

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

présenté par

Zebelah Salah Eddine

Soutenu le : 11 juillet 2021

Thème :

ANALYSE MATHÉMATIQUE D'UN MODÈLE BIOLOGIQUE RÉGI PAR UN
SYSTÈME DIFFÉRENTIEL FRACTIONNAIRE AVEC DÉRIVÉES DE
CAPUTO

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. MOUSSAOUI ALI	Professeur, Université de Tlemccen	Président
Mme. MOKKEDEM FATIMA ZAHRA	M.C.A, Université de Tlemccen	Examinatrice
Mr. CHEKROUN ABDENNASSER	M.C.A, Université de Tlemccen	Encadrant

Année universitaire : 2020 - 2021

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier notre bon dieu tout puissant qui m'a donné de la volonté et de la patience pour réaliser ce travail.

Je remercie mes parents qui m'ont soutenu sur tous les plans pour réaliser mes rêves et terminer mes études, leur appui moral et leur affection m'ont donné une force en plus. Que Dieu leur procure une longue vie.

Mes sincères remerciements à tous mes enseignants et surtout à mon encadrant Mr. Abdennasser Chekroun, pour tous ses conseils précieux au cours de la préparation de ce mémoire, sa disponibilité permanente, pour l'aide qu'il m'a apportée et pour ses idées qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

À cet égard, j'adresse mes vifs remerciements à tous mes enseignants durant les années d'études.

Je tiens à remercier Mr Ali Moussaoui, pour l'honneur qu'il m'a donné d'avoir voulu présider le jury.

J'adresse mes remerciements à Madame Mokkedem Fatima Zahra, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Un grand merci aussi à toute ma famille et en particulier mes chers frères, qui m'ont toujours encouragé, aimé et orienté.

Je remercie avec beaucoup de sincérité tous mes collègues et mes meilleurs amis pour les bons moments qu'on a passés ensemble.

Dédicaces

*Je dédie ce travail à
mes très chers parents.*

mes chers frères Hamza et Khalil.

tous les membres de ma grande famille sans exception et spécialement à mon cousin Anis.

mes amies de toujours Amani et Ines.

*mon ami Amine KISSI qui a été un exemple d'amitié durant tout mon cursus
universitaire.*

*tous mes amis et spécialement Abdelhadi, Nadjib, Yahia, mestapha, Islem, Oussama,
Ismail, Abdesamie, Ahmed, Larbi, Imad.*

mes collègues de ma promotion.

tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.

tous mes enseignants.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de comprendre comment on étudie un système différentiel fractionnaire avec une dérivée au sens de Caputo. Nous développons la théorie élémentaire de ses équations et les techniques qui permettent de les analyser mathématiquement. Ensuite nous étudions un modèle de culture-ravageur basé sur un système de proie prédateur. Une étude théorique de ce système est traitée. Nous établissons l'existence des solutions, unicité, positivité, stabilité des équilibres ainsi que l'existence d'une bifurcation de Hopf locale. Pour finir, on présente quelques simulations numériques illustrant les résultats théoriques.

Mots clés : Dérivation fractionnaire, dérivées fractionnaires au sens de Caputo, systèmes fractionnaires linéaires et non linéaires, existence et unicité des solutions, stabilité.

Abstract

The objective of this work is to understand how can we study a fractional differential system with a derivative in the sense of Caputo. We develop the elementary theory of such equations and the various techniques that allow us to analyze them mathematically. Then, we study a crop-pest model based on a predatory prey system. We focus on the theoretical result by treating the existence of solutions, uniqueness, positivity, stability of equilibria as well as the existence of a local Hopf bifurcation. Finally, we present some numerical simulations illustrating the theoretical results.

Key words : Fractional derivation, fractional derivatives in the sense of Caputo, linear and nonlinear fractional systems, existence and uniqueness of solutions, stability.

Table des matières

1	Théorie élémentaire des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo	11
1.1	Théorie générale du calcul fractionnaire	12
1.1.1	Fonctions spéciales	12
1.1.2	La dérivée fractionnaire de Riemann Liouville	15
1.1.3	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo	17
1.1.4	Transformation de Laplace	19
1.2	Existence et unicité	25
1.3	Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire	28
1.3.1	Stabilité des systèmes linéaires autonomes	28
1.3.2	Stabilité des systèmes non linéaires (linéarisation)	29
1.3.3	Stabilité par Lyapunov	30
2	Modélisation mathématique	33
2.1	Modélisation mathématique appliquée à la dynamique des populations . . .	33
2.1.1	Modèle de croissance exponentielle de Malthus	33
2.1.2	Modèle de croissance logistique de Verhulst	34
2.1.3	Effets Allee démographiques	35
2.2	Modélisation mathématique appliquée en écologie	35
2.2.1	Modèles de deux populations en interaction	36
2.2.2	Modèle de Lotka Voltterra	36
2.3	Modèle de culture-ravageur	37
2.4	Modèle de culture-ravageur avec une dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo	38
2.4.1	Existence, unicité et positivité des solutions	39
2.4.2	Bornitude des solutions	39
3	Étude d'un modèle de culture ravageurs avec une dérivée fractionnaire au sens de Caputo	41
3.1	Stabilité locale	41
3.1.1	Recherche des points d'équilibres	41
3.1.2	Stabilité locale des points d'équilibres	43
3.2	Stabilité globale	51
3.3	Simulations numériques	54

Prologue

Le but de ce sujet est de comprendre comment on étudie un système différentiel fractionnaire avec une dérivée au sens de Caputo. Il s'agit d'un travail théorique sur l'existence des solutions, unicité, positivité, stabilité des équilibres ainsi que l'existence d'une bifurcation de Hopf locale. Nous développons aussi la théorie élémentaire de ses équations et les diverses techniques qui permet de les analyser mathématiquement.

Plus précisément, nous considérons dans ce travail le modèle biologique (cultures, ravageurs) suivant :

$$\begin{cases} D^q C(t) = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \frac{a_1 CP}{b_1 + C} - hC, \\ D^q P(t) = \frac{c_1 a_1 CP}{b_1 + C} - \mu P, \end{cases}$$

avec D^q est la dérivée au sens de Caputo donnée par,

$$D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s) ds, \quad n-1 < q < n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans le modèle ci-dessus, $C(t)$ désigne la population de cultures et $P(t)$ représente le ravageur, pour $t > 0$, le paramètre r est le taux de croissance intrinsèque et K soit la capacité de charge pour la population de cultures. Les autres paramètres sont interprétés comme suit : soit a_1 le taux de prédation des cultures par la population des ravageurs et h est le taux de récolte pour la population de cultures. Ici, c_1 est le taux de conversion de la population des ravageurs. Soit b_1 la constante de demi-saturation. Ici, μ est le taux de mortalité de la population des ravageurs. Le système est complété par les conditions initiales suivantes,

$$C(0) := C_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad P(0) := P_0 \geq 0. \quad (1)$$

Chapitre 1

Théorie élémentaire des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo

Au cours des dernières décennies, la théorie du calcul fractionnaire a été considérablement améliorée et a été appliquée avec succès à plusieurs domaines de recherche. Comparé au calcul entier, le calcul fractionnaire peut être plus approprié pour décrire la mémoire et les caractéristiques des systèmes réels. Nous pouvons trouver de nombreuses applications des dérivées d'ordre fractionnaire dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques et biologiques de la science et de l'ingénierie.

D'un autre côté, les équations d'ordre fractionnaire peuvent avoir des caractéristiques intéressantes par rapport au système d'ordre entier. En effet, en comparant les deux systèmes suivants avec la même condition initiale $x(0)$, pour $0 < \rho < 1$,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \rho t^{\rho-1}, \quad (1.1)$$

et

$$D^\alpha x(t) = \rho t^{\rho-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.2)$$

avec comme exemple D^α est la dérivée au sens de Caputo (voir chapitre suivant). Les solutions analytiques de (1.1) et (1.2) sont données par

$$t^\rho + x(0) \quad \text{et} \quad \frac{\rho \Gamma(\rho) t^{\rho+\alpha-1}}{\Gamma(\rho+\alpha)} + x(0),$$

respectivement. De toute évidence, le système d'ordre entier (1.1) est instable pour tout $0 < \rho < 1$. Cependant, le système dynamique fractionnaire (1.2) est stable quand $0 < \rho \leq 1 - \alpha$. On remarque que l'introduction du paramètre α permet d'avoir un effet stabilisant.

Les dérivées d'ordre fractionnaire ont de nombreuses définitions, dans ce chapitre on se restreint seulement à des approches des dérivées fractionnaires les plus populaires et les

plus pratiques, ainsi que leurs propriétés.

1.1 Théorie générale du calcul fractionnaire

1.1.1 Fonctions spéciales

La fonction Gamma et la fonction de Mittag-Liffler sont dites des fonctions spéciales. Ces fonctions constituent des outils de base dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire (voir[19]).

1.1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes.

Définition 1. On définit la fonction Gamma par la formule d'Euler (voir[19])

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

qui est définie sur $]0, +\infty[$. En effet,

- en 0, $f_x(t) = t^{x-1} e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ quand $t \rightarrow 0$ donc $f_x(t)$ est intégrable sur $[0, 1]$ si et seulement si $x > 0$,
- en $+\infty$, $f_x(t) = o(\frac{1}{t^2})$ donc d'après le critère de Riemann $f_x(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Proposition 1. (voir [19]) Nous avons les propriétés suivantes.

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ en particulier $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
3. $\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Démonstration. 1. En intégrant par partie on obtient,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt, \\ &= [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

On a $\Gamma(1) = 1 = 0!$. En effet, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

Puisque $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \quad \dots \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!.$$

2. Par un changement de variable $s = \sqrt{t}$ on obtient,

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt, \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds, \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right), \quad (\text{l'intégrale de Gauss}) \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

3. On peut la démontrer facilement par récurrence.

□

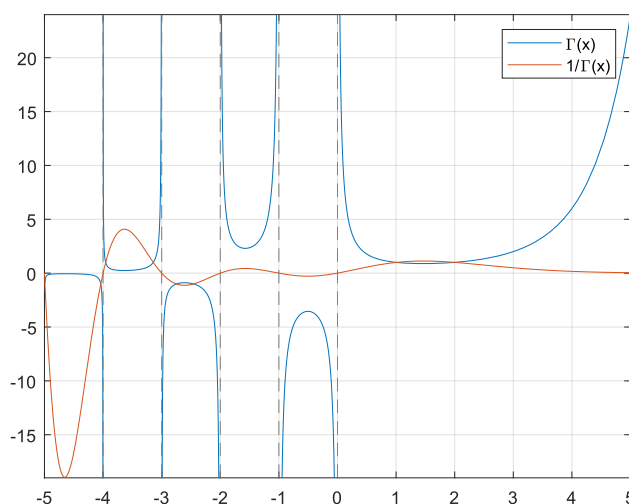


Figure 1.1 – Graphe de la fonction Gamma.

Remarque 1. (*Prolongement de $\Gamma(x)$ pour x négatif (voir la figure 1.1)*) Si on prend, $-1 < x < 0$ alors $0 < x+1 < 1$. Donc, $\Gamma(x+1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(x)$. A partir de cette remarque, nous pouvons faire une extension de la définition de la fonction $\Gamma(x)$ pour $-1 < x < 0$ par la relation

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Par récurrence, on en déduit facilement :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Cette relation permet de définir $\Gamma(x)$ pour x réel négatif avec $-(n+1) < x < -n$. On a ainsi défini $\Gamma(x)$ pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier négatif ou nul. De plus, nous avons $\Gamma(-m) = \pm\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

1.1.1.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction de Mittag-Liffler est une généralisation de l'exponentielle usuelle et se trouve largement utilisée dans les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Définition 2. La fonction de Mittag leffler $E_\alpha(z)$ est définie par (voir[19])

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha > 0),$$

et la fonction de Mittag liffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ à deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Exemple 1. Pour des valeurs particulières données à α et β on obtient

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont des cas particuliers de la fonction de Mittag Liffler,

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

Nous avons la propriété suivante qui établie un comportement asymptotique de la fonction de Mittag Liffler.

Lemme 1. (Voir [12]) Si $0 < \alpha < 2$ et μ est un nombre réel tel que

$$\frac{\alpha\pi}{2} < \mu < \min\{\pi, \alpha\pi\},$$

alors, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, les développements asymptotiques suivants sont valides

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp(z^{\frac{1}{\alpha}}) - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right),$$

avec $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(z)| \leq \mu$ et

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{p+1}}\right),$$

avec $|z| \rightarrow \infty$, $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$.

