslant 3 \qquad (1)$$

$$\lim_{|u| \to \infty} \frac{f(u)}{|u|^{p-2}u} = 1, \quad 2 < p < 2^*, \quad N \geqslant 3. \qquad (2)$$

Prolongeons f en une fonction impaire pour $u < 0$ et posons

$$F(u) = \int_0^u f(s)\, ds.$$

La fonction F est paire et on a $F(|u|) = F(u)$.
Posons

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega; W(x) > 0\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega; W(x) < 0\}$$

et soit

$$\Omega^0 = \Omega \setminus \overline{(\Omega^+ \cup \Omega^-)}.$$

Notons que puisque W change de signe dans Ω alors $\Omega^+ \neq \emptyset$ et $\Omega^- \neq \emptyset$.
Les solutions du problème (P_1) sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$I(u) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda_1 \|u\|_2^2\right) - \int_\Omega W(x) F(u)\, dx.$$

Le problème sera abordé en utilisant les techniques variationnelles. Notons par $e_j, j \geq 1$ les fonctions propres normalisées ($\|\nabla e_j\|_2 = 1$) associées respectivement aux valeurs propres $\lambda_j, j \geq 1$.

Lemme 1 :

Si la fonction f satisfait les hypothèses (1) et (2) et

$$\int_\Omega W(x) e_1^q(x) dx < 0 \qquad (3)$$

alors $u_0 = 0$ est un minimum local stricte pour la fonctionnelle I.

Preuve :

Décomposons $u \in H_0^1(\Omega)$ en $u = te_1 + v$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\int_\Omega ve_1 dx = 0$. Supposons que $\|\nabla u\|_2 < c_1 = (10\|e_1\|_\infty)^{-1}$, alors $|t| < c_1$. En effet, puisque e_1 et v sont orthogonaux dans $H_0^1(\Omega)$, nous avons

$$u = te_1 + v \Rightarrow \|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla te_1\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 \Rightarrow \|\nabla u\|_2^2 = t^2\|\nabla e_1\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2$$

Comme $\|\nabla e_1\|_2 = 1$ alors $\|\nabla u\|_2^2 = t^2 + \|\nabla v\|_2^2$ et par suite

$$t^2 \leqslant \|\nabla u\|_2^2$$

d'où $|t| \leqslant \|\nabla u\|_2$. Or par hypothèse $\|\nabla u\|_2 < c_1$ d'où

$$|t| < c_1 = \frac{1}{10\|e_1\|_\infty}.$$

Montrons à présent que $I(u) \geq 0$ pour u voisin de 0, avec rappelons le

$$I(u) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_2^2 - \lambda_1\|u\|_2^2\right) - \int_\Omega W(x)F(u)dx.$$

Nous avons d'une part

$$\|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla(te_1 + v)\|_2^2 = \|t\nabla e_1 + \nabla v\|_2^2 = t^2 + \|\nabla v\|_2^2,$$

et d'autre part puisque e_1 et v sont orthogonaux dans $L^2(\Omega)$ nous avons

$$\|u\|_2^2 = \|te_1 + v\|_2^2 = t^2\|e_1\|_2^2 + \|v\|_2^2,$$

et par suite

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_2^2 - \lambda_1\|u\|_2^2 &= t^2 + \|\nabla v\|_2^2 - \lambda_1 t^2\|e_1\|_2^2 - \lambda_1\|v\|_2^2 \\ &= \|\nabla v\|_2^2 - \lambda_1\|v\|_2^2 + t^2(1 - \lambda_1\|e_1\|_2^2).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}-\Delta e_1 = \lambda_1 e_1 &\Rightarrow -\int_\Omega e_1\Delta e_1 dx = \int_\Omega \lambda_1 e_1^2 dx \\ &\Rightarrow \|\nabla e_1\|_2^2 = \lambda_1\|e_1\|_2^2 \Rightarrow 1 = \lambda_1\|e_1\|_2^2\end{aligned}$$

d'où $1 - \lambda_1\|e_1\|_2^2 = 0$ et donc

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda_1\|u\|_2^2 = \|\nabla v\|_2^2 - \lambda_1\|v\|_2^2$$

et

$$I(u) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_2^2 - \lambda_1\|v\|_2^2\right) - \int_\Omega W(x)F(te_1 + v)dx.$$

Puisque $v \neq 0$ et est orthogonal à e_1 alors $\lambda_2 \leq \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\|v\|_2^2}$ d'où

$$\|v\|_2^2 \leq \frac{\|\nabla v\|_2^2}{\lambda_2}$$

et par suite

$$\|\nabla v\|_2^2 - \lambda_1 \|v\|_2^2 \geq \|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \|\nabla v\|_2^2$$

et

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \|\nabla v\|_2^2\right) - \int_\Omega W(x)F(te_1 + v)dx.$$

