République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement Supérieure de la Recherche Scientifique

---

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Équations aux dérivèes partielles et Applications

présenté par

ABDELOUAHAB Ahlem

Existence et Multiplicité de Solutions pour des Problèmes Elliptiques Fractionnaires

Soutenu devant le jury composé de :

M.M.Yebdri	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mme.F.Dib	M.C.A	Ecole supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen	Examinateur
Mme.N.Merzagui	Professeur	Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicaces

A la mémoire de mon père, vous avez été et vous restez toujours un exemple pour moi, aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel. Que dieu bénisse votre âme.

A ma chére mère en témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous ses sacrifices, tout l'amour dont elle m'entoure, j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

A mes chéres soeurs IBTISSEM, DJALILA

A tous mes chers amis.

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant de la patience et de la volonté qu'il m'a donné pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Mme. N.Merzagui professeur à l'université de Tlemcen, qui m'a encadrée tout au long de ce mémoire. Elle m'a fait l'honneur d'accepter de diriger ce mémoire. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme,j'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

Je voudrais également remercier Monsieur M.Yebdri professeur à l'université de Tlemcen. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. J'exprime mes remerciements les plus vifs à Madame F.Dib maître de conférences A à l'ecole supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen pour l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et pour le temps qu'elle a consacré en acceptant de l'examiner.

Je voudrais remercier tous les enseignants et les collègues du département de mathématiques, ainsi que tous ceux qui ont participé et m'ont aidé dans mes études, et que je n'ai pas pu citer.

Enfin, merci à tous ceux et celles qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail de mémoire .

Table des matières

Notation

Symbole	Signification
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Élément de $\mathbb{R}^N$
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}$	la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^N$
$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$	multi- indice, élément de $\mathbb{N}^N$
$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$	La longueur du multi-indice α
χ_K	l'indicatrice de l'ensemble K .
$\|\Omega\|$	Mesure de Ω
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$B_r(x)$	La boule de centre x et de rayon r.
$C_\Omega B_r(x)$	le complémentaire de la boule $B_r(x)$ par rapport à Ω .
$(u * v)(x)$	Le produit de convolution de u et v défini par : $(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-t)v(t)dt$
Γ	La fonction Gamma définie par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.
$D_i u = \partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$	Dérivée partielle de u par rapport a x_i
$D_{ij} u = \partial_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$	Deuxième dérivée partielle de u par rapport a x_i, x_j
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de u
$D^2 u = (D_{ij} u)$	Matrice Hessienne de u
Δu	Laplacien de u
$C^\infty(\Omega)$	Les fonctions infiniment dérivables dans Ω
$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$	Les fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact
$D'(\Omega)$	Espace des distributions définies sur Ω
$M(\Omega)$	L'ensemble des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$.
$L^p(\Omega)$	Espace de Lesbegue
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev avec trace zero
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$\hookrightarrow$	Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compacte.

Introduction

L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un". Le calcul fractionnaire est la généralisation des notions de l'intégration et de dérivation à l'ordre non-entier.
Selon une thèse d'histoire des mathématiques [16], la dérivation d'ordre fractionnaire remonte à la fin du 17ème siècle, diverses correspondances entre Gottfried Leibnitz, Guillaume de l'Hospital et Johann Bernoulli en témoignent.
Suite aux travaux de Joseph Liouville et Bernard Riemann au milieu du 19éme siècle, les notions fondamentales de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire ont été introduites. De nombreux mathématiciens ont défini différentes approches généralisant la notion de dérivations à un ordre non-entier, par exemple la dérivée au sens de Grunwald-Letnikov, au sens de Riemann-Liouville,au sens de Caputo et ont généralisé les transformations de Fourier et de Laplace associés à la dérivée fractionnaire en considérant la multiplication par $(iw)^{\alpha}$ ou p^{α} avec α non-entier pour plus de détails sur les divers approches de dérivations fractionnaires voir [35] et [4].
Cette notion de dérivation fractionnaire n'est pas une question de mathématiques "pures" elle présente un intérêt certain pour l'ingénieur. Le principe de causalité en physique signifie que l'état présent d'un processus f démarrant à l'instant $t = a$, dépend de tous les états précédents(dans le passé). Ce qui est bien introduit par les dérivées fractionnaires à gauche.
La dérivation fractionnaire s'introduit naturellement dans la modélisations en mécanique des gommes, des caoutchoucs et toute sorte de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. Elle intervient en bio-chimie (modélisation des polymères et protéines), l'électromagnétisme, l'acoustique ou la thermique, la théorie des controle(mouvement à travers des milieux poreux)...etc. Pour plus détails voir [20],[23],[31],[32] et[36].
Nombreuses méthodes sont utilisées pour prouver l'existence, la multiplicité ou l'unicité de solution, pour les équations différentielles fractionnaires comme les techniques du point fixe, la méthode de points critiques, la notion de sous et sur solutions voir [44],[45],[47].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et la multiplicité de solutions pour une classe d'équations aux dérivées partielles fractionnaires.
Nous considérons en particulier un problème de Dirichlet associé au Laplacien fractionnaire. Cet opérateur constitue l'opérateur non local le plus simple et en même temps un modèle, il est considéré comme référence dans l'étude de ce type d'opérateurs.
L'intérêt porté aux opérateurs non locaux tels que le Laplacien fractionnaire a augmenté au

cours des dernières années, ils apparaissent naturellement dans la mécanique des continums, les phénomènes de transition de phase, la dynamique de la population et la théorie des jeux voir par exemple Caffarelli [11] et ses références. Metzler et Klafter [33, 34] ont étudié la description de la diffusion anormale par la dynamique fractionnaire dans leurs travaux et diverses équations aux dérivées partielles fractionnaires. Les opérateurs fractionnaires sont également impliqués dans les mathématiques financières (Processus de Lévy en Finance [5]).
Le Laplacien fractionnaire est défini comme un opérateur pseudo différentiel, i.e comme une extension du concept d'opérateur différentiel ;

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

où $s \in (0,1)$, $B(x,\varepsilon)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon ε et $C(N,s)$ est la constante de normalisation :

$$C(N,s) = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \Big)^{-1}$$

Où $\xi = (\xi_1, \xi')$ avec $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$.
Cet opérateur peut être aussi défini en utilisant la transformée de Fourier par :

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2s} . \mathcal{F} u \big)$$

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au côté théorique de l'opérateur Laplacien fractionnaire, tel que : ses définitions équivalentes, ses propriétés, le cadre fonctionnel et les inégalités associées. Ainsi, nous étudions la version non locale des problèmes elliptiques de type quasi linéaire, i.e

$$(P) \qquad \begin{cases} (-\Delta)^s u &= f(.,u) & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

avec $s \in (0,1)$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de frontière régulière et f vérifiant des hypothèses qui seront ultérieurement définies.
Notre mémoire est composé de trois chapitres :

* Dans le premier chapitre nous présentons les outils d'analyse qui sont utilisés pour comprendre et traiter les problèmes considérés. Avant d'introduire le problème non local et ces outils nous commençons par des rappels du cadre classique pour souligner la similitude dans la structure et les propriétés, nous présentons un aperçu sur la formulation variationnel des problèmes elliptiques et la théorie des points critiques tel que la condition de Palais-Smale (condition de compacité), théorème du Col de la montagne (Mountain Pass Theorem) et le théorème de Clark. Nous terminons ce chapitre, en présentant les distributions tempérées et quelques propriétés de leurs transformées de Fourier, cette dernière est utilisée dans l'une des définitions de Laplacien fractionnaire.
* Dans le second chapitre nous introduisons les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}$ et leur injections continues et compactes dans les espaces de Lebesgue et de Hölder. La deuxième partie est consacrée aux divers approches de définitions de l'opérateur Laplacien fractionnaire (intégrale singulière, transformée de Fourier, produit de convolution...).
* Dans le dernier chapitre nous étudions l'existence et la multiplicité de solutions non triviales du problème (P), en se basant sur l'application de théorème de Clark présenté dans le chapitre 1.

Chapitre 1

Préliminaires et outils de base

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations et outils utilisés tout au long de ce manuscrit. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte (dans les chapitres concernés). Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie et qui seront utilisés dans le texte.
Les références de base de ce chapitre sont [10],[17],[19],[14],[38],[26] et[28] .

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue L^p

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \, est \ mesurable \ et \ ||f||_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

où

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}$$

Définition 1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f est \ mesurable \ et \ \exists \ \ c > 0 \ telle \ que \ |f(x)| \leqslant c, p.p \ \ dans \ \ \Omega\}$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme :

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = inf\{c > 0, |f(x)| \leqslant c, p.p \ \ sur \ \ \Omega\}$$

Théorème 1.1. *L'espace $L^p(\Omega)$ est :*

- *Un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*
- *Un espace séparable pour tout $1 \leqslant p < +\infty$*
- *Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$*

Propriété 1.1. *(**d'injection des espaces de Lebesgue**)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de mesure finie, et soit $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$. Alors :

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

1.1.2 Espaces de Hölder

Définition 1.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note $C_b^m(\Omega)$ l'espace des fonction bornées de classe C^m sur Ω, défini par :*

$$C_b^m(\Omega) = \Big\{ u \in C^m(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leqslant m, \exists \ \ k > 0; \quad ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant k \Big\}.$$

avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ *et* $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_N}^{\alpha_N}}$
On le munit de la norme :

$$||u||_m = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Définition 1.4. *Soit $0 < \lambda \leqslant 1$, on note $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ l'espace des fonctions höldériennes bornées sur Ω d'ordre λ, défini par :*

$$C_b^{0,\lambda}(\Omega) = \Big\{ u \in C_b(\Omega), \quad \exists C > 0, \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega; |u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^\lambda \Big\}$$

Si $\lambda = 1$, on l'appelle espace des fonctions Lipschitziennes bornées.
L'espace $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$||u||_{0,\lambda} = ||u||_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^{0,\lambda}}$$

avec

$$[u]_{C^{0,\lambda}} = \sup_{(x,y) \in \Omega^2 \backslash x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

Plus généralement, on définit l'espace $C_b^{m,\lambda}$ par :

$$C_b^{m,\lambda}(\Omega) = \Big\{ u \in C^m(\Omega); \quad D^\alpha u \in C_b^{0,\lambda}(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = m \Big\}$$

Muni de la norme

$$||u||_{m,\lambda} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} ||D^j u||_{L^\infty(\Omega)} + ||D^m u||_{0,\lambda}$$

1.1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}$

Dans cette section nous introduisons les espaces de Sobolev d'ordre entier et leurs propriétés fondamentales.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty)$.

Définition 1.5. *On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \setminus \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \quad , |\alpha| \leqslant m, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \Big\}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ *et* $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_N}^{\alpha_N}}$
Ici $D^\alpha u$ est la dérivée au sens des distributions de u sur Ω, c.à.d

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad < D^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha \varphi >$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

- pour $1 \leqslant p < +\infty$:

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

- pour $p = +\infty$

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} := \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)}$$

Si p=2 :
On remplace la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$, c'est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} := < u, v >_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \Big\langle D^\alpha u, D^\alpha v \Big\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Propsition 1.1. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est :*

- *Un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*
- *Un espace séparable pour tout $1 \leqslant p < +\infty$.*
- *Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

Définition 1.6. *L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.2. *Soit $p \in [1, +\infty[$ alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$; i.e*

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{||.||_{W^{m,p}}} = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$$

Théorème 1.3. ***(Injection continue des espaces de Sobolev)***
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

1. *Si $N > mp$ alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad pour \quad p \leqslant q \leqslant \frac{Np}{N - mp}$$

2. *Si $N = mp$ alors :*
   - *Si $p > 1$ alors :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad pour p \leqslant q < +\infty.$$

   - *Si $p = 1$ alors :*

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$$

3. *Si $N < mp$ alors :*
   - *Pour $\frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$ et j satisfait $(j-1)p < N < jp$, on a :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N) \quad pour \quad tout \quad 0 < \lambda < j - \frac{N}{p}$$

   - *Pour $\frac{N}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geqslant j = \frac{N}{p} + 1$*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N) \quad pour \quad tout \quad 0 < \lambda < 1$$

Théorème 1.4. ***(Théorème de Rellich-Kondrachov)***
Soit Ω un ouvert borné, lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ avec $N > 1$.

- *Si $N > mp$ alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad pour \quad q \leqslant \frac{Np}{N-mp}$$

- *Si $N = mp$ alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad pour \quad q + \infty$$

- *Si $N < mp$ alors et $j = \left[\frac{N}{p}\right] + 1$ alors :*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m-j,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad pour \quad \lambda < j - \frac{N}{p}.$$

1.2 Quelques inégalités et théorèmes de convergence

Notation Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on désigne par p' l'exposant **conjugué** de p c'est à dire :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

Théorème 1.5. ***(Inégalité de Hölder)***
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg|dx \leqslant ||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}$$

Théorème 1.6. ***(Inégalitée d'interpolation)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $f \in L^r(\Omega)$ avec $r \in [p, q]$, et

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}\|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad pour\ tout\ \alpha \in [0, 1].$$

Proposition 1.1. ***(Inégalité de Poincaré)***
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ dans une direction, $1 \leqslant p < +\infty$. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\ , \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega), \ 1 \leqslant p < +\infty.$$

En particulier $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ représente une norme de u dans l'espace $W^{1,p}_0(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.7. ***(Inégalité de Sobolev)***
Soit $1 \leqslant p < N$, il existe une constante c qui dépend de $\mathbb{N}$ et p telle que :

$$\|u\|_{L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N)}.$$

Pour tout $u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N)$
Comme conséquence, l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte d'une manière continue dans $L^q(\Omega), \forall q \in [p, \frac{Np}{N-p}]$.

Théorème 1.8. ***(Inégalité de Hardy)***
Soit $1 < p < N$, *si* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$:

- $\dfrac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$
- *L'inégalité de Hardy*
$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p}\, dx \leqslant C_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx,$$
avec : $C_{N,p} = (\frac{p}{N-p})^p$.

Théorème 1.9. ***(Convergence dominée de Lebesgue)***
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* (f_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que :*

- $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.
- *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *pp sur* Ω.

Alors,
$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad ||f_n - f||_{L^1} \to 0$$

Théorème 1.10. ***(Convergence dominée de Lebesgue inverse)***
Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, (f_n) *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* f *une fonction de* $L^p(\Omega)$, *telles que :* $||f_n - f||_{L^p} \to 0$. *Alors, il existe une sous suite extraite* (f_{n_k}) *telle que :*

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.

ii) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ $\forall k$ *et pp sur* Ω *avec* $h \in L^p(\Omega)$.

Théorème 1.11. ***(Fubini-Tonnelli)***
Soient Ω_1 ,Ω_2 *deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$. *On suppose que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *alors pour presque tout* $x \in \Omega_1$ *on a :*
$$F(x,.) \in L^1(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$
et pour presque tout $y \in \Omega_2$ *on a :*
$$F(.,y) \in L^1(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$$
De plus
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\Big)dx = \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} F(x,y)dx\Big)dy$$

Définition 1.7. ***(la convergence faible)***
Soit (x_n) *une suite de l'espace vectoriel normé* $(X, ||.||_X)$ *et soit* X' *son dual topologique. On dit que* (x_n) *converge faiblement dans* X, *s'il existe un élément* $x \in X$ *tel que :*
$$\forall f \in X', < f, x_n > \to < f, x >$$
où $<,>$ *dénote le crochet de dualité.*
Et on notera $x_n \rightharpoonup x$ *la convergence faible de* (x_n) *vers* x *dans* X .

Propsition 1.2. *Soit* (x_n) *une suite de* X. *On a* *i) Si x_n converge vers x fortement alors x_n converge vers x faiblement.*

ii) Si $x_n \rightharpoonup x$, alors $||x_n||$ est bornée et $||x|| \leqslant \lim inf||x_n||$.

iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ (faiblement) dans X et $f_n \to f$ (fortement) dans X', alors

$$< f_n, x_n > \to < f, x >$$

Théorème 1.12. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit (x_n) une suite bornée dans X. Alors il existe une sous suite extraite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement vers $x \in X$.*

1.3 Dérivées et points critiques

Définition 1.8. *(Dérivée directionnelle)*
Soient Ω une partie d'un espace de Banach X et $J : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \Omega$ et $v \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tv \in \Omega$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite par $J'_v(u)$.

Définition 1.9. *(Dérivé au sens de Gâteaux)*
On dit que la fonction J d'un ouvert Ω d'un espace de Banach X à valeurs réelles, est différentiable au sens de Gâteaux en $u \in \Omega$, s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $v \in X$ où $J(u + tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_v(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} =< l, v >$$

On posera $J'_g(u) = l$

Définition 1.10. *(Dérivée au sens de Fréchet)*
Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert de X et $J : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $u \in \Omega$, on dit que J est différentiable en u au sens de Fréchet, s'il existe $l \in X'$, tel que :

$$\forall v \in \Omega \quad J(v) - J(u) =< l, v - u > +o(v - u)$$

Si J est différentiable, l est unique et on note $J'(u) = l$

Propsition 1.3. *Soit Ω un ouvert de X et $J : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteaux différentiable dans un voisinage de $u \in \Omega$, alors si l'application $u \to J'_g(u)$ est continue au voisinage de u. Alors J est Fréchet différentiable et on a*

$$J'(u) = J'_g(u)$$

.

Définition 1.11. *(Points critiques)*
Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $J \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \Omega$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de J.
Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J, s'il existe $u \in \Omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de J.

1.4 Formulation variationnelle d'un problème elliptique

Nous commençons par introduire deux notions utilisées dans cette section à savoir : fonctionnelle coercive et fonction de Caratheodory.

Définition 1.12. *Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach X est dite coercive s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ telles que :*

$$J(x) \;\geqslant\; \alpha\|x\|_X + \beta.$$

Il est évident de voir que si J est coercive, elle est bornée inférieurement et chaque suite minimisante est bornée.

Définition 1.13. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on dit que la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \to & f(x,t) \end{array}$$

est de Caratheodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$ si pour tout réel t, la fonction $x \to f(x,t)$ est mesurable et pour presque tout x dans Ω , la fonction $t \to f(x,t)$ est continue.

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction test, et en procédant à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle.
Nous considérons le problème de Dirichlet pour une EDP elliptique :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Au & = & f & \quad dans \;\; \Omega \\ u & = & 0 & \quad sur \;\; \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction donnée, et A est un opérateur elliptique écrit sous la forme divergence

$$\begin{array}{rcl} Au & = & -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}.\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c.u \\ & = & div(a.\nabla u) + b.\nabla u + cu \end{array}$$

avec a, b, c sont des fonctions régulières et la matrice $a(.)$ vérifie la condition d'ellipticité. i.e

$$\exists \alpha(x) > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, a_{ij}(x).\xi_i.\xi_j \geqslant \alpha(x).|\xi|^2 \;\; pp \;\; x \in \Omega$$

En particulier, pour $a_{ij} = \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & , & i = j \\ 0 & , & i \neq j \end{array} \right.$ et $b = 0, c = 0$, on obtient $Au = -\Delta u$ avec Δ est l'opérateur laplacien.
$*$ La formulation variationnelle d'un problème aux limites (elliptique) prend toujours une forme de type :

$$B(u,v) = L(v), \quad \forall v \in X$$

avec X un espace vectoriel, $B(.,.)$ une forme bilinéaire et $L(.)$ une forme linéaire.
Ecrire un problème aux limites sous forme variationnelle c'est déterminer l'espace X où l'on

cherche la solution et trouver B et L.

