

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Mémoire de Master

présenté par

Henaoui Zahia

Soutenu le : 26-09-2023

Thème :

CONVERGENCE EN MOYENNE DE SOMMES PONDÉRÉES
DE VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Soutenu devant le jury composé de :

Mme. BENYELLES WAFAA	M.C.B Université de Tlemccen	Présidente
Mme. BENYAHIA OUAHIBA	M.C.B Université de Tlemccen	Examinatrice
Mr. BOUKHARI FAKHERDDINE	Professeur Université de Tlemccen	Encadrant

Année universitaire : 2022 - 2023

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH le tout-puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience afin de mener à terme ce modeste travail.

Je voudrais dans un second temps remercier, mon directeur de mémoire M. Fakhreddine BOUKHARI, professeur de mathématiques à l'université de Tlemcen, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion, sans oublier sa participation au cheminement de ce mémoire.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de Tlemcen, et tous mes professeurs qui m'ont permis de par leurs enseignements de parvenir jusqu'à l'obtention de mon master et concrétiser mon projet d'études.

Je tiens à remercier par le biais de ce mémoire de fin d'études, toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin dans son élaboration.

Dédicaces

C'est avec joie que je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont fourni au quotidien un soutien et une confiance sans faille, ceux qui m'ont accompagné tout au long de ce parcours, ceux qui ont toujours cru en moi, mes chers parents.

Je dédie également ce mémoire :

À mon mari Anas.

À mes grandes sœurs, Hayat et Ranya.

À mon frère Diden.

À mes neveux, Amir, Siradj, Yanilou, et mes beaux frères.

À ma belle-famille.

À tous mes professeurs.

À mes camarades de la promo Statistiques et Probabilités Approfondies 2022-2023.

Que toute personne m'ayant aidé de près ou de loin, trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Table des matières

1	Convergence de suites de variables aléatoires réelles	2
1.1	Introduction	2
1.2	Convergence presque sûre :	2
1.3	Convergence en probabilité :	4
1.4	Convergence des moments :	5
1.5	L'uniforme intégrabilité	6
1.6	Liens entre les différents modes de convergence :	8
2	La convergence des sommes partielles dans L^p	11
2.1	Introduction :	11
2.2	Le résultat de Pyke et Root :	11
2.3	Le résultat de Chatterji :	12
2.4	Le résultat de Chow :	17
2.5	Le résultat de Dharmadhikari et Sreehari :	18
3	La convergence en probabilité de sommes pondérées de variables aléatoires	21
3.1	Introduction :	21
3.2	Convergence en probabilité :	22
	Bibliographie	30

Abréviations & Notations

$\mathbb{P}(A)$: La probabilité de l'évènement A .

$\mathbb{E}(X)$: L'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

$\mathbb{I}(A)$: La fonction indicatrice de l'ensemble A .

$\text{Var}(X)$: La variance de la variable aléatoire X .

$\text{cov}(X,Y)$: La covariance entre les variables aléatoires X et Y .

$|x|$: Valeur absolue de la variable x .

$[x]$: Partie entière de x .

$\max(A)$: Maximum de l'ensemble A .

$\min(A)$: Minimum de l'ensemble A .

x^+ : $\max(x,0)$.

x^- : $\min(x,0)$.

S_n : La somme partielle des X_n pour $n \geq 1$.

v.a : Variable aléatoire.

i.i.d : Indépendantes et identiquement distribuées.

p.s : Presque sûrement.

L.F.G.N : La loi forte des grands nombres.

Mots et phrases clés : Variables aléatoires indépendantes et deux à deux indépendantes, sommes pondérées de variables aléatoires, intégrabilité uniforme, convergence en probabilité, convergence presque sûre.

Introduction

L'étude de la convergence en moyenne des sommes pondérées de variables aléatoires réelles porte une importance cruciale dans la théorie des probabilités et des statistiques. Cette problématique s'inscrit au cœur de nombreuses applications pratiques, allant de l'analyse des performances des systèmes complexes à la modélisation des phénomènes aléatoires.

Le premier chapitre est consacré au rappel des principaux modes de convergences, ainsi que la comparaison entre ces modes. Les deux lois fondamentales sont aussi exposées dans cette partie du mémoire.

Dans le second chapitre, nous présentons d'abord les résultats du Pyke et Root, ensuite nous exposons le théorème de Chatterji. Cette partie contient également les résultats de Chow, où la condition de l'uniforme intégrabilité est utilisée.

Nous terminerons ce chapitre par les résultats de Dharmadhikari et Sreehari, où les variables aléatoires sont supposées former une suite de différence de martingale.

La dernière partie de ce mémoire est consacrée aux principaux résultats de l'article Wang et Rao, où le problème de la convergence en probabilité des sommes pondérées des variables aléatoires a été traité sous des conditions convenables sur la suite des poids.

Chapitre 1

Convergence de suites de variables aléatoires réelles

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux modes de convergence de suites de variables aléatoires : convergence en loi, en probabilité, presque sûre et dans L^p , en donnant les définitions, les propriétés, les plus importants théorèmes et quelques applications . On s'intéresse aussi aux liens qui peuvent exister entre ces quatre modes de convergence.