Remarquons que puisque $a > 0$, $q > 2$ et $\int_\Omega W(x)e_1^q dx < 0$ alors

$$\int_\Omega W(x)F(te_1 + v)dx \leq a(\frac{1}{q} - 1)\,|t|^q \int_\Omega W(x)e_1^q dx +$$

$$\int_\Omega W(x)F(te_1)dx - \int_\Omega W(x)F(te_1)dx + \int_\Omega W(x)F(te_1 + v)dx,$$

et par conséquent

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \|\nabla v\|_2^2 + A|t|^q + R(t, v) \qquad (3')$$

où

$$A = -\frac{a}{q}\int_\Omega W(x)e_1^q dx > 0$$

et R est le reste donné par

$$R(t, v) = \int_\Omega [a|te_1|^q - F(te_1)]dx + \int_\Omega W(x)[F(te_1) - F(te_1 + v)]dx$$

$$= \int_\Omega W(x)[F(te_1) - F(te_1 + v)]dx + o(|t|^{q-\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < 1. \qquad (4)$$

Estimons à présent le terme intégrant dans (4). Nous savons que pour tous v, t, x il existe un nombre $\theta = \theta(v, t, x)$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ tel que,

$$F(te_1(x) + v(x)) - F(te_1(x)) = f(te_1(x) + \theta v(x))v(x). \qquad (5)$$

Des hypothèses (1) et (2), on a les majorations suivantes,

$$\begin{cases} |f(u)| \leq C\,|u|^{q-1} & si \quad |u| \leq 1 \\ |f(u)| \leq C\,|u|^{p-1} & si \quad |u| \geq 1, \end{cases} \qquad (6)$$

où $C > 0$ est une constante positive.
Pour v et t fixés considérons les deux cas suivants.
D'abord si x est tel que $|u(x)| = |te_1(x) + \theta v(x)| \geq 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |te_1(x)| + \theta|v(x)| \geqslant |te_1(x) + \theta v(x)| \geq 1 \\ \Rightarrow \theta|v(x)| \geq 1 - |t|e_1(x). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |t|e_1(x) \leqslant |t| \left\|e_1\right\|_\infty \leq \frac{1}{10 \left\|e_1\right\|_\infty} \left\|e_1\right\|_\infty \\ \Rightarrow |t|e_1(x) \leqslant \frac{1}{10} \\ \Rightarrow 1 \geqslant 10|t|e_1(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta|v(x)| \geq 10|t|e_1 - |t|e_1 \\ \theta|v(x)| \geqslant 9|t|e_1\left(x\right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans la deuxième majoration (6) nous obtenons

$$\begin{aligned} |f(te_1(x) + \theta v(x))v(x)| \leq C\left|te_1(x) + \theta|v(x)|\right|^{p-1}|v(x)| \\ \leq \left(\frac{10}{9}\right)^{p-1} C|v(x)|^p. \qquad (7) \end{aligned}$$

Soit maintenant x tel que $|u(x)| = |te_1(x) + \theta v(x)| \leq 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} |f(te_1(x) + \theta v(x))v(x)| &\leq C\left|te_1(x) + \theta|v(x)|\right|^{q-1}|v(x)| \\ &\leq 2^{q-1}C\left(|te_1|^{q-1} + |v(x)|^{q-1}\right)|v(x)| \\ &= C'\left(|te_1|^{q-1}|v(x)| + |v(x)|^q\right). \end{aligned}$$

Et par application de l'inagalité de Young, nous déduisons que pour $0 < \epsilon < A/2$, il existe $C_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(te_1(x) + \theta v(x))v(x)| \leq \epsilon|te_1|^q + C_\epsilon|v(x)|^q. \qquad (8)$$

En revenant à (4) par (5), (7) et (8) et en utilisant l'inégalité de Poincaré, nous obtenons de (3')

$$I\left(u\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|\nabla v\|_2^2 + A\left|t\right|^q + o(t^{q-\varepsilon}) + O\left(\|\nabla v\|_2^p\right) + O(\|\nabla v\|_2^q).$$

Comme $p, q > 2$, nous concluons que $I\left(u\right) \geq 0$ pour u voisin de 0. Le lemme est démontré.

Lemme 2 :

Supposons qu'en plus de la condition (2), f satisfait les deux hypothèses suivantes :

$$|f'(u)| \leq A\,|u|^{p-2} + B \tag{9}$$

pour des constantes convenables $A, B > 0$.
Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$|f(u)u - pF(u)| \leqslant c_1|u|^2 + c_2. \tag{10}$$

Alors I satisfait (PS).

