

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



**THESE**

**Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT 3<sup>ème</sup> Cycle**

**En : Génie Mécanique**

**Spécialité : Génie Mécanique : Dynamique et Structure**

**Par : BOUZIDI IMANE**

**Sujet**

**Comportement vibratoire des rotors aubagés en matériaux  
Bi-FGM**

Soutenue publiquement, le 25/01/2024 devant le jury composé de :

M. BENACHOUR MUSTAPHA	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
M. HADJOU ABDELHAMID	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
M. SAIMI AHMED	MCA	Univ. Temouchent	Examineur
M. BELOUFA AMINE	MCA	Univ. Temouchent	Examineur
M. AMIRAT MOHAMED	Professeur	Univ. Tlemcen	Examineur

# *Dédicace*

*Je dédie ce travail :*

*À mes chers parents*

*A ma famille, pour leur amour et leur soutien indéfectibles tout au long de ce parcours. Votre encouragement et votre confiance en moi m'ont permis de persévérer et de réaliser ce rêve. Je vous suis infiniment reconnaissante.*

*A mes amis, qui ont toujours été là pour moi, m'apportant leur soutien moral et leur énergie positive. Vos encouragements et votre présence dans ma vie ont été des sources d'inspiration et de motivation inestimables.*

*À mes professeurs et mentors, qui ont partagé leur expertise, guidé mes recherches et nourri ma passion pour la connaissance. Votre enseignement et votre accompagnement ont été essentiels dans ma formation académique.*

*À toutes les personnes qui ont participé à cette aventure de près ou de loin, je vous adresse ma plus sincère reconnaissance. Votre contribution, qu'elle soit petite ou grande, a contribué à la réalisation de cette thèse.*

*Enfin, je dédie ce travail à toutes les personnes passionnées par la recherche scientifique et l'exploration du savoir. Que cette thèse puisse contribuer, ne serait-ce qu'un peu, à l'avancement de notre compréhension du monde qui nous entoure.*

*Merci du fond du cœur.*

***Bouzidi Imane***

# *Remerciements*

*En achevant cette thèse de doctorat, il est primordial pour moi d'exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation. Le chemin parcouru n'aurait pas été possible sans leur soutien et leur collaboration précieuse.*

*Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Mr le professeur **Hadjoui Abdelhamid**, pour sa guidance éclairée et sa patience. Ses conseils avisés, sa disponibilité et son expertise ont été essentiels à chaque étape de ce projet de recherche. Je suis reconnaissante de l'opportunité qui m'a été offerte de travailler à ses côtés.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance à Mr **Fellah Ahmed** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.*

*Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers les **membres de jury** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Mes remerciements s'adressent également à tous les membres de **laboratoire IS2M** pour l'atmosphère de travail conviviale et inspirante que nous avons partagée.*

*Enfin, je souhaite remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse. En somme, ma gratitude s'étend à tous ceux et celles qui ont croisé ma route pendant cette aventure de recherche. Votre soutien, vos encouragements et votre confiance m'ont permis d'atteindre cette étape importante de ma vie académique.*

*Merci du fond du cœur.*

**Bouzidi Imane**

# *Sommaire*

<b>Résumé</b> .....	<b>I</b>
<b>abstract</b> .....	<b>II</b>
<b>المخلص</b> .....	<b>III</b>
<b>Liste des Symboles</b> .....	<b>IV</b>
<b>Listes des Figures</b> .....	<b>VII</b>
<b>Liste des Tableaux</b> .....	<b>X</b>
<b>Introduction Generale</b> .....	<b>1</b>

## Chapitre I

### **Revue bibliographique**

1. Introduction .....	5
2. Dynamique des rotors.....	5
2.1 Introduction.....	5
2.2 Bref historique sur la dynamique des rotors aubagés .....	7
3. Les matériaux fonctionnellement gradués.....	13
3.1 Introduction.....	13
3.2 Bref historique .....	14
3.3 Concept des matériaux à gradient fonctionnel :.....	15
3.4 Domaine d'application.....	17
3.5 Avantages de l'utilisation de matériaux fonctionnellement gradué .....	18
3.6 Lois réagissant à la variation des propriétés matérielles des poutres FGM.....	20
3.6.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM .....	22
3.6.2 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	23
3.6.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM .....	24
4. Revue des travaux antérieur sur la modélisation des structures en FGM : .....	25
4.1 Introduction.....	25
4.2 Structures de poutre en FGM : .....	25
4.3 Structure de plaque en FGM :.....	28

4.4	Structure coque en FGM .....	29
5.	Conclusion.....	30

## **Chapitre II**

### **Mise en équation**

1.	Introduction .....	32
2.	Formulation mathématique .....	32
2.1.	Ailette fonctionnellement graduée .....	33
2.1.1.	Énergie cinétique.....	35
2.1.2.	Énergie potentielle.....	38
2.2.	Arbre fonctionnellement gradué .....	40
2.2.1.	Énergie cinétique.....	41
2.2.2.	Énergie de déformation .....	42
2.3.	Disque .....	43
2.4.	Palier .....	44

## **Chapitre III**

### **Modélisation d'un rotor aubagé en matériau fonctionnellement gradué par la version h de la MEF**

1.	Introduction .....	46
2.	Formulation matricielle .....	47
2.1.	Modélisation éléments finis .....	47
2.2.	Matrices élémentaires .....	49
2.2.1.	Matrices des ailettes .....	50
2.2.2.	Matrices de l'arbre .....	54
2.2.3.	Matrices de disque.....	56

2.2.4. Matrices des paliers .....	57
3. Équation globale du mouvement.....	57

## **Chapitre IV**

### **Résultats et Interprétations**

1. Introduction .....	61
2. Validation .....	61
3. Etude de convergence.....	68
4. Etude paramétrique .....	69
4.1. Analyse de l'effet du nombre d'ailettes ( $n_b$ ) .....	70
4.2. Analyse de l'effet de l'angle de l'ailette ( $\beta$ ).....	73
4.3. Analyse de l'effet de la vitesse de rotation ( $\Omega$ ).....	76
4.4. Analyse de l'Influence des indices de puissance .....	79
4.5. Analyse de l'effet des conditions aux limites .....	82
4.6. Analyse du type de matériau céramique .....	84
<b>Conclusion Generale .....</b>	<b>89</b>
<b>Références Bibliographiques.....</b>	<b>91</b>

# *Résumé*

Dans cette thèse, nous analysons le comportement dynamique d'un système de rotor-ailettes en matériaux à gradient fonctionnel (MFG) en utilisant la version classique de la méthode des éléments finis (h-FEM). La théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli est utilisée pour modéliser le système de rotor-ailettes et l'équation de mouvement est obtenue en utilisant l'équation de Lagrange. La gradation des propriétés des matériaux est décrite à l'aide de la distribution de loi de puissance ainsi qu'une nouvelle expression de la fraction volumique est développée pour exprimer la gradation des propriétés des matériaux dans deux directions ; l'épaisseur et la largeur ; de l'ailette. Les fréquences naturelles du système étudié sont déterminés à l'aide d'un programme développé en MATLAB et les résultats obtenus sont vérifiés et validés avec des travaux précédemment publiés. Une étude comparative est menée entre le système de rotor-ailette en matériaux fonctionnellement gradués et en matériaux métalliques purs. La comparaison est basée sur l'influence des différents paramètres, tels que le type de matériaux, nombre d'ailettes, vitesse de rotation et conditions aux limites sur les fréquences naturelles du système de rotor-ailettes. Les résultats obtenus montrent l'avantage de l'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel par rapport aux matériaux métalliques pour la conception et le design des systèmes de rotor-ailettes.

**Mots clés :** Rotor ; Ailette ; h-FEM ; Matériaux Fonctionnellement Gradués ; Fréquence naturelle ; Fréquence chord-wise ; Fréquence flap-wise.

# *Abstract*

In this thesis, we analyze the dynamic behavior of a functionally graded (FGM) rotor-blade system using the classical version of the finite element method (h-FEM). The Euler-Bernoulli beam theory is used to model the rotor-blade system and the governing equation of motion is obtained using Lagrange's equation. The gradation of materials properties is described using the power-law distribution, and a new expression of the volume fraction is developed to express the gradation of the material properties in both the thickness and the width direction of the blade. The natural frequencies of the studied model are determined using a program developed in MATLAB and the obtained results are verified with previously published works. A comparative study is conducted between the functionally graded and pure metallic rotor-blade system. The comparison is based on the influence of the various parameters, such as type of materials, number of blades, rotational speed and boundary conditions on the natural frequencies of the rotor-blade system. The obtained results demonstrate the advantage of using functionally graded materials over the metallic materials for the design and conception of rotor-blade systems.

**Keywords:** Rotor; Blade; h-FEM; Functionally Graded Material; Natural frequency; Flap-wise frequency; Chord-wise frequency



# المخلص

عمل هذه الأطروحة مكرّس لدراسة السلوك الديناميكي للأعمدة الدوّارة ذات الشفرات المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفياً (FGM) باستخدام النسخة الكلاسيكية لطريقة العناصر المحددة (h-FEM). استخدمت نظرية Euler-Bernoulli لنمذجة العمود الدوّار وكذلك الشفرات للحصول على معادلة الحركة باستخدام معادلة Lagrange. تم نمذجة تدرج خواص المواد باستخدام القانون الآسي، كما تم تقديم علاقة جديدة للتعبير عن تدرج خواص المواد في اتجاهين مختلفين و هما سمك الشفرة و عرضها. يتم تحديد الترددات الطبيعية للنموذج المدروس باستخدام برنامج تم تطويره في MATLAB وتم التحقق من النتائج المتحصل عليها استناداً على أعمال علمية منشورة سابقاً. تم إجراء دراسة مقارنة بين الأعمدة الدوّارة ذات الشفرات المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفياً و المصنوعة كلياً من المعدن و تعتمد المقارنة على دراسة تأثير مختلف الخصائص مثل نوع المواد، عدد الشفرات، سرعة الدوران والشروط الحدودية على الترددات الطبيعية لنظام الأعمدة الدوّارة ذات الشفرات. تظهر النتائج المتحصل عليها ميزة استخدام المواد المتدرجة وظيفياً مقارنة مع المواد المعدنية لتصميم أنظمة الأعمدة الدوّارة ذات الشفرات.

**الكلمات المفتاحية:** الأعمدة الدوّارة ; الشفرة ; h-FEM; المواد المتدرجة وظيفياً ; الترددات الطبيعية ; تردد flap-wise ; تردد chord-wise.

# Liste des symboles

$OXYZ$	Repère de coordonnées globales (coordonnées fixes).
$Oxyz$	Repère de coordonnées liées à l'arbre (mobile).
$Ox_b y_b z_b$	Repère de coordonnées locales liées à l'ailette.
$l_b$	Longueur d'ailette.
$b$	Largeur d'ailette.
$h$	Épaisseur d'ailette.
$P$	Propriétés des matériaux
$P_c$	Propriétés du matériau céramique.
$P_m$	Propriété du matériau métallique.
$\rho$	Densité.
$E$	Module de Young.
$V_c$	Fraction volumique de céramique.
$V_m$	Fraction volumique de métal.
$n$	Indice de puissance (direction de l'épaisseur).
$k$	Indice de puissance (direction de la largeur).
$n_b$	Nombre d'ailettes
$\beta$	Angle d'ailette.
$R_d$	Rayon du disque.
$u, v, w$	Déplacements de l'ailette dans le repère de coordonnées fixes $OXYZ$ .
$u_b, v_b, w_b$	Déplacements de l'ailette dans le repère de coordonnées locales $Ox_b y_b z_b$ .
$U_d, V_d, W_d$	Déplacements du disque dans le repère de coordonnées fixes $OXYZ$ .
$\theta_{y_b}, \theta_{z_b}$	Angles de rotation de la section transversale de l'ailette autour des axes $Oy_b$ et $Oz_b$ .
$\Omega t$	Angle de rotation du rotor.
$A_b$	Section transversale de l'ailette.
$T_{blade}$	Énergie cinétique de l'ailette
$V_{blade}$	Énergie potentielle de l'ailette.
$V_{bb}$	Energie de déformation due à la flexion de l'ailette.
$r_Q$	Vecteur de position d'un point $Q$ de l'ailette dans le repère de coordonnées locales $Ox_b y_b z_b$ .
$\varepsilon_{x_b x_b}$	Déformation axiale de l'ailette.

$\sigma_{x_b x_b}$	Contrainte axiale de l'ailette.
$V_{bf}$	Energie potentielle due à l'allongement axial provoqué par la force centrifuge.
$f_c$	Force centrifuge de l'ailette.
$r$	Direction du rayon de l'arbre.
$s$	Indice de puissance de la gradation du matériau à travers le rayon ( $r$ ) de l'arbre.
$e$	Épaisseur de l'arbre.
$R_o$	Rayon extérieur de l'arbre.
$R_i$	Rayon intérieur de l'arbre.
$U, V, W$	Déplacements globaux (translation + rotation) de l'arbre dans le repère de coordonnées fixes $OXYZ$ .
$U_r, V_r, W_r$	Déplacements de rotation d'un point de l'arbre dans le repère de coordonnées mobile $Oxyz$ .
$U_t, V_t, W_t$	Déplacements transversales d'un point de l'arbre dans le repère de coordonnées fixes $OXYZ$ .
$\theta_x, \theta_z$	Angles de rotation de la section transversale de l'arbre autour des axes $Ox$ et $Oz$ .
$T_{shaft}$	Énergie cinétique de l'arbre.
$I_m, I_d, I_p$	Moments d'inertie de la section transversale de l'arbre.
$\rho_s$	Densité de l'arbre.
$\epsilon_{zz}$	Déformation axiale de l'arbre.
$\sigma_{zz}$	La contrainte axiale de l'arbre.
$U_{shaft}$	Énergie potentielle de déformation de l'arbre.
$E_s$	Module de Young de l'arbre
$S$	Section transversale de l'arbre.
$L$	Longueur de l'arbre.
$T_{disk}$	Énergie cinétique du disque.
$I_{dx}, I_{dy}, I_{dz}$	Moments d'inertie du disque.
$M_d$	Masse du disque.
$\rho_d$	Densité du disque.
$h_d$	Épaisseur du disque.
$\delta W$	Travail virtuel de forces extérieures des paliers.
$F_U, F_V$	Forces des paliers.

$K_{XX}, K_{XY}, K_{YY}, K_{YX}$	Rigidité des paliers.
$C_{XX}, C_{XY}, C_{YY}, C_{YX}$	Amortissement des paliers.
$E_c$	Énergie cinétique du système rotor-ailettes.
$E_p$	Énergie potentielle du système rotor-ailettes.
$F_i$	Forces externes.
$q_i$	Coordonnées généralisées.
$N_i$	Nombre d'éléments de l'ailette.
$N_j$	Nombre d'éléments de l'arbre.
$\{q\}$	Vecteur de coordonnées généralisées.
$\{N_b\}$	Vecteur des fonctions de forme de l'ailette.
$\{N_s\}$	Vecteur des fonctions de forme de l'arbre.
$L_{eb}$	Longueur d'un élément de l'ailette.
$L_{es}$	Longueur d'un élément de l'arbre.
$\xi$	Coordonnée non dimensionnelle.
$[M_{bvb}^e], [M_{bw_b}^e]$	Matrices de masse élémentaires de l'ailette.
$[M_{bvb}^i], [M_{bw_b}^i]$	Matrices de masse de la $i^{ème}$ ailette.
$[M_{c_{vb},U_d}^e], [M_{c_{wb},U_d}^e]$	Matrices de masse élémentaires de couplage entre le mouvement de l'ailette et l'arbre.
$[M_{c_{vb},V_d}^e], [M_{c_{wb},V_d}^e]$	
$[M_{c_{vb},U_d}^i], [M_{c_{wb},U_d}^i]$	Matrices de masse de couplage de la $i^{ème}$ ailette
$[M_{c_{vb},V_d}^i], [M_{c_{wb},V_d}^i]$	
$[G_{c_{vb},U_d}^e], [G_{c_{wb},U_d}^e]$	Matrices gyroscopique élémentaires de couplage entre le mouvement de rotation de l'ailette et l'arbre.
$[G_{c_{vb},V_d}^e], [G_{c_{wb},V_d}^e]$	
$[G_{c_{vb},U_d}^i], [G_{c_{wb},U_d}^i]$	Matrices gyroscopique de couplage de la $i^{ème}$ ailette
$[G_{c_{vb},V_d}^i], [G_{c_{wb},V_d}^i]$	
$[K_{bvb}^e], [K_{bw_b}^e],$	Matrices de rigidité élémentaires de l'ailette.
$[K_{bw_b}^e], [K_{bw,v_b}^e]$	
$[K_{bvb}^i], [K_{bw_b}^i]$	Matrices rigidité de la $i^{ème}$ ailette
$, [K_{b,v_b}^i], [K_{bw,v_b}^i]$	

$[M_{bg}]$	Matrice de masse globale de l'ailette
$[K_{bg}]$	Matrice de rigidité globale de l'ailette.
$[G_{bg}]$	Matrice gyroscopique globale de l'ailette.
$[M_{su}^e], [M_{sv}^e]$	Matrices de masse élémentaires de l'arbre
$[M_{sg}]$	Matrice de masse globale de l'arbre.
$[K_{su}^e], [K_{sv}^e]$	Matrices de rigidité élémentaires de l'arbre
$[K_{sg}]$	Matrice de rigidité globale de l'arbre.
$[G_{su}^e], [G_{sv}^e]$	Matrices gyroscopique élémentaires de l'arbre
$[G_{sg}]$	Matrice gyroscopique globale de l'arbre.
$[M_{dg}]$	Matrice de masse globale du disque
$[M_{b-du}], [M_{b-dv}]$	Les matrices de masse du disque en ajoutant le groupe d'ailettes.
$[G_{dg}]$	Matrice gyroscopique globale du disque.
$[C_p]$	Matrice d'amortissement des paliers.
$[K_p]$	Matrice de rigidité des paliers.
$[M_g]$	Matrice de masse globale du système rotor-ailettes.
$[K_g]$	Matrice gyroscopique globale du système rotor-ailettes.
$[G_g]$	Matrice de rigidité globale du système rotor-ailettes.
$\Omega$	Vitesse de rotation.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$R$	Rayon moyen de l'arbre.

# *Liste des figures*

- Fig.I.1** : Pompe à double aspiration (Double suction pump)
- Fig. I.2** Turbine à gaz- SGT-100
- Fig. I.3** STC-SH Siemens Turbocompresseur
- Fig.I.4** Moteur électrique (Technologie Hybride)
- Fig.I.5** Modèle du rotor Jeffcott.
- Fig.I.6** L'évolution des matériaux depuis l'âge de bronze.
- Fig.I.7** Concept des matériaux à gradient de propriétés.
- Fig.I.8** Domain d'application de matériau à gradient fonctionnel
- Fig.I.9** Protection thermique des matériaux FGM et Non FGM.
- Fig.I.10** Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM.
- Fig.I.11** La distribution composante des matériaux.
- Fig.I.12** Géométrie d'une poutre en FGM
- Fig.1.13** Variation du module de Young dans une poutre P-FGM
- Fig. I.14** Variation du module de Young de la poutre E-FGM
- Fig.I.15** Variation du module de Young dans une poutre S-FGM
- Fig.II.1** Schéma de système rotor-ailette étudié.
- Fig.II.2** Schéma de la gradation du matériau dans l'ailette.
- Fig.II.3** Schéma du système disque-ailette.
- Fig.II.4** Schéma de la gradation du matériau de l'arbre.
- Fig.III.1** Modèle éléments finis du rotor aubagé.
- Fig.III.2** Représentation des fonctions de forme.

**Fig. III.3** Matrice masse globale d'un système rotor aubagé.

**Fig. III.4** Matrice de rigidité globale d'un système rotor aubagé.

**Fig. III.5** Matrice gyroscopique globale d'un système rotor aubagé.

**Fig. IV.1.** Modèle EF du système rotor-ailette en matériau métallique.

**Fig. IV.2.** Configuration et la gradation des matériaux de la poutre encastré-libre étudiée.

**Fig. IV.3** Variation des trois premières fréquences (Chord-wise) en fonction de l'indice de puissance.

**Fig. IV.4** Variation des trois premières fréquences (Flap-wise) en fonction de l'indice de puissance.

**Fig. IV.5.** Modèle du système rotor-ailette.

**Fig. IV.6** Variation du premier mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.7** Variation du deuxième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.8** Variation du troisième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.9** Variation du premier mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.10** Variation du deuxième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.11** Variation du troisième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.12** Variation du premier mode d'ailette (Flap-wise) en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.13** Variation du premier mode d'ailette (Chord-wise) en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.14** Variation du premier mode d'ailette (Flap-wise) en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.15** Variation du premier mode d'ailette (Chord-wise) en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Fig. IV.16** Diagramme de Campbell du système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ).

**Fig. IV.17** Diagramme de Campbell du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ).

# *Liste des tableaux*

**Tableau I.1** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

**Tableau IV.1** Paramètres géométriques et matériels du système rotor-ailettes en matériau métallique.

**Tableau IV.2** Comparaison des fréquences propres d'un système rotor-ailettes en matériau métallique.

**Tableau IV.3** Propriétés physiques de l'arbre à  $T=300K$ .

**Tableau IV.4** Type de matériau de l'arbre.

**Tableau IV.5** Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.002$ ,  $L/R = 20$ .

**Tableau IV.6** Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.05$ ,  $L/R = 20$

**Tableau IV.7** Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.002$ ,  $L/R = 20$

**Tableau IV.8** Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.05$ ,  $L/R = 20$

**Tableau IV.9** Propriétés matérielles de la poutre encasté-libre.

**Tableau IV.10** Variation des fréquences propres du système rotor-ailette en fonction du nombre des éléments  $N$  et  $N_b$ .

**Tableau IV.11** Propriétés des matériaux du système rotor-ailette étudié.

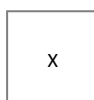
**Tableau IV.12** Fréquences propres d'un système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Tableau IV.13** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Tableau IV.14** Fréquences propres d'un système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Tableau IV.15** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

**Tableau IV.16** Fréquences propres du système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction de la vitesse de rotation.





**Tableau IV.17** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction de la vitesse de rotation.

**Tableau IV.18** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM en fonction des indices de puissance ( $s=n=k$ ) dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

**Tableau IV.19** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM en fonction des indices de puissance ( $s=\infty, n=k$ ) dans les cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

**Tableau IV.20** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM en fonction des indices de puissance ( $s, n=k=\infty$ ) dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

**Tableau IV.21** Fréquences propres du système rotor-ailette en acier ( $s= n=k=\infty$ ) en fonction des conditions aux limites dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

**Tableau IV.22** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s= n=k=1$ ) en fonction des conditions aux limites dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

**Tableau IV.23** Propriétés physiques des matériaux céramiques.

**Tableau IV.24** Fréquences propres du système rotor-ailette en SS-ZrO<sub>2</sub> en fonction de la vitesse de rotation dans le cas où  $\beta=0$ .

**Tableau IV.25** Fréquences propres du système rotor-ailette en SS- Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> de silicium en fonction de la vitesse de rotation dans le cas où  $\beta=0$ .

**Tableau IV.26** Fréquences propres du système rotor-ailette en SS-Ti6Al4V en fonction de la vitesse de rotation

# Introduction Générale

Depuis des temps immémoriaux, la découverte de nouveaux matériaux a été guidée par une approche à double facette. D'une part, cette approche est liée aux problèmes pratiques que l'homme doit résoudre pour sa vie quotidienne, et d'autre part, à son désir intellectuel de comprendre et d'explorer le monde qui l'entoure. Ainsi, certains matériaux ont été développés en réponse à des besoins technologiques spécifiques. Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche prometteur parce que toute pièce, toute machine est de base un matériau et évoluer dans ce domaine c'est révolutionner le monde industriel.

Les matériaux conventionnels tels que les métaux ont leurs propres avantages et sont utilisés depuis longtemps dans diverses applications. Cependant, ils présentent certaines limitations en termes de poids, de résistance à des hautes températures, de durabilité, de résistance à la corrosion, etc. Cela peut être problématique dans des industries telles que l'aérospatiale, l'automobile, la construction navale et d'autres domaines où des performances élevées sont requises. C'est alors là que les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites.

Les matériaux composites sont généralement conçus en combinant de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, ce qui permet d'obtenir des performances supérieures à celles des composants individuels. Ces matériaux composites présentent des améliorations dans des aspects tels que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, l'usure, la réduction de poids...etc.

Toutefois, les matériaux composites traditionnels, qui se composent généralement de couches distinctes, présentent un grave problème : la discontinuité des propriétés et des contraintes aux interfaces. Cette discontinuité cause des concentrations de contraintes élevées, des fissurations de la matrice, et entraîne un problème majeur de délaminage en raison de la transition brutale de composition, notamment dans des environnements à haute température.

La solution pour atténuer cette singularité et assurer une transition continue des propriétés recherchées consiste à utiliser des matériaux connus sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués en anglais « **Functionally Graded Materials** » (**FGM**). Les matériaux fonctionnellement gradués sont des matériaux composites sophistiqués qui modifient graduellement et en continu les fractions de volume dans une ou plusieurs directions, en éliminant la discontinuité tandis que les propriétés des matériaux constituants sont maintenues.

Ces derniers temps, les matériaux fonctionnellement gradués ont attiré beaucoup d'attention en raison de leurs avantages dans la diminution des disparités dans les propriétés matérielles et dans la réduction des contraintes thermiques. Les MFG sont utilisés comme barrières thermiques à cause de leur constitution riche en céramique dans le domaine de l'aérospatial et de l'aéronautique. Ils sont utilisés pour assurer la protection des composants subissent à des températures importantes. Ces matériaux permettent de mieux gérer les contraintes thermiques et d'optimiser la durabilité et la performance des systèmes aéronautiques et spatiaux.

L'analyse des structures en MFG a connu un essor grâce à l'utilisation des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis (MEF). Les coques, les plaques et les poutres sont des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier est porté, l'analyse de ces structures est une étape cruciale pour bien comprendre leur comportement sous diverse sollicitations et pour bien évaluer leur sécurité et durabilité, afin d'optimiser leur performance globale.

L'objectif de ce travail est l'étude du comportement dynamique d'un système rotors-ailettes en matériaux fonctionnellement graduée (MFG). Pour ceci, nous utilisons la version classique de la méthode des éléments finis (h-FEM) et la théorie des poutres d'Euler Bernoulli pour la modélisation du système étudié. La loi de puissance est utilisée pour décrire mathématiquement la gradation du matériau ainsi qu'une nouvelle expression de fraction de volume est développée pour exprimer la gradation des matériaux dans deux directions, l'épaisseur et la largeur de l'ailette. Le contenu de la présente thèse sera articulé autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique sur les turbomachines plus exactement le domaine de la dynamique des rotors. Après un bref historique de la dynamique des rotors. Et enfin le chapitre se termine par des généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués.

Le deuxième chapitre sera consacré à la mise en équation du rotor aubagé en MFG dont l'équation différentielle du mouvement est obtenue par application de l'équation de Lagrange sur les énergies cinétique et potentielle des différents composants de système.

Le troisième chapitre concerne la formulation matricielle de l'équation différentielle du mouvement en utilisant la version classique h de la méthode des éléments finis.

Le quatrième chapitre sera dédié à la validation et l'interprétation de nos résultats trouvés ainsi qu'une étude paramétrique détaillée et une analyse des conditions aux limites sont présentées.

Enfin, notre travail s'achèvera avec une conclusion relative à l'étude effectuée incluant des perspectives pour des futurs travaux.

# Chapitre I

# Revue bibliographique

## Table des matières

1. Introduction.....	5
2. Dynamique des rotors .....	5
2.1 Introduction.....	5
2.2 Bref historique sur la dynamique des rotors aubagés .....	7
3. Les matériaux fonctionnellement gradués.....	13
3.1 Introduction.....	13
3.2 Bref historique .....	14
3.3 Concept des matériaux à gradient fonctionnel :.....	15
3.4 Domaine d'application.....	17
3.5 Avantages de l'utilisation de matériaux fonctionnellement gradué .....	18
3.6 Lois réagissant à la variation des propriétés matérielles des poutres FGM.....	20
3.6.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	22
3.6.2 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	23
3.6.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	24
4. Revue des travaux antérieur sur la modélisation des structures en FGM : .....	25
4.1 Introduction.....	25
4.2 Structures de poutre en FGM : .....	25
4.3 Structure de plaque en FGM :.....	28
4.4 Structure coque en FGM.....	29
5. Conclusion.....	30

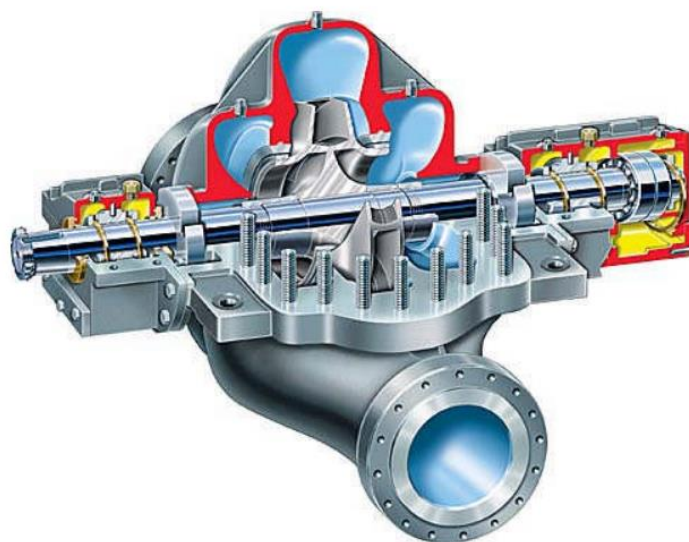
## 1. Introduction

Dans ce chapitre nous présentons un aperçu général sur deux notions importantes pour l'étude de notre sujet, en premier une définition de la dynamique des rotors et son histoire sont présentée. Ensuite, nous avons défini les matériaux fonctionnellement gradués, leur histoire de développement, leurs concept et avantages, domaines d'application, et au final on a présenté les propriétés matérielles des poutres en FGM. Cette recherche bibliographique nous a autorisés à se positionner vis-à-vis des travaux déjà existants.

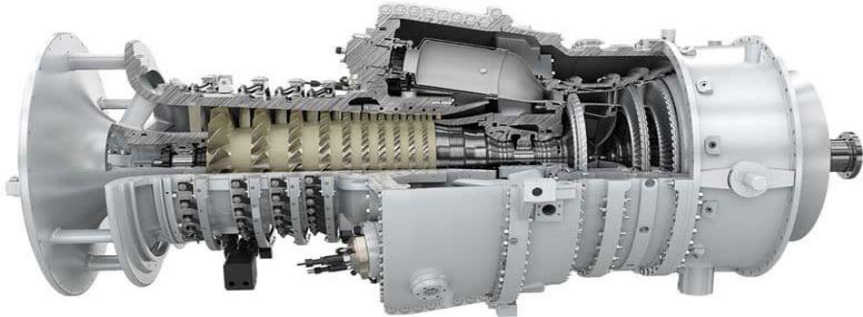
## 2. Dynamique des rotors

### 2.1 Introduction

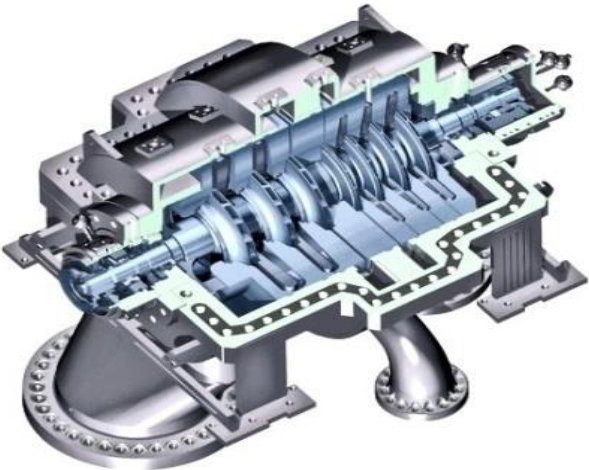
La dynamique des rotors est un domaine d'étude essentiel pour comprendre le comportement des systèmes rotatifs, en mettant l'accent sur les vibrations, les forces, les températures élevées auxquelles ils sont soumis, la résistance des matériaux, la fatigue et bien d'autres aspects liés à leur fonctionnement. Les rotors sont des éléments rotatifs utilisés dans différentes applications telles que les pompes (Figure I.1), les turbines (Figure I.2), les compresseurs (Figure I.3) et les moteurs électriques (Figure I.4). L'étude la dynamique des rotors est d'une importance capitale dans plusieurs domaines industriels, tels que l'automobiles, énergie, pétrochimie l'aérospatial, et bien d'autres secteurs où les machines tournantes sont utilisées, contribuant ainsi à améliorer leurs performances, fiabilités et leurs sécurités.



