République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE de Master

Spécialité : Equations aux dérivées partielles et applications

Présenté par

Herir Yasmine

Etude de l'existence de solutions pour des problèmes aux limites avec Laplacien

Mémoire dirigé par Madame Yassamina Tabet Zatla

soutenu le 13/07/2021 devant le jury composé de :

M^{me}. N. Daoudi-Merzagui	U.A.B.B Tlemcen	**Président**
M^{me}. Y. Nasri	U.A.B.B Tlemcen	**Examinateur**
M^{me}. Y. Tabet Zatla	U.A.B.B Tlemcen	**Encadreur**

Année universitaire : 2020-2021

Je dédie ce travail à la mémoire de mon très cher père Mahi, tu as été et tu resteras toujours le modèle et le repère essentiel de mon existence. Je ne donnerai pas aux mots le droit d'exprimer mon amour éternel. Que Dieu bénisse ton âme.
A ma très chère mère Malika. Quoi que je dise ou que je fasse, ta présence à mes cotés à toujours été la source de ma force.
Aux meilleures des soeurs du monde, Hanane, Bouchra et Hadjer pour leurs encouragements permanents et leur soutien moral.
A toute la famille.
A tous les amis.

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu Allah qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour leur confiance, leurs sacrifices, leur amour et leur soutien moral et matériel.

Mes remerciements vont à mon encadreur Madame Tabet Zatla Yassamina. Elle m'a fait l'honneur d'accepter de diriger mon mémoire, elle a toujours été présente pour m'aider et m'orienter. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

J'adresse également mes sincères remerciements à Madame Merzagui-Daoudi Naima pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Mes vifs remerciements vont aussi à Madame Nasri Yasmina pour avoir accepté d'éxaminer mon travail.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons quelques résultats d'existence de solutions pour un problème aux limites de type Dirichlet associé à une équation elliptique. L'objectif de notre travail est de déterminer des conditions suffisantes sur la non linéarité permettant la solvabilité de ces problèmes. Nous nous sommes intéréssées aux solutions positives et aux solutions symétriques radiales. Notre approche est basée sur l'application d'une des variantes du théorème de Krasnoselskii.

Mots-clés : Théorème de Krasnoselskii, cône, solution positive, fonction de Green, solution radiale symétrique, inégalité d'Harnack.

Abstract

In this thesis we present some existence results of solutions for a Dirichlet boundary value problems associated to an elliptic equation. The aim of our work is to find sufficient conditions on the nonlinearity for the solvability of these problems. We are interested to positive solutions and symmetric radial solutions. Our approach is based on the application of one variant of Krasnoselskii theorem.

Keywords : Krasnoselskii theorem, cone, positive solution, Green's function, symmetric radial solution, Harnack's inequality.

ملخص

في هذه المذكرة، سنقدم بعض النتائج لوجود حلول موجبة لمشكلة حدودية من نوع ديريشليت لمعادلة اهليجية. الهدف من عملنا هو تحديد الشروط الكافية على اللاخطية التي تسمح بتسوية هذه المشاكل. نحن نهتم بالحلول الإيجابية و الحلول المتماثلة الإشعاعية. يعتمد نهجنا على تطبيق أحد متغيرات نظرية كراسنوسيلسكي.

الكلمات المفتاحية : نظرية كراسنوسيلسكي ، مخروط ، حل إيجابي ، دالة جرين ، الحل الشعاعي المتماثل ، متباينة هارناك .

Notations

$\mathbb{R}^n$: Espace euclidien de dimension n.

I : l'intervalle $[0,1]$.

$\overline{\Omega}$: Fermeture de Ω.

$\partial\Omega$: La frontière de Ω.

$V \subset\subset U$: $V \subset \overline{V} \subset U$ tel que $\overline{V}$ est compact.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$: Gradient de u.

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$: Le laplacien de u.

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$

$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$: Espace des fonctions de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$..

$C^2(\Omega, \mathbb{R})$: Espace des fonctions de classe C^2 sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: Espace des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$..

$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$: Espace des fonctions infiniment dérivables à support compact.

$\mathbb{W}_0^{k,2}(0,1) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(0,1), D^\alpha u \in \mathbb{L}^2(0,1), \forall \alpha \ \ telque \ \ |\alpha| \leq k \right\}$

$H_0^1(0,1)$: $W_0^{k,2}(0,1)$ (Espace de Sobolev avec trace nulle).

Abréviations

EDO Equations différentielles ordinaires.

EDP Equations aux dérivées partielles.

Table des matières

Introduction

Les chercheurs se sont interessés à la mathématique des équations aux dérivées partielles (EDP) dès le XVIIème siècle comme entémoignent les nombreux travaux de cette époque, ces équations apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes. On dénombre ainsi une grande variété de modèles physiques introduits dans les travaux de Cauchy, d'Alembert, Euler, Hamilton, Jacobi, Lagrange, Laplace,.. etc. Avant que les travaux de Riemann, Poincaré, Hilbert ne viennent enrichir ce domaine de recherche au milieu du XIXème siècle. A partir de là, les EDP gagnent leur titre de noblesse permettant, de répondre aux interrogations posées par les scientifiques de diverses spécialisations.

Le champ d'application des équations aux dérivées partielles non linéaires est assez large. Elles sont présentes dans les sciences appliquées : Physique, Chimie, et Biologie (voir par exemple [29]). L'un des principaux domaines pour le développement des EDP non linéaires est l'étude de la propagation des ondes. Viennent ensuite les équations liées aux phénomènes chimiques et biologiques, ainsi que les équations liées à la mécanique des solides, la dynamique des fluides, l'acoustique, l'optique non linéaire, la physique des plasmas, la théorie quantique des champs et l'ingénierie.
Les trois classes d'EDP (elliptiques, hyperboliques et paraboliques)(voir [8], [10], [37]), servent à analyser et à comprendre certains phénomenes naturels. Par exemple l'équation de la chaleur (parabolique) modélise des phénomènes de diffusion de la chaleur ou de la matière, ou encore d'une charge électrique. L'équation des ondes (hyperbolique) modélise des phénomènes de propagation,

comme celle du son ou de la lumière. On note aussi parmi les problèmes qui sont modélisés par des EDP non linéaires, le problème elliptique associé à l'équation de Poisson appelée aussi équation de Laplace soumise à des conditions aux limites de type Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

Cette équation intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et de ses applications. En dimension 2, il s'agit de l'équation de la membrane élastique où f représente une densité volumique de forces et u représente le déplacement vertical d'une membrane qui occupe la position $\overline{\Omega}$ au repos. La condition limite $u = 0$ sur $\partial\Omega$ signifie que la membrane est fixée sur le bord. Plus généralement, le problème (0.1) intervient dans les équations relatives au potentiel newtonien.

Sur de nombreux points les équations aux dérivées partielles semblent généraliser au contexte multidimensionnel les équations différentielles ordinaires (EDO) qui elles aussi sont un monument des mathématiques, elles apparaissent dans presque tous les domaines de la science et de la technique (voir [1] [11], [16], [34], [41]). Par exemple, le problème aux limites à trois points associé à l'équation différentielle

$$u'' + f(t, u(t)) = 0, \; 0 < t < 1,$$

découle de la modélisation du flux thermique (voir [23]).

Ce type de problème se pose dans l'étude des états d'équilibre d'une barre chauffée d'une longueur égale à 1. Dans ce cas, deux contrôleurs en $t = 0$ et $t = 1$, ajoutent ou suppriment la chaleur selon les températures détectées par deux capteurs en $t = \xi$ et $t = \eta$.

Les mathématiciens se posent naturellement des questions liées essentiellement à l'existence des solutions ayant une certaine régularité mathématique et un certain sens physique. Ces différentes situations conduisent à des problèmes

riches et intéressants. Pour répondre à certaines de ces questions mathématiques, il faut s'en remettre à certains outils de base tels que les théorèmes de point fixe, le degré topologique, les méthodes variationnelles et les méthodes numériques.
La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude d'existence des solutions, en particulier des solutions positives puisque ce sont les seules qui peuvent être utilisées dans la pratique car correspondent à des paramètres utilisés dans différentes lois de la physique (la densité, la température, etc...). Pour toutes ces raisons, la théorie de point fixe apparait comme une branche cardinale de l'analyse non linéaire. (voir [2], [42], [21], [26], [20]).

Le concept de la méthode du point fixe a été prouvé en premier lieu, par Banach en 1922 puis développé par plusieurs mathématiciens dont Brouwer et Schauder en 1930 et Krasnoselskii en 1955. Le théorème de Krasnoselskii et ses généralisations ont été appliqués avec succès pour l'étude des problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles ordinaires ou à des équations aux dérivées partielles. Il est utilisé non seulement pour montrer l'existence et la multiplicité de solutions, mais aussi pour les localiser dans un anneau conique ou dans d'autres domaines de ce type. Une littérature riche a été produite sur ce sujet(voir par exemple [28]). Krasnoselskii lui même a appliqué son théorème pour l'étude des solutions périodiques d'un système d'équations différentielles ordinaires. La version la plus utilisée du théorème de Krasnoselskii est celle dans un cône. Elle se présente en deux parties : la première dite forme compressive a beaucoup de ressemblance avec les théorèmes de Brouwer et Schauder tandis que la deuxième partie, dite expansive, complète la première. Il existe une autre variante du théorème de krasnoselskii : celle dans un double cône. Cette version n'a été largement explorée que récemment et seulement pour des problèmes aux limites associés à des équations différentielles (voir [32], [12]), et à notre connaissance jamais utilisée pour les équations aux dérivées partielles.