Preuve :

On considère une suite de Palais-Smale $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, i.e. telle que

$$-M \leq I\left(u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda_1 \|u_n\|_2^2\right) - \int_\Omega W(x)F(u_n)dx \leq M \tag{11}$$

et

$$I'(u_n)\phi = \int_\Omega \left(\nabla u_n.\nabla\phi - \lambda_1 u_n\phi - W(x)f(u_n)\phi\right)dx \longrightarrow 0, \forall\phi \in H_0^1(\Omega). \tag{12}$$

On montre que (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Supposons au contraire que $\|\nabla u_n\|_2 \longrightarrow \infty$ et posons $v_n = u_n \|\nabla u_n\|_2^{-1}$. Alors (v_n) converge faiblement vers $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Vérifions que $v_0 \neq 0$. Remarquons d'abord qu'il existe une suite $(z_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$I'(u_n)\phi = \int_\Omega \nabla z_n.\nabla\phi dx \quad avec \quad \|\nabla z_n\|_2 \longrightarrow 0. \tag{13}$$

En remplaçant ϕ par u_n dans (12) et (13) et en les multipliant par $1/2$, nous obtenons avec (11)

$$\int_\Omega W(x)\left[\frac{1}{2}f(u_n)(u_n) - F(u_n)\right]dx \leq M - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla z_n \nabla u_n dx. \tag{14}$$

De (14), en utilisant (10) nous arrivons à

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega W(x)f(u_n)(u_n)dx \leq C_3 + C_4\|u_n\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla z_n \nabla u_n dx.$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par $\|\nabla u_n\|_2^2$, alors quand n tend vers l'infini, et si $v_0 = 0$ nous obtenons

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega W(x)\frac{f(u_n)u_n}{\|\nabla u_n\|_2^2}dx = 0.$$

En posant $\phi = u_n$ dans (12) et (13) et en divisant par $\|\nabla u_n\|_2^2$ nous obtenons

$$1 = \lambda_1 \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_2^2}{\|\nabla u_n\|_2^2} + \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)u_n}{\|\nabla u_n\|_2^2} dx = 0.$$

C'est une contradiction donc $v_0 \neq 0$. Donc en supposant que (u_n) n'est pas bornée dans $H_0^1(\Omega)$ nous avons

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|v_n\|_2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_2}{\|\nabla u_n\|_2} \neq 0.$$

Divisons (12) par $t_n := \|\nabla u_n\|_2$ et faisons tendre n vers l'infini, nous obtenons

$$\int_\Omega (\nabla v_0 . \nabla \phi - \lambda_1 v_0 \phi)\, dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(t_n^{p-2} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{t_n^{p-1}} \phi dx \right) \quad (15)$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Evaluons l'intégrale du deuxième membre. Pour n assez grand nous avons

$$\frac{f(\|\nabla u_n\|_2 \, v_0)}{\|\nabla u_n\|_2^{p-1}} = |v_0|^{p-2}\, v_0 + o(1).$$

En effet, d'après (2), pour n assez grand i.e pour $t_n = \|\nabla u_n\|_2$ grand nous avons

$$\frac{f(\|\nabla u_n\|_2 \, v_0)}{\|\nabla u_n\|_2^{p-1}} = \frac{f(t_n v_0)}{t_n^{p-1}} = \frac{|t_n v_0|^{p-2}\, t_n v_0}{t_n^{p-1}} + o(1) = |v_0|^{p-2}\, v_0 + o(1).$$

Ceci étant nous écrivons que

$$\int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{t_n^{p-1}} \phi dx = \int_\Omega W(x)\, |v_0|^{p-2}\, v_0 \phi dx + \int_\Omega W(x) \frac{f(t_n v_n) - f(t_n v_0)}{t_n^{p-1}} \phi dx + o(1),$$

en utilisant le théorème des accroissements finis et l'estimation (2) nous montrons que pour n assez grand, la deuxième intégrale dans le second membre est négligeable. Par suite (15) devient

$$\int_\Omega (\nabla v_0 . \nabla \phi - \lambda_1 v_0 \phi)\, dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(t_n^{p-2} \int_\Omega W(x)\, |v_0|^{p-2}\, v_0 \phi dx \right).$$

Comme le premier membre est fini et que t_n tend vers l'infini nous déduisons que

$$\int_{\Omega} W(x) \left| v_0 \right|^{p-2} v_0 \phi dx = 0$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Donc $W \left| v_0 \right|^{p-2} v_0 = 0$ p.p. dans Ω, d'où $v_0 = 0$ p.p. dans $\Omega^+ \cup \Omega^-$, par suite $\mathrm{Supp}(v_0) \subset \Omega^0$. Donc $v_0 \in H_0^1(\Omega^0)$ et

$$\int_{\Omega} \left(\nabla v_0 . \nabla \phi - \lambda_1 v_0 \phi \right) dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega^0).$$

Ceci implique que λ_1 est la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega^0))$ ce qui est faux car $\lambda_1 < \min \sigma(\Omega^0)$ où $\sigma(\Omega^0)$ est le spectre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega^0))$. Ainsi la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

2.3.1 Existence de solutions

Théorème : *Supposons que les hypothèses* (1), (2), (3) *et* (9) *sont vérifiées. Si en plus la condition* (10) *est satisfaite, alors le problème* (P_1) *admet une solution positive.*

Preuve : Commençons par remarquer que si $v \in H_0^1(\Omega)$ à support dans Ω^+ (ou $v \in C_0^\infty(\Omega^+)$) alors

$$I(tv) \longrightarrow -\infty \quad \textit{quand} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Et d'après les lemmes précédents et cette remarque la valeur