1.1.2 La dérivée fractionnaire de Riemann Liouville

Définition 3. La dérivée fractionnaire de Riemann Liouville ${}^R D_t^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est définie par

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right),$$

avec $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

En particulier, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$${}^R D_t^0 f(t) = f(t), \quad \text{et} \quad {}^R D_t^n f(t) = f^{(n)}(t),$$

avec $f^{(n)}(t)$ est la dérivée de f d'ordre n . Si $0 < \alpha < 1$, alors

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_a^t (t - s)^{-\alpha} f(s) ds \right).$$

Exemple 2.

- La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t - a)^u$. Soit α non entier et $n - 1 < \alpha < n$ avec $u > -1$ pour la convergence de l'intégrale, alors on a

$${}^R D_t^\alpha (t - a)^u = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} (s - a)^u ds \right),$$

par le changement de variable $s = a + \eta(t - a)$, on obtient

$${}^R D_t^\alpha (t - a)^u = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{n+u-\alpha} \left(\int_0^1 (1 - \eta)^{n-\alpha-1} \eta^u d\eta \right).$$

On sait que

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{u+n-\alpha} = (u+n-\alpha)(u+n-\alpha-1) \dots (u-\alpha+1)(t-a)^{u-\alpha},$$

par substitution on obtient

$${}_a^R D_t^\alpha (t-a)^u = \frac{\Gamma(n+u-\alpha+1)B(n-\alpha, u+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(u-\alpha+1)}(t-a)^{u-\alpha},$$

avec B s'appelle la fonction Bêta telle que,

$$B(z, \omega) = \int_0^1 (1-t)^{\omega-1} t^{z-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\omega) > 0).$$

En utilisant la relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta suivante

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \quad (z, \omega \in \mathbb{C}, \quad \text{avec} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\omega) > 0),$$

on obtient

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t-a)^u &= \frac{\Gamma(n+u-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(u+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(u-\alpha+1)\Gamma(n+u-\alpha+1)}(t-a)^{u-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-\alpha+1)}(t-a)^{u-\alpha}. \end{aligned}$$

- La dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville pour une fonction constante $f(t) = C$ est donnée par

$${}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Pour voir sa, il suffit de prendre $u = 0$ dans l'exemple précédent.

Proposition 2. (Règle de Leibniz [19]) Prenons deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$. La règle de Leibniz connue pour évaluer la n -ème dérivée du produit $f(t)g(t)$ est donnée par la relation suivante

$$\frac{d^n f(t)g(t)}{dt^n} = \sum_{k=0}^n C_k^n f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t), \quad (1.3)$$

avec C_n^k est le coefficient binomial. En remplaçant l'entier n par un paramètre réel p dans (1.3), on obtient la formule suivante

$$D_t^p f(t)g(t) = \sum_{k=0}^n C_p^k f^{(k)}(t)D_t^{(p-k)}g(t) - R_n^p(t), \quad n \geq p+1,$$

avec

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-s)^{-p-1} g(s) \int_s^t f^{(n+1)}(\eta)(s-\eta)^n d\eta ds,$$

tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^p(t) = 0.$$

Alors, nous avons une généralisation de la règle de Leibniz d'ordre fractionnaire.

1.1.3 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Nous allons entamer un concept modifié de dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville. Cette nouvelle dérivée est plutôt au sens de Caputo.

Rappelons quelques définitions de base sur l'opérateur différentiel de Caputo du calcul fractionnaire. Tout d'abord, nous introduisons la définition du dérivée fractionnaire de Caputo [4] (voir aussi [19]).

Définition 4. *Supposons que $a, t, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$, $t > a$. La dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds, \quad n - 1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 2. *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$ est donnée par,*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{-\alpha} f'(s) ds.$$

Remarque 3. *Pour $\alpha \rightarrow n$ la dérivée fractionnaire de Caputo devient la dérivée n -ème de la fonction $f(t)$. En effet, supposons que $n - 1 < \alpha < n$ et que la fonction $f(t)$ à $(n + 1)$ dérivées bornées continues dans $[0, T]$ pour tout $T > a$. alors,*

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left[\frac{(t - a)^{n - \alpha} f^{(n)}(a)}{\Gamma(n - \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha} f^{(n+1)}(s) ds \right]. \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s) ds = f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

En effet, on a

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds,$$

en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\left[\frac{-(t - s)^{n - \alpha}}{n - \alpha} f^{(n)}(s) \right]_a^t + \int_a^t \frac{(t - s)^{n - \alpha}}{n - \alpha} f^{(n+1)}(s) ds \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \left[(t - a)^{n - \alpha} f^{(n)}(a) + \int_a^t (t - s)^{n - \alpha} f^{(n+1)}(s) ds \right], \end{aligned}$$

quand $\alpha \rightarrow n$, alors

$${}_a D_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s) ds = f^{(n)}(t).$$

Proposition 3. (Propriété de linéarité [8]) Soient $f(t)$ et $g(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $D_t^\alpha f(t)$ et $D_t^\alpha g(t)$ existent presque partout et soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Alors, $D_t^\alpha(c_1 f(t) + c_2 g(t))$ existe presque partout, et

$${}_a D_t^\alpha(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 \times_a D_t^\alpha f(t) + c_2 \times_a D_t^\alpha g(t).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha(c_1 f(t) + c_2 g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (c_1 f^{(n)}(s) + c_2 g^{(n)}(s)) ds, \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &\quad + \frac{c_2}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(s) ds, \\ &= c_1 \times_a D_t^\alpha f(t) + c_2 \times_a D_t^\alpha g(t). \end{aligned}$$

□

Exemple 3.

- La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = (t-a)^u$. Soit α non entier et $n-1 < \alpha < n$ avec $u > -1$ et $u \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$, alors on a

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-n+1)} (s-a)^{u-n}.$$

D'où

$${}_a D_t^\alpha (t-a)^u = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{u-n} ds.$$

Par le changement de variable $s = a + \eta(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha (t-a)^u &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{u-\alpha} \int_0^1 (1-\eta)^{n-\alpha-1} \eta^{u-n} d\eta, \\ &= \frac{\Gamma(u+1)B(n-\alpha, u-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(u-n+1)} (t-a)^{u-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(u-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(u-n+1)\Gamma(u-\alpha+1)} (t-a)^{u-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-\alpha+1)} (t-a)^{u-\alpha}. \end{aligned}$$

- La dérivée fractionnaire au sens de Caputo pour une fonction constante $f(t) = C$ est zéro.

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \times 0 \, ds, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

1.1.4 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est un outil permettant souvent de résoudre certaines équations différentielles y compris les équations d'ordre fractionnaire. Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques notions de base sur la transformée de Laplace.

Définition 5. (voir [19]) Soit f une fonction continue, on appelle la transformée de Laplace de f la fonction $\mathcal{L}(f)$ (ou $F(s)$) définie par

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Cette expression est bien définie pour $\operatorname{Re}(s) > \mu$, où μ est l'abscisse de convergence avec $-\infty \leq \mu \leq +\infty$. Autrement dit, la fonction f doit avoir un ordre exponentiel, c'est-à-dire, elle ne doit pas être plus rapide d'une certaine fonction exponentiel quand $t \mapsto +\infty$.

On peut trouver la fonction originale f de la transformée de Laplace $F(s)$ en utilisant sa transformée inverse de Laplace.

1.1.4.1 Linéarité

Soient u et v deux fonctions qui admettent des transformées de Laplace et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors,

$$\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{L}(u) + \beta \mathcal{L}(v).$$

Donc, la transformation de Laplace est linéaire.

1.1.4.2 Transformée de Laplace des dérivées

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, nous montrons facilement que

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0).$$

De proche en proche, on montre

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

1.1.4.3 Transformée de Laplace d'une fonction puissance à tout exposant réel

On peut calculer la transformée de Laplace des fonctions puissances t^κ pour tout réel κ . Nous avons

$$\mathcal{L}[t^\kappa](s) = \frac{1}{s^{\kappa+1}} \Gamma(\kappa + 1). \quad (1.4)$$

En effet, on a

$$\mathcal{L}[t^\kappa](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^\kappa dt,$$

par le changement de variable $p = st$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^\kappa](s) &= \frac{1}{s^{\kappa+1}} \int_0^{+\infty} e^{-p} p^\kappa dp, \\ &= \frac{1}{s^{\kappa+1}} \Gamma(\kappa + 1). \end{aligned}$$

1.1.4.4 Transformée de Laplace du produit de convolution

Le produit de convolution de deux fonctions intégrables u et v est une autre fonction qui se note $u * v$ et qui est définie par

$$(u * v)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(s-t)dt.$$

Sous la condition d'existence de $\mathcal{L}[u(s)]$ et $\mathcal{L}[v(s)]$, la transformée de Laplace de deux fonctions en convolution est donnée par

$$\mathcal{L}[(u * v)(s)] = \mathcal{L}[u(s)]\mathcal{L}[v(s)].$$

1.1.4.5 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

On utilise souvent le calcul de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo. Dans la suite, nous allons présenter l'expression de cette transformée. Soit $f \in C^\infty[0, +\infty]$ et $n - 1 < \alpha < n$. Prenons le cas de $a = 0$ dans la dérivée de Caputo. Alors, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\theta) d\theta \right] dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \int_\theta^\infty e^{-st} (t-\theta)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\theta) dt d\theta, \quad (\text{d'après Fubini}). \end{aligned}$$

En faisant un changement de variable $v = t - \theta$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)](s) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(v+\theta)} v^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\theta) dv d\theta, \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-sv} \frac{v^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} dv \right) \times \left(\int_0^\infty e^{-s\theta} f^{(n)}(\theta) d\theta \right), \\ &= \mathcal{L} \left[\frac{v^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right] (s) \times \mathcal{L} [f^{(n)}] (s).\end{aligned}$$

Par utilisation de l'expression (1.4), nous obtenons

$$\mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)](s) = s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s).$$

On sait que (voir la sous section 1.1.4.2)

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_t^\alpha f(t)](s) &= s^{\alpha-n} \left[s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \right], \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - \dots - s^{\alpha-n} f^{(n-1)}(0), \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).\end{aligned}\tag{1.5}$$

1.1.4.6 La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann Liouville

La transformée de la Laplace de la dérivée de Riemann Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie par (voir, [19])

$$\mathcal{L} \left[{}^R D_t^\alpha f(t) \right] (s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}^R D_t^{\alpha-k-1} f(0) \right], \quad (n-1 \leq \alpha < n).$$

1.1.4.7 La transformée de Laplace de la dérivée de la fonction du Mittag Liffler

Nous allons schématiser ici la manière d'obtenir la transformée de Laplace de la fonction de Mittag Leffler à l'aide de l'analogie entre cette fonction et la fonction $\exp(z)$. Pour cela, nous commençons par obtenir la transformée de Laplace de la fonction $t^k e^{\alpha t}$ d'une manière non traditionnelle. (voir, [19])

D'abord, on va démontrer la formule suivante

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{\pm zt} dt = \frac{1}{1 \mp z}, \quad (|z| < 1). \quad (1.6)$$

En effet, en utilisant le développement en série entière de e^z , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{\pm zt} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{k!} \left[[-e^{-t} t^k]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} k e^{-t} t^{k-1} dt \right], \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{k!} k! \int_0^{+\infty} e^{-t} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\pm z)^k, \\ &= \frac{1}{1 \mp z} \quad \text{pour } |z| < 1. \end{aligned}$$

Deuxièmement, nous dérivons les deux cotés de l'équation (1.6) par rapport à z , on obtient,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k e^{zt} dt = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}},$$

et par conséquent on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^k e^{\pm at} dt = \frac{k!}{(p \mp a)^{k+1}}, \quad (\operatorname{Re}(p) > |a|),$$

qui est la transformée de Laplace de la fonction $t^k e^{\pm at}$.

La substitution de la fonction de Mittag Leffler dans l'expression ci-dessus conduit à

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm zt^\alpha) dt = \frac{1}{1 \mp z}, \quad (|z| < 1).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm zt^\alpha) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm zt^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha k + \beta - 1} dt, \\ &= \frac{1}{1 \mp z}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm z t^\alpha) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} dt. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $s = pt$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm z t^\alpha) dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{1}{p^{\alpha k + \beta}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\alpha k + \beta - 1} ds, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\pm z)^k}{p^{\alpha k + \beta}}, \\ &= \frac{1}{p^\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\pm z}{p^\alpha} \right)^k, \\ &= \frac{p^{\alpha - \beta}}{p^\alpha \mp z}, \quad \left(\operatorname{Re}(p) > |z|^{\frac{1}{\alpha}} \right), \end{aligned}$$

qui est la transformée de Laplace de la fonction $t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm z t^\alpha)$. En dérivant les deux cotés, on obtient la transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm z t^\alpha)$ donnée par

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm z t^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha \mp z)^{k+1}}, \quad \left(\operatorname{Re}(p) > |z|^{\frac{1}{\alpha}} \right). \quad (1.7)$$

Le cas particulier de (1.7) pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ serait

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(k)}(\pm z \sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \mp z)^{k+1}}, \quad \left(\operatorname{Re}(p) > |z|^2 \right).$$

Nous allons utiliser le calcul précédent pour résoudre quelques équations différentielles fractionnaires.