Notre deux principaux références pour ce chapitre est le livre A. Gut [1] et le polycopié Boukhari [2].

1.2 Convergence presque sûre :

Définition 1.2.1 : On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X , si

$$P \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} = 1,$$

on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

On montre souvent la convergence presque sûre en utilisant le lemme de Borel-Cantelli suivant :

Proposition 1.2.1 :(lemme de Borel-Cantelli)

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires, si pour tout $\varepsilon > 0$

On a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty,$$

alors X_n converge presque sûrement vers X .

Exemple 1.2.1 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles de loi définies par :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}, n \geq 1.$$

La suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire réelle égale à 0. En effet si $\varepsilon > 0$, alors on peut considérer les deux cas suivants :

Premier cas : $\varepsilon > 1$.

Il est clair que dans ce cas, on a pour tout $n \geq 1$.

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = 0.$$

Deuxième cas : $0 < \varepsilon \leq 1$.

Dans ce cas, on a

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^2},$$

comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$ ou bien

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty,$$

d'où $X_n \rightarrow 0$ p.s d'après la proposition précédente.

Nous montrons aussi la convergence presque sure en utilisant la loi forte des grands nombres.

Théorème 1.2.1 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi telle que $\mathbb{E}(X_1) < \infty$ alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X_1),$$

c.à.dire

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_1) \right) = 1.$$

1.3 Convergence en probabilité :

Définition 1.3.1 : On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X , si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

on note $X_n \xrightarrow{P} X$.

Afin de déterminer la convergence en probabilité, nous employons la loi faible des grands nombres.

Théorème 1.3.1 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d telle que $\mathbb{E}(X_1) < \infty$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1),$$

c.à.dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1) \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Exemple 1.3.1 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles de loi définies par :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

On a la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle 0.

En effet, soit $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \varepsilon \geq n, \\ 0 & \text{si } \varepsilon < n. \end{cases}$$

D'où :

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = 0,$$

ce qui établit la convergence en probabilité de la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ vers la variable aléatoire réelle X égale à 0.

Proposition 1.3.1 : Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ et $\{Y_n, n \geq 1\}$ deux suites de variables aléatoires réelles qui convergent en probabilité respectivement vers les variables X et Y alors

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.
2. $X_n - Y_n \xrightarrow{P} X - Y$.
3. $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$.
4. $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$ à condition que $Y_n \neq 0$ et $Y \neq 0$ p.s.
5. La limite en probabilité si elle existe est unique.
6. Continuité et convergence en probabilité,
 - (a) Soit $f : R \rightarrow R$ une fonction continue , alors on

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X).$$

- (b) Soit $f : R \rightarrow R$ une fonction bornée continue, alors on a

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{P} \mathbb{E}(f(X)).$$

1.4 Convergence des moments :

Définition 1.4.1 : Soit X une variable aléatoire réelle.

On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

On dit que X est de carré intégrable si $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$.

Si $p \geq 1$, on dit que X est dans $L^p(\Omega)$ si $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$.

Définition 1.4.2 : Soit la suite de variables aléatoires réelles $\{X_n, n \geq 1\}$ converge vers X dans L^p .

On dit que :

1. Pour $p = 1$, (X_n) converge dans L^1 (en moyenne) vers une variable aléatoire réelle X si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0,$$

et on note $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

2. Pour $p = 2$, (X_n) converge dans L^2 (en moyenne quadratique) vers une variable aléatoire réelle X si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) = 0,$$

et on note $X_n \xrightarrow{L^2} X$.

3. Pour $p > 2$, (X_n) converge dans L^p (en moyenne d'ordre p) vers une variable aléatoire réelle X si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^p) = 0,$$

et on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Exemple 1.4.1 : Considérons la suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - e^{-n}$ et e^{-n} , alors la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge vers 0 en moyenne.

En effet si $n \geq 1$, alors Dans ce cas, il est clair que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(|X_n - 0|) = \mathbb{E}(X_n) = e^{-n} \longrightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1.5 L'uniforme intégrabilité

Définition 1.5.1 : Soit T un ensemble non vide. la famille $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ de variables aléatoires réelles, est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \int_{\{|X_t| > \alpha\}} |X_t| d\mathbb{P} = 0.$$

Parfois il peut être difficile de vérifier directement l'uniforme intégrabilité. Voici quelques théorèmes.

Théorème 1.5.1 : Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires et supposons que

$$\sup_n E |X_n|^p < \infty \quad \text{pour } p > 1,$$

alors $\{X_n, n \geq 1\}$ est U.I. **Preuve :** On a pour tout $p > 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}\{|X_n| > \alpha\} &\leq \alpha^{1-p} \mathbb{E}|X_n|^p \mathbb{I}\{|X_n| > \alpha\} \leq \alpha^{1-p} \mathbb{E}|X_n|^p \\ &\leq \alpha^{1-p} \sup_n \mathbb{E}|X_n|^p \rightarrow 0 \quad \text{quand } \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc $\{|X_n|^p, n \geq 1\}$ est U.I. pour $p > 1$.