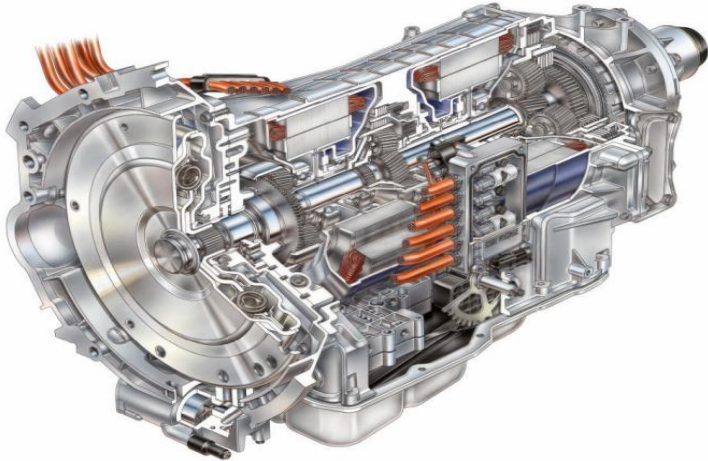
**Fig. I.1** : Pompe à double aspiration (Double suction pump) [1].



**Fig. I.2** Turbine à gaz- SGT-100 [2]



**Fig. I.3:** STC-SH Siemens Turbocompresseur [2]



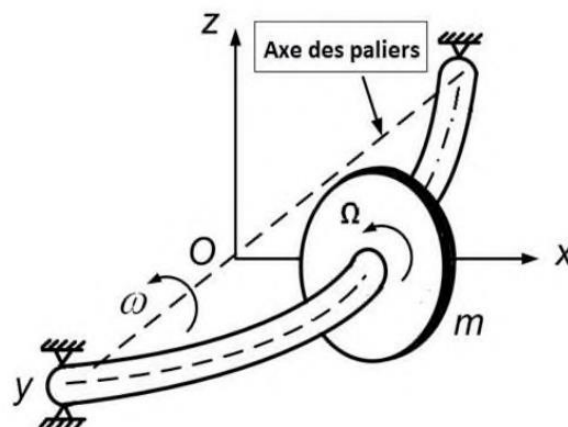
**Fig. I.4:** Moteur électrique (Technologie Hybride) [3].

La dynamique des rotors est influencée par divers facteurs, notamment la vitesse de rotation. Lorsqu'un rotor tourne à une vitesse croissante, son niveau de vibration dépasse généralement un seuil critique, appelé vitesse critique. Cette vitesse est déterminée par les caractéristiques géométriques du rotor, comme la longueur, le diamètre, la rigidité, la masse...etc. La vitesse à laquelle les mécanismes et les machines fonctionnent a augmenté rapidement au cours des dernières décennies, créant de nouveaux problèmes pour les concepteurs et ingénieurs. Grâce à l'utilisation d'outils d'analyse tels que la modélisation mathématique, la simulation numérique et les techniques expérimentales, les ingénieurs peuvent évaluer la dynamique des rotors et optimiser la conception des machines afin d'atteindre les performances souhaitées tout en garantissant la sécurité des opérations.

## 2.2 Bref historique sur la dynamique des rotors aubagés

La dynamique des rotors a connu un développement remarquable, largement dû à l'interaction entre sa théorie et sa pratique. La dynamique des rotors a été davantage motivée par sa pratique que par sa théorie. Cette affirmation est particulièrement pertinente pour l'histoire précoce de la dynamique des rotors. La recherche sur la dynamique des rotors couvre une histoire d'au moins 135 ans.

La première théorie fondamentale enregistrée de la dynamique du rotor se trouve dans un article classique de Jeffcott (1919). Nous pouvons apprécier les excellentes contributions de Jeffcott si nous rappelons qu'un arbre souple de masse négligeable avec un disque rigide s'appelle un rotor de Jeffcott. Illustré dans la **Figure I.5**.



**Fig. I.5:** Modèle du rotor Jeffcott.



Stodola (1924) écrivit un chef d'œuvre où il détailla les développements fait sur la dynamique des rotors. Dans ce travail il a prouvé que les solutions super critiques étaient stabilisées par les accélérations de Coriolis. Natanzon (1948, 1952), Bogdanoff (1947), Green (1948) et Föppl (1948) ont étudié l'effet du moment gyroscopique sur les fréquences naturelles et les vitesses critiques. Le moment gyroscopique a pour effet de rendre les fréquences naturelles dépendantes de la vitesse de rotation du rotor, tout en doublant leur nombre. Parmi les autres paramètres, le rapport entre l'inertie diamétrale et l'inertie polaire joue un rôle important.

À mesure que les rotors sont devenus plus légers et que les vitesses de rotation sont devenues plus élevées, l'apparition de résonances non linéaires telles que les sous-harmoniques est devenue un problème sérieux. Yamamoto (1955, 1957) a étudié différents types de résonances non linéaires après avoir signalé la résonance sous-harmonique due aux roulements à billes en 1955. Il a également enquêté sur les résonances combinées.

Dans les années 1950 et 1960, Bishop (1959), Bishop and Gladwell (1959), Bishop and Parkinson (1965), Dimentberg (1961) et Tondl (1965) ont publié une série d'articles et de livres sur la réponse au déséquilibre et l'équilibrage d'un rotor continu. Eshleman et Eubanks (1969) ont dérivé des équations de mouvement plus générales en tenant compte des effets de l'inertie rotative, de la déformation de cisaillement et du moment gyroscopique, et ont étudié ces effets.

Aussi Dans les années 1960, des fissures ont été découvertes dans les rotors de certaines turbines à vapeur. Afin de prévenir de graves accidents et de développer un système de diagnostic des vibrations permettant de détecter les fissures, des recherches sur les vibrations des arbres fissurés ont été entreprises. Dans les années 1970, Gasch (1976), Henry et Okah-Avae (1976) ont étudié les vibrations en tenant compte de la non-linéarité de la raideur due aux mécanismes d'ouverture-fermeture. Ils ont montré qu'une région instable apparaissait ou disparaissait à la vitesse critique, en fonction de la direction du déséquilibre.

Dans la conception pratique des machines tournantes, il est nécessaire de connaître avec précision les fréquences naturelles, les formes modales et les réponses forcées aux déséquilibres dans les systèmes de rotor de formes complexes. Les premières procédures systématiques d'analyse de modèles de rotors réalistes ont cependant accordé autant d'importance aux forces et moments internes qu'aux déplacements, Une technique de modélisation plus générale était nécessaire.

Le travail de Prohl et Myklestad (1945) a conduit à une méthode plus étendue, maintenant appelée la méthode de la matrice de transfert (TMM). Cette méthode est particulièrement utile pour les systèmes multi rotors à paliers et s'est développée rapidement depuis les années 1960 grâce à la contribution de nombreux chercheurs tels que Lund et al. (1965, 1967, 1974) et Rao (1996). La TMM pour les rotors reste viable ; en effet, elle semble toujours être la méthode de choix pour la plupart des analyses industrielles de la dynamique des rotors.

Une autre technique représentative utilisée à cette fin est la méthode des éléments finis. Bien que la plupart des concepts utilisés dans l'analyse par éléments finis aient été décrits par Courant (1943), le véritable développement de la méthode des éléments finis en tant qu'outil d'ingénierie s'est produit une décennie plus tard avec l'introduction des ordinateurs numériques et la formulation de l'analyse structurelle sous forme matricielle (Langefors, 1952 ; Argyris, 1954 ; Turner et al., 1956), puis utilisée dans différents domaines technologiques. Le nom "Méthode des éléments finis" est apparu pour la première fois dans le titre d'un article de Clough (1960). La première application de la méthode des éléments finis à un système de rotor a été réalisée par Ruhl et Booker (1972). Ensuite, Nelson et McVaugh (1976) l'ont généralisée en tenant compte de l'inertie de rotation, du moment gyroscopique et de la force axiale. Il a rapidement été reconnu que le grand nombre de nœuds nécessaires pour obtenir une distribution précise des contraintes créait des systèmes dynamiques trop importants pour des calculs économiques. La condensation du nombre de degrés de liberté dynamiques en les divisant en degrés de liberté a été introduite par Guyan (1965). Une technique connexe pour l'analyse dynamique de structures assemblées à partir de composants distincts ou de sous-structures en synthèse de modes de composants a été introduite par Hurty (1960) et appliquée à la dynamique des rotors par Glasgow et Nelson (1980), Geradin et Kill (1984) et Crandall et Yeh (1986). Chaque sous-structure n'interagit qu'à travers ses modes de contrainte.

La Seconde Guerre mondiale peut être considérée comme la démarcation entre les premières étapes de la dynamique des rotors et ce qui pourrait être appelé la dynamique des rotors modernes. Cela est dû à deux facteurs. Premièrement, il y a eu une prise de conscience croissante des contributions des dynamiciens de rotor provenant de pays non anglophones, tels que Dimentberg en Russie, Tondl en Tchécoslovaquie, Kramer en Allemagne et Yamamoto au Japon, entre autres. Après la Seconde Guerre mondiale, la dynamique des rotors est devenue clairement une entreprise internationale, un fait reconnu par la création du Comité de dynamique des rotors de la Fédération internationale de la théorie des machines et des mécanismes (IFTOMM).

À partir de 1982, ce comité a organisé des conférences internationales à Rome, Tokyo, Lyon, Chicago, Darmstadt, Sydney et Vienne. Deuxièmement, il y a eu une révolution dans les capacités de résolution ; une transition des modèles quelque peu simplifiés vers une géométrie presque réelle. Dans les années 1960, il y a eu une convergence des méthodes numériques appliquées à la dynamique des structures et des capacités informatiques numériques qui ont favorisé le développement d'une série de codes informatiques polyvalents.

L'application initiale de ces codes à la dynamique des rotors était basée sur la méthode TMM, mais dans les années 1970, un autre algorithme sous-jacent, la méthode des éléments finis (FEM), est devenu disponible pour la solution des modèles basés sur les poutres prédominants. Maintenant, au début du XXI<sup>e</sup> siècle, les spécialistes de la dynamique des rotors combinent la méthode des éléments finis (FEM) et les techniques de modélisation des solides pour générer des simulations qui prennent en compte le comportement couplé de disques flexibles, d'arbres flexibles et de structures de support flexibles dans un modèle multidimensionnel massif et unique. Rieger (1974) a été le premier à passer en revue les logiciels de dynamique des rotors disponibles sur le marché à l'époque. Il a conclu que "le développement des programmes de dynamique des rotors a manqué du soutien accordé à d'autres domaines de la mécanique des structures". Crandall (1992) a donné un aperçu des codes informatiques de dynamique des rotors (tels que ANSYS, CADENSE, MADYN, RODYN, ROMAC, SAMCEF, VT-FAST, etc.). Le rotor de Jeffcott classique avec quatre degrés de liberté a été utilisé pour illustrer les problèmes de vibration libre, forcée et auto-excitée pour les systèmes de dynamique des rotors. Il a également conclu que, en ce qui concerne la qualité et la quantité de logiciels, le domaine spécialisé de la dynamique des rotors est encore en retard par rapport au domaine plus large de la dynamique des structures non rotatives. Il a donné deux raisons principales à cela : le marché de la dynamique des rotors est plus petit et les problèmes techniques sont plus difficiles. La recherche en dynamique des rotors vise à améliorer la compréhension des phénomènes dynamiques des rotors et à améliorer les performances des machines tournantes. Dans la plupart des systèmes de dynamique des rotors, les amplitudes vibratoires sont suffisamment petites pour que l'analyse linéaire des déformations du rotor et du stator soit satisfaisante. En général, la modélisation structurale en dynamique des rotors est adéquate et la plupart des recherches se concentrent sur les interactions entre le fluide et la structure : paliers, joints, forces des ailettes, amortisseurs à film mince, etc. C'est là que se trouvent les non-linéarités. Le domaine de recherche le plus prometteur pour l'amélioration des performances est le contrôle actif.

Ce qui nous mène à notre sujet d'étude et la structures que on a choisi d'étudier son comportement dynamique 'un système rotor-ailettes'. On sait que la majorité de machines industrielle est composé d'un arbre, disque et ailettes tel que les turbines, compresseurs, et moteur d'avion. Pour cela, il est important d'étudier le comportement dynamique d'un rotor aubagé ou un système arbre-disque-ailette. De nombreuses études liées à tels systèmes ont été publiés. Tan Lee et Leng (1997) a étudié l'influence du rapport entre le rayon du moyeu et la longueur de la poutre sur la stabilité dynamique d'une poutre encastré-libre tournante soumise à une excitation de base ; en utilisant la théorie des poutres d'Euler et la méthode des modes supposés. Cheng, Xu et Yan (2006) ont analysé la réponse des fréquences d'une poutre encastré-libre rotatif, en utilisant la méthode des modes supposés ; les effets de vitesse angulaire de rotation ont été étudiés par étude numérique. Yao, Chen et Zhang (2012) ont étudié les réponses dynamiques non linéaires d'une ailette en rotation soumise à diverses vitesses de rotation et sous gaz supersonique à haute température. Sinha (2004) a dérivé les équations de mouvement pour un rotor flexible avec ailettes supporté par des paliers à plusieurs endroits et analysé l'effet d'un Coulomb-amortisseur près de la pointe de l'ailette. Santos et al. (2004) ont mené une contribution théorique et expérimentale au problème de l'interaction dynamique rotor-ailettes et réalisé une procédure de validation de modèles mathématiques avec un banc d'essai simple, construit par un système masse-ressort attaché à quatre ailettes rotatives et flexibles. Yang et Huang (2005, 2007) ont étudié les effets de la flexibilité du disque, l'angle de décalage et la vitesse de rotation de l'ailette sur les fréquences naturelles et les modes de formes d'un système arbre-disque-ailette rotatif ; l'équation du mouvement a été dérivée en utilisant une approche énergétique en conjonction avec la méthode des modes supposés. Okabe et al. (2012) ont proposé une méthode pour calculer la fréquence d'un système arbre-ailettes, dans cette étude l'ailette a été présentée comme un système masse-ressort, qui est relié à l'arbre, afin d'obtenir les fréquences naturelles du système. Chiu et Chen (2011) ont étudié l'influence du couplage de la torsion de l'arbre et la flexion des ailettes sur les vibrations non linéaires d'un système de rotor multidisque en analysant les fréquences naturelles du système. Ma et al. (2015) ont proposé un modèle dynamique de système rotor-ailettes prenant en compte les déformations latérales et la torsion de l'arbre, effets gyroscopiques du rotor et de la rigidité centrifuge, la force de Coriolis des ailettes ; les équations de mouvement du système rotor-ailettes ont été dérivées en utilisant le principe de Hamilton avec la méthode des modes supposés.

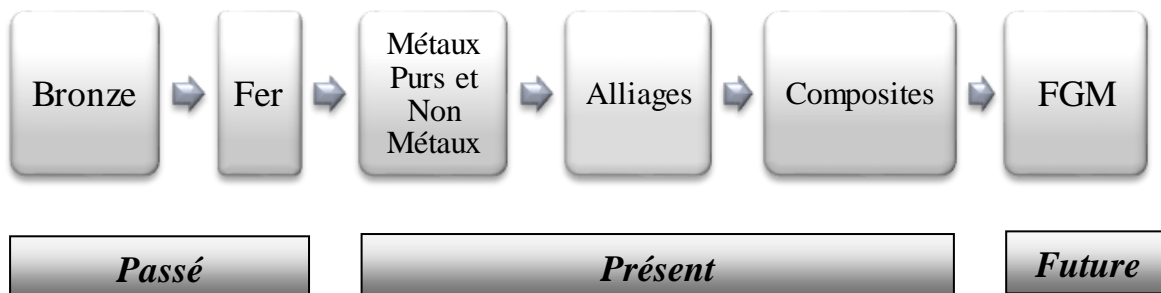
Ma et al. (2016) ont présenté une analyse de réponse vibratoire non linéaire pour un système de rotor- ailettes avec frottement de la pointe de l'ailette, le modèle est développé selon le principe de Hamilton. Le balancement du disque rigide et l'angle de décalage des ailettes sont considérés, une seule ailette et quatre ailettes qui se frottent sont étudiées à l'aide d'une simulation numérique et d'une expérience. C.Li et al. (2017) ont étudié l'influence de la vibration des ailettes sur un système rotor- ailettes flexible soutenu par une suspension non linéaire. Les équations de mouvement ont été dérivées à l'aide de la méthode de Lagrange. La méthode Newmark-b a été utilisée pour résoudre les équations non linéaires du système, l'effet de plusieurs paramètres tels que la vitesse de rotation, coefficient d'amortissement et la longueur de l'ailette ont été étudiés. B.Li et al. (2019) ont présenté un modèle dynamique pour un système rotor- ailettes prenant en compte l'effet des supports non linéaires. Les équations du mouvement ont été dérivées par le principe de Hamilton. Les effets de la force de frottement normale, du coefficient de frottement, l'amortissement et la rigidité du support sur la réponse du système rotor- ailettes ont été étudiés.

La conception actuelle des systèmes de rotor et d'ailettes vise à réduire les vibrations, le poids et à augmenter la vitesse de fonctionnement grâce à l'utilisation de matériaux plus efficaces. Comme mentionné auparavant, comme choix de structure on a opté pour un système rotor- ailettes, Alors quel type de matériau doit-on choisir pour l'étude dynamique d'un système rotor- ailettes ? on trouvera la réponse dans la section suivante.

### 3. Les matériaux fonctionnellement gradués

#### 3.1 Introduction

Les matériaux sont continuellement développés, passant des métaux purs à des matériaux composites qui sont utilisés aujourd'hui. Le développement continu des matériaux, de l'âge du bronze à nos jours et aux scénarios futurs, est présenté dans la **Figure I.6**. Les métaux purs ont une utilisation très limitée, car les applications réelles peuvent nécessiter des propriétés contraires qui ne peuvent être fournies par l'utilisation d'un seul métal. Comparés aux métaux purs, les alliages peuvent être plus résistants et plus polyvalents. Le bronze, qui est un alliage de cuivre et d'étain, a été le premier alliage développé en 4000 av. J.-C. (âge du bronze). Depuis lors, différentes combinaisons de métaux et de non-métaux ont été essayées afin de combiner les forces de plusieurs matériaux en fonction des besoins fonctionnels.



**Fig. I.6** : L'évolution des matériaux depuis l'âge de bronze.

Les matériaux composites sont la forme la plus avancée de matériaux, fabriqués à partir de deux ou plusieurs constituants ayant des propriétés physiques et chimiques significativement différentes des matériaux individuels. Les matériaux composites permettent des combinaisons distinctes offrant une surface dure et résistante à l'usure et un noyau souple, selon les besoins fonctionnels de l'application. L'hétérogénéité, l'anisotropie, la symétrie et la hiérarchie sont les principales caractéristiques des matériaux composites, suscitant un intérêt particulier pour diverses applications. Un rapport élevé entre résistance et rigidité, une résistance accrue à la fatigue, à l'usure et à la corrosion, une fiabilité élevée, etc., sont les avantages des composites par rapport aux métaux purs ou alliés. Malgré tous ces avantages, les matériaux composites sont soumis à une transition brusque des propriétés à l'interface, ce qui peut entraîner une défaillance des composants (par délamination) dans des conditions de travail extrêmes.

Ceci a incité les chercheurs à développer une nouvelle forme de matériaux composites dont le problème d'interface est éliminé en créant une transition continue entre les deux faces et où le comportement structurel est décrit correctement.

Ce défaut des composites conventionnels est éliminé par une forme modifiée de composites appelée matériaux à gradient fonctionnel (**F**unctionally **G**raded **M**aterials : **FGM**). Ces matériaux remplacent une interface nette par une interface à gradient, ce qui permet une transition en douceur des propriétés d'un matériau à l'autre. Ces matériaux avancés, avec des gradients d'ingrédients, de structure et de propriétés spécifiques dans la direction préférée, sont supérieurs aux matériaux homogènes composés de constituants similaires. Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement de l'élasticité, la densité des matériaux et le coefficient de dilatation thermique varient de manière régulière et continue dans les directions préférentielles des FGM. L'os, les dents, la peau et le bambou sont quelques exemples de matériaux à gradient fonctionnel se trouvant naturellement.

C'est ainsi qu'est né le concept des matériaux fonctionnellement gradués ou les matériaux à gradient fonctionnel. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans le domaine de la science et la mécanique des matériaux.

### 3.2 Bref historique

Une nouvelle classe de matériaux composites a été développée en 1984 par Niino et ses collègues à Sendai (Japon) dans le laboratoire national d'aérospatial. Le but était de réaliser un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à des conditions thermiques très sévères. En 1987, le gouvernement japonais a lancé un projet intitulé « la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». Le but de ce projet était de créer un nouveau matériau pour construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale. Le problème majeur était le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air, lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps la protection de l'intérieure contre un choc thermique, le matériau requis devrait supporter une température extérieure de 2000 °K et une température intérieure de 1000 °K à travers une section de moins de 10 mm. Bien que, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre la température qui se développe à la surface mais on a dû craindre l'action des contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique. L'idée était alors de produire une transition graduelle entre métal pur et céramique pure, appelée

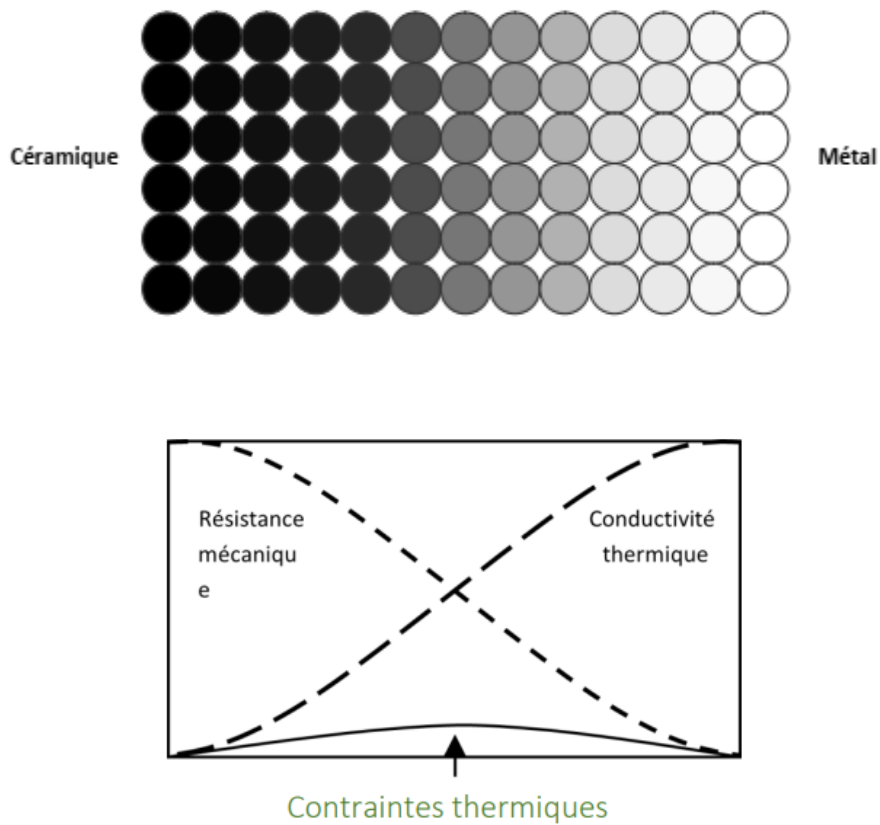
matériau fonctionnellement gradué « **FGM** ». En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux fonctionnellement gradués ont été choisis parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

Pendant les deux dernières décennies, plusieurs travaux ont été consacrés aux matériaux fonctionnellement gradués. Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été dédiées à l'étude des contraintes résiduelles, le comportement thermomécanique, le comportement thermo élastique statique, par contre peu d'études ont été consacrées aux vibrations libres de ces matériaux. A partir de l'année 2000 les chercheurs ont commencé à s'intéresser au comportement dynamique des matériaux fonctionnellement gradués.

### 3.3 Concept des matériaux à gradient fonctionnel :

Le matériau fonctionnellement gradué (FGM) est un type de matériau composite dont la fraction de volume varie sans discontinuation dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. Grâce à leur structure spéciale, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau de l'interface (provoquant délaminage et décollement). Par exemple dans un FGM (céramique/métal) la face céramique est typiquement placée dans la région exposée à des très hautes températures et où la résistance à l'oxydation est nécessaire. Par contre la face métal avec une conductivité thermique élevée, une bonne résistance mécanique et une très bonne ténacité, et par conséquent placée dans la région où ces propriétés mécaniques sont demandées. Les FGM sont développés pour adapter l'architecture matérielle à l'échelle microscopique et pour optimiser certaines propriétés fonctionnelles des structures. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la **Figure I.7**. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.





**Fig. I.7** Concept des matériaux à gradient de propriété

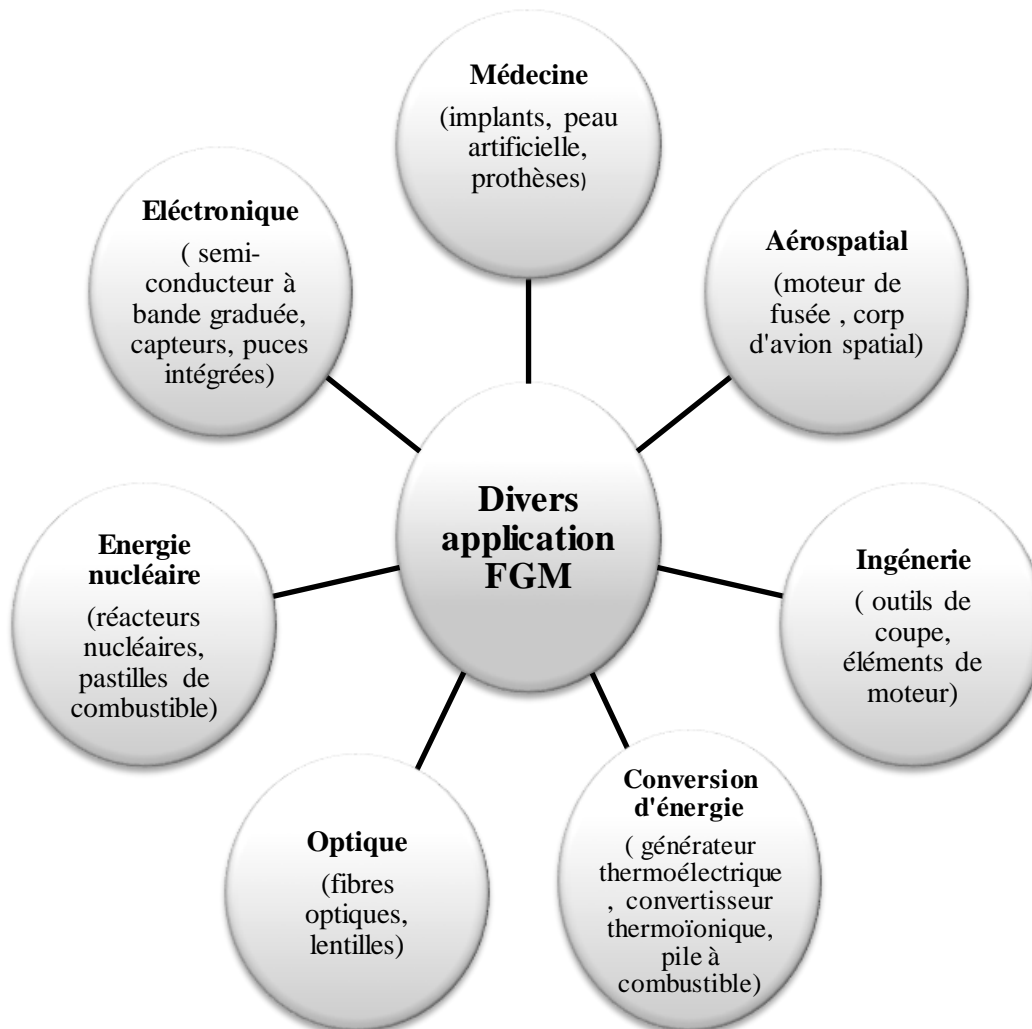
La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux, leur utilisation n'est pas fortuite, ces matériaux sont choisis grâce à leurs propriétés exceptionnelles énumérés dans le **Tableau I.1** suivant :

**Tableau I.1** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (K. Kokini et al 1990)

<b>Céramique</b>	La face à haute température	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance thermique</li> <li>- Bonne résistance à l'oxydation</li> <li>- Faible conductivité thermique</li> </ul>
<b>Céramique-métal</b>	Continuité du matériau d'un point à l'autre « Couches intermédiaires »	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elimination des problèmes de l'interface.</li> <li>- Relaxer les contraintes thermiques.</li> </ul>
<b>Métal</b>	La face à basse température	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance mécanique.</li> <li>- Conductivité thermique élevée.</li> <li>- Très bonne ténacité.</li> </ul>

### 3.4 Domaine d'application

Les matériaux à gradient fonctionnel ont été conçus initialement pour répondre aux exigences de l'industrie aéronautique et l'aérospatial où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement ils sont utilisés dans la production de matériaux durable, léger et fort. Le concept des FGM est applicable dans divers domaines comme illustré sur **la Figure I.8.**

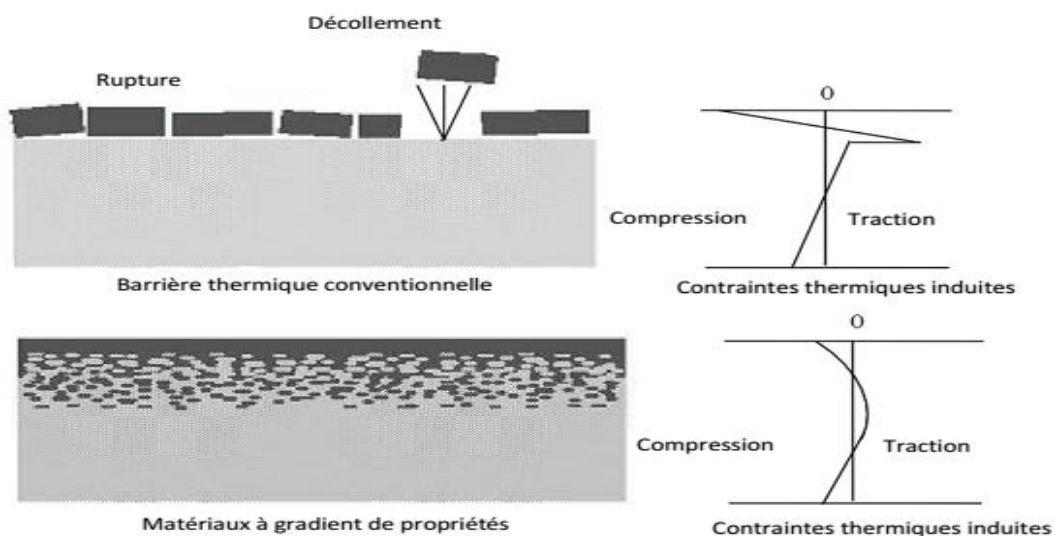


**Fig. I.8** Domaines d'application de matériau à gradient fonctionnel

### 3.5 Avantages de l'utilisation de matériaux fonctionnellement gradué

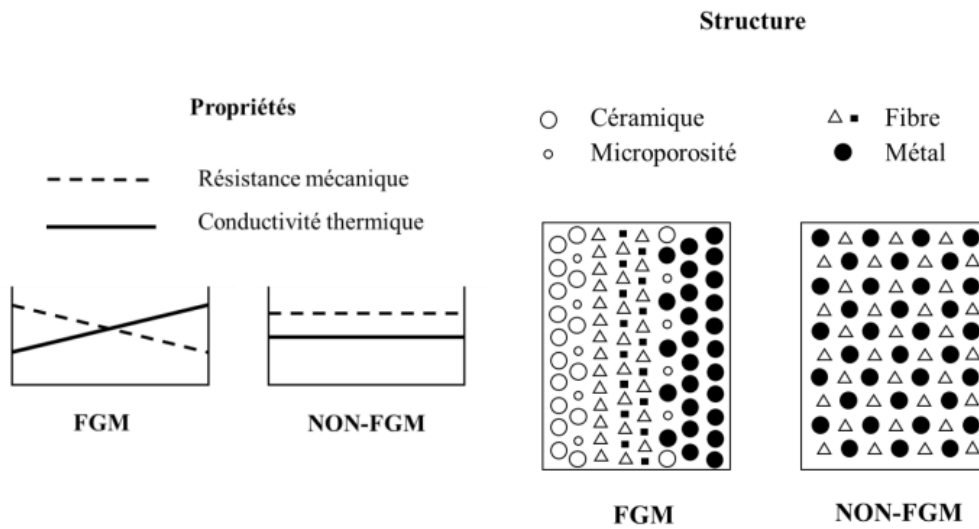
Avec le développement technologique et le besoin de la concurrence économique, les laboratoires de recherche ont encore développé leurs objectifs techniques pour répondre aux exigences de performance et de qualité. Ces performances spécifiées ne peuvent pas être atteintes avec les matériaux conventionnels, car leurs propriétés ne sont pas assez polyvalentes pour certains usages. Le problème du concepteur est qu'il ne demande pas une propriété mais un ensemble, par exemple une couche de matériau céramique peut être collée à la surface d'une pièce métallique pour former un revêtement barrière thermique dans des applications à température élevée. Toutefois, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte laminaire qui peut provoquer une déformation plastique ou une fissuration.