Exemple 4. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}} x(t) = \lambda x(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec λ une constante réelle. En prenant la transformée de Laplace des deux cotés de l'équation, on obtient

$$\mathcal{L}\{D^{\frac{1}{2}} x(t)\}(s) = \lambda \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

En utilisant (1.5), nous aurons $(X(s) := \mathcal{L}\{x(t)\}(s))$

$$s^{\frac{1}{2}}X(s) - s^{-\frac{1}{2}}x(0) = \lambda X(s).$$

La résolution de cette équation donne

$$X(s) = \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}} - \lambda} x_0.$$

Finalement, en utilisant l'inverse de la transformée de Laplace de $X(s)$ depuis (1.7), on obtient

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{x_0 s^{-\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}} - \lambda} \right\} = x_0 E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}}).$$

Remarque 4. D'une manière générale, on peut procéder comme dans l'exemple précédent pour le problème suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= \lambda x(t), \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

et la solution serait donnée par

$$x(t) = x_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Exemple 5. La solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= -\lambda x(t) + B, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.8)$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $\lambda, B \in \mathbb{R}$, est donnée par

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{B}{\lambda} \right) E_\alpha[-\lambda t^\alpha] + \frac{B}{\lambda}.$$

En effet, on peut vérifier que $x(t)$ est une solution du problème (1.8). Posons, pour $t > 0$,

$$p_1(t) = \left(x_0 - \frac{B}{\lambda} \right) E_\alpha[-\lambda t^\alpha] \quad \text{et} \quad p_2(t) = \frac{B}{\lambda}.$$

En remplaçant dans le système (1.8), on obtient

$$D^\alpha p_1(t) + \lambda p_1(t) + \lambda p_2(t) = B,$$

ce qui implique que

$$D^\alpha p_1(t) + \lambda p_1(t) = 0, \quad (1.9)$$

avec

$$p_1(0) = \left(x_0 - \frac{B}{\lambda} \right),$$

et sa c'est vrai d'après la remarque 4. Par conséquent, $x(t)$ est solution du système (1.8).

1.2 Existence et unicité

On considère le problème de Cauchy avec une équation différentielle fractionnaire de type Caputo suivante

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (1.10)$$

comptée par les conditions initiales suivantes

$$x^{(k)}(0) = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.11)$$

Théorème 1. (voir [9]) Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et soit $K > 0$, $h^* > 0$, et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. On définit

$$G = [0, h^*] \times [a_0 - K, a_0 + K],$$

et soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, il existe $h > 0$ et $x \in C([0, h])$ solution de l'équation (1.10) munie des conditions initiales (1.11). Si $0 < \alpha < 1$, alors h est donné par

$$h = \min\{h^*, (K\Gamma(\alpha + 1)/M)^{\frac{1}{\alpha}}\}, \quad \text{avec } M = \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|.$$

Et si en plus f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à x , c-à-d,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < l|x_1 - x_2|,$$

avec $l > 0$ est la constante de Lipschitz indépendante de t, x_1 et x_2 , alors $x \in C([0, h])$ est unique.

L'idée de la démonstration de ce théorème est basée sur les deux lemmes suivants (voir [22]).

Lemme 2. Sous les hypothèses du théorème 1, $x \in C([0, h])$ est une solution de l'équation (1.10) avec les conditions initiales (1.11) si et seulement si elle est solution de l'équation intégral de Voltera suivante

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} a_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds.$$

Lemme 3. (voir [22]) Sous les hypothèses du théorème 1, l'équation de Voltera

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} a_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad (1.12)$$

possède une solution unique $x \in C([0, h])$.

Remarque 5. *Tous ces résultats peuvent être étendus au cas vectoriel c'est-à-dire un système d'équations différentielles.*

Théorème 2. *(Théorème de comparaison pour les systèmes d'ordre fractionnaire) Si $D^\alpha x(t) \geq D^\alpha y(t)$ et $0 < \alpha < 1$, $x(0) = y(0)$, alors $x(t) \geq y(t)$. (voir [7])*

Démonstration. Supposons que $D^\alpha x(t) = f(x, t)$ et $D^\alpha y(t) = g(y, t)$, alors on a $f(x, t) \geq g(y, t)$. En utilisant l'équation intégrale de Voltera

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad (1.13)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, y(s)) ds, \quad (1.14)$$

on peut obtenir

$$x(0) = x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (1.15)$$

Et concernant la condition initiale $x(0) = y(0)$ dans le théorème, on peut substituer $x(0)$ de (1.15) dans (1.14) et on obtient

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, y(s)) ds,$$

c'est-à-dire,

$$y(t) = x(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \times [g(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds. \quad (1.16)$$

Puisque $0 < s < t$ alors $t-s > 0$, et depuis $f(x, t) \geq g(y, t)$, on peut conclure de (1.16) que $y(t) - x(t) \leq 0$ alors on a $y(t) \leq x(t)$. \square

Lemme 4. *(Voir [12]) La solution du problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= -\lambda x(t) + f(t), \\ x(a) &= b, \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est donnée par

$$x(t) = bE_\alpha[-\lambda(t-a)^\alpha] + \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[-\lambda(t-s)^\alpha] f(s) ds.$$

Lemme 5. (voir [14]) Soit $u(t)$ une fonction continue sur $[t_0, +\infty[$ qui vérifie

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) \leq -\lambda u(t) + \mu, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec $0 < \alpha < 1$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \neq 0$ et $t_0 \geq 0$, alors,

$$u(t) \leq \left(u_0 - \frac{\mu}{\lambda}\right) E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha] + \frac{\mu}{\lambda}.$$

Démonstration. Soit le changement de variable suivant $U(t) = u(t) - \frac{\mu}{\lambda}$, alors le problème (1.17) devient

$$\begin{cases} D^\alpha U(t) \leq -\lambda U(t), \\ U(t_0) = u_0 - \frac{\mu}{\lambda}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Il résulte de (1.18) qu'il existe une fonction positive $m(t)$ satisfaisant

$$\begin{cases} D^\alpha U(t) = -\lambda U(t) - m(t), \\ U(t_0) = u_0 - \frac{\mu}{\lambda}, \end{cases} \quad (1.19)$$

d'après le lemme 4 la solution du problème (1.19) est donnée par

$$U(t) = U(t_0)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha] - \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t-s)^\alpha] m(s) ds. \quad (1.20)$$

Considérons le système de comparaison de (1.18) suivant

$$\begin{cases} D^\alpha V(t) = -\lambda V(t), \\ V(t_0) = U(t_0), \end{cases} \quad (1.21)$$

avec $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\lambda \neq 0$, et $t_0 \geq 0$. D'après l'exemple 4, la solution de (1.21) est donnée par,

$$V(t) = U(t_0)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha], \quad t \geq t_0. \quad (1.22)$$

De (1.20) et (1.22) on a

$$U(t) - V(t) = - \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t-s)^\alpha] m(s) ds, \quad t \geq t_0, \quad (1.23)$$

et puisque $E_{\alpha,\alpha}(x) > 0$ pour $0 < \alpha < 1$ et $x \in \mathbb{R}$ (voir [21]), et $m(t) > 0$, alors, d'après

(1.23) et (1.22) on a

$$U(t) \leq V(t) = U(t_0)E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha] \quad t \geq t_0.$$

C'est-à-dire,

$$u(t) \leq \left(u_0 - \frac{\mu}{\lambda}\right) E_\alpha[-\lambda(t-t_0)^\alpha] + \frac{\mu}{\lambda}.$$

□

1.3 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

L'étude de la stabilité permet de voir le comportement des solutions sans compter à résoudre le système, pour cela les informations sur la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires sont donnés par des techniques qu'on développera dans cette section.

1.3.1 Stabilité des systèmes linéaires autonomes

Dans la théorie de stabilité des systèmes d'ordre entier, le système est stable si les racines du polynôme caractéristique ont une partie réelle négative (situées dans la moitié gauche du plan complexe). Denis Matignon a présenté dans son article en 1996 le théorème suivant (voir [1]) qui permet de traiter les systèmes d'ordre fractionnaire au sens de Caputo.

Théorème 3. *Soit le système différentielle fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) &= Ax(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, ce système est localement asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg \lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n,$$

et le système est instable si et seulement si

$$|\arg \lambda_i| < \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n,$$

avec λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont les valeurs propres de la matrice A , la figure (1.2) montre les régions stables et les régions instables.

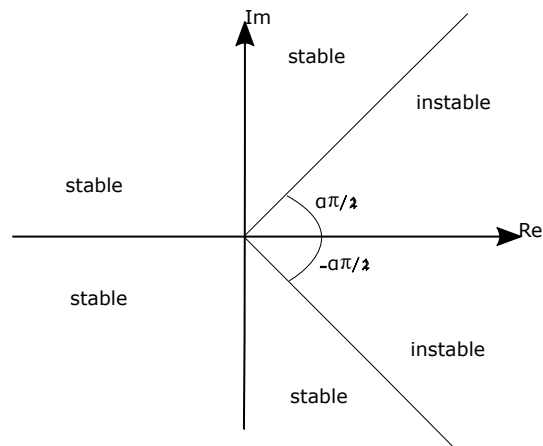


Figure 1.2 – Représentation de la région de stabilité et d’instabilité.

1.3.2 Stabilité des systèmes non linéaires (linéarisation)

La plupart des systèmes qui modélisent des phénomènes naturels ne sont pas linéaires, donc on est obligé de les linéariser.

La stabilité du système linéaire est étudiée par la méthode indirecte de Lyapounov, en utilisant son linéarisé, ce système transforme le problème de stabilité globale à un problème de stabilité locale au voisinage du point d’équilibre. (voir [1])

Soit le système non linéaire suivant

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \quad \text{et } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.24)$$

On veut linéariser ce système autour d’un point d’équilibre. Soit x^* un point d’équilibre du système (1.24), c’est à dire,

$$f(x^*) = 0.$$

Le système linéarisé autour de cet équilibre est donné par (voir [1])

$$D^\alpha x(t) = J_f(x^*)x(t),$$

avec $J_f(x^*)$ est la matrice Jacobienne de f au point x^* ,

$$J_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ce système linéaire permet de récupérer le comportement local de (1.24) au voisinage du point d’équilibre x^* . Ceci se fait par le biais du théorème 3.

1.3.3 Stabilité par Lyapunov

Nous énonçons un résultat connu et qui revient à Delavari, Baleanu et Sadati [7] qui est une extension de la méthode directe de Lyapunov pour un système non linéaire d'ordre fractionnaire de type Caputo.

Théorème 4. (voir [7]) Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre du système (1.24) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant x^* . Soit $V(t, x) : [0, +\infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable telle que si

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), \quad \text{et} \quad D^\alpha V(t, x) \leq -W_3(x),$$

pour tous $t \geq 0$, $x \in D$, $0 < q < 1$ avec $W_1(x)$, $W_2(x)$ et $W_3(x)$ des fonctions continues et définies positives dans D , alors $x^* = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable.

Dans ce qui suit, on énonce un lemme, qui permet de trouver des fonctions candidates de Lyapunov pour démontrer la stabilité de nombreux systèmes d'ordre fractionnaire.

Lemme 6. (voir [20]) Soit $x(t) \in \mathbb{R}^+$ une fonction continument dérivable, alors pour tout $t \geq 0$

$$\frac{1}{2} D^\alpha x^2(t) \leq x(t) D^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Remarque 6. (voir [20]) Considérons la famille des fonctions de Lyapunov quadratiques,

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2} (x_i(t) - x_i^*)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

avec $c_i > 0$. En utilisant le lemme 6, on obtient

$$D^\alpha V(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) D^\alpha (x_i(t) - x_i^*), \quad x_i(t), x_i^* \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Corollaire 1. (voir [3]) Pour le système d'ordre fractionnaire

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \tag{1.25}$$

avec $0 < \alpha < 1$, $x = 0$ est un point d'équilibre et $x(t) \in \mathbb{R}$, si la condition suivante est satisfaite,

$$x(t)f(x(t)) \leq 0, \quad \forall x,$$

alors le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.25) est stable. Et si

$$x(t)f(x(t)) < 0, \quad \forall x,$$

alors le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.25) est asymptotiquement stable.