La méthode du point fixe est basée sur le théorème de point fixe qui a la formulation suivante : $T : X \to X$ tel que X un espace de Banach et T un opérateur vérifiant certaines hypothèses spécifiques (continuité, compacité, contraction), alors T admet un point fixe dans X. Dans ce travail, nous montrons l'existence de solutions positives pour des problèmes de Dirichlet de la forme :

$$\begin{cases} Lu = f(t,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0. & \text{sur} \partial\Omega \end{cases}$$

où L un opérateur différentiel .

Notre approche est basée sur l'application du théorème de compression-expansion de Krasnoselskii. Ce théorème est le plus souvent utilisé pour des problèmes aux limites associés à des équations différentielles (voir [40], [30], [35], [17], [25]). Récemment, il a été mis à contribution dans le cas des équations aux dérivées partielles(voir [38], [33], [39]). Ces dernières peuvent être réduites en équations différentielles ordinaires dans le cas où les solutions recherchées sont radiales(voir [18], [31], [15]).

Ce mémoire est constitué de deux chapitres. Dans le premier nous introduisons quelques définitions et notations qui seront utilisées dans ce manuscrit et nous présentons aussi quelques théorèmes de point fixe. Dans le deuxième chapitre, nous aborderons quelques applications du théorème de Krasnoselskii dans un cône et nous discutons l'existence de solution positive et de solution symétrique radiale, en se basant sur les documents de références (voir [9], [24], [4]).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions essentielles au développement de notre travail. Nous rappelons aussi certaines définitions d'analyse fonctionnelle utilisées tout au long de ce manuscrit.

1.1 Quelques définitions et notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note par E l'espace de Banach des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur I, i.e.

$$E = \{u/\ u : I \to \mathbb{R} \ \text{ continue}\}, \tag{1.1}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} |u(t)|. \tag{1.2}$$

Définition 1.1.1. *Une partie B de E est dite uniformément bornée dans E si et seulement si*

$$\exists \delta > 0, \forall f \in B, \|f\|_\infty \leq \delta.$$

Définition 1.1.2. *Une partie B de E est dite équicontinue si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0,\ \forall x, y \in I, |x - y| < \eta_\epsilon \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall f \in B.$$

Définition 1.1.3. *Une partie d'un espace de Banach E est dite relativement compacte si et seulement si son adhérence est compacte.*

Lemme 1.1.1. *(d'Ascoli-Arzéla) Une partie B de E est dite relativement compacte si :*

1. *B est équicontiue dans I,*
2. *B est uniformément bornée dans E.*

Définition 1.1.4. *Soit F un espace de Banach. L'application $f : E \longrightarrow F$ est dite compacte si f est continue sur E et $f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.5. *L'application $f : E \longrightarrow F$ dite complètement continue si*

1. *f est continue sur E,*
2. *$\forall B \in E$; B un borné $\implies f(B)$ est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.6. *L'application $f : E \longrightarrow E$ dite contractante, s'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que*

$$\|fx - fy\|_E \leq K\|x - y\|_E, \text{ pour tout } x, y \in E$$

Définition 1.1.7. *Soit K un sous ensemble convexe fermé de E. On dit que K est un cône s'il vérifi les conditions suivantes*

1. *$K \neq \emptyset$,*
2. *$\lambda K \subset K$ pour tout $\lambda \geq 0$,*
3. *$K \cap (-K) = \{0\}$.*

1.1.1 Laplacien de fonction possédant la symétrie radiale

Définition 1.1.8. *Une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite à symétrie radiale s'il existe une fonction $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$u(x) = v(|x|)$$

Le calcul du laplacien de fonction à symétrie radial pour $r = |x|$ est donné par :

$$\Delta u(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}v(r) + \frac{n-1}{r}v(r).$$

En effet, on a $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$,
alors $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.\frac{\partial v}{\partial r}$,
aussi $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{x_i^2}{r^2}.\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\frac{\partial v}{\partial r}$.
Ainsi, on obtient le résultat en sommant

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}v(r) + \frac{n-1}{r}v(r)$$

1.1.2 Fonction harmonique

Définition 1.1.9. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction telle que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, si f est de classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et si $\Delta f = 0$ alors on dit que la fonction f est harmonique .*

1.1.3 Inégalité de Harnack

Théorème 1.1.1. *[14] Pour tout $V \subset\subset U$ ouvert connexe, il existe une constante positive c qui dépend seulement de V tel que pour toute fonction harmonique positive ou nulle dans U,*

$$\sup_V u \leq c \inf_V u.$$

En particulier pour tout $x, y \in V$

$$\frac{1}{c}u(y) \leq u(x) \leq cu(y).$$

1.1.4 Fonction superharmonique

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. On note par $C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach, défini par

$$C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) = \{v \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \tag{1.3}$$

muni de la norme

$$\|v\|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|. \tag{1.4}$$

Définition 1.1.10. *[4] une fonction superharmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $\Delta u \leq 0$ au sens des distributions c'est-à-dire*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \geq 0 \qquad \text{pour tout } v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

tel que $v(x) \geq 0$ sur Ω.

1.1.5 Inégalité de Harnack faible globale

Nous présentons l'inégalité de Harnack faible pour des fonctions superharmoniques. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné.

Proposition 1.1.1. *[4] Il existe un ensemble $K \subset \Omega$ compact et un nombre positif α tel que*

$$u(x) \geq \alpha \|u\|_0$$

pour tout $x \in K$ et pour toute fonction superharmonique positive $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

1.1.6 Opérateur de Nemystkii

Définition 1.1.11. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné, une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory si, et seulement si*

i) $f(.,t)$est mesurable sur Ω pour tout $t \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Définition 1.1.12. *On dit que F est un opérateur de Nemyskii, associé à une fonction de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'il est défini par*

$$F(u)(x) = f(x, u(x)).$$

1.2 Fonction de Green

La fonction de Green a été introduite par George Green en 1828. Elle est utilisée dans la résolution des équations linéaires à coefficients constants (qu'elles soient différentielles ou aux dérivées partielles) ou pour la transformation des équations différentielles en équations intégrales.

1.2.1 Détermination de la fonction de Green

Soient (a,b) un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(Lu)(x) = -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \tag{1.5}$$

où f est une fonction donnée supposée continue par morceaux et

$$L = \frac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x), \tag{1.6}$$

est l'opérateur différentiel de type Sturn-Liouville, avec les conditions aux limites suivantes :

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \tag{1.7}$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \tag{1.8}$$

où α_i, β_i, $i = 1, 2$ sont des constantes données.
Dans le cas où $\alpha_i = 0$, on a des conditions de Neumann,
dans le cas où $\beta_i = 0$, on a des conditions de Dirichlet.

La fonction de Green associée à l'équation (1.5) est la fonction G vérifiant pour chaque y fixé dans (a,b), l'équation différentielle suivante :

$$\left[\frac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x)\right] G(x,y) = \delta(x-y). \tag{1.9}$$

où δ est la distribution de Dirac.

La fonction G doit satisfaire les mêmes conditions aux limites (1.7), (1.8) en $x = a$ et $x = b$.
Si on arrive à déterminer la fonction G, alors une solution u de (1.5), s'écrit :

$$u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Pour $y \in (a,b)$ fixé, on détermine la fonction $G(x,y)$, en tant que fonction de x, vérifiant les conditions suivantes :

i) $G(x, y)$ satisfait l'équation (1.9) sur (a, y) et sur (y, b),

ii) $G(x, y)$ satisfait les conditions aux limites homogènes (1.7)-(1.8) en $x = a$ et en $x = b$,

iii) $G(x, y)$ est continue en $x = y$,i.e.,

$$G_{|x=y^+} - G_{|x=y^-} = 0,$$

iv) $\frac{\partial}{\partial x}G(x, y)$ est discontinue en $x = y$,i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x}G_{|x=y^+} - \frac{\partial}{\partial x}G_{|x=y^-} = -1.$$

1.2.2 Construction de la fonction de Green

On désigne par Φ_a une solution de $LG = 0$ vérifiant (1.7) et par Φ_b une solution de $LG = 0$ qui satisfait la condition (1.8). Supposons que Φ_a, Φ_b deux fonctions linéairement indépendantes sur (a, b) ,i.e,

$$\forall \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1\Phi_a + \lambda_2\Phi_b = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

alors pour y fixé, ils existent μ et γ qu'on peut déterminer à partir des conditions iii) et iv) qui peuvent dépendre de y tels que

$$G(x, y) = \begin{cases} \mu\Phi_a(x) & \text{si } x \leq y \\ \gamma\Phi_b(x) & \text{si } y \leq x \end{cases}$$

donc

$$G(x, y) = \frac{-1}{w(y)} \begin{cases} \Phi_a(x)\Phi_b(y) & \text{si } x \leq y \\ \Phi_a(y)\Phi_b(x) & \text{si } y \leq x \end{cases} \tag{1.10}$$

où $w(y) = \Phi_a(y)\Phi_b'(y) - \Phi_a'(y)\Phi_b(y)$ est le Wronskein de Φ_a et Φ_b.