La **Figure I.9** désigne les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique à l'interface (changement brusque de composition). Elle montre aussi comment les FGM peuvent diminuer les concentrations de contraintes en modifiant graduellement les propriétés matérielles tout en offrant une protection thermique dans les barrières thermiques conventionnelles.

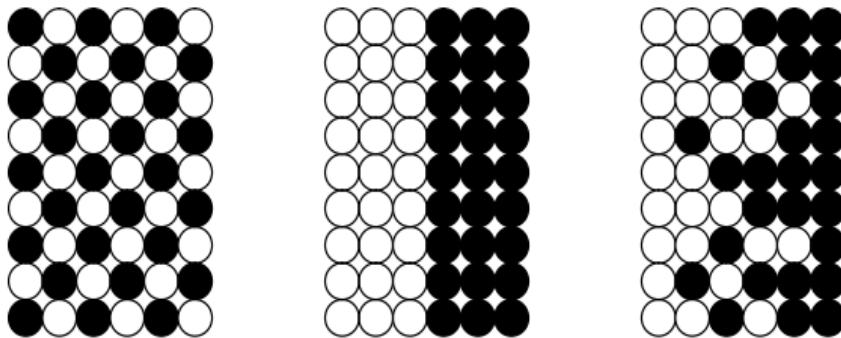


**Fig. I.9** Protection thermique des matériaux FGM et Non FGM.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure I.8. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM.



**Fig.I.10** Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM (Koizumi 1997).



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

**Fig.I.11** La distribution composante des matériaux (Yoshihisa 2004).

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent divers avantages tel que :

- Elimination du phénomène de délaminage
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.
- Une très bonne adhérence entre différents matériaux, à titre d'exemple un matériau composé de céramique et métal.
- Une ténacité élevée à la rupture.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Une capacité à amoindrir les contraintes thermiques qui sont causées par les diversités des coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Amélioration de la résistance des connexions, diminution de la force de la fissure.
- La capacité de contrôler la déformation, la réponse dynamique, l'usure, la corrosion, etc.
- Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtements protecteurs sur des pales de turbine dans un moteur à turbine à gaz.

### 3.6 Lois réagissant à la variation des propriétés matérielles des poutres FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une combinaison de deux ou plusieurs matériaux dont les caractéristiques et les propriétés diffèrent, avec une transition entre les deux matériaux idéalement continue et graduelle. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen, 2009)

$$p = \sum_{i=1}^n p_i v_i \quad (\text{I.1})$$

Où :

$p_i$  : La propriété mécanique du constituant  $i$ .

$v_i$  : La fraction volumique du constituant  $i$ .

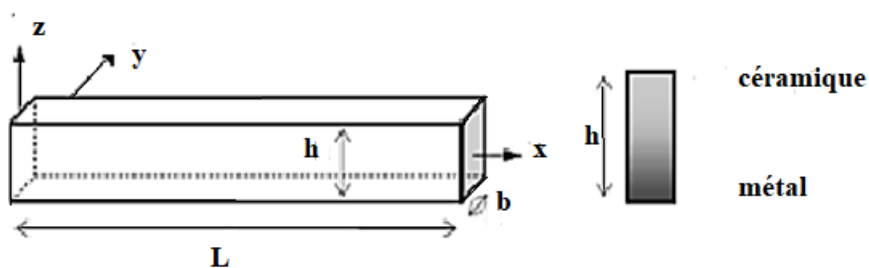
Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont constituées de deux matériaux (céramiques et du métal inoxydable) voir **Figure 1.12**. Dans ce cas, la loi de Voigt se résume à :

$$p = p_c \cdot v_c + p_m \cdot v_m \quad (\text{I.2})$$

Avec :

$$v_c + v_m = 1 \quad (\text{I.3})$$

Un matériau fonctionnellement gradué peut être déterminé par la variation des fractions de volume. La généralité des chercheurs appliquent la fonction de puissance (**P-FGM**), la fonction exponentielle (**E-FGM**), ou la fonction sigmoïde (**S-FGM**) pour décrire les fractions de volume.



**Fig. I.12** Géométrie d'une poutre en FGM

L'étude de (Jin & Batra 1996) a montré que l'influence du coefficient de Poisson sur les déformations est négligeable comparé à celui du module de Young. Donc, le coefficient de Poisson peut être présumé comme constant.

### 3.6.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme suit :

$$V_c(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.4})$$

Où :

$V(z)$  : Fraction volumique.

$h$  : Épaisseur de la poutre.

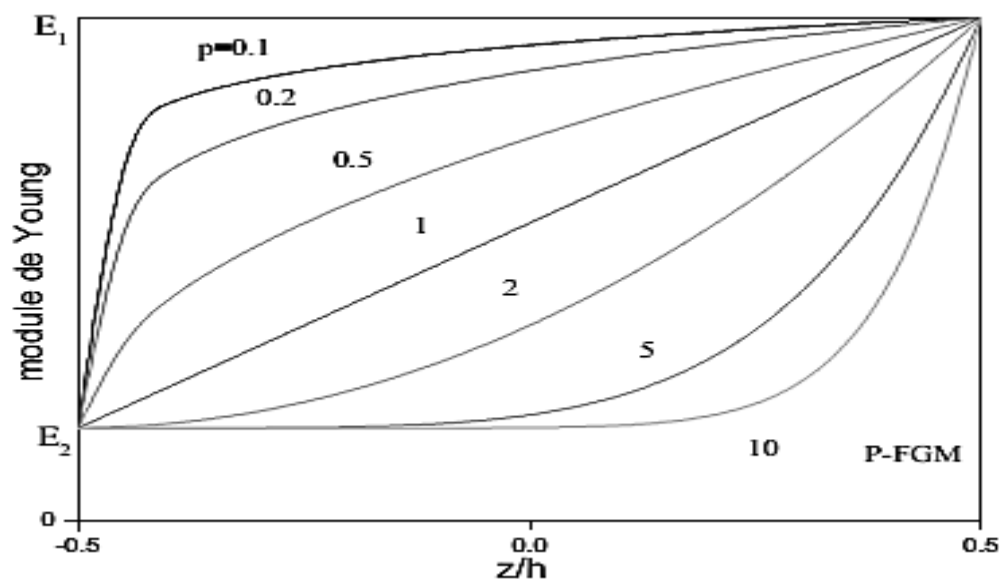
$p$  : indice de fraction volumique.

$z$  : La coordonnée suivant l'épaisseur.

Lorsque la fraction de volume local  $v_c(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995) :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \quad (\text{I.5})$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et supérieure ( $z = +h/2$ ) de la poutre FGM.



**Fig.1.13** Variation du module de Young dans une poutre P-FGM

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de structure **P-FGM** est représentée sur la **figure.1.13**, d'après la figure il est clair que ce dernier change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .

### 3.6.2 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

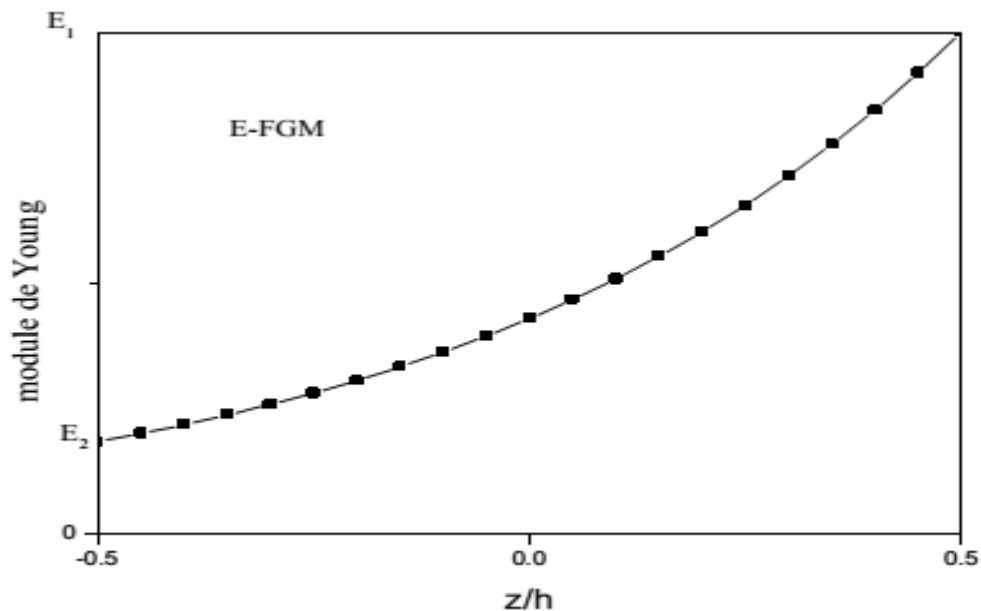
De nombreux chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux à gradient fonctionnel, qui s'écrit sous la forme suivante (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{I.6})$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.7})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre **E-FGM** est représentée dans la **figure 1.14**.



**Fig. I.14** Variation du module de Young de la poutre E-FGM



### 3.6.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Chung et chi (2001) ont défini la fraction de volume de la structure en FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

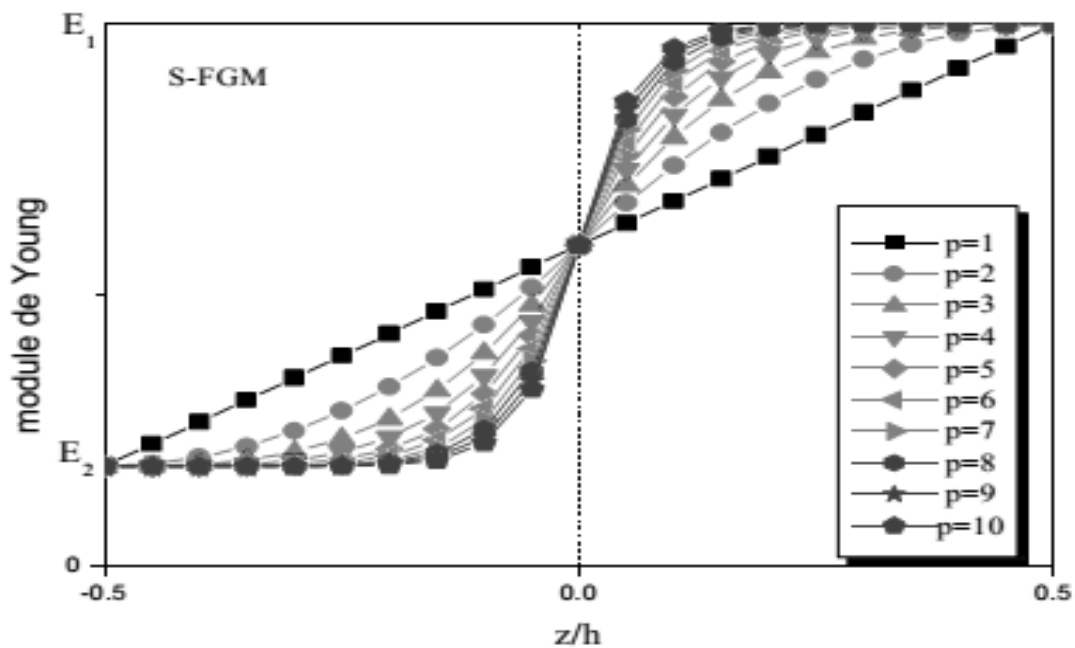
$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.8})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

En utilisant la loi des mélanges, les propriétés matérielles d'un matériau S-FGM peut-être donné comme suit :

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.10})$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.11})$$



**Fig. 1.15** Variation du module de Young dans une poutre S-FGM

La variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes est présentée dans la **Figure 1.15**, par conséquent la structure FGM est appelée poutre (**S-FGM**).

## 4. Revue des travaux antérieur sur la modélisation des structures en FGM :

### 4.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons une revue bibliographique de quelques travaux effectués sur les structures élaborées en FGM, en utilisant la méthode des éléments finis pour marquer l'ampleur qu'a pris ces nouveaux matériaux au cours des deux dernières décennies. On rappelle que l'étude du comportement des coques et des plaques n'a pas été abordé dans le cadre de cette étude. On a choisi de le présenter juste pour démontrer l'intérêt que porte la communauté scientifique à ces matériaux moderne, ce qui explique le nombre considérable de recherches examinant les structures fabriqués en matériaux à gradient fonctionnel.

### 4.2 Structures de poutre en FGM :

Une poutre est un élément structural généralement conçu pour supporter des charges latérales. Il existe de nombreux éléments structuraux en génie civil et mécanique tels que des composants d'aéronefs, des châssis automobiles, des cadres de machines ou des systèmes structuraux qui contiennent des structures de poutres, de nombreux travaux sont faites sur ce sujet. On va sélectionner seulement les études concernant les poutres en FGM.

Pindera et Dunn (1995) ont utilisé la méthode des éléments finis pour évaluer la théorie d'ordre élevé en effectuant une analyse détaillée des éléments finis appliquée aux FGM. De plus, Reddy (1997) a développé un modèle d'élément fini à convergence supérieure pour résoudre les problèmes statiques des poutres de Timoshenko. Shi et al. (1998) ont introduit l'utilisation de l'élément fini quasi-conforme pour l'analyse de flexion des poutres composites. Ce modèle utilise les théories d'ordre élevé. Chen et ses collaborateurs (2001) ont proposé le développement d'une méthode d'intégration nodale stabilisée pour la méthode de maillage de Galerkin. L'objectif était d'améliorer l'efficacité tout en maintenant la précision et les propriétés de convergence souhaitées. Cette approche permet d'obtenir des résultats plus précis et de meilleures performances lors de l'analyse des structures.

Murin et Kutis (2002) ont proposé l'introduction d'un nouvel élément fini de poutre Euler-Bernoulli 3D pour l'analyse de poutres présentant une variation graduelle et continue à travers leur section transversale.

Un nouvel élément de poutre fondé sur la théorie du premier ordre (la théorie de Timoshenko) a été déployé pour étudier le comportement élastique des poutres FGM par Chakraborty et al. (2003). Chakraborty et al. (2003) ont utilisé la fonction de loi de puissance, et la fonction exponentielle pour analyser la distribution des propriétés matérielles des structures FGM.

Oh, Librescu et Song (2005) ont étudié le modèle thermo-élastique et le comportement des poutres cylindriques minces en rotation fabriquées à partir de matériaux à gradient fonctionnel. Les effets de la fraction volumique, du gradient de température, de la charge de compression et de la vitesse de rotation sur les vibrations et l'instabilité ont été présentés.

Kapurria et al. (2008) ont proposé un modèle basé sur la méthode des éléments finis afin d'étudier les réponses statiques et les vibrations libres d'une poutre FGM. Ce modèle utilise la théorie du troisième ordre pour estimer le module d'élasticité effectif. De plus, une validation expérimentale a été réalisée pour deux configurations distinctes d'un FGM, sous différentes conditions aux limites.

Kadoli et al. (2008) ont présenté un modèle précis d'élément fini pour l'analyse statique des poutres FGM en métal-céramique. Ce modèle est basé sur une approximation de troisième ordre du déplacement axial et un déplacement transversal constant. La variation de la fraction volumique des composants a été prise en compte en utilisant une fonction de loi de puissance. De plus, une approche de couche discrète a été adoptée pour tenir compte de la gradation du matériau. Ce modèle fournit des solutions précises pour les problèmes d'élasticité liés aux poutres FGM en métal-céramique. Kutis et al. (2011) ont développé une méthode basée sur les éléments finis pour modéliser une poutre FGM avec une variation spatiale des propriétés matérielles. Cette procédure permet de prendre en compte de manière précise les variations des caractéristiques du matériau le long de la poutre FGM.

Également, Elshorbagy et al. (2011) ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier les caractéristiques de vibration libre des poutres FGM, en se concentrant à la fois sur les modes de vibration axiaux et transversaux à travers l'épaisseur de la poutre. Nguyen (2013) a utilisé la méthode des éléments finis pour étudier la réponse des consoles-coniques en matériau à gradation fonctionnelle soumises à de grands déplacements.

Les premières publications sur l'analyse des vibrations des poutres par la méthode des éléments finis ont été présentées par Mei (1972-1973). Ces publications ont jeté les bases de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour étudier les vibrations des poutres. Boukhalifa (2014) a étudié l'effet des conditions aux limites et des types de matériaux sur les fréquences naturelles d'un arbre en rotation à gradient fonctionnel en utilisant la méthode des éléments finis en version p. Tufekci, Eroglu et Aya (2016) ont étudié les problèmes statiques des poutres à gradient fonctionnel. Wang, Liang et Jin (2017) ont analysé le comportement dynamique des poutres à gradient fonctionnel sous l'effet d'une charge ponctuelle mobile. Ding et al. (2018) ont étudié la réponse de vibration non linéaire d'une poutre d'Euler-Bernoulli à gradient fonctionnel reposant sur une fondation élastique. Dey et al. (2019) ont analysé le comportement dynamique d'un arbre à gradient fonctionnel ; divers résultats ont été obtenus tels que le diagramme de Campbell, la limite de vitesse de stabilité et les réponses temporelles pour un arbre à gradient fonctionnel comparé à un arbre en acier.

La plupart des chercheurs considèrent les ailettes comme des poutres en porte-à-faux en rotation. Piovan et Sampaio (2009) ont étudié le comportement dynamique non linéaire d'une poutre en rotation à gradient fonctionnel, isotrope et composite en tenant compte de la déformation axiale. Mazzei et Scott (2015) ont étudié le problème de torque et la variation des fréquences fondamentales d'une poutre en porte-à-faux rotative d'Euler-Bernoulli à gradient fonctionnel, où les propriétés du matériau varient le long de la longueur de la poutre. L'équation du mouvement est dérivée en utilisant une méthode variationnelle et l'approche des modes supposés. Ramesh et Mohan Rao (2014) ont étudié la vibration libre d'une poutre en porte-à-faux rotative à gradient fonctionnel composée de métal et d'alumine. Les propriétés du matériau varient continuellement dans la direction de l'épaisseur, depuis le cœur au niveau de la section médiane jusqu'aux surfaces extérieures selon une distribution de loi de puissance. Les effets de l'indice de la loi de puissance, du rayon du moyeu et de la vitesse de rotation sur les fréquences naturelles ont été examinés à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. Fang, Zhou et Dong (2018) ont réalisé l'étude de la vibration libre et de la réponse temporelle d'une poutre en porte-à-faux rotative tridimensionnelle à gradient fonctionnel. Les équations de Lagrange de deuxième espèce sont utilisées en conjonction avec la méthode de Ritz pour dériver les équations du mouvement. L'influence de l'indice de la loi de puissance et de la vitesse de rotation sur les caractéristiques modales a été évaluée.

### 4.3 Structure de plaque en FGM :

Une plaque est un élément structural tridimensionnel dont l'épaisseur est très faible par rapport aux autres dimensions des faces (longueur, largeur, diamètre, etc.). Ce qui nous intéresse ces les études faites sur les plaques en FGM seulement.

Dans leur étude, Parveen et Reddy (1998) ont examiné la réponse des plaques FGM en utilisant la méthode des éléments finis (FEM). Leur approche a pris en compte l'effet de cisaillement transverse, l'inertie de rotation et les rotations modérées selon la formulation de Von Karman. La variation des propriétés à travers l'épaisseur a été définie en utilisant une loi de puissance. Des comparaisons ont été réalisées avec des plaques isotropes homogènes pour évaluer les différences de comportement.

Reddy (2000) a proposé une formulation théorique ainsi que des modèles basés sur la théorie du troisième ordre pour l'analyse des plaques en matériaux composites à gradient de fonctionnalités (FGM) en utilisant la méthode des éléments finis. Récemment, des études analytiques et par éléments finis portant sur l'analyse de la flexion des plaques FGM ont été publiées dans la littérature, utilisant les théories de la plaque 2D. Liu et Lee (2000) ont développé une nouvelle approche pour étudier les vibrations tridimensionnelles de plaques circulaires et annulaires épaisses en utilisant une méthode des éléments finis avec différentes combinaisons de conditions aux limites.

Cheng et al. (2003) ont réalisé une analyse expérimentale des fréquences sur une plaque fixée-libre avec un trou circulaire. Un logiciel basé sur la méthode des éléments finis (FEM), Nastran, a été utilisé pour étudier les caractéristiques modales.

Prakash and Ganapathi (2006) ont étudié les caractéristiques modales de plaques circulaires à gradient fonctionnel en utilisant une approche par éléments finis (FEM). Les auteurs ont développé un élément de plaque à trois nœuds en appliquant une approche de cohérence de champ. Une distribution uniforme de température a été appliquée à la surface de la plaque. Nie and Zong (2007) ont présenté l'analyse de fréquence libre et forcée en 3D de plaques circulaires FGM avec différentes conditions aux extrémités en utilisant une théorie de l'élasticité en 3D. Plus récemment, Zhang et Zhou (2008) ont pris en compte la surface physique neutre dans leurs travaux. Dans leurs travaux respectifs, Prakash et al. (2009) ont proposé une analyse analytique et une analyse par éléments finis des plaques FGM.

H. Oyekoya et ses collaborateurs (2009) ont développé l'élément de type Mindlin et l'élément de type Reissner pour la modélisation du flambement et de la vibration libre des plaques composites à gradient fonctionnel (FGC). Talha et Singh (2011) ont étudié l'analyse de vibration libre à grande amplitude des plaques FGM.

Nguyen Xuan et ses collègues (2012) ont proposé une approche numérique efficace pour l'analyse statique, la vibration libre et l'analyse de flambement mécanique/thermique des plaques FGM. Leur méthode combine habilement le concept de nœud-base de déformation lisse avec une discrétisation du cisaillement dans une plaque triangulaire. Dans leur étude, Sadowski et ses collègues (2014) ont développé des modèles numériques pour les parties structurales d'avions fabriqués à partir de différents composites. Ils ont effectué une analyse par éléments finis pour étudier la réponse mécanique de ces éléments structuraux, puis les ont comparés à des modèles analytiques simplifiés formulés précédemment. Shariyat et al. (2014) ont pris en compte l'influence de la fondation élastique de type Winkler. De plus, les propriétés du matériau sont supposées être orthotropes dans le plan et hétérogènes transversalement.

#### 4.4 Structure coque en FGM

Les structures coques sont des structures légères et minces (généralement incurvées) constituées d'éléments coques. Ces structures sont également appelées structures en plaques et en coques, et sont généralement utilisées dans les fuselages d'aéronefs, les toits de grands bâtiments et les coques de bateaux. On va citer uniquement les travaux réalisés sur les structures coque en matériaux à gradient fonctionnel.

Loy, Lam et Reddy (1999) ont examiné l'effet des types de matériaux, du rapport entre la longueur et le rayon ( $L/R$ ) et du rapport entre l'épaisseur et le rayon ( $h/R$ ) sur les fréquences naturelles d'une coque cylindrique à gradient fonctionnel simplement appuyée. L'équation principale a été obtenue à l'aide de la méthode de Rayleigh Ritz. Patel et al. (2005) ont effectué une étude des fréquences libres des coques cylindriques elliptiques à gradient fonctionnel en utilisant la méthode HOSDT. Dans leur étude, la méthode des éléments finis (FEM) a été utilisée pour résoudre les équations principales.

Hao et al. (2012) ont réalisé une analyse de fréquence forcée d'une coque cylindrique cantilever à gradient fonctionnel en utilisant la théorie de la coque de premier ordre de Reddy. Les équations du mouvement ont été discrétisées en appliquant la méthode de Galerkin. Zhag, Hao et Yang (2012) ont analysé la dynamique non linéaire d'une coque cylindrique circulaire à gradient fonctionnel, fixée aux deux extrémités, soumise à une excitation externe et à un changement de température uniforme.

Kandasamy et al. (2016) ont proposé une méthode basée sur la théorie des plaques épaisses de Kirchhoff pour l'étude numérique de coques cylindriques épaisses en FGM. Une approche par éléments finis (FEM) a été utilisée pour étudier les équations principales. Torabi and Anasari (2018) ont introduit un super-élément iso paramétrique d'ordre supérieur pour l'analyse des vibrations libres des coques FGM en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Hussain et al. (2018) ont développé une approche de propagation des ondes pour calculer les vibrations des coques cylindriques en rotation avec des matériaux FG. Dans leur travail, la théorie des coques de Love a été utilisée.

## 5. Conclusion

En conclusion, vu que la plupart des turbomachines contient un système rotor-ailettes et que récrément le focus est sur les matériaux fonctionnellement gradué qui sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées dès la conception. Alors on a opté de combiner les deux et d'étudier le comportement dynamique d'un système rotor-ailettes ou rotor-aubagé en FGM. Il est important de noter le manque recherches existant sur ce thème spécifique. Cette lacune souligne l'opportunité d'entreprendre des études approfondies dans ce domaine pour combler les connaissances actuelles et apporter des contributions significatives à la conception et à l'optimisation de ces systèmes. Une telle recherche permettrait de mieux comprendre les comportements mécaniques, les propriétés vibratoires et les caractéristiques de flexion des systèmes rotor-ailettes en FGM, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles avancées technologiques et à des applications novatrices dans les domaines de l'aéronautique, de l'énergie éolienne et plus encore.

## Chapitre II

# Mise en équation

### Table des matières

1. Introduction.....	32
2. Formulation mathématique .....	32
2.1. Ailette fonctionnellement graduée.....	33
2.1.1. Énergie cinétique.....	35
2.1.2. Énergie potentielle .....	38
2.2. Arbre fonctionnellement gradué .....	40
2.2.1. Énergie cinétique.....	41
2.2.2. Énergie de déformation.....	42
2.3. Disque.....	43
2.4. Palier.....	44



## 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en équation d'un rotor aubagé en matériau à gradient fractionnel ou fonctionnellement gradués « MFG ». Tous d'abord, les caractéristiques des différents éléments qui composent le rotor étudié sont présentées. L'arbre et les ailettes flexibles sont caractérisés par leurs énergies cinétique et de déformation, le disque supposé rigide est caractérisé par son énergie cinétique, les paliers sont caractérisés par des forces extérieures agissant sur l'arbre de rotor.

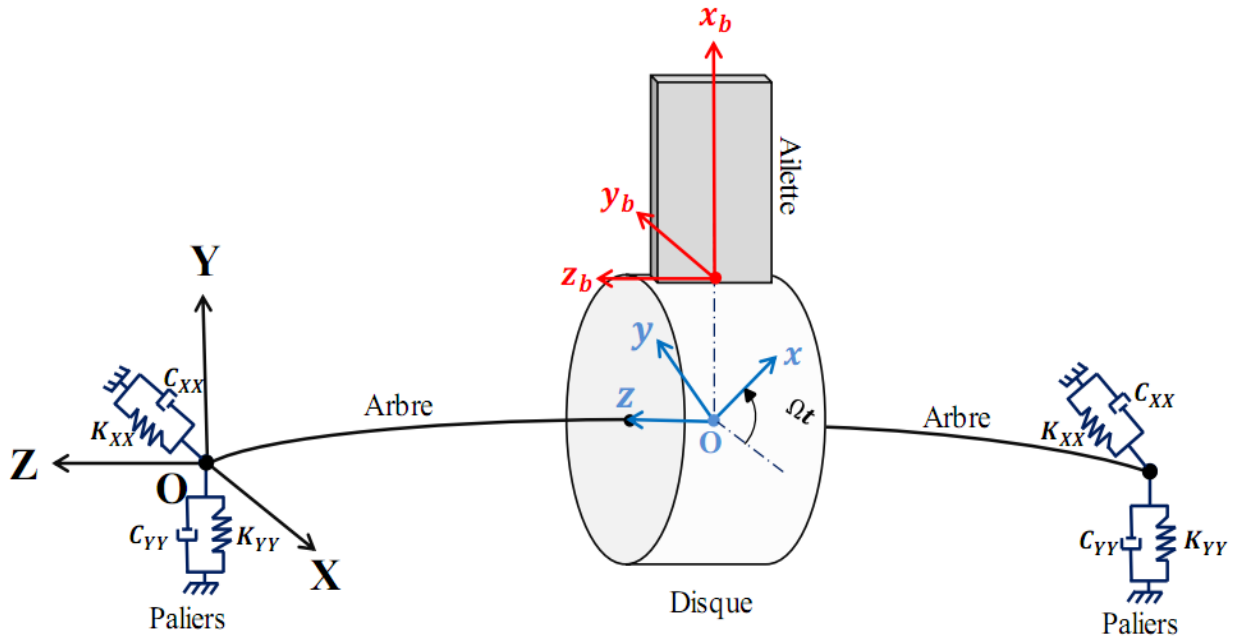
L'équation différentielle du mouvement est obtenue par application de l'équation de Lagrange sur les énergies cinétique et potentielle des différents composants. Lors de la mise en équation, on utilise les angles d'Euler pour d'écrire le mouvement des éléments de rotor dont le repère fixe est lié aux paliers.

## 2. Formulation mathématique

Le système rotor-ailette étudié est illustré dans la Figure. II.1 dont  $OXYZ$  est le repère fixe,  $Oxyz$  est le repère tournant liée à l'arbre ou au disque.  $Ox_b y_b z_b$  représente le repère local de l'ailette.

Le système étudié est simplifié selon les hypothèses suivantes :

- L'arbre et les ailettes flexibles sont en FGM.
- Le matériau isotrope est adopté pour le disque rigide.
- L'arbre et les ailettes sont modélisés comme des poutres d'Euler-Bernoulli.
- Les ailettes sont modélisées comme des poutres aux conditions aux limites encastré-libre fixées au disque.
- Les effets de cisaillement et de torsion sont négligés.
- Les coordonnées du repère local de l'ailette  $Ox_b y_b z_b$  restent perpendiculaires aux coordonnées du repère fixe  $OXYZ$  lié aux paliers pendant la rotation, ce qui signifie que la rotation du disque n'a pas d'effet sur les déplacements de l'ailette dans les coordonnées fixes.

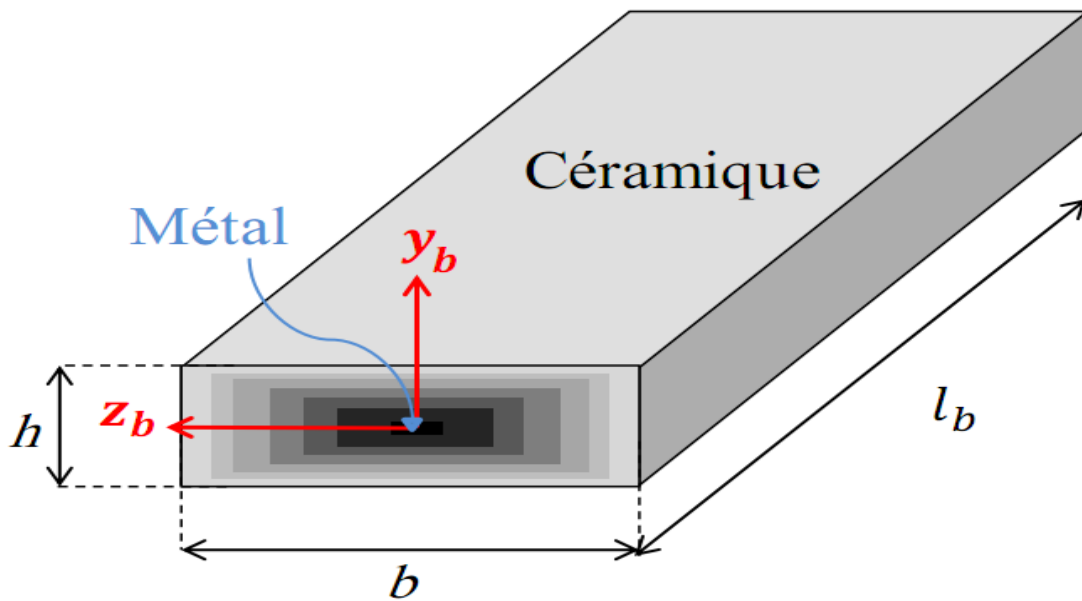


**Fig. II.1** Schéma de système rotor-ailette étudié.

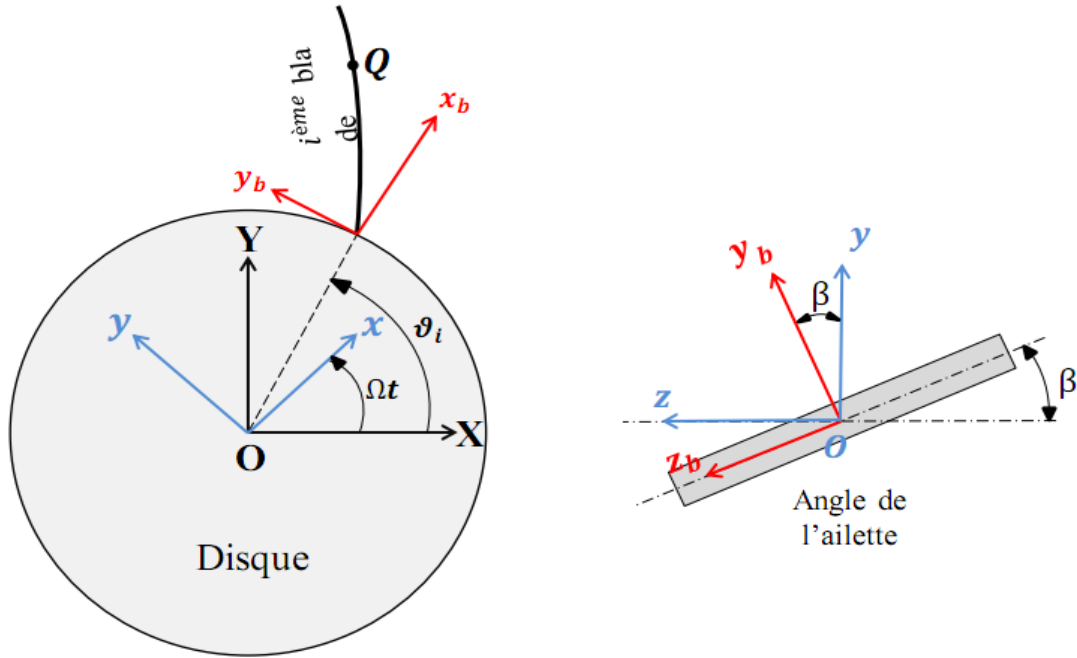
**2.1. Ailette fonctionnellement graduée**

L'ailette est considérée comme une poutre de longueur  $l_b$ , largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$  ; qui est composé d'un noyau métallique et recouvert de céramique (Fig. II.2). Les ailettes sont modélisées comme des poutres d'Euler-Bernoulli fixées au disque.