1.3.3.1 Fonction de Lyapounov de type Voltera

L'idée de cette partie est d'étendre la fonction de Lyapounov de type Voltera au systèmes épidémiques d'ordre fractionnaire à travers une inégalité pour estimer les dérivées fractionnaires de type Caputo de cette fonction. On a le lemme suivant. (voir [20])

Lemme 7. *Soit $x(t)$ une fonction continue et dérivable. Alors, pour tout $t \geq t_0$*

$$D^\alpha \left[x(t) - x^* - x^* \ln \frac{x(t)}{x^*} \right] \leq \left(1 - \frac{x^*}{x(t)} \right) D^\alpha x(t), \quad x^* \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Exemple 6. *Soit l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante*

$$D^\alpha x(t) = -\lambda x(t), \quad (1.26)$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$. Considérons la fonction de Lyapounov candidate suivante, qui est définie positive,

$$V(x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t).$$

En utilisant le lemme 6, on trouve

$$\begin{aligned} D^\alpha V(x(t)) &= \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t), \\ &\leq x(t)D^\alpha x(t), \\ &= -\lambda x^2(t) < 0. \end{aligned}$$

La dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov est définie négative, donc on peut conclure du corollaire 1 que l'équilibre $x^* = 0$ de l'équation (1.26) est asymptotiquement stable.

Exemple 7. *Considérons le système non linéaire d'ordre fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} D^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t), \\ D^\alpha x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t), \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$. Considérons la fonction candidate de Lyapounov suivante, qui est définie positive,

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t),$$

en utilisant le lemme 6, on peut trouver que,

$$\begin{aligned} D^\alpha V(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{1}{2}D^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{4}D^\alpha x_2^4(t), \\ &\leq x_1(t)D^\alpha x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t)D^\alpha x_2^2(t), \\ &\leq x_1(t)D^\alpha x_1(t) + x_2^3(t)D^\alpha x_2(t), \\ &= -x_1^2(t) - x_2^4(t) < 0. \end{aligned}$$

La dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapunov est définie négative, donc on peut conclure du corollaire 1 que l'origine du système (7) est asymptotiquement stable.

Chapitre 2

Modélisation mathématique

Comprendre le lien entre le prédateur et la proie est l'une des principales perspectives de prédiction des systèmes écologiques. Une grande partie des activités de recherche est consacrée à l'étude de la relation entre les espèces biologiques en général et les espèces proie prédateur en particulier. De nombreux chercheurs ont utilisés des modèles de population dans différents domaines de la biologie mathématique et étudient la dynamique de manière approfondie en raison de leur importance. Les comportements dynamiques des modèles de population peuvent être étudiés par différentes approches par exemple les équations différentielles ordinaires (EDO), les équations aux dérivées partielles(EDP), les équations différentielles à retard (EDR) et les équations différentielles fractionnaires (EDF). La plupart des recherches ont été effectuées en utilisant des EDOs ,EDPs et EDRs.

Dans les paragraphes suivants, nous faisons une présentation détaillée de certain modèle en dynamique des populations.

2.1 Modélisation mathématique appliquée à la dynamique des populations

Les mathématiques sont présentes de plus en plus dans plusieurs disciplines et notamment en biologie. La modélisation en biologie est utilisée dans la dynamique des populations pour modéliser la croissance des populations et aussi les interactions entre elles.

Dans ce qui suit, considérons certain modèles en dynamique des populations.

2.1.1 Modèle de croissance exponentielle de Malthus

Ce modèle revient à l'économiste anglais Thomas Robert Malthus en 1798. Il considère une population constituée d'un seul espèce animal et il néglige les variation d'âge, de taille et de périodicité éventuelle de natalité ou mortalité et qui vit seul dans un espace invariable.

Celui ci consiste à supposer que l'évolution de la population d'individu N au cours d'un

intervalle de temps est proportionnel à N , ce qui se présente par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

avec r le taux de croissance. En intégrant l'équation (2.1), on obtient la loi de croissance Malthusienne :

$$N(t) = N(0) \exp(rt).$$

Nous remarquons que si $r < 0$, la population décroît exponentiellement vers le 0 (extinction de la population), $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, si $r = 0$, la population reste constante et si $r > 0$, la population croît exponentiellement ($\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$), voir la figure 2.1.

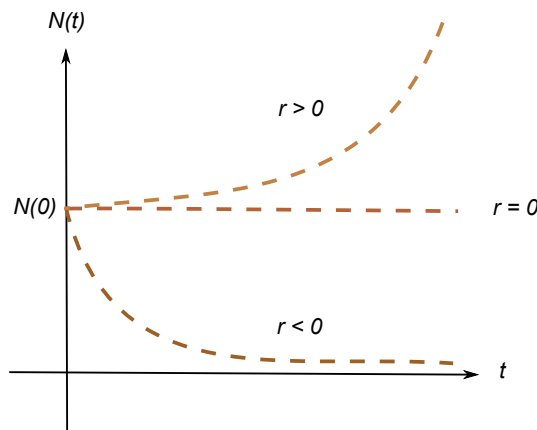


Figure 2.1 – La loi de croissance Malthusienne.

2.1.2 Modèle de croissance logistique de Verhulst

En 1838, le mathématicien belge Verhulst a introduit l'équation logistique, qui est une sorte de généralisation de l'équation de croissance exponentielle de Malthus mais avec une valeur maximale pour la population N . Cette équation se traduit par l'équation différentielle suivante,

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

avec r est le taux de croissance intrinsèque de la population et K appelé la capacité limite du milieu et représente la population limite dans laquelle elle ne peut plus croître.

En intégrant l'équation (2.2), on obtient l'expression appelée la loi de croissance logistique donnée par,

$$N(t) = \frac{KN(0)}{N(0) + (K - N(0)) \exp(-rt)}.$$

Si $N(0)$ est différent de 0, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, cette loi est différente de celle de Malthus en sens qu'elle impose une limite (voir la figure 2.2).

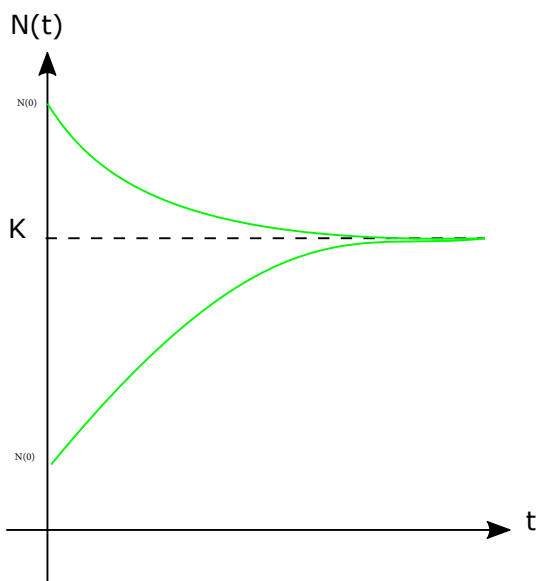


Figure 2.2 – La loi de croissance logistique.

2.1.3 Effets Allee démographiques

Le modèle logistique (de Verhulst) est un modèle classique et simple de la dynamique des populations. Il comprend la diminution du taux de croissance d'une population à mesure que sa taille augmente. Ce modèle considère également la capacité de charge d'une population et il est donné par (2.2). Dans ce modèle, on peut ajouter un terme d'effet Allee, ce qui donne :

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \left(\frac{x(t)}{M} - 1\right),$$

avec M est le seuil d'Allée sous lequel la population décroît jusqu'à l'extinction (la population diminue lorsqu'elle est inférieure à une certaine taille).

Dans ce qui suit, nous résumons les comportements possibles de l'équation avec effet Allee ci-dessus.

- Si la taille de la population initiale est plus petite que le seuil de Allee M alors la population décroît jusqu'à l'extinction (voir la courbe grise claire dans la figure 2.3).
- Si la taille initiale est plus grande que le seuil de Allee M alors cette condition permet à la population de s'installer (ce qui est décrit par les courbes vertes dans la figure 2.3).

2.2 Modélisation mathématique appliquée en écologie

L'étude de la dynamique de plusieurs populations en interaction a commencée au XX siècle. C'est à cette époque que les chercheurs furent développée les premiers modèles en écologie. Dans un écosystème, les différentes populations qui coexistent développent des interactions. Il y a principalement trois types d'interaction.

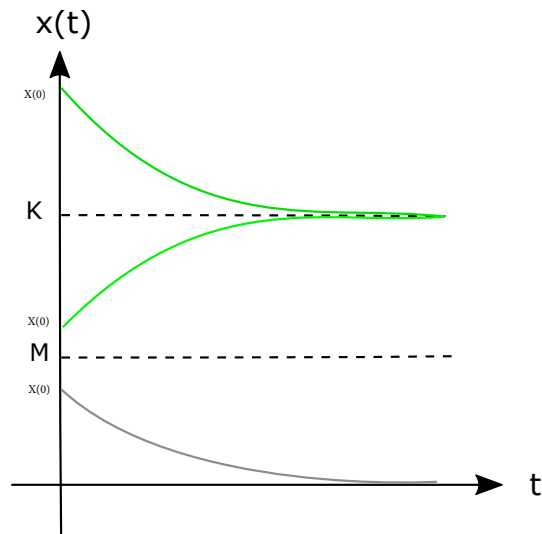


Figure 2.3 – La loi de croissance logistique avec effet Allee.

2.2.1 Modèles de deux populations en interaction

La forme générale d'un modèle de deux populations en interaction est la suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \pm h(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(y) \pm k(x, y), \end{cases}$$

avec $x(t)$ est la densité de la première population à l'instant t , $y(t)$ est la densité de la deuxième population à l'instant t et $f(x)$ et $g(y)$ modélisent la croissance isolée.

Le signe de h et k décrit l'effet de chaque population de l'un sur la croissance de l'autre, on a

- $(-, -)$ chaque espèce exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre (compétition).
- $(-, +)$ ou $(+, -)$ une population exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre et on a l'effet inverse dans l'autre sens (proie prédateur).
- $(+, +)$ chaque espèce exerce un effet positif sur la croissance de l'autre (mutualisme).

2.2.2 Modèle de Lotka Volterra

Considérant deux espèces, la première est la proie de densité $x(t)$ et la seconde est le prédateur de densité $y(t)$, alors le modèle de Lotka Volterra est le système à deux équations

différentielles ordinaires suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy, \\ \frac{dy}{dt} = -my + eaxy, \end{cases}$$

avec r , a , m et e sont des constantes positives, r est le taux de croissance de la proie en absence des prédateurs, a est le taux de prédation sur la proie, m le taux de mortalité des prédateurs en absence des proies et e est le rendement de conversion de biomasse proie en biomasse prédateur.

Dans l'absence des prédateurs la proie croit par la loi malthusienne, il s'agit du terme rx . L'effet de prédateur est de diminuer le taux de croissance de proie, il s'agit du terme $-axy$. Dans l'absence des proies, les prédateurs décroissent (mortalité), il s'agit du terme $-my$. La contribution des proies au taux de croissance des prédateur, il s'agit du terme $eaxy$.

2.3 Modèle de culture-ravageur

Les modèles mathématiques sont nécessaires et utiles aux chercheurs pour développer leurs stratégies et activer leurs programmes. À l'heure actuelle, il existe de nombreuses extensions de la modélisation mathématique appliquées au système biologique.

Compte tenu de la population humaine croissante et des ressources alimentaires limitées, il est essentiel d'introduire toutes les mesures nécessaires pour protéger les cultures contre les ravageurs et les mauvaises herbes. Des pertes importantes de produits agricoles en quantité et en qualité se produisent chaque année en raison des ravageurs. De nombreux chercheurs se sont intéressés à la modélisation de la dynamique des populations de cultures et de ravageurs et à leur interaction avec d'autres espèces.

Considérons un modèle de culture-ravageur basé sur un système de proie prédateur et donné par

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \frac{a_1 CP}{b_1 + C} - hC, \\ \frac{dP(t)}{dt} = \frac{c_1 a_1 CP}{b_1 + C} - \mu P, \end{cases}$$

avec $C(t)$ désigne la population de cultures et $P(t)$ représente les ravageur, pour $t > 0$. On suppose que les cultures sont consommées par les ravageurs avec la réponse fonctionnelle Holling de type II

$$\frac{a_1 CP}{b_1 + C}.$$

Dans le modèle ci-dessus, r est le taux de croissance intrinsèque et K soit la capacité de charge pour la population de cultures. Les autres paramètres sont interprétées comme suit : soit a_1 le taux de prédation des cultures par la population des ravageurs et h est le taux

de récolte pour la population de cultures. Ici, c_1 est le taux de conversion de la population des ravageurs. Soit b_1 la constante de demi-saturation. Ici, μ est le taux de mortalité de la population des ravageurs.