Théorème 1.5.2 : Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires et supposons que

$$|X_n| \leq Y \quad \text{p.s., } \forall n \geq 1,$$

où Y est une variable aléatoire positive et intégrable. Alors $\{X_n, n \geq 1\}$ est U.I.

Théorème 1.5.3 : Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires, sachant que

$$|X_n| \leq Y_n \quad \text{p.s., } \forall n \geq 1,$$

où Y_1, Y_2, \dots sont des variables aléatoires positives intégrables. Si $\{Y_n, n \geq 1\}$ est U.I, alors $\{X_n, n \geq 1\}$ l'est aussi.

Théorème 1.5.4 : Si $\{X_n, n \geq 1\}$ et $\{Y_n, n \geq 1\}$ sont U.I, alors $\{X_n + Y_n, n \geq 1\}$ est U.I.

La relation entre l'uniforme intégrabilité et les différents modes de convergence.

Théorème 1.5.5 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que $X_n \xrightarrow{P} X$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et soit $p > 0$, on a l'équivalence entre :

1. $\{|X_n|^p, n \geq 1\}$ est U.I.
2. $X_n \xrightarrow{L^p} X$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
3. $\mathbb{E}|X_n|^p \rightarrow \mathbb{E}|X|^p$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Théorème 1.5.6 : Supposons que $\{X_n, n \geq 1\}$ convergence vers X en probabilité, alors on a l'équivalence entre :

1. $\{X_n, n \geq 1\}$ converge vers X dans L^1 .
2. $\{X_n, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable.
3. $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite dans L^1 , et $X \in L^1$, et $\mathbb{E}|X_n| \rightarrow \mathbb{E}|X|$.

Théorème 1.5.7 : Pour $p \geq 1$ et $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variable aléatoire dans L^p , on a l'équivalence entre :

1. $\{X_n, n \geq 1\}$ converge dans L^p .
2. $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de Cauchy dans L^p , c'est à dire

$$\mathbb{E}|X_m - X_n|^p \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

3. $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en probabilité et $\{X_n^p\}$ est uniformément intégrable.

1.6 Liens entre les différents modes de convergence :

Liens entre convergence presque sûre et convergence en probabilité

Proposition 1.6.1 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles, alors

1. Si $\{X_n, n \geq 1\}$ converge presque sûrement vers X alors elle converge en probabilité vers X .

2. Il existe une suite $\{X_n, n \geq 1\}$ qui converge en probabilité mais qui ne converge pas presque sûrement.

3. Si $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en probabilité vers X alors il existe une suite de nombres naturels positifs $\{m_n, n \geq 1\}$ strictement croissante, telle que la sous-suite $\{X_{m_n}, n \geq 1\}$ converge presque sûrement vers X .

Remarque 1.6.1 : la convergence en probabilité seule n'implique pas la convergence presque sûre.

Exemple 1.6.1 :

Soit la suite de variables aléatoires indépendantes $\{X_n, n \geq 1\}$ où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$.

On a vu dans l'exemple (1.3.1) que cette suite converge en probabilité vers 0, cependant si $0 < \varepsilon < 1$, alors

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) < \infty = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty,$$

la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ ne peut pas converger vers 0 presque sûrement.

Liens entre convergence dans L^p et convergence en probabilité

Proposition 1.6.2 : Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $q \geq p$.

1. Si une suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge vers X dans L^q alors elle converge vers X dans L^p .

2. Si la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge vers X dans L^q , alors $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en probabilité vers X .

Théorème 1.6.1 : Si la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ convergence vers X en probabilité et U.I., alors (X_n) converge dans L^1 .

Remarque 1.6.2 : La réciproque est fautive : la convergence en probabilité seule n'implique pas la convergence. En effet :

Exemple 1.6.2 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ la suite de variables aléatoires où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et n avec les probabilités respectives $1 - \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que cette suite converge en probabilité vers 0. D'autre part

$$\mathbb{E}(|X_n - 0|) = \mathbb{E}(X_n) = 1,$$

ainsi la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ ne converge pas en moyenne.

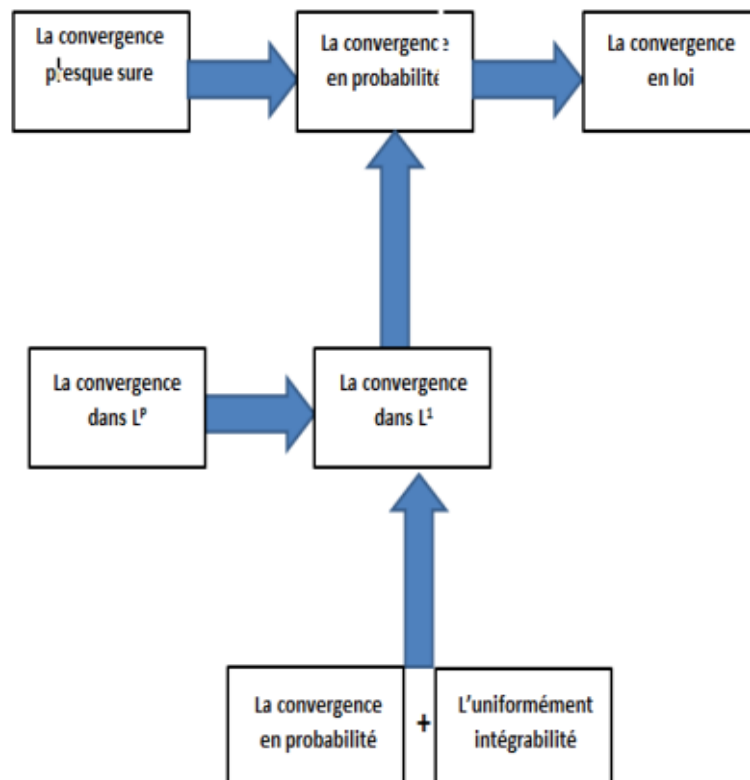
Pour récapituler, on a :