Les ailettes flexibles sont caractérisées par leurs énergies cinétiques et de déformation.



**Fig. II.2** Schéma de la gradation du matériau dans l'ailette.



**Fig. II.3** Schéma du système disque-ailette.

Dans notre étude, les propriétés matérielles  $P_b$  de l'ailette varient continûment dans les deux directions, suivant l'axe  $y_b$  (direction de l'épaisseur) et suivant l'axe  $z_b$  (direction de largeur) selon la relation suivante :

$$P_b(y_b, z_b) = P_{bc} V_{bc}(y_b, z_b) + P_{bm} V_{bm}(y_b, z_b) \tag{II.1}$$

Où :

- $P_b(y_b, z_b)$  désigne soit la densité  $\rho(y_b, z_b)$  soit le module de Young  $E(y_b, z_b)$ .
- $P_{bm}$  désigne propriétés matérielles du composant métallique.
- $P_{bc}$  désigne propriétés matérielles du composant céramique.
- $V_{bm}(y_b, z_b)$  et  $V_{bc}(y_b, z_b)$  sont les fractions volumiques des composants métalliques et céramiques.

$$V_{bc}(y_b, z_b) + V_{bm}(y_b, z_b) = 1 \tag{II.2}$$

Pour une ailette composée d'un cœur en métal et recouverte de céramique (Fig. II.2), une nouvelle formule basée sur la loi de puissance de la fraction volumique est développée dans notre travail où les propriétés du matériau varient à la fois dans le sens de l'épaisseur et de la largeur, l'expression de cette formule est donnée comme suit :

$$V_{bc}(y_b, z_b) = 1 - \left(1 - \left|\frac{2y_b}{h}\right|^n\right) \left(1 - \left|\frac{2z_b}{b}\right|^k\right) \quad (\text{II.3})$$

Où :

- $n$  : représente l'indice de puissance de la gradation des propriétés du matériau le long de l'axe  $y_b$  (direction de l'épaisseur).
- $k$  : représente l'indice de loi de puissance de la gradation des propriétés du matériau le long de l'axe  $z_b$  (sens de la largeur).

En remplaçant les équations (II.2) et (II.3) dans l'équation. (II.1), on trouve :

$$P_b(y_b, z_b) = (P_{bc} - P_{bm}) \left[1 - \left(1 - \left|\frac{2y_b}{h}\right|^n\right) \left(1 - \left|\frac{2z_b}{b}\right|^k\right)\right] + P_{bm} \quad (\text{II.4})$$

A partir de l'équation II.4, on peut déduire plusieurs cas :

- $n = k$  : même gradation des propriétés du matériau dans les deux sens.
- $n = \infty$  : les propriétés du matériau ne varient que dans le sens de la largeur (suivant l'axe  $z_b$ ).
- $k = \infty$  : les propriétés du matériau ne varient que dans le sens de l'épaisseur (suivant l'axe  $y_b$ ).
- $k = n = \infty$  : le fraction volumique de céramique tend vers zéro ( $V_{bc}(y_b, z_b) = 0$ ) ceci désigne que l'ailette est 100% en métal ( $P_b(y_b, z_b) = P_{bm}$ ).
- $k = n = 0$  : le fraction volumique de céramique tend vers un ( $V_{bc}(y_b, z_b) = 1$ ) ceci désigne que l'ailette est 100% en céramique ( $P_b(y_b, z_b) = P_{bc}$ ).
- $n = k = 1$  : désigne une gradation linéaire dans les deux directions.

### 2.1.1. Énergie cinétique

Supposons qu'il y ait  $N_b$  d'ailettes uniformément réparties sur le disque. Le vecteur de déplacement dans le repère fixe d'un point arbitraire  $Q$  de coordonnées  $x_b, y_b, z_b$  sur la  $n^{\text{ème}}$  ailette (Fig. II.3) peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_d \\ V_d \\ W_d \end{Bmatrix} + A_2 A_1 \begin{Bmatrix} R_d + x_b + u_b - y_b \theta_{z_b} + z_b \theta_{y_b} \\ v_b \\ w_b \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Où :

- $u$ ,  $v$  et  $w$  représentent les déplacements ; longitudinal, latéral et pendulaire de l'ailette suivant les coordonnées de repère fixe OXYZ.
- $U_d$ ,  $V_d$ ,  $W_d$  représentent les déplacements du centre de disque suivant les coordonnées de repère fixe OXYZ.
- $u_b$ ,  $v_b$  et  $w_b$  représentent les déplacements dus à la déformation axiale, et de flexion (*flap-wise*, *chord-wise*) d'un point de l'ailette suivant les coordonnées de repère locale  $Ox_b y_b z_b$ .
- $\theta_{y_b}$ ,  $\theta_{z_b}$  représentent les angles de rotation de la section transversale de l'ailette selon les axes  $y_b$  et  $z_b$ . Dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli,  $\theta_{y_b}$  et  $\theta_{z_b}$  sont donnés par :

$$\theta_{z_b} = \frac{\partial v_b}{\partial x_b} \quad , \quad \theta_{y_b} = \frac{\partial w_b}{\partial x_b} \quad (\text{II.6})$$

- $A_1$  et  $A_2$  sont les matrices de transformation de mouvement du repère locale de l'ailette au repère fixe en utilisant les angles d'Euler.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i & 0 \\ \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

- $\beta$  est l'angle de décalage (*stagger angle*) de l'ailette par rapport aux coordonnées de repère tournant  $Oxyz$  (Fig. II.3).
- $\vartheta_i$  Représente la position de la  $i^{\text{ème}}$  ailette dans le groupe.

$$\vartheta_i = \Omega t + (i - 1)2\pi/N_b \quad (\text{II.8})$$

- $N_b$  est le nombre d'aubes et  $\Omega t$  est l'angle de rotation.
- $R_d$  est le rayon du disque.
- Le déplacement  $W_d$  du disque suivant l'axe OY et le déplacement longitudinal  $u_b$  de l'ailette sont négligés lors de la dérivation de la formule de l'énergie cinétique ( $W_d=0$ ,  $u_b=0$ ).

En remplaçant les équations (II.7) et (II.8) dans l'équation (II.5), le vecteur de déplacement du point Q dans la coordonnée globale est donné comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_d + (R_d + x_b - y_b \theta_{z_b} + z_b \theta_{y_b}) \cos \vartheta_i - v_b \cos \beta \sin \vartheta_i + w_b \sin \beta \sin \vartheta_i \\ V_d + (R_d + x_b - y_b \theta_{z_b} + z_b \theta_{y_b}) \sin \vartheta_i + v_b \cos \beta \cos \vartheta_i - w_b \cos \vartheta_i \sin \beta \\ w_b \cos \beta + v_b \sin \beta \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Le vecteur vitesse du point Q est donné par la dérivé du vecteur de déplacement par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{cases} = \begin{cases} \dot{U}_d + (-y_b \dot{\theta}_{z_b} + z_b \dot{\theta}_{y_b}) \cos \vartheta_i - (R_d + x_b - y_b \theta_{z_b} + z_b \theta_{y_b}) \Omega \sin \vartheta_i \\ -\dot{v}_b \cos \beta \sin \vartheta_i + v_b \cos \beta \Omega \cos \vartheta_i + \dot{w}_b \sin \beta \sin \vartheta_i + w_b \sin \beta \Omega \cos \vartheta_i \\ \dot{V}_d + (-y_b \dot{\theta}_{z_b} + z_b \dot{\theta}_{y_b}) \sin \vartheta_i + (R_d + x_b - y_b \theta_{z_b} + z_b \theta_{y_b}) \Omega \cos \vartheta_i \\ +\dot{v}_b \cos \beta \cos \vartheta_i - v_b \cos \beta \Omega \sin \vartheta_i - \dot{w}_b \sin \beta \cos \vartheta_i - w_b \sin \beta \Omega \sin \vartheta_i \\ \dot{w}_b \cos \beta + \dot{v}_b \sin \beta \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

L'énergie cinétique  $T_{blade}$  d'une ailette en matériau fonctionnellement graduée s'écrit :

$$T_{blade} = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dA_b dx_b \quad (\text{II.11})$$

En remplaçant le vecteur vitesse dans la formule précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} T_{blade} = & \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) ((\dot{v}_b^2 + \dot{w}_b^2 + \dot{U}_d^2 + \dot{V}_d^2) \\ & + 2(R_d + x_b) \dot{v}_b \Omega \cos \beta - 2 \sin \beta (R_d + x_b) \dot{w}_b \Omega - 2 \sin \vartheta_i (R_d + x_b) \Omega \dot{U}_d \\ & + 2 \cos \vartheta_i (R_d + x_b) \Omega \dot{V}_d - 2 \cos \vartheta_i v_b \dot{U}_d \Omega \cos \beta - 2 \sin \vartheta_i v_b \dot{V}_d \Omega \cos \beta \\ & - 2 \cos \vartheta_i \sin \beta w_b \dot{U}_d \Omega + 2 \sin \vartheta_i \sin \beta w_b \dot{V}_d \Omega - 2 \sin \vartheta_i \cos \beta \dot{v}_b \dot{U}_d \\ & + 2 \cos \vartheta_i \cos \beta \dot{v}_b \dot{V}_d + 2 \sin \vartheta_i \sin \beta \dot{w}_b \dot{U}_d - 2 \cos \vartheta_i \sin \beta \dot{w}_b \dot{V}_d \\ & + (R_d + x_b)^2 \Omega^2 + v_b^2 \Omega^2 \cos^2 \beta - 2 \sin \beta \cos \beta v_b w_b \Omega^2 - w_b^2 \Omega^2 \cos^2 \beta \\ & + w_b^2 \Omega^2 + \theta_{y_b}^2 \Omega^2 z_b^2 + \theta_{z_b}^2 \Omega^2 y_b^2 + z_b^2 \dot{\theta}_{y_b}^2 + y_b^2 \dot{\theta}_{z_b}^2) dA_b dx_b \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Où  $A_b$  est la section transversale de l'aube.

$$\begin{cases} \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) dA_b = \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) dy_b dz_b \\ \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) y_b^2 dA_b = \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) y_b^2 dy_b dz_b \\ \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) z_b^2 dA_b = \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) z_b^2 dy_b dz_b \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

La densité  $\rho_b(y_b, z_b)$  varie selon la relation de gradation comme indiqué dans l'équation (2.4)

$$\rho_b(y_b, z_b) = (\rho_{bc} - \rho_{bm}) \left[ 1 - \left( 1 - \left| \frac{2y_b}{h} \right|^n \right) \left( 1 - \left| \frac{2z_b}{b} \right|^k \right) \right] + \rho_{bm} \quad (\text{II.14})$$

- $\rho_{bc}$  et  $\rho_{bm}$  désignent respectivement la densité des composants céramiques et métalliques de l'ailette.

### 2.1.2. Énergie potentielle

L'énergie potentielle  $V_{blade}$  de l'ailette provient de deux parties : Ma et al. (2015)

$$V_{blade} = V_{bb} + V_{bf} \quad (\text{II.15})$$

La première partie de l'énergie potentielle ( $V_{bb}$ ) représente l'énergie de déformation due à la flexion élastique de l'ailette et elle est déterminée à partir du vecteur de déplacement  $r_Q$  du point Q dans le repère local de l'ailette  $Ox_b y_b z_b$ , donnée comme suit :

$$r_Q = \begin{bmatrix} R_d + x_b - y_b \theta_{z_b} + z_b \theta_{y_b} \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

La déformation axiale de l'ailette  $\varepsilon_{x_b x_b}$  est déterminée par la dérivée du vecteur  $r_Q$  par rapport  $x_b$ , elle est donnée par :

$$\varepsilon_{x_b x_b} = -y_b \frac{\partial \theta_{z_b}}{\partial x_b} + z_b \frac{\partial \theta_{y_b}}{\partial x_b} = -y_b \frac{\partial^2 v_b}{\partial x_b^2} + z_b \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_b^2} \quad (\text{II.17})$$

La relation contrainte-déformation est donnée par :

$$\sigma_{x_b x_b} = E_b(y_b, z_b) \cdot \varepsilon_{x_b x_b} = E_b(y_b, z_b) \left( -y_b \frac{\partial^2 v_b}{\partial x_b^2} + z_b \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_b^2} \right) \quad (\text{II.18})$$

L'énergie de déformation due à la flexion de de l'ailette s'exprime comme suit :

$$V_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \int_{A_b} \sigma_{x_b x_b} \cdot \varepsilon_{x_b x_b} dA_b dx_b \quad (\text{II.19})$$

$$V_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \int_{A_b} E_b(y_b, z_b) \left( -y_b \frac{\partial^2 v_b}{\partial x_b^2} + z_b \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_b^2} \right)^2 dA_b dx_b \quad (\text{II.20})$$

$$V_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \int_{A_b} E_b(y_b, z_b) \left( y_b^2 \left( \frac{\partial^2 v_b}{\partial x_b^2} \right)^2 + z_b^2 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_b^2} \right)^2 - 2y_b z_b \frac{\partial^2 v_b}{\partial x_b^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_b^2} \right) dA_b dx_b \quad (\text{II.21})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{A_b} E_b(y_b, z_b) y_b^2 dA_b = \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} E_b(y_b, z_b) y_b^2 dy_b dz_b \\ \int_{A_b} E_b(y_b, z_b) z_b^2 dA_b = \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} E_b(y_b, z_b) z_b^2 dy_b dz_b \\ \int_{A_b} -2E_b(y_b, z_b) y_b z_b dA_b = -2 \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} E_b(y_b, z_b) y_b z_b dy_b dz_b \end{array} \right. \quad (\text{II.22})$$

Le module de Young  $E_b(y_b, z_b)$  varie selon la relation de gradation indiquée dans l'équation (II.4)

$$E_b(y_b, z_b) = (E_{bc} - E_{bm}) \left[ 1 - \left( 1 - \left| \frac{2y_b}{h} \right|^n \right) \left( 1 - \left| \frac{2z_b}{b} \right|^k \right) \right] + E_{bm} \quad (\text{II.23})$$

- $E_{bc}$  Et  $E_{bm}$  désignent respectivement le module de Young des composants céramiques et métalliques de l'ailette.

La deuxième partie de l'énergie potentielle ( $V_{bf}$ ) est due à l'allongement axial provoqué par les forces centrifuges  $f_c$  (Tan et al. 1997), l'expression de cette dernière est donnée comme suite :

$$V_{bf} = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} f_c(x_b) \left( \left( \frac{\partial v_b}{\partial x_b} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x_b} \right)^2 \right) dx_b \quad (\text{II.24})$$

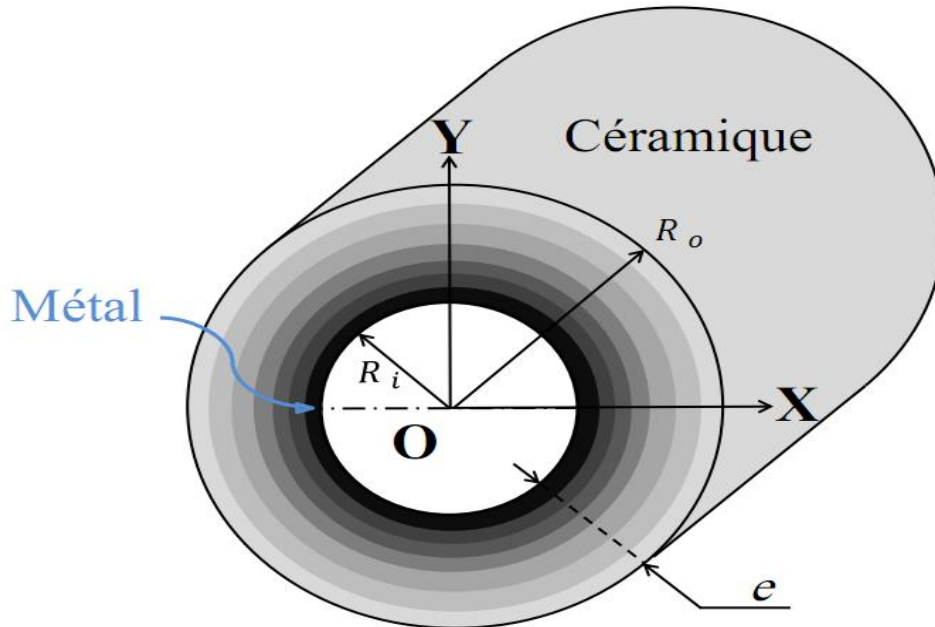
L'expression de la force centrifuge  $f_c(x_b)$  en matériau fonctionnellement gradué (Ma et al. 2015) s'écrit :

$$\begin{aligned} f_c(x_b) &= \int_{A_b} \int_{x_b}^{l_b} \rho_b(y_b, z_b) \Omega^2 (R_d + x_b) dx_b dA_b \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 (l_b^2 + 2R_d l_b - 2R_d x_b - x_b^2) \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) dA_b \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$



## 2.2. Arbre fonctionnellement gradué

L'arbre est considéré comme une poutre à une section transversale circulaire, les propriétés des matériaux constituant l'arbre varient dans la direction du rayon ( $r$ ), du métal à l'intérieure au céramique à la surface extérieure, cette gradation est représentée dans la figure II.4.



**Fig. II.4** Schéma de la gradation du matériau de l'arbre.

Dans ce cas, l'expression de la fraction volumique de céramique est donnée par Loy et al. (1999), Boukhalifa (2014)

$$V_{sc}(r) = \left( \frac{r - R_i}{e} \right)^s \quad (\text{II.26})$$

Les propriétés matérielles de l'arbre  $P_s(r)$  varient selon la loi de puissance donnée par :

$$P_s(r) = (P_{sc} - P_{sm}) \left( \frac{r - R_i}{e} \right)^s + P_{sm} \quad (\text{II.27})$$

Où :

- $P_s(r)$  désigne soit la densité  $\rho_s(r)$  soit le module de Young  $E_s(r)$ .
- $P_{sm}$  désigne propriétés matérielles du composant métallique.
- $P_{sc}$  désigne propriétés matérielles du composant céramique.
- $s$  : représente l'indice de loi de puissance de la gradation du matériau de l'arbre.

- $e$  : représente l'épaisseur de l'arbre ( $e=R_o - R_i$ ).
- $R_o$  : représente le rayon extérieur de l'arbre.
- $R_i$  : représente le rayon intérieur de l'arbre.

A partir de l'équation (II.27), on peut en déduire plusieurs cas :

- $s = 0$  : désigne un arbre en céramique pure ( $V_{sc}(r) = 1$ ) et ( $P_s(r) = P_{sc}$ ).
- $s = \infty$  : désigne un arbre en matériau métallique ( $V_{sc}(r) = 0$ ) et ( $P_s(r) = P_{sm}$ ).
- $s = I$  : dénote une gradation linéaire.

### 2.2.1. Énergie cinétique

Le vecteur de position d'un point de la section transversale de l'arbre suivant les coordonnées du repère fixe OXYZ est donné par :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_t \\ V_t \\ W_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_x \\ 0 & \theta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

- $U, V, W_t$  représentent les déplacements de translation de l'arbre suivant les coordonnées du repère fixe OXYZ, le déplacement axial est négligé ( $W_t=0$ ).
- $U, V$  et  $W$  sont les déplacements globaux (translation + rotation) de l'arbre dans la coordonnée fixe OXYZ.
- $\theta_x$  et  $\theta_z$  sont les angles de rotation de la section de l'arbre selon les axes  $x$  et  $z$  du repère tournant Oxyz.

Dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli, les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_z$  sont données par :

$$\theta_x = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad , \quad \theta_y = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{II.29})$$

L'énergie cinétique  $T_{shaft}$  de l'arbre FG en rotation peut s'écrire :

$$T_{shaft} = \frac{1}{2} \int_0^{L_s} \int_S \rho_s(r) \left\{ \dot{U} \quad \dot{V} \quad \dot{W} \right\} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} dS dz \quad (\text{II.30})$$

$$T_{shaft} = \frac{1}{2} \int_0^{L_s} I_m (\dot{U}_t^2 + \dot{V}_t^2) dz + \int_0^{L_s} I_d (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) dz + 2\Omega I_p \int_0^{L_s} (\theta_x \dot{\theta}_y) dz \quad (\text{II.31})$$

Les expressions de  $I_m$ ,  $I_d$  et  $I_p$  sont définies comme suit :

$$\begin{cases} I_m = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} \rho_s(r) r dr \\ I_d = \pi \int_{R_i}^{R_o} \rho_s(r) r^3 dr \\ I_p = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} \rho_s(r) r^3 dr \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

La densité  $\rho_s(r)$  varie selon la relation de gradation donnée dans l'équation (II.27).

$$\rho_s(r) = (\rho_{sc} - \rho_{sm}) \left( \frac{r - R_i}{e} \right)^s + \rho_{sm} \quad (\text{II.33})$$

### 2.2.2. Énergie de déformation

L'énergie de déformation de l'arbre est déterminée à partir du champ de déplacement de tout point de l'arbre dans les coordonnées du repère tournant  $Oxyz$ .

$$\{U_r, V_r, W_r\}^t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y\theta_x + x\theta_y \end{pmatrix} \quad (\text{II.34})$$

- $U_r, V_r, W_r$  représentent les déplacements de rotation de tout point sur la section transversale de l'arbre dans les coordonnées du repère tournant  $Oxyz$ .

La déformation axiale de l'arbre peut s'écrire :

$$\varepsilon_{zz} = -y \frac{\partial \theta_x}{\partial z} + x \frac{\partial \theta_y}{\partial z} = -y \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{II.35})$$

La contrainte  $\sigma_{zz}$  est donnée par :

$$\sigma_{zz} = E_s(r) \cdot \varepsilon_{zz} = E_s(r) \left( -y \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + x \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.36})$$

Enfin, l'énergie de déformation due à la flexion de l'arbre est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} V_{shaft} &= \frac{1}{2} \int_0^{L_s} \int_s E_s(r) \cdot \varepsilon_{zz}^2 dS dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_s} \int_s E_s(r) \left( y \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)^2 + \left( x \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)^2 - \left( 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dS dz \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{cases} \int_S E_s(r) y^2 dS = \int_{R_i}^{R_o} \pi E_s(r) r^3 dr \\ \int_S E_s(r) x^2 dS dz = \int_{R_i}^{R_o} \pi E_s(r) r^3 dr \\ \int_S E_s(r) xy dS dz = 0 \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Selon l'équation (II.27), l'expression du module d'Young  $E_s(r)$  s'écrit :

$$E_s(r) = (E_{sc} - E_{sm}) \left( \frac{r - R_i}{e} \right)^s + E_{sm} \quad (\text{II.39})$$

### 2.3. Disque

Le disque est considéré rigide et isotrope en matériau métallique, son énergie cinétique est dérivée de l'énergie cinétique de l'arbre et peut s'exprimer par :

$$T_{disk} = \frac{1}{2} M_d (\dot{U}_d^2 + \dot{V}_d^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + \frac{1}{2} I_{dz} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_x \theta_y) \quad (\text{II.40})$$

Où :

- $I_{dx}$ ,  $I_{dy}$  et  $I_{dz}$  sont le moment d'inertie du disque.
- $M_d$  : la masse du disque.
- $h_d$  : l'épaisseur du disque.
- $\rho_d$  : la densité du matériau du disque.
- $R_d$  : le rayon extérieur du disque.
- $R_o$  : le rayon intérieur du disque.

$$\begin{cases} I_{dx} = I_{dy} = \frac{M_d}{12} (3R_d^2 + 3R_o^2 + h_d^2) \\ I_{dz} = \frac{M_d}{12} (R_d^2 + R_o^2) \\ M_d = \pi (R_d^2 - R_o^2) h_d \rho_d \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

### 2.4. Palier

Les paliers sont caractérisés par leur raideur et leur amortissement, le travail virtuel  $\delta W$  des efforts extérieurs des paliers agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\delta W &= -k_{XX}U\delta U - k_{XY}V\delta U - k_{YY}V\delta V - k_{YX}U\delta V - c_{XX}\dot{U}\delta U - c_{XY}\dot{V}\delta U - c_{YY}\dot{V}\delta V - c_{YX}\dot{U}\delta V \\ &= F_U\delta U + F_V\delta V\end{aligned}\quad (\text{II.42})$$

Les composantes des forces généralisées  $F_U$  et  $F_V$  sont données par :

$$\begin{bmatrix} F_U \\ F_V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{bmatrix}\quad (\text{II.43})$$

## CHAPITRE III

# Modélisation d'un rotor aubagé en matériau fonctionnellement gradué par la version h de la MEF

### Table des matières

1. Introduction .....	46
2. Formulation matricielle .....	47
2.1. Modélisation éléments finis .....	47
2.2. Matrices élémentaires .....	49
2.2.1. Matrices des ailettes .....	50
2.2.2. Matrices de l'arbre .....	54
2.2.3. Matrices de disque .....	56
2.2.4. Matrices des paliers .....	57
3. Équation globale du mouvement .....	57

## 1. Introduction

La méthode des éléments finis permet de traiter facilement des systèmes d'équations complexes. Son principe est le même dans tous les cas: dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples réunis en des points situés sur leur contour appelés points nodaux ou nœuds, puis dans un second temps le champs de déplacement, contrainte, température, pression, ou autre est approché localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme ou fonctions d'interpolation.

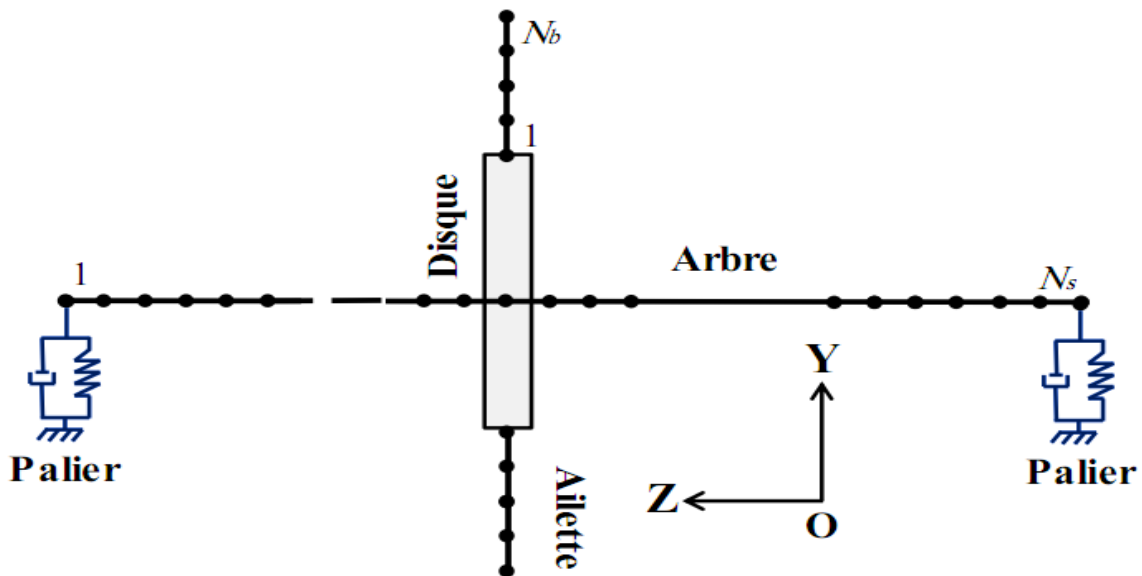
En dynamique des structures, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles qui modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles.

Dans ce chapitre, la version classique h de la méthode des éléments finis est utilisée pour la formulation matricielle de l'équation différentielle du mouvement d'un rotor aubagé en matériau FGM. L'élément poutre est utilisé pour la discrétisation des ailettes et de l'arbre. Les fonctions de formes utilisées sont les fonctions d'Hermite cubique. Les matrices masses, rigidités, et amortissements élémentaires sont déterminées par l'application de l'équation de Lagrange. Les matrices globales de l'équation du mouvement sont trouvées par l'assemblage des matrices élémentaires en respectant les vecteurs de coordonnées généralisées.

## 2. Formulation matricielle

### 2.1. Modélisation éléments finis

Pour la modélisation par éléments finis, chaque ailette est discrétisée en  $N_b$  éléments et l'arbre est discrétisé en  $N_s$  éléments ; chaque nœud de ces éléments possède deux degrés de liberté. Le disque est fixé entre deux éléments de l'arbre à un nœud donné ; les paliers sont situés à des nœuds spécifiques.



**Fig. III.1.** Modèle éléments finis du rotor aubagé.

Pour la formulation matricielle, tous les mouvements de déplacements et rotations de chaque élément de l'ailette et de l'arbre sont remplacés par le vecteur des coordonnées généralisées et le vecteur des fonctions de forme comme suit :

$$\begin{cases} v_b = [N_{v_b}] \{q_{v_b}\} \\ \theta_{z_b} = [N_{v_b}'] \{q_{v_b}\} \\ w_b = [N_{w_b}] \{q_{w_b}\} \\ \theta_{y_b} = [N_{w_b}'] \{q_{w_b}\} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$



$$\begin{cases} U_t = [N_{U_t}]\{q_{U_t}\} \\ \theta_y = [N_{U_t}']\{q_{U_t}\} \\ V_t = [N_{V_t}]\{q_{V_t}\} \\ \theta_x = [N_{V_t}']\{q_{V_t}\} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Les vecteurs  $[N_{v_b}], [N_{w_b}], \{q_{v_b}\}, \{q_{w_b}\}$  représentent respectivement les vecteur des fonctions de forme et de coordonnées généralisées correspond aux ailettes, et  $[N_{U_t}], [N_{V_t}], \{q_{U_t}\}, \{q_{V_t}\}$  représentent respectivement les vecteurs des fonctions de forme et de coordonnées généralisées correspond à l'arbre.