Exemple 1.2.1. *Détermination de la fonction de Green associée au problème :*

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & si\ 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

le problème non homogène aux conditions homogènes admet comme seule solution, la solution triviale $u = 0$, donc la fonction de Green $G(x, y)$ existe.
Soient Φ_1, Φ_2 deux fonctions linéairement indépendantes vérifiant :

$$\begin{cases} \Phi_1''(x) = 0 \\ \Phi_1(0) = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \Phi_2''(x) = 0 \\ \Phi_2(1) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Les solutions des problème (1.12) *et* (1.13) *sont données par*

$$\Phi_1(x) = x, \Phi_2(x) = x - 1.$$

En utilisant la définition du Wronskein, et par (1.10)*, nous avons*

$$w(x) = \Phi_1(x)\Phi_2'(x) - \Phi_1'(x)\Phi_2(x) = 1,$$

et

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & si\ 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & si\ 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

La théorie du point fixe est utilisée dans l'étude de l'existence des solutions pour des problèmes aux limites non linéaires. De nombreux résultats d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de points fixes, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Etant donnés un ensemble M et une application $T : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe (On appelle point fixe tout point x dans M tel que $T(x) = x$). Ces résultats théoriques nous permettent de montrer l'existence des solutions sans les déterminer explicitement.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques théorèmes qui assurent l'existence de points fixes, tels que les théorèmes de Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselskii (voir [44],[22]).

1.3.1 Théorème de Banach

Le théorème de point fixe de Banach appelé aussi théorème de l'application contractante prouvé en 1922, fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Il permet de montrer qu'une application f admet sous certaines conditions un point fixe dans un espace métrique complet.

Théorème 1.3.1. *Soit E un espace métrique complet (non vide). Si $f : E \to E$ est une contraction, alors f admet un unique point fixe dans E.*

1.3.2 Théorème de Brouwer

Le théorème de point fixe de Brouwer fait partie des théorèmes de points fixes les plus utilisés. Sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Théorème 1.3.2. *Soit M un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \to M$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans M.*

1.3.3 Théorème de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est l'analogue du théorème de Brouwer, transposé en dimension infinie.

Théorème 1.3.3. *Soit A un sous ensemble non vide, convexe, fermé et borné de E. Si $f : A \to A$ est une application compacte, alors f admet un point fixe dans E.*

Théorème 1.3.4. *(Alternative non linéaire de Leray-Schauder)*
Soit E un espace de Banach et U un ouvert, borné de E, tel que $0 \in U$. Si $f : U \to E$ est une application compacte, alors

i) *f admet un point fixe dans U,*
ou bien
ii) $\exists x \in \partial U, \exists t \in [0,1] : x = tf(x)$.

1.3.4 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

En 1955, Krasnoselskii a combiné le théorème de point fixe de Banach et celui de Schauder et a élaboré un nouveau théorème qui affirme que dans un convexe compact, tout opérateur qui s'écrit comme la somme d'un opérateur compact et d'une contraction admet un point fixe. Le théorème de point fixe de krasnoselskii a été utilisé pour étudier l'existence et la multiplicité de solutions pour des problèmes non linéaires de différents types. Ce théorème a fait l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de nombreuses applications intéressantes (voir [6], [7], [43]).

La version la plus utilisée du théorème de Krasnoselskii, est celle dans un cône, elle se présente en deux parties. La première dite forme compressive. La deuxième partie dite expansive, complète la première.

Théorème 1.3.5. *(Théorème de Guo-Krasnoselskii)[9]. Soit* $(E, \|,\|)$ *un espace de Banach et* K *un cône dans* E*. Supposons que* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous ensembles ouverts dans* E*, avec* $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$*, et* A *opérateur complètement continu,* $A : K \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}) \longrightarrow K$*. Si*

i) $\|Au\| \leq \|u\|; \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \geq \|u\|; \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$,
ou
ii) $\|Au\| \geq \|u\|; \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Au\| \leq \|u\|; \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$

Alors, A *admet un point fixe dans* $K \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1})$*.*

Démonstration. [27] La preuve de $i)$

Soit p_0 un élément de K, supposons que $0 < R_1 < 1 < R_2 < \infty$ tel que

$$\Omega_1 = \{x \in E, \|x\| < R_1\},\ \Omega_2 = \{x \in E, \|x\| < R_2\},$$

et

$$\|p_0\| > \frac{1}{1 - R_1}\Big(R_1^2 + R_1 \sup_{y \in K, \|y\| = R_1} \|Ay\|\Big). \tag{1.14}$$

Définissons l'opérateur $\bar{A}$ par

$$\bar{A}x = \begin{cases} \frac{\|x\|}{R_1}A(\frac{R_1}{\|x\|}x) + (1-R_1)p_0 & \text{si} \quad 0 \leq \|x\| \leq R_1^2, \\ \frac{\|x\|}{R_1}A(\frac{R_1}{\|x\|}x) + \frac{\|x\|}{R_1}.\frac{R_1-\|x\|}{\|x\|}p_0, & \text{si} \quad R_1^2 \leq \|x\| \leq R_1, \\ Ax & \text{si} \quad R_1 \leq \|x\| \leq R_2, \\ A(\frac{R_2}{\|x\|}x), & \text{si} \quad \|x\| \geq R_2 \end{cases} \tag{1.15}$$

Il est facile de montrer que $\bar{A}$ est complètement continu et transforme le cône K en sous ensemble compact. Par le principe de schauder $\bar{A}$ admet un point fixe x_0 dans K, reste à vérifier que $x_0 \in K \cap (\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$, pour cela il suffit de montrer que $R_1 < \|x_0\| < R_2$.
Supposons que $\|x_0\| \leq R_1^2$, alors

$$x_0 \;=\; \frac{\|x_0\|}{R_1}A\Big(\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0\Big) + (1-R_1)p_0,$$

ceci implique

$$\|x_0\| \;=\; \Big\|\frac{\|x_0\|}{R_1}A\Big(\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0\Big) + (1-R_1)p_0\Big\|,$$

et donc

$$\|p_0\| \;\leq\; \frac{1}{1-R_1}\Big(R_1^2 + R_1\Big\|A\Big(\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0\Big)\Big\|\Big),$$

on a $\|\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0\| = R_1$, alors contradiction avec (1.14).

Pour $R_1^2 < \|x_0\| < R_1$, x_0 un point fixe de $\bar{A}$ alors

$$\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0 = A\Big(\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0\Big) + \frac{R_1-\|x_0\|}{\|x_0\|}p_0,$$

ce qui donne

$$\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0 \geq A\Big(\frac{R_1}{\|x_0\|}x_0\Big),$$

contradiction avec i).
soit $\varepsilon > 0$, pour $\|x_0\| > R_2$, x_0 un point fixe de $\bar{A}$ alors

$$x_0 = A\Big(\frac{R_2}{\|x_0\|}x_0\Big),$$

qui est equivalent à

$$A\Big(\frac{R_2}{\|x_0\|}x_0\Big) = (1+\varepsilon)\frac{R_2}{\|x_0\|}x_0 \ \text{ avec } \varepsilon = \frac{x_0}{R_2} - 1,$$

contradiction
Donc $Ax_0 = x_0$ pour $R_1 \leq \|x_0\| \leq R_2$.

Remarque 1. *Pour la preuve de ii), nous suivons les mêmes étapes que la démonstration de i) (voir [27]).*

□

1.3.5 Extensions du théorème de Krasnoselskii

Les extensions du théorème de Krasnoselskii les plus fréquemment utilisées pour obtenir la multiplicité de solutions sont celles de Leggett-Williams et Avery-Peterson.
Ceux-ci peuvent être formulés comme suit :

Théorème de Leggett-Williams [28]

Théorème 1.3.6. *Soit* $\alpha : K \to [0, +\infty)$ *une fonction continue concave et* $\alpha(x) \leq \|x\|$. *Pour* a, b, c, d *des nombres réels tels que* $0 < a < b < d \leq c$, *nous définissons l'ensemble*

$$K_\alpha(b, d) = \{x \in K, b \leq \alpha(x), \|x\| \leq d\}.$$

Si $T : k(0, c) \to k(0, c)$ *est complètement continu et vérifie :*

1. $\{x \in K_\alpha(b, d); \alpha(x) > b\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Tx) > b$, $\forall x \in K_\alpha(b, d)$.
2. $\|Tx\| < a$, *pour* $\|x\| \leq a$.
3. $\alpha(Tx) > b$, *pour* $x \in K_\alpha(b, c)$, *avec* $\|Tx\| > d$.

Alors T *admet au moins trois points fixes.*

Théorème de Avery et Peterson [3]

Soient γ, θ, α, et ψ des fonctionnelles non négatives continues dans le cône K. Alors pour des nombres positifs a, b, c et d, nous définissons les ensembles suivants :

$$K(\gamma, d) = \{u \in K;\ \gamma(u) < d\},$$

$$\overline{K(\gamma, d)} = \{u \in K;\ \gamma(u) \leq d\},$$

$$K(\gamma, \alpha, b, d) = \{u \in K;\ b \leq \alpha(u) \text{ et } \gamma(u) \leq d\},$$

$$K(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d) = \{u \in K;\ b \leq \alpha(u), \theta(u) \leq c \text{ et } \gamma(u) \leq d\},$$

et

$$R(\gamma, \psi, a, d) = \{u \in K;\ a \leq \psi(u), \text{ et } \gamma(u) \leq d\}.$$

Théorème 1.3.7. *Soient K un cône de E, γ, θ deux fonctionnelles non négatives continues convexes dans le cône K, α une fonctionnelle non négative continue concave dans K, et ψ une fonctionnelle non négative continue de K, vérifiant $\psi(\lambda u) \leq \lambda\psi(u)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$ et pour des nombres positifs M et d tels que :*

$$\alpha(u) \leq \psi(u) \text{ et } \|u\| \leq M\gamma(u);\ \forall u \in \overline{P(\gamma, d)}.$$

Supposons que $T : \overline{K(\gamma, d)} \to \overline{K(\gamma, d)}$ est complètement continu, et qu'il existe des nombres positifs a, b et c avec $a < b$, tels que :

(i) $\{u \in K(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d);\ \alpha(u) > b\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Tu) > b$ pour $u \in K(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d)$,

(ii) $\alpha(Tu) > b$ pour $u \in K(\gamma, \alpha, b, d)$ avec $\theta(Tu) > c$,

(iii) $0 \notin R(\gamma, \psi, a, d)$ et $\psi(Tu) < a$ pour $u \in R(\gamma, \psi, a, d)$ avec $\psi(u) = a$.