Si l'on suppose par exemple que les fonctions $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i,j = \overline{1,N}$, $a_{ij} = a_{ji}$ et $f \in L^2(\Omega)$.
En multipliant l'équation $Au = f$ par une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et l'intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}.\frac{\partial u}{\partial x_i})\Big) vdx + \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) vdx + \int_\Omega c.uvdx = \int_\Omega f.vdx$$

L'intégration par parties permet d'écrire :

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}.\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big) dx + \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) vdx + \int_\Omega c.uvdx = \int_\Omega f.vdx$$

$$\int_\Omega a\nabla u.\nabla vdx + \int_\Omega b\nabla u.vdx + \int_\Omega c.u.vdx = \int_\Omega f.vdx \tag{1.2}$$

Déterminer une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie (1.2), est la formulation faible du problème (1.1).
la formulation variationnelle du problème (1.1) a été donc donnée par $X = H_0^1(\Omega)$ et

$$B(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

avec :

$$B(u,v) = \int_\Omega a\nabla u.\nabla vdx + \int_\Omega b\nabla u.vdx + \int_\Omega c.u.vdx$$
$$L(v) = \int_\Omega f.vdx$$

A partir de la formulation variationnelle, on peut chercher $u \in X$ comme point critique d'une fonctionnelle J (fonctionnelle d'énergie) i.e

$$DJ(u) = 0$$

Pour notre problème (1.1), la fonctionnelle d'énergie est donnée par

$$J(v) = \frac{1}{2}\Big[\int_\Omega a.\nabla v.\nabla vdx + \int_\Omega b\nabla v.vdx + \int_\Omega c.|v|^2 dx\Big] - \int_\Omega f.vdx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On note que tout point critique de J est une solution faible du problème (1.1)

Un outil essentiel dans le calcul variationnel, une condition de compacité c'est la condition de Palais-Smale.

Définition 1.14. ***(Condition de Palais-Smale)***
Soient X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c), si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que

$$J(u_n) \longrightarrow c \ \ dans \ \ \mathbb{R} \ \ et \ \ J'(u_n) \longrightarrow 0 \ \ dans \ \ X'$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Maintenant, nous introduisons le Théorème du Col de la montagne qui est l'un des plus importants outils pour montrer l'existence de solution pour des problèmes admettant une formulation variationnelle .

Théorème 1.13. ***(Théorème du Col)***
Soient X un espace de Banach, $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $J(0) = 0$ et que :
i) Il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $J(u) \geqslant a$.
ii) Il existe $\alpha > 0$ et $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $J(u_0) < \alpha$.
Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geqslant a$. De façon plus précise, si on pose

$$B = \{\varphi([0,1]); \varphi \in \mathcal{C}([0,1], X),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = u_0\},$$

alors :

$$c := \inf_{A \in B} \max_{v \in A} J(v).$$

Un autre théorème qui aussi très utilisé pour démontrer l'existence de solutions, plus précisément une suite de solutions c'est le Théorème de Clark qu'est appliqué dans ce mémoire pour établir l'existence des solutions pour les problèmes fractionnaires.

1.5 Théorème de Clark

Le théorème de Clark est un résultat important dans la théorie des points critiques (voir [13] et [22]). Ce théorème assure l'existence d'une suite de points critiques à valeurs négatives. Il est souvent appliqué pour montrer l'existence d'une infinité de solutions pour des problèmes elliptiques et pour des systèmes hamiltoniens.
On note qu'il y a plusieurs versions du théorème de Clark. Nous en présenterons deux versions et pour plus détails sur les autres versions voir [12] et [46].
Pour introduire le théorème de Clark, nous avons besoin de quelques terminologies.

La théorie du genre qui est introduite par Krasnoselk'skii

Définition 1.15. *(voir [26] et [40])*
Soit X un espace de Banach. On désigne par $\Sigma(X)$ l 'ensemble des parties fermées symétriques de X ne contenant pas l'origine, plus précisément :

$$\Sigma(X) = \{A \subset X, \quad A \neq \varnothing, 0 \notin A \quad et \quad A = -A\}$$

Si $A \in \Sigma(X)$ on appelle genre de A le nombre, noté $\gamma(A)$, défini par :

$$\gamma(A) := inf\{n \geqslant 1, \exists \varphi : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad continue \quad et \quad impaire\}$$

Par commodité on posera $\gamma(\varnothing) = 0$.
S'il n'existe pas d'entier $n \geqslant 1$ et de fonction φ continue et impaire de A dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose $\gamma(A) = +\infty$.

Nous regroupons ci-dessous quelques propriétés essentielles du genre et pour plus de détails voir [26].

Propsition 1.4. *Soit X un espace de Banach et $A, B \in \Sigma(X)$.*

- *Si $A \subset B$, alors $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$*
- $\gamma(A \cup B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$
- *S'il existe une fonction impaire $g \in C(A, B)$ alors $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$.*

La notion de pseudo-gradient

Définition 1.16. *(voir [37]) Soit X un espace de Banach et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, le champ vectoriel pseudo-gradient de φ est défini par :*
la fonction lipschitzienne $W : X \setminus K \to E$ avec $K = \{u \in X, \quad \varphi'(u) = 0\}$ vérifiant :

* $||W(u)|| \leqslant 2||\varphi'(u)||, \quad \forall u \in X \setminus K$

* $< \varphi'(u), W(u) > \geqslant ||\varphi'(u)||^2, \quad \forall u \in X \setminus K$

Maintenant, nous présentons la version du théorème de Clark introduite par Heinz dans [22].

Théorème 1.14. *Soit X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui satisfait :*

1) *$J(0) = 0$, J est paire et bornée.*
2) *J satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ pour tout $c < 0$*
3) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $A \in \Sigma(X)$ tel que :*

$$\gamma(A) \geqslant k \quad et \quad \sup_{u \in A} J(u) < 0$$

Alors il existe une suite de valeurs critiques (c_k) de J tel que :

$$c_j < 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$c_j \to 0, \quad quand \quad j \to +\infty$$

Et

$$c_j = \inf_{A \in \Sigma(X), \gamma(A) \geqslant j} \sup_{u \in A} J(u)$$

Ce théorème assure l'existence d'une suite de points critiques de valeurs critiques c_k telles que $c_k < 0$ et $c_k \to 0$, sans aucune information sur la structure de cette suite de points critiques. Et concernant la démonstration de ce théorème voir [22].
Dans la suite nous introduisons une autre version de Théorème de Clark qui précise la structure de cette suite de points critiques et qui est introduite par Liu Wang (dans [46]).

Théorème 1.15. *Soit X un espace de Banach, et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que*

1. *$J(0) = 0$, J est paire et bornée.*

2. *J satisfait la conditions de Palais-Smale (PS).*
3. *Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un sous espace $X^k \subset X$ de dimension k et $\rho_k > 0$ tels que $\sup_{X^k \cap S_{\rho_k}} J < 0$, avec $S_\rho = \{u \in X, \quad ||u|| = \rho\}$,*

Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vraie :

- *i Il existe une suite de points critiques (u_k) telles que $J(u_k) < 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $||u_k|| \to 0$ quand $k \to +\infty$.*
- *ii Il existe $r > 0$ telle que pour a tout $0 < a < r$ il existe un point critique u, telle que $||u|| = a$ et $J(u) = 0$.*

La démonstration du théorème 1.15 est faite par l'absurde , i.e en supposant que (i) et (ii) sont fausses, autrement dit

$$\exists r_0 > 0 \quad tel \quad que \quad si \quad ||u|| \leqslant r_0 \quad et \quad J(u) < 0, \quad alors \quad J'(u) \neq 0$$

$$Et \quad \exists 0 < r_1 < r_0 \quad tel \quad que \quad si \quad ||u|| = r_1 \quad et \quad J(u) = 0, \quad alors \quad J'(u) \neq 0$$

elle est présentée en quatre étapes :

* On définit W comme un champ vectoriel pseudo-gradient de J tel que $W(-u) = -W(u)$ pour tout $u \in X \setminus K$.
* On définit la fonction $\varphi^t(u)$ pour $u \in X \setminus K$ et $t \geqslant 0$ comme la solution unique de problème :
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(u)^t &= -W(\varphi^t(u)), \quad t \in]0, +\infty[\\ \varphi^0(u) &= u \end{cases}$$
* On montre l'existence d'une suite positive (S_n) tel que $S_n \to +\infty$ et pour b^* fixé on a $||\varphi^{S_n}(u)|| > b^*$ pour n assez grand.
* Finalement, on définit $A = X^k \cap S_{\rho_k}$ et on montre que $\sup\limits_A J < 0$ et $\gamma(A) \geqslant k$ en utilisant les propriétés du genre,une contradiction est alors établie pour plus de détails voir [46].

Remarque 1.1. *:*

- *La condition (3) du théorème 1.15 est plus forte que la condition (3) du théorème 1.14 (voir [24]).*
- *De plus, on note que le théorème de Clark est aussi attribué à Ambrosetti-Rabinowitz, et qu'en fait c'est le théorème de Col dans le cas de symétrie qui est mentionné dans [25].*

1.5.1 Exemple d'application :

Nous donnons une application du théorème 1.15 à un problème elliptique constituant le cas classique du problème fractionnaire considéré dans ce mémoire i.e nous considérons :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(., u) \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière.
Δ est l'opérateur laplacien classique, défini par $\Delta u = div(\nabla u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$.
Et $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, telle que $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ satisfait :

(f_1) $F(x,0)=0$.

(f_2) Il existe une boule $B_r(x_0)\subset\Omega$ telle que ;

$$\lim_{|t|\to 0}\frac{F(x,t)}{|t|^2}=+\infty \tag{1.4}$$

uniformément pour $x\in B_r(x_0)$

(f_3) $F(x,t)$ est paire en t pour tout $(x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$

Théorème 1.16. *Le problème (1.3) admet une infinité de solutions (u_k) vérifiant $||u_k||_{H_0^1(\Omega)}\to 0$ quand $k\to\infty$.*

Preuve.
Par la continuité de F et les conditions (f_1) et (f_2), il existe $\delta>0$, tel que ;

$$|F(x,s)|>|s|^2 \;\; et \;\; |F(x,s)|<|s| \;\; pour \;\; |s|<\delta \tag{1.5}$$

Il est possible de construire $\tilde{F}\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ telle que

$$\tilde{F}(x,s)=\begin{cases} F(x,s) & , \;\; x\in\overline{\Omega}\ et\ |s|<\delta/2\\ 0 & , \;\; x\in\overline{\Omega}\ et\ |s|>\delta\end{cases} \tag{1.6}$$

Par la condition (f_3), $\tilde{F}(x,t)$ est paire en par rapport à sa deuxième variable.
On note $\tilde{f}=D_t\tilde{F}$, et on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= \tilde{f}(.,u) & \text{dans } \Omega\\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega\end{cases} \tag{1.7}$$

On considère l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme

$$||u||_{H_0^1(\Omega)}=||\nabla u||_{L^2(\Omega)}=\Big(\int_\Omega|\nabla u|^2\Big)^{1/2}$$

On définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (1.7) par ;

$$\phi(u)=\frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)}-\int_\Omega\tilde{F}(x,u)\;\;\forall u\in H_0^1(\Omega)$$

On a bien $\phi\in C^1(H_0^1(\Omega))$, $\phi(0)=0$, elle est paire et bornée et sa dérivée est donnée par

$$<\phi'(u),v>=<u,v>_{H_0^1(\Omega)}-\int_\Omega\tilde{f}(x,u)v \tag{1.8}$$

De plus $f(x,t)=\tilde{f}(x,t)$ pour $(x,t)\in\Omega\times(-\delta/2,\delta/2)$, donc les points critiques de ϕ telle que $||u||_\infty<\delta/2$ sont des solutions faibles du problème (1.3).

$*$ Maintenant on vérifie que ϕ est coercive :
En utilisant (1.5) et par définition de $\tilde{F}$ on a

$$|\tilde{F}(x,s)|<|s| \;\; sur\ \Omega\times\mathbb{R} \tag{1.9}$$

ce qui implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que ;

$$|\tilde{f}(x,s)| \leqslant c \ \ sur \ \Omega \times \mathbb{R} \tag{1.10}$$

alors par (1.9) et en utilisant les inégalités de Hölder et Poincaré ;

$$\begin{aligned}
\phi(u) &> \frac{1}{2}||u||^2_{H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega |u(x)|dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}||u||^2_{H^1_0(\Omega)} - |\Omega|^{\frac{1}{2}}.||u||_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant \frac{1}{2}||u||^2_{H^1_0(\Omega)} - c_p.|\Omega|^{\frac{1}{2}}||u||_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

Ce qui implique $\phi(u) \to +\infty$ quand $||u||_{H^1_0(\Omega)} \to +\infty$ et donc ϕ est coercive.
$*$On vérifie que ϕ satisfait la condition de Palais-Smaile (PS)
Soit (u_n) une suite de $H^1_0(\Omega)$ telle que :

$$\phi(u_n) \to c \ \ et \ \ \phi'(u_n) \to 0 \tag{1.11}$$

Par la coercivité de ϕ on a (u_n) est une suite bornée dans $H^1_0(\Omega)$ et donc il existe $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que ;

$$u_n \rightharpoonup u \ \ dans \ \ H^1_0(\Omega) \tag{1.12}$$

$$u_n \to u \ \ dans \ \ L^2(\Omega) \tag{1.13}$$

$$u_n(x) \to u(x) \ \ p.p \ \ sur \ \ \Omega \tag{1.14}$$

En utilisant (1.13) et (1.11) on obtient ;

$$< \phi'(u_n), u_n - u > \to 0 \ \ quand \ \ n \to +\infty \tag{1.15}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et (1.10) on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)(u_n - u) &\leqslant ||\tilde{f}(.,u_n)||_{L^2(\Omega)}||u_n - u||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant c \ \ |\Omega|^{\frac{1}{2}}||u_n - u||_{L^2(\Omega)} \to_{n\to+\infty} 0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Par (1.15),(1.16) on a

$$< u_n, u_n - u >_{H^1_0(\Omega)} = < \phi'(u_n), u_n - u > + \int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)(u_n - u) \to 0 \ \ quand \ \ n \to +\infty$$

De la même manière on montre que ;

$$< u, u_n - u >_{H^1_0(\Omega)} \to 0 \ \ quand \ \ n \to +\infty$$

Alors ;

$$||u_n - u||_{H^1_0(\Omega)} \to 0 \ \ quand \ \ n \to +\infty$$

i.e ϕ satisfait la condition de (PS) .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si X^k est un sous espace de $C_0^\infty(B_r(x_0))$ de dimension k et pour $\rho_k > 0$ petit (on prend $\rho_k < \delta/2$), alors (1.4) implique que $\sup_{X^k \cap S_{\rho_k}} \phi < 0$, avec $S_\rho = \{u \in H_0^1(\Omega); ||u||_{H_0^1(\Omega)} = \rho\}$.
Maintenant, puisque ϕ satisfait toutes les conditions du théorème de Clark, alors il existe une suite de points critiques (u_k) de ϕ vérifiant $\phi(u_k) \leqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $||u_k||_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ quand $k \to \infty$. ■

1.6 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Définition 1.17. *La classe de Schwartz $\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions de classe C^∞sur $\mathbb{R}^N$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, ce qui signifie :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \forall p \in \mathbb{N}, \exists c_p > 0; \sup_{|\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p} ||x^\alpha D^\beta \varphi(x)||_\infty \leqslant c_p\}$$

Si on note par

$$||\varphi||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$$

alors l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ peut être muni de la topologie induite par la famille de semi normes $\Big(||.||_{\alpha,\beta}\Big)_{\alpha,\beta}$.

Propriété 1.2. *(voir [1])*

* *$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*
* *Soit ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors :*

$$D^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$$

* *Soit ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists C_k > 0, telle \quad que \quad |\phi(x)| \leqslant C_k \frac{1}{(1+|x|)^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

* *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [1, +\infty]$.*

Définition 1.18. *La transformée de Fourier pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est définie par :*

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx.$$

La transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi.$$

Propriété 1.3. *:*

- $\forall \varphi \in \mathcal{S}, \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$.
- $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi$ *c.à.d $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans lui même .*

Propsition 1.5.

$$\mathcal{F}\Big(e^{-c|x|^2}\Big)(\xi) = \Big(\frac{\pi}{c}\Big)^{N/2} e^{\frac{-|\xi|^2}{4c}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \tag{1.17}$$

avec $c \in \mathbb{R}^*$.

Preuve.
Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(e^{-c|x|^2}\Big)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-c|x|^2}.e^{-ix.\xi}dx \\
&= \prod_{j=1}^{N}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-cx_j^2-ix_j.\xi_j}dx_j\Big) = \prod_{j=1}^{N}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{c}x_j+i\frac{\xi_j}{2\sqrt{c}}\right)^2-\frac{\xi_j^2}{4c}}dx_j\Big) \\
&= \prod_{j=1}^{N}\Big(e^{-\frac{\xi_j^2}{4c}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{c}x_j+i\frac{\xi_j}{2\sqrt{c}}\right)^2}dx_j\Big)
\end{aligned}$$

Par le changement de variable $y_j = \sqrt{c}x_j$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(e^{-c|x|^2}\Big)(\xi) &= \prod_{j=1}^{N}\Big(e^{\left(-\frac{\xi_j^2}{4c}\right)}\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y_j+i\frac{\xi_j}{2\sqrt{c}}\right)^2}dy_j\Big) \\
&= \prod_{j=1}^{N}\Big(e^{\left(-\frac{\xi_j^2}{4c}\right)}\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{\pi}\Big) = \Big(\frac{\pi}{c}\Big)^{d/2} e^{\frac{-|\xi|^2}{4c}}
\end{aligned}$$

■

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ l'espace des distributions tempérées qui est le dual topologique de $\mathcal{S}$. On a les définitions suivantes :

Définition 1.19. *Une distribution T est tempérée s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tel que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), |< T, \varphi >| \leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant p, |\beta|\leqslant p} ||x^\alpha D^\beta \varphi||_\infty$$

Définition 1.20. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier de T est définie par :*

$$< \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}\varphi >$$

avec $< ., . >$ désigne le crochet de dualité.