Où  $[N_{v_b}'], [N_{w_b}'], [N_{U_t}']$  et  $[N_{V_t}']$  sont les dérivés des vecteurs des fonctions de forme donnée par :

$$\begin{cases} [N_{v_b}'] = \frac{\partial [N_{v_b}]}{\partial x_b} \\ [N_{w_b}'] = \frac{\partial [N_{w_b}]}{\partial x_b} \\ [N_{U_t}'] = \frac{\partial [N_{U_t}]}{\partial z} \\ [N_{V_t}'] = \frac{\partial [N_{V_t}]}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Les fonctions de forme  $[N_{v_b}], [N_{w_b}], [N_{U_t}], [N_{V_t}]$  de la version classique de la méthode des éléments finis, qui représentent les déplacements et rotations réels de chaque nœud d'un élément de l'ailette ou de l'arbre, sont données par Bardel (1996) (Fig. III.2).

$$[N_{v_b}] = [N_{w_b}] = \begin{cases} f_1(\xi_1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi_1 + \frac{1}{4}\xi_1^3 \\ f_2(\xi_1) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi_1 - \frac{1}{8}\xi_1^2 + \frac{1}{8}\xi_1^3\right)l_{be} \\ f_3(\xi_1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_1^3 \\ f_4(\xi_1) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi_1 + \frac{1}{8}\xi_1^2 + \frac{1}{8}\xi_1^3\right)l_{be} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

$$[N_{U_t}] = [N_{V_t}] = \begin{cases} f_1(\xi_2) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_2^3 \\ f_2(\xi_2) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi_2 - \frac{1}{8}\xi_2^2 + \frac{1}{8}\xi_2^3\right)L_{se} \\ f_3(\xi_2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi_2 - \frac{1}{4}\xi_2^3 \\ f_4(\xi_2) = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi_2 + \frac{1}{8}\xi_2^2 + \frac{1}{8}\xi_2^3\right)L_{se} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Où  $l_{be}$  et  $L_{se}$  désignent respectivement la longueur d'un élément de l'ailette et de l'arbre :

$$\begin{cases} l_{be} = l_b/N_b \\ L_{se} = L_s/N_s \end{cases} \quad (III.6)$$

$\xi_1$  et  $\xi_2$  représentent les coordonnées non-dimensionnelles données par :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{2x_b}{l_{be}} - 1 \\ \xi_2 = \frac{2z}{L_{se}} - 1 \end{cases} \quad (-1 \leq \xi_{1,2} \leq 1) \quad (III.7)$$

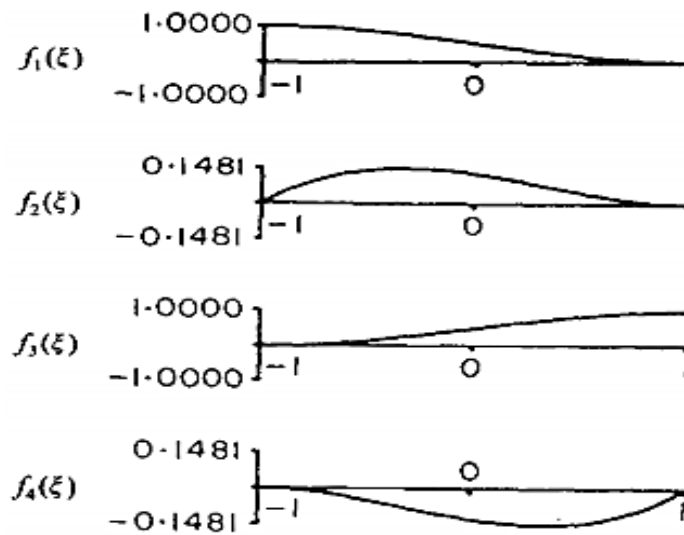


Fig. III.2 Représentation des fonctions de forme.

### 2.2. Matrices élémentaires

Le remplacement des déplacements et des rotations par les coordonnées généralisées et les vecteurs des fonctions de forme dans les équations des énergies cinétiques et potentielles des différents composants du système rotor-ailette et l'application de l'équation de Lagrange, permettent de déduire les matrices élémentaires de notre système.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = F_i \quad (3.8)$$

$E_c$  : L'énergie cinétique du système ( $E_c = T_{blade} + T_{shaft} + T_{disk}$ ).

$E_p$ : énergie potentielle du système ( $E_p = V_{blade} + V_{shaft}$ ).

$F_i$  : forces extérieures.

$q_i$  : coordonnées généralisées.

### 2.2.1. Matrices des ailettes

L'application de l'équation de Lagrange sur les équations des énergies cinétiques et de déformation d'un élément de longueur  $l_{be}$  de de l'ailette permet de déterminer les matrices masse, gyroscopique et de rigidité élémentaires de l'ailette.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{blade}}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial T_{blade}}{\partial q_b} + \frac{\partial V_{blade}}{\partial q_b} \\
&= \left( \left( [M_{b_{v_b}}^e] + [M_{c_{v_b, U_d}}^e] + [M_{c_{v_b, V_d}}^e] \right) \{ \ddot{q}_{v_b} \} \right. \\
&+ \left( [M_{b_{w_b}}^e] + [M_{c_{w_b, U_d}}^e] + [M_{c_{w_b, V_d}}^e] \right) \{ \ddot{q}_{w_b} \} \right) \\
&+ \left( \left( [G_{c_{v_b, U_d}}^e] + [G_{c_{v_b, V_d}}^e] \right) \{ \dot{q}_{v_b} \} + \left( [G_{c_{w_b, U_d}}^e] + [G_{c_{w_b, V_d}}^e] \right) \{ \dot{q}_{w_b} \} \right) \\
&+ \left( [M_{b-d_U}] \{ \ddot{q}_{U_t} \} + [M_{b-d_V}] \{ \ddot{q}_{V_t} \} \right) \\
&+ \left( \left( [K_{b_{v_b}}^e] + [K_{b_{v_b, w_b}}^e] \right) \{ q_{v_b} \} + \left( [K_{b_{w_b}}^e] + [K_{b_{w_b, v_b}}^e] \right) \{ q_{w_b} \} \right)
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Les matrices masse élémentaires  $[M_{b_{v_b}}^e]$ ,  $[M_{b_{w_b}}^e]$  d'un seul élément de l'ailette sont données par :

$$\begin{aligned}
[M_{b_{v_b}}^e] &= \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}]^t [N_{v_b}] dy_b dz_b dx_b \\
&+ \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) y_b^2 [N_{v_b}']^t [N_{v_b}'] dy_b dz_b dx_b
\end{aligned} \tag{III.10}$$

$$\begin{aligned}
[M_{b_{w_b}}^e] &= \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}]^t [N_{w_b}] dy_b dz_b dx_b \\
&+ \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) y_b^2 [N_{w_b}']^t [N_{w_b}'] dy_b dz_b dx_b
\end{aligned} \tag{III.11}$$

Les matrices masse  $[M_{b_{v_b}}^i]$ ,  $[M_{b_{w_b}}^i]$  de la  $i^{\text{ème}}$  ailette, sont déterminées par l'assemblage des matrices élémentaires  $[M_{b_{v_b}}^e]$ ,  $[M_{b_{w_b}}^e]$ .

Pour un groupe de  $n_b$  ailettes, Les matrices masse globale  $[M_{b_g}]$  est donnée par:

$$[M_{b_g}] = \begin{bmatrix} [M_{b_{v_b}}] & 0 \\ 0 & [M_{b_{w_b}}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Où:

$$\begin{cases} [M_{b_{v_b}}] = \text{diag} \left[ [M_{b_{v_b}}^1] [M_{b_{v_b}}^2] \dots [M_{b_{v_b}}^i] \dots [M_{b_{v_b}}^{n_b}] \right] \\ [M_{b_{w_b}}] = \text{diag} \left[ [M_{b_{w_b}}^1] [M_{b_{w_b}}^2] \dots [M_{b_{w_b}}^i] \dots [M_{b_{w_b}}^{n_b}] \right] \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Les matrices masse élémentaires  $[M_{c_{v_b,U_d}}^e]$ ,  $[M_{c_{w_b,U_d}}^e]$ ,  $[M_{c_{v_b,V_d}}^e]$ ,  $[M_{c_{w_b,V_d}}^e]$  de couplage entre le mouvement de l'ailette et l'arbre sont données par :

$$\begin{cases} [M_{c_{v_b,U_d}}^e] = -\sin(\vartheta_i)\cos(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}] dy_b dz_b dx_b \\ [M_{c_{w_b,U_d}}^e] = \sin(\vartheta_i)\sin(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}] dy_b dz_b dx_b \\ [M_{c_{v_b,V_d}}^e] = \cos(\vartheta_i)\cos(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}] dy_b dz_b dx_b \\ [M_{c_{w_b,V_d}}^e] = -\cos(\vartheta_i)\sin(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}] dy_b dz_b dx_b \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Les matrices masse de couplage  $[M_{c_{v_b,U_d}}^i]$ ,  $[M_{c_{w_b,U_d}}^i]$ ,  $[M_{c_{v_b,V_d}}^i]$ ,  $[M_{c_{w_b,V_d}}^i]$  de la  $i^{\text{ème}}$  ailette, sont déterminées par l'assemblage des matrices élémentaires  $[M_{c_{v_b,U_d}}^e]$ ,  $[M_{c_{w_b,U_d}}^e]$ ,  $[M_{c_{v_b,V_d}}^e]$ ,  $[M_{c_{w_b,V_d}}^e]$ .

Pour un groupe de  $n_b$  ailettes, Les matrices de couplage sont données par :

$$\begin{cases} [M_{c_{v_b}, U_d}] = \left[ [M_{c_{v_b}, U_d}^1], [M_{c_{v_b}, U_d}^2], \dots, [M_{c_{v_b}, U_d}^i] \dots [M_{c_{v_b}, U_d}^{n_b}] \right]^t \\ [M_{c_{w_b}, U_d}] = \left[ [M_{c_{w_b}, U_d}^1], [M_{c_{w_b}, U_d}^2], \dots, [M_{c_{w_b}, U_d}^i] \dots [M_{c_{w_b}, U_d}^{n_b}] \right]^t \\ [M_{c_{v_b}, V_d}] = \left[ [M_{c_{v_b}, V_d}^1], [M_{c_{v_b}, V_d}^2], \dots, [M_{c_{v_b}, V_d}^i] \dots [M_{c_{v_b}, V_d}^{n_b}] \right]^t \\ [M_{c_{w_b}, V_d}] = \left[ [M_{c_{w_b}, V_d}^1], [M_{c_{w_b}, V_d}^2], \dots, [M_{c_{w_b}, V_d}^i] \dots [M_{c_{w_b}, V_d}^{n_b}] \right]^t \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Les matrices gyroscopique élémentaires  $[G_{c_{v_b}, U_d}^e], [G_{c_{w_b}, U_d}^e], [G_{c_{v_b}, V_d}^e], [G_{c_{w_b}, V_d}^e]$  de couplage entre le mouvement de rotation de l'ailette et l'arbre sont données par :

$$\begin{cases} [G_{c_{v_b}, U_d}^e] = -\Omega \cos(\vartheta_i) \cos(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}] dy_b dz_b dx_b \\ [G_{c_{w_b}, U_d}^e] = -\Omega \cos(\vartheta_i) \sin(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}] dy_b dz_b dx_b \\ [G_{c_{v_b}, V_d}^e] = -\Omega \sin(\vartheta_i) \cos(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}] dy_b dz_b dx_b \\ [G_{c_{w_b}, V_d}^e] = \Omega \sin(\vartheta_i) \sin(\beta) \int_0^{l_b} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}] dy_b dz_b dx_b \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Les matrices gyroscopique de couplage  $[G_{c_{v_b}, U_d}^i], [G_{c_{w_b}, U_d}^i], [G_{c_{v_b}, V_d}^i], [G_{c_{w_b}, V_d}^i]$  de la  $i^{\text{ème}}$  ailette, sont déterminées par l'assemblage des matrices élémentaires  $[G_{c_{v_b}, U_d}^e], [G_{c_{w_b}, U_d}^e], [G_{c_{v_b}, V_d}^e], [G_{c_{w_b}, V_d}^e]$

Pour un groupe de  $n_b$  ailettes, Les matrices de couplage sont données par:

$$\begin{cases} [G_{c_{v_b}, U_d}] = \left[ [G_{c_{v_b}, U_d}^1], [G_{c_{v_b}, U_d}^2], \dots, [G_{c_{v_b}, U_d}^i] \dots [G_{c_{v_b}, U_d}^{n_b}] \right]^t \\ [G_{c_{w_b}, U_d}] = \left[ [G_{c_{w_b}, U_d}^1], [G_{c_{w_b}, U_d}^2], \dots, [G_{c_{w_b}, U_d}^i] \dots [G_{c_{w_b}, U_d}^{n_b}] \right]^t \\ [G_{c_{v_b}, V_d}] = \left[ [G_{c_{v_b}, V_d}^1], [G_{c_{v_b}, V_d}^2], \dots, [G_{c_{v_b}, V_d}^i] \dots [G_{c_{v_b}, V_d}^{n_b}] \right]^t \\ [G_{c_{w_b}, V_d}] = \left[ [G_{c_{w_b}, V_d}^1], [G_{c_{w_b}, V_d}^2], \dots, [G_{c_{w_b}, V_d}^i] \dots [G_{c_{w_b}, V_d}^{n_b}] \right]^t \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Les matrices de rigidité élémentaires  $[K_{b_{v_b}}^e]$ ,  $[K_{b_{w_b}}^e]$ ,  $[K_{b_{v_b}}^e]$ ,  $[K_{b_{w,v_b}}^e]$  d'un seul élément de l'ailette sont données par :

$$\begin{aligned}
[K_{b_{v_b}}^e] = & \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} E_b(y_b, z_b) y_b^2 [N_{v_b}''']^t [N_{v_b}'''] dy_b dz_b dx_b \\
& + \frac{1}{2} \Omega^2 \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} (l_b^2 + 2R_d l_b - 2R_d x_b \\
& - x_b^2) \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}']^t [N_{v_b}'] dy_b dz_b dx_b \quad (III.18) \\
& - \Omega^2 \cos^2(\beta) \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}]^t [N_{v_b}] dy_b dz_b dx_b \\
& - \Omega^2 \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) y_b^2 [N_{v_b}']^t [N_{v_b}'] dy_b dz_b dx_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{b_{w_b}}^e] = & \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} E_b(y_b, z_b) z_b^2 [N_{w_b}''']^t [N_{w_b}'''] dy_b dz_b dx_b \\
& + \frac{1}{2} \Omega^2 \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} h (l_b^2 + 2R_d l_b - 2R_d x_b \\
& - x_b^2) \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}']^t [N_{w_b}'] dy_b dz_b dx_b \quad (III.19) \\
& - \Omega^2 \cos^2(\beta) \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}]^t [N_{w_b}] dy_b dz_b dx_b \\
& - \Omega^2 \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) z_b^2 [N_{w_b}']^t [N_{w_b}'] dy_b dz_b dx_b
\end{aligned}$$

$$[K_{b_{v,w_b}}^e] = \sin(\beta) \cos(\beta) \Omega^2 \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{w_b}]^t [N_{v_b}] dy_b dz_b dx_b \quad (III.20)$$

$$[K_{b_{w,v_b}}^e] = \sin(\beta) \cos(\beta) \Omega^2 \int_0^{l_{be}} \int_{-(b/2)}^{(b/2)} \int_{-(h/2)}^{(h/2)} \rho_b(y_b, z_b) [N_{v_b}]^t [N_{w_b}] dy_b dz_b dx_b \quad (III.21)$$

Les matrices rigidité  $[K_{b_{v_b}}^i]$ ,  $[K_{b_{w_b}}^i]$ ,  $[K_{b_{v,w_b}}^i]$ ,  $[K_{b_{w,v_b}}^i]$  de la  $i^{ème}$  ailette, sont déterminées par l'assemblage des matrices élémentaires  $[K_{b_{v_b}}^e]$ ,  $[K_{b_{w_b}}^e]$ ,  $[K_{b_{v,w_b}}^e]$ ,  $[K_{b_{w,v_b}}^e]$ .

Pour un groupe de  $n_b$  ailettes, Les matrices masse globale  $[K_{bg}]$  est donnée par:

$$[K_{bg}] = \begin{bmatrix} [K_{bv_b}] & [K_{bv,w_b}] \\ [K_{bw,v_b}] & [K_{bw_b}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où:

$$\begin{cases} [K_{bv_b}] = \text{diag} \left[ [K_{bv_b}^1] [K_{bv_b}^2] \dots [K_{bv_b}^i] \dots [K_{bv_b}^{n_b}] \right] \\ [K_{bw_b}] = \text{diag} \left[ [K_{bw_b}^1] [K_{bw_b}^2] \dots [K_{bw_b}^i] \dots [K_{bw_b}^{n_b}] \right] \\ [K_{bv,w_b}] = \text{diag} \left[ [K_{bv,w_b}^1] [K_{bv,w_b}^2] \dots [K_{bv,w_b}^i] \dots [K_{bv,w_b}^{n_b}] \right] \\ [K_{bw,v_b}] = \text{diag} \left[ [K_{bw,v_b}^1] [K_{bw,v_b}^2] \dots [K_{bw,v_b}^i] \dots [K_{bw,v_b}^{n_b}] \right] \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

### 2.2.2. Matrices de l'arbre

L'application de l'équation de Lagrange sur les équations des énergies cinétiques et potentielles d'un élément de longueur  $L_{se}$  de l'arbre permet de déterminer les matrices masse, gyroscopique et de rigidité de l'arbre.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{shaft}}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial T_{shaft}}{\partial q_b} + \frac{\partial V_{shaft}}{\partial q_b} \\ = ([M_{SU}^e] \{\ddot{q}_{U_t}\} + [M_{SV}^e] \{\ddot{q}_{V_t}\}) + ([G_{SU,V}^e] \{\dot{q}_{U_t}\} + [G_{SV,U}^e] \{\dot{q}_{V_t}\}) \\ + ([K_{SU}^e] \{q_{U_t}\} + [K_{SV}^e] \{q_{V_t}\}) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Les matrices masse élémentaires  $[M_{SU}^e], [M_{SV}^e]$  d'un élément de l'arbre sont données par :

$$[M_{SU}^e] = I_m \int_0^{L_{se}} [N_{U_t}]^t [N_{U_t}] dz + I_p \int_0^{L_{se}} [N_{U_t}']^t [N_{U_t}'] dz \quad (\text{III.25})$$

$$[M_{SV}^e] = I_m \int_0^{L_{se}} [N_{V_t}]^t [N_{V_t}] dz + I_p \int_0^{L_{se}} [N_{V_t}']^t [N_{V_t}'] dz \quad (\text{III.26})$$

Les matrices  $[M_{sU}]$  et  $[M_{sV}]$  sont déterminées par l'assemblage des matrices élémentaires  $[M_{sU}^e]$  et  $[M_{sV}^e]$ .

Pour  $N_s$  éléments de l'arbre, la matrice masse globale est donnée par:

$$[M_{sg}] = \begin{bmatrix} [M_{sU}] & 0 \\ 0 & [M_{sV}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Les matrices de rigidité élémentaires  $[K_{sU}^e], [K_{sV}^e]$  d'un élément de l'arbre sont données par :

$$[K_{sU}^e] = \int_0^{L_{se}} \int_{Ri}^{Ro} \pi E_s(r) r^3 [N_{U_t}']^t [N_{U_t}'] dr dz \quad (\text{III.28})$$

$$[K_{sV}^e] = \int_0^{L_{se}} \int_{Ri}^{Ro} \pi E_s(r) r^3 [N_{V_t}']^t [N_{V_t}'] dr dz \quad (\text{III.29})$$

Les matrices  $[K_{sU}]$  et  $[K_{sV}]$  sont déterminées par l'assemblage des matrices élémentaires  $[K_{sU}^e]$  et  $[K_{sV}^e]$ .

Pour  $N_s$  éléments de l'arbre, la matrice de rigidité globale  $[K_{sg}]$  est donnée par:

$$[K_{sg}] = \begin{bmatrix} [K_{sU}] & 0 \\ 0 & [K_{sV}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Les matrices gyroscopique élémentaires  $[G_{sU}^e], [G_{sV}^e]$  d'un élément de l'arbre sont données par :

$$[G_{sU,V}^e] = 2\Omega I_p \int_0^{L_{se}} [N_{V_t}']^t [N_{U_t}'] dz \quad (\text{III.31})$$

$$[G_{sV,U}^e] = -2\Omega I_p \int_0^{L_{se}} [N_{U_t}']^t [N_{V_t}'] dz \quad (\text{III.32})$$

Les matrices  $[G_{sU,V}]$  et  $[G_{sV,U}]$  sont déterminées par l'assemblage des matrices élémentaires  $[G_{sU,V}^e]$  et  $[G_{sV,U}^e]$ .

Pour  $N_s$  éléments de l'arbre, la matrice de rigidité globale  $[G_{sg}]$  est donnée par:

$$[G_{sg}] = \begin{bmatrix} 0 & [G_{sU,V}] \\ [G_{sV,U}] & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$



### 2.2.3. Matrices de disque

L'application de l'équation de Lagrange sur l'équation de l'énergie cinétique de disque permet de déterminer la matrice masse et gyroscopique.

Les matrices  $[M_{b-d_U}]$  et  $[M_{b-d_V}]$  représentent la masse du disque en ajoutant la masse du groupe d'ailettes.

$$[M_{b-d_U}] = \begin{bmatrix} M_d + n_b \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) dA_b & 0 \\ 0 & I_{dx} \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

$$[M_{b-d_V}] = \begin{bmatrix} M_d + n_b \int_{A_b} \rho_b(y_b, z_b) dA_b & 0 \\ 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

Où la matrice masse globale de disque est donnée par :

$$[M_{b-d}] = \begin{bmatrix} [M_{b-d_U}] & 0 \\ 0 & [M_{b-d_V}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

La matrice gyroscopique globale de disque est donnée par :

$$[G_{dg}] = \begin{bmatrix} 0 & [G_{d_{U,V}}] \\ [G_{d_{V,U}}] & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Où:

$$[G_{d_{U,V}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega I_{dy} \end{bmatrix}, [G_{d_{V,U}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Omega I_{dy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

### 2.2.4. Matrices des paliers

La matrice raideur des paliers  $[K_p]$  est donnée par :

$$[K_p] = \begin{bmatrix} [K_{XX}] & 0 \\ 0 & [K_{YY}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Où :

$$[K_{XX}] = \begin{bmatrix} K_{XX} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [K_{YY}] = \begin{bmatrix} K_{YY} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

La matrice d'amortissement des paliers  $[C_p]$  est donnée par :

$$[C_p] = \begin{bmatrix} [C_{XX}] & 0 \\ 0 & [C_{YY}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

Où:

$$[C_{XX}] = \begin{bmatrix} C_{XX} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [C_{YY}] = \begin{bmatrix} C_{YY} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

## 3. Équation globale du mouvement

L'assemblage de ces matrices globales des différents composants du système étudié conduit aux matrices globales de l'équation globale du mouvement donnée comme suit :

$$[M_g]\{\ddot{q}\} + [C_g]\{\dot{q}\} + [K_g]\{q\} = 0 \quad (\text{III.43})$$

Où  $[M_g]$ ,  $[K_g]$  et  $[C_g]$  sont respectivement la matrice masse, rigidité et d'amortissement du système rotor-ailette. Ces matrices sont représentées dans les figures III.3, III.4 et III.5

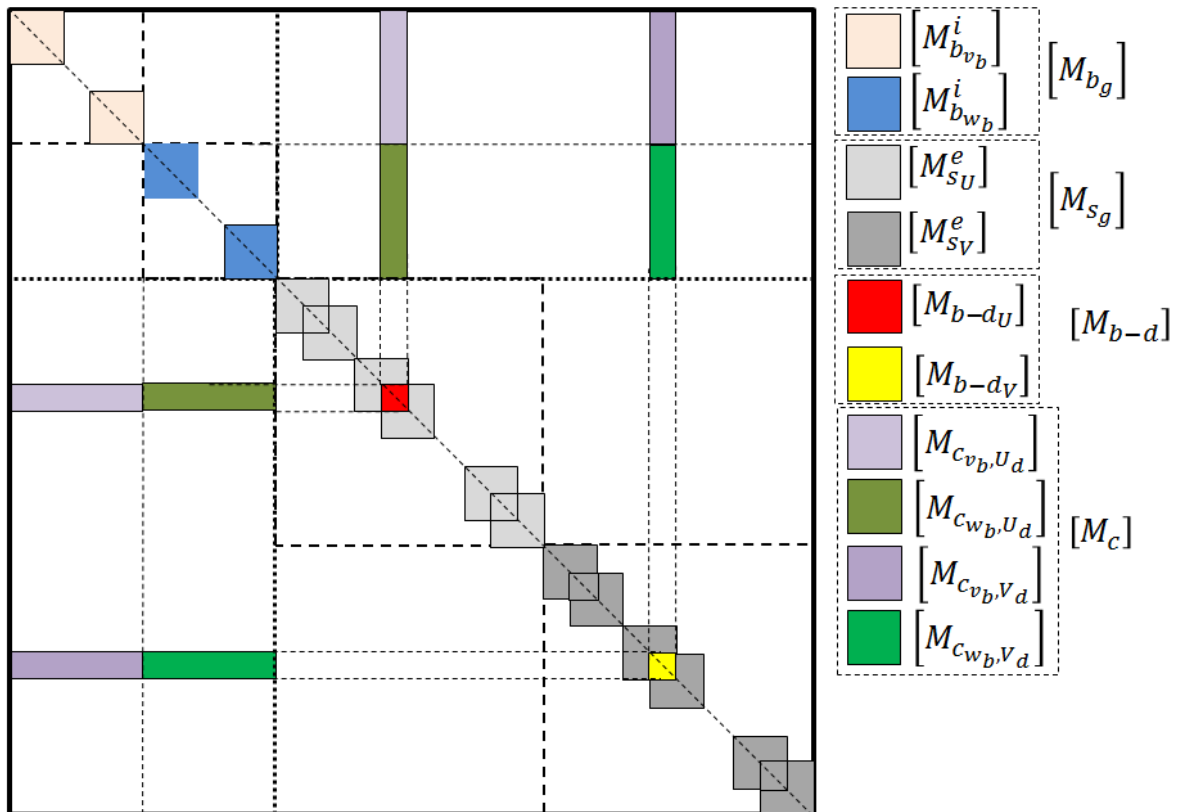


Fig. III.3 Matrice masse globale d'un système rotor aubagé.

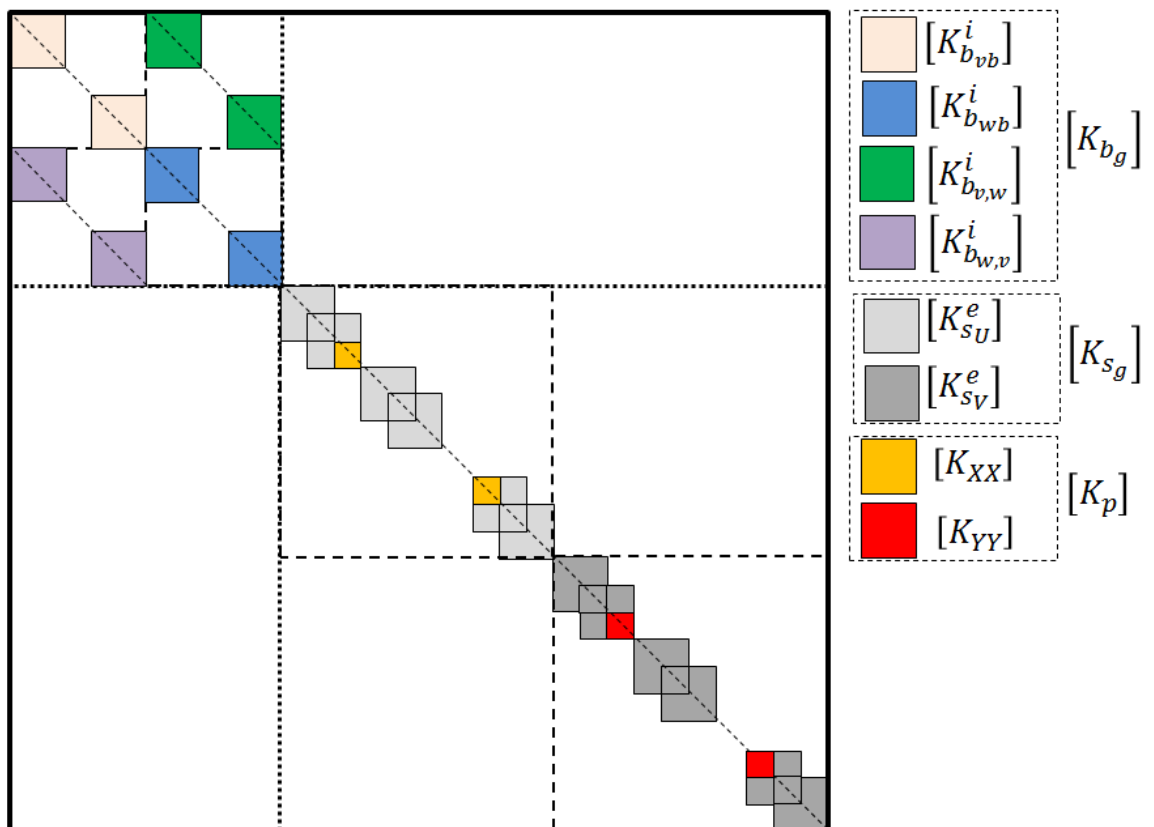


Fig. III.3 Matrice de rigidité globale d'un système rotor aubagé.

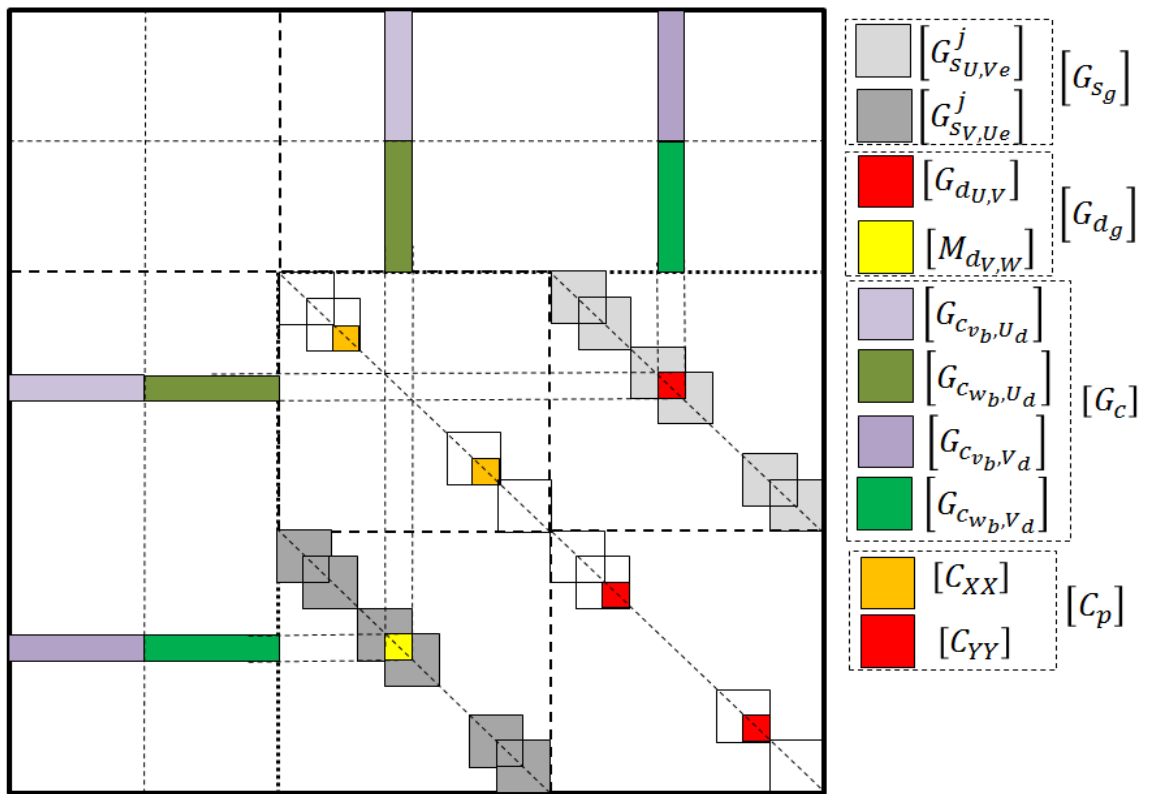


Fig. III.5 Matrice gyroscopique globale d'un système rotor aubagé.

Les fréquences propres et critiques de notre système sont obtenues à partir des valeurs propres de la matrice  $S'$  donnée par :

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M_g]^{-1}[K_g] & -[M_g]^{-1}[C_g] \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

# CHAPITRE IV

## Résultats et Interprétations

### Table des matières

1. Introduction.....	61
2. Validation.....	61
3. Etude de convergence .....	68
4. Etude paramétrique .....	69
4.1. Analyse de l'effet du nombre d'ailettes ( $n_b$ ) .....	70
4.2. Analyse de l'effet de l'angle de l'ailette ( $\beta$ ).....	73
4.3. Analyse de l'effet de la vitesse de rotation ( $\Omega$ ).....	76
4.4. Analyse de l'Influence des indices de puissance .....	79
4.5. Analyse de l'effet des conditions aux limites .....	82
4.6. Analyse du type de matériau céramique.....	84

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, après la validation de nos résultats trouvées à l'aide d'un programme de calcul développé en MATLAB pour plusieurs cas (rotor aubagé en matériau isotrope, arbre en matériau fonctionnellement gradué, poutre encastré-libre en matériau fonctionnellement gradué) avec des résultats des travaux antérieures, nous étudions le comportement dynamique d'un rotor-aubagé en matériau isotrope et en matériau fonctionnellement gradué.

L'analyse fréquentielle est adoptée dans cette étude, en étudiant l'influence du ; nombre d'ailettes, angle d'ailette, type de matériaux, indice de puissance, conditions aux limites ; sur les fréquences propres et critiques du système étudiées, ces derniers sont déterminés à partir du diagramme de Campbell.

## 2. Validation

Afin de valider le modèle EF développé pour le système rotor-ailettes en matériau fonctionnellement gradué et compte tenu du manque d'études sur ce sujet, nous avons choisi de diviser la validation en trois cas.