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) > 0$$

où

$$\Gamma = \{ \gamma \in C([0,1]; H_0^1(\Omega)) : \; \gamma(0) = 0, \; I(\gamma(1)) < 0 \}$$

définit une valeur critique pour I. La positivité pour au moins un des points critiques correspondants découle du fait que si $\gamma \in \Gamma$ alors $|\gamma| \in \Gamma$ et

$$I(\gamma(t)) = I(|\gamma(t)|) \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0,1].$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\gamma_n \in \Gamma$ avec $\gamma_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$, tel que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) < c + \frac{1}{n}.$$

Et le principe d'Ekeland assure l'existence d'un $\gamma_n^* \in \Gamma$ ayant les trois propriétés suivantes :

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_n^*(t)) \leqslant \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_n(t)) < c + \frac{1}{n}$$

$$\max_{t\in[0,1]} \|\gamma_n(t) - \gamma_n^*(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\textit{il existe} \quad t_n \in [0,1] \quad \textit{tel que} \quad v_n = \gamma_n^*(t_n) \quad \textit{vérifiant} :$$

$$I(v_n) = \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_n^*(t)) \quad \textit{et} \quad \|I'(v_n)\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi il existe une sous-suite notée aussi (v_n) convergeant fortement vers $v \in H_0^1(\Omega)$. De la deuxième propriété nous avons aussi $\gamma_n(t) \longrightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$, et comme $\gamma_n(t) \geq 0$ alors $v \geq 0$ p.p dans Ω. Puisque $v \neq 0$ est solution du problème (P_1) nous concluons par le principe de maximum fort que $v > 0$ dans Ω.

Chapitre 3

Résultats d'existence de solutions pour un problème elliptique semi-linéaire contenant un terme indéfini

Dans ce chapitre nous étudions l'existence de solutions positives pour le problème elliptique avec condition au bord de Neumann suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p & \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière et $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial\nu}$ est la dérivée par rapport à la normale unitaire extérieure ν. Les fonctions a et m sont continues sur Ω. La fonction a est supposée à signe non constant i.e on suppose qu'elle change de signe sur Ω et donc les ensembles

$$\Omega^+ := \{x \in \Omega; \quad a(x) > 0\}\,, \quad \Omega^- := \{x \in \Omega; \quad a(x) < 0\}$$

sont de mesure non nulle. Enfin l'exposant p est tel que,

$$1 < p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1 \quad si \quad N \geq 3 \qquad et \qquad p > 1 \quad si \quad N = 1, 2. \quad (\star)$$

3.1 Résultat d'existence de solutions dans le cas $m \equiv 0$

On s'intéresse au problème particulier

$$(P_0)\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p & \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

3.1.1 Existence de solutions

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions pour le problème (P_0).

Théorème 1 : *Le problème (P_0) admet des solutions positives si et seulement si*

$$a \quad \textit{change de signe dans} \quad \Omega \qquad\qquad (1)$$

et

$$\int_\Omega a(x)dx < 0. \qquad\qquad (2)$$

Preuve : Les conditions sont nécessaires. En effet soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution positive de l'équation

$$-\Delta u = a(x)u^p, \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad\qquad (3)$$

telle que $\partial_v u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$.
Remarquons d'abord que, d'après le principe de maximum de Hopf, nous avons $u > 0$ dans $\bar{\Omega}$.
De l'équation (3) nous avons

$$\int_\Omega a(x)dx = -\int_\Omega u^{-p}\Delta u dx,$$

et en intégrant par parties nous obtenons

$$\int_\Omega a(x)dx = -p\int_\Omega |\nabla u|^2 u^{-p-1} < 0.$$

C'est la condition (2). Pour la condition (1), par la formule de Green et puisque $\partial_\nu u = 0$ nous obtenons de (3)

$$0 = -\int_\Omega \Delta u dx = \int_\Omega a(x)u^p dx$$

comme $u^p > 0$ et a est non nulle alors a change de signe.

Les conditions sont suffisantes. Pour prouver l'existence de solutions positives sous (1) et (2), considérons le problème variationnel suivant.

$$\max\{\int_\Omega a(x)|u|^{p+1}dx; \quad u \in S\} \qquad\qquad (6)$$

où

$$S := \{u \in H^1(\Omega); \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 1\}.$$

La proposition suivante complète la démonstration du théorème.

Proposition 1 : *Sous les conditions* (1) *et* (2), *le maximum défini par* (6) *est fini et est atteint par une fonction* $u > 0$ *dans* $\bar{\Omega}$. *De plus il existe* $t > 0$ *tel que* $w = tu$ *est une solution de* (P_0).