La convergence p.s. \Rightarrow la convergence en probabilité.

La convergence en moyenne \Rightarrow la convergence en probabilité.

La convergence en probabilité \Rightarrow la convergence p.s. pour une sous-suite.

La convergence en probabilité \Rightarrow la convergence dans L^1 si la suite est U.I.



Chapitre 2

La convergence des sommes partielles dans L^p

2.1 Introduction :

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires, on pose $S_n = \sum_1^n X_k$ pour $n \geq 1$, et $n \leq k \leq 1$

Pyke et Root [10], Chatterji [3] et Chow [4] ont prouvé que $E|S_n - b_n|^r = o(n)$, quand $0 < r < 2$ et $\{b_n\}$ est correctement choisi, sous des hypothèses de plus en plus faibles.

2.2 Le résultat de Pyke et Root :

Théorème de Marcinkiewicz 2.2.1 : Soient $0 < r < 2$, et $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. avec $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$,

supposons aussi que $\mathbb{E}X_1 = 0$ lorsque $1 \leq r < 2$. Alors

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Inversement, si $\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, et $\mathbb{E}X_1 = 0$ si $r \geq 1$.

Pyke et Root ont renforcé théorème de Marcinkiewicz en L^r prouvant que si les X_n sont i.i.d. avec $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$, alors $\mathbb{E}|S_n - b_n|^r = o(n)$, où $b_n = 0$ ou $\mathbb{E}(S_n)$ selon $r < 1$ ou $r \geq 1$.

Théorème 2.2.2 : Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables indépendantes et identiquement distribuées.

Pour chaque $r \in (0, 2)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\mathbb{E}|X_1|^r < \infty, \text{ avec } (\mathbb{E}X_1 = 0 \text{ si } r \geq 1).$$

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{p.s} 0.$$

$$\mathbb{E}|S_n|^r = o(n).$$

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{L^r} 0.$$

2.3 Le résultat de Chatterji :

Chatterji a prouvé une version renforcée de la même manière pour les martingales qui est une généralisation du Théorème de Marcinkiewicz.

Il a supposé que les X_n sont stochastiquement dominés par une variable aléatoire X avec $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ et où $\{b_n\}$ est convenablement modifié lorsque $r \geq 1$.

Le théorème de Chatterji contient celui de Pyke et Root et est prouvé en utilisant une forme raffinée de l'inégalité de Minkowski due à Esseen et Von Bahr[7] qui est énoncée comme Théorème (2.3.1).

L'inégalité de Minkowski

Théorème 2.2.1 :

Si $\mathbb{E}(X_k | X_1 + \dots + X_{k-1}) = 0$ (en particulier si X_k est une suite de différence de martingale) pour $2 \leq k \leq n$ et $X_k \in L^r, 1 \leq r \leq 2$ alors :

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n X_k \right|^r \leq \alpha \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^r.$$

où $\alpha \leq 2^{2-r} < 2$.

Lemme 2.3.1 : Soit $1 < r < 2$.

On a l'inégalité élémentaire

$$|a + b|^r \leq |a|^r + r|a|^{r-1} \cdot s(a)b + \alpha|b|^r$$

pour les nombres réels a, b ($s(a) = \text{signe de } a$).

Cette inégalité découle du fait que

$$\alpha = \sup_x \{ |1 + x|^r - 1 - rx \} / |x|^r$$

est définitif.

Preuve de l'inégalité :

(a) pour $r = 1$: $\mathbb{E} |X_1 + X_2| \leq \mathbb{E} |X_1| + \alpha \mathbb{E} |X_2|$.

(b) pour $r = 2$: $\mathbb{E} |X_1 + X_2|^2 \leq \mathbb{E} |X_1|^2 + \alpha \mathbb{E} |X_2|^2$.

(c) pour $1 < r < 2$: d'après l'inégalité précédente

$$\mathbb{E} |X_1 + X_2|^r \leq \mathbb{E} |X_1|^r + r \mathbb{E} |X_2|^{r-1} s(\mathbb{E}(X_1)) \mathbb{E}(X_2) + \alpha \mathbb{E} |X_2|^r.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_2|^{r-1} s(\mathbb{E}(X_1))X_2) &= \mathbb{E} \mathbb{E}(|X_2|^{r-1} s(\mathbb{E}(X_1))X_2 / F_1) \\ &= \mathbb{E}((|X_2|^{r-1} s(\mathbb{E}(X_1))) \mathbb{E}(X_2 / F_1)) \end{aligned}$$

on sait que $\mathbb{E}(X_2 / F_1) = 0$ donc

$$\mathbb{E} |X_1 + X_2|^r \leq \mathbb{E} |X_1|^r + \alpha \mathbb{E} |X_2|^r$$

.