Alors T admet au moins trois points fixes $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\gamma, d)}$ tels que :

$$b < \alpha(u_1),\ a < \psi(u_2) \text{ pour } \alpha(u_2) < b,\ \text{ et } \psi(u_3) < a.$$

Théorème de point fixe dans un double cône [19]

Une des variantes du théorème de krasnoselskii est celle dans un double cône, qui peut être utilisée pour montrer l'existence et la multiplicité de solutions positives dans le cas ou la nonlinéarité change de signe.

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, $K \subset E$ un cône et a une constante positive. Nous définissons les ensembles suivants :

$$K_a = \{x \in K : ||x|| < a\},$$

$$\partial K_a = \{x \in K : ||x|| = a\},$$

et si $\alpha : K \to \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle continue telle que $\alpha(\lambda x) \leq \alpha(x)$ pour $\lambda \in (0,1)$, nous définissons

$$K(b) = \{x \in K : \alpha(x) < b\},$$

$$\partial K(b) = \{x \in K : \alpha(x) = b\},$$

et

$$K_a(b) = \{x \in K : a < ||x||, \alpha(x) < b\},$$

où a et b sont des constantes positives.

Théorème 1.3.8. *Soient K, K' deux cônes de E tels que $K' \subset K$. Supposons que $T : K \to K$ et $T^* : K' \to K'$ deux opérateurs complètement continus et $\alpha : K' \to \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle continue vérifiant $\alpha(x) \leq ||x|| \leq M\alpha(x)$ pour tout $x \in K'$, où M est une constante telle que $M \geq 1$. S'il existe des constantes $b > a > 0$ telles que*

(C1) $||Tx|| < a$ pour $x \in \partial K_a$,
(C2) $||T^*x|| < a$ pour $x \in \partial K'_a$ et $\alpha(T^*x) > b$ pour $x \in \partial K'(b)$,
(C3) $Tx = T^*x$, pour $x \in K'_a(b) \cap \{u : T^*u = u\}$.

Alors T admet au moins deux points fixes x_1 et x_2 dans K, tels que

$$0 \leq ||x_1|| < a < ||x_2||, \ \alpha(x_2) < b.$$

Chapitre 2

Quelques applications du théorème de Krasnoselskii

2.1 Application du théorème de Krasnoselskii sur une EDO

2.1.1 Introduction

Dans cette section, en appliquant le théorème (1.3.5), nous montrons l'existence d'au moins une solution positive pour le problème de Dirichlet associé à une équation différentielle ordinaire du second ordre suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)); \quad x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue.

la technique conventionnelle est de faire une formulation abstraite du problème, en précisant l'espace de Banach qui intervient, passer aux opérateurs intégraux associés en utilisent le fonction de Green, définir l'application
$T : M \to M$ et imposer des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe.

2.1.2 Résultats auxiliaires

Nous présentons quelques lemmes utiles pour prouver notre résultat principal.

Lemme 2.1.1. *Le problème suivant :*

$$u''(x) + f(x) = 0 \tag{2.2}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2.3}$$

admet une unique solution,

$$u(x) = \int_0^1 x(1-s)f(s)\mathrm{d}s - \int_0^x (x-s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

Démonstration. Par (2.2), nous avons

$$u''(x) = -f(x).$$

Pour $t \in [0,1]$ on intègre les deux cotés de zéro à x, on obtient

$$u'(x) = u'(0) - \int_0^x f(s)\mathrm{d}s,$$

et

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x (\int_0^r f(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}r,$$

l'intégrale double est étendue au domaine triangulaire du plan r, s ,$0 \leq s \leq r$, $0 \leq r \leq x$, en changeant l'ordre des intégrations, nous obtenons

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x f(s)\mathrm{d}s \int_s^x \mathrm{d}r,$$

par suite

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x (x-s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{2.5}$$

pour déterminer la constante $u'(0)$, on prend $x = 1$ et on utilise la condition $u(1) = 0$, ce qui donne

$$u'(0) = \int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s,$$

Ainsi, l'équation (2.5) devient

$$u(x) = \int_0^1 x(1-s)f(s)\mathrm{d}s - \int_0^x (x-s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

□

Lemme 2.1.2. *le problème aux limites*

$$u''(x) = 0$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0,$$

admet la fonction de Green (voir l'exemple (1.2.1)*)*

$$G(x,s) = \begin{cases} x(1-s) & \text{si } 0 \le x \le s \le 1 \\ s(1-x) & \text{si } 0 \le s \le x \le 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

qui Satisfait les conditions suivantes

1. $G(x,s) \ge 0$, *sur* $[0,1] \times [0,1]$,
2. $G(x,s) \le G(s,s)$, *pour* $(x,s) \in [0,1]^2$
3. $G(x,s) \ge \frac{1}{4}G(s,s)$, $x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Démonstration. L'unique solution (2.6) donnée par le lemme (2.1.1) peut s'écrire comme suit

$$u(x) = \int_0^x s(1-x)f(s)\mathrm{d}s + \int_x^1 x(1-s)f(s)\mathrm{d}s,$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de la forme

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

où

$$G(x,s) = \begin{cases} x(1-s) & \text{si } 0 \le x \le s \le 1 \\ s(1-x) & \text{si } 0 \le s \le x \le 1 \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que G satisfait les conditions $(1), (2), (3)$. □

2.1.3 Formulation abstraite

Nous prouvons quelques résultats permettant de vérifier toutes les conditions du théorème (1.3.5).
Définissons l'ensemble K dans E par

$$K = \left\{ u \in E, u(x) \geq 0 \text{ sur } [0,1] \text{ et } \min_{\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}} u(x) \geq \frac{1}{4}\|u\|_\infty \right\}$$

K est un cône. En effet, $K \neq \emptyset$, car K contient au moins un élément. Soit $u \in K$ et $\lambda \geq 0$, montrons alors que $\lambda u \in K$, $u \in K$ équivalent à $u \in E$ et $\min_{\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}} u(x) \geq \frac{1}{4}\|u\|_\infty$ ce qui entraine que $\lambda u \in E$, car E est un espace vectoriel.
Pour $\lambda \geq 0$, si $u \in K$, on a

$$\lambda u(x) \geq \lambda(\frac{1}{4}\|u\|_\infty),$$

donc

$$\min_{\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}} \lambda u(x) \geq |\lambda| \eta \|u\|_\infty,$$

ce qui entraine que

$$\min_{\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}} \lambda u(x) \geq \frac{1}{4}\|\lambda u\|_\infty,$$

il est clair que $K \cap (-K) = 0$, car $\|.\|_\infty$ est une norme.
Soit $T : K \longrightarrow E$ définit par

$$Tu(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s, u(s)) \mathrm{d}s \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

Pour $u \in K$, Tu est solution du problème

$$\begin{cases} -(Tu)''(x) = f(x, u(x)) & x \in [0,1] \\ (Tu)(0) = (Tu)(1) = 0 \end{cases}$$

Lemme 2.1.3. $T : K \longrightarrow K$ *est complètement continu*

Démonstration. Pour tout $u \in K$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq (Tu)(x) &= \int_0^1 G(x,s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s \quad x \in [0,1] \\ &\leq \int_0^1 G(s,s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

Donc
$$\|Tu\| \leq \int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$
Par le lemme (2.1.2), nous avons
$$\begin{aligned}(Tu)(x) &= \int_0^1 G(x,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{4}G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\\ &\geq \frac{1}{4}\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\\ &\geq \frac{1}{4}\|Tu\| \quad ,\forall x \in \Big[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\Big],\end{aligned}$$
ce qui implique
$$\min_{x\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}(Tu)(x) \geq \frac{1}{4}\|Tu\|,$$
donc
$$Tu \in K.$$
ensuite nous montrons que T est continu.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $u_0 \in K$ et $\|u_n - u_0\| \to 0$ quand $(n \to \infty)$, alors il existe D^*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n(s) \leq D^*$, $s \in [0,1]$. Si nous posons
$$D = \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,D^*]} f(s,t),$$
alors pour tous s et $x \in [0,1]$, par lemme (2.1.2), nous avons
$$G(x,s)f(s,u_n(s)) \leq DG((s,s)), \quad s \in [0,1].$$
Par l'application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(Tu_n)(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(x,s)f(s,u_n(s))\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1 G(x,s)f(s,u_0(s))\mathrm{d}s\\ &= (Tu_0)(x) \quad ,x \in [0,1],\end{aligned}$$

ce qui implique que T est continu.
Supposons que $P \subset K$ est a ensemble borné. Alors il existe une constante $H* > 0$ telle que $0 \leq u(s) \leq H*$, $s \in [0,1]$ pour tout $u \in P$. Dans ce qui suit nous prouvons que $T(P)$ est relativement compact.
Soit

$$H = \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,H^*]} f(s,t), \tag{2.8}$$

d'une part, pour tout $y \in T(P)$, il existe $u \in P$ tel que $y = Tu$, et donc, il découle de (2.8) et du lemme (2.1.2) que

$$\begin{aligned} 0 \leq y(t) &= (Tu)(x) \\ &= \int_0^1 G(x,s)f(s,u_0(s))\mathrm{d}s \\ &\leq H\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s \quad , x \in [0;1], \end{aligned}$$

qui, avec le fait que $\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s$ est convergente, implique que $T(P)$ est uniformément borné.
D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s$ est convergente, nous pouvons choisir $\xi \in [0,1]$ tel que

$$\int_\xi^1 G(s,s)\mathrm{d}s < \frac{\varepsilon}{4H}, \tag{2.9}$$

puisque, $G(x,s)$ est uniformément continue en $[0,1]\times[0,\xi]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in [0,1]$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$

$$|G(x_1,s) - G(x_2,s)| < \frac{\varepsilon}{2H\xi} \quad s \in [0,\xi]. \tag{2.10}$$