Preuve : Posons

$$I(u) = \int_\Omega a(x)|u|^{p+1}dx.$$

Décomposons $H^1(\Omega)$ sous la forme :

$$H^1(\Omega) = \mathbb{R} \oplus V,$$

avec

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \int_\Omega vdx = 0\}.$$

Ainsi tout $u \in H^1(\Omega)$, s'écrira de la manière suivante :

$$u = t + v$$

où

$$t = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx \quad \text{et} \quad v = u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx,$$

$|\Omega|$ désigne la mesure de Ω.
Posons $M = \sup_{u \in S} I(u)$, alors $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On a $M > 0$. En effet, en prenant $w \in S$ telle que support$(w) \subset \Omega^+$ nous voyons que $I(w) > 0$ et par conséquent $M > 0$.
Soit maintenant (u_n) une suite maximisante, c'est à dire $u_n \in S$ et $(I(u_n))$ converge vers M avec $M \in]0, \quad +\infty]$.
Écrivons selon la décomplosition précédente $u_n = t_n + v_n$.
Nous avons

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = 1$$

et puisque l'injection $V \subset L^{p+1}(\Omega)$ est compacte car $1 < p < 2^* - 1$ compte tenu de la condition $(\star)$, nous pouvons supposer que (v_n) converge faiblement vers v dans $H^1(\Omega)$, fortement dans $L^{p+1}(\Omega)$ et p.p. dans Ω.
Montrons que $(|t_n|)$ est bornée. Supposons au contraire que, $|t_n| \to \infty$. Alors, $|t_n^{-1}|v_n \to 0$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ et

$$\int_\Omega a(x)\left|1 + |t_n^{-1}|v_n\right|^{p+1} dx \to \int_\Omega a(x)dx < 0$$

d'après (2).

Ainsi

$$I(u_n) = |t_n|^{p+1} \int_\Omega a(x) \left|1 + |t_n^{-1}| v_n\right|^{p+1} dx \to -\infty$$

ce qui est absurde car $I(u_n) \longrightarrow M > 0$. Par conséquent, (t_n) est bornée et nous pouvons supposer qu'elle converge.
Nous concluons que (u_n) converge vers u faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortemant dans $L^{p+1}(\Omega)$. D'où

$$0 < I(u) = M < +\infty.$$

De plus la convergence faible de (u_n) vers u dans $H^1(\Omega)$ implique que

$$0 < \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \lim_{n \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx = 1.$$

Soit $\alpha \geq 1$ tel que $\alpha u \in S$. Alors

$$I(\alpha u) = \alpha^{p+1} I(u) = \alpha^{p+1} M.$$

Or $I(\alpha u) \leq M$ ainsi puisque $\alpha \geq 1$ nous obtenons $\alpha = 1$ et par suite $u \in S$ et est solution du problème variationnel (6).
Pour la positivité de u remarquons qu'on pouvait prendre $(|u_n|)$ au lieu de (u_n) puisque la suite $(|u_n|)$ possède les mêmes propriétés que la suite maximisante (u_n), nous déduisons donc que $u \geq 0, u \not\equiv 0$ dans Ω.
Le problème (6) est un problème de maximisation avec contraintes, il existe alors un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} -\lambda \Delta u = a(x) u^p, \quad u \geq 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Multiplions l'équation par u et intégrons sur Ω, par la formule de Green nous obtenons

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = I(u).$$

Or

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 1 \quad \text{et} \quad I(u) = M$$

donc $\lambda = M$, par suite $\lambda > 0$ et le principe du maximum et le lemme de Hopf impliquent que $u > 0$ dans $\bar{\Omega}$ car $u \not\equiv 0$.

Montrons à présent qu'il existe $t > 0$ tel que $w = tu$ soit solution du problème (P_0). La fonction tu est solution du problème (P_0) si

$$-\Delta(tu) = a(x)(tu)^p$$

i.e.

$$-\Delta u = a(x)t^{p-1}u^p.$$

Et puisque $-\Delta u = \lambda^{-1}a(x)u^p$, nous déduisons que

$$\lambda^{-1}a(x)u^p = a(x)t^{p-1}u^p$$

et par suite $\lambda^{-1} = t^{p-1}$ ce qui donne

$$t = \lambda^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Finalement $w = \lambda^{\frac{-1}{p-1}}u$ est une solution positive de (P_0).

Remarque : Notons que le Théorème 1 peut-être démontré en utilisant le lemme du col (Mountain-Pass lemma). En effet, en considérant la fonctionnelle J définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} a(x) |u|^{p+1} \right) dx,$$

on démontre la proposition suivante.

Proposition : *Sous les hyphothèses* (1) *et* (2)*, la fonctionnelle J est de classe C^1, satisfait la condition de Palais-Smale et vérifie les propriétés géométriques suivantes :*
i. $\exists \rho, \delta > 0$ *tels que* $\forall u \in H^1(\Omega)$*, avec* $\|u\| = \rho$ *on a* $J(u) \geq \delta$.
ii. $\exists e \in H^1(\Omega)$ *tel que* $\|e\| < \rho, \quad e \geq 0$ *vérifiant* $J(e) < 0 = J(0)$.
D'après le lemme du col, il existe alors un point critique $u \neq 0$ de J. En plus il existe un point critique de J qui est solution positive du problème (P_0).