- Dans un premier temps, une validation est effectuée en comparant les fréquences propres d'un système rotor-ailette en matériau isotrope (purement métallique).
- Dans le second cas, la validation des fréquences propres d'un arbre en matériau fonctionnellement gradué.
- Dans le troisième cas, Les fréquences naturelles (Flap-wise, Chord-wise) d'une poutre encastré-libre en matériau fonctionnellement gradué sont vérifiées.

### Cas 1 : Validation des fréquences propres d'un système rotor-ailette en matériau isotrope (purement métallique)

Dans ce cas, nous comparons les fréquences naturelles obtenues par notre code de calcul pour un système rotor-ailette en matériau métallique avec une étude précédente présentée par Ma et al. (2016). Pour ce cas, on prend  $k = n = \infty$  de l'équation (II.4) et  $s = \infty$  de l'équation (II.27), ce qui signifie que le fraction volumique de matériau céramique de l'ailette  $V_{bc}$  et de l'arbre  $V_{sc}$  tendent vers zéro ( $V_{bc}(y_b, z_b) = 0$ ,  $V_{sc}(r) = 0$ ) ceci désigne que l'ailette et l'arbre sont 100% en matériaux métalliques ( $V_{bm}(y_b, z_b) = 1$ ,  $V_{sm}(r) = 1$ ) et ( $P_b = P_{bm}$ ,  $P_s(r) = P_{sm}$ ).

Le modèle éléments finis comporte 8 ailettes ( $n_b=8$ ) uniformément réparties sur le disque, chaque ailette est discrétisée en 4 éléments ( $N_b=4$ ). L'arbre est discrétisé en 74 éléments ( $N_s=74$ ). Le disque est situé au niveau de nœud 21 à droite de l'élément 20. Les paliers gauches sont situés au nœud 6 à droite de l'élément 5 (50 mm de l'extrémité gauche de l'arbre) et les paliers droits sont situés au nœud 68 à droite de l'élément 67 (70 mm de l'extrémité droite de l'arbre).

Le modèle EF du système rotor-ailette est illustré dans la figure IV.1; et les paramètres géométriques et matériels de ce modèle sont donnés dans le tableau IV.1.

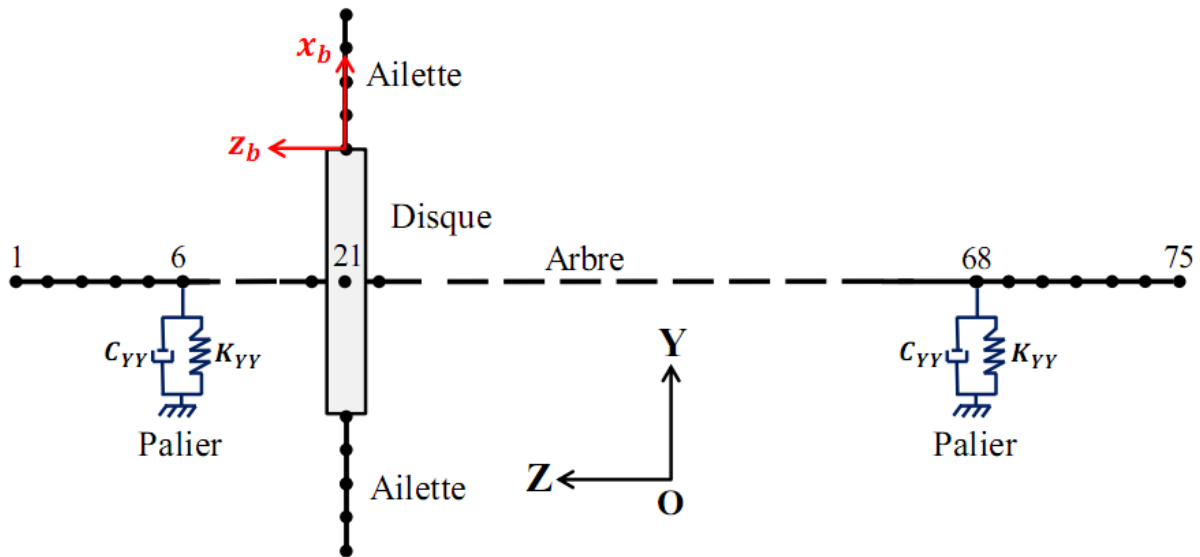


Fig. IV.1. Modèle EF du système rotor-ailette en matériau métallique.

Composants	Paramètres géométriques	Paramètres matériels
Arbre	Longueur : $L_s=741\text{mm}$ Rayon extérieur : $R_o=15\text{ mm}$ Rayon intérieur : $R_i=0\text{ mm}$	Densité: $\rho_{sm}=7800\text{ kg.m}^{-3}$ Module de Young: $E_{sm}=200\text{ Gpa}$ Coefficient de Poisson : $\nu=0.3$
Disque	Rayon : $R_d= 100\text{ mm}$ Épaisseur : $h_d= 58\text{ mm}$	Densité $\rho_d=7800\text{ kg.m}^{-3}$
Ailette	Longueur : $l_b= 82\text{ mm}$ Épaisseur : $h= 3\text{ mm}$ Largeur : $b= 44\text{ mm}$	Densité: $\rho_{bm}=7800\text{ kg.m}^{-3}$ Module de Young: $E_{bm}=200\text{ Gpa}$ Coefficient de Poisson : $\nu=0.3$
Paliers	Raideurs : $K_{XX}=K_{YY}=1.5\times 10^7\text{ N.m}^{-1}$ Amortissement : $C_{XX}=C_{YY}=10^3\text{ N.s. m}^{-1}$	

Tableau IV.1: Paramètres géométriques et matériels du système rotor-ailettes en matériau métallique.

Le tableau IV.2 présente une comparaison entre les fréquences propres à l'état stationnaire ( $\Omega=0$  tr/min) obtenues des trois premiers modes du système rotor-ailette et la première fréquence propre (Flap-wise) des ailettes trouvées par notre code de calcul (Etude actuelle) comparé avec différents résultats trouvés par Ma et al. (2016). Les résultats obtenus sont en excellent accord avec les résultats de Ma et al. (2016).

Structure	Mode	Etude actuelle	Hui Ma et al (2016)			$\varepsilon_1$ (%)	$\varepsilon_2$ (%)	$\varepsilon_3$ (%)
			Modèle EF	Modèle analytique	Modèle Proposé	(étude actuelle/ Modèle EF)	(étude actuelle/ Modèle analytique)	(étude actuelle / Modèle Proposé)
Rotor-ailette	Mode 1	61.09	61.09	61.25	61.08	0	0.26	0.01
	Mode 2	272.83	258.91	269.30	259.18	5.37	1.30	5.26
	Mode 3	463.24	443.30	453.95	444.78	4.49	2.04	4.15
Ailette (1-8)	Mode 1 (Flap-wise)	364.9	364.57	364.72	364.72	0.09	0.04	0.06
		364.9	364.57	364.72	364.72	0.09	0.04	0.06
		364.9	364.57	364.72	364.72	0.09	0.04	0.06
		364.9	364.57	364.72	364.72	0.09	0.04	0.06
		364.9	367.26	367.50	367.41	0.64	0.69	0.69
		367.65	367.26	367.50	367.41	0.10	0.04	0.09
		367.65	390.12	390.25	390.25	5.75	5.76	5.76

**Tableau IV.2:** Comparaison des fréquences propres d'un système rotor-ailettes en matériau métallique.

### Cas 2 : Validation des fréquences propres d'un arbre en matériau fonctionnellement gradué

Dans ce cas, on compare la fréquence propre à l'état stationnaire ( $\Omega=0$  tr/min) du premier mode d'un arbre en matériau fonctionnellement gradué avec des conditions aux limites appuis simples avec les résultats trouvés par Loy et al (1999). L'arbre est discrétisé en 20 éléments ( $N_s=20$ ), les propriétés des matériaux céramique et métallique de ce modèle sont présentées dans le tableau IV.3.

Propriétés matérielles	Acier inoxydable (S-S)	Nickel (Ni)
Module d'Young $E$ [Gpa]	207.788	205.098
Densité $\rho$ [Kg.m <sup>-3</sup> ]	8166	8900
Coefficient de Poisson $\nu$	0.317756	0.31

**Tableau IV.3 :** Propriétés physiques de l'arbre à T=300K.



Les résultats obtenus sont comparés avec pour 2 types de matériaux présentés dans le tableau IV.4 sous différents paramètres géométriques (longueur  $L_s$ , rayon moyen  $R = (R_o + R_i) / 2$ , épaisseur  $e$ ).

Type de FGM	Propriétés
<b>Type I</b>	L'arbre a de l'acier inoxydable (S-S) sur sa surface extérieure et du nickel (Ni) sur sa surface intérieure.
<b>Type II</b>	L'arbre a du nickel (Ni) sur sa surface extérieure et de l'acier inoxydable (S-S) sur sa surface intérieure.

**Tableau IV.4 :** Type de matériau de l'arbre.

D'après les tableaux IV.5 à IV.8, nous pouvons voir clairement que nos résultats sont en bon accord avec Loy et al (1999).

Type I	Indice de loi de puissance (s)								
	s=0 (Pure S-S)	s=0.5	s=0.7	s=1	s=2	s=5	s=15	s=30	s=∞ (Pure Ni)
<b>Etude actuelle</b>	14.007	13.772	13.718	13.658	13.547	13.437	13.370	13.351	13.330
<b>Loy et al (1999)</b>	13.548	13.321	13.269	13.211	13.103	12.998	12.993	12.914	12.894
<b>ε (%) (Etude actuelle / Loy et al (1999))</b>	3.38	3.38	3.83	4.23	3.38	3.37	2.90	3.38	3.38

**Tableau IV.5:** Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.002$ ,  $L/R = 20$ .

Type I	Indice de loi de puissance (s)								
	s=0 (Pure S-S)	s=0.5	s=0.7	s=1	s=2	s=5	s=15	s=30	s=∞ (Pure Ni)
<b>Etude actuelle</b>	14.011	13.779	13.726	13.666	13.554	13.444	13.375	13.355	13.334
<b>Loy et al (1999)</b>	13.572	13.345	13.293	13.235	13.127	13.021	13.956	12.937	12.917
<b>ε (%) (Etude actuelle / Loy et al (1999))</b>	3.23	3.25	3.25	3.25	3.25	3.24	4.16	3.23	3.22

**Tableau IV.6 :** Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.05$ ,  $L/R = 20$

Type II	Indice de loi de puissance (s)								
	s=0 (Pure Ni)	s=0.5	s=0.7	s=1	s=2	s=5	s=15	s=30	s=∞ (Pure S-S)
<b>Etude actuelle</b>	13.330	13.546	13.598	13.658	13.772	13.888	13.962	13.984	14.007
<b>Loy et al (1999)</b>	12.894	13.103	13.154	13.211	13.321	13.433	13.505	13.526	13.548
$\varepsilon$ (%) (Etude actuelle / Loy et al (1999))	3.38	3.38	3.37	3.38	3.38	3.38	3.38	3.38	3.38

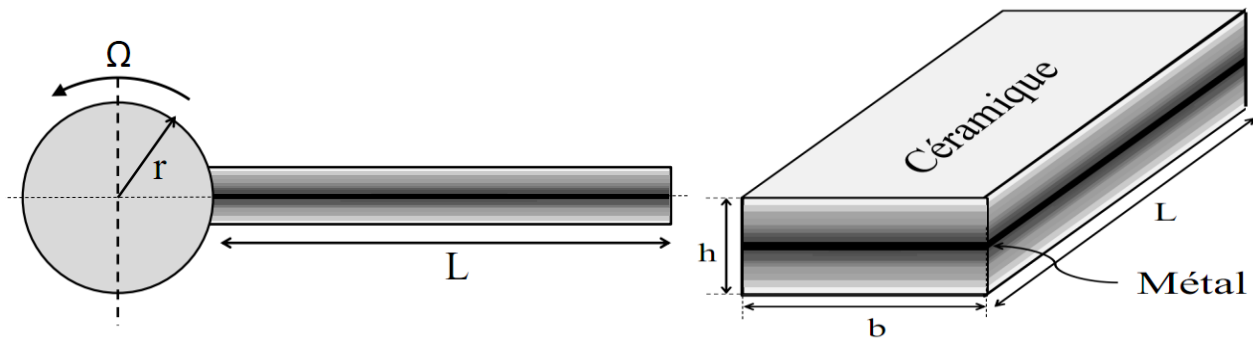
**Tableau IV.7** : Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.002$ ,  $L/R = 20$

Type II	Indice de loi de puissance (s)								
	s=0 (Pure Ni)	s=0.5	s=0.7	s=1	s=2	s=5	s=15	s=30	s=∞ (Pure S-S)
<b>Etude actuelle</b>	13.334	13.548	13.599	13.659	13.773	13.890	13.965	13.987	14.011
<b>Loy et al (1999)</b>	12.917	13.126	13.177	13.234	13.344	13.457	13.528	13.549	13.572
$\varepsilon$ (%) (Etude actuelle / Loy et al (1999))	3.22	3.21	3.20	3.21	3.21	3.21	3.23	3.23	3.23

**Tableau IV.8** : Comparaison de la fréquence de premier mode où  $e/R = 0.05$ ,  $L/R = 20$

### Case 3 : Validation des fréquences propres d'une poutre encasté-libre en matériau fonctionnellement gradué.

Une poutre encasté-libre (porte-à-faux) en matériau fonctionnellement graduée de dimensions (longueur  $l_b = 1000$  mm, largeur  $b = 20$  mm et épaisseur  $h = 10$  mm) a été considérée pour cette analyse. Les fréquences propres (Chord-wise, Flap-wise) sont comparées avec l'étude de Ramesh et Mohan Rao (2014), ils ont considérés qu'une poutre encasté-libre en matériau fonctionnellement gradué est fixé à un disque de rayon  $r$  et qui tourne avec une vitesse  $\Omega$ , la configuration et la dégradation des matériaux de la poutre étudiée sont représentés dans la figure IV.2. On remarque que les propriétés matérielles dans ce cas varient suivant l'épaisseur de la poutre, dans ce cas nous prenons  $k = \infty$  de l'équation (II.4) ce qui signifie que les propriétés du matériau ne varient que dans le sens de l'épaisseur.



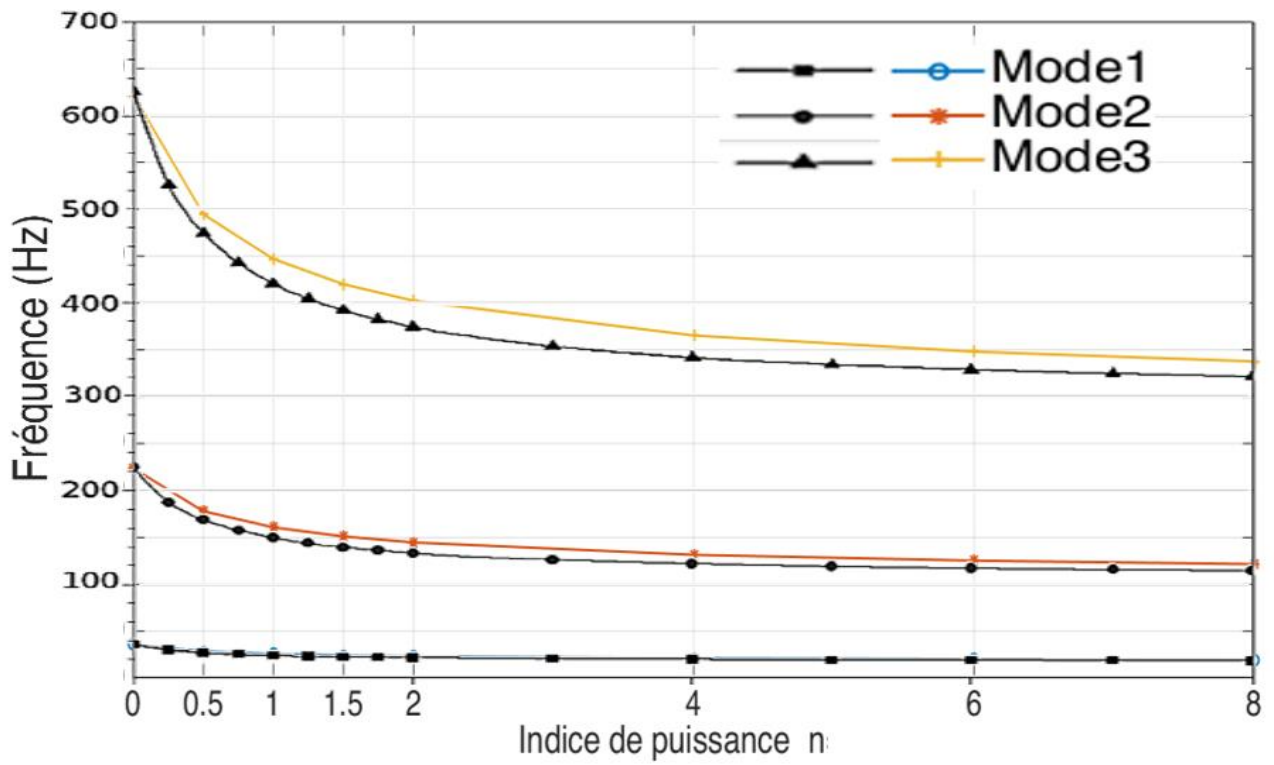
**Fig. IV.2.** Configuration et la dégradation des matériaux de la poutre encasté-libre étudiée.

Les propriétés des matériaux qui composent la poutre répertoriée dans le tableau IV.9.

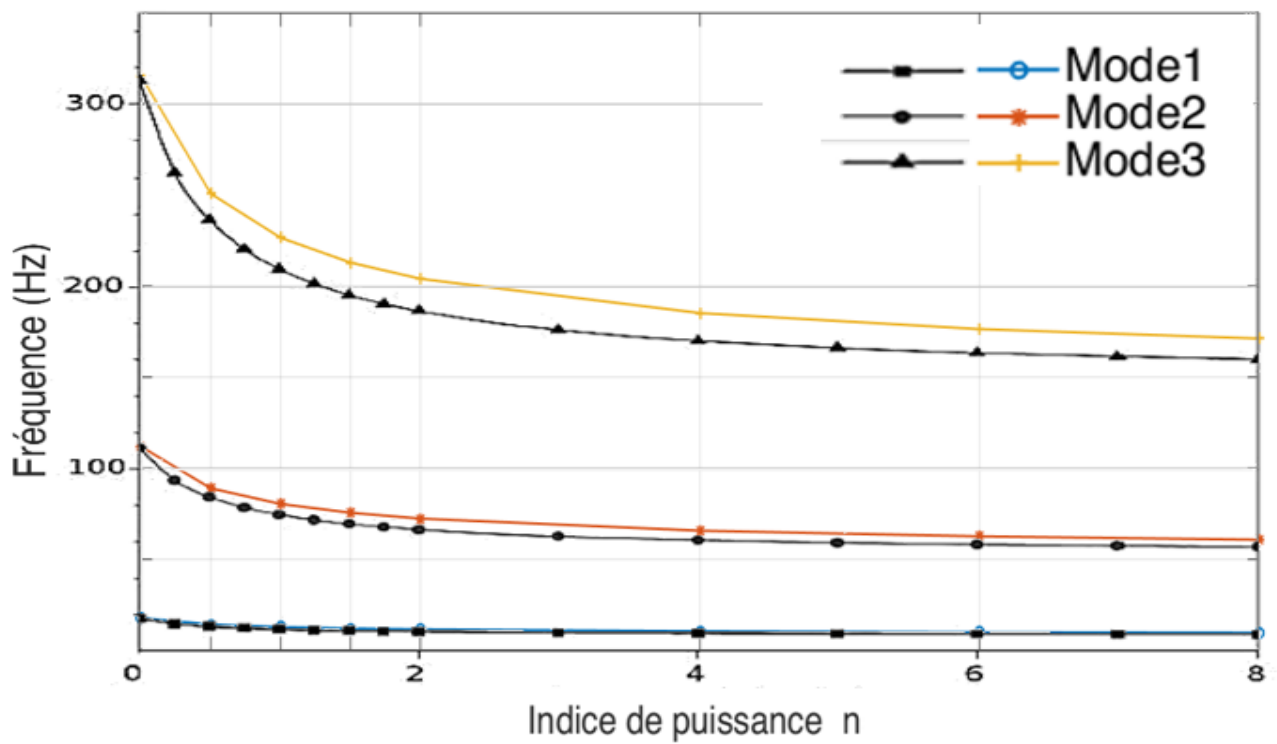
Propriétés matérielles	Acier	Alumine $\text{Al}_2\text{O}_3$
Module de Young $E$ [Gpa]	214	390
Densité $\rho$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	7800	3200

**Tableau IV.9 :** Propriétés matérielles de la poutre encasté-libre.

Figures IV.3 et IV.4 montrent respectivement la variation des trois premières fréquences propres (Chord-wise, Flap-wise) par rapport à l'indice de loi de puissance dans le cas où  $\Omega=0$  *tr/min*, ces figures montrent que nos résultats (en couleurs) sont conformes aux résultats de Ramesh et Mohan Rao (2014) (en noir).



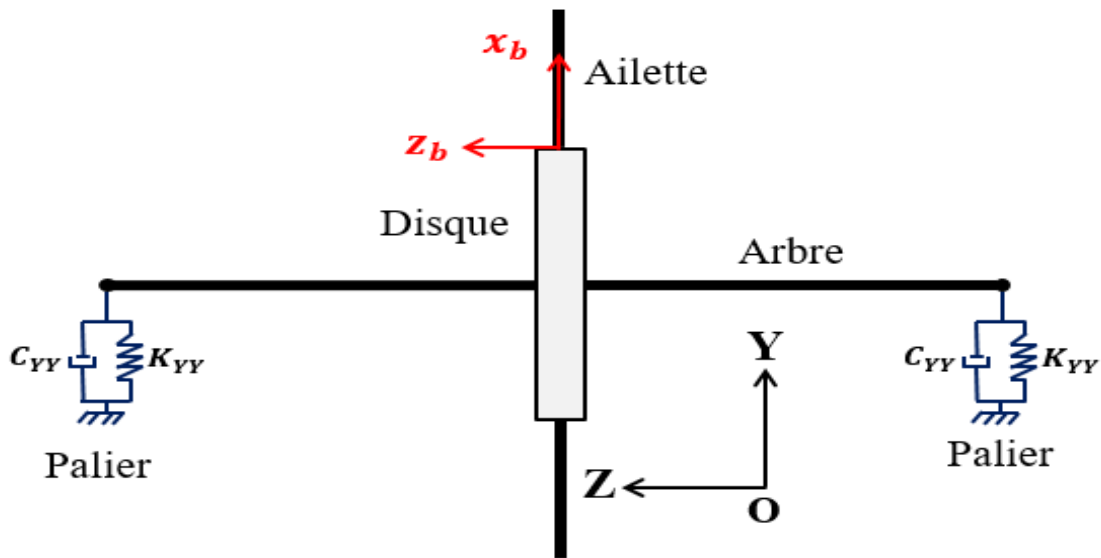
**Fig. IV.3.** Variation des trois premières fréquences (Chord-wise) en fonction de l'indice de puissance.



**Fig. IV.4.** Variation des trois premières fréquences (Flap-wise) en fonction de l'indice de puissance.

### 3. Etude de convergence

La convergence de la version classique  $h$  de la MEF est obtenue en augmentant le nombre des éléments de maillage ( $N$  et  $N_b$ ). Les caractéristiques du système étudié dans cette partie sont les mêmes étudiés par Ma et al. (2016) (Tableau IV.1) en prenant  $n_b=4$ . Dans cette étude le disque se trouve au milieu de l'arbre et les paliers sont situés aux extrémités. Les propriétés des matériaux du système rotor-ailette étudié sont présentés dans le tableau IV.9.



**Fig. IV.5.** Modèle du système rotor-ailette.

Le Tableau IV.10 représente la convergence des fréquences propres de trois premiers modes d'un système rotor-ailettes en matériaux fonctionnellement graduée ( $n=k=1$ ) ainsi que la première fréquence propre (Flap-wise et chord-wise) des ailettes à l'état stationnaire ( $\Omega=0$ ) où l'angle  $\beta=0$ . D'après les résultats de ce tableau, nous remarquons clairement la rapidité de convergence de la version classique de la méthode des éléments finis, par exemple ; le premier mode du système rotor-ailette converge après 4 éléments, le deuxième mode converge après 8 éléments et le troisième mode converge après 32 éléments, et pour les ailettes le premier mode converge après 4 éléments.

Structure	Mode (Hz)	Nombre d'éléments de l'arbre N						
		2	4	8	16	32	64	124
Rotor- Ailette	Mode 1	50.96	50.95	50.95	50.95	50.95	50.95	50.95
	Mode 2	336.41	335.22	335.16	335.16	335.16	335.16	335.16
	Mode 3	1009.6	924.97	919.47	919.13	919.11	919.11	919.11
	Mode 1	Nombre d'éléments de l'ailette N <sub>b</sub>						
		2	4	6	8	12	16	24
Ailette 1	(Flap-wise)	661.5	661.2	661.18	661.18	661.18	661.18	661.18
	(Chord-wise)	9262.6	9259.3	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1
Ailette 2	(Flap-wise)	662.7	662.4	662.39	662.39	662.38	662.38	662.38
	(Chord-wise)	9262.6	9259.3	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1
Ailette 3	(Flap-wise)	661.5	661.2	661.18	661.18	661.18	661.18	661.18
	(Chord-wise)	9262.6	9259.3	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1
Ailette 4	(Flap-wise)	662.7	662.4	662.39	662.39	662.38	662.38	662.38
	(Chord-wise)	9262.6	9259.3	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1	9259.1

**Tableau IV.10** : Variation des fréquences propres du système rotor-ailette en fonction du nombre des éléments N et N<sub>b</sub>.

#### 4. Etude paramétrique

Dans cette section, nous analysons l'influence de certains paramètres sur les fréquences propres du système rotor-ailette dans les deux cas de matériau métallique et fonctionnellement graduée, l'étude de ces deux cas est effectuée afin de démontrer l'avantage de l'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel par rapport aux matériaux métalliques.

Les paramètres considérés sont :

- Le nombre d'ailette ( $n_b$ ).
- Angle de l'ailette ( $\beta$ ).
- La vitesse de rotation ( $\Omega$ ).
- L'indice de loi de puissance ( $n, k, s$ ).
- Conditions aux limites.
- Type de matériau céramique.

Pour cette analyse, le modèle EF du système rotor-ailette étudié est présenté sur la figure. IV.1 et les paramètres géométriques sont donnés dans le tableau IV.1.

L'arbre et l'ailette fonctionnellement graduée, sont composés d'acier comme métal et d'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) comme céramique ; les propriétés de ces matériaux sont présentées dans le tableau IV.11.

Propriétés matérielles	Acier (Métal)	Alumine $\text{Al}_2\text{O}_3$ (Céramique)
Module de Young [Gpa]	$E_{sm} = E_{bm} = 200$	$E_{sc} = E_{bc} = 390$
Densité [ $\text{kg.m}^{-3}$ ]	$\rho_{sm} = \rho_{bm} = 7800$	$\rho_{sc} = \rho_{bc} = 3200$

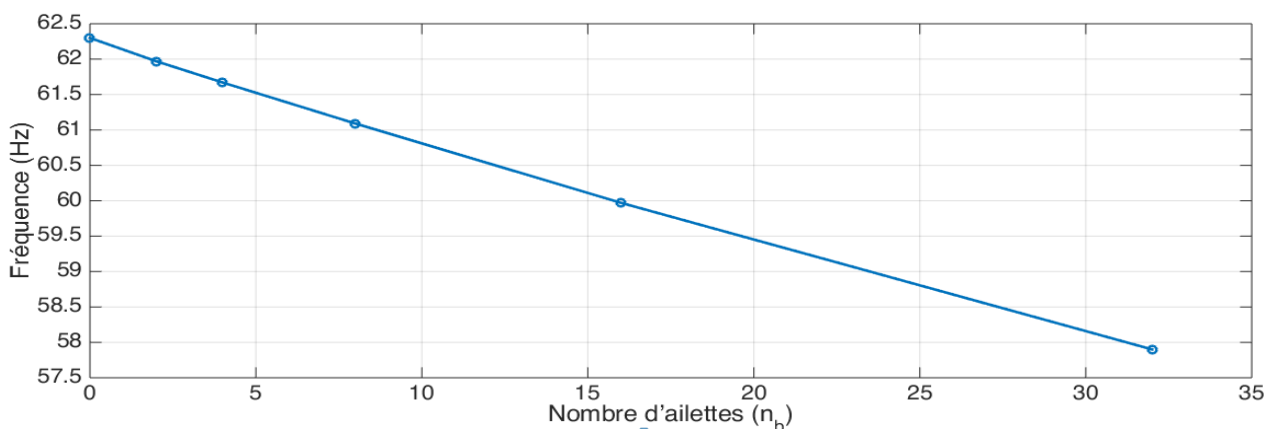
**Tableau IV.11** : Propriétés des matériaux du système rotor-ailette étudié.

#### 4.1. Analyse de l'effet du nombre d'ailettes ( $n_b$ )

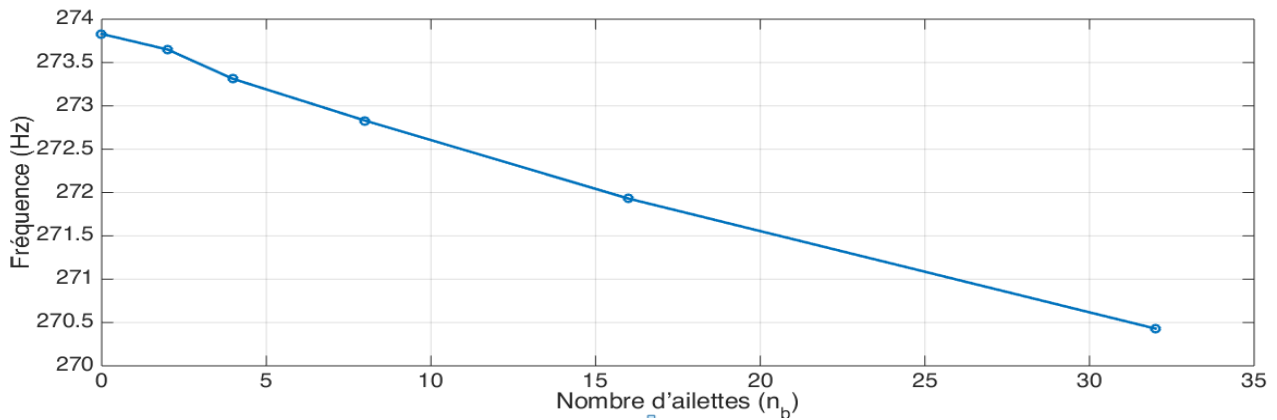
Dans cette analyse, nous étudions l'effet du nombre d'ailettes sur les fréquences propres du système rotor-ailette en matériau métallique et fonctionnellement gradué dans les cas où  $\Omega = 0$  tr/min. les résultats sont représentés dans les tableaux IV.12 et IV.13 et illustrés dans les figures IV.6 – IV.11.

Structure	Mode (Hz)	Nombre d'ailettes ( $n_b$ )					
		0	2	4	8	16	32
Rotor-Ailette	Mode 1	62.30	61.97	61.67	61.09	59.97	57.90
	Mode 2	273.83	273.65	273.31	272.83	271.93	270.43
	Mode 3	463.30	463.28	463.26	463.24	463.22	463.18

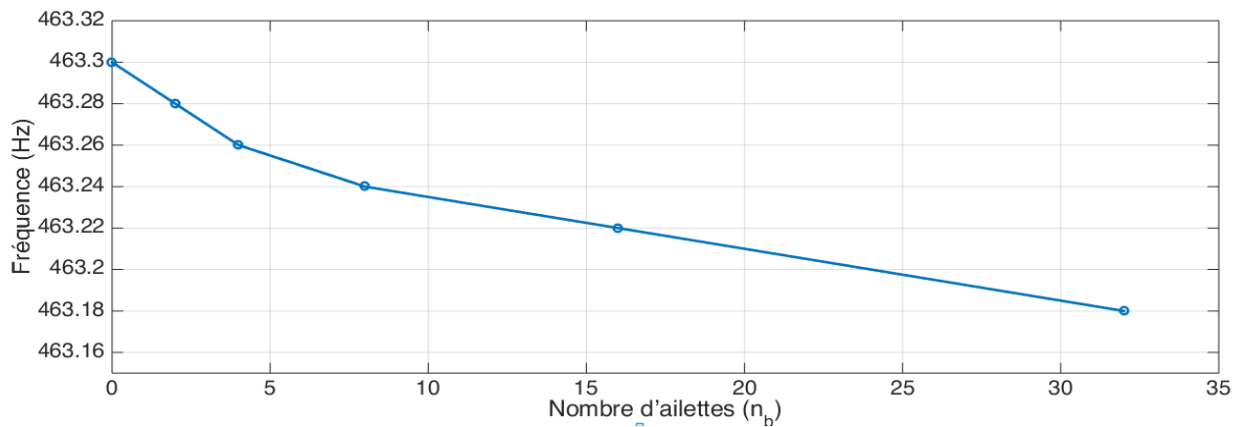
**Tableau IV.12** : Fréquences propres d'un système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.