Pour tout $y \in T(P)$, il existe $u \in P$ tel que $y = Tu$, et donc, pour tous

$x_1, x_2 \in [0,1]$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$, il découle de (2.9), (2.10) et le lemme (2.1.2)

$$\begin{aligned}
|y(x_1) - y(x_2)| &= |(Tu)(x_1) - (Tu)(x_1)| \\
&= \Big| \int_0^1 \Big[G(x_1, s) - G(x_2, s)\Big] f(s, u(s)) \mathrm{d}s \Big| \\
&\leq \int_0^1 |G(x_1, s) - G(x_2, s)| f(s, u(s)) \mathrm{d}s \\
&\leq H \int_0^1 |G(x_1, s) - G(x_2, s)| \mathrm{d}s \\
&= H\Big[\int_0^\xi |G(x_1, s) - G(x_2, s)| \mathrm{d}s + \int_\xi^1 |G(x_1, s) - G(x_2, s)| \mathrm{d}s \Big] \\
&\leq H\Big[\int_0^\xi |G(x_1, s) - G(x_2, s)| \mathrm{d}s + 2 \int_\xi^1 G(s, s) \mathrm{d}s \Big] \\
&< H\big(\frac{\varepsilon}{2H} + \frac{\varepsilon}{2H} \big) = \varepsilon
\end{aligned}$$

alors $T(P)$ est équicontinue. Par le théorème d'Ascoli-Arzela, $T(P)$ est relativement compact.

Donc, $T : K \longrightarrow K$ est complètement continue. □

2.1.4 Etude de l'existence de solution positive

Notre résultat est formulé comme suit

Théorème 2.1.1. *Supposons qu'il existe deux constantes positives r et R telles que les conditions suivantes sont vérifiées*

(H1) $f(x, u) \leq A.r, \quad (x, u) \in [0, 1] \times [0, r]$

(H2) $f(x, u) \geq B.R, \quad (x, u) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times [\frac{1}{4}R, R]$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue avec*

$$A = \Big[\int_0^1 G(s, s) \mathrm{d}s \Big]^{-1}, \qquad B = \Big[\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) \mathrm{d}s \Big]^{-1}$$

Alors le problème aux limites (2.1) *admet une solution positive* u *avec* $r \leq \|u\|_\infty \leq R$.

Démonstration. On définit les deux ouverts Ω_1, Ω_2 de E par

$$\Omega_1 = \{u \in E; \|u\|_\infty < r\}, \qquad \Omega_2 = \{u \in E; \|u\|_\infty < R\}$$

pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, i.e. $u \in K, \|u\|_\infty = R$, nous avons d'une part, pour $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

$$u(x) \geq \min_{\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}} u(x) \geq \frac{1}{4}\|u\|_\infty = \frac{1}{4}R,$$

D'autre part, nous avons

$$u(x) \leq \|u\|_\infty = R, \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

donc

$$\frac{1}{4}R \leq u(x) \leq R, \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

par conséquent, d'après (H2)

$$f(x,u) \geq BR, \qquad (x,u) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times \left[\frac{1}{4}R, R\right],$$

alors

$$\begin{aligned} \|Tu\|_\infty &\geq Au\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^1 G\Big(\frac{1}{2}, s\Big) f(s, u(s))\mathrm{d}s \\ &\geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\Big(\frac{1}{2}, s\Big) f(s, u(s))\mathrm{d}s \\ &\geq B.R \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\Big(\frac{1}{2}, s\Big)\mathrm{d}s \\ &= R = \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, i.e. $u \in K$ et $\|u\|_\infty = r$, donc pour $x \in [0,1]$ on a

$$0 \leq u(x) \leq \|u\|_\infty = r,$$

par conséquent d'après (H1)

$$f(x,u) \leq Ar, \quad (x,u) \in [0,1] \times [0,r],$$

donc

$$\begin{aligned} \|Tu\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 G(x,s) f(s,u(s))\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^1 G(s,s) A.r\mathrm{d}s \\ &\leq \Big[\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\Big]\Big[\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s\Big]^{-1} r = \|u\|_\infty \end{aligned}$$

Toutes les conditions du théorème (1.3.5) de Krasnoselskii sont vérifiées, donc T admet au moins un point fixe.
La solution du problème (2.1) est le point fixe de T vérifiant $u(x) \geq 0$ pour $x \in [0, 1]$ et $r \leq \|u\|_\infty \leq R$. $\square$

2.2 Application du théorème de Krasnoselskii sur une EDP en passant par une EDO

Dans cette partie, nous étudions l'existence d'une solution positive radiale symétrique pour le problème de Dirichlet associé à une équation elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre réel, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; r_1 < |x| < r_2\}$ avec $0 < r_1 < r_2$, $n \geq 2$, et le terme non linéaire h est radial positif, superlinéaire en infini , et satisfait $h(x, a(x)) = 0$ avec a est une fonction positive concave.

La technique utilisée dans cette partie est de transformer le problème (2.11) en un problème aux limites associé à une EDO d'ordre 2,

$$\begin{cases} v''(t) + \lambda q(t) f(t, v(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

où $q : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue.

En effet, on pose le premier changement de variable $r = |x|$ de sorte que u possède la symétrie radiale, c'est à dire qu'il existe une fonction $w : (r_1, r_2) \to \mathbb{R}$ telle que $u(x) = w(r)$ pour tout $x \in \Omega$. Le calcul du Laplacien de fonction à symétrie radiale donné dans la définition (1.1.8) permet de réécrire le problème (2.11) sous forme

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = -\lambda h(r, w) \tag{2.13}$$

Pour le deuxième changement de variable, dans le cas où $n \geq 3$, on pose

$$t = -\frac{A}{r^{n-2}} + B \text{ et } v(t) = w(r),$$

avec

$$A = \frac{(r_1 r_2)^{n-2}}{r_2^{n-2} - r_1^{n-2}},$$

et

$$B = \frac{r_2^{n-2}}{r_2^{n-2} - r_1^{n-2}}.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \Big((n-2)Ar^{1-n}\Big)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\Big),$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2} = \Big((n-2)Ar^{1-n}\Big)^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \Big((n-2)(n-1)Ar^{-n}\Big)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

si on remplace $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}, \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}$ dans (2.13), on obtient

$$\Big((n-2)\frac{A}{r^{n-1}}\Big)^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}r^2}+\Big((n-2)(1-n)\frac{A}{r^n}\Big)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{n-1}{r}\Big(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(n-2)\frac{A}{r^{n-1}}\Big) = -\lambda h(r,w),$$

ce qui implique

$$\Big((n-2)\frac{A}{r^{n-1}}\Big)^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big((n-2)(1-n)\frac{A}{r^n}+(n-2)(n-1)\frac{A}{r^n}\Big) = -\lambda h(r,w),$$

d'où

$$v''(t) = -\lambda\Big((n-2)\frac{A}{r^{n-1}}\Big)^{-2}h(r,w),$$

comme on a $r = \Big(\frac{A}{B-t}\Big)^{\frac{1}{n-2}}$, alors

$$v''(t) = -\lambda(n-2)^{-2}A^{-2}\Big(\frac{A}{B-t}\Big)^{2\frac{n-1}{n-2}}h\Big(\Big(\frac{A}{B-t}\Big)^{\frac{1}{n-2}}, v\Big),$$

donc

$$v''(t) + \lambda(n-2)^{-2}\frac{A^{\frac{2}{n-2}}}{(B-t)^{2\frac{n-1}{n-2}}}h\Big(\Big(\frac{A}{B-t}\Big)^{\frac{1}{n-2}}, v\Big) = 0.$$

Le problème (2.11) transformé en un problème aux limites associé à une EDO d'ordre 2 de la forme

$$\begin{cases} v''(t) + \lambda q(t)f(t, v(t)) = 0 \quad , 0 < t < 1 \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

où $f(t,v) = h\Big(\big(\frac{A}{B-t}\big)^{\frac{1}{n-2}}, v\Big)$ et $q(t) = (n-2)^{-2}\frac{A^{\frac{2}{n-2}}}{(B-t)^{2\frac{(n-1)}{n-2}}}$.
Pour tout $x \in \partial\Omega$ on a :

$$u(x) = w(r_i) = 0, \ i = 1, 2.$$

— si $t = 0$ alors $r = r_1$
  donc, $v(0) = w(r_1) = 0$.
— si $t = 1$ alors $r = r_2$
  donc, $v(1) = w(r_2) = 0$.