3.2 Résultat d'existence de solutions dans le cas $m \not\equiv 0$

Nous nous limitons dans ce paragraphe au cas $m = q - \tau$ où q est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ et τ est un paramètre réel.

Nous considérons ainsi le problème suivant :

$$(P_\tau) \begin{cases} -\Delta u + (q(x) - \tau)\, u = a(x)u^p, \quad u > 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

3.2.1 Conditions nécessaires d'existence de solutions

Nous supposons que l'opérateur linéaire $L \equiv -\Delta + q(x)$ avec les conditions de Neumann admet 0 comme valeur propre principale, i.e. nous supposons que la fonction q satisfait l'hypothèse suivante :
Il existe $\phi > 0$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta\phi + q(x)\phi = 0, & \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_\nu \phi = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Théorème 2 : *Sous l'hypothèse* (7), *si le problème* (P_τ) *admet une solution alors*

i. $\displaystyle\int_\Omega a(x)\phi^{p+1}(x)dx < 0, \quad \text{si} \quad \tau > 0$

ii. $\Omega^+ \neq \emptyset \quad \text{si} \quad \tau < 0.$

Si $\tau = 0$ *alors les conditions*

$$\int_\Omega a(x)\phi^{p+1}(x)dx < 0 \quad \text{et} \quad \Omega^+,\ \Omega^- \neq \emptyset$$

sont des conditions de solvabilité du problème (P_τ).

Preuve : La preuve est basée sur l'identité différentielle de Picone : Pour tous $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $u,\ \phi$ de classe C^2 avec $u > 0$, on a

$$\operatorname{div}\left[\psi\left(\frac{\phi}{u}\right)(u\nabla\phi - \phi\nabla u)\right] = \psi\left(\frac{\phi}{u}\right)(u\Delta\phi - \phi\Delta u) + \psi'\left(\frac{\phi}{u}\right)u^2\left|\nabla\left(\frac{\phi}{u}\right)\right|^2.$$

Si u est une solution de (P_τ) alors d'après le lemme de Hopf, $u > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Multiplions l'équation (7) par $u^{-\gamma}\phi^{1+\gamma}$ et (P_τ) par $u^{1-\gamma}\phi^\gamma$ et soustrayons, les termes en $q(x)$ s'éliminent et nous obtenons,

$$u^{1-\gamma}\phi^\gamma\Delta\phi - u^{-\gamma}\phi^{1+\gamma}\Delta u = a(x)u^{p-\gamma}\phi^{1+\gamma} + \tau u^{1-\gamma}\phi^{1+\gamma}. \qquad (8)$$

Remarquons que le premier membre de (8) s'écrit sous la forme

$$u^{1-\gamma}\phi^\gamma\Delta\phi - u^{-\gamma}\phi^{1+\gamma}\Delta u = \left(\frac{\phi}{u}\right)^\gamma(u\Delta\phi - \phi\Delta u)$$

Par application de l'identité de Picone avec $\psi(t) = t^\gamma$,$\gamma \geq 0$, l'égalité (8) devient

$$\operatorname{div}\left[\left(\frac{\phi}{u}\right)^\gamma(u\nabla\phi - \phi\nabla u)\right] - \gamma\left(\frac{\phi}{u}\right)^{\gamma-1}u^2\left|\nabla\left(\frac{\phi}{u}\right)\right|^2 = a(x)u^{p-\gamma}\phi^{1+\gamma} + \tau u^{1-\gamma}\phi^{1+\gamma}. \quad (9)$$

En intégrant sur Ω les deux membres de (9), nous obtenons d'après la formule de la divergence

$$\int_\Omega a(x)u^{p-\gamma}\phi^{1+\gamma}dx = -\gamma\int_\Omega(\frac{\phi}{u})^{\gamma-1}u^2|\nabla(\frac{\phi}{u})|^2dx - \tau\int_\Omega u^{1-\gamma}\phi^{1+\gamma}dx. \qquad (10)$$

L'égalité (10) est valable pour tout $\gamma \geq 0$. Pour $\gamma = p$ nous aurons

$$\int_\Omega a(x)\phi^{1+\gamma}dx = -\gamma\int_\Omega(\frac{\phi}{u})^{\gamma-1}u^2|\nabla(\frac{\phi}{u})|^2dx - \tau\int_\Omega u^{1-\gamma}\phi^{1+\gamma}dx,$$

et si $\tau > 0$ nous déduisons, puisque le second membre est négatif, que

$$\int_\Omega a(x)\phi^{1+\gamma}dx < 0.$$

C'est le point (i) du Théorème 2.
En prenant $\gamma = 0$ dans (10) nous arrivons à

$$\int_\Omega a(x)u^p\phi dx = -\tau\int_\Omega u\phi dx.$$

Si $\tau < 0$ alors le second membre est positif car $u, \phi > 0$ dans $\bar{\Omega}$, et la positivité du premier membre implique que la fonction a est positive dans une partie de Ω, d'où $\Omega^+ \neq \emptyset$. C'est le point (ii).
Examinons maintenant le cas $\tau = 0$. Si $\tau = 0$ l'égalité (10) nous donne

$$\int_\Omega a(x) u^{p-\gamma} \phi^{1+\gamma} dx = -\gamma \int_\Omega (\frac{\phi}{u})^{\gamma-1} u^2 |\nabla(\frac{\phi}{u})|^2 dx. \qquad (11)$$