**Fig. IV.6.** Variation du premier mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.



**Fig. IV.7.** Variation du deuxième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

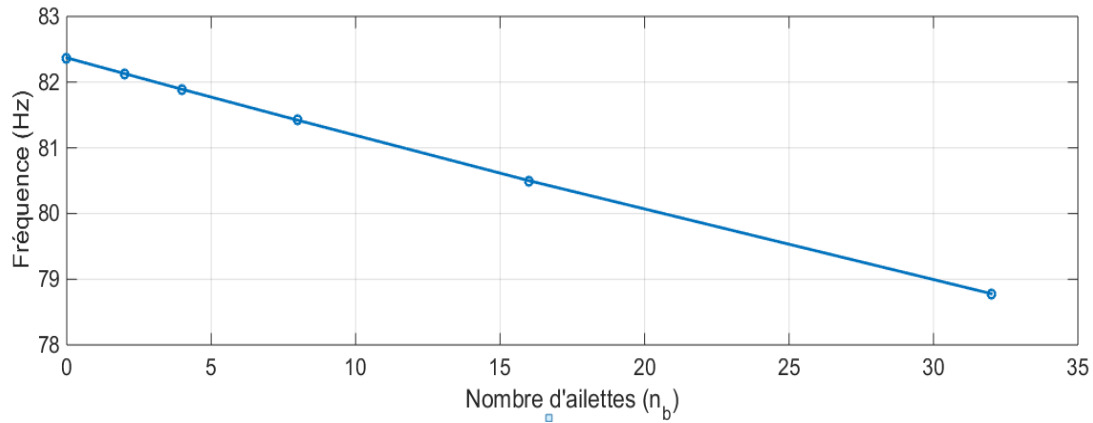


**Fig. IV.8.** Variation du troisième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

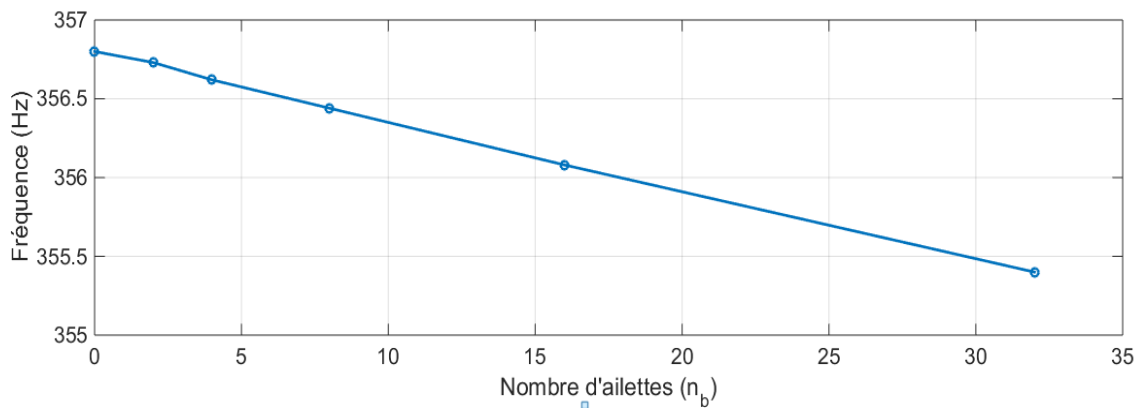
Structure	Mode (Hz)	Nombre d'ailettes ( $n_b$ )					
		0	2	4	8	16	32
Rotor-Ailette	Mode 1	82.37	82.13	81.89	81.42	80.5	78.78
	Mode 2	356.8	356.73	356.62	356.44	356.08	355.4
	Mode 3	681.93	681.98	681.98	681.98	681.98	681.98

**Tableau IV.13:** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

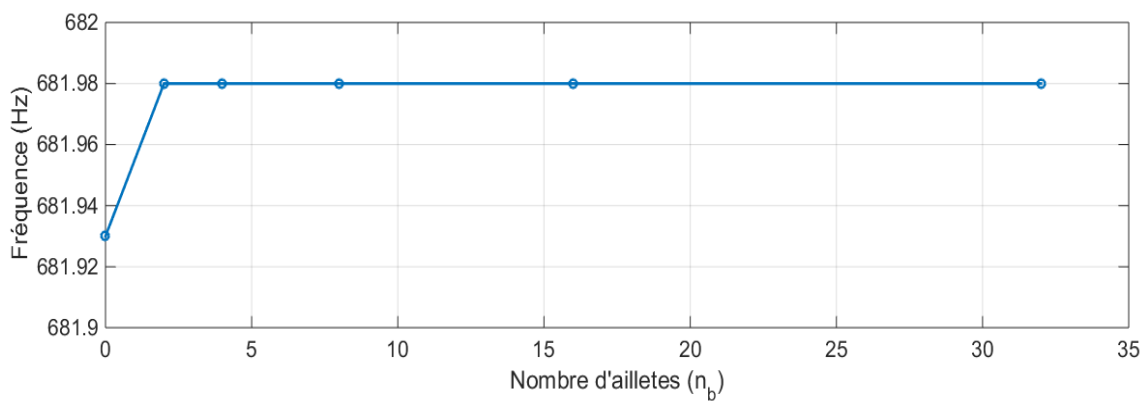




**Fig. IV.9.** Variation du premier mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.



**Fig. IV.10.** Variation du deuxième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.



**Fig. IV.11.** Variation du troisième mode en fonction du nombre d'ailettes où  $\Omega = 0$  tr/min.

Depuis les résultats trouvés, nous avons observé que les fréquences propres diminuent lorsque le nombre d'ailettes augmente en raison de l'augmentation de la masse du système, où la rigidité de système reste inchangée.

Nous avons remarqué que la variation du nombre d'ailettes a une grande influence sur les fréquences propres du système rotor-ailette en métal par rapport au système en FGM. par exemple, dans le cas du rotor-ailette métallique le taux de variation des fréquences propres lorsque  $n_b=32$  par rapport à un rotor sans ailettes ( $n_b=0$ ) est égal à 7% pour le premier mode, 1,24% pour le second et 0,017% pour le troisième mode, par contre pour le système rotor-ailette en FGM le taux de variation quand  $n_b=32$  par rapport à un rotor sans ailettes ( $n_b=0$ ) est égal à 4,3% pour le premier mode, 0,39% pour le second et 0.007% pour le troisième mode, c'est-à-dire que la masse des ailettes par rapport à la masse totale du système est moindre dans le cas des ailettes en FGM par rapport aux ailettes en métal.

#### 4.2. Analyse de l'effet de l'angle de l'ailette ( $\beta$ )

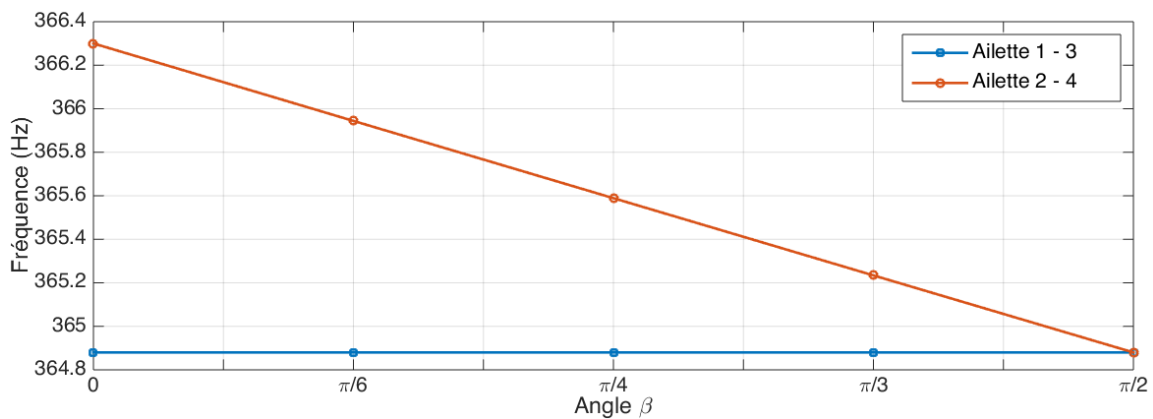
Dans cette analyse, nous étudions l'effet d'angle de l'ailette ( $\beta$ ) du sur les fréquences propres du système rotor-ailette en matériau métallique et fonctionnellement gradué dans les cas où  $\Omega = 0$  tr/min. Le nombre d'ailettes considéré est égal à 4 ( $n_b = 4$ ), les résultats sont représentés dans les tableaux IV.14 et IV.15.

Structure	Mode (Hz)		Angle de l'ailette ( $\beta$ )				
			$\beta = 0$	$\beta = \pi/6$	$\beta = \pi/4$	$\beta = \pi/3$	$\beta = \pi/2$
Rotor- Ailette	Mode 1		61.675	61.676	61.677	61.679	61.680
	Mode 2		273.319	273.354	273.390	273.426	273.462
	Mode 3		463.262	463.252	463.242	463.233	463.223
Ailette 1	Mode 1	Flap-wise	364.880	364.88	364.880	364.880	364.880
		Chord-wise	5075.47	5075.47	5075.47	5075.47	5075.47
Ailette2	Mode 1	Flap-wise	366.300	365.944	365.589	365.234	364.880
		Chord-wise	5075.47	5079.53	5083.59	5087.64	5091.68
Ailette3	Mode 1	Flap-wise	364.880	364.88	364.880	364.880	364.880
		Chord-wise	5075.47	5075.47	5075.47	5075.47	5075.47
Ailette4	Mode 1	Flap-wise	366.300	365.944	365.589	365.234	364.880
		Chord-wise	5075.47	5079.53	5083.59	5087.64	5091.68

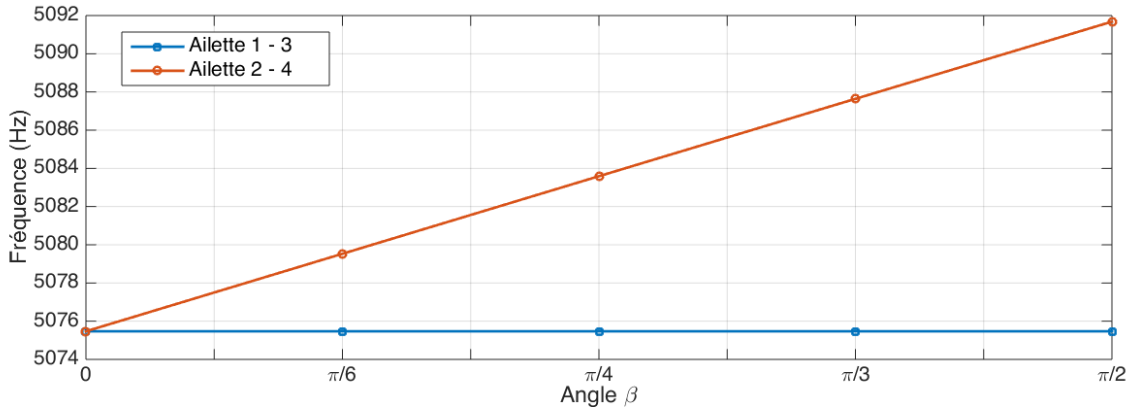
**Tableau IV.14:** Fréquences propres d'un système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

Structure	Mode (Hz)		Angle de l'ailette ( $\beta$ )				
			$\beta = 0$	$\beta = \pi/6$	$\beta = \pi/4$	$\beta = \pi/3$	$\beta = \pi/2$
Rotor-Ailette	Mode 1		81.899	81.9	81.9	81.9	81.9
	Mode 2		356.627	356.632	356.637	356.643	356.648
	Mode 3		681.963	681.919	681.925	681.890	681.888
Ailette 1	Mode 1	Flap-wise	661.202	661.202	661.202	661.202	661.202
		Chord-wise	9259.34	9259.34	9259.34	9259.34	9259.34
Ailette 2	Mode 1	Flap-wise	662.464	662.148	661.832	661.517	661.202
		Chord-wise	9259.34	9263.58	9267.81	9272.03	92762.6
Ailette 3	Mode 1	Flap-wise	661.202	661.202	661.202	661.202	661.202
		Chord-wise	9259.34	9259.34	9259.34	9259.34	9259.34
Ailette 4	Mode 1	Flap-wise	662.464	662.148	661.832	661.517	661.202
		Chord-wise	9259.34	9263.58	9267.81	9272.03	92762.6

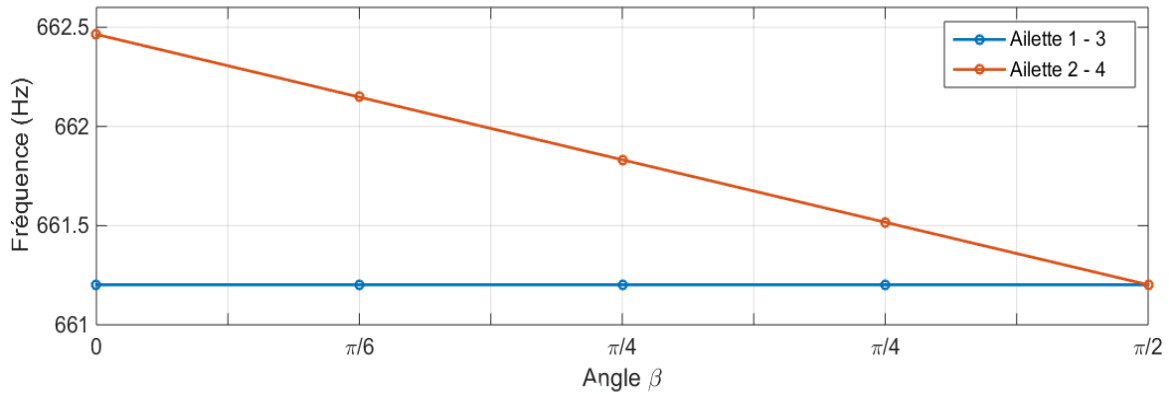
**Tableau IV.15:** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.



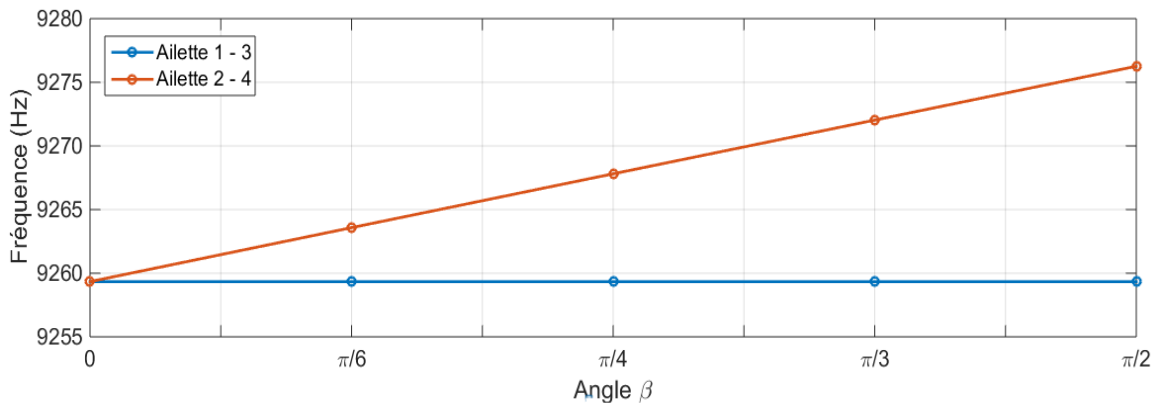
**Fig. IV.12.** Variation du premier mode d'ailette (Flap-wise) en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.



**Fig. IV.13** Variation du premier mode d'ailette (Chord-wise) en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.



**Fig. IV.14.** Variation du premier mode d'ailette (Flap-wise) en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.



**Fig. IV.15.** Variation du premier mode d'ailette (Chord-wise) en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction de l'angle de l'ailette  $\beta$  où  $\Omega = 0$  tr/min.

D'après les résultats trouvés, nous remarquons une petite variation presque négligeable dans les fréquences propres du système rotor-ailette pour les deux modèles étudiés, pour les fréquences des

ailettes, nous observons que les fréquences propres des ailettes 1 et 3 (ailette horizontale) restent inchangées, pour les ailettes 2 et 4 (verticale), nous observons une légère linéaire diminution dans les valeurs de fréquence du mode Flap-wise en fonction de l'angle  $\beta$ , par contre les fréquences du mode Chord-wise augmentent lorsque la valeur de  $\beta$  augmente.

### 4.3. Analyse de l'effet de la vitesse de rotation ( $\Omega$ )

Pour cette analyse les fréquences propres du système rotor-ailettes en métal ( $s=n=k=\infty$ ) et en FGM ( $s=n=k=1$ ) sont obtenues à partir du diagramme de Campbell. Le nombre d'ailettes considéré égale à 4 ( $n_b=4$ ) et l'angle  $\beta=0$ , les résultats obtenus pour des vitesses précis sont représentés dans les tableaux IV.16 et IV.17.

Les figures IV.16 et IV.17 représentent les diagrammes de Campbell des trois premières fréquences propres du système rotor-ailette ainsi que le premier mode (Flap-wise et Chord-wise) de l'ailette 1 en échelle logarithmique décimale.

Structure	Mode (Hz)		vitesses de rotation $\Omega$ (tr/min)			
			$\Omega=0$	$\Omega=5000$	$\Omega=10000$	$\Omega=15000$
Rotor-Ailette	Mode 1	Direct ( $\omega_{r1}$ )	61.67	64.42	66.82	68.89
		Indirect ( $\omega_{b1}$ )	61.67	58.56	55.15	51.56
	Mode 2	Direct ( $\omega_{r2}$ )	273.31	309.58	337.36	355.2
		Indirect ( $\omega_{b2}$ )	273.31	235.84	203.46	178.13
	Mode 3	Direct ( $\omega_{r3}$ )	463.26	498.32	553.87	623.87
		Indirect ( $\omega_{b3}$ )	463.26	443.17	431.87	423.79
Ailette 1	Mode 1	Flap-wise	364.880	381.14	426.09	491.52
		Chord-wise	5075.47	5076.39	5079.43	5084.48
Ailette 2	Mode 1	Flap-wise	366.300	382.56	427.31	493.84
		Chord-wise	5075.47	5076.39	5079.43	5084.48
Ailette 3	Mode 1	Flap-wise	364.880	381.14	426.09	491.52
		Chord-wise	5075.47	5076.39	5079.43	5084.48
Ailette 4	Mode 1	Flap-wise	366.300	382.78	427.31	493.84
		Chord-wise	5075.47	5076.39	5079.43	5084.48

**Tableau IV.16:** Fréquences propres du système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ) en fonction de la vitesse de rotation.

Structure	Mode (Hz)		Vitesses de rotation $\Omega$ (tr/min)			
			$\Omega=0$	$\Omega=5000$	$\Omega=10000$	$\Omega=15000$
Rotor-Ailette	Mode 1	Direct ( $\omega_{r1}$ )	81.899	84.29	86.39	88.24
		Indirect ( $\omega_{b1}$ )	81.899	79.19	76.18	72.89
	Mode 2	Direct ( $\omega_{r2}$ )	356.627	410.48	464.5	511.15
		Indirect ( $\omega_{b2}$ )	356.627	308.35	268.02	235.83
	Mode 3	Direct ( $\omega_{r3}$ )	681.963	698.72	725.33	766.04
		Indirect ( $\omega_{b3}$ )	681.963	671.65	663.49	658.15
Ailette	Mode 1	Flap-wise	661.202	670.23	696.95	739.11
		Chord-wise	9259.34	9259.91	9261.61	9264.45
Ailette 2	Mode 1	Flap-wise	662.464	671.03	698.41	740.81
		Chord-wise	9259.34	9259.91	9261.61	9264.45
Ailette 3	Mode 1	Flap-wise	661.202	670.23	696.95	739.11
		Chord-wise	9259.34	9259.91	9261.61	9264.45
Ailette 4	Mode 1	Flap-wise	662.464	671.03	698.41	740.81
		Chord-wise	9259.34	9259.91	9261.61	9264.45

Tableau IV.17 : Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ) en fonction de la vitesse de rotation.

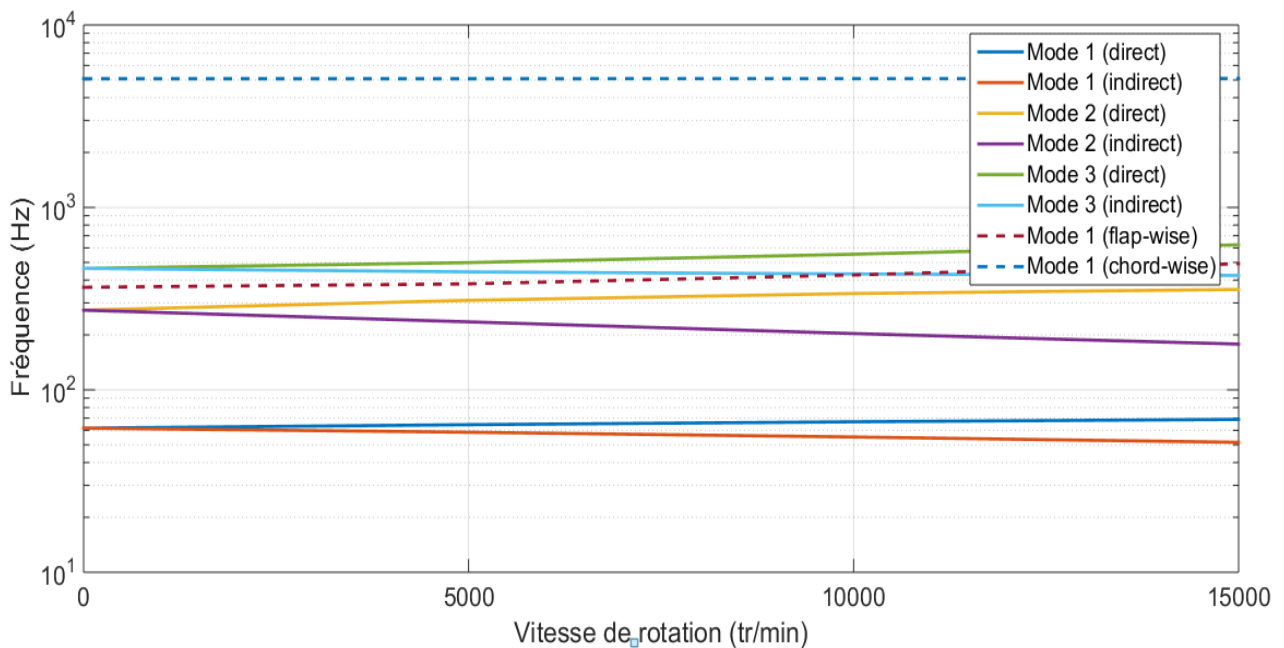
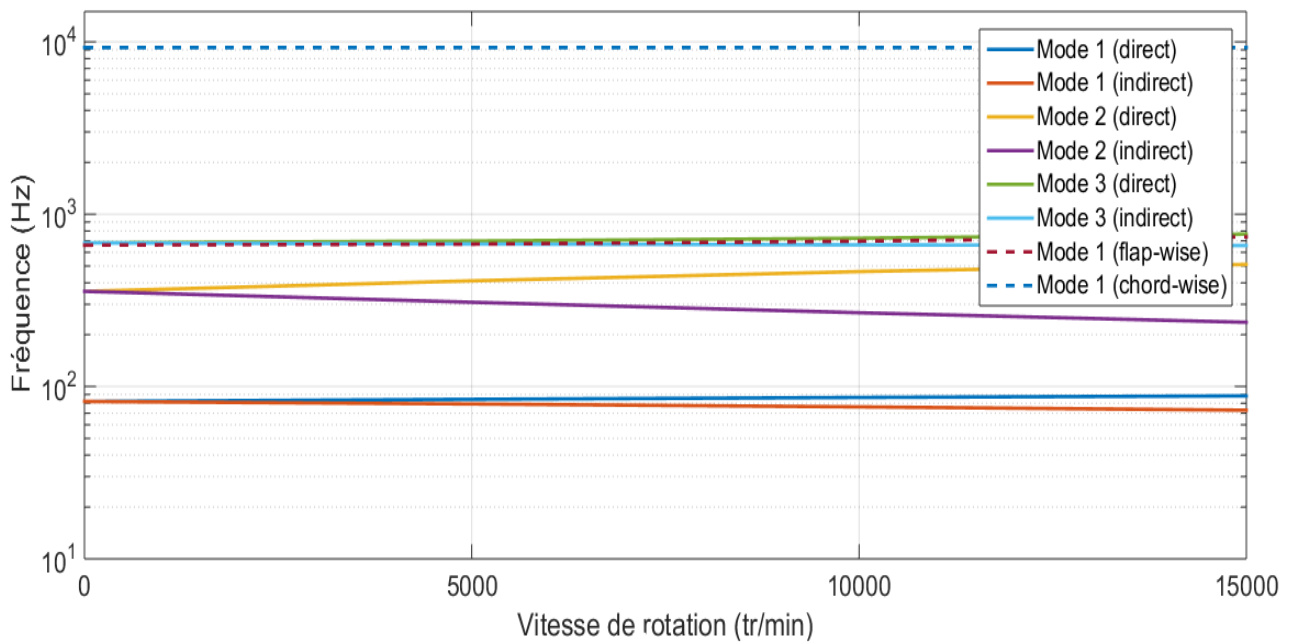


Fig. IV.16. Diagramme de Campbell du système rotor-ailette en métal ( $s=n=k=\infty$ ).



**Fig. IV.17.** Diagramme de Campbell du système rotor-ailette en FGM ( $s=n=k=1$ ).

Les tableaux IV.16 et IV.17 montrent les valeurs exactes des trois premiers modes (indirect et direct) du système rotor-ailette et la première fréquence propre (Flap-wise, Chord-wise) des ailettes. Dans ces tableaux, on observe que les fréquences propres dans le cas d'un rotor-ailette en FGM sont plus importantes que d'un système rotor-ailette en acier, car l'arbre du système rotor-ailette en acier est plus flexible et lourd que l'arbre du système rotor-ailette en FGM.

On remarque également que la première fréquence propre des ailettes augmente lorsque la vitesse de rotation augmente, le taux d'augmentation des fréquences propres des ailettes est plus important dans le cas d'une ailette en métal que d'une ailette en FGM car les ailettes en métal sont plus flexibles qu'en matériau à gradient fonctionnel, de sorte que le mouvement de rotation les influence facilement. Par exemple, dans le cas d'un système rotor-ailette en métal, le taux de variation lorsque  $\Omega = 10000$  tr/min par rapport à  $\Omega = 0$  tr/min de l'ailette 1 est égal à 16,77 % pour la première Flap-wise fréquence et 0,079 % pour la première Chord-wise fréquence. En revanche, dans le cas d'une ailette de rotor en FGM le taux de variation lorsque  $\Omega = 10000$  tr/min par rapport à  $\Omega = 0$  tr/min de l'ailette 1 est égal à 5.4% pour la première Flap-wise fréquence et 0,024% pour la première Chord-wise fréquence.

#### 4.4. Analyse de l'Influence des indices de puissance

Dans cette section, nous étudions l'influence des indices de puissance ( $s$ ,  $n$  et  $k$ ) sur les fréquences propres d'un système rotor-ailette en FGM où le nombre d'ailette  $n_b=4$  et  $\Omega=0$  tr/min et l'angle  $\beta=0$ .

Les tableaux IV.18 – IV.20 représentent respectivement ; la variation des fréquences propres du système rotor-ailette en FGM, pour les cas suivants :

- **Cas 1** :  $s = n = k$ , ce qui signifie que l'arbre et les ailettes sont en même matériau et les ailettes ont la même gradation des matériaux dans les deux directions.
- **Cas 2** :  $s = \infty$  et  $n = k$ , ce qui signifie que l'arbre est en métal.
- **Cas 3** :  $n = k = \infty$ , ce qui signifie que les ailettes sont en métal.

Structure	Mode (Hz)	Indices de loi de puissance ( $s=n=k$ )					
		0 (Céramique)	0.5	1	2	10	$\infty$ (Métal)
Rotor-Ailette	Mode 1	87.03	84.14	81.89	78.62	69.26	61.67
	Mode 2	383.21	367.69	356.62	341.52	302.85	273.31
	Mode 3	835.43	733.76	681.96	626.9	525.44	463.26
Ailette 1	Mode 1 (Flap-wise)	795.48	730.07	661.20	579.6	436.68	364.88
	Mode 1 (Chord-wise)	11065	10195	9259.3	8127	7166.5	5075.4
Ailette 2	Mode 1 (Flap-wise)	796.62	731.29	662.46	580.9	438.12	366.30
	Mode 1 (Chord-wise)	11065	1.0195	9259.3	8127	7166.5	5075.4
Ailette 3	Mode 1 (Flap-wise)	795.48	730.07	661.20	579.6	436.68	364.88
	Mode 1 (Chord-wise)	11065	10195	9259.3	8127	7166.5	5075.4
Ailette 4	Mode 1 (Flap-wise)	796.62	731.29	662.46	580.9	438.12	366.30
	Mode 1 (Chord-wise)	11065	10195	9259.3	8127	7166.5	5075.4

**Tableau IV.18** : Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM en fonction des indices de puissance ( $s=n=k$ ) dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .



Structure	Mode (Hz)	Indices de loi de puissance (n=k)					
		0 (Céramique)	0.5	1	2	10	$\infty$ (Métal)
Rotor- Ailette	Mode 1	62.02	61.98	61.93	61.87	61.73	61.67
	Mode 2	273.67	273.64	273.6	273.55	273.43	273.31
	Mode 3	463.24	463.23	463.22	463.21	463.32	463.25
Ailette 1	Mode 1 (Flap-wise)	795.48	730.07	661.2	579.6	436.68	364.88
	Mode 1 (Chord-wise)	11065	10195	9259.3	8127	6.100	5075.4
Ailette 2	Mode 1 (Flap-wise)	796.62	731.3	662.5	581.03	438.02	366.3
	Mode 1 (Chord-wise)	1.1065	10195	9259.3	8.127	6.100	5075.4
Ailette 3	Mode 1 (Flap-wise)	795.48	730.07	661.2	579.6	436.68	364.88
	Mode 1 (Chord-wise)	11065	10195	9259.3	8127	6.100	5075.4
Ailette 4	Mode 1 (Flap-wise)	796.62	731.3	662.5	581.03	438.02	366.3
	Mode 1 (Chord-wise)	1.1065	10195	9259.3	8.127	6.100	5075.4

**Tableau IV.19:** Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM en fonction des indices de puissance ( $s=\infty$ ,  $n=k$ ) dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

Structure	Mode (Hz)	Indices de loi de puissance (s)					
		0 (Céramique)	0.5	1	2	10	$\infty$ (Métal)
Rotor- Ailette	Mode 1	86.46	83.66	81.51	78.53	69.19	61.67
	Mode 2	383.73	368.1	355.76	340.92	302.67	273.31
	Mode 3	835.38	733.71	681.88	626.82	525.4	463.25
Ailette 1	Mode 1 (Flap-wise)	364.87	364.87	364.87	364.87	364.87	364.88
	Mode 1 (Chord-wise)	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4
Ailette 2	Mode 1 (Flap-wise)	365.57	365.64	366.9	366.7	366.4	366.3
	Mode 1 (Chord-wise)	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4
Ailette 3	Mode 1 (Flap-wise)	364.87	364.87	364.87	364.87	364.87	364.88
	Mode 1 (Chord-wise)	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4
Ailette 4	Mode 1 (Flap-wise)	365.57	365.64	366.9	366.7	366.4	366.3
	Mode 1 (Chord-wise)	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4	5075.4

**Tableau IV.20** : Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM en fonction des indices de puissance (s,  $n=k=\infty$ ) dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

Les tableaux précédents montrent que les valeurs des fréquences propres du système rotor-ailette en FGM sont comprises entre les fréquences propres du système rotor-ailette en métal pure ( $s = n = k = \infty$ ) et celles du système rotor-ailette en céramique pure ( $s = n = k = 0$ ).

Le tableau IV.18 montre que, pour le premier cas, les fréquences propres du système rotor-ailettes diminuent lorsque les valeurs des indices de puissance (s, n, et k) augmentent, la diminution est due au passage du système de l'alumine qui a un module d'élasticité plus élevé et une densité plus faible à un acier qui a un module d'élasticité plus faible et une densité plus élevée.

Dans le tableau IV.19 ou bien pour le deuxième cas où l'arbre est en acier et les ailettes sont en FGM ( $n = k \neq 0 \neq \infty$ ), on remarque que les fréquences de système rotor-ailette restent inchangées car le poids de l'ailette en FGM reste constant malgré on change les indices de puissance  $n$  et  $k$ , mais les fréquences propres des ailettes diminuent lorsque les valeurs des indices de puissance ( $n, k$ ) augmentent.