Dans le cas $n = 2$, si on pose $r = r_2\Big(\frac{r_1}{r_2}\Big)^t$ le problème (2.11) se transforme en (2.14), avec

$$q(t) = \Big[r_2\Big(\frac{r_1}{r_2}\Big)^t \log(\frac{r_1}{r_2})\Big]^2 \text{ et } f(t,v) = h\Big(r_2\Big(\frac{r_1}{r_2}\Big)^t, v\Big)$$

Avant d'énoncer nos résultats, nous devons introduire quelques notations. Soit $m : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ une fonction continue. Considérons l'opérateur L défini sur $H_0^1(0,1)$ par

$$L(v) = -\frac{v''}{m}$$

Définition 2.2.1. *On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de L s'il existe $\Phi \in H_0^1(0,1)$ non nulle dite fonction propre telle que $L\Phi = \lambda\Phi$ dans $(0,1)$.*

Ainsi ϕ est une solution non triviale du problème à valeurs propres

$$\begin{cases} -v''(t) = \lambda m(t) v(t) \quad \textit{dans } (0,1) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

En particulier, $\lambda_{1,m} > 0$ est appelé la Première valeur propre de (2.15) associée à la Première fonction propre $\Phi_{1,m}$, où

$$\Phi_{1,m} > 0 \textit{ avec } \Phi'_{1,m}(0) > 0 \textit{ et } \Phi'_{1,m}(1) < 0$$

tandis que $\Phi_{1,m}$ change de signe pour $|i| > 1$, on a la caractérisation

$$\int_0^1 |v'|^2 \geq \lambda_{1,m} \int_0^1 m|v|^2 \textit{ pour tout } \ v \in H_0^1(0,1)$$

où l'égalité est vraie si et seulement si v is a multiple of $\Phi_{1,m}$ (voir par exemple [5], [36]).

2.2.1 Formulation abstraite

Pour appliquer le théorème (1.3.5), nous définissons l'ensemble P dans E par

$$P = \left\{ v \in E;\ v(t) \geq 0,\ t \in [0,1],\ \min_{\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}} v(t) \geq \frac{1}{4} \|v\|_\infty \right\},$$

P est un cône (P vérifi les trois conditions de la définition (1.1.7)). Soit $T : P \longrightarrow E$ définie par

$$Tv(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) q(s) f(s, v(s)) \mathrm{d}s,$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie dans le lemme (2.1.2) cette fonction vérifie les conditions $(1), (2), (3)$ citer dans le même lemme.

Lemme 2.2.1. *$T : P \longrightarrow P$ est complètement continue.*

Démonstration. Voir la preuve du lemme (2.1.3) □

2.2.2 Solution positive symétrique radiale

Dans cette section, nous montrons l'existence d'une solution positive symétrique radiale pour $\lambda \in (0, \lambda_{1,qb})$, où $\lambda_{1,qb}$ est la Première valeur propre de (2.15) (voir la définition (2.2.1)).

Remarque 2. *le cas où λ est assez grand est utilisé pour montrer la multiplicité des solutions par l'utilisation de la méthode du sous et sur solutions, la théorie de degré et la propriété de monotonie strict par rapport à m pour le problème des valeurs propres* (2.15)

Considérons les hypothèses suivantes :

(H1) la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et il existe une fonction continue $a : [0,1] \longrightarrow (0,+\infty)$, qui est concave, telle que $f(t,0) = f(t,a(t)) = 0$ et $f(t,v) > 0$ si $0 < v < a(t)$.

(H2) il existe une fonction continue $b : [0,1] \longrightarrow (0,+\infty)$ telle que

$$\lim_{v \to 0^+} \frac{f(t,v)}{v} = b(t) \text{ uniformément en } t \in [0,1].$$

(H3)

$$\lim_{v \to +\infty} \frac{f(t,v)}{v} = \infty \text{ uniformément en } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

Pour vérifier les hypothèses du théorème (1.3.5), nous allons montrer les deux lemmes suivants

Lemme 2.2.2. *Supposons que les conditions (H1) et (H3) sont vérifiées. Alors, pour tout μ et K, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \mu$, nous avons pour tout $v \in \{v \in P, \|v\|_\infty \geq R\}$*

$$\|Tv\|_\infty \geq K\|v\|_\infty$$

Démonstration. l'hypothèse (H3) est traduite par :

Soit $M > 0$, il existe $N > 0$, tel que $v(s) > N \implies f(s,v) \geq Mv$, pour $s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Comme $v \in P$, alors $v(s) \geq \frac{1}{4}\|v\|_\infty \geq \frac{1}{4}R$ pour $s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, donc nous choisissons $R > 4N$, en utilisant aussi le fait que $f \geq 0$ par (H1), nous avons

$$\begin{aligned}
\|Tv\|_\infty &\geq Av\Big(\frac{1}{2}\Big) = \lambda \int_0^1 G\Big(\frac{1}{2}, s\Big) q(s) f(s, v(s)) \mathrm{d}s \\
&\geq \lambda \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\Big(\frac{1}{2}, s\Big) q(s) f(s, v(s)) \mathrm{d}s \\
&\geq \lambda \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\Big(\frac{1}{2}, s\Big) q(s) M v(s) \mathrm{d}s \\
&\geq \lambda \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) q(s) M \frac{1}{4} \|v\|_\infty \mathrm{d}s = \lambda \frac{1}{4} M \Big(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G\Big(\frac{1}{2}, s\Big) q(s) \mathrm{d}s \Big) \|v\|_\infty
\end{aligned}$$

En imposant que $M > K\Big(\frac{1}{4}\mu \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s) q(s) \mathrm{d}s\Big)^{-1}$. Nous obtenons,

$$\|Tv\|_\infty > K\mu^{-1}\lambda\|v\|_\infty \geq K\|v\|_\infty.$$

si on pose $\Omega_2 = \{v \in E, \|u\|_\infty \leq R\}$, donc pour $v \in P \cap \partial\Omega_2$ et en particulier pour $K = 1$ on a

$$\|Tv\|_\infty \geq \|v\|_\infty.$$

□

Lemme 2.2.3. *Supposons que les conditions (H1) et (H2) sont vérifiées. Alors, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_{1,qb})$, il existe une norme $\|.\|_*$ équivalente à $\|.\|_\infty$ et $r > 0$ tels que, pour tout $v \in \{v \in P; \|v\|_* = r\}$, nous avons*

$$\|Tv\|_* < \|v\|_*.$$

Démonstration. Puisque $\lambda < \lambda_{1,qb}$, pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, nous avons

$$0 < \lambda < (1+\varepsilon)\lambda < \lambda_{1,qb},$$

posons $E > 0$ tel que

$$E\lambda_{1,qb} \sup_{t\in[0,1]} \frac{\psi(t)}{\Phi_{1,qb}(t)} < \frac{\lambda_{1,qb}}{\lambda(1+\varepsilon)} - 1,$$

où $\psi(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)b(s)\mathrm{d}s$.

Remarque 3. *Comme $\psi, \Phi_{1,qb}$ sont bornées, donc le supremum est fini.*

Considérons la norme

$$\|v\|_* = |v|_E = \left\|\frac{v}{(\Phi_{1,qb} + E)}\right\|_\infty.$$

Par les hypothèses (H1) et (H2), pour tout $\varepsilon > 0$, il exists $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $0 < v(s) < \delta$ implique

$$f(s,v) < (1+\varepsilon)b(s)v(s), \text{ pour tout } s \in [0,1].$$

Soit $r > 0$ tel que $r(\|\Phi_{1,qb}\|_\infty + E) < \delta$, pour $v \in \{v \in P; \|v\|_* = r\}$, nous avons donc $v \in P$, avec $|v|_E = r$, pour tout $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\frac{v(s)}{\Phi_{1,qb}(s)+E} = \left|\frac{v(s)}{\Phi_{1,qb}(s)+E}\right| &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{v(s)}{\Phi_{1,qb}(s)+E}\right| \\
&\leq \left\|\frac{v}{\Phi_{1,qb}+E}\right\|_\infty \\
&= |v|_E = r
\end{aligned}$$

Ce qui implique, pour $s \in [0,1]$

$$\frac{v(s)}{\Phi_{1,qb}(s)+E} \leq r,$$

alors

$$\begin{array}{rcl} v(s) & \leq & r(\Phi_{1,qb}(s)+E), \\ & \leq & r(\sup\limits_{t\in[0,1]} |\Phi_{1,qb}(t)| + E) \\ & = & r(\|\Phi_{1,qb}\|_\infty + E) < \delta, \end{array}$$