2.4 Modèle de culture-ravageur avec une dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo

La plupart des chercheurs utilisent les équations différentielles d'ordre entier pour construire le modèle mathématique et qui déjà se sont avérés importants pour comprendre la dynamique des systèmes biologiques. Mais récemment, les équations différentielles d'ordre fractionnaire ont acquis une importance considérable en raison de leurs capacité à décrire exactement des différents phénomènes non linéaires. L'équation différentielle d'ordre fractionnaire permet d'avoir plus de degré de liberté que le système d'ordre entier. Les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont liées aux systèmes avec mémoire qui existe dans la plupart des systèmes biologiques.

Récemment, des travaux importants ont été réalisés avec des différentiels d'ordre fractionnaire dans des systèmes biologiques et dans d'autre domaine de la science et de l'ingénierie [8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19].

Nous considérons le modèle écologique d'ordre fractionnaire suivant incorporant une culture et une population de ravageurs, pour $t > 0$,

$$\begin{cases} D^q C(t) = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \frac{a_1 CP}{b_1 + C} - hC, \\ D^q P(t) = \frac{c_1 a_1 CP}{b_1 + C} - \mu P, \end{cases} \quad (2.3)$$

avec D^q est la dérivée standard de Caputo et $q \in (0, 1)$. alors nous avons

$$D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^{-q} x'(s) ds,$$

Quand q tend vers 1 alors $D^q x(t)$ converge vers la dérivée d'ordre entier $x'(t)$. Le système (2.3) est complété par les conditions initiales suivantes,

$$C(0) := C_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad P(0) := P_0 \geq 0. \quad (2.4)$$

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'analyse mathématique du système (2.3). Nous allons commencer par traiter quelques propriétés.

2.4.1 Existence, unicité et positivité des solutions

Le modèle dans l'équation (2.3) peut s'écrire comme suit,

$$\begin{cases} D^q C &= f(C, P), \\ D^q P &= g(C, P), \end{cases} \quad (2.5)$$

avec f et g représentent la partie à droite de (2.3). Une solution unique du système (2.5) existe si l'application $F(C, P) = [f, g]^T(C, P)$ satisfait la condition de Lipschitz localement par rapport à C et P . Clairement, les deux fonctions f et g sont continument dérivables dans \mathbb{R}_+^2 . Alors, l'existence et l'unicité des solutions d'un tel système sont vérifiées par les théorèmes 6.1 et 6.5 dans [8] (voir aussi [13] et le théorème 1 dans le chapitre 1).

Dans ce document, nous traitons uniquement les propriétés de positivité et de bornitude. Dans la proposition suivante, nous montrons que les solutions de système sont positives.

Proposition 4. *Toutes les solutions du système (2.3) avec des conditions initiales positives sont positives.*

Démonstration. Soit $(C(t), P(t))$ une solution de (2.3) associée à la condition initiale $(C(0), P(0)) \in \mathbb{R}_+^2$. Nous prouvons la positivité en appliquant le théorème 1 dans [17] (voir aussi les lemmes 5 et 6 du [2]). Nous avons les implications suivantes,

$$C(t) = 0 \Rightarrow D^q C(t) \geq 0,$$

et

$$P(t) = 0 \Rightarrow D^q P(t) \geq 0.$$

Clairement, la solution de (2.3) reste positive pour tous $t > 0$. Cela donne $C(t) \geq 0$ et $P(t) \geq 0$, pour $t > 0$. \square

2.4.2 Bornitude des solutions

Dans cette sous section, on énonce le théorème correspondant à la bornitude de la solution de notre système. Avant ça, nous devons définir la fonction de Mittag-Leffler. La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est définie comme (voir chapitre 1 pour plus de détails sur cette fonction),

$$E_q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk + 1)}.$$

Clairement, $E_1(z) = e^z$. On sait que la solution de (voir le chapitre 1),

$$\begin{cases} D^q x(t) &= -\nu x(t), \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.6)$$

est donné par la fonction de Mittag-Leffler et nous avons,

$$x(t) = x_0 E_q[-\nu(t - t_0)^q].$$

Théorème 5. *Toutes les solutions du système (2.3) avec des conditions initiales $(C(0), P(0))$ dans \mathbb{R}_+^2 sont uniformément bornées.*

Démonstration. Définissons la fonction,

$$\begin{aligned} W: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ t &\mapsto W(t) = C(t) + \frac{1}{c_1} P(t). \end{aligned}$$

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q de W le long de la trajectoire de solution du système (2.3) est donnée par,

$$D^q W(t) = D^q C(t) + \frac{1}{c_1} D^q P(t) = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - hC - \frac{\mu}{c_1} P.$$

Par conséquent, pour $\nu > 0$, nous avons

$$D^q W(t) + \nu W = rC \left(1 + \frac{\nu}{r} - \frac{C}{K} - \frac{h}{r}\right) - \left(\frac{\mu}{c_1} - \frac{\nu}{c_1}\right) P.$$

Si on choisit $0 < \nu \leq \mu$, alors,

$$D^q W(t) + \nu W \leq \left(rC + \nu C - hC - \frac{rC^2}{K}\right).$$

Cela mène à,

$$D^q W(t) + \nu W \leq \frac{K(r + \nu - h)^2}{4r} =: B.$$

En appliquant le théorème de comparaison pour les équations fractionnaire (voir le lemme 3 de [14] voir aussi théorème 2 et l'exemple 5 dans le chapitre 1), on obtient,

$$0 \leq W(C(t), P(t)) \leq \left[W(0) - \frac{B}{\nu}\right] E_q(-\nu t^q) + \frac{B}{\nu},$$

avec E_q est la fonction de Mittag-Leffler. Puisque, $E_q(-\nu t^q) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ (voir [19] ou le lemme 4 de [5] ou le lemme 1 dans le chapitre 1), alors

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} W(C(t), P(t)) \leq \frac{B}{\nu},$$

Par conséquent, toute solution de (2.3) est uniformément bornée.

□

Chapitre 3

Étude d'un modèle de culture ravageurs avec une dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans ce chapitre nous allons étudier la stabilité locale et globale d'un modèle de culture ravageurs et on va illustrer tous les résultats théoriques par des simulations numériques.

3.1 Stabilité locale

Pour étudier un système ayant un comportement non linéaire la méthode la plus utilisée est de l'approcher par un système linéaire (linéarisation autour d'un point d'équilibre).

Dans cette section, nous étudions la stabilité locale des points d'équilibres du système d'ordre fractionnaire (2.3).

3.1.1 Recherche des points d'équilibres

Un point d'équilibre est une solution qui ne dépend pas du temps, c'est-à-dire, on considère les solutions constantes : $C(t) = C^*$, $P(t) = P^*$. Autrement dit, nous avons

$$\begin{cases} D^q C^* = 0, \\ D^q P^* = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique que

$$\begin{cases} rC^* \left(1 - \frac{C^*}{K}\right) - \frac{a_1 C^* P^*}{b_1 + C^*} - hC^* = 0, \\ \frac{c_1 a_1 C^* P^*}{b_1 + C^*} - \mu P^* = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

La deuxième équation de (3.1) donne,

$$P^* = 0 \quad \text{ou} \quad C^* = \frac{\mu b_1}{c_1 a_1 - \mu}.$$

En remplaçant P^* par 0 dans la première équation de (3.1), on obtient

$$rC^* \left(1 - \frac{C^*}{K}\right) - hC^* = 0.$$

Donc,

$$C^* = 0 \quad \text{ou} \quad r \left(1 - \frac{C^*}{K}\right) - h = 0.$$

Ainsi,

$$C^* = 0 \quad \text{ou} \quad C^* = K \left(1 - \frac{h}{r}\right).$$

Par conséquent, $(0, 0)$ est un équilibre trivial et $(\tilde{k}, 0)$ avec $\tilde{k} := k(1 - \frac{h}{r})$ est aussi un point d'équilibre du système (2.3). Cet équilibre existe si $h < r$.

Maintenant, pour $C^* = \frac{\mu b_1}{c_1 a_1 - \mu}$, nous avons

$$rC^* \left(1 - \frac{C^*}{K}\right) - \frac{a_1 C^* P^*}{b_1 + C^*} - hC^* = 0.$$

Puisque, $C^* \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{b_1 + C^*}{a_1} \left(r \left(1 - \frac{C^*}{K}\right) - h \right), \\ &= \frac{b_1 + C^*}{a_1} \left(r \left(1 - \frac{\frac{\mu b_1}{c_1 a_1 - \mu}}{K}\right) - h \right), \\ &= \frac{b_1 + C^*}{a_1} \left(r \left(\frac{K(c_1 a_1 - \mu) - \mu b_1}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) - h \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(C^*, P^*) = \left(\frac{\mu b_1}{c_1 a_1 - \mu}, \frac{b_1 + C^*}{a_1} \left(r \left(\frac{K(c_1 a_1 - \mu) - \mu b_1}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) - h \right) \right)$$

est un point d'équilibre du système (2.3). On remarque que $C^* > 0$ et $P^* > 0$ si

$$\mu < \frac{K}{K + b_1} c_1 a_1 \quad \text{et} \quad h < r \frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)}$$

En conclusion, le système d'ordre fractionnaire admet les points d'équilibres suivants :

1. Le point d'équilibre trivial $E_0(0, 0)$, qui existe toujours.
2. Le point d'équilibre $E_1(\tilde{k}, 0)$ (extinction des ravageurs), qui existe si $h < r$, avec $\tilde{k} = K(1 - \frac{h}{r})$.
3. Le point d'équilibre intérieur $E_2(C^*, P^*)$, qui existe si

$$\mu < \frac{K}{K + b_1} c_1 a_1 \quad \text{and} \quad h < r \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right), \quad (3.2)$$

avec

$$C^* := \frac{\mu b_1}{c_1 a_1 - \mu} \text{ et}$$

$$P^* := \frac{b_1 + C^*}{a_1} \left[r \left(\frac{K - C^*}{K} \right) - h \right] = \frac{b_1 + C^*}{a_1} \left[r \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) - h \right].$$

3.1.2 Stabilité locale des points d'équilibres

Dans cette section, nous discutons la stabilité des points d'équilibres du système (2.3). Pour cela, nous calculons la matrice Jacobienne. La matrice Jacobienne du système (2.3) est donnée par

$$J(C, P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial C} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial C} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons,

$$J(C, P) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2C}{K} \right) - h - \frac{a_1 b_1 P}{(b_1 + C)^2} & -\frac{a_1 C}{b_1 + C} \\ \frac{c_1 a_1 b_1 P}{(b_1 + C)^2} & \frac{c_1 a_1 C}{b_1 + C} - \mu \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

En utilisant la matrice Jacobienne (3.3) et la condition de Matignon (voir le chapitre 1), la stabilité locale des points d'équilibres du système d'ordre fractionnaire (2.3) sera étudiée. Nous avons les théorèmes suivants.

Théorème 6. *Le point d'équilibre trivial E_0 du système (2.3) est localement asymptotiquement stable si $h > r$ et instable si $h < r$.*

Démonstration. La matrice Jacobienne (3.3) autour du point d'équilibre trivial E_0 est don-

née par

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r - h & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice Jacobienne $J(E_0)$ autour de point d'équilibre trivial E_0 sont

$$\lambda_1 = r - h \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\mu.$$

En utilisant la condition de Matignon (voir le théorème 3 dans le chapitre 1), on a,

$$|\arg(\lambda_2)| = \pi > q\frac{\pi}{2}, \quad \text{pour } 0 < q < 1.$$

Si $h > r$, alors

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi > q\frac{\pi}{2}, \quad \text{pour } 0 < q < 1.$$

Par conséquent, le point d'équilibre trivial E_0 est localement asymptotiquement stable si $h > r$.

Pour le cas d'instabilité, si $r > h$ alors

$$|\arg(\lambda_1)| = 0 < q\frac{\pi}{2}, \quad \text{pour } 0 < q < 1.$$

Ce qui implique que E_0 est instable. □

Remarque 7. *On observe que le point d'équilibre trivial E_0 est localement asymptotiquement stable lorsque le point d'équilibre E_1 (extinction des ravageurs) et le point d'équilibre intérieur E_2 n'existe pas.*

Maintenant, on discute la stabilité du point d'équilibre de l'extinction des ravageurs $E_1(\tilde{k}, 0)$

Théorème 7. *Si*

$$[h < r \text{ et } \mu \geq c_1 a_1] \text{ ou } \left[r \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) < h < r \text{ et } \mu < c_1 a_1 \right], \quad (3.4)$$

alors le point d'équilibre d'extinction des ravageurs E_1 pour le modèle d'ordre fractionnaire (2.3) est localement asymptotiquement stable.