Théorème 2.3.2 : Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ et X des variables réelles telles que :

$X \in L^r, 0 < r < 2, r \neq 1$ et $\mathbb{P}(|X_n| \geq x) \leq \mathbb{P}(|X| \geq x), 0 \leq x < \infty$ ou

$X \in L^1$ et $\mathbb{P}(|X_n| \geq x | X_1 \cdots X_{n-1}) \leq \mathbb{P}(|X| \geq x | X_1 \cdots X_{n-1})$ p.s.

Alors

$$\lim_n n^{-1/r} \sum_{k=1}^n (X_k - b_k) = 0 \text{ p.s. et dans } L^r,$$

où $b_k = 0$ si $0 < r < 1$ et $b_k = \mathbb{E}(X_k | X_1 \cdots X_{k-1})$ si $1 \leq r < 2$.

Preuve :

La condition $\mathbb{P}(|X_n| \geq x) \leq \mathbb{P}(|X| \geq x)$ avec $X \in L^r$ implique que $X_n \in L^r$, $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^r \leq \mathbb{E}|X|^r$ et

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

où $A_n = \{|X_n| \geq n^{1/r}\}$,

$$(b) \quad \sum_n n^{-1/r} \mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}_{B_n} < \infty \text{ pour } 0 < r < 1, \quad B_n = \{|X_n| < n^{1/r}\},$$

$$\sum_n n^{-1/r} \mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}_{A_n} < \infty \quad \text{pour } 1 < r < 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}_{A_n} = 0 \quad \text{pour } r = 1,$$

$$(c) \quad \sum_n n^{-2/r} \mathbb{E}|X_n|^2 \mathbb{I}_{B_n} < \infty.$$

La preuve de (a)-(c) est standard et dépend uniquement de la domination de $|X|$ sur $|X_n|$. Nous mettons $g_n = X_n \cdot \mathbb{I}_{B_n}$, $h_n = X_n - g_n$. Dans le cas $0 < r < 1$.

Dans l'identité

$$\sum n^{-1/r} X_n = \sum n^{-1/r} (g_n - \beta_n) + \sum n^{-1/r} h_n + \sum n^{-1/r} \beta_n$$

quand $\beta_n = E(g_n | X_1 \cdots X_{n-1})$, le premier terme du côté droit converge p.s. et dans L^2 (et donc dans $L^r, r < 2$) à cause de (c) et le théorème de martingale

Le deuxième terme converge p.s. puisque par (a) $h_n = 0$ pour n .

Le troisième terme converge p.s, et dans L^1 (et donc dans $L^r, r < 1$) car

$$\sum n^{-1/r} \mathbb{E}|\beta_n| \leq \sum n^{-1/r} \mathbb{E}|g_n| = \sum n^{-1/r} \mathbb{E}|X_n| \mathbb{I}_{B_n} < \infty \quad \text{par (b)}.$$

Utilisons maintenant l'identité

$$n^{-1/r} \sum_1^n X_k = n^{-1/r} \sum_1^n (g_k - \beta_k) + n^{-1/r} \sum_1^n h_k + n^{-1/r} \sum_1^n \beta_k$$

Nous voyons que la preuve sera complète si nous pouvons montrer que le deuxième terme à droite converge dans L^r c'est-à-dire

$$n^{-1} \mathbb{E} \left| \sum_1^n h_k \right|^r \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

pour $0 < r < 1$

$$n^{-1} \mathbb{E} \left| \sum_1^n h_k \right|^r \leq n^{-1} \sum_1^n \mathbb{E} |h_k|^r \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

comme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |h_k|^r = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X_k|^r \mathbb{I}_{A_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X|^r \mathbb{I}_{|X| \geq k^{1/r}} = 0$$

.

Considérons maintenant le cas $1 < r < 2$.

Dans l'identité

$$\sum n^{-1/r} (X_n - \alpha_n) = \sum n^{-1/r} (g_n - \beta_n) + \sum n^{-1/r} (h_n + \beta_n - \alpha_n)$$

le premier terme à droite converge p.s et dans L^2 comme avant et le second converge p.s et dans L^1 puisque $\beta_n - \alpha_n = E(-h_n | X_1 \cdots X_{n-1})$ et

$$\sum n^{-1/r} \mathbb{E} |h_n + \beta_n - \alpha_n| \leq 2 \sum n^{-1/r} \mathbb{E} |h_n| = 2 \sum n^{-1/r} \mathbb{E} |X_n| \mathbb{I}_{A_n} < \infty$$

par (b). En argumentant comme précédemment, la preuve sera complétée en montrant que