Remarque 1.2. *On a :*

* *$u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$*

* *L'identité de Parseval-Plancherel est donnée par :*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad ||u||_{L^2(\mathbb{R}^N)} = ||\mathcal{F}u||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \tag{1.18}$$

Propriété 1.4. *Soit $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ on a :*

-

$$\mathcal{F}(T.S)(\xi) = \mathcal{F}(T) * \mathcal{F}(S)(\xi)$$

- *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ *on a :*

$$D^\beta \mathcal{F}(T)(\xi) = (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}(x^\beta T(x))(\xi)$$

$$\xi^\alpha \mathcal{F}(T)(\xi) = (i)^{-|\alpha|} \mathcal{F}(D^\alpha T)(\xi)$$

- *Pour tout* $a \in \mathbb{R}^N$, *on a :*

$$\mathcal{F}(\tau_a T)(\xi) = \mathcal{F}(T(x+a))(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(T)(\xi)$$

Chapitre 2

Le cadre fonctionnel

2.1 Les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}$

Dans cette section, nous introduisons les espaces de Sobolev fractionnaires pour $s \in \mathbb{R}$, nous traitons le cas $s < 1$ et le cas $s > 1$ séparément. En plus, nous présentons des injections de ces espaces de Sobolev fractionnaires qui se trouvent être similaires à celles introduites au chapitre 1 pour les espaces de Sobolev classiques, pour plus de détails voir [8], [15] et [14].

2.1.1 Les espaces de Sobolev fractionnaires d'ordre $s < 1$

Définition 2.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}$$

L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

où

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \tag{2.1}$$

*$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}$ est appelée semi norme de u (ou la norme **Gagliardo**(voir [15])).*

Propsition 2.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$, alors $W^{s,p}(\Omega)$ est*

- *Un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*
- *Un espace séparable pour tout $1 \leqslant p < +\infty$*
- *Un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$*

Propsition 2.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $0 < s \leqslant s' < 1$ et $p \in [1, +\infty[$, alors on a :*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

Preuve.

Premièrement, en appliquant le théorème de Fubini on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x\in\Omega, |x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &= \int_\Omega \Big[\int_{\Omega \cap \{y\in\Omega, |x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dy \Big] dx \\ &\leqslant \int_\Omega \Big[\int_{\{y\in\Omega, |x-y|\geqslant 1\}} \frac{1}{|x-y|^{N+sp}} dy \Big] |u(x)|^p dx\end{aligned}$$

Or

$$\int_{\{y\in\Omega, |x-y|\geqslant 1\}} \frac{1}{|x-y|^{N+sp}} dy \leqslant \int_{\{z\in\mathbb{R}^N, |z|\geqslant 1\}} \frac{1}{|z|^{N+sp}} dz < +\infty$$

puisque $N+sp > N \geqslant 1$, ce qui implique :

$$\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x\in\Omega, |x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \leqslant C||u||^p_{L^p(\Omega)} \tag{2.2}$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ et (2.2), on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x\in\Omega, |x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leqslant 2^{p-1} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x\in\Omega, |x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &\leqslant 2^p.C.||u||^p_{L^p(\Omega)} \qquad (2.3)\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $s \leqslant s'$ et $|x-y| < 1$, alors

$$\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x\in\Omega, |x-y|\leqslant 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \leqslant \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x\in\Omega, |x-y|\leqslant 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}} dxdy \tag{2.4}$$

Alors (2.3) et (2.4) impliquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leqslant 2^p.C.||u||^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x\in\Omega, |x-y|\leqslant 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}} dxdy \\ &\leqslant 2^p.C.||u||^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}} dxdy\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}||u||^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= ||u||^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &\leqslant (2^p.C+1)||u||^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}} dxdy \\ &\leqslant (2^p.C+1)||u||^p_{W^{s',p}(\Omega)}\end{aligned}$$

■

Notation :

$Q := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1 \ \ et \ \ |x_n| < 1\}$

$Q_+ := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'| < 1 \ \ et \ \ 0 < x_n < 1\}$

$Q_0 := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_n = 0\}$

Définition 2.2. *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in (0,1)$, on dit que Ω est de classe $C^{k,\alpha}$, s'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe une boule $B = B_r(x)$, $r > 0$, et un isomorphisme :$T : Q \to B$ tel que :*

$$T \in C^{k,\alpha}(\bar{Q}), \quad T^{-1} \in C^{k,\alpha}(\bar{B}), \quad T(Q_+) = B \cap \Omega, \quad T(Q_0) = B \cap \partial\Omega$$

et $||T||_{C^{k,\alpha}(\bar{Q})} + ||T||_{C^{k,\alpha}(\bar{B})} \leqslant M$.
On dit que l'ouvert Ω est lipschitzien s'il est de classe $C^{0,1}$.

Le résultat de la proposition 2.2 reste vrai pour $s' = 1$, dans le cas où le domaine Ω est lipschitzien, c'est ce qui est énoncé dans la proposition suivante :

Propsition 2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ avec $\partial\Omega$ bornée, $p \in [1, +\infty[$ et $s \in (0,1)$, alors :*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

Preuve.
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, grâce aux hypothèses sur le domaine Ω, on peut prolonger u par une fonction $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que

$$\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad et \quad ||\tilde{u}||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant c||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour une constante positive c. On utilise le changement de variable $z = y - x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x \in \Omega, |x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &= \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{y \in \Omega, |y-x|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|y-x|^{N+sp}} dydx \\
&\leqslant \int_\Omega \int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{N+sp}} dzdx \\
&= \int_\Omega \int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^p} \frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}} dzdx
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis , on a alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x \in \Omega, |x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leqslant \int_\Omega \int_{B_1} \Big(\int_0^1 \nabla u(x+tz) dt \Big)^p \frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}} dzdx \\
&= \int_\Omega \int_{B_1} \Big(\int_0^1 \frac{\nabla u(x+tz)}{|z|^{\frac{N}{p}+(s-1)}} dt \Big)^p dzdx
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{x \in \Omega, |x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &\leqslant \int_\Omega \int_{B_1} \int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|^p}{|z|^{N+(s-1)p}} dtdzdx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_1} \int_0^1 \frac{|\nabla \tilde{u}(x+tz)|^p}{|z|^{N+(s-1)p}} dtdzdx \\
&\leqslant \int_{B_1} \int_0^1 \frac{||\nabla \tilde{u}||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|z|^{N+(s-1)p}} dtdz \\
&\leqslant C_1(N,s,p) ||\nabla \tilde{u}||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leqslant C_1(N,s,p) ||\tilde{u}||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leqslant C_1(N,s,p) ||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

et de (2.3) on a :

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|\geqslant 1\}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\leqslant C(N,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} \tag{2.5}$$

En combinant les deux estimations précédentes, on obtient l'estimation voulue. ■

Définition 2.3. *On définit l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{s,p}(\Omega)$ i.e*

$$W_0^{s,p}(\Omega)=\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||.||_{W^{s,p}}}$$

Théorème 2.1. *Pour $0<s<1$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque 2.1. *La démonstration est faite dans [14] pour $N=1$ et généralisée à des dimensions supérieures. Dans la première étape, on construit une fonction troncature pour montrer la densité des fonctions de $W^{s,p}$ à support compact dans l'espace $W^{s,p}$ et dans la deuxième étape, on construit une suite de régularisation pour approcher les fonctions à support compact dans l'espace $W^{s,p}$ par des fonctions de C_0^∞.*

Théorème 2.2. ***(Inégalité de Poincaré)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $s\in(0,1)$ et $p\in[1,+\infty[$, alors il existe $\lambda:=\lambda(N,s,p,\Omega)>0$ tel que :

$$||u||_{L^p(\Omega)}\leqslant\lambda[u]_{W^{s,p}(\Omega)},\quad\forall u\in W_0^{s,p}(\Omega) \tag{2.6}$$

Par conséquent si Ω est borné alors $[.]_{W^{s,p}(\Omega)}$ est une norme de $W_0^{s,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $||.||_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Preuve.
Soit $u\in C_0^\infty(\Omega)$ et $B_R\subset\mathbb{R}^N\setminus\Omega$, i.e boule de rayon R dans le complémentaire de Ω.
alors pour tout $x\in\Omega$ et $y\in B_R$, on a :

$$|u(x)|^p=\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}|x-y|^{N+sp}$$

ce qui implique :

$$|u(x)|^p\int_{B_R}dy\leqslant\sup_{x\in\Omega,y\in B_R}|x-y|^{N+sp}\int_{B_R}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dy$$

alors ;

$$\int_\Omega|u(x)|^pdx\leqslant\frac{diam(\Omega\cup B_R)^{N+sp}}{|B_R|}\int_\Omega\int_{B_R}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dydx$$

Par suite ;

$$||u||_{L^p(\Omega)}\leqslant\lambda[u]_{W^{s,p}(\Omega)}$$

avec

$$\lambda=\Big[\frac{diam(\Omega\cup B_R)^{N+sp})}{|B_R|}\Big]^{1/p}$$

■

2.1.2 Prolongement d'une fonction de $W^{s,p}(\Omega)$

Définition 2.4. *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$, un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est dit un domaine de prolongement de $W^{s,p}$, s'il existe une constante $C = C(N,s,p,\Omega) > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in W^{s,p}(\Omega)$ il existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $\tilde{u} = u$, sur Ω et :*

$$||\tilde{u}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Lemme 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $u \in W^{s,p}(\Omega)$ avec $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$, s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $u \equiv 0$ dans $\Omega \setminus K$, alors on peut prolonger u par une fonction $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ qui est définie par :*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , \quad x \in \Omega \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

et $||\tilde{u}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$ où C est une constante positive qui dépend de $N, s, p, K,$ et Ω.

Preuve.
Il est clair que $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ puisque $u \in W^{s,p}(\Omega)$, d'autre part on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &= \int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\ &+ \int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\int_{\Omega} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\end{aligned}$$

et puisque $\tilde{u} = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ et $\tilde{u} = u$ dans Ω, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy + 2\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dydx \tag{2.8}$$

Le premier terme de (2.8) est fini car $u \in W^{s,p}(\Omega)$, or pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus K$, on a :

$$\frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} = \frac{\chi_K(x).|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \leqslant \chi_K(x)|u(x)|^p \sup_{x\in K} \frac{1}{|x-y|^{N+sp}}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dydx &\leqslant \int_{\Omega}\Big(\int_{\mathbb{R}^N\setminus K} \chi_K(x)|u(x)|^p \sup_{x\in K}\frac{1}{|x-y|^{N+sp}}dy\Big)dx \\ &\leqslant \int_{\Omega}|u(x)|^p dx \int_{\mathbb{R}^N\setminus K} \frac{1}{dis(y,\partial k)^{N+sp}}dy \\ &= ||u||^p_{L^p(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus K} \frac{1}{dis(y,\partial k)^{N+sp}}dy\end{aligned}$$

comme K est compact inclus dans Ω alors $dis(y,\partial K) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus K$ et $N+sp > N$, alors

$$\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dydx \leqslant C(N,s,p,K,\Omega)||u||^p_{L^p(\Omega)}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}||\tilde{u}||^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &= ||\tilde{u}||^p_{L^p(\Omega)} + [\tilde{u}]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant (1+2.C(N,s,p,K,\Omega))||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient ;

$$||\tilde{u}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$$

■

Lemme 2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, symétrique par rapport à x_n. Soient $\Omega_+ = \{x \in \Omega, x_n > 0\}$, $\Omega_- = \{x \in \Omega, x_n \leqslant 0\}$, $s \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty[$ et $u \in W^{s,p}(\Omega_+)$, alors il existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega)$ défini par :*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n) & , \quad x_n > 0 \\ u(x', -x_n) & , \quad x_n < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

De plus, on a

$$||\tilde{u}||_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 4||u||_{W^{s,p}(\Omega_+)}$$

Preuve. Premièrement, on a $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ et par la définition de $\tilde{u}$ dans (2.9) et les changements de variables $\tilde{x}_n = -x_n$ et $\tilde{x}' = x'$, on obtient :

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}||_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |\tilde{u}(x)|^p dx \\ &= \int_{\Omega_+} |u(x', x_n)|^p dx + \int_{\Omega_-} |u(x', -x_n)|^p dx \\ &= \int_{\Omega_+} |u(x', x_n)|^p dx + \int_{\Omega_+} |u(\tilde{x}', \tilde{x}_n)|^p d\tilde{x} \\ &= 2||u||^p_{L^p(\Omega_+)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Et on a ;

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &= \int_{\Omega_+} \int_{\Omega_+} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &+ 2\int_{\Omega_+} \int_{\Omega_-} \frac{|u(x', -x_n) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &+ \int_{\Omega_-} \int_{\Omega_-} \frac{|u(x', -x_n) - u(y', -y_n)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \end{aligned}$$

En utilisant les même changements de variables $\tilde{x}_n = -x_n$, $\tilde{x}' = x'$, $\tilde{y}_n = -y_n$ et $\tilde{y}' = y'$ on obtient :

$$[\tilde{u}]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = 4[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)} \tag{2.11}$$

Par (2.10) et (2.11), on obtient

$$||\tilde{u}||^p_{W^{s,p}(\Omega)} = 2||u||^p_{L^p(\Omega_+)} + 4[u]^p_{W^{s,p}(\Omega_+)} \leqslant 4||u||^p_{W^{s,p}(\Omega_+)}$$

■

Lemme 2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, +\infty[$ et $s \in (0,1)$, et soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$, telle que $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \Omega$. Alors*

$$\psi u \in W^{s,p}(\Omega) \quad et \quad ||\psi u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \tag{2.12}$$

avec $C = C(N, s, p, \Omega)$.

PREUVE.
On a

$$\int_\Omega |\psi u|^p dx = \int_\Omega |\psi|^p |u| dx \leqslant \int_\Omega |u|^p dx < +\infty$$

i.e $\psi u \in L^p(\Omega)$
D'autre part, on ajoutant et retranchant $\psi(x)u(y)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\leqslant 2^{p-1}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(x)-\psi(x)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&+ 2^{p-1}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)u(y)-\psi(y)u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&\leqslant 2^{p-1}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&+ 2^{p-1}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Maintenant, puisque $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$ et $|\psi(x)-\psi(y)| < 1$ pour tout $x, y \in \Omega$, alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &= \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|<1\}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&+ \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&\leqslant c^p\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|<1\}} \frac{|x-y|^p|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&+ \int_\Omega\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy
\end{aligned}$$

avec c est la constante de Lipschitz de ψ.
Or

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|<1\}} \frac{|x-y|^p|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &= \int_\Omega |u(y)|^p\Big(\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|<1\}} \frac{1}{|x-y|^{N+(s-1)p}}dx\Big)dy \\
&\leqslant C_1.||u||_{L^p(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

puisque on a $|x-y| < 1$ et $N + (s-1)p < N$.
Et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|\geqslant 1\}} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &= \int_\Omega |u(y)|^p\Big(\int_{\Omega\cap\{x\in\Omega,|x-y|\geqslant 1\}} \frac{1}{|x-y|^{N+sp}}dx\Big)dy \\
&\leqslant C_2.||u||_{L^p(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

puisque $|x-y| \geqslant 1$ et $N + sp > N$.
Par (2.13) ,(2.14) et (2.15), on obtient

$$[\psi u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant 2^{p-1}[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + C.||u||^p_{L^p(\Omega)} \tag{2.16}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
||\psi u||^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= ||\psi u||^p_{L^p(\Omega)} + [\psi u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \\
&\leqslant C||u||^p_{W^{s,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

■

Maintenant, on montre le théorème suivant, qui concerne tout ouvert lipschitzien, de frontière bornée.

Théorème 2.3. *Soient* $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty[$ *et* $\Omega \in \mathbb{R}^N$ *un ouvert de classe* $C^{0,1}$ *avec une frontière* $\partial\Omega$ *bornée, Alors pour tout* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *il existe* $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, *telle que* $\tilde{u}\mid_\Omega = u$ *et,*

$$||\tilde{u}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$$

avec $C = C(N,s,p,\Omega)$

PREUVE.
Puisque $\partial\Omega$ est compact, alors il existe un nombre fini de boules B_j telles que $\partial\Omega \subset \cup_{j=1}^k B_j$, et on peut écrire :

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{j=1}^k B_j \cup (\mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega)$$

Si on considère cette couverture, alors d'après le théorème de partition d'unité il existe $k+1$ fonctions $\psi_0, ..., \psi_k$ telles que $supp\psi_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$ et $supp\psi_j \subset B_j$,$\forall j \in \{1,..k\}$, et $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$ pour tout $j \in \{0,...k\}$ et $\sum_{j=0}^k \psi_j = 1$.

Soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$, on a $u = \sum_{j=0}^k \psi_j u$

D'après lemme 2.3, $\psi_0 u \in W^{s,p}(\Omega)$, et puisque $\psi_0 u$ est définie sur une partie de $\partial\Omega$, on pose :

$$\tilde{\psi_0}u(x) = \begin{cases} \psi_0 u(x) & , \quad x \in \Omega \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

et on a par le lemme 2.1, $\tilde{\psi_0}u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ de plus

$$||\tilde{\psi_0}u||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||\psi_0 u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$$

avec $C = C(N,s,p,\Omega)$.

Pour tout $j \in \{1,...,k\}$, on considère $u\mid_{B_j\cap\Omega}$ et on pose $v_j(y) := u(T_j(y)) \quad \forall y \in Q_+$, avec $T_j : Q \to B_j$ est l'isomorphisme de classe $C^{0,1}$ défini dans 2.2. On note que les T_j existent par l'hypothèse de régularité sur le domaine Ω.