L'intégrale du second membre de (11) est strictement positive sinon $a \equiv 0$ car $u, \phi > 0$ sur Ω.
En prenant $\gamma = p$ nous obtenons

$$\int_\Omega a(x) \phi^{1+\gamma} dx < 0,$$

et si $\gamma = 0$ dans (11) alors

$$\int_\Omega a(x) u^p \phi dx = 0$$

et donc a change de signe dans Ω d'où $\Omega^+, \ \Omega^- \neq \emptyset$.
Ceci termine la démonstration du Théorème 2.

3.2.2 Théorème d'existence de solutions

Nous allons voir que les conditions nécessaires d'existence de solutions citées dans le Théorème 2 sont en fait suffisantes pour assurer, sous certaines hypothèses, l'existence d'au moins une solution du problème (P_τ).

Théorème 3 : Supposons que ;

i. $\Omega^+ \neq \emptyset, \quad \Omega^- \neq \emptyset$

ii. $\displaystyle\int_\Omega a(x) \phi^{p+1} dx < 0.$

Alors, il existe $\tau^* > 0$ tel que le problème (P_τ) admet une solution pour tout $\tau \in [0, \ \tau^*[$, et n'a aucune solution pour $\tau > \tau^*$.

Preuve : La preuve de ce théorème est divisée en trois étapes :

1. Pour les grandes valeurs de τ, (P_τ) n'a pas de solution.
2. Si pour une valeur $\tau' > 0$ le problème $(P_{\tau'})$ admet une solution alors (P_τ) admet une solution pour tout τ tel que $0 < \tau \leqslant \tau'$.

3. Pour les valeurs suffisamment petites de $\tau \geq 0$ le problème (P_τ) a une solution.

Commençons par le premier point.
Lemme 1 : *Si le réel $\tau > 0$ est assez grand alors (P_τ) n'admet pas de solution.*
Preuve : Soit $B_r \subset \Omega^+$ une boule ouverte de rayon $r > 0$, et soit λ_1 la première valeur propre de $(-\Delta,\ H_0^1(B_r))$ et ψ la fonction propre associée. Multiplions (P_τ) par ψ et intégrons sur B_r, nous obtenons

$$\int_{B_r} [(-\Delta u)\,\psi + (q(x) - \tau)\,u\psi]\,dx = \int_{B_r} a(x)u^p\psi dx,$$

comme

$$-\int_{B_r} \psi\Delta u dx = -\int_{B_r} u\Delta\psi dx = \int_{B_r} \lambda_1 u\psi dx$$

nous déduisons que

$$\int_{B_r} (\lambda_1 + q(x) - \tau)\,u\psi dx = \int_{B_r} a(x)u^p\psi dx.$$

Le second membre étant positif donc $\lambda_1 + q(x) - \tau > 0$ sur B_r car $u\psi > 0$ ainsi

$$\tau < \lambda_1 + \|q\|_\infty\,.$$

Par conséquent le problème n'admet pas de solution pour les valeurs assez grandes de τ.

Pour le deuxième point nous avons le lemme suivant.
Lemme 2 : *Supposons que pour un certain $\tau' > 0$ le problème $(P_{\tau'})$ admet une solution w. Alors pour tout τ tel que $0 < \tau \leq \tau'$, (P_τ) possède une solution.*

Preuve : Pour $0 \leq \tau < \tau'$, la fonction w fournit est une sur-solution de (P_τ). En effet, puisque $q(x) - \tau \geq q(x) - \tau'$ et $w > 0$ nous écrivons

$$-\Delta w + (q(x) - \tau)\,w \geq -\Delta w + (q(x) - \tau')\,w = a(x)w^p.$$

Montrons que pour $\epsilon > 0$ assez petit $\epsilon\phi$ est une sous-solution de (P_τ), où ϕ est la fonction vérifiant (7). Soit $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que $0 < \epsilon\phi < w$. On a $\phi > 0$ sur $\bar{\Omega}$ et

$$-\Delta\,(\epsilon\phi) + (q(x) - \tau)\,\epsilon\phi = \epsilon\,(-\Delta\phi + q(x)\phi) - \tau\epsilon\phi = -\tau\epsilon\phi < 0,$$

d'après (7). Ainsi en choisissant convenablement ϵ assez petit nous obtenons

$$-\Delta\,(\epsilon\phi) + (q(x) - \tau)\,\epsilon\phi < a(x)\,(\epsilon\phi)^p\,,$$

et par suite $\epsilon\phi$ sera une sous-solution de (P_τ). Et par la théorie de sous et sur-solutions nous déduisons que (P_τ) admet pour tout $0 < \tau \leq \tau'$ une solution u telle que $\epsilon\phi < u < w$.