Pour le cas d'instabilité si

$$\mu < \frac{K}{K + b_1} c_1 a_1 \text{ et } h < r \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right). \quad (3.5)$$

alors le point d'équilibre E_1 est instable

Démonstration. Au point d'équilibre E_1 (l'extinction des ravageurs), la matrice Jacobienne

(3.3) est donnée par

$$J(\tilde{k}, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\tilde{k}, 0)}{\partial C} & \frac{\partial f(\tilde{k}, 0)}{\partial P} \\ \frac{\partial g(\tilde{k}, 0)}{\partial C} & \frac{\partial g(\tilde{k}, 0)}{\partial P} \end{pmatrix},$$

avec,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\tilde{k}, 0)}{\partial C} &= r \left(1 - \frac{2K \left(1 - \frac{h}{r} \right)}{K} \right) - h, \\ &= -r + h, \\ &= r \left(-\frac{\tilde{k}}{K} \right), \end{aligned}$$

et,

$$\frac{\partial f(\tilde{k}, 0)}{\partial P} = -\frac{a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}}.$$

Nous avons aussi

$$\frac{\partial g(\tilde{k}, 0)}{\partial C} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g(\tilde{k}, 0)}{\partial P} = \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} - \mu.$$

On obtient,

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} r \left(-\frac{\tilde{k}}{K} \right) & -\frac{a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} \\ 0 & \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} - \mu \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice Jacobienne $J(E_1)$ autour du point d'équilibre E_1 sont,

$$\lambda_1 = r \left(-\frac{\tilde{k}}{K} \right) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} - \mu = \frac{(c_1 a_1 - \mu)K(r - h) - r b_1 \mu}{r b_1 + K(r - h)}.$$

En utilisant la condition de Matignon (voir le théorème 3 dans le chapitre 1), si (3.4) est satisfaite, alors

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi > q \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad |\arg(\lambda_2)| = \pi > q \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout} \quad 0 < q < 1.$$

Alors, le point d'équilibre E_1 est localement asymptotiquement stable. \square

Remarque 8. On observe que le point d'équilibre E_1 est stable lorsque le point d'équilibre intérieur E_2 n'existe pas.

Pour terminer, nous étudions la stabilité du point d'équilibre intérieur $E_2(C^*, P^*)$.

Soit

$$h_1 := \frac{(K - b_1)c_1a_1 - (K + b_1)\mu}{K(c_1a_1 - \mu)},$$

$$h_2 := \frac{Kc_1a_1 - (K + b_1)\mu}{K(c_1a_1 - \mu)},$$

$$h_3(r) := 2c_1a_1 \left(\frac{(c_1a_1 - \mu)}{\mu} + \sqrt{\frac{(c_1a_1 - \mu)^2}{\mu^2} + \left(\frac{b_1}{K\mu}\right)r} \right),$$

$$H := h - h_1r,$$

$$K_1 := C^* \left[\frac{r}{K} - \frac{a_1P^*}{(b_1 + C^*)^2} \right],$$

$$= C^* \left[\frac{r}{K} - \frac{a_1 \frac{b_1 + C^*}{a_1} \left[r \left(\frac{Kc_1a_1 - (K + b_1)\mu}{K(c_1a_1 - \mu)} \right) - h \right]}{(b_1 + C^*)^2} \right],$$

$$= C^* \left[\frac{r}{K} - r \left(\frac{Kc_1a_1 - (K + b_1)\mu}{K(c_1a_1 - \mu)(b_1 + C^*)} \right) + \frac{h}{(b_1 + C^*)} \right],$$

$$= C^* \left[\frac{K(c_1a_1 - \mu)(b_1 + C^*)r - r(Kc_1a_1 - (K + b_1)\mu)}{K(c_1a_1 - \mu)(b_1 + C^*)} + \frac{h}{(b_1 + C^*)} \right],$$

$$= \frac{C^*}{(b_1 + C^*)} (h - h_1r),$$

$$= \frac{C^*}{(b_1 + C^*)} H,$$

$$K_2 := \frac{a_1C^*}{b_1 + C^*} \frac{c_1a_1b_1P^*}{(b_1 + C^*)^2} > 0,$$

$$P(H) := H^2 + 4 \frac{c_1a_1(c_1a_1 - \mu)}{\mu} H - 4 \left(\frac{b_1c_1^2a_1^2}{K\mu} \right) r.$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 8. *Soit*

(H1) $\mu < \frac{K}{K+b_1}c_1a_1$ et $h_1r < h < h_2r$.

(H2) $K > b_1$, $\mu < \frac{K-b_1}{K+b_1}c_1a_1$ et $h = h_1r$.

(H3) $K > b_1$, $\mu < \frac{K-b_1}{K+b_1}c_1a_1$ et $h_1r - h_3(r) < h < h_1r$.

(H4) $K > b_1$, $\mu < \frac{K-b_1}{K+b_1}c_1a_1$, $r > \frac{4c_1a_1(c_1a_1-\mu)h_2}{\mu h_1^2}$ et $h = h_1r - h_3(r)$.

(H5) $K > b_1$, $\mu < \frac{K-b_1}{K+b_1}c_1a_1$, $r > \frac{4c_1a_1(c_1a_1-\mu)h_2}{\mu h_1^2}$ et $h < h_1r - h_3(r)$.

1. Si (H1) ou (H2) est satisfaite, alors pour le modèle d'ordre fractionnaire (2.3), le point d'équilibre intérieur E_2 est localement asymptotiquement stable pour tous $0 < q < 1$.
2. Si (H3) est satisfaite, alors pour le modèle d'ordre fractionnaire (2.3), le point d'équilibre intérieur E_2 est localement asymptotiquement stable pour tous $0 < q < q^*$ et instable pour $q^* < q < 1$ avec

$$q^* = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{-K_1} \right) \quad \text{où} \quad \Delta = \frac{C^{*2}}{(b_1 + C^*)^2} P(H).$$

3. Si (H4) ou (H5) est satisfaite, alors pour le modèle d'ordre fractionnaire (2.3), le point d'équilibre intérieur E_2 est instable pour tous $0 < q < 1$.

Démonstration. Au point d'équilibre E_2 , la matrice Jacobienne (3.3) est donnée par,

$$J(C^*, P^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(C^*, P^*)}{\partial C} & \frac{\partial f(C^*, P^*)}{\partial P} \\ \frac{\partial g(C^*, P^*)}{\partial C} & \frac{\partial g(C^*, P^*)}{\partial P} \end{pmatrix},$$

avec,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(C^*, P^*)}{\partial C} &= r \left(1 - \frac{2C^*}{K} \right) - h - \frac{a_1 b_1 P^*}{(b_1 + C^*)^2}, \\ &= r \left(1 - \frac{2C^*}{K} \right) + \frac{a_1 P^*}{b_1 + C^*} - r \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) - \frac{a_1 b_1 P^*}{(b_1 + C^*)^2}, \\ &= r \left(1 - \frac{2C^*}{K} \right) + \frac{a_1 P^*}{b_1 + C^*} - r \left(\frac{K c_1 a_1 - K \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) + \frac{r b_1 \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} - \frac{a_1 b_1 P^*}{(b_1 + C^*)^2}, \\ &= r \left(1 - \frac{2C^*}{K} \right) + \frac{a_1 P^*}{b_1 + C^*} - r + \frac{r C^*}{K} - \frac{a_1 b_1 P^*}{(b_1 + C^*)^2}, \\ &= -r \left(\frac{C^*}{K} \right) + \frac{a_1 C^* P^*}{(b_1 + C^*)^2}. \end{aligned}$$

Nous avons aussi,

$$\frac{\partial f(C^*, P^*)}{\partial P} = -\frac{a_1 C^*}{b_1 + C^*}.$$

De plus, on a

$$\frac{\partial g(C^*, P^*)}{\partial C} = \frac{c_1 a_1 b_1 P^*}{(b_1 + C^*)^2},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(C^*, P^*)}{\partial P} &= \frac{c_1 a_1 C^*}{b_1 + C^*} - \mu \\ &= \frac{c_1 a_1 C^*}{b_1 + C^*} - \frac{c_1 a_1 C^*}{b_1 + C^*} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, on obtient,

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -r \left(\frac{C^*}{K} \right) + \frac{a_1 C^* P^*}{(b_1 + C^*)^2} & -\frac{a_1 C^*}{b_1 + C^*} \\ \frac{c_1 a_1 b_1 P^*}{(b_1 + C^*)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $J(E_2)$ sont les racines de l'équation suivante :

$$S(\lambda) = \lambda^2 + K_1 \lambda + K_2 = 0, \quad (3.6)$$

avec

$$K_1 := -\text{tr}(J(E_2)) \quad \text{et} \quad K_2 := \det(J(E_2)).$$

Calculons,

$$\begin{aligned} \Delta &= K_1^2 - 4K_2 \\ &= \frac{C^{*2}}{(b_1 + C^*)^2} \left[h - \left(\frac{(K - b_1)c_1 a_1 - (K + b_1)\mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) r \right]^2 \\ &\quad - 4 \frac{a_1 C^*}{b_1 + C^*} \frac{c_1 a_1 b_1 P^*}{(b_1 + C^*)^2}, \\ &= \frac{C^{*2}}{(b_1 + C^*)^2} \left[h - \left(\frac{(K - b_1)c_1 a_1 - (K + b_1)\mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) r \right]^2 \\ &\quad + 4C^* \frac{c_1 a_1 b_1}{(b_1 + C^*)^2} \left[h - \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1)\mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) r \right], \\ &= \frac{C^{*2}}{(b_1 + C^*)^2} P(H). \end{aligned}$$

Nous discutons les cas suivants.

1. Si (H1) est satisfaite, alors $H > 0$ (*i.e.* $K_1 > 0$). De plus, $K_2 > 0$. Donc, d'après le critère de Hurwitz, toutes les racines caractéristiques ont une partie réelle négative. Par conséquent, on obtient la condition de Matignon, c'est-à-dire,

$$|\arg(\lambda_1)| > \frac{\pi}{2} > q\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad |\arg(\lambda_2)| > \frac{\pi}{2} > q\frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tous} \quad 0 < q < 1.$$

Donc, le point d'équilibre intérieur E_2 est localement asymptotiquement stable.

2. Si (H2) est satisfaite, alors $H = 0$ (*i.e.* $K_1 = 0$). Nous avons,

$$\lambda = \pm i\sqrt{K_2}.$$

D'après la condition de Matignon [16], [18], on a

$$|\arg(\lambda)| = \frac{\pi}{2} > q\frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tous} \quad 0 < q < 1.$$

Donc, le point d'équilibre intérieur E_2 est localement asymptotiquement stable.

3. Si (H3) est satisfaite, alors $H < 0$ (*i.e.* $K_1 < 0$) et $\Delta < 0$. En effet, le signe de Δ est le signe de $P(H)$. Nous avons

$$P(H) = H^2 + 4\frac{c_1 a_1 (c_1 a_1 - \mu)}{\mu} H - 4\left(\frac{b_1 c_1^2 a_1^2}{K\mu}\right) r.$$

Soit

$$\Delta_H = \left[\frac{4c_1 a_1 (c_1 a_1 - \mu)}{\mu} \right]^2 + 16\frac{b_1 c_1^2 a_1^2 r}{K\mu}.$$

Alors, les racines de $P(H)$ sont données par

$$H_1 = \frac{-\frac{4c_1 a_1 (c_1 a_1 - \mu)}{\mu} - \sqrt{\Delta_H}}{2} \quad \text{et} \quad H_2 = \frac{-\frac{4c_1 a_1 (c_1 a_1 - \mu)}{\mu} + \sqrt{\Delta_H}}{2}.$$

On pose

$$h_3(r) := -\frac{-\frac{4c_1 a_1 (c_1 a_1 - \mu)}{\mu} - \sqrt{\Delta_H}}{2}.$$

Donc, $P(H)$ est négative si $H \in]H_1, H_2[$. C'est à dire,

$$H_1 < H < H_2,$$

d'où

$$h_1 r - h_3(r) < H < H_2 + h_1 r.$$

En particulier, si

$$h_1 r - h_3(r) < H < h_1 r$$

alors la condition (H3) est satisfaite et $\Delta < 0$.

Comme remarque, si λ est une valeur propre, alors son conjugué $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur

propre.

Nous avons,

$$\lambda = \frac{-K_1 \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Ainsi, puisque $K_1 < 0$,

$$|\arg(\lambda)| = |\arg(\bar{\lambda})| = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{-K_1} \right).$$

Par conséquent, d'après la condition de Matignon [16], [18], le point d'équilibre intérieur E_2 est localement asymptotiquement stable si et seulement si,

$$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{-K_1} \right) > q \frac{\pi}{2},$$

La valeur maximale de q se produit a

$$q^* = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{-K_1} \right).$$

Par conséquent, si (H3) est satisfaite, le système d'ordre fractionnaire (2.3) est localement asymptotiquement stable pour tous $0 < q < q^*$ et instable pour tous $q^* < q < 1$.