D'abord $v_j \in W^{s,p}(Q_+)$, en effet ; en utilisant le changement de variable $x = T_j(\widehat{x})$

$$\begin{aligned} \int_{Q_+}\int_{Q_+} \frac{|v_j(\widehat{x}) - v_j(\widehat{y})|^p}{|\widehat{x}-\widehat{y}|^{N+sp}} d\widehat{x}d\widehat{y} &= \int_{Q_+}\int_{Q_+} \frac{|u(T_j(\widehat{x})) - u(T_j(\widehat{y}))|^p}{|\widehat{x}-\widehat{y}|^{N+sp}} d\widehat{x}d\widehat{y} \\ &= \int_{B_j\cap\Omega}\int_{B_j\cap\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|T_j^{-1}(x) - T_j^{-1}(y)|^{N+sp}} det(T_j^{-1})dxdy \end{aligned}$$

On note que $T(Q_+) = B_j \cap \Omega$, et puisque $T_j \in C^{0,1}$ alors

$$|x-y| = |T(T^{-1}(x)) - T(T^{-1}(y))| \leqslant C|T^{-1}(x) - T^{-1}(y)|$$

$$\int_{Q_+}\int_{Q_+} \frac{|v_j(\widehat{x}) - v_j(\widehat{y})|^p}{|\widehat{x}-\widehat{y}|^{N+sp}} d\widehat{x}d\widehat{y} \leqslant C \int_{B_j\cap\Omega}\int_{B_j\cap\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \tag{2.18}$$

Ce qui implique $v_j \in W^{s,p}(Q_+)$, et par le lemme 2.2 on prolonge v_j par une fonction $\tilde{v}_j \in W^{s,p}(Q)$ telle que

$$||\tilde{v}_j||_{W^{s,p}(Q)} \leqslant 4||v_j||_{W^{s,p}(Q_+)}$$

On fixe $\omega_j(x) := \tilde{v}_j(T^{-1}(x)) \ \ \forall x \in B_j$.
De même on a $\omega_j \in W^{s,p}(B_j)$, et on note $\omega_j = u$ dans $B_j \cap \Omega$, par conséquent $\psi_j\omega_j \equiv \psi_j u$.
Par définition, $\psi_j\omega_j$ à support compact dans B_j et de même manière on peut considérer le prolongement $\tilde{\psi_j\omega_j}$ dans $\mathbb{R}^N$ tel que $\tilde{\psi_j\omega_j} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ et on utilise les lemmes 2.3,2.2,2.1 et l'estimation (2.18), pour obtenir

$$\begin{aligned}
||\tilde{\psi_j\omega_j}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &\leqslant C||\psi_j\omega_j||_{W^{s,p}(B_j)} \\
&\leqslant C||\omega_j||_{W^{s,p}(B_j)} \\
&\leqslant C||\tilde{v}_j||_{W^{s,p}(Q)} \\
&\leqslant C||v_j||_{W^{s,p}(Q_+)} \\
&\leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega\cap B_j)}
\end{aligned}$$

où $C = C(N, s, p, \Omega)$
Finalement soit :

$$\tilde{u} = \tilde{\psi_0 u} + \sum_{j=1}^{k} \tilde{\psi_j\omega_j}$$

le prolongement de u dans $\mathbb{R}^N$.
puisque $\tilde{u} \mid_\Omega = u$, car $\tilde{\psi_0 u} \mid_\Omega = \psi_0 u$ et $\tilde{\psi_j\omega_j} \mid_\Omega = \psi_j\omega_j \mid_{\Omega\cap B_j}$ car $supp\psi_j \subset B_j$. De plus

$$||\tilde{u}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant ||\tilde{\psi_0 u}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{j=1}^{k} ||\tilde{\psi_j\omega_j}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$$

avec $C = C(N, s, p, \Omega)$. ■

L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, donc si on utilise l'opérateur de prolongement, on récupère le résultat de densité de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans l'espace $W^{s,p}(\Omega)$.

Corollaire 2.1. *Soient Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ avec frontière bornée, $p \in [1, +\infty[$ et $s \in (0, 1)$. Alors pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n - u||_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$$

Preuve.
soit $u \in W^{s,p}(\Omega)$, d'après le Théorème (2.3), il existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\tilde{u} \mid_\Omega = u$ et

$$||\tilde{u}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$$

d'après le Théorème (2.1), il existe une suite $(\tilde{u}_n) \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.
On pose $u_n = \tilde{u}_n \mid_\Omega$ donc on aura $u_n \to u$ dans $W^{s,p}(\Omega)$. ■

2.1.3 Injections de type Sobolev $0 < s < 1$

Dans ce paragraphe, nous introduisons les injections de type Sobolev, par analogie avec le théorème de Rellich Kondrachov. Voir [8], [15], [14] et[3] et les références y figurant.
Nous commençons par quelques résultats importants utilisés pour démontrer les injections continues quand $0 < s < 1$.(voir [15])

Lemme 2.4. *Soit $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp < N$. On fixe $T > 1$, soit $N' \in \mathbb{Z}$ et (a_k) une suite bornée positive avec $a_k = 0 \quad \forall k \geqslant N'$. Alors :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{\frac{N-sp}{N}} T^k \leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}, a_k\neq 0} a_{k+1} a_k^{\frac{-sp}{N}} T^k$$

avec $C = C(N,s,p,T) > 0$ indépendant de N'.

Lemme 2.5. *Soit $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp < N$. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support compact ; pour tout $k \in \mathbb{Z}$ soit*

$$a_k := |\{x \in \mathbb{R}^N, |f(x)| > 2^k\}|$$

alors ;

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \geqslant C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ a_k\neq 0}} a_{k+1} a_k^{\frac{-sp}{N}} 2^{pk}$$

avec $C = C(N,s,p) > 0$.

Lemme 2.6. *Soit $q \in [1,+\infty[$, et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit*

$$f_n(x) := max\{min\{f(x), n\}, -n\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

alors ;

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n||_{L^q(\mathbb{R}^N)} = ||f||_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

Injections continues

On a trois cas :

- **Premier cas :** $sp < N$

  Théorème 2.4. *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp < N$, alors il existe : $C = C(N,s,p) > 0$ tel que, pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a :*

$$||f||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

  avec $p^* = \frac{Np}{N-sp}$.
  Ainsi :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p, p^*]$$

Preuve.
D'abord, si

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy=+\infty$$

on a rien à montrer.
Et si on suppose :

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy<+\infty$$

On considère deux cas :
$*$ si $f\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$
On pose $A_k=\{x\in\mathbb{R}^N,|f(x)|>2^k\}$ et $a_k=|A_k|$, on a ;

$$\begin{aligned}||f||^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{A_k\setminus A_{k+1}}|f(x)|^{p^*}dx\\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{A_k\setminus A_{k+1}}(2^{(k+1)p^*})dx\\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{(k+1)p^*})a_k\end{aligned}$$

puisque $A_k\setminus A_{k+1}\subset A_k$ donc $|A_k\setminus A_{k+1}|\leqslant|A_k|=a_k$.
Alors

$$||f||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\leqslant 2^p\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp^*}a_k\Big)^{\frac{p}{p^*}}$$

Or, on a $\frac{p}{p^*}=\frac{N-sp}{N}=1-\frac{sp}{N}<1$, ce qui implique :

$$||f||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\leqslant 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp}a_k^{\frac{N-sp}{N}}$$

On pose $T=2^p$ et on applique le lemme 2.4, on obtient ;

$$||f||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z},a_k\neq0}a_{k+1}a_k^{\frac{-sp}{N}}2^{pk}$$

Et par le lemme 2.5, on obtient :

$$||f||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy$$

avec $C=C(N,s,p)$
$*$ si $f\notin L^\infty(\mathbb{R}^N)$
On pose $f_n(x):=max\{min\{f(x),n\},-n\}\quad\forall x\in\mathbb{R}^N$, on a (f_n) est bornée, de plus

$$\lim_{n\to+\infty}||f_n||_{L^q(\mathbb{R}^N)}=||f||_{L^q(\mathbb{R}^N)}\quad\forall q\in[1,+\infty[\tag{2.19}$$

Alors d'après le premier cas, on a :

$$||f_n||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy$$

En utilisant (2.19) dans le premier terme pour $q = p^*$ et le théorème de convergence dominée dans le second terme on obtient :

$$||f||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$

avec $C = C(N, s, p)$ est une constante qui dépend de N, s et p.
En utilisant la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, on obtient

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

Maintenant, on montre l'injection continue pour $q \in [p, p^*]$
Pour $q \in [p, p^*]$, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $q = \alpha p + (1-\alpha)p^*$, et pour tout $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, on a $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Alors, en utilisant l'inégalité d'interpolation on obtient :

$$u \in L^q(\mathbb{R}^N) \;\; et \;\; ||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant ||u||^\alpha_{L^p(\mathbb{R}^N)}.||u||^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$$

On applique l'inégalité de Young avec $a = \frac{1}{\alpha}$ et $b = \frac{1}{1-\alpha}$, on obtient :

$$\begin{aligned} ||u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leqslant \alpha||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha)||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant ||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &\leqslant C||u||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall q \in [p, p^*] \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2. *Les injections ci-dessus ne sont pas généralement vérifiées pour l'espace $W^{s,p}(\Omega)$, car il n'est pas toujours possible de prolonger une fonction $f \in W^{s,p}(\Omega)$ à une fonction $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, pour pouvoir le faire, il faut que Ω satisfasse quelques conditions de régularité (voir la sous-section 2.1.2).*

Théorème 2.5. *Soient $s \in (0, 1)$ et $p \in [1, +\infty[$ tels que $sp < N$. Soit Ω un domaine de prolongement de $W^{s,p}$. Alors il existe $C = C(N, s, p, \Omega) > 0$, tel que pour tout $f \in W^{s,p}(\Omega)$, on a :*

$$||f||_{L^q(\Omega)} \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad \forall q \in [p, p^*].$$

i.e

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, p^*]$$

avec $p^* = \frac{Np}{N-sp}$

Preuve.
Soit $f \in W^{s,p}(\Omega)$, par le théorème 2.3, il existe une fonction $\tilde{f} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$\tilde{f}\,|_\Omega = f \;\; et \;\; ||\tilde{f}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1||f||_{W^{s,p}(\Omega)} \tag{2.20}$$

avec $C_1 = C(N, s, p, \Omega)$. Et d'après, le Théorème 2.4, on a :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p, p^*]$$

i.e :

$$\exists C_2 := C_2(N,s,p) > 0, \quad ||\tilde{f}||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_2||\tilde{f}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall q \in [p,p^*] \tag{2.21}$$

Alors par (2.20) et (2.21) on obtient :

$$\begin{aligned} ||f||_{L^q(\Omega)} = ||\tilde{f}||_{L^q(\Omega)} &\leqslant ||\tilde{f}||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant C_2||\tilde{f}||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant C_2C_1||f||_{W^{sp}(\Omega)} \end{aligned}$$

pour tout $q \in [p,p^*]$. ■

Corollaire 2.2. *Sous les hypothèses du théorème (2.5) si on suppose de plus que Ω est borné, alors*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1,p^*]$$

Preuve.
D'après le Théorème 2.5, on a :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p,p^*] \tag{2.22}$$

Et puisque Ω est borné alors pour $q < p$ on a $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
Donc

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \tag{2.23}$$

Alors, par (2.22) et (2.23) on termine la démonstration. ■

- **Deuxième cas :** $sp = N$
  On note que lorsque $sp = N$, l'exposant critique $p^* = +\infty$

Théorème 2.6. *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp = N$, alors il existe $C = C(N,s,p) > 0$, tel que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a :*

$$||f||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall q \in [p,+\infty[$$

autrement dit,

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p,+\infty[$$

Preuve.
Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 < s' < s < 1$, alors par la proposition 2.2, on obtient :

$$||f||_{W^{s',p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1||f||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \tag{2.24}$$

où $C_1 = C_1(N,s,p) > 0$, et puisque $sp = N$ alors $s'p < N$ et d'après le théorème 2.4 on a :

$$||f||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_2||f||_{W^{s',p}(\mathbb{R}^N)} \forall q \in [p,+\infty[\tag{2.25}$$

où $C_2 = C_2(N,s,p) > 0$.
Par (2.24) et (2.25) on obtient :

$$||f||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_1C_2||f||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$$

■

Théorème 2.7. *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp = N$. Soit Ω un domaine de prolongement de $W^{s,p}$. Alors il existe $C = C(N,s,p,\Omega) > 0$, tel que pour tout $f \in W^{s,p}(\Omega)$, on a :*

$$||f||_{L^q(\Omega)} \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad \forall q \in [p,+\infty[.$$

i.e

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p,+\infty[$$

avec $p^* = \frac{Np}{N-sp}$

PREUVE.
Soit $f \in W^{s,p}(\Omega)$, $0 < s' < s < 1$, alors par la proposition 2.2, on obtient :

$$||f||_{W^{s',p}(\Omega)} \leqslant C_1||f||_{W^{s,p}(\Omega)} \tag{2.26}$$

où $C_1 = C_1(N,s,p) > 0$, et puisque $sp = N$ alors $s'p < N$ et d'après le théorème 2.5 on a :

$$||f||_{L^q(\Omega)} \leqslant C_2||f||_{W^{s',p}(\Omega)} \forall q \in [p,+\infty[\tag{2.27}$$

où $C_2 = C_2(N,s,p,\Omega) > 0$.
Par (2.26) et (2.27) on obtient :

$$||f||_{L^q(\Omega)} \leqslant C_1C_2||f||_{W^{s,p}(\Omega)}$$

■

Corollaire 2.3. *Sous les hypothèses du théorème (2.7) si on suppose de plus que Ω est borné, alors*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1,+\infty[$$

PREUVE.
D'après le Théorème 2.7, on a :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p,+\infty[\tag{2.28}$$

Et puisque Ω est borné alors si $q < p$ on a $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
Donc

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \tag{2.29}$$

Alors, par (2.28) et (2.29) on termine la démonstration. ■

- **Troisième cas :** $sp > N$
  Dans ce paragraphe, nous présentons deux propriétés de la régularité dans l'espace $W^{s,p}$ lorsque $sp > N$ et pour les preuves voir [15] et [14].

Théorème 2.8. *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp > N$. Alors il existe $C = C(N,s,p) > 0$, tel que, pour tout $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, on a :*

$$||f||_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||f||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$$

i.e

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) = C_b^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N).$$

avec $\alpha = \frac{sp-N}{p}$

Corollaire 2.4. *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tels que $sp > N$. Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ de frontière bornée. Alors pour $\alpha = \frac{sp-N}{p}$:*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\alpha}(\Omega).$$

Injections compactes :
Dans cette sous-section, nous indiquons certains résultats de compacité dans les espaces fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$ avec Ω un domaine borné. Pour la preuve du théorème suivant on se réfère à [14].

Théorème 2.9. *Soient Ω un ouvert borné de classe $C^{0,1}$ de frontière bornée, $s \in (0,1)$ et $p \in]1,+\infty[$ alors :*

- *Si $sp < N$ alors : $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < \frac{Np}{N-sp}$*
- *Si $sp = N$ alors :$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < +\infty$*
- *Si $sp > N$ alors : $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ pour tout $\lambda < s - \frac{N}{p}$*

2.1.4 Les espaces de Sobolev fractionnaires d'ordre $s > 1$

Définition 2.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,+\infty[$ et $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ avec $s > 1$. L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{[s],p}(\Omega), D^\alpha u \in W^{s-[s],p}(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = [s] \right\}$$

avec $[s]$ est la partie entière de s et $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$.

** $W^{s,p}(\Omega)$ est muni de la norme :*

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} ||D^\alpha u||^p_{W^{s-[s],p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

** Si $s = [s]$, alors l'espace $W^{s,p}$ est l'espace de Sobolev d'ordre entier.*

Propsition 2.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, et soit $p \in [1,+\infty[$ et $s' \geqslant s > 1$, alors :*

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$$

PREUVE.
On a $s = [s] + \sigma$ et $s' = [s'] + \sigma'$, avec $\sigma, \sigma' \in (0,1)$. Alors on a deux cas :
$*$ Si $[s] = [s']$ alors $\sigma \leqslant \sigma'$ et par la proposition 2.2 : $W^{\sigma',p}(\Omega) \subseteq W^{\sigma,p}(\Omega)$ par conséquent $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.
$*$ Si $[s] \neq [s']$, alors $[s'] \geqslant [s] + 1$ et donc :

$$W^{s',p}(\Omega) = W^{[s']+\sigma',p}(\Omega) \subseteq W^{[s'],p}(\Omega) \subseteq W^{[s]+1,p}(\Omega) \subseteq W^{[s]+\sigma,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$$

■

Théorème 2.10. *Pour $s > 1$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Définition 2.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$ et $s > 1$ on note :*

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||.||_{W^{s,p}}}$$

Définition 2.7. *Pour $s < 0$ et $p \in]1, +\infty[$, on définit $W^{s,p}(\Omega)$ comme le dual de $W_0^{-s,q}(\Omega)$ par :*

$$W^{s,p}(\Omega) = (W_0^{-s,q}(\Omega))'$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.1.5 Injections de type Sobolev $s > 1$

Nous présentons sans démonstrations les injections de type Sobolev pour les espaces de Sobolev fractionnaires : des injections continues dans les espaces de Lebesgue et des injections compactes dans les espaces de Hölder. Pour la démonstration de ces résultats on se réfère à [14].

Théorème 2.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ et de frontière bornée, et soient $s > 1$ et $p \in [1; +\infty)$. Alors on a :*

- *Si $sp < N$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*]$*
- *Si $sp = N$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$*
- *Si $sp > N$ alors :*
  - *Si $s - \frac{N}{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{[s-\frac{N}{p}],s-\frac{N}{p}-[s-\frac{N}{p}]}(\Omega)$*
  - *Si $s - \frac{N}{p} \in \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{s-\frac{N}{p}-1,\alpha}(\Omega), \quad \forall \alpha < 1$*

Avec $p^* = \frac{Np}{N-sp}$

Théorème 2.12. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ et de frontière bornée, et soient $s > 1$ et $p \in]1; +\infty)$. Alors on a :*

- *Si $sp < N$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \leqslant p^*$*
- *Si $sp = N$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q < +\infty$*
- *Si $sp > N$ alors :*
  - *Si $s - \frac{N}{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^{[s-\frac{N}{p}],\alpha}(\Omega), \quad \forall \alpha < s - \frac{N}{p} - [s - \frac{N}{p}]$*
  - *Si $s - \frac{N}{p} \in \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^{s-\frac{N}{p}-1,\alpha}(\Omega), \quad \forall \alpha < 1$*

Avec $p^* = \frac{Np}{N-sp}$

2.1.6 L'espace H^s

L'espace $W^{s,p}$ dans le cas particulier où $p = 2$ est noté H^s. Nous préciserons certaines de ses propriétés pour plus de détails voir [8] et [15].
Soit $s \in (0, 1)$:

$$H^s(\mathbb{R}^N) := W^{s,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N), [u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)} < +\infty \right\}$$

où $[.]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)}$ défini par (2.1).
$H^s(\mathbb{R}^N)$ muni du produit scalaire suivant : :

$$< u,v >_{H^s(\mathbb{R}^N)}= \int_{\mathbb{R}^N} u(x).v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy, \quad \forall u,v \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

présente une structure d'espace de Hilbert.

Remarque 2.3. *L'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ peut être défini de manière alternative via une transformée de Fourier :*

$$\widehat{H^s}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^{2s})|\mathcal{F}u(\xi)|^2 dx < +\infty\right\}$$

pour tout $s > 0$.(voir la proposition 2.8)
Et pour tout $s < 0$ on a :

$$\widehat{H^s}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s|\mathcal{F}u(\xi)|^2 dx < +\infty\right\}$$

Théorème 2.13. *(voir [9])*
Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Définition 2.8. *On définit l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ comme le dual topologique de l'espace $H_0^s(\mathbb{R}^N)$.i.e :*

$$(H_0^s(\mathbb{R}^N))' = H^{-s}(\mathbb{R}^N)$$

Remarque 2.4. *Pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ on a :*

$$(H_0^s(\Omega))' = H^{-s}(\Omega)$$

Pour la suite, on prend Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière.