$$n^{-1/r} \sum_1^n (h_k + \beta_k - \alpha_k) \rightarrow 0 \text{ dans } L^r$$

i.e. $n^{-1} \mathbb{E} \left| \sum_1^n (h_k + \beta_k - \alpha_k) \right|^r \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

on utilisons le lemme précédent

$h_k + \beta_k - \alpha_k$ est une suite de différence de martingale

$$\begin{aligned}
n^{-1} \mathbb{E} \left| \sum_1^n (h_k + \beta_k - \alpha_k) \right|^r &\leq 2n^{-1} \sum_1^n \mathbb{E} |h_k + \beta_k - \alpha_k|^r \\
&\leq 2^r n^{-1} \sum_1^n \{ \mathbb{E} |h_k|^r + \mathbb{E} |\beta_k - \alpha_k|^r \} \\
&\leq 2^{r+1} n^{-1} \sum_1^n \mathbb{E} |h_k|^r \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |h_k|^r \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} |X|^r \mathbb{I} |X| \geq k^{1/r} = 0$.

La preuve pour $r = 1$ est la même que précédemment à un petit détail . Dans l'identité

$$n^{-1} \sum_1^n (X_k - \alpha_k) = n^{-1} \sum_1^n (g_k - \beta_k) + n^{-1} \sum_1^n (h_k + \beta_k - \alpha_k)$$

Le premier terme à droite converge p.s. et dans L^2 vers 0 comme avant et le second converge vers 0 dans L^1 puisque $\mathbb{E} |h_k + \beta_k - \alpha_k| \leq 2\mathbb{E} |h_k| \rightarrow 0$ par (b)

Nous devons simplement garantir la convergence p.s du deuxième terme. Puisque $h_k \rightarrow 0$ p.s. par (a), il suffira de montrer que $\lim (\beta_k - \alpha_k) = 0$ p.s.

Nous utilisons l'hypothèse la plus forte formulée pour le cas $r = 1$.

Nous montrerons que si

$$\delta_k = \mathbb{E} (|h_k| \mid X_1 \cdots X_{k-1})$$

puis $\delta_k \rightarrow 0$ p.s. ce qui est certainement suffisant. Un simple calcul montre que

$$\delta_k \leq 2\mathbb{E} (X_k \mid X_1 \cdots X_{k-1})$$

où $X_k = |X| \cdot 1_{\{|X| \geq k\}}$. En utilisant le fait que $X_{n+1} \leq X_n$ on voit que

$\mathbb{E} (X_k \mid X_1 \cdots X_{k-1})$ est une martingale positive. En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} (X_n \mid X_1 \cdots X_{n-1}) &\geq \mathbb{E} (X_{n+1} \mid X_1 \cdots X_{n-1}) \\
&= \mathbb{E} (\mathbb{E} (X_{n+1} \mid X_1 \cdots X_n) \mid X_1 \cdots X_{n-1})
\end{aligned}$$

Puisque toute martingale positive converge p.s. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} (X_k \mid X_1 \cdots X_{k-1}) = X$ existe

Mais $\mathbb{E}X \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X| \mathbb{I}_{|X| \geq k} = 0$ de sorte que X étant non négatif doit être nul p.s.

D'où $\lim \delta_k = 0$ p.s. Le théorème est donc complètement prouvé.

2.4 Le résultat de Chow :

Chow a prouvé le résultat de Chatterji sous l'hypothèse $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable, le résultat suivant affaiblit la condition de domination de [3] à l'uniformement intégrabilité.

Théorème 2.4.1 : Soit $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires U.I. pour certains $0 < r < 2$.

$$\mathbb{E}|S_n - b_n|^r = o(n),$$

pour $n \rightarrow \infty$, où $b_n = 0$ si $0 < r < 1$, et $b_n = \sum_1^n \mathbb{E}(X_k | X_1, \dots, X_{k-1})$ si $1 \leq r < 2$.

Preuve :

Définissons $Y_k = X_k$ si $0 < r < 1$ et $Y_k = X_k - \mathbb{E}(X_k | X_1, \dots, X_{k-1})$ pour $1 \leq r < 2$.

nous remarquons que si $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable, $(\mathbb{E}(|X_n|^r | X_1, \dots, X_{k-1}), n \geq 1)$. Par conséquent $\{|Y_n|^r, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable.

Pour $\varepsilon > 0$, soit $M > 0$ pour que $\int_{|Y_n| > M} |Y_n|^r < \varepsilon$ pour tous $n \geq 1$. On pose

$$Y_n' = Y_n \mathbb{I}_{|Y_n| \leq M}, \quad Y_n'' = Y_n - Y_n'.$$

(a) Si $0 < r < 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S_n|^r &= \mathbb{E} \left| \sum_1^n (Y_k' + Y_k'') \right|^r \leq \mathbb{E} \left(\sum_1^n |Y_k'| \right)^r + \mathbb{E} \left(\sum_1^n |Y_k''| \right)^r \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sum_1^n |Y_k'| \right)^r + \sum_1^n \mathbb{E} |Y_k''|^r \leq (nM)^r + n\varepsilon, \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{E}|S_n|^r = o(n)$ quand $n \rightarrow \infty$.