4. Si (H4) est satisfaite, alors $H = -h_3(r)$ (*i.e.* $\Delta = 0$). Nous avons,

$$\lambda = \frac{-K_1}{2} > 0.$$

Ce qui implique que

$$|\arg(\lambda)| = 0 < q \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tous } 0 < q < 1.$$

Donc, d'après la condition de Matignon [16], [18], le point d'équilibre intérieur E_2 est instable.

5. Si (H5) est satisfaite, alors $H < -h_3(r)$ (*i.e.* $\Delta > 0$) et nous avons

$$\lambda_{1,2} = \frac{-K_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} > 0.$$

Par conséquent,

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = 0 < q \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tous } 0 < q < 1.$$

Par conséquent, d'après la condition de Matignon [16], [18], le point d'équilibre intérieur E_2 est instable.

□

Remarque 9. *Quand (H3) est satisfaite, alors tous les équilibres sont instables, et il est*

possible que des solutions périodiques apparaissent (bifurcation de Hopf).

Plus précisément, d'après le théorème 8, si (H3) est vérifiée, alors, le système d'ordre fractionnaire (2.3) subit une bifurcation de Hopf au point d'équilibre intérieur E_2 lorsque l'ordre fractionnaire q passe par la valeur critique

$$q^* = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{-K_1} \right).$$

En effet, lorsque (H3) est satisfaite et $q = q^*$, l'équation caractéristique (3.6) a une paire de racines complexes conjuguées $\lambda_{1,2}$ situé à la limite de la zone de stabilité $|\arg(\lambda_{1,2})| = q^* \frac{\pi}{2}$.

3.2 Stabilité globale

La stabilité de Lyapounov est parmi les notions de stabilité les plus populaire. Elle est introduite en 1892 par le mathématicien russe Lyapounov et sa notion consiste en une caractérisation de la stabilité par une étude des trajectoires des systèmes dynamiques, en utilisant des fonctions appelées aujourd'hui fonctions de Lyapounov.

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité asymptotique globale des points d'équilibre E_0 , E_1 et E_2 du système (2.3) en utilisant une version du théorème de Lyapounov pour les systèmes fractionnaires (voir chapitre 1).

Théorème 9. *Si $h > r$, alors le point d'équilibre trivial E_0 du système (2.3) est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. On définit $V_0: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ par,

$$V_0(C, P) = c_1 C + P.$$

Cette fonction est positive et $V_0(x, y) = 0$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$. En calculant la dérivée d'ordre q de $V_0(C, P)$ le long de la solution du système (2.3), on a

$$\begin{aligned} D^q V_0(C(t), P(t)) &= c_1 D^q C + D^q P, \\ &= c_1 r C \left(1 - \frac{C}{K} \right) - \frac{c_1 a_1 C P}{b_1 + C} - c_1 h C + \frac{c_1 a_1 C P}{b_1 + C} - \mu P, \\ &= -c_1 (h - r) C(t) - c_1 \frac{r}{K} C^2(t) - \mu P(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, $D^q V_0$ est négative et

$$D^q V_0(C, P) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad (C, P) = (0, 0).$$

Alors, d'après le lemme 4.6 dans [11] (voir aussi le théorème 4 dans le chapitre 1), le point d'équilibre trivial E_0 est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_+^2 . \square

Nous allons traiter maintenant le cas de l'équilibre E_1 .

Théorème 10. *Si (3.4) est satisfaite, alors le point d'équilibre E_1 du système (2.3) est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. On définit $V_1: \mathbb{R}_+^2/\{0\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ par,

$$V_1(C, P) = \frac{c_1 b_1}{b_1 + \tilde{k}} \left(C - \tilde{k} - \tilde{k} \ln \frac{C}{\tilde{k}} \right) + P.$$

Cette fonction est positive. De plus,

$$D^q V_1(x, y) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad (x, y) = (\tilde{k}, 0).$$

En calculant la dérivée d'ordre q du $V_1(C, P)$ le long de la solution du système (2.3) et en utilisant le lemme 3.1 dans [20] (voir aussi le lemme 7 dans le chapitre 1), on obtient,

$$\begin{aligned} D^q V_1(C(t), P(t)) &\leq \frac{c_1 b_1}{b_1 + \tilde{k}} \left(\frac{D^q C}{C} \right) (C - \tilde{k}) + D^q P, \\ &= \frac{c_1 b_1}{b_1 + \tilde{k}} \left(r \left(1 - \frac{C}{K} \right) - \frac{a_1 P}{b_1 + C} - h \right) (C - \tilde{k}) + \left(\frac{c_1 a_1 C}{b_1 + C} - \mu \right) P, \\ &\leq \frac{c_1 b_1}{b_1 + \tilde{k}} \left(-r \left(\frac{C - \tilde{k}}{K} \right) - \frac{a_1 P}{b_1 + C} \right) (C - \tilde{k}) \\ &\quad + \left(\frac{c_1 a_1 C}{b_1 + C} - \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} \right) P - \left(\mu - \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} \right) P, \\ &\leq -\frac{c_1 b_1}{b_1 + \tilde{k}} \frac{r}{K} (C - \tilde{k})^2 - \frac{c_1 a_1 b_1}{(b_1 + C)(b_1 + \tilde{k})} (C - \tilde{k}) P \\ &\quad + \frac{c_1 a_1 b_1}{(b_1 + C)(b_1 + \tilde{k})} (C - \tilde{k}) P - \left(\mu - \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} \right) P, \\ &\leq -\frac{c_1 b_1}{b_1 + \tilde{k}} \frac{r}{K} (C - \tilde{k})^2 - \left(\mu - \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} \right) P, \\ &\leq -\frac{c_1 b_1}{b_1 + \tilde{k}} \frac{r}{K} (C - \tilde{k})^2 - \left(\mu - \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} \right) P \leq 0. \end{aligned}$$

D'après (3.4), on a

$$\mu - \frac{c_1 a_1 \tilde{k}}{b_1 + \tilde{k}} = \frac{r b_1 \mu - (c_1 a_1 - \mu) K (r - h)}{r b_1 + K (r - h)} > 0.$$

Par le lemme 4.6 dans [11] (voir aussi le chapitre 1), le point d'équilibre E_1 est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}_+^2/\{0\} \times \mathbb{R}_+$. \square

Le théorème suivant établit des conditions pour avoir la stabilité asymptotique globale de E_2 .

Théorème 11. *Si*

$$\mu < \frac{K}{K+b_1}c_1a_1 \text{ et } r \left(\frac{(K-b_1)c_1a_1 - K\mu}{K(c_1a_1 - \mu)} \right) < h < r \left(\frac{Kc_1a_1 - (K+b_1)\mu}{K(c_1a_1 - \mu)} \right), \quad (3.7)$$

alors le point d'équilibre intérieur E_2 du système (2.3) est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration. On définit $V_2: \mathbb{R}_+^2 / [\{0\} \times \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+ \times \{0\}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ par,

$$V_2(C, P) = \frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \left(C - C^* - C^* \ln \frac{C}{C^*} \right) + \left(P - P^* - P^* \ln \frac{P}{P^*} \right).$$

Cette fonction est positive et

$$D^q V_2(x, y) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad (x, y) = (C^*, P^*).$$

En calculant la dérivée d'ordre q de $V_2(C, P)$ le long de la solution du système (2.3) et en utilisant le lemme 3.1 dans [20] (voir aussi le lemme 7 dans le chapitre 1), on obtient

$$\begin{aligned} D^q V_2(C(t), P(t)) &\leq \frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \left(\frac{D^q C}{C} \right) (C - C^*) + \left(\frac{D^q P}{P} \right) (P - P^*) \\ &\leq \frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \left(r \left(1 - \frac{C}{K} \right) - \frac{a_1P}{b_1 + C} - h \right) (C - C^*) \\ &\quad + \left(\frac{c_1a_1C}{b_1 + C} - \mu \right) (P - P^*) \\ &\leq \frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \left(-r \left(\frac{C}{K} - \frac{C^*}{K} \right) - \frac{a_1P}{b_1 + C} + \frac{a_1P^*}{b_1 + C^*} \right) (C - C^*) \\ &\quad + \left(\frac{c_1a_1C}{b_1 + C} - \frac{c_1a_1C^*}{b_1 + C^*} \right) (P - P^*). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} D^q V_2(C(t), P(t)) &\leq -\frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \left(r \left(\frac{C - C^*}{K} \right) + \frac{a_1(b_1 + C^*)P - a_1P^*(b_1 + C)}{(b_1 + C^*)(b_1 + C)} \right) (C - C^*) \\ &\quad + \left(\frac{c_1a_1b_1}{(b_1 + C^*)(b_1 + C)} \right) (C - C^*)(P - P^*) \\ &\leq -\frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \frac{r}{K} (C - C^*)^2 + \left(\frac{c_1a_1b_1}{(b_1 + C^*)(b_1 + C)} \right) (C - C^*)(P - P^*) \\ &\quad - \frac{c_1a_1b_1}{b_1 + C^*} \left(\frac{(b_1 + C^*)(P - P^*) - P^*(C - C^*)}{(b_1 + C^*)(b_1 + C)} \right) (C - C^*) \\ &\leq -\frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \frac{r}{K} (C - C^*)^2 + \frac{c_1a_1b_1}{b_1 + C^*} \frac{P^*}{(b_1 + C^*)(b_1 + C)} (C - C^*)^2 \\ &\leq -\frac{c_1b_1}{b_1 + C^*} \left[\frac{r}{K} - \frac{a_1P^*}{(b_1 + C^*)(b_1 + C)} \right] (C - C^*)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
D^q V_2(C(t), P(t)) &\leq -\frac{c_1 b_1}{b_1 + C^*} \left[\frac{r}{K} - \frac{\left[r \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) - h \right]}{(b_1 + C)} \right] (C - C^*)^2 \\
&\leq -\frac{c_1 b_1}{b_1 + C^*} \left[\frac{K h - r \left(\frac{K c_1 a_1 - (K + b_1) \mu}{(c_1 a_1 - \mu)} - (b_1 + C) \right)}{K(b_1 + C)} \right] (C - C^*)^2 \\
&\leq -\frac{c_1 b_1}{b_1 + C^*} \left[\frac{h - r \left(\frac{(K - b_1) c_1 a_1 - K \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right) + \frac{r}{K} C}{(b_1 + C)} \right] (C - C^*)^2.
\end{aligned}$$

D'après (3.7), nous avons

$$h > r \left(\frac{(K - b_1) c_1 a_1 - K \mu}{K(c_1 a_1 - \mu)} \right).$$

Par le Lemme 4.6 dans [11], le point d'équilibre intérieur E_2 est globalement asymptotiquement stable dans $\mathbb{R}_+^2 / [\{0\} \times \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+ \times \{0\}]$. \square

Remarque 10.

1. Si les données initiales commencent de $\{0\} \times \mathbb{R}_+$, alors la solution converge évidemment vers le point d'équilibre trivial E_0 .
2. Si les données initiales commencent de $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, alors la solution converge évidemment soit vers le point d'équilibre trivial E_0 ou le point d'équilibre E_1 .

3.3 Simulations numériques

Dans cette section, nous fournissons quelques simulations numériques pour le système fractionnaire non-linéaire (2.3) au sens de Caputo.

Nous appliquons la méthode fractionnaire de Adams-Bashforth-Moulton [10] qui est détaillée ci-dessous. Si on considère le problème fractionnaire, pour $t \in [0, T]$, $T > 0$,

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1,$$

avec $\alpha > 0$ et on note par $[\alpha]$ le plus petit entier $\geq \alpha$. Nous subdivisons l'intervalle $[0, T]$ en $t_j = j\Delta t$ avec $j = 0, 1, \dots, N$ pour un entier N et $\Delta t = T/N$. On considère les approximations suivantes $y_j \approx y(t_j)$.

Définissons les quantités suivantes,

$$a_{j,k+1} = \frac{(\Delta t)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \times \begin{cases} (k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha), & \text{if } j = 0, \\ ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} \\ - 2(k-j+1)^{\alpha+1}), & \text{if } 1 \leq j \leq k, \\ 1, & \text{if } j = k+1, \end{cases} \quad (3.8)$$

et,

$$b_{j,k+1} = \frac{(\Delta t)^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha). \quad (3.9)$$

Alors, l'algorithme fractionnaire Adams–Bashforth–Moulton est décrit par l'équation suivante,

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right),$$

avec y_{k+1}^p est déterminé par,

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \right).$$

Les quantités $a_{j,k+1}$ et $b_{j,k+1}$ étant définis selon (3.8) et (3.9), respectivement. Ce schéma converge pour tous $\alpha > 0$.