Théorème 2.14. *([30],Theorem 11.1)*

- *Si $s \in (0, \frac{1}{2}]$, alors $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$*
- *Si $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, alors $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$*

ce théorème implique que l'espace $H^s(\Omega)$ n'a pas de trace pour $s \in (0, 1/2]$.

Propsition 2.5. *Soit $s > 1/2$, alors toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ a une trace v sur l'hyperplan $\{x_n = 0$, tel que $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ et un opérateur T de trace surjective de $H^s(\mathbb{R}^N)$ à $H^{s-\frac{1}{2}}$.*

Ainsi, pour étudier les problèmes non locaux, on introduit un autre espace de Sobolev fractionnaire ; $X_0^s(\Omega)$ qui est un sous espace de l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$, en prenant en considération la condition homogène de Dirichlet dans la formulation faible.
On définit $X_0^s(\Omega)$ par :

$$X_0^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^N); \quad u = 0 \ \ dans \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\} \tag{2.30}$$

Soit $u \in X_0^s(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} ||u||^2_{X_0^s(\Omega)} &= ||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \\ &= ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \end{aligned}$$

Or $||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = ||u||^2_{L^2(\Omega)}$, alors

$$||u||^2_{X_0^s(\Omega)} = ||u||^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \tag{2.31}$$

Propsition 2.6. *L'espace $X_0^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire*

$$< u, v >_{X_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \quad \forall u, v \in X_0^s(\Omega)$$

En effet, les normes $||.||_{X_0^s(\Omega)}$ et $[.]_{W^{s,2}(\Omega)}$ sont équivalentes.

Lemme 2.7. *Soit $s \in (0,1)$ et $N > 2s$, alors :*

- *L'injection $X_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1, 2^*)$.*
- *L'injection $X_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [1, 2^*]$.*

avec $2^* = \frac{2N}{N-2s}$.

Définition 2.9. *On définit l'espace $X^{-s}(\Omega)$ comme le dual topologique de l'espace $X_0^s(\Omega)$.i.e :*

$$(X_0^s(\Omega))' = X^{-s}(\Omega)$$

Remarque 2.5. *Pour plus de détails sur cet espace voir [21],[30].*

2.2 L'opérateur Laplacien fractionnaire

Nous introduisons maintenant le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ pour $s \in (0,1)$ et certaines propriétés associées. Nous présentons certaines définitions équivalentes du Laplacien fractionnaire dans l'espace $\mathbb{R}^N$ et pour plus de détails sur les autres définitions voir [27], [8] et [15].

2.2.1 Définitions et motivation

Définition 2.10. *Soit $s \in (0,1)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ est défini par :*

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{2.32}$$

où $B(x,\varepsilon)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon ε, et $C(N,s)$ est la constante de normalisation :

$$C(N,s) = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}}d\xi\Big)^{-1} = \frac{2^{2s}\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(-s)} \tag{2.33}$$

Où $\xi = (\xi_1, \xi')$ avec $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$, et Γ la fonction d'Euler est donnée par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x \in \mathbb{R}$

On peut écrire :

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{2.34}$$

Avec

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy \tag{2.35}$$

où (P.V.) est une abréviation couramment utilisée pour "valeur principale de l'intégrale".

Théorème 2.15. *Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $x \in \mathbb{R}^N$, l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy$$

est absolument convergente si et seulement si $s \in (0, \frac{1}{2})$, on a donc :

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

pour $s \in (0, \frac{1}{2})$.

Preuve.
Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $s \in (0, \frac{1}{2})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dy = \int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |x-y|\leqslant 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dy + \int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |x-y|>1} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dy$$

En utilisant le théorème des accroissements finis ;

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dy \leqslant ||Du||_{L^\infty}\int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |x-y|\leqslant 1\}} \frac{|x-y|}{|x-y|^{N+2s}}dy + 2||u||_{L^\infty}\int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |x-y|>1\}} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}dy$$

$$\leqslant C\Big(\int_0^1 \frac{r^{N-1}dr}{r^{N+2s-1}} + \int_1^{+\infty} \frac{r^{N-1}dr}{r^{N+2s}}\Big) = C\Big(r^{-2s+1}\Big]_0^1 + r^{-2s}\Big]_1^{+\infty}\Big) < +\infty$$

puisque $s \in (0, \frac{1}{2})$ donc $0 < -2s+1 < 1$ et $-1 < -2s < 0$. ■

Remarque 2.6. *Cet opérateur est appelé non local, dans le sens où la valeur du Laplacien fractionnaire de u en un point x dépend non seulement des valeurs de y sur l'ensemble Ω, mais en fait sur tout $\mathbb{R}^N$.*

Dans le Lemme suivant on montre que (2.34) peut être écrit comme un quotient différentiel du second ordre pondéré.

Lemme 2.8. *Soit $s \in (0,1)$, alors pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on a :*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}}dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{2.36}$$

Preuve.
Par un changement de variable $z = y - x$, (2.34) devient :

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(z+x)}{|z|^{N+2s}}dz \tag{2.37}$$

Posons $z' = -z$, on obtient

$$P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(z+x)}{|z|^{N+2s}}dz = P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(x-z')}{|z'|^{N+2s}}dz' \tag{2.38}$$

Ainsi après remplacement de z' par z , on a :

$$2P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(z+x)}{|z|^{N+2s}}dz = P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(z+x)}{|z|^{N+2s}}dz + P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(x-z)}{|z|^{N+2s}}dz$$

$$= -P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+z)+u(x-z)-2u(x)}{|z|^{N+2s}} dy \tag{2.39}$$

En utilisant (2.2.1) et (2.37),on a :

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Pour tout $s \in (0,1)$ on a ;

$$\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

En effet ; en appliquant la formule de Taylor à l'ordre deux en $u(x+y)$ et $u(x-y)$ au voisinage de x, on obtient pour u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy &\leqslant \int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |y|\leqslant 1\}} \frac{||D^2u||_\infty |y|^2}{|y|^{N+2s}} dy + \int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |y|>1\}} \frac{4||u||_\infty}{|y|^{N+2s}} dy \\
&\leqslant ||D^2u||_\infty \int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |y|\leqslant 1\}} \frac{1}{|y|^{N+2s-2}} dy \\
&+ 4||u||_\infty \int_{\{y\in\mathbb{R}^N, |y|>1\}} \frac{1}{|y|^{N+2s}} dy \\
&\leqslant ||D^2u||_\infty \int_0^1 \frac{1}{r^{N+2s-2}} r^{N-1} dr + 4||u||_\infty \int_1^\infty \frac{1}{r^{N+2s}} r^{N-1} dr \\
&\leqslant ||D^2u||_\infty \int_0^1 \frac{1}{r^{2s-1}} dr + 4||u||_\infty \int_1^\infty \frac{1}{r^{2s+1}} dr < +\infty
\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on a :

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy$$

donc on peut écrire (2.36). ■

2.2.2 Laplacien fractionnaire par transformation de Fourier

Maintenant on va montrer qu'on peut considérer le laplacien fractionnaire comme un opérateur pseudo-différentiel de multiplicateur $|\xi|^{2s}$. Pour cela on a besoin d'abord du lemme suivant :

Lemme 2.9. *Soit $s \in (0,1)$ et $C(N,s)$ la constante définie dans (2.33). Alors ;*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi.y)}{|y|^{N+2s}} dy = C(N,s)^{-1} |\xi|^{2s} \tag{2.40}$$

PREUVE.
On remarque qu'au voisinage de 0 on a pour tout $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$0 \leqslant \frac{1-cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} \leqslant \frac{|\xi_1|^2}{|\xi|^{N+2s}} < \frac{1}{|\xi|^{N+2s-2}}$$

Donc

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi < +\infty \tag{2.41}$$

On considère maintenant la fonction $\mathcal{J} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ qui est définie par :

$$\mathcal{J}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\xi.y)}{|y|^{N+2s}} dy \tag{2.42}$$

Et on montre que $\mathcal{J}$ est invariante par rotation, ie :

$$\mathcal{J}(|\xi|e_1) = \mathcal{J}(\xi) \tag{2.43}$$

avec e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
Pour $N = 1$, (2.43) est triviale car $cos(.)$ est une fonction paire donc $cos(|\xi|y) = cos(\xi.y)$ et par suite $\mathcal{J}(|\xi|) = \mathcal{J}(\xi)$.
Pour $N \geqslant 2$, on considère une rotation R telle que $R(|\xi|e_1) = \xi$ et on note R^t sa transposé.
$\mathcal{J}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos((R(|\xi|e_1)).y)}{|y|^{N+2s}} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos((|\xi|e_1).(R^t y))}{|y|^{N+2s}} dy
\end{aligned}$$

Par changement de variable $\tilde{y} = R^t y$, on obtient :

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos((|\xi|e_1).\tilde{y})}{|\tilde{y}|^{N+2s}} d\tilde{y} = \mathcal{J}(|\xi|e_1)$$

Enfin, par (2.41) et (2.43) et le changement $l = |\xi|y$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\xi) &= \mathcal{J}(|\xi|e_1) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(|\xi|.y_1)}{|y|^{N+2s}} dy \\
&= \frac{1}{|\xi|^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(l_1)}{|l/|\xi||^{N+2s}} dl \\
&= C(N,s)^{-1}|\xi|^{2s}
\end{aligned}$$

où $C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1}$. ∎

Propsition 2.7. *Soit $s \in (0,1)$ et soit $(-\Delta)^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ le Laplacien fractionnaire défini dans (2.36). Alors, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$;*

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathcal{F}u)(\xi))(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{2.44}$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ est la transformée de Fourier inverse.

Preuve.
D'après le lemme (2.9), on note :

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{2}C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy$$

avec $C(N,s)$ est donnée dans (2.33).
On cherche une fonction $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}(G(\mathcal{F})) \tag{2.45}$$

et on montre que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $G(\xi) = |\xi|^{2s}$
On a :

$$\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N). \tag{2.46}$$

En effet ;

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}}dxdy &\leqslant \int_{\{y\in\mathbb{R}^N,|y|\leqslant 1\}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|D^2u(x)||y|^2}{|y|^{N+2s}}dxdy \\
&+ \int_{\{y\in\mathbb{R}^N,|y|>1\}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{4|u(x)|}{|y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leqslant C\Big(\int_{\{y\in\mathbb{R}^N,|y|\leqslant 1\}} \frac{1}{|y|^{N+2s-2}}dy + \int_{\{y\in\mathbb{R}^N,|y|>1\}} \frac{1}{|y|^{N+2s}}dy\Big) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Et par le théorème de Tonelli-Fubini, on peut échanger l'intégrale de y avec la transformée de Fourier de x. Ainsi, on applique la transformée de Fourier dans (2.45), on obtient :

$$\begin{aligned}
G(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi) &= \mathcal{F}(\mathcal{L}u)(\xi) \\
&= -\frac{1}{2}C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathcal{F}(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{N+2s}}dy \\
&= -\frac{1}{2}C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{i\xi.y}+e^{-i\xi.y}-2}{|y|^{N+2s}}dy.(\mathcal{F}u(\xi)) \\
&= C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi.y)}{|y|^{N+2s}}dy(\mathcal{F}u)(\xi)
\end{aligned}$$

Et maintenant par lemme (2.9), on trouve :

$$G(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi) = |\xi|^{2s}(\mathcal{F}u)(\xi)$$

Ce qui donne (2.44). ∎

Propsition 2.8. *Soient $s \in (0,1)$ et $C(N,s)$ la constante définie dans (2.33), alors pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ on a l'égalité :*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \tag{2.47}$$

De plus,

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$$

Preuve.
On fixe $y \in \mathbb{R}^N$, et on opère le changement de variable $z = x - y$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{N+2s}}dzdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \Big|\frac{u(z+y)-u(y)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}}\Big|^2 dzdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\Big|\frac{u(z+.)-u(.)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}}\Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz
\end{aligned}$$

On applique la formule de Perseval-Plancherel (1.18)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \Big|\Big| \frac{u(z+.)-u(.)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}} \Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\Big| \mathcal{F}\Big(\frac{u(z+.)-u(.)}{|z|^{\frac{N}{2}+s}} \Big) \Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|e^{i\xi z}-1|^2}{|z|^{N+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi.z)}{|z|^{N+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi.z)}{|z|^{N+2s}} dz\Big) |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

puisque, par le lemme 2.9, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi.z)}{|z|^{N+2s}} = C(N,s)^{-1}|\xi|^{2s}$$

Et finalement on obtient l'équivalence entre $H^s(\mathbb{R}^N)$ et $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$ par (2.47). ■

Propsition 2.9. *Soit $s \in (0,1)$, alors :*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1}||(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N) \tag{2.48}$$

Preuve.
D'après la formule de Parseval-Plancherel (1.18) :

$$||(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = ||\mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \tag{2.49}$$

Et des propositions (2.7) et (2.8) on a :

$$||\mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = |||\xi|^s\mathcal{F}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{2}C(N,s)[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= 2C(N,s)^{-1}||\mathcal{F}((-\Delta)^{\frac{s}{2}}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= 2C(N,s)^{-1}||(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.7. *:*

- *L'identité (2.48) confirme que l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ est le bon espace pour définir le Laplacien fractionnaire.*
- *La constante de normalisation $C(N,s)$ est choisie pour que les trois définitions (2.34),(2.36) et (2.44) soient équivalentes, et elles vérifient :*

  i $\lim_{s\to 0^+} (-\Delta)^s u = u$

  ii $\lim_{s\to 1^-} (-\Delta)^s u = (-\Delta)u$

  Pour plus détails sur les propriétés de cette constante voir [8].

2.2.3 Laplacien fractionnaire par convolution

Après la définition du Laplacien fractionnaire par la transformation de Fourier, maintenant, nous écrivons l'expression (2.44) en utilisant le produit de convolution . Pour cela nous avons besoin de la transformée de Fourier inverse de la fonction $|.|^{2s}$ qui est définie dans le lemme suivant.

Lemme 2.10. *Soit $s \in (0,1)$, alors*

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{|x|^{N+2s}}\Big)(\xi) = \frac{1}{C(N,s)}|\xi|^{2s} \tag{2.50}$$

avec $C(N,s)$ est donnée par (2.33)
Au sens des distributions. i.e

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N+2s}}\mathcal{F}(\varphi)(x)dx = C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\varphi(\xi)d\xi \tag{2.51}$$

Preuve.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on applique la proposition 1.5 pour $c = \pi\delta$;

$$\mathcal{F}(e^{-\pi\delta|x|^2})(y) = \delta^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|y|^2}{4\pi\delta}}$$

Ce qui implique :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|y|^2}{4\pi\delta}}\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi\delta|x|^2}\mathcal{F}(\varphi)(x)dx$$

On multiplie par $\delta^{\frac{N+2s-2}{2}}$ et on intègre par rapport à δ, on obtient

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \delta^{s-1} e^{\frac{-|y|^2}{4\pi\delta}}\varphi(y)dyd\delta}_{I_1} = \underbrace{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \delta^{\frac{N+2s-2}{2}} e^{-\pi\delta|x|^2}\mathcal{F}(\varphi)(x)dxd\delta}_{I_2} \tag{2.52}$$

Par les changements de variables $t = \frac{|y|^2}{\delta}$ dans I_1 et $\tau = |x|^2\delta$ dans I_2, on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{2s}}{t^{s+1}} e^{\frac{-t}{4\pi}}\varphi(y)dydt \\ &= \Big(\int_0^{+\infty} t^{-s-1}e^{\frac{-t}{4\pi}}dt\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|y|^{2s}\varphi(y)dy\Big) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} A &:= \int_0^{+\infty} t^{-s-1}e^{\frac{-t}{4\pi}}dt = 4\pi\int_0^{+\infty}(4\pi z)^{-s-1}e^{-z}dz \\ &= (4\pi)^{-s}\Gamma(-s) \end{aligned}$$

d'où ;

$$I_1 = (4\pi)^{-s}\Gamma(-s)\int_{\mathbb{R}^N}|y|^{2s}\varphi(y)dy \tag{2.53}$$

Pour I_2, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tau^{\frac{N+2s-2}{2}}}{|x|^{N+2s}} e^{-\pi\tau}\mathcal{F}(\varphi)(x)dxd\tau \\ &= \Big(\int_0^{+\infty}\tau^{\frac{N+2s-2}{2}}e^{-\pi\tau}d\tau\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x|^{N+2s}}\mathcal{F}(\varphi)(x)dx\Big) \end{aligned}$$

De plus ;

$$\begin{aligned} B &:= \int_0^{+\infty} \tau^{\frac{N+2s-2}{2}} e^{-\pi\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{z^{\frac{N}{2}+s-1}}{\pi^{\frac{N}{2}+s}} e^{-z} dz \\ &= (\pi)^{-(\frac{N}{2}+s)} \Gamma(\frac{N}{2}+s) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$I_2 = (\pi)^{-(\frac{N}{2}+s)} \Gamma(\frac{N}{2}+s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N+2s}} \mathcal{F}(\varphi)(x) dx \tag{2.54}$$

En utilisant (2.52),(2.53) et(2.54), on arrive à :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N+2s}} \mathcal{F}(\varphi)(x) dx &= \frac{(4\pi)^{-s}\Gamma(-s)}{(\pi)^{-(\frac{N}{2}+s)}\Gamma(\frac{N}{2}+s)} \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{2s} \varphi(y) dy \\ &= \frac{(\pi)^{(\frac{N}{2})}\Gamma(-s)}{(4)^s\Gamma(\frac{N}{2}+s)} \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{2s} \varphi(y) dy \\ &= \frac{1}{C(N,s)} \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{2s} \varphi(y) dy \end{aligned}$$

■

Lemme 2.11. *Soit $s \in (0,1)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors :*

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{2.55}$$

avec $C(N,s)$ défini par (2.33).

Preuve.
Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, en utilisant les lemmes 2.7 et2.10 et par les propriétés de la transformée de Fourier inverse, et la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on obtient pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}.(\mathcal{F}u)(\xi))(x) \\ &= \left[\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s})(x)\right] * u(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s})(x-y)\right].u(y) dy \\ &= C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Multiplicité des solutions pour le Laplacien fractionnaire

3.1 Résultat principal

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la multiplicité de solutions pour un problème elliptique quasi-linéaire non local avec des conditions de croissance locales.
On considère le problème :

$$(P)\begin{cases} (-\Delta)^s u &= f(.,u) \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière.
et $(-\Delta)^s$ est l'opérateur Laplacien fractionnaire défini par (2.32) pour $s \in (0,1)$ et $N > 2s$.
Il a été établi référence [41] que, comme le problème elliptique classique

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(.,u) \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \ \partial\Omega \end{cases}$$

le problème (P) bénéficie également d'une nature variationnelle et ses solutions peuvent également être construites comme des points critiques de la fonctionnelle d'Euler-Lagrange associée. Une question naturelle est posée, c'est de savoir si les méthodes topologiques et variationnelles classiques peuvent être adaptées au problème (P) et à sa généralisation afin d'étendre les résultats classiques connus pour le problème elliptique classique à un cadre non local. Une grande attention a été portée sur ce sujet, par exemple dans les références [41] l'auteur a prouvé que le théorème du Col de la montagne (mountain pass theorem) reste applicable pour certains opérateurs non-locaux. Dans la référence [18] l'auteur a étudié l'existence de solution faible en utilisant la théorie de Morse. L'existence et la multiplicité de solutions des problèmes elliptiques fractionnaires ont été étudiées dans [7] et [6].
Dans l'article [29] les auteurs A.Li et C.Wei montrent que le théorème de Clark reste applicable pour le problème de Laplacien fractionnaire (P). C'est cette application du théorème de Clark que nous abordons dans cette partie de ce mémoire en considérant les hypothèses suivantes

(f_1) f est une fonction de Caratheodory définie sur $\Omega \times (-\delta, \delta)$ pour $\delta > 0$.