Lemme 3 : *Il existe $\tau_1 > 0$ tel que pour tout τ, $0 \leqslant \tau \leq \tau_1$, le problème (P_τ) a une solution.*

Preuve : Considérons le problème variationnel suivant :

$$\max\left\{\int_\Omega a(x)\,|u|^{p+1}\,;\ u \in B_\tau\right\} \qquad (12)$$

où

$$B_\tau = \left\{u \in H^1(\Omega); \quad N_\tau\,(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 + (q(x) - \tau)\,u^2 dx \leq 1\right\}.$$

On notera

$$S_\tau = \left\{u \in H^1(\Omega);\ N_\tau(u) = 1\right\}.$$

La démonstration du lemme 3, découle de la proposition suivante.

Proposition 2 : *Si les hypothèses* (i) *et* (ii) *du Théorème 3 sont satisfaites, alors il existe $\tau_1 > 0$ tel que pour tout $\tau \in [0, \tau_1]$, le problème variationnel* (12) *admet une solution $u \geqslant 0$, $u \neq 0$. De plus, cette solution u est sur S_τ, et le maximum dans* (12) *est positif.*

La démonstration est similaire à celle de la proposition 1 du paragraphe 3.3.1.

Revenons à la démonstration du lemme 3. Le problème (12) s'écrit sous la forme

$$\max\left\{I(v);\ N_\tau(v) \leq 1\right\}$$

où

$$I(v) = \int_\Omega a(x)|v|^{p+1}dx.$$

Soit u la solution de (P_τ) assurée par la proposition.
Montrons que $N'_\tau\,(u) \neq 0$. Supposons au contraire que $N'_\tau\,(u) = 0$.
Alors u serait solution du problème

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u + (q(x) - \tau)\,u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \qquad (13)$$

Puisque $u \geq 0$ et $u \not\equiv 0$, le principe du maximum entraine que $u > 0$, chose qui n'est garantie que si $\tau = 0$, et par suite de (13) et (7) nous déduisons que $u = t\phi$ pour un certain $t > 0$. En remplaçant nous trouvons

$$I(u) = I(t\phi) = t^{p+1} \int_{\Omega} a(x)\phi^{p+1} dx,$$

nous déduisons d'après la condition (ii) du Théorème 2 que $I(u) < 0$, ce qui est absurde car $I(u) > 0$. Donc $N'_{\tau}(u) \neq 0$. Il existe alors un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda N'_{\tau}(u) = I'(u)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} 2\lambda\left(-\Delta u + (q(x) - \tau)\, u\right) = (p+1)a(x)u^p & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

En posant $\alpha = 2\lambda/(p+1)$ ce problème s'écrit,

$$\begin{cases} \alpha\left(-\Delta u + (q(x) - \tau)\, u\right) = a(x)u^p & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{14}$$

Multiplions (14) par u et intégrons sur Ω, nous obtenons

$$\alpha N_{\tau}(u) = I(u),$$

comme $u \in S_{\tau}$ d'après la proposition 2, alors $N_{\tau}(u) = 1$ et par suite

$$\alpha = I(u),$$

donc $\alpha > 0$, et

$$v = \alpha^{-\frac{1}{p-1}} u$$

est une solution du problème (P_{τ}).

Bibliographie

[1] Alama S., Tarantello G. ; *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities.* Calc. Var. 1 (1993) 439-475.

[2] Bandle C.,Pozio M. A., Tesei A. ; *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear Neumann problems.* Math. Z. 199 (1988) 257-278.

[3] Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. ; *Variational methods for indefinite homogeneous elliptic problems.* NoDEA 2 (1995) 553-572.

[4] H. Brézis ; Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications. Masson, 1983.

[5] Crandall M., Rabinowitz P. ; *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability.* Arch. Ration. Mech. Anal. 52 (1973) 243-254.

[6] Demengel F., Demengel G. ; Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 2012.

[7] Escobar J. F., Schoen R. M. ; *Conformal metrics with prescribed scalar curvature.* Invent. Math. 86 (1986) 161-180.

[8] Evans L. C, Partial differential equations. Graduate studies in mathematics. 19 AMS, 2010.

[9] Fleckinger-Pellé J. ; *Asymptotics of eigenvalues for some "non-definite" problems.* Lect. Notes Math. 1151 (1985) 148-156.

[10] Gilbarg D., Trudinger N. S ; Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, 2001.

[11] O. Kavian ; Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques. Springer-Verlag, 2010.

[12] Kreith K. ; *Picone's identity and generalizations.* Rendiconti di Matematica. 8 (1975) 251 - 262.

[13] Picone M. ; *sui valori eccezionali di un parametro da cui depende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine.* Ann. Scuola Norm. Piza. 11 (1910) 1-144.

[14] Struwe M. ; Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, 2010.