(b) Si $1 < r < 2$:

Par inégalité de Burkholder , il existe une constante $A_r > 0$ satisfaisant

$$A_r \mathbb{E} \left| \sum_1^n Y_k \right|^r \leq \mathbb{E} \left(\sum_1^n Y_k^2 \right)^{r/2}, \quad n \geq 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A_r \mathbb{E} |S_n - a_n|^r &= A_r \mathbb{E} \left| \sum_1^n Y_k \right|^r \leq \mathbb{E} \left(\sum_1^n Y_k^2 \right)^{r/2} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_1^n (Y_k'^2 + Y_k''^2) \right\}^{r/2} \leq \mathbb{E} \left(\sum_1^n Y_k'^2 \right)^{r/2} + \mathbb{E} \left(\sum_1^n Y_k''^2 \right)^{r/2} \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sum_1^n Y_k'^2 \right)^{r/2} + \mathbb{E} \sum_1^n |Y_k''|^r \leq (nM^2)^{r/2} + n\varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathbb{E} |S_n - b_n|^r = o(n)$ quand $n \rightarrow \infty$.

2.5 Le résultat de Dharmadhikari et Sreehari :

Le but de Dharmadhikari et Sreehari est de donner une preuve assez élémentaire du résultat de Chow dans des conditions plus faibles.

La preuve est une modification [6] de convergence moyenne dans la loi des grands nombres pour les variables aléatoires i.i.d.

Théorème 2.5.1 : Soit $0 < r < 2$. Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires vérifiant $\sup_n \mathbb{E} |X_n|^r < \infty$.

Pour une suite $\{a_n\}$ de constantes positives, on pose $A_n = [|X_n| \geq a_n]$ et on suppose $\mathbb{E} (|X_n|^r \mathbb{I}_{A_n}) \rightarrow 0$, si

- $0 < r < 1$ et $\sum_1^n a_k^{1-r} = o(n^{1/r})$, ou
- $1 \leq r < 2$, $\{X_n\}$ est une suite de différence de martingale et $\sum_1^n a_k^{2-r} = o(n^{2/r})$, alors $\mathbb{E} |S_n|^r = o(n)$.

Preuve :

Soit $M = \sup_n \mathbb{E} |X_n|^r$, $V_n = X_n \mathbb{I}_{A_n}$ et $U_n = X_n - V_n$. Notons \mathcal{B}_n la tribu.

Tel que $\alpha_n = \mathbb{E}(U_n | \mathcal{B}_{n-1})$ ou 0 selon $r \geq 1$ ou $r < 1$.

Soit $Y_n = U_n - \alpha_n$, $Z_n = V_n + \alpha_n$, $T_n = \sum_1^n Y_k$ et $W_n = \sum_1^n Z_k$.

Alors $S_n = T_n + W_n$, et nous aurions $\mathbb{E} |S_n|^r = o(n)$ dès que nous prouvons que $\mathbb{E} |T_n|^r = o(n)$ et $\mathbb{E} |W_n|^r = o(n)$.

Supposons d'abord que $1 \leq r < 2$, $\sum_1^n a_k^{2-r} = o(n^{2/r})$ et que $\{X_n\}$ est une suite de différence martingale . Alors

$$\alpha_n = \mathbb{E}(U_n | \mathcal{B}_{n-1}) = -E(V_n | \mathcal{B}_{n-1})$$

Donc par l'inégalité de Jensen,

$$|\alpha_n|^r \leq \mathbb{E}(|U_n|^r | \mathcal{B}_{n-1}) p.s.$$

et

$$|\alpha_n|^r \leq \mathbb{E}(|V_n|^r | \mathcal{B}_{n-1}) p.s.$$

ainsi

$$(1) \mathbb{E} |\alpha_n|^r \leq \mathbb{E} |U_n|^r \leq \mathbb{E} |X_n|^r \leq M$$

et

$$(2) \mathbb{E} |\alpha_n|^r \leq \mathbb{E} |V_n|^r = \mathbb{E} (|X_n|^r \mathbb{I}_{A_n}) \rightarrow 0.$$

D'après (2), $\mathbb{E} |Z_n|^r \leq 2^r \mathbb{E} |V_n|^r \rightarrow 0$ et de plus $\{Z_n\}$ est une suite de différence martingale . Donc, par le lemme, $\mathbb{E} |W_n|^r \leq 2^{2-r} \sum_1^n \mathbb{E} |Z_k|^r = o(n)$.

Maintenant $\{Y_n\}$ est aussi une suite de différence martingale avec $|Y_n| \leq 2a_n$ p.s. et (1) montre que $\mathbb{E} |Y_n|^r \leq 2^r M$.

Par conséquent, les Y_n n'étant pas corrélés, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (T_n^2) &= \sum_1^n \mathbb{E} (Y_k^2) \leq \sum_1^n (2a_k)^{2-r} \mathbb{E} |Y_k|^r \\ &\leq 4M \sum_1^n a_k^{2-r} = o(n^{2/r}). \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E} |T_n|^r \leq [\mathbb{E} (T_n^2)]^{r/2} = o(n)$, ceci prouve l'assertion pour le cas $r \geq 1$.