D'où, pour $s \in [0,1]$

$$0 < v(s) < \delta,$$

et donc

$$f(s,v) < (1+\varepsilon)b(s)v(s).$$

Pour $v \in \{v \in P; \|v\|_* = r\}$

$$\begin{array}{rcl} Tv(t) & = & \lambda \displaystyle\int_0^1 G(t,s)q(s)f(s,v(s))\mathrm{d}s \\ & \leq & \lambda \displaystyle\int_0^1 G(t,s)q(s)(1+\varepsilon)b(s)v(s)\mathrm{d}s \\ & = & \lambda \displaystyle\int_0^1 G(t,s)q(s)(1+\varepsilon)b(s)\frac{\Phi_{1,qb}+E}{\Phi_{1,qb}+E}v(s)\mathrm{d}s \\ & \leq & \lambda \displaystyle\int_0^1 G(t,s)q(s)(1+\varepsilon)b(s)(\Phi_{1,qb}(s)+E)|v|_E\mathrm{d}s \\ & = & \lambda(1+\varepsilon)\Big[\displaystyle\int_0^1 G(t,s)q(s)b(s)\Phi_{1,qb}(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 G(t,s)q(s)b(s)E\mathrm{d}s\Big]|v|_E \\ & = & (1+\varepsilon)\Big[\dfrac{\lambda}{\lambda_{1,qb}}\Phi_{1,qb}(t) + \lambda E\psi(t)\Big]|v|_E \\ & = & (1+\varepsilon)\dfrac{\lambda}{\lambda_{1,qb}}\Phi_{1,qb}(t)\Big[1+\lambda_{1,qb}E\dfrac{\psi(t)}{\Phi_{1,qb}(t)}\Big]|v|_E \\ & \leq & (1+\varepsilon)\dfrac{\lambda}{\lambda_{1,qb}}\Phi_{1,qb}(t)\Big[1+\lambda_{1,qb}E\sup\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{\psi(t)}{\Phi_{1,qb}(t)}\Big]|v|_E \\ & < & (1+\varepsilon)\dfrac{\lambda}{\lambda_{1,qb}}\Phi_{1,qb}(t)\Big[1+\dfrac{\lambda_{1,qb}}{\lambda(1+\varepsilon)}-1\Big]|v|_E \\ & = & \Phi_{1,qb}(t)|v|_E < (\Phi_{1,qb}(t)+E)|v|_E \end{array}$$

ce qui implique que

$$\left|\frac{Tv(t)}{\Phi_{1,qb}(t)+E}\right| < |v|_E,$$

alors

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{Tv(t)}{\Phi_{1,qb}(t)+E}\right| < |v|_E,$$

d'où

$$\left\|\frac{Tv(t)}{\Phi_{1,qb}+E}\right\|_\infty < |v|_E,$$

donc

$$|Tv|_E < |v|_E,$$

on a $\|.\|_\infty \equiv \|.\|_* = |.|_E$

$$\|Tv\|_\infty < \|v\|_\infty$$

La solution symétrique radiale positive du problème (2.11) est considrée comme la solution positive du problème (2.14) qui est le point fixe de l'opérateur T vérifiant $v(t) \geq 0$ pour $t \in [0,1]$ et $r \leq \|u\|_\infty \leq R$.

□

2.3 Etude de l'existence d'une solution positive d'un problème elliptique par le théorème de Krasnoselskii et l'inégalité d'Harnack

2.3.1 Introduction

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x,u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.16}$$

où Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'objectif de ce travail est de montrer l'existence d'une solution positive, ie, $u \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R})$, $u(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ et u vérifie le problème (2.16). Δu est considéré comme distribution. l'hypothése de base va être l'inégalité faible globale de Harnack pour les fonctions positives superharmoniques.

Pour montrer le résultat, nous reformulons le problème (2.16) en un problème de point fixe $Tu = u$ dans l'espace des fonctions continues où l'opérateur T est de la forme $T = (-\Delta)^{-1}F$, avec $(-\Delta)^{-1}$ est l'opérateur inverse de Laplace et F est l'opérateur de Nemytskii.

2.3.2 Formulation abstraite

Pour montrer l'existence d'une solution positive pour le problème (2.16), nous imposons des conditions sur la nonlinéarité pour pouvoir appliquer le théorème de Krasnoselskii (compression-expansion)(1.3.5).
Soit E l'espace de Banach, défini par

$$E = C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) = \{u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}); u = 0 \text{ sur} \partial\Omega\},$$

muni de la norme suivante

$$\|u\|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Soient K un sous ensemble de $\overline{\Omega}$ et $h : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définit par

$$h_{|K}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \in \overline{\Omega} \backslash K \end{cases} \tag{2.17}$$

Considérons l'ensemble

$$P = \left\{ u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) : u \geq 0, \text{ sur } \overline{\Omega} \text{ et } \min_{x \in K} u(x) \geq \eta \|u\|_0 \right\}$$

P est un cône. En effet, $P \neq \emptyset$, car P contient au moins un élément. Soit $u \in P$ et $\lambda \geq 0$, montrons alors que $\lambda u \in P$, $u \in P$ équivalent à $u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ et $\min_{x \in K} u(x) \geq \eta \|u\|_0$ ce qui entraine que $\lambda u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, car $C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
Pour $\lambda \geq 0$, si $u \in P$, on a

$$\lambda u(x) \geq \lambda(\eta \|u\|_0),$$

donc

$$\min_{x \in K} \lambda u(x) \geq |\lambda| \eta \|u\|_0,$$

ce qui entraine que

$$\min_{x \in K} \lambda u(x) \geq \eta \|\lambda u\|_0,$$

il est clair que $P \cap (-P) = 0$, car $\|.\|_0$ est une norme.
Définissons les opérateurs suivants :

$$F : C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \longrightarrow C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$$

l'opérateur Nemitsky associe à f définit par $Fu(x) = f(x, u(x))$ et

$$T : P \longrightarrow C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$$

définit par

$$T(u) = -(\Delta)^{-1} Fu,$$

où $(-\Delta)$ est inversible car on peut obtenir l'unicité de la solution du problème (2.16) par la stricte monotonie de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ (voir [4]).
u est une solution du problème (2.16) si et seulement si

$$u = -(\Delta)^{-1} Fu.$$

Donc la solution du problème (2.16) est le point fixe de l'opérateur T.
Pour montrer que l'opérateur T admet un point fixe, nous devons montrer que les hypothèses du théorème (1.3.5) sont vérifiées.

2.3.3 Résultat principal

Théorème 2.3.1. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

(H1) il existe un ensemble compact $K \subset \Omega$ et un nombre $\eta > 0$ tel que

$$u(x) \geq \eta \|u\|_0 \text{ pour tout } x \in K,$$

et pour toute fonction positive superharmonique de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

(H2) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et il existe $\rho > 0$ avec $\rho \neq 1$ telle que

$$f(x, u) \leq a(x) + b(x) u^{\rho} \text{pour } (x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+,$$

où $a, b : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues, positives, et $\exists x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $f(x_0, 0) \neq 0$.

(H3) il existe $R > 0$ tel que

$$\min_{\substack{x \in K \\ u \in [R\eta, R]}} f(x,u) > R \|(-\Delta)^{-1} I_{|K}\|_0^{-1}.$$

(H4) $M_2\Big(\frac{1}{\rho M_2}\Big)^{\frac{\rho}{\rho-1}} - \Big(\frac{1}{\rho M_2}\Big)^{\frac{1}{\rho-1}} + M_1 < 0$ quand $\rho > 1$, où

$$M_1 = \|(-\Delta^{-1})a\|_0 \text{ et } M_2 = \|(-\Delta^{-1})b\|_0$$

Alors le problème (2.16) *admet au moins une solution positive.*

Démonstration. Il est clair que l'opérateur $T : P \longrightarrow C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta(Tu) = f(x,u) & \text{sur } \Omega \\ Tu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.18}$$

Comme Tu est superharmonique, donc par l'inégalité faible globale de Harnack, nous avons $T(P) \subset P$.
En effet si $v \in T(P)$, il existe $u \in P$ tel que $v = Tu$, donc

$$\min_{x \in K} v(x) \geq \min_{x \in K} Tu(x) \geq \eta \|Tu\|_0 \geq \eta \|v\|_0$$

d'où $v \in P$, ce qui implique

$$T : P \longrightarrow P$$

Par théorème d'Ascoli-Arzela T est complètement continue (suivre les mêmes étapes la preuve du lemme (2.1.3)).
Soient r, R deux nombres positifs, considérons les deux ensembles suivants :

$$S_1 = \{u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) : \|u\|_0 < r\},$$

et

$$S_2 = \{u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) : \|u\|_0 < R\}$$

Soit $u \in P \cap \partial S_1$, i.e. $u \in P$ et $\|u\|_0 = r$, alors en utilisant l'hypothèse (H2) et la monotonie de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ nous avons

$$\begin{aligned} \|Tu\|_0 &= \|(-\Delta)^{-1}Fu\|_0 \le \|(-\Delta)^{-1}(a(.) + b(.)u^\rho)\|_0 \\ &\le \|(-\Delta)^{-1}a\|_0 + \|(-\Delta)^{-1}b(.)u^\rho\|_0 \\ &\le \|(-\Delta)^{-1}a\|_0 + \|u\|_0^\rho\|(-\Delta)^{-1}b\|_0 \\ &\le \|(-\Delta)^{-1}a\|_0 + r^\rho\|(-\Delta)^{-1}b\|_0 \\ &\le M_1 + r^\rho M_2 \end{aligned}$$

Notons que quand $\rho < 1$, nous avons $r - M_1 - r^\rho M_2$ tend vers $(+\infty)$ quand r tend vers $(+\infty)$. Donc, si r est choisit suffisamment grand, nous avons

$$M_1 + r^\rho M_2 < r.$$

D'autre part, en utilisant l'hypothèse (H4), en déduit que pour tout $\rho > 1$, il existe $r(\rho) > 0$ qui satisfait $M_1 + r^\rho M_2 < r$.
En effet, si on choisit

$$r = \Big(\frac{1}{\rho M_2}\Big)^{\frac{1}{\rho-1}},$$

alors l'hypothèse (H4) implique que

$$M_2 r^\rho - r + M_1 < 0,$$

d'où

$$M_2 r^\rho + M_1 < r.$$

Donc

$$\|Tu\|_0 \le r = \|u\|_0$$

Maintenant, pour $u \in P \cap \partial S_2$, ie $(u \in P; \|u\|_0 = R)$, nous avant

$$R \ge u(x) \ge \eta\|u\|_0 = \eta R,$$

en utilisant l'hypothèse (H3) et par la monotonie de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|Tu\|_0 &= \| - (\Delta)^{-1}Fu\|_0 \\ &\ge \| - (\Delta)^{-1}Fu_{|K}\|_0 \\ &\ge \min_{\substack{x\in K \\ y\in[R\eta,R]}} f(x,y)\|(-\Delta)^{-1}I_{|K}\|_0 \end{aligned}$$

or d'après l'hypothèse (H3)

$$\|Tu\|_0 \;\; \geq \;\; R\|(-\Delta)^{-1}I_{|K}\|_0^{-1}\|(-\Delta)^{-1}I_{|K}\|_0 = R = \|u\|_0$$

donc $\|Tu\|_0 \geq \|u\|_0$ pour $\|u\|_0 = R$.
Les hypothèses du théorème de krasnoselskii sont vérifiées, donc T admet au moins un point fixe tel que $r \leq \|u\|_0 \leq R$. Donc le problème (2.16) admet une solution positive. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans le présent travail on s'est intéressé à l'existence des solutions situées dans un cône pour des problèmes aux limites avec Laplacien. Notre approche est basée sur l'application du théorème de Guo-Krasnoselskii (compression-expansion).