(f_2) Soit $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$, il existe une constante positive $q_1 \in (\frac{4}{2^*}, 2)$, telle que

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{|F(x,t)|}{|t|^{q_1}} = 0$$

uniformément en $x \in \Omega$ avec $2^* = \frac{2N}{N-2s}$.

(f_3) Il existe une constante positive $q_2 \in (\frac{4}{2^*}, 2)$, telle que

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{|F(x,t)|}{|t|^{q_2}} = +\infty$$

uniformément en $x \in \Omega$

(f_4) $f(x,t)$ est une fonction impaire en t pour tout $x \in \Omega$, $t \in (-\delta, \delta)$.

Le **Théorème** suivant nous fournit, le résultat **principal** de cette partie.

Théorème 3.1. *Sous les conditions $(f_1), (f_2), (f_3), (f_4)$, le problème (P) admet une suite de solutions non triviales (u_n) telle que $||u_n||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

Remarque 3.1. *La fonction f satisfait quelques conditions au voisinage de 0 sans aucune condition au voisinage de l'infini. Et pour démontrer le Théorème (3.1), on utilise l'approche variationnelle et la théorie des points critiques, mais puisque $\int_\Omega F(x,u(x))dx$ n'est pas définie sur $X_0^s(\Omega)$, donc on va prolonger la fonction f par une fonction $\tilde{f}$ qui doit être définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$. Pour cela on opère une modification de f et nous établissons quelques résultats auxiliaires permettant l'application du théorème de Clark.*

- **Modification de f :**

En utilisant les conditions (f_2) et (f_3), il existe $\mu > 0$ tel que pour $|t| < \mu$:

$$|F(x,t)| > |t|^{q_2}, \quad |F(x,t)| < |t|^{q_1} \quad pour \quad tout \quad x \in \Omega \tag{3.1}$$

Soit ρ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}, [0,1])$, telle que $t\rho'(t) \leqslant 0$ et ;

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{si } |t| \leqslant \tau \\ 0 \quad , & \text{si } \ |t| \geqslant 2\tau \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $\tau \in (0, \frac{\delta}{2})$ choisi tel que (3.1) et (3.2) soient vérifiées pour $|t| \leqslant 2\tau$. On pose ;

$$\tilde{F}(x,t) = \rho(t)F(x,t) + (1-\rho(t))|t|^{q_2}, \quad \tilde{f}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(x,t) \tag{3.3}$$

Par ce choix des fonctions on a bien $\tilde{f}$ est une fonction de Caratheodory, et

$$\int_\Omega \tilde{F}(x,u)dx < +\infty$$

En effet, soit $u \in X_0^s(\Omega)$, on a par (3.1) et la définition de $\tilde{F}$;

$$|\tilde{F}(x,t)| \leqslant c(|t|^{q_1} + |t|^{q_2}) \quad pour \quad tout \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{3.4}$$

et par le lemme 2.7 on a $X_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $q \in [1, 2^*]$, donc $u \in L^{q_1}(\Omega) \cap L^{q_2}(\Omega)$ et par suite $\tilde{F}(., u(.)) \in L^1(\Omega)$ i.e :

$$\int_\Omega \tilde{F}(x, u)dx < +\infty$$

Pour la suite, on considère le problème ;

$$(\tilde{P}) \begin{cases} (-\Delta)^s u &= \tilde{f}(., u) & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

On remarque que, $\tilde{f}(x, t) = f(x, t)$ pour $(x, t) \in \Omega \times [-\tau, \tau]$ et donc les solutions du problème $(\tilde{P})$ sont des solutions pour le problème original (P) si est seulement si $||u||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \tau$. Autrement dit les problèmes (P) et $(\tilde{P})$ sont équivalents pour $||u||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \tau$.

- **L'approche variationnelle du problème** $(\tilde{P})$

Définition 3.1. *On dit que $u \in X_0^s(\Omega)$ est une solution faible du problème $(\tilde{P})$, si et seulement si :*

$$\frac{C(N, s)}{2} < u, v >_{X_0^s(\Omega)} = \int_\Omega \tilde{f}(x, u(x))v(x)dx \quad \forall v \in X_0^s(\Omega) \tag{3.5}$$

où :

$$< u, v >_{X_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy, \quad \forall u, v \in X_0^s(\Omega)$$

Propsition 3.1. *La fonctionnelle d'énergie du problème $(\tilde{P})$ est la fonctionnelle J telle que*

$$\begin{array}{rcl} J : X_0^s(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \to & \frac{C(N,s)}{4} ||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega \tilde{F}(x, u(x))dx \end{array} \tag{3.6}$$

J est bien définie et de classe C^1 et sa dérivée est donnée par ;

$$< J'(u), v >_{X^{-s}(\Omega), X_0^s(\Omega)} = \frac{C(N, s)}{2} < u, v >_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega \tilde{f}(x, u(x))v(x)dx \quad u, v \in X_0^s(\Omega) \tag{3.7}$$

où

$$< u, v >_{X_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy, \quad \forall u, v \in X_0^s(\Omega)$$

Preuve.

$*$Pour tout u dans $X_0^s(\Omega)$;

$$\int_\Omega \tilde{F}(x, u)dx < +\infty$$

Donc J est bien définie.

$*$ On montre que $J \in C^1(X_0^s(\Omega))$.
Pour cela on pose

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \frac{C(N, s)}{4} ||u||^2_{X_0^s(\Omega)} = \frac{C(N, s)}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy \\ J_2(u) &= \int_\Omega \tilde{F}(x, u(x))dx \end{aligned}$$

$*$ Pour J_2 :
La dérivée au sens de Gâteaux est donnée par ;
pour tout $u, v \in X_0^s(\Omega)$

$$\begin{aligned} < J'_{2g}, v > &= \lim_{t\to 0} \frac{J_2(u+tv) - J_2(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{\tilde{F}(x, u+tv) - \tilde{F}(x,u)}{t} dx \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} G : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \tilde{F}(x, u+ty) \end{aligned}$$

G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ alors par le théorème des accroissements finis :
$\exists \theta \in]0,1[$ telle que :

$$G'(\theta) = G(1) - G(0)$$

i.e

$$tv.\partial_2 \tilde{F}(x, u+\theta tv) = \tilde{F}(x, u+tv) - \tilde{F}(x,u)$$

Or $\partial_2 \tilde{F}(x,t) = \tilde{f}(x,t)$ alors :

$$\tilde{f}(x, u+\theta tv)v = \frac{\tilde{F}(x, u+tv) - \tilde{F}(x,u)}{t}$$

ce qui implique

$$< J'_{2g}, v >= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \tilde{f}(x, u+\theta tv) v dx \tag{3.8}$$

D'autre part, puisque $\tilde{f}$ est continue par rapport à la deuxième variable, alors :

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}(x, u+\theta tv)v = \tilde{f}(x,u)v$$

par (3.4) on a :

$$|\tilde{f}(x,u)| \leqslant c\Big[q_1|t|^{q_1-1} + q_2|t|^{q_2-1}\Big]$$

donc

$$|\tilde{f}(x, u+\theta tv)v| \quad \leqslant \quad c\Big[q_1|u+\theta tv|^{q_1-1}|v| + q_2|u+\theta tv|^{q_2-1}|v|\Big]$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^p \leqslant 2^p(|a|^p + |b|^p)$ et puisque $\theta t \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x, u+\theta tv)v| &\leqslant c\Big[2^{q_1-1}\Big(|u|^{q_1-1} + |v|^{q_1-1}\Big)|v| + 2^{q_2-1}\Big(|u|^{q_2-1} + |v|^{q_2-1}\Big)|v| + \Big] \\ &\leqslant c\Big[2^{q_1-1}\Big(|u|^{q_1-1}|v| + |v|^{q_1}\Big) + 2^{q_2-1}\Big(|u|^{q_2-1}|v| + |v|^{q_2}\Big) + \Big] \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

car par le lemme 2.7 $u, v \in L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, 2^*]$ alors par application du théorème de la convergence dominée on obtient

$$< J'_{2g}, v >= \int_\Omega \tilde{f}(x,u) v dx \tag{3.9}$$

De plus, pour tout $u, v \in X_0^s(\Omega)$

$$\begin{aligned} | < J'_{2g}, v > | &\leqslant \int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|.|v| dx \\ &\leqslant c\Big[\int_\Omega |u|^{q_1-1}.|v|dx + \int_\Omega |u|^{q_2-1}.|v|dx\Big] \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder et l'injection continue de $X_0^s(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, 2^*]$, on obtient :

$$\begin{aligned} | < J'_{2g}, v > | &\leqslant c\Big[||u||^{q_1-1}_{L^{q_1}(\Omega)}.||v||_{L^{q_1}(\Omega)} + ||u||^{q_2-1}_{L^{q_2}(\Omega)}.||v||_{L^{q_2}(\Omega)}\Big] \\ &\leqslant c\Big[||u||^{q_1-1}_{X_0^s(\Omega)}.||v||_{X_0^s(\Omega)} + ||u||^{q_2-1}_{X_0^s(\Omega)}.||v||_{X_0^s(\Omega)}\Big] \\ &\leqslant \Big[c||u||^{q_1-1}_{X_0^s(\Omega)} + c||u||^{q_2-1}_{X_0^s(\Omega)}\Big].||v||_{X_0^s(\Omega)} \end{aligned}$$

Par conséquent $J'_{2g} \in X^{-s}(\Omega)$ et donc J_2 est Fréchet différentiable et sa dérivée égale à J'_{2g}, par suite $J_2 \in C^1(X_0^s(\Omega))$.

$*$ Pour J_1 :
La dérivée de J_1 au sens de Gâteaux :
Pour $u, v \in X_0^s(\Omega)$ et pour tout $t > 0$ tel que $u + tv \in X_0^s(\Omega)$ on a ;

$$\begin{aligned} < J'_{1g}u, v > &= \lim_{t\to 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} \\ &= \frac{C(N,s)}{4} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big[\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)+tv(x)-tv(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy\Big] \\ &= \frac{C(N,s)}{4} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2|v(x)-v(y)|^2 + 2t(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \frac{C(N,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \frac{C(N,s)}{2} < u, v >_{X_0^s(\Omega)} \end{aligned}$$

De plus

$$J'_{1g} : X_0^s(\Omega) \to X^{-s}(\Omega)$$

est continue, en effet ; par l'inégalité de Cauchy

$$< J'_{1g}(u), v >\leqslant ||u||_{X_0^s(\Omega)}||v||_{X_0^s(\Omega)}$$

ce qui donne

$$||J'_{1g}(u)||_{X^{-s}(\Omega)} \leqslant ||u||_{X_0^s(\Omega)}$$

Et donc J_1 est Fréchet différentiable et $J'_1 = J'_{1g}$, par suite $J_1 \in C^1(X_0^s(\Omega))$ ∎

Lemme 3.1. *La fonctionnelle J est bornée et satisfait la condition de Palais-Smale (P.S)*

PREUVE.
Soit $u \in X_0^s(\Omega)$, on a par l'inégalité (3.4) ;

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{C(N,s)}{4}||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega \tilde{F}(x,u(x))dx \\ &\geqslant \frac{C(N,s)}{4}||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - c\int_\Omega (|u(x)|^{q_1} + |u(x)|^{q_2})dx \\ &\geqslant \frac{C(N,s)}{4}||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - c\Big(||u||^{q_1}_{L^{q_1}(\Omega)} + ||u||^{q_2}_{L^{q_2}(\Omega)}\Big) \end{aligned}$$

Et par injection continue de $X_0^s(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $q \in [1, 2^*]$, on a

$$J(u) \geqslant \frac{C(N,s)}{4}||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - C\Big(||u||^{q_1}_{X_0^s(\Omega)} + ||u||^{q_2}_{X_0^s(\Omega)}\Big)$$

Or $\frac{4}{2^*} < q_1 < q_2 < 2$, alors :

$$J(u) \to +\infty \;\; quand \;\; ||u||_{X_0^s(\Omega)} \to +\infty$$

Alors J est coercive et bornée inférieurement.
Maintenant, on montre que J satisfait la condition de Palais-Smaile au niveau c. Soit $c \in \mathbb{R}$, (u_n) une suite de $X_0^s(\Omega)$ telle que

$$J(u_n) \to c, \quad J'(u_n) \to 0 \;\; quand \;\; n \to +\infty \tag{3.10}$$

En utilisant la coercivité de J, on a (u_n) est une suite bornée dans $X_0^s(\Omega)$, alors par l'injection compact de $X_0^s(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $q \in (1, 2^*)$ et le théorème 1.12, il existe alors une sous suite de (u_n)(notée aussi (u_n)) telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \;\; quand \;\; n \to +\infty \;\; dans \;\; X_0^s(\Omega) \tag{3.11}$$
$$u_n \to u \;\; quand \;\; n \to +\infty \;\; dans \;\; L^q(\Omega), \;\; q \in (1, 2^*) \tag{3.12}$$
$$u_n(x) \to u(x) \;\; quand \;\; n \to +\infty \;\; p.p \;\; x \in \Omega \tag{3.13}$$

Par (3.10) et (3.11), on a

$$< J'(u_n), u_n - u >_{X^{-s}(\Omega), X_0^s(\Omega)} \to 0, \quad quand \;\; n \to +\infty \tag{3.14}$$

Par (3.4), on a :

$$|\tilde{f}(x,u)| \leqslant c\Big[q_1|t|^{q_1-1} + q_2|t|^{q_2-1}\Big]$$

alors ;

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\tilde{f}(x,u_n)|.|u_n-u|dx &\leqslant c\int_\Omega \Big(q_1|u_n|^{q_1-1}+q_2|u_n|^{q_2-1}\Big)|u_n-u|dx\\ &\leqslant C\int_\Omega \Big(|u_n|^{q_1-1}.|u_n-u|+|u_n|^{q_2-1}.|u_n-u|\Big)dx\end{aligned}$$

où $C=2.c.max(q_1,q_2)$
En utilisant l'inégalité de Hölder pour $\frac{q_i}{q_i-1}$ et son conjugué q_i, on trouve

$$\int_\Omega |u_n|^{q_i-1}.|u_n-u|dx\leqslant ||u_n||^{q_i-1}_{L^{q_i}(\Omega)}.||u_n-u||_{L^{q_i}(\Omega)},\quad pour\quad i=1,2$$

alors

$$\int_\Omega |\tilde{f}(x,u_n)|.|u_n-u|dx\leqslant C\Big(||u_n||^{q_1-1}_{L^{q_1}(\Omega)}.||u_n-u||_{L^{q_1}(\Omega)}+||u_n||^{q_2-1}_{L^{q_2}(\Omega)}.||u_n-u||_{L^{q_2}(\Omega)}\Big)$$

Or puisque $\frac{4}{2^*}<q_1,q_2<2$ et $N>2s$, on a $1<q_1,q_2<2^*$, en effet :

$$2^*-2=\frac{2N}{N-2s}-2=\frac{4s}{N-2s}>0\Rightarrow 2<2^*$$

et

$$\frac{4}{2^*}-1=4.\big(\frac{N-2s}{2N}\big)-1=1-\frac{2s}{N}>0\Rightarrow\frac{4}{2^*}>1$$

et par (3.12) on obtient :

$$\int_\Omega |\tilde{f}(x,u_n)|.|u_n-u|dx\quad\to\quad 0\quad quand\quad n\to+\infty \tag{3.15}$$

Alors, par (3.7), (3.14) et (3.15) :

$$\begin{aligned}< u_n,u_n-u>_{X_0^s(\Omega)} &= \frac{2}{C(N,s)}\Big(< J'(u_n),u_n-u>_{X^{-s}(\Omega),X_0^s(\Omega)}+\int_\Omega |\tilde{f}(x,u_n)|.|u_n-u|dx\Big)\\ &\to 0\quad quand\quad n\to+\infty\end{aligned}$$

De manière analogue on montre que

$$< u,u_n-u>_{X_0^s(\Omega)}\to 0\quad quand\quad n\to+\infty$$

Finalement,

$$\begin{aligned}||u_n-u||_{X_0^s(\Omega)} &= < u_n,u_n-u>_{X_0^s(\Omega)}+< u,u_n-u>_{X_0^s(\Omega)}\\ &\to 0\quad quand\quad n\to+\infty\end{aligned}$$

Par suite J satisfait la condition de Palais-Smale. ∎

- **Vérification des conditions du théorème de Clark**

Maintenant, on montre que J satisfait les conditions du théorème de Clark.
Il est clair que $J(0) = 0$, et par la condition (f_4) on a J est bien une fonction paire, et on a déjà montré que $J \in C^1(X_0^s(\Omega))$ et satisfait la condition (PS), alors il reste à construire un espace X^k et une constante $\rho_k > 0$ telle que :

$$\sup_{u \in X^k \cap S_{\rho_k}} J(u) < 0, \quad avec \;\; S_{\rho_k} = \{u \in X_0^s(\Omega), ||u||_{X_0^s(\Omega)} = \rho_k\}$$

Soit $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ des fonctions indépendantes dans $X_0^s(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on note par X^k le sous espace engendré par cette famille de fonctions $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k\}$,i.e $X^k := \overline{< \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k >}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En utilisant (f_3) et la définition de $\tilde{F}$, on obtient :

$$\exists c > 0, \tilde{F}(x,t) \geqslant c.|t|^{q_2}, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

Alors :

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{C(N,s)}{4}||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - \int_\Omega \tilde{F}(x,u(x))dx \\ &\leqslant \frac{C(N,s)}{4}||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - c.||u||^{q_2}_{L^{q_2}(\Omega)} \end{aligned}$$

Puisque X^k est de dimension finie, alors les normes sur cet espace sont équivalentes, il existe alors une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$||u||_{L^{q_2}(\Omega)} \geqslant \alpha.||u||_{X_0^s(\Omega)}, \quad \forall u \in X^k$$

ce qui permet d'écrire :

$$J(u) \leqslant \frac{C(N,s)}{4}||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - c.\alpha.||u||^{q_2}_{X_0^s(\Omega)} \tag{3.16}$$

Alors, en choisissant $u \in X^k$ tel que $||u||_{X_0^s(\Omega)} = \rho_k$ pour $\rho_k > 0$, suffisamment petit, on obtient :

$$\sup_{u \in X^k \cap S_{\rho_k}} J(u) < 0$$

Finalement, toutes les conditions du théorème de Clark sont satisfaites donc il existe une suite de points critiques $(u_m) \subseteq X_0^s(\Omega)$ i.e $J'(u_m) = 0, \forall m \in \mathbb{N}$ avec $J(u_m) \leqslant 0, \forall m \in \mathbb{N}$ et $||u_m||_{X_0^s(\Omega)} \to 0 \;\; quand \;\; m \to +\infty$.