Supposons maintenant que $0 < r < 1$ et $\sum_1^n a_k^{1-r} = o(n^{1/r})$.

Nous définissons $\alpha_n = 0$, $Y_n = U_n$ et $Z_n = V_n$, par hypothèse

$$E |V_n|^r = E (|X_n|^r \mathbb{I}_{A_n}) \rightarrow 0.$$

Donc $\mathbb{E} |W_n|^r \leq \sum_1^n \mathbb{E} |V_k|^r = o(n)$, de plus $\mathbb{E} |U_n|^r \leq \mathbb{E} |X_n|^r \leq M$.

Ainsi

$$\mathbb{E} |T_n| \leq \sum_1^n \mathbb{E} |U_k| \leq \sum_1^n a_k^{1-r} \mathbb{E} |U_k|^r \leq M \sum_1^n a_k^{1-r} = o(n^{1/r})$$

Donc $\mathbb{E} |T_n|^r \leq [\mathbb{E} |T_n|]^r = o(n)$

Ceci prouve l'assertion pour le cas $r < 1$.

Chapitre 3

La convergence en probabilité de sommes pondérées de variables aléatoires

3.1 Introduction :

Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{B}, P) et $\{a_{nk}, n \geq 1, k \geq 1\}$ un double tableau de nombres réels.

Des théorèmes limites ont été étudiés dans la littérature pour la suite $\{\sum_{k \geq 1} a_{nk} X_k, n \geq 1, k \geq 1\}$ de sommes pondérées de la suite $\{X_n\}$ sous certaines conditions sur le double tableau de nombres et sur la distribution de la suite $\{X_n, n \geq 1\}$.

Jamison, Orey et Pruitt (1965) [8] ont étudié la convergence presque sûre des sommes pondérées sous l'hypothèse que la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ soit indépendante et identiquement distribuée avec $\mathbb{E}|X_1| < \infty$.

Wang et Rao ont étendu le résultat de Jamison, Orey et Pruitt [8] sur la convergence presque sûre pour couvrir le cas de suites deux à deux indépendantes et identiquement distribuées $\{X_n, n \geq 1\}$ avec $\mathbb{E}|X_1| < \infty$.

Etemadi a montré que la Loi Forte des Grands Nombres est valable pour des suites $\{X_n, n \geq 1\}$ deux à deux indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}|X_1| < \infty$.

Concernant la convergence en probabilité de la suite de sommes pondérées, elle a été étudiée sous la condition suivante :

(A) Il existe une variable aléatoire X telle que $\mathbb{E}|X|^s < \infty$ pour $s \geq 1$ et $\mathbb{P}\{|X_n| \geq x\} \leq \mathbb{P}\{|X| \geq x\}$.

Pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 1$. Rohatgi[11]. Wei et Taylor ont montré que si

(B) $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}|X_n|^r < \infty$ pour $r > 0$, alors (A) est vrai pour tout $0 \leq s < r$

Wang et Rao ont étudié la convergence en probabilité pour des suites de sommes pondérées en supposant que $\{X_n, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable.

3.2 Convergence en probabilité :

Wang et Rao ont présenté quelques résultats sur la convergence des sommes pondérées à partir desquels la loi faible des grands nombres est dérivable, le Théorème 3.2.1 généralise certains résultats de la littérature dans ce domaine.

Théorème 3.2.1 :

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes telle que $\{X_n\}$ est uniformément intégrable, et soit $\{a_{nk}, n \geq 1, k \geq 1\}$ un double tableau de nombres réels satisfaisant :

(i) $\sum_{k \geq 1} |a_{nk}| \leq C$ pour tout $n \geq 1$ et $C > 0$.

(ii) $\max_{k \geq 1} |a_{nk}| \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Alors $\sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k)$, $n \geq 1$ converge vers 0 en moyenne.

Preuve :

Il est clair que la série $\sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k)$ converge absolument p.s.

pour tout $n \geq 1$ puisque $\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}|X_k| < \infty$ et $\sum_{k \geq 1} |a_{nk}|$ est convergente.

Soit $t > 0$.

On montre d'abord la convergence en probabilité, i.e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k) \right| > t \right\} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\{X_k, k \geq 1\}$ est uniformément intégrable, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{k \geq 1} \int_A |X_k| d\mathbb{P} < \varepsilon t / 8C \quad (3.1)$$

chaque fois que $A \in \mathcal{B}$ et $\mathbb{P}(A) < \delta$.

De plus, par l'inégalité de Chebychev, pour tout $m > 0$ et $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}\{|X_k| > m\} \leq \frac{\mathbb{E}|X_k|}{m} \leq \frac{\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}|X_k|}{m}.$$

Il existe $a > 0$ tel que

$$\sup_{k \geq 1} \mathbb{P}\{|X_k| > a\} < \delta. \quad (3.2)$$

Définissons pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{cases} X_k & \text{si } |X_k| \leq a \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

et $Z_k = X_k - Y_k$

Notez que $Y_k, k \geq 1$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes satisfaisant $|Y_k - \mathbb{E}Y_k| \leq 2a$ pour chaque $k \geq 1$.

Par (3.1