Pour le troisième cas où l'arbre est en FGM ( $s \neq 0 \neq \infty$ ) et les ailettes sont en acier, les fréquences de système rotor-ailette diminuent lorsque la valeur de l'indice de puissance  $s$  augmente, car la rigidité de l'arbre varie du la rigidité d'un arbre de l'alumine qui a un module d'élasticité plus élevé à la rigidité d'un arbre en acier qui a un module d'élasticité plus faible.

#### 4.5. Analyse de l'effet des conditions aux limites

Dans cette analyse, nous étudions l'influence des conditions aux limites sur les fréquences propres d'un système rotor-ailette en FGM où le nombre d'ailette  $n_b=4$ ,  $\Omega=0$  tr/min et  $\beta=0$ .

Les tableaux IV.21 et IV.22 représentent la variation des fréquences propres du système rotor-ailette en acier et en FGM, pour les conditions à limites suivantes :

- **Conditions 1** : Appuis simples.
- **Conditions 2** : Encastré-libre.
- **Conditions 3** : Encastré-Encastré.

D'après les résultats des tableaux ci-dessous, nous observons que les conditions aux limites influent sur les fréquences propres du système rotor-ailette, D'après ces résultats trouvés, on remarque que les conditions aux limites ont une influence très importante sur les fréquences propres d'un système rotor-ailette.

Par exemple, si on prend les conditions encastré-encastré, la rigidité de l'arbre augmente qui s'implique l'augmentation des valeurs des fréquences propres de système, on remarque aussi que les conditions aux limites n'ont pas une influence importante sur les fréquences propres des ailettes.

Structure	Mode (Hz)	Conditions aux limites		
		Appuis simples	Encastré-libre	Encastré- Encastré
Rotor- Ailette	Mode 1	46.655	34.837	104.53
	Mode 2	251.39	115.53	342.15
	Mode 3	423.48	342.32	532.87
Ailette1	(Flap-wise)	364.880	364.880	364.880
	(Chord-wise)	5075.47	5075.47	5075.47
Ailette 2	(Flap-wise)	366.239	367.554	367.527
	(Chord-wise)	5075.47	5075.47	5075.47
Ailette 3	(Flap-wise)	364.880	364.880	364.880
	(Chord-wise)	5075.47	5075.47	5075.47
Ailette 4	(Flap-wise)	366.239	367.554	367.527
	(Chord-wise)	5075.47	5075.47	5075.47

**Tableau IV.21** : Fréquences propres du système rotor-ailette en acier ( $s= n=k=\infty$ ) en fonction des conditions aux limites dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

Structure	Mode (Hz)	Conditions aux limites		
		Appuis simples	Encastré-libre	Encastré – Encastré
Rotor- Ailette	Mode 1	64.37	55.636	143.56
	Mode 2	373.97	168.91	481.94
	Mode 3	640.88	484.62	851.86
Ailette1	(Flap-wise)	661.2	661.2	661.2
	(Chord-wise)	9259.34	9259.34	9259.34
Ailette 2	(Flap-wise)	662.7	662.7	662.7
	(Chord-wise)	9259.34	9259.34	9259.34
Ailette 3	(Flap-wise)	661.2	661.2	661.2
	(Chord-wise)	9259.34	9259.34	9259.34
Ailette 4	(Flap-wise)	662.7	662.7	662.7
	(Chord-wise)	9259.34	9259.34	9259.34

**Tableau IV.22** : Fréquences propres du système rotor-ailette en FGM ( $s= n=k=1$ ) en fonction des conditions aux limites dans le cas où  $\Omega = 0$  tr/min et  $\beta=0$ .

#### 4.6. Analyse du type de matériau céramique

Dans cette partie, nous étudions l'influence des propriétés physiques du matériau céramique sur les fréquences propres d'un système rotor-ailette en FGM où le nombre d'ailette  $n_b=4$  et l'angle  $\beta=0$ , les paramètres géométriques du système rotor-ailette et les caractéristiques des paliers sont données dans le tableau IV.1.

Les propriétés physiques des matériaux céramiques considérées dans cette analyse sont données dans le tableau IV.23.

Matériaux	Module de Young [Gpa]	Coefficient de Poisson	Densité [ $\text{kg.m}^{-3}$ ]
Zircone ( $\text{ZrO}_2$ )	244.27	0.2882	5600
Nitride de silicium ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ )	348.43	0.24	3170
Ti 6Al-4V	122	0.2884	4512

**Tableau IV.23** : Propriétés physiques des matériaux céramiques Assem et al (2022).

**Le dioxyde de zirconium** ( $\text{ZrO}_2$ ) communément appelé zircone est plus fréquemment préparé à partir de silicate de zirconium par traitements thermiques à haute température, accompagnés de traitements chimiques pour éliminer la fraction siliceuse du zircon, les pièces en zircons sont mises en forme par les procédés classiques de pressage, puis frittées entre  $1400^\circ\text{C}$  et  $1700^\circ\text{C}$ .

Les zircons sont particulièrement utilisés pour leurs propriétés thermiques :

- Grande résistance aux chocs thermiques et aux températures extrêmes.
- Faible conductivité thermique mais également pour leur coefficient de dilatation proche de celui des métaux.
- Grande résistance à la corrosion.
- Excellentes propriétés mécaniques en particulier une très bonne ténacité.

Les zircons sont utilisés dans de nombreuses industries où leurs propriétés thermo-mécaniques sont particulièrement appréciées, on peut citer :

- Revêtements pour barrière thermique dans le domaine thermique.
- Outils de coupe, joints d'étanchéité, paliers, roulements, guide- fils dans l'industrie mécanique.

- Electrolytes solides.
- Piles à combustible.
- Implants dentaires, implants orthopédiques, isolants / pièces d'usure pour instruments chirurgicaux dans le domaine biomédical.

**Le nitrure de silicium** ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ ) est obtenu préalablement par nitruration de la poudre de silicium mélangée à des liants organiques, les pièces en nitrure de silicium ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ ) peuvent être réalisées par frittage et pressage à chaud.

Le nitrure de silicium est une des céramiques les plus dures et les plus résistantes, ces caractéristiques principales sont :

- Faible densité.
- Excellente résistance aux chocs thermiques.
- Excellente résistance à l'usure.
- Excellente résistance à la corrosion (liquides et gaz).
- Faible coefficient de dilatation thermique.
- Faible mouillabilité aux métaux en fusion.
- Bonne isolation électrique.

On pourra citer parmi les applications de nitrure de silicium les plus courantes :

- bagues d'étanchéité de garnitures mécaniques.
- éléments de pompes et vannes.
- gaines de protection de thermocouple.
- pilotes et buses de soudage.
- outillages pour équipements de procédés des semi-conducteurs.
- Billes de roulements.

Le Titane 6AL-4V est un alliage de titane-aluminium-vanadium, Cet alliage avait été initialement développé pour les applications légères et robustes du marché de l'aéronautique et largement utilisé dans les éléments structuraux aéronautiques. Plus récemment, il a été utilisé de manière intensive dans l'industrie pétrolière et gazière où une combinaison de robustesse élevée, de résistance à la corrosion et de poids réduit est essentielle. Le  $\text{Ti}_6\text{Al}_4\text{V}$  possède des combinaisons de dureté-ductilité comprises entre celles des alliages d'aciers et ceux d'aluminium, possède la même raideur que le titane pur mais est significativement plus résistant. Le  $\text{Ti}_6\text{Al}_4\text{V}$  est aujourd'hui utilisé dans de nombreux domaines d'application comprennent le sport, la marine et la technologie médicale. Les tableaux IV.24 et IV.26 représentent la variation des fréquences propres du système rotor-ailette et les fréquences des 4 ailettes en fonction de vitesse de rotation, pour les trois différents types de matériaux

céramiques considérés dans le cas où  $s=n=k=1$ , d'après les résultats de ces tableaux et le tableau IV.17, nous remarquons que le système rotor-ailette fabriqué en acier et en alumine (SS- $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) a les plus grandes valeurs de fréquence, après on trouve le rotor-ailette fabriqué en acier et nitrure de silicium (SS- $\text{Si}_3\text{N}_4$ ) suivi par acier et zircon (SS- $\text{ZrO}_2$ ) et finalement acier et alliage de titan (SS- $\text{Ti}_6\text{Al}_4\text{V}$ ), nous pouvons conclure que le système qui a le module de Young de matériau céramique le plus important, il a les valeurs de fréquences les plus grandes.

Structure	Mode (Hz)		vitesses de rotation $\Omega$ (tr/min)			
			$\Omega=0$	$\Omega=2500$	$\Omega=5000$	$\Omega=10000$
Rotor-Ailette	Mode 1	Direct ( $\omega_{f1}$ )	67.50	68.89	70.2	72.56
		Indirect ( $\omega_{b1}$ )	67.50	66.02	64.44	61.08
	Mode 2	Direct( $\omega_{f2}$ )	300.24	322.7	344.77	383.11
		Indirect ( $\omega_{b2}$ )	300.24	278.34	257.75	222.19
	Mode 3	Direct( $\omega_{f3}$ )	530.43	542.34	557.91	603.23
		Indirect ( $\omega_{b3}$ )	530.45	521.37	514.38	504.49
Ailette 1	Mode 1	Flap-wise	448.95	452.32	462.2	500.04
		Chord-wise	6259.1	6259.3	6259.9	6262.4
Ailette 2	Mode 1	Flap-wise	450.24	453.66	463.53	501.44
		Chord-wise	6259.1	6259.3	6259.9	6262.4
Ailette 3	Mode 1	Flap-wise	448.95	452.32	462.2	500.04
		Chord-wise	6259.1	6259.3	6259.9	6262.4
Ailette 4	Mode 1	Flap-wise	450.24	453.66	463.53	501.44
		Chord-wise	6259.1	6259.3	6259.9	6262.4

**Tableau IV.24** : Fréquences propres du système rotor-ailette en SS- $\text{ZrO}_2$  en fonction de la vitesse de rotation dans les cas où  $\beta=0$ .

Structure	Mode (Hz)		vitesses de rotation $\Omega$ (tr/min)			
			$\Omega=0$	$\Omega=2500$	$\Omega=5000$	$\Omega=10000$
Rotor-Ailette	Mode 1	Direct ( $\omega_{r1}$ )	78.55	79.84	81.04	83.24
		Indirect ( $\omega_{b1}$ )	78.55	77.18	75.72	72.59
	Mode 2	Direct( $\omega_{r2}$ )	345.85	372.49	400	454.03
		Indirect ( $\omega_{b2}$ )	345.85	320.73	297.52	275.54
	Mode 3	Direct( $\omega_{r3}$ )	662.97	670.73	680.7	709.51
		Indirect ( $\omega_{b3}$ )	662.97	656.67	651.67	643.89
Ailette 1	Mode 1	Flap-wise	629.14	631.55	638.72	666.6
		Chord-wise	8811	8811.2	8811.6	8813.4
Ailette 2	Mode 1	Flap-wise	630.3	632.72	639.98	668.01
		Chord-wise	8.811	8811.2	8811.6	8813.4
Ailette 3	Mode 1	Flap-wise	629.14	631.55	638.72	666.6
		Chord-wise	8811	8811.2	8811.6	8813.4
Ailette 4	Mode 1	Flap-wise	630.3	632.72	639.98	668.01
		Chord-wise	8.811	8811.2	8811.6	8813.4

**Tableau IV.25** : Fréquences propres du système rotor-ailette en SS- Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> de silicium en fonction de la vitesse de rotation dans le cas où  $\beta=0$ .



Structure	Mode (Hz)		vitesses de rotation $\Omega$ (tr/min)			
			$\Omega=0$	$\Omega=2500$	$\Omega=5000$	$\Omega=10000$
Rotor-Ailette	Mode 1	Direct ( $\omega_{f1}$ )	53.3	54.9	56.38	59.01
		Indirect ( $\omega_{b1}$ )	53.3	51.59	49.78	45.95
	Mode 2	Direct( $\omega_{f2}$ )	250.3	274.42	297.8	335.35
		Indirect ( $\omega_{b2}$ )	250.3	227.22	206.26	172.44
	Mode 3	Direct( $\omega_{f3}$ )	442.39	454.61	472	528.02
		Indirect ( $\omega_{b3}$ )	442.39	433.77	427.54	418.37
Ailette 1	Mode 1	Flap-wise	358.1	362.3	374.69	420.3
		Chord-wise	5000.9	5001.2	5002	5005.1
Ailette 2	Mode 1	Flap-wise	359.05	363.25	375.63	421.64
		Chord-wise	5000.9	5001.2	5002	5005.1
Ailette 3	Mode 1	Flap-wise	358.1	362.3	374.69	420.3
		Chord-wise	5000.9	5001.2	5002	5005.1
Ailette 4	Mode 1	Flap-wise	359.05	363.25	375.63	421.64
		Chord-wise	5000.9	5001.2	5002	5005.1

**Tableau IV.26** : Fréquences propres du système rotor-ailette en SS-Ti6Al4V en fonction de la vitesse de rotation dans le cas où  $\beta=0$ .

# Conclusion et Perspectives

Dans le présent travail, un modèle d'élément fini est développé pour un système rotors-ailettes en matériau fonctionnellement gradué et en matériau isotrope, en utilisant la théorie des poutres d'Euler Bernoulli et la version classique de la FEM. Pour ce modèle les ailettes sont considérés comme des poutres encasturé-libre en FGM attachés sur le disque composé d'un cœur en métal et couvert en céramique. L'arbre est modélisé comme une poutre composée de métal à la surface intérieure et de céramique pour la surface extérieure.

Les résultats trouvés de notre modèle sont validés en divisant la validation en trois cas vu le manque d'études sur ce sujet. L'écart entre nos résultats et les autres études a démontré que notre modèle EF développé est capables de donner d'excellents résultats.

A travers une étude paramétrique, l'influence de certains paramètres tels que le nombre d'ailettes ( $n_b$ ), l'angle de l'ailette ( $\beta$ ), la vitesse de rotation ( $\Omega$ ), l'indice de loi de puissance ( $n, k, s$ ), les conditions aux limites, le paramètre de matériaux céramique sur les fréquences naturelles et critiques est étudié afin de comparer entre les deux matériaux ; métallique et fonctionnellement gradué. Les résultats obtenus montrent que :

- Les valeurs des fréquences modes directs et indirects sont plus importantes dans le cas d'un système rotor-ailettes en FGM que dans le cas d'un système rotor-ailettes en métal, car l'arbre en métal du système est plus flexible et lourd que l'arbre en FGM.
- Pour un système rotor-ailettes en FGM, les fréquences propres sont entre les fréquences propres d'un système en métal pure et les fréquences propres d'un système en céramique pure.
- Les fréquences propres d'un système rotor-ailettes diminuent quand l'indice de la loi de puissance s'accroît. La baisse est due au passage du système rotor-ailettes de céramique pure, qui a un module d'élasticité supérieure et une densité inférieure par rapport à un système rotor-ailettes en métal pur qui a un module d'élasticité inférieur et une densité supérieure.
- Les fréquences propres du système diminuent lorsque le nombre d'ailettes s'accroît, due à l'augmentation de la masse du système tandis que la rigidité de l'arbre et des paliers reste inchangé ; le taux de diminution est moins dans le cas d'un système rotor-ailettes en FGM que dans le cas d'un système en métal.

- L'étude de l'influence d'angle de l'ailette ( $\beta$ ) a montrée qu'une petite variation presque négligeable dans les fréquences propres du système rotor-ailette pour les deux modèles étudiés.
- Les fréquences propres de flexion (chord-wise et flap-wise) de l'ailette augmente lors que la vitesse de rotation augmente cela est due à l'accroissement de la force centrifuge, Le taux d'augmentation est plus important dans l'ailette en métal que dans le cas d'une ailette en FGM car cette dernière est plus flexible.
- Les conditions aux limites ont une influence très importante sur les fréquences propres d'un système rotor-ailettes. Par exemple, si on prend les conditions encastré-encastré, la rigidité de l'arbre augmente ce qui implique l'augmentation des valeurs des fréquences propres de système, on remarque aussi que les conditions aux limites n'ont pas une influence importante sur les fréquences propres des ailettes.
- D'après l'analyse de l'influence des propriétés physiques du matériau céramique sur les fréquences propres d'un système rotor-ailette en FGM nous pouvons conclure que le système qui a un matériau céramique de valeur de module de Young plus important, ses valeurs de fréquences sont plus grandes.

En perspectives, la présente approche peut être étendue pour étudier le phénomène de flambage du modèle présenté en FGM. En plus, il serait très intéressant d'élargir l'étude à des éléments de structure tel que les coques qui sont très utilisées dans les structures aérospatiales. Enfin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution dans le domaine des structures en matériaux fonctionnellement graduée.

# Références Bibliographiques

**A**lshorbagy, A.E., Eltahir, M.A., Mahmoud, F.F. (2011), Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*. 35 412–425.

Argyris, J.H., (1954), Energy theorems and structural analysis. *Aircraft Engng.*, 26, Oct.-Nov. and 27, Feb-May. Reprinted in Argyris, J.H. and Kelsey, S., 1960, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth, London.

Asseum H. Hadjoui A, Saimi A. (2022), Numerical analysis on dynamics behavior of FGM rotor in thermal environment using h-p finite element method. *Mechanics based design of structures and machines*, 50:11, 3925-3948

**B**ardell, N. S. (1996). An engineering application of the h-p version of the finite element method to the static analysis of an Euler-Bernoulli beam. *Computers & Structures* 59 (2):195–211. doi:10.1016/0045-7949(95)00252-9.

Bao. G, Wang. L, (1995). « Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings », *Int. J;Solids Structures*; **32** (19): 2853–2871.

Bishop, R.E.D., 1959, Vibration of rotating shafts, *J. Mech. Eng. Sci.*, 1(1), 50-65.

Bishop, R.E.D. and Gladwell, G.M.L., (1959), The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor, *J. Mech. Eng. Sci.*, 1(1), 66-77.

Bishop, R.E.D. and Parkinson, A.G., (1965), Second order vibration of flexible shafts. *Philos. Trans. Royal Society of London, Series A*, 259(1095), 1-31.

Boch. T. Chartier., M. Huttepain (1986), «Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, *J. Am. Ceram.* Soc; 69 (8):191-192, 1986.

Bogdanoff, J., (1947), A method for simplifying the calculations of the natural frequencies for a system consisting of rigid rotating discs mounted on an elastic shaft, *J aero sci*, 14(1).

Boukhalifa, A. (2014). Dynamic analysis of a spinning functionally graded material shaft by the p-version of the finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures* 11 (11):2018–38.

- Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S. (2003), A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, vol.40:2421–48.
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. and Reddy, JN. (2003), A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*; vol.45:519–39
- Chen, JS., Wu, CT., Yoon, S. and You, Y. (2001), A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 50 :435–66.
- Cheng L, Li YY, Yam LH. (2003). Vibration analysis of annular-like plates. *J. Sound Vib.* 262(5), 1153-70
- Cheng, J., H. Xu, and A. Yan. (2006). Frequency analysis of a rotating cantilever beam using assumed mode method with coupling effect. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 34 (1):25–47.
- Chiu, Y. J., and D. Z. Chen. (2011). The coupled vibration in a rotating multi-disk rotor system. *International Journal of Mechanical Sciences* 53 (1):1–10.
- Courant, R., (1943), Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Am. Math. Soc.*, 49, 1-23.
- Clough, R.W., (1960), The finite element method in plane stress analysis, *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, 345-378.
- Crandall, S.H. and Yeh, N.A., (1986), Component mode synthesis of multi-rotor system. *Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and their Applications*, *Proc. Euromech Colloquium 219*, Springer, Berlin, 44-55
- Crandall, S.H., (1992), Rotor dynamic Software. *Rotating Machinery, Transport Phenomena*, editors: J.H. Kim, W.J. Yang. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, Philadelphia, London (1992), pp. 3-21.

**D**imentburg, F.M., (1961), *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*, Butterworths, London; originally published in Russian (1959).

Delale. F, Erdogan, F. (1983) « The crack problem for a nonhomogeneous plane ». *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

Ding, J., L. Chu, L. Xin, and G. Dui. (2018). Nonlinear vibration analysis of functionally graded beams considering the influences of the rotary inertia of the cross section and neutral surface position. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 46 (2):225–37.

Dey, K., J. R. Verlekar, S. K. Soni, and B. Thomas. (2019). Dynamic analysis of functionally graded shaft. *FME Transactions* 47 (1):151–7.

**E**shleman, R.L. and Eubanks, R.A., (1969), On the critical speeds of a continuous rotor, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 91(4), 1180-1188.

**F**öppl, O, (1948), Das grunddiagram zur bestimmung der zugeordneten drehzahlen von wellen mit mehrfacher besetzung, *Technik*

Jeffcott. H.(1919) *Phil Mag.*, Series 6, 37, 304. The Lateral Vibration of Loaded shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed the Effect of Want of Balance.

Fang, J., D. Zhou, and Y. Dong. (2018). Three-dimensional vibration of rotating functionally graded beams. *Journal of Vibration and Control* 24 (15):3292–306.

**G**asch, R., (1976), Dynamic behavior of a simple rotor with a cross-sectional crack, *Proceedings of the International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, Institute of Mechanical Engineering, New York, pp. 123-128

Green, R., (1948), Gyroscopic effect on the critical speeds of flexible rotors, *J Appl Mech.*, 15(4).

Glasgow, D.A. and Nelson, H.D., (1980), Stability analysis of rotor-bearing systems using component mode synthesis. *J. Mechanical Design*, *Trans. ASME*, 102, 352-359.

Guyan, R.J., (1965), Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA Journal*, 3, p. 380.

Geradin, M. and Kill, N., (1984), A new approach to finite element modeling of flexible rotors, *Engng. Computation*, 1, 52-64.

**H**ao YX, Zhang W, Yang L, Wang JH. (2012). Dynamic response of cantilever FGM cylindrical shell. *Appl. Mech. Mater.* 130, 3986-3993

Henry, T.A. and Okah-Avae, B.E., (1976), Vibration of cracked shaft, *Proceedings of the International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, Institute of Mechanical Engineering, New York, pp. 15-17.

Holzer, H., (1921), *Die Berechnungen der Dreschwingungen*, Springer, Berlin., No. 6.

Hurty, W.C., (1960), Vibrations of structural systems by component mode synthesis, *J. Engrg. Mechs. Div. Proc. ASCE*, 86, EM4, 51-69

Hussain M, Naeem MN, Shahzad A, He MG, Habib S. (2018). Vibrations of rotating cylindrical shells with functionally graded material using wave propagation approach. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.* 232(23), 4342-56

**J**in, Z. H. & Batra, R. C., (1996). Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. *Journal of Thermal Stresses*, 19(4), pp. 317–339.

**K**okini, Y. Takeuchi, (1990), "Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads". In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM' 90*, Sendai, Japan; 31-36

Koizumi, M., 1997. FGM activities in Japan. *Composites Part B*, Volume 28, pp. 1-4.

Kapuria, S., Bhattacharyya, M. and Kumar, AN. (2008), Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation. *Composite Structures*, 82(3): 390-402.

Kadoli, R., Akhtar, K. and Ganesan, N. (2008), Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 32(12):2509-2525.

Kutiš, V., Murin, J., Belak, R. and Paulech, J. (2011), Beam element with spatial variation of material properties for multiphysics analysis of functionally graded materials, *Computers & Structures* 89 1192–1205.

Kandasamy R, Dimitri R, Tornabene F. (2016). Numerical study on the free vibration and thermal buckling behavior of moderately thick functionally graded structures in thermal environments. *Compos. Struct.* 157, 207-21

**L**angefors, B., (1952), Analysis of elastic structures by matrix transformation, with special regard to semi monocoque structures, *J. Aeronautical Sciences*, 19, 451-458.

Li, B., H. Ma, X. Yu, J. Zeng, X. Guo, and B. Wen. (2019). Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of rotor-blade system with nonlinear supports. *Archive of Applied Mechanics* 89 (7):1375–402.

Liu CF, Lee YT. (2000). Finite element analysis of three-dimensional vibrations of thick circular and annular plates. *J. Sound Vib.* 233(1), 63-80

Lund, J.W., (1965), Rotor-bearing dynamics Technology, Part V, AFAPL-TR-65-45, Aero Propulsion Lab, WrightPatterson air Force Base, Dayton, Ohio.

Lund, J.W. and Orcutt, F.K., (1967), Calculation and experiments on the unbalance response of a flexible rotor, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 89(4), 785-795.

Lund, J.W., (1974), Stability and damped critical speed of a flexible rotor in fluid-film bearings, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 96(2), 509-517.

**M**a, H., Y. Lu, Z. Wu, X. Tai, H. Li, and B. Wen. (2015). A new dynamic model of rotor–blade systems. *Journal of Sound and Vibration* 357:168–94.

Ma, H., F. Yin, Z. Wu, X. Tai, and B. Wen. (2016). Nonlinear vibration response analysis of a rotor-blade system with blade-tip rubbing. *Nonlinear Dynamics* 84 (3):1225–58.

Ma, H., F. Yin, Z. Wu, X. Tai, and B. Wen. (2016). Nonlinear vibration response analysis of a rotor-blade system with blade-tip rubbing. *Nonlinear Dynamics* 84 (3):1225–58.



Mazzei, A. J., and R. A. Scott. (2015). Effect of functionally graded materials on resonances of rotating beams. In Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, ed. T. Proulx, Structural Dynamics 2011; 3.

Mei, C. (1972), Nonlinear vibration of beams by matrix displacement method, AIAA 10 (3) 355–357

Mei, C. (1973), Finite element analysis of nonlinear vibrations of beam columns”, AIAA 11 115–117

Mei, C. (1973), Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibrations of beams and plates, Computers & Structures. 3, 163–174.

Mohammad Talha., Singh, B.N. (2011), Large amplitude free flexural vibration analysis of shear deformable FGM plates using nonlinear finite element method. Finite Elements in Analysis and Design.47, 394–401

Murin, J., Kutíš, V. (2002), 3D-beam element with continuous variation of the cross-sectional area. Computers & Structures; 80(3–4):329–52.

**N**atanzon, V.Ya., (1952), Dvizhenie gibkogo vala na kriticheskoi skotosti, Sbornik Dinamika aviadvigatelei, Oborongiz, No. 8. (Movement of a flexible shaft at critical speed, Symposium on Aircraft Engine Dynamics, Oborongiz, No. 8.

N. F. Rieger, (1974). Rotor-bearing systems. Structural Mechanics Computer Programs. University Press of Virginia, Charlottesville, Virginia, pp. 473-498

Nelson, H.D. and McVaugh J.M., (1976), The dynamics of rotor bearing systems using finite elements, Trans. ASME, J. Eng. Ind., 98(2), 593-600.

Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., uroishi. (1988), " Method of producing a functionally gradient material". U.S. Patent 457,1099.

Nguyen Dinh Kien. (2013), Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material. Composites : Part B 55 298–305

Nguyen-Xuan, H., Loc V. Tran, Chien H. Thai, T. Nguyen-Thoi. (2012), Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing. Thin-Walled Structures; 54 1–18.

Nie GJ, Zhong Z. (2007). Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 196, 4901-10

**O**h, S. Y., L. Librescu, and O. Song. (2005). Vibration and instability of functionally graded circular cylindrical spinning thin-walled beams. *Journal of Sound and Vibration* 285 (4–5):1071–91

Okabe, A., K. Shiohata, H. Fujiwara, S. Sakurai, T. Kudo, O. Matsushita, and H. Yoda. (2012). Reduced modeling for turbine rotor-blade coupled bending vibration analysis. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134 (2):022502.

Oyekoya, O.O., Mba D.U., El-Zafrany A.M. (2009), Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method. *Composite Structures*, 89, 134-142.

**P**araveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates, *International Journal of Solids and Structures*. 35 4457–4476.

Patel BP, Gupta SS, Loknath MS, Kadu CP. (2005). Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory. *Compos. Struct.* 69(3), 259-70

Pindera, M-J., Dunn, P. (1995), An Evaluation of Coupled Microstructural Approach for the Analysis of Functionally Graded Composites via the Finite Element Method, NASA CR 195455. Lewis Research Center, Cleveland, OH.

Piovan, M. T., and R. Sampaio. (2009). A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded properties. *Journal of Sound and Vibration* 327 (1-2):134–43.

Prohl, M.A., (1945), A general method for calculating the critical speeds of flexible rotors, *J. Appl. Mech.*, 12(3), 142-148.

Prakash T, Ganapathi M. (2006). Asymmetric flexural vibration and thermo elastic stability of FGM circular plates using finite element method. *Composites Part B* 37, 642-9

Prakash, T., Singha, M.K. and Ganapathi, M. (2009), Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates, *Computational Mechanics* 43 (3) 341–350.

**R**ao J.S., 1996, Rotor Dynamics, Third edition, New Age, New Delhi.

Ramesh, M. N. V., and N. Mohan Rao. (2014). Free vibration analysis of rotating functionally-graded cantilever beams. *International Journal of Acoustics and Vibration* 19 (1):31–41

Reddy, JN. (1997), On the dynamic behaviour of the Timoshenko beam finite elements, *Sadhana*; 24:175–98.

Reddy, JN. (2000), Analysis of functionally graded plates. *International journal for numerical methods in engineering*; 47:663–84

Ruhl, R.L. and Booker, J.F., (1972), A finite element model for distributed parameter turbogenerator system, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 94(1), 126-132.

**S**adowski T., Birsan, M. and Pietras, D. (2014), Multilayered and FGM structural elements under mechanical and thermal loads. Part I: Comparison of finite elements and analytical models, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*.15, 1180-1192.

Santos, I. F., C. M. Saracho, J. T. Smith, and J. Eiland. (2004). Contribution to experimental validation of linear and non-linear dynamic models for representing rotor–blade parametric coupled vibrations. *Journal of Sound and Vibration* 271 (3–5):883–904.

Shariyat, M. Asemi, K. (2014), Three-dimensional non-linear elasticity-based 3D cubic B-spline finite element shears buckling analysis of rectangular orthotropic FGM plates surrounded by elastic foundations. *Composites: Part B*, 56, 934–947.

Shen, H. S., (2009). *Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, New York: CRC Press.

Shi, G., Lam, K.Y. and Tay, T.E. (1998) , On efficient finite element modeling of composite beams and plates using higher-order theories and an accurate composite beam element, *Composite Structures*, 41 159–165.

Sinha, S. K. (2004). Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub. *Journal of Sound and Vibration* 273 (4–5):875–919.

Stodola, A., (1924), *Dampf- und Gasturbinen*, 4, Aufl., Berlin: Springer. English translation (1927), *Steam and Gas Turbines*, McGraw-Hill, New York

**T**an, T. H., H. P. Lee, and G. S. B. Leng. (1997). Dynamic stability of a radially rotating beam subjected to base excitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 146 (3–4):265–79.

Tondl, A., (1965), *Some Problems of Rotor Dynamics*, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, Czechoslovakia.

Torabi J, Ansari R. (2018), A higher-order isoparametric super element for free vibration analysis of functionally graded shells of revolution. *Thin Walled Struct.* 133, 169-79.

Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. and Topp, L.J., (1956), Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronautical Sciences*, 23, 805-823, 854.

Tufekci, E., U. Eroglu, and S. A. Aya. (2016). Exact solution for in-plane static problems of circular beams made of functionally graded materials. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 44 (4):476–94.

**W**ang, X., X. Liang, and C. Jin. (2017). Accurate dynamic analysis of functionally graded beams under a moving point load. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 45 (1):76–91.

**Y**amamoto, T., (1955), On the critical speed of a shaft of sub-harmonic oscillation, *Trans JSME*, 21(111), 853-858 (in Japanese).

Yang, C. H., and S. C. Huang. (2005). The coupled vibration in a shaft–disk–blades system. *Journal of the Chinese Institute of Engineers* 28 (1):89–99. d

Yang, C. H., and S. C. Huang. (2007). The influence of disk’s flexibility on coupling vibration of shaft–disk–blades systems. *Journal of Sound and Vibration* 301 (1–2) :1–17.

Yamamoto, T., (1957), On the vibrations of a rotating shaft, *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.*, 9(1), 25-40

Yao, M. H., Y. P. Chen, and W. Zhang. (2012). Nonlinear vibrations of blade with varying rotating speed. *Nonlinear Dynamics* 68 (4):487–504.

Yoshihisa, U., (2004). Properties of functionally graded materials, *Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications. Composites Part B, Volume 39*, pp. 39-51.

Yu, Z., Chu, F. (2009), Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method. *Journal of Sound and Vibration*; 325(1– 2):69-84.

**Z**hang, W., Y. X. Hao, and J. Yang. (2012). Nonlinear dynamics of FGM circular cylindrical shell with clamped–clamped edges. *Composite Structures* 94 (3):1075–86.

Zhang, D-G. and Zhou, Y-H. (2008), A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, *Computational Materials Science* 44,716–720.

### Webographie

[1] : <http://www.lightmypump.com/>

[2] : [www.siemens.com/energy](http://www.siemens.com/energy)

[3] : <http://www.theautochannel.com/>