Maintenant, On présente quelques exemples numériques illustrant les résultats théoriques des chapitres précédents. En fixant les valeurs des paramètres par,

$$r = 1.2, \quad K = 20, \quad a_1 = 0.9, \quad b_1 = 10, \quad c_1 = 0.6, \quad \mu = 0.15 \quad \text{and} \quad q = 0.7,$$

et en faisant varier le paramètre h .

Dans les figures 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4, nous effectuons des différentes simulations en prenant $h = 1.5, 0.8, 0.5, 0.1, 0.01$ afin d'illustrer les résultats précédents, en particulier le théorème 8. Selon les résultats obtenus, sous chaque condition pour chaque équilibre, on voit que la stabilité est assurée numériquement (voir les figures 3.1, 3.2, 3.3). Quand h devient petit, l'état stationnaire positif E_2 subit une bifurcation de Hopf. L'instabilité de l'état stationnaire positif correspond à des solutions oscillantes (voir figure 3.4). Dans la figure 3.5, nous discutons la stabilité de E_2 en fonction du paramètre q (ordre du dérivée fractionnaire). On constate que la dérivée d'ordre fractionnaire peut améliorer la stabilité de notre système. La figure 3.5 montre le cycle limite du modèle (2.3) pour $q = 0.9$, et la stabilité du point d'équilibre intérieur $E_2(C^*, P^*)$ pour $q = 0.8$. Il est légitime de dire que cette stabilité est perdue puisque les valeurs propres coupent l'axe imaginaire (des racines imaginaires pures apparaissent). Cette situation se produit lorsque q croise q^* .

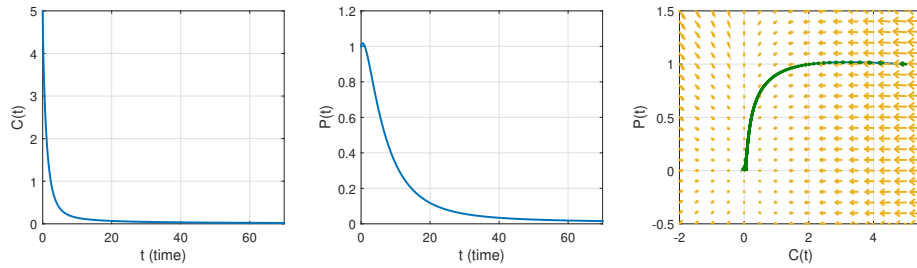


Figure 3.1 – La figure montre la stabilité du point d'équilibre trivial $E_0(0, 0)$ du modèle (2.3) pour $h = 1.5$. Et les autres paramètres sont $r = 0.9$, $K = 20$, $a_1 = 0.9$, $b_1 = 5$, $c_1 = 0.6$, $\mu = 0.2$ et $q = 0.9$.

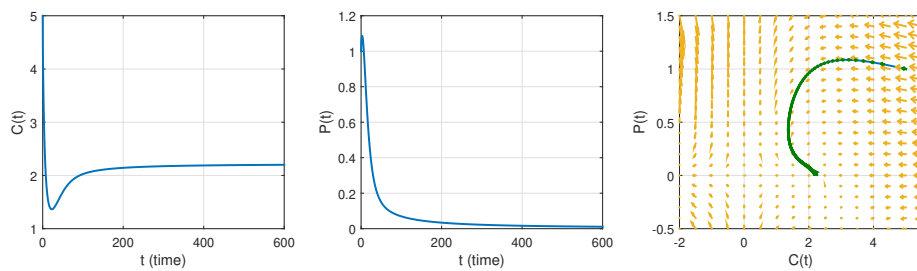


Figure 3.2 – La figure montre la stabilité du point d'équilibre $E_1(\tilde{k}, 0)$ (extinction des ravageurs) du modèle (2.3) pour $h = 0.8$. Et les autres paramètres sont $r = 0.9$, $K = 20$, $a_1 = 0.9$, $b_1 = 5$, $c_1 = 0.6$, $\mu = 0.2$ et $q = 0.9$.

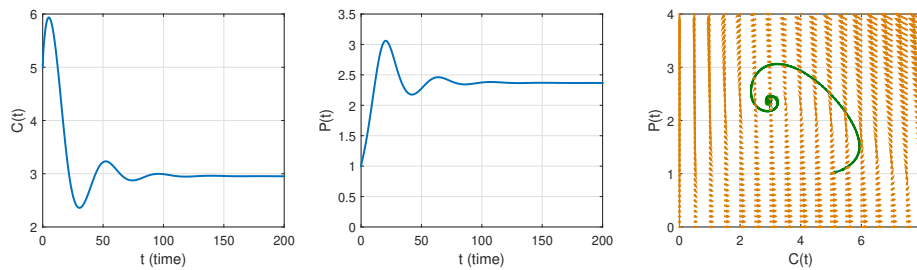


Figure 3.3 – La figure montre la stabilité du point d'équilibre intérieur $E_2(C^*, P^*)$ du modèle (2.3) pour $h = 0.5$ et les autres paramètres sont $r = 0.9$, $K = 20$, $a_1 = 0.9$, $b_1 = 5$, $c_1 = 0.6$, $\mu = 0.2$ et $q = 0.9$.

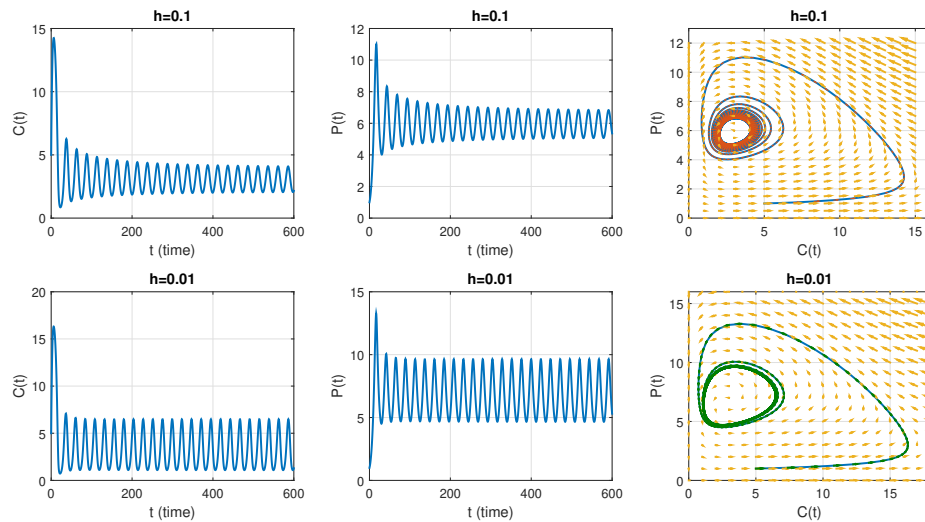


Figure 3.4 – La figure montre le cycle limite du modèle (2.3) for $h = 0.1$ et $h = 0.01$. Et les autres paramètres sont $r = 0.9$, $K = 20$, $a_1 = 0.9$, $b_1 = 5$, $c_1 = 0.6$, $\mu = 0.2$ et $q = 0.9$.

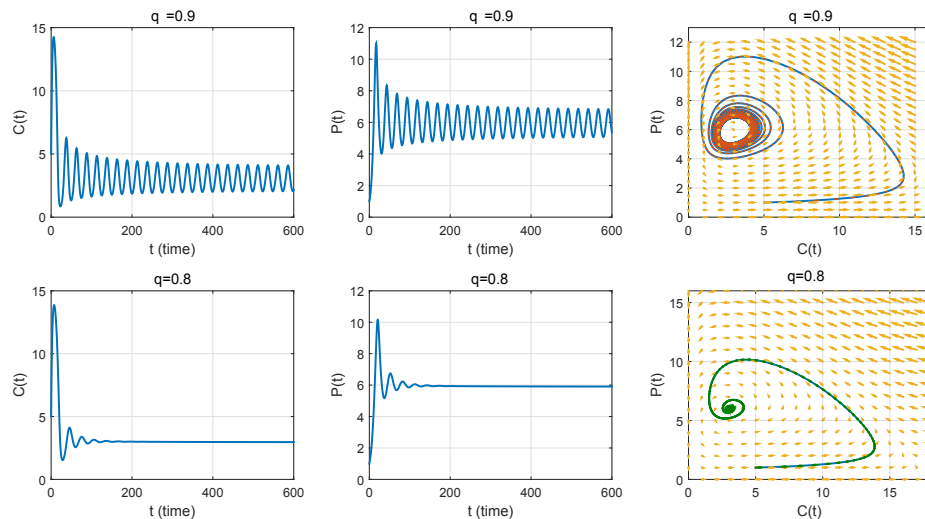


Figure 3.5 – La figure montre le cycle limite du modèle (2.3) pour $q = 0.9$ et la stabilité du point d'équilibre intérieur $E_2(C^*, P^*)$ pour $q = 0.8$ et les autres paramètres sont $r = 0.9$, $K = 20$, $a_1 = 0.9$, $b_1 = 5$, $c_1 = 0.6$, $\mu = 0.2$ et $h = 0.1$.

Bibliographie

- [1] F. Bouchelaghem, Étude de la stabilité pour certaines équations différentielles fractionnaires. Mémoire Magistère université Badji Mokhtar-Annaba.
- [2] A. Boukhouima, K. Hattaf, N. Yousfi, Dynamics of a fractional order HIV infection model with specific functional response and cure rate. *Int. J. Differ. Equ*, 2017.
- [3] N.A. Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, J.A. Gallegos, Lyapunov functions for fractional order systems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 19, 2951–2957, 2014.
- [4] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent : II *Geophys. J R Astron Soc* 13, 529–39, 1967.
- [5] S.K. Choi, B. Kang, N. Koo, Stability for Caputo fractional differential systems. *Abstr. Appl. Anal*, 2014.
- [6] C. Corduneanu. *Principles of Differential and Integral Equations*. Chelsea Publ. Comp., 2nd edition, 1977.
- [7] H. Delavari , D. Baleanu , J. Sadati . Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear systems revisited, *Nonlinear Dyn.* 67 :2433–9, 2011.
- [8] K. Diethelm, *The Analysis of fractional differential equations, an application-oriented exposition using differential operators of caputo*. Type. Berlin : Springer, 2010.
- [9] K. Diethelm, N.J. Ford, *Analysis of fractional differential equations*, *J.Math.Anal.Appl.* 265-229-248, 2002.
- [10] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Detailed error analysis for a fractional adams method analysis. *Nume Algorithm*, 36 (1) 31–52, 2004.
- [11] J. Huo, H. Zhao and L. Zhu, The effect of vaccines on backward bifurcation in a fractional order HIV model. *Nonlinear Anal., Real World Appl.* 26, 289–305, 2015.
- [12] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*. Elsevier, New York, 2006.
- [13] Y. Li, Y.Q. Chen, I. Podlubny, Stability of Fractional-Order Nonlinear Dynamic Systems : Lyapunov Direct Method and Generalized Mittag-Leffler Stability, *Comput. Math. Appl.*, 59, 1810–1821, 2010.
- [14] H.L. Li, L. Zhang, C. Hu, Y.L. Jiang, Z. Teng, Dynamical Analysis of a Fractional-Order Predator-Prey Model Incorporating a Prey Refuge. *J. Appl. Math. Comput.*, 54, 435–449, 2017.

-
- [15] R. K. Miller. *Nonlinear Volterra integral equations*. A Wiley-Interscience Publication. Benjamin, Menlo Park, 1971.
- [16] K. Nugraheni, T. Trisilowati and A. Suryanto, Dynamics of a fractional order eco-epidemiological model. *J. Trop. Life Sci.* 7, 243–250, 2017.
- [17] Z. M. Odibat, N. T. Shawagfeh, Generalized Taylor’s formula, *Applied Mathematics and Computation*, 186, 1, 286–293, 2007.
- [18] I. Petras, *Fractional-Order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis and Simulation*. Springer, Berlin, 2011.
- [19] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*; Academic Press : California, CA, USA, 1999.
- [20] C. Vargas-De-Leon, Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 24, 75–85, 2015.
- [21] Z. Wei, Q. Li, J. Che, : Initial value problems for fractional differential equations involving Riemann– Liouville sequential fractional derivative. *J. Math. Anal. Appl.* 367, 260–272, 2010.
- [22] M. Weilbeer. *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background*. Thèse de Doctorat, Carl-Friderich-Gauss Facultat für Mathematik und Informatik, der Technischen Universität Braunschweig, 2005.
- [23] M. Xiao, Stability analysis and Hopf-type bifurcation of a fractional order Hind-marsh-Rose neuronal model. *Adv. Neural Network- ISNN*, 217-24, 2012.