Par suite, pour montrer que cette suite de points critiques (u_m) est une suite de solutions faibles du problème original (P) et pour achever la démonstration du théorème principal , on montre le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Sous les conditions du Théorème 3.1, et pour une suite de points critiques* (u_m) *vérifiant* $J(u_m) \leqslant 0, \forall m \in \mathbb{N}$ *et* $||u_m||_{X_0^s(\Omega)} \to 0 \;\; quand \;\; m \to +\infty$, *on a*
$||u_m||_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \quad quand \;\; m \to +\infty$

PREUVE.
$*$ En utilisant (3.4) et $\frac{4}{2^*} < q_1 < q_2 < 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(x,t)| &\leqslant c(|t|^{q_1} + |t|^{q_2}), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \\ &\leqslant c(|t|^{q_1} + |t|^{2}), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or puisque $\tilde{f}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(x,t)$ on a :

$$|\tilde{f}(x,t)| \leqslant C(|t|^{q_1-1} + |t|), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{3.17}$$

avec $1 + \frac{q_1}{2} > 1 + \frac{2}{2^*}$.
$*$ Soit $u \in X_0^s(\Omega)$ une solution faible du problème $(\tilde{P})$, avec $u^+ = \max\limits_{\Omega}(u,0) \neq 0$. Soit ρ une constante telle que $\rho \geqslant \max\limits_{\Omega}(1, \dfrac{1}{||u||_{L^2(\Omega)}})$ et soit $v = \frac{u}{\rho.||u||_{L^2(\Omega)}}$, alors on a $v \in X_0^s(\Omega)$, $||v||_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\rho}$ et v est une solution faible du problème auxiliaire :

$$(A\tilde{P}) \begin{cases} (-\Delta)^s v = \frac{1}{\rho||u||_{L^2(\Omega)}}.\tilde{f}(x, \rho.||u||_{L^2(\Omega)}.v), & x \in \Omega \\ v(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

$*$ Soit $\tau > 0$, on pose $v_n = (v - \tau + \frac{\tau}{2^n})^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, il est clair que $v_n \in X_0^s(\Omega)$ et $v_0 = v^+$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$, alors $0 \leqslant v_{n+1}(x) \leqslant v_n(x)$ $p.p$ sur Ω. Et :

$$v_n(x) \to (v(x) - \tau)^+ \ \ pp \ \ x \in \Omega \tag{3.18}$$

De plus :

$$\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) > 0\} \subseteq \{x \in \Omega, 0 < v < (2^{n+1} - 1)v_n\} \cap \{x \in \Omega, v_n > \frac{\tau}{2^{n+1}}\} \tag{3.19}$$

En effet, soit $x \in \Omega$ tel que $v_{n+1}(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$v_{n+1}(x) = \left(v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^{n+1}}\right)^+ = \max_{x\in\Omega}\left(v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^{n+1}}, 0\right) > 0$$

Ce qui implique

$$v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^{n+1}} > 0 \tag{3.20}$$

En ajoutant et retranchant le terme $\frac{\tau}{2^n}$ on obtient

$$\begin{aligned} v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^{n+1}} &= v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^n} - \frac{\tau}{2^n} + \frac{\tau}{2^{n+1}} \\ &= v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^n} - \frac{\tau}{2^{n+1}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Par (3.20) et (3.21), on obtient :

$$v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^n} > \frac{\tau}{2^{n+1}}$$

Par suite ,

$$v_n(x) = \left(v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^n}\right)^+ \geqslant v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^n} > \frac{\tau}{2^{n+1}}$$

Donc

$$\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) > 0\} \subseteq \{x \in \Omega, v_n(x) > \frac{\tau}{2^{n+1}}\} \tag{3.22}$$

D'autre part, puisque $v_n(x) \geqslant v(x) - \tau + \frac{\tau}{2^n}$ et en utilisant (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned} v(x) &\leqslant v_n(x) + \tau - \frac{\tau}{2^n} = v_n(x) + (\frac{2^n - 1}{2^n})\tau \\ &< v_n(x) + (\frac{2^n - 1}{2^n}).2^{n+1}.v_n(x) = v_n(x) + (2^{n+1} - 2).v_n(x) \\ &= (2^{n+1} - 1).v_n(x) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Et puisque $v_0(x) \geqslant v_n(x) \geqslant v_{n+1}(x) > 0$ et $v_0(x) = v^+(x) = \max\limits_{x \in \Omega} \big(v(x), 0\big)$, donc

$$v(x) > 0 \tag{3.24}$$

Par (3.23) et (3.24), on obtient :

$$\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) > 0\} \subseteq \{x \in \Omega, 0 < v(x) < (2^{n+1} - 1)v_n(x)\} \tag{3.25}$$

Maintenant , en utilisant (3.22) et (3.25) on obtient (3.19).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = ||v_n||^2_{L^2(\Omega)}$, par suite $R_0 = ||v^+||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\rho^2} \leqslant 1$ et $0 \leqslant R_n \leqslant R_0 \leqslant 1$ et on va monter que $R_n \to 0, \quad quand \quad n \to +\infty$.
Par définition de v_n on a $v_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$ donc :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \int_\Omega |v_{n+1}(x)|^2 dx = \int_{\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) \geqslant 0\}} |v_{n+1}(x)|^2 dx + \int_{\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) < 0\}} |v_{n+1}(x)|^2 dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) \geqslant 0\}} |v_{n+1}(x)|^2 dx = \int_{\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) > 0\}} |v_{n+1}(x)|^2 dx \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour $p = \frac{2}{2^*}$ et son conjugué $p' = \frac{2^*}{2^* - 2}$ on obtient :

$$R_{n+1} \leqslant |\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) > 0\}|^{1 - \frac{2}{2^*}}.||v_{n+1}||^2_{L^{2^*}(\Omega)}$$

Et du lemme 2.7 et (3.19),on arrive à :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &\leqslant C|\{x \in \Omega, v_{n+1}(x) > 0\}|^{1 - \frac{2}{2^*}}.||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \\ &\leqslant C|\{x \in \Omega, v_n(x) > \frac{\tau}{2^{n+1}}\}|^{1 - \frac{2}{2^*}}.||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} R_n = \int_\Omega |v_n(x)|^2 dx &= \int_{\{x \in \Omega, v_n(x) > \frac{\tau}{2^{n+1}}\}} |v_n(x)|^2 dx + \int_{\{x \in \Omega, v_n(x) \leqslant \frac{\tau}{2^{n+1}}\}} |v_n(x)|^2 dx \\ &\geqslant \int_{\{x \in \Omega, v_n(x) > \frac{\tau}{2^{n+1}}\}} |v_n(x)|^2 dx \\ &\geqslant \Big(\frac{\tau}{2^{n+1}}\Big)^2 . \int_{\{x \in \Omega, v_n(x) > \frac{\tau}{2^{n+1}}\}} dx = \Big(\frac{\tau}{2^{n+1}}\Big)^2 \Big|\{x \in \Omega, v_n(x) > \frac{\tau}{2^{n+1}}\}\Big| \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\Big|\{x \in \Omega, v_n(x) > \frac{\tau}{2^{n+1}}\}\Big| \leqslant \Big(\frac{2^{n+1}}{\tau}\Big)^2 R_n$$

On obtient finalement :

$$R_{n+1} \leqslant C\tau^{2(\frac{2}{2^*}-1)}.2^{(2-\frac{4}{2^*})(n+1)}R_n^{1-\frac{2}{2^*}}||v_{n+1}||^2 \tag{3.26}$$

Maintenant, de la formulation variationnelle du problème $(A\tilde{P})$, on a pour tout w dans $\in X_0^s(\Omega)$

$$< v, w >_{X_0^s(\Omega)}= \frac{C(N,s)}{4}.\frac{1}{\rho||u||_{L^2(\Omega)}}.\int_\Omega \tilde{f}(x, \rho.||u||_{L^2(\Omega)}v).wdx \tag{3.27}$$

Alors en appliquant (3.27) pour $w = v_{n+1}$, on obtient :

$$||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant \frac{C(N,s)}{4}.\frac{1}{\rho||u||_{L^2(\Omega)}}.\int_\Omega \tilde{f}(x, \rho.||u||_{L^2(\Omega)}v).v_{n+1}dx$$

et en utilisant (3.17), on arrive à :

$$\begin{aligned} ||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} &\leqslant \frac{C(N,s)}{4}.\frac{1}{\rho||u||_{L^2(\Omega)}}.\int_\Omega \Big(C.(\rho.||u||_{L^2(\Omega)})^{q_1-1}|v|^{q_1-1} + \rho.||u||_{L^2(\Omega)}.|v|\Big).v_{n+1}dx \\ &\leqslant \frac{C(N,s)}{4}.\int_\Omega \Big(C.(\rho.||u||_{L^2(\Omega)})^{q_1-2}|v|^{q_1-1} + |v|\Big).v_{n+1}dx \end{aligned}$$

puisque $\rho.||u||_{L^2(\Omega)} \geqslant 1$ et $q_1 - 2 < 0$, donc $\big(\rho.||u||_{L^2(\Omega)}\big)^{q_1-2} \leqslant 1$ et on obtient alors :

$$||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant C_1\int_\Omega \Big(|v|^{q_1-1} + |v|\Big).v_{n+1}dx = C_1\int_{\{x\in\Omega, v_{n+1}>0\}} \Big(|v|^{q_1-1} + |v|\Big).v_{n+1}dx$$

où $C_1 = \frac{C(N,s)}{4}.max(C, 1)$.
Maintenant, par (3.19) on a :

$$||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant C_1\int_{\{x\in\Omega, v_{n+1}>0\}} \Big[(2^{n+1}-1)^{q_1-1}|v_n|^{q_1-1} + (2^{n+1}-1)|v_n|\Big]v_{n+1}dx$$

Et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}(x) \leqslant v_n(x)$ p.p $x \in \Omega$ on obtient :

$$\begin{aligned} ||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} &\leqslant C_1\int_{\{x\in\Omega, v_{n+1}>0\}} \Big[(2^{n+1}-1)^{q_1-1}|v_n|^{q_1-1} + (2^{n+1}-1)|v_n|\Big]v_ndx \\ &\leqslant C_1\int_{\{x\in\Omega, v_{n+1}>0\}} \Big[(2^{n+1}-1)^{q_1-1}|v_n|^{q_1} + (2^{n+1}-1)|v_n|^2\Big]dx \end{aligned}$$

Or $q_1 < 2$ donc $(2^{n+1}-1)^{q_1-1} \leqslant (2^{n+1}-1) \leqslant 2^{n+1}$, on arrive à :

$$||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant C_1.2^{n+1}\int_{\{x\in\Omega, v_{n+1}>0\}} \Big[|v_n|^{q_1} + |v_n|^2\Big]dx \tag{3.28}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour $p = \frac{2}{q_1}$ et $p' = \frac{2}{2-q_1}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\{x\in\Omega, v_{n+1}>0\}} |v_n|^{q_1}dx &= \int_\Omega |v_n|^{q_1}dx \\ &\leqslant |\Omega|^{1-\frac{q_1}{2}}.||v_n||^{q_1}_{L^2(\Omega)} = |\Omega|^{1-\frac{q_1}{2}}.R_n^{\frac{q_1}{2}} \end{aligned}$$

par suite (3.28) devient :

$$||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant C_1.2^{n+1}\Big(|\Omega|^{1-\frac{q_1}{2}}.R_n^{\frac{q_1}{2}} + R_n\Big)$$

puisque $R_n \in [0,1]$ et $\frac{q_1}{2} < 1$, donc $R_n < R_n^{\frac{q_1}{2}}$, on arrive à :

$$||v_{n+1}||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant C_2.2^{n+1}.R_n^{\frac{q_1}{2}} \tag{3.29}$$

avec $C_2 = 2.C_1.max(|\Omega|^{1-\frac{q_1}{2}}, 1)$.
Alors, en utilisant (3.29) dans (3.26) on obtient :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &\leqslant C.C_2\tau^{2(\frac{2}{2^*}-1)}.2^{(3-\frac{4}{2^*})(n+1)}R_n^{1+\frac{q_1}{2}-\frac{2}{2^*}} \\ &= C.C_2\tau^{2(\frac{2}{2^*}-1)}.2^{(3-\frac{4}{2^*})}T^n R_n^{1+\beta} \\ &\leqslant T^n(C_0(\tau)R_n)^{1+\beta} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Où, $T = 2^{3-\frac{4}{2^*}}$, $\beta = \frac{q_1}{2} - \frac{2}{2^*} > 0$ et $C_0(\tau) > 1$.
Maintenant, on montre qu'il suffit de prendre

$$\rho = max\Big\{\Big(\frac{C_0^{1+\beta}(\tau)}{r}\Big)^{\frac{1}{2\beta}}, \frac{1}{||u||_{L^2(\Omega)}}\Big\}$$

avec $r = \frac{1}{T^{\frac{1}{\beta}}} \in (0,1)$, pour avoir $R_n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$
et pour cela on établit par récurrence que :

$$R_n \leqslant \frac{r^n}{\rho^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.31}$$

pour $n = 0$, on a $R_0 \leqslant \frac{1}{\rho^2}$, (3.31) est donc vérifiée pour n=0.
suppose que (3.31) est vrai pour n, et on montre qu'elle le reste pour $n+1$, alors en utilisant (3.30) on obtient :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &\leqslant T^n\Big(C_0(\tau).\frac{r^n}{\rho^2}\Big)^{1+\beta} \\ &= T^n C_0^{1+\beta}(\tau).\frac{1}{T^{\frac{n}{\beta}.(1+\beta)}}.\frac{1}{\rho^{2(1+\beta)}} = C_0^{1+\beta}(\tau).\frac{1}{T^{\frac{n}{\beta}}}.\frac{1}{\rho^{2(1+\beta)}} \\ &= \frac{C_0^{1+\beta}(\tau)}{\rho^{2\beta}}.\frac{r^n}{\rho^2} \end{aligned}$$

et puisque $\rho \geqslant \Big(\frac{C_0^{1+\beta}(\tau)}{r}\Big)^{\frac{1}{2\beta}}$, donc $\frac{1}{\rho^{2\beta}} \leqslant \frac{r}{C_0^{1+\beta}(\tau)}$, alors on obtient

$$R_{n+1} \leqslant \frac{r^{n+1}}{\rho^2}$$

Ce qui implique la résultat (3.31).
Par suite, puisque $0 \leqslant R_n \leqslant \frac{r^n}{\rho^2}$ et $r \in (0,1)$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} ||v_n||^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

On a donc :

$$v_n(x) \to 0 \ \ p.p \ \ x \in \Omega \tag{3.32}$$

Par l'unicité de limite, (3.18) et (3.32), on obtient : $(v(x) - \tau)^+ = 0 \ \ pp \ \ x \in \Omega$.
Ce qui donne :

$$v(x) \leqslant \tau \ \ pp \ \ x \in \Omega$$

$*$ En fait le même argument pour $-v$, entraine

$$-v(x) \leqslant \tau \quad pp \quad x \in \Omega$$

Ce qui permet de déduire :

$$||v||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \tau \tag{3.33}$$

Puisque $v = \frac{u}{\rho ||u||_{L^2(\Omega)}}$, donc $u \in L^\infty(\Omega)$ et $||u||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \tau.\rho.||u||_{L^2(\Omega)}$.
Pour $||u||_{L^2(\Omega)}$ suffisamment petit, on peut prendre $\rho = \frac{1}{||u||_{L^2(\Omega)}}$, et on obtient $||u||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \tau$.

Pour la suite de points critiques (u_m) qui satisfait $||u_m||_{X_0^s(\Omega)} \to 0$, on a par la définition de limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad tel \quad que \quad \forall m \geqslant N, ||u_m||_{X_0^s(\Omega)} \leqslant \varepsilon$$

et par l'injection continue de $X_0^s(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad tel \quad que \quad \forall m \geqslant N, ||u_m||_{L^2(\Omega)} \leqslant \tilde{\varepsilon}$$

Par suite, pour $\tau > 0$, il existe $M(\tau) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant M(\tau)$, on prend $\rho_m = \frac{1}{||u_m||_{L^2(\Omega)}}$, ce qui implique :

$$||u_m||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \tau.\rho_m.||u_m||_{L^2(\Omega)} = \tau, \quad \forall m \geqslant M(\tau)$$

Autrement dit, $||u_m||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quand $m \to +\infty$. ∎

Par conséquent, à partir de ce lemme on peut voir que le problème d'origine (P) bénéficie également d'une suite de solutions non triviales(u_m) vérifiant $||u_m||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quand $m \to +\infty$. Ainsi la preuve de Théorème 3.1 est achevée.

- **Exemple d'une fonction vérifiant** $(f_1), (f_2), (f_3), (f_4)$

Soit Ω la boule de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$
Pour $s = \frac{1}{2}$ on pose :

$$f(x,t) = g(x).t^{\frac{3}{5}}$$

avec $g \in L^\infty(\Omega)$ par exemple $g(x) = |x|^2.e^{-x_1+x_2^3-x_3}, \quad \forall x \in \Omega$.
et sa primitive est donnée par

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt = \frac{5}{8}g(x).s^{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}|x|^2.e^{-x_1+x_2^3-x_3}.s^{\frac{8}{5}}$$

alors on a :

- $*$ f est continue par rapport à ses deux variables donc elle est bien une fonction de Caratheodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$.
- $*$ $\lim\limits_{|t| \to 0} \dfrac{F(x,t)}{|t|^{\frac{7}{5}}} = 0$ uniformément sur Ω.
- $*$ $\lim\limits_{|t| \to 0} \dfrac{F(x,t)}{|t|^{\frac{9}{5}}} = +\infty$
- $*$ $f(x,-t) = \frac{5}{8}.g(x).(-t)^{\frac{8}{5}} = -\frac{5}{8}.g(x).(t)^{\frac{8}{5}} = -f(x,t)$
  pour tout $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. uniformément sur Ω.