Ces types de problèmes sont largement utilisés pour la modélisation des différents phénomènes de la physique, de la chimie ou de la biologie. Trouver une solution, qui est de plus positive, à ces problèmes se ramène à entrevoir de nombreuses perspectives à notre travail.

En 2021, Y. Ding et Y. Li [13] ont montré l'existence des solutions positives radiales pour le problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u) & \text{sur } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.19}$$

où $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; r_1 < |x| < r_2\}$ un domaine sous forme d'un anneau de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$,
$f : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $I = [r_1, r_2]$. Une solution radiale positive de (2.19) peut être considérée comme une solution positive pour le problème aux limites de Dirichlet associé à une équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} -(r^{n-1}u'(r))' = r^{n-1}f(r, u(r)) \\ u(r_1) = u(r_2) = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

où $r = |x|$. Les auteurs ont étudié le problème (2.20) pour obtenir des solutions positive radiale dans le cas où f change de signe, et ceci en utilisant la théorie de l'indice de point fixe.

Dans des études postérieures, on pourrait utiliser cette même technique mais en mettant en avant le théorème de Krasnoselskii dans un double cône (1.3.8). Un autre centre d'intérét pourrait être l'utilisation de l'approche précédente (théorème (1.3.8)) et l'inégalité d'Harnak dans le cas où la nonlinéarité change de signe.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, "Singular problems modelling phenomena in the theory of pseudoplastic fluids", *ANZIAM J.*, 45(2003), p. 167-179.

[2] A. Ashyralyev, Y.A. Sharifov, "Existence and uniqueness of solutions for the system of non- linear fractional differential equations with nonlocal and integral boundary conditions", *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, Article ID 594802, 14pp.

[3] R. I. Avery, A. C. Peterson, "Three fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces", *Comput. Math. Appl.*, 42(2001), p. 313-322.

[4] S. Ayadi, T. Moussaoui, "Existence Of Solutions For Elliptic BVPs On A Bounded Domain of $\mathbb{R}^N$ Via Some Fixed Point Theorems", *Applied Mathematics*, E-Notes 17 (2017), p. 91-96.

[5] W. Allegretto, Y. X. Hang, "A Picone's identity for the p-Laplacien and applications", *Nonlinear Anal* , 32(1998), p. 819-830.

[6] C. S. Barroso, E. V. Teixeira, "A topological and geometric approach to fixed points results for sum of operators and applications", *Nonlinear Anal*, 60(2005), p. 625-650.

[7] C. S. Barroso, "Krasnoselskii's fixed point theorem for weakly continuous maps", *Nonlinear Anal*, 55(2003), p. 25-31.

[8] H. Berastycki, M. Esteban, "Existance and bifurcation of solutions for an elliptic de-generate problem", *Journal of differential equation*, 134(1997), p. 3-25.

[9] A. Boucenna, S. Djebali, T. Moussaoui, "The Cone Compression And Expansion Fixed Point Theorem With Convex And α-Homogeneous Boundary Operators", *Applied Mathematics*, E-Notes 16 (2016), p. 222-230.

[10] L. Boccardo, F. murat, J. P. Puel, "Existence results for some quasilinear parabolic equations", *Nonlinear Anal*, 13(1989), p. 373-392.

[11] A. Callegari, A. Nachman, "A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids", *SIAM J. Appl. Math.*, 38(1980), p. 275-282.

[12] N. Daoudi-Merzagui, M. Hellal, "Multiple positive solutions for nonlinear first first order periodic impulsive boundary-value systems with sign changing nonliniarities", *Lithunian Mathematical journal*, (2016), volume 56, Issuel, p. 32-48.

[13] Y. Ding, Y. Li, "Positive radial solutions for elliptic equations with sign-changing nonlinear terms in an annulus", *Complex variables and Elliptic Equations*, (2021), p. 1-15.

[14] L.C. Evans, Partial Differential Equations, *Second edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, 2010.

[15] L. H. Erbe, H. Wang, "Existence and nonexistence of positive soltions for elliptic equations in an annulus, *WSSIAA* 3(1994), p. 207-217.

[16] E. Fermi, "Un methodo statistico par la determinazione di alcune proprierctà dell'atome", *Rend.Accad. Naz. del Lincei. CL. sci. fis., mat. e nat.*, 6(1927), p. 602-607.

[17] M. Feng, X. Zhang et W. Ge, "positive fixed point of strict set contraction operators on ordered Banach spaces and applications", *Abstr. Appl. Anal.*, Vol(2010).

[18] X. Garaizar, "Existence of positive radial solutions for semilinear elliptic equations in the annulus", (1987). p. 69-92.

[19] W.G. Ge, J. L. Ren, "Fixed point theorems in double cones and their applications to nonlinear boundary value problems", *Chinese Annals of Mathematics*, 27(2006), p. 155-168.

[20] L.J. Grimm, "Existence and continuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29 (1971), p. 525-536.

[21] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, "Positive solution to a higher order fractional boundary value problem with fractional integral condition", *Romanian J. Math. Comput. Sci.*, 2(2012), p. 28-40.

[22] L-G. Huang, Xian Zhang, "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", *Journal of mathematical Analysis and Applications*, 332.2 (2007). p. 1468-1476.

[23] G. Infante, J. R. L Webb,"Nonlinear nonlocal boundary value problems and perturbed Hammerstein integral equations", *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 49(2006), p. 637-656.

[24] L. Iturriaga, E. Massa, J. Sánchez et P. Ubilla, "Positive solutions for an elliptic equation in an annulus with a superlinear nonlinearity with zeros", *Mathematische Nachrichten*, 287.10 (2014), p. 1131-1141.

[25] G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, "Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boudary value problem", *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 19.1(2002), p. 109-121.

[26] E. Kaufmann, Ebene. Mboumi, "Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2008.3 (2008), p. 1-11.

[27] M. A. Krasnoselskii, "Positive solutions of Operator Equations", *Noordhff, Groningen, The Netherland*, (1964). p. 137-149.

[28] M. K. Kwong, "On Krasnoselskii's cone fixed point theorem", *Fixed Point Theory and Applications 2008(2008)*, p. 1-18.

[29] P.D. Lax, "Hyperbolic systems of conservation laws ll", *Comm. Pure App. Math*, 10(1957), p. 537-566.

[30] W.-C. Lian, F.-H. Wong et C.-C. Yeh, "On the existence of positive solutions of nonlinear second order differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(1996), p. 1117-1126.

[31] S-S. Lin, "On the existence of positive radial solutions for nonlinear elliptic equations in annular domains", *Journal of Differential Equations*, 81.2 (1989), p. 221-233.

[32] N. Merzagui, Y. Tabet, "Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem with sign changing nonlinearities", *Filomat*, Vo27(3)(2013), p. 487-499.

[33] T. Moussaoui, R. Precup, "Positive solutions for elliptic boundary value problems with a Harnack-like property", *Cubo*, 10(2008), p. 109-117.

[34] J.D Murray, "Mathematical Biology", *Biomathematics Texts, S pringer-Verlag*, 19(1989).

[35] D. O'Regan, R. Precup, "Compression-expansion fixed point theorem in two norms and applications", *Journal of mathematical analysis and applications*, 309.2(2005), p. 383-391.

[36] M. Otani, T. Teshima, " On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations", *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci*, 64(1988), p. 8-10.

[37] A. porretta, J. Vovelle, "L soltuions to first order hyperbolic equations in bounded domains", *Comm. Partial Diff. Equa*, 28(2003), p. 381-403.

[38] R. Precup, "positive solutions of semilinear elliptic problems via krasnosel"skii type theorems in cones and Harnack's inequality", *Applied Mathematics*, Babes-Bolyai, Romania, (2000). p. 125-132.

[39] R. Precup, "Moser-Harnack inequality, Krasnosel'skii type fixed point theorems in cones and elliptic problems", *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 40(2012), p. 301-313.

[40] M. Ruyun, H. Wang, "positive solutions of nonlinear three-point boundary-value problems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 279.1(2003), p. 216-227.

[41] L. H. Thomas, "The calculation of atomic fields", *Proc. Camb. Phil. Soc.*,32(1927), p. 542-548.

[42] J.R.L. Webb, G. Infante, D. Franco, "Positive solutions of nonlinear fourth-order boundary-value problems with local and non-local boundary conditions", *Proc. R.Soc. Edinb.*, Sect. A, Math. 138 (2) (2008), p. 427-446.

[43] T. Xiang, R. Yuan, "A class of expansive-type Krasnoselskii fixed point theorems", *Nonlinear Anal*, 71(2009), p. 3229-3239.

[44] E. Zeidler, "Nonlinear Functional Analysis and its Applications I ", *Springer-verlag New York Inc*, (1986). p. 51-57.