Remarque 3.2. *Pour les hypothèses (f_2) et (f_3) on a bien $\frac{7}{5}, \frac{9}{5} \in (\frac{4}{2^*}, 2)$ puisque $\frac{4}{2^*} = \frac{4}{3}$.*

3.2 Généralisation

Dans cette section nous nous intéressons à la généralisation du théorème 3.1 pour le problème (P_λ) pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

$$(P_\lambda)\left\{\begin{array}{rcll}(-\Delta)^s u-\lambda.u&=&f(.,u)&\text{dans }\Omega\\ u&=&0&\text{sur }\ \mathbb{R}^N\setminus\Omega\end{array}\right.$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière.
et $(-\Delta)^s$ est l'opérateur Laplacien fractionnaire défini par (2.32) pour $s\in(0,1)$ et $N>2s$.
f est une fonction définie sur $\Omega\times(-\delta,\delta)$ avec $\delta>0$ vérifiant $(f_1),(f_2),(f_3),(f_4)$

Théorème 3.2. *Sous les conditions $(f_1),(f_2),(f_3)$ et (f_4), le problème (P_λ) admet une suite de solutions non triviales (u_m) avec $||u_m||_{L^\infty(\Omega)}\to 0$ quand $m\to+\infty$.*

PREUVE.
le problème (P_λ) est équivalent à

$$(\tilde{P_\lambda})\left\{\begin{array}{rcll}(-\Delta)^s u&=&g(.,u)&\text{dans }\Omega\\ u&=&0&\text{sur }\ \mathbb{R}^N\setminus\Omega\end{array}\right.$$

où $g(.,u)=f(.,u)+\lambda.u$
On vérifie que la fonction g satisfait les conditions $(f_1),(f_2),(f_3)$ et (f_4)
Soit

$$G(x,s)=F(x,s)+\lambda.\frac{s^2}{2}$$

la primitive de g par rapport à la deuxième variable.
$*$Puisque f est une fonction de Caratheodory sur $\Omega\times(-\delta,\delta)$ alors g l'est aussi.
$*$ Et f satisfait (f_2) donc il existe $q_1\in(\frac{4}{2^*},2)$ telle que :

$$\begin{aligned}\lim_{|t|\to0}\frac{G(x,t)}{|t|^{q_1}}&=\lim_{|t|\to0}\frac{F(x,t)}{|t|^{q_1}}-\lambda.\lim_{|t|\to0}\frac{t^2}{|t|^{q_1}}\\&=-\lambda.\lim_{|t|\to0}\frac{t^2}{|t|^{q_1}}=-\lambda.\lim_{|t|\to0}\frac{2.t}{q_1.t.|t|^{q_1-2}}\\&=-\lambda.\lim_{|t|\to0}\frac{2}{q_1}.|t|^{2-q_1}=0\end{aligned}$$

$*$ De plus f satisfait (f_2) donc il existe $q_2\in(\frac{4}{2^*},2)$ telle que :

$$\begin{aligned}\lim_{|t|\to0}\frac{G(x,t)}{|t|^{q_2}}&=\lim_{|t|\to0}\frac{F(x,t)}{|t|^{q_2}}-\lambda.\lim_{|t|\to0}\frac{t^2}{|t|^{q_2}}\\&=\lim_{|t|\to0}\frac{F(x,t)}{|t|^{q_2}}-\lambda\lim_{|t|\to0}\frac{2.t}{q_2.t.|t|^{q_2-2}}\\&=\lim_{|t|\to0}\frac{F(x,t)}{|t|^{q_2}}-\lambda.\lim_{|t|\to0}\frac{2}{q_2}.|t|^{2-q_2}\\&=\lim_{|t|\to0}\frac{F(x,t)}{|t|^{q_2}}=+\infty\end{aligned}$$

$*$ Finalement puisque $f(x,-t) = -f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \Omega \times (-\delta, \delta)$ on arrive a :

$$g(x,-t) = f(x,-t) + \lambda.t = -\Big[f(x,t) - \lambda.t\Big] = -g(x,t)$$

pour tout $(x,t) \in \Omega \times (-\delta, \delta)$
En appliquant le théorème 3.1 au problème $(\tilde{P}_\lambda)$, on obtient alors une suite de solutions non triviales vérifiant $||u_m||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quand $m \to +\infty$ et par suite le problème (P_λ) admet une suite de solutions non triviales avec $||u_m||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ quand $m \to +\infty$. ■

Remarque 3.3. *:*

- *Le problème (P_λ) ne peut pas être un problème de valeur propre i.e*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \lambda.u \qquad \textit{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \textit{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{3.34}$$

  puisque $f \neq 0$ à cause de la condition (f_2).

- *On peut montrer le théorème 3.2 en utilisant l'équivalence des normes, i.e :*
  $*$Premièrement, on prolonge f par une fonction $\tilde{f}$ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ et on considère $(\tilde{P}_\lambda)$ le problème équivalent à (P_λ).

$$(\tilde{P}_\lambda) \begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda.u &= \tilde{f}(.,u) \qquad \textit{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \textit{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

  avec

$$\tilde{f}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}(x,t)$$

  et

$$\tilde{F}(x,t) = \rho(t)F(x,t) + (1-\rho(t))|t|^{q_2}$$

  avec ρ défini dans 3.2.
  $*$ On définit la fonctionnelle d'énergie associée à $(\tilde{P}_\lambda)$:

$$J_\lambda(u) = \frac{C(N,s)}{4}.||u||^2_{X^s{}_0(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}.||u||^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \tilde{F}(x,u)dx \quad \forall u \in X_0^s(\Omega)$$

  où $C(N,s)$ défini dans 2.33.
  $*$ On montre l'équivalence entre $||.||_{X_0^s(\Omega)}$ et $||.||_{X_0^{s,\lambda}(\Omega)}$, où

$$||u||^2_{X_0^{s,\lambda}(\Omega)} = \frac{C(N,s)}{4}.||u||^2_{X_0^s(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}.||u||^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in X_0^s(\Omega)$$

Pour cela, on introduit la proposition suivante :

Propsition 3.2. *(voir [42])*
Soit $s \in (0,1)$, $N > 2s$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors l'opérateur Laplacien fractionnaire admet une première valeur propre λ_1 positive caractérisée par :

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in X_0^s(\Omega) \\ ||u||_{L^2(\Omega)=1}}} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = \min_{u \in X_0^s(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}{||u||^2_{L^2(\Omega)}} > 0 \tag{3.35}$$

Soit λ_1 *la première valeur propre de l'opérateur* $(-\Delta)^s$*, alors pour* $\lambda < \frac{C(N,s)}{2}\lambda_1$ *on a le lemme suivant :*

Lemme 3.3. *Pour tout* $v \in X_0^s(\Omega)$*, il existe* $m_1^\lambda, M_1^\lambda > 0$ *tels que :*

$$m_1^{\lambda,s}||v||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant \frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)} - \lambda.||v||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant M_1^{\lambda,s}||v||^2_{X_0^s(\Omega)} \tag{3.36}$$

PREUVE.
Si $v = 0$ *il y a rien à montrer, alors on prend* $v \in X_0^s(\Omega) \setminus \{0\}$*, par la proposition 3.2 on a* $\lambda_1 > 0$

1) *Si* $0 \leqslant \lambda < \frac{C(N,s)}{2}.\lambda_1$ *:*
On a :
$$\frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)} - \lambda.||v||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)}$$
Maintenant en utilisant (3.35) on obtient :
$$\begin{aligned}\frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)} - \lambda.||v||^2_{L^2(\Omega)} &= \frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)} - \frac{\lambda}{\lambda_1}\lambda_1.||v||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \left(\frac{C(N,s)}{2} - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right).||v||^2_{X_0^s(\Omega)}\end{aligned}$$

2) *Si* $\lambda < 0$ *On a :*
$$\frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)} - \lambda.||v||^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)}$$

En utilisant la proposition 3.2 on obtient :
$$\frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)} - \lambda.||v||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(\frac{C(N,s)}{2} - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right).||v||^2_{X_0^s(\Omega)} \tag{3.37}$$

Ce qui implique :

$$min\left(\frac{C(N,s)}{2}-\frac{\lambda}{\lambda_1}, \frac{C(N,s)}{2}\right)||v||^2_{X_0^s(\Omega)} \leqslant \frac{C(N,s)}{2}.||v||^2_{X_0^s(\Omega)}-\lambda.||v||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant max\left(\frac{C(N,s)}{2}-\frac{\lambda}{\lambda_1}, \frac{C(N,s)}{2}\right)||v||^2_{X_0^s(\Omega)}$$

■

Ce lemme implique que les normes $||.||_{X_0^s(\Omega)}$ *et* $||.||_{X^{s,\lambda}(\Omega)}$ *sont équivalentes pour* $\lambda < \frac{C(N,s)}{2}\lambda_1$*. Ce qui implique finalement que le théorème 3.1 est appliqué au* (P_λ) *pour* $\lambda < \frac{C(N,s)}{2}\lambda_1$ *(puisque les normes sont* $||.||_{X_0^s(\Omega)}$ *et* $||.||_{X^{s,\lambda}(\Omega)}$ *équivalentes donc touts les résultats d'injection continues sont obtenus et par l'application du théorème de Clark on obtient l'existence d'une suite de solutions non triviales pour le problème* (P_λ) *)*

Remarque 3.4. *La contrepartie non locale de problème semi linéaire de type*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda.u = f(.,u) & dans \ \Omega \\ u = 0 & sur \ \partial\Omega \end{cases}$$

à savoir le problème (P_λ) *a été abordée par différents auteurs en imposant un comportement à* f *au voisinage de* 0 *(* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t} = 0$*, uniformément en* x*) différent de celui considéré dans ce mémoire.*

* *A titre d'exemple l'existence de solutions pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ a été établie par R.Servadei et E.Valdinoci dans [42], théorème 1 de plus, ils ont donné une caractérisation des valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur Laplacien fractionnaire (voir proposition 9).*
* *La multiplicité de solutions dans le cas où f est paire a été l'objet d'étude de H.P.Heinz d'un point de vue bifurcation dans [22] en considérant aussi des hypothèses locales sur la non linéarité f (voir théorème 3.2 de [22]).*

Conclusion et perspectives

D'un point vue mathématique l'opérateur fractionnaire est une équation intégrale avec noyau faiblement singulier qui représente un certain retard (convolution). Dans ce travail, on a étudié l'existence et la multiplicité de solutions pour une classe d'équations aux dérivées partielles fractionnaires par approche variationnelle et l'application du "Théorème de Clark", nous avons ainsi pu étendre les résultats existant dans le cas classique.

Notons que l'analyse présentée dans ce mémoire peut être appliquée avec certaines modifications pour le cas du p-Laplacien avec la non linéarité $f = f(t, u, \Lambda u)$, avec Λ un opérateur d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

[1] S. Ayad, *Transformation de Fourier et distributions tempérées*, Département de Mathématiques Université Oran 1 Ahmed Ben Bella, Algérie

[2] K. Bal, *Generalized picone's identity and its applications Electronic*, Journal of Differential Equations, 2013.

[3] T. Bartsch, *Infinitely many solutions of a symetric Dirichlet problem*, Nonlinear Anal, (1993), 20, 1205-1216.

[4] M. Bekkar, *Résolutions de quelques équations différentielles fractionnaires sur l'espace d'Heisenberg*, Université des Frères Mentouri,Constantine,2018.

[5] J. Bertoin, *Levy processes, Cambridge Tracts in Mathematics*, 121. Cambridge University, Cambridge, 1996.

[6] G. M. Bisci, *Sequences of weak solutions for fractional equations*, Math.Res.Lett.21, 1-13 (2014)

[7] G. M. Bisci, B. A. Pansera, *Three weak solutions for nonlocal fractional equations*, Adv. Nonlinear Stud. 14, 591-601 (2014)

[8] G. M. Bisci, V. D. Radulescu, R. Servadei, *Variational methods for nonlocal fractional problems*, Vol. 162. Cambridge University Press, 2016.

[9] H. Boumaza, *Distributions tempérées et espace de Sobolev*, Université Paris13, M.Mathématiques1.

[10] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et application*, Masson. Paris, 1992.

[11] L. A. Caffarelli, *Nonlocal equations, drifts and games, Nonlinear Partial Differential Equations*, Abel Symposia 7(2012) 37-52.

[12] S. Chen, Z. Liu, Z. Q. Wang, *A variant of Clark's theorem and its applications for nonsmooth functionals without the Palais-Smale condition*, SIAM Journal on Mathematicl Analysis, 49(1), pp.446-470,(2017).

[13] D. C. Clark, *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory*,Indiana Univ.Math.J.22(1972),65-74.

[14] F. Demengel, G. Demengel, R. Erné, *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations.* London, UK :Springer, 2012.

[15] E. Di Nezza, G Palatucci,E.Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces.* Bulletin des Sciences Mathematiques, 2012, vol. 136,no 5, p. 521-573.

[16] S. Dugowson, *Les différentielles méthaphysiques :histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivations*,PhD thesis, Université Paris 13, Villetaneuse,France, (1994).

[17] C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math. Society. 2010.

[18] M. Ferrara, G. M. Bisci, B. L. Zhang, *Existence of weak solutions for non-local fractional problems via Morse theory*, Discrete Contin. Dyn. Syst, Ser. B 19, 2493-2499 (2014)

[19] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order* , Springer, 2001.

[20] W. G. Glockle, T. F. Nonnenmacher, *A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics*, Biophys.J., Vol.68, pp. 46-53,1995.

[21] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24. (1985). Boston, MA :Pitman(Advanced Publishing Program), pp.xiv+410.

[22] H. P. Heinz, *Free Ljusternik-Schnirelmann theory and the bifurcation diagrams of certain singular nonlinear systems*, J. Diff. Equ., 66 (1987), 263-300.

[23] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[24] G. Jiang, K. Tanaka, C. Zhang,*Remarks on the Clark theorem*,School of Mathematical Sciences, Capital Nourmal Unv Beijing 100048, China,(2017).

[25] R. Kajikiya, *A critical point theorem related to the symmetric mountain pass lemma and its applications to elliptic equations*, J. Functional Analysis 225 (2005) 352-370.

[26] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*,volume 13.Springer,1993.

[27] M. Kwasenicki, *Ten equivalent definition of the fractional Laplace operator*, Fract. Calc.1 Appl. Anal. 20(1) (2015), 7-51.

[28] D. Li, *Cours d'analyse fonctionelle*. Ellipses. 2013.

[29] A. Li, C. Wei, *Infinitely many solutions for fractional Laplacian problems with local growth conditions*, Advances in Difference Equations,Springer,2016

[30] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous Problems and Applications*, Vol.I, Translated fro the French by P.Kenneth, Band 181,Springer-verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[31] R. Magin, *Fractional calculus in bioengineering Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Vol.32(1), pp.1-104, 2004.

[32] R. Metzler, K. Joseph, *Boundary value problems for fractional diffusion equations*, Physica. A, Vol.278, pp.107-125, 2000.

[33] R. Metzler, J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach*, Phys. Rep. 339 (2000) 1–77.

[34] R. Metzler, J. Klafter, *The restaurant at the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics*, J. Phys. A 37 (2004) 161–208.

[35] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Frational Calculs and Differential Equations*,John Wiley, New York, 1993.

[36] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*,Academic in Engineering software, Vol 41, pp, 9-12, 2010.

[37] R. S. Palais, *Critical point theory and the minimax principle*, Proc.Sympos. Pure Math., vol 15, AMS, Providence, R. I., 1970, pp. 185-212.

[38] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-laplacien*, International Center for Theoretical Physics Lecture Notes, Trieste, 1997.

[39] P. Rabinowitz, *Minimax method in critical point theory with applications to differential equations*,CBMS Amer. Math. Soc, No 65.1986

[40] P. H. Rabinowtz, *MinMax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diffrential Equations*, CMBS Regional Confrence Services in Mathematics 65, AMS, Providence, 1984.

[41] R. Servadei, E. Valdinoci, *Mountain pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. 389, 887-898 (2012)

[42] R. Servadie, E. Valdinoci, *Variational methods for non-local operators of elliptic type*,AMS Subject Classification Primary 49j35,35A15,35S15,Secondary47G20,45G05,(2010).

[43] M. Struwe, *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Fourth Edition, Springer. vol 34.2008

[44] P. J. Torres, *Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via krasnoselskii fixed point theorem*, Journal of Differential Equations,190(2) ,643-662, 2003.

[45] H. Wang, *On the number of positive solutions of nonlinear systems*, J.Math.Anal.Appl, 281(1), 287-306, 2003.

[46] L. ZL. Wang, *On Clark's theorem and its applications to partially sublinear problems*. Ann. Inst. Henri Poincaré,Anal. Non Linéaire 32, 1015-1037 (2015).

[47] J. R. L. Webb and M. Zima, *Multiple positive solutions of resonant and nonresonant nonlocal boundary value problems*, Nonlinear Anal, 71(3-4),1369-1378,2009.

Absract :

In recent years, the intensive development of fractional calculus itself and their aaplications in variaous fields of science such as biology, viscoelasticity, electrochemistry,..etc, explain the attention given to the partial fractional differential equations. Many results regarding the solvability of fractional problems, are obtained using different techniques of nonlinear analysis. The aim of this memory is the study of some problems governed by the Laplacian operator of fractional order under Dirichlet conditions. Considering local assumptions on the nonlinearitly, we prouve existence and multiplicity of solutions by variational approach.
keywords Fractional Sobolev space, fractional Laplacian, variational methods, Clark theorem .

Résumé :

Ces dernières années, le développement intensif du calcul fractionnaire lui-même et leurs applications dans divers domaines scientifiques tels que la biologie, la viscoélasticité, l'électrochimie,...etc, expliquent l'attention portée aux équations aux dérivées fractionnaires partielles. De nombreux résultats concernant la solvabilité des problèmes fractionnaires, sont obtenus en utilisant différentes techniques d'analyse non linéaire. Le but de ce mémoire est l'étude de quelques problèmes régis par l'opérateur Laplacien d'ordre fractionnaire dans des hypothèses locales sur la non-linéarité, nous prouvons l'existence et la multiplicité des solutions par approche variationnelle.
Mots clé : L'espace de Sobolev fractionnaire, Laplacien fractionnaire, méthodes variationnelles, le théorème de Clark.

الملخص :

في السنوات الاخيرة، التطور المكثف لحساب التفاضل و التكامل الكسري نفسه و تطبيقاته في مختلف مجالات العلوم مثل البيولوجيا، المرونة اللزوجة، الكيمياء الكهربائية،...إلخ، يفسر الاهتمام المعطى للمعادلات التفاضلية الجزئية . بعض المسائل الجزئية يتم الحصول عليها باستخدام تقنيات مختلفة من التحليل غير الخطي الهدف من هذه المذكرة هو دراسة بعض المشاكل التي يحكمها عامل لابلاس الكسري تحت ظروف ديريكلي بالنظر الى الافتراضات المحلية على اللاخطية، نثبت وجود الحلول و تعددها من خلال النهج المتغير.

الكلمات المفتاحية : فضاء صوبولاف الكسري، لابلاس الكسري، مبرهنة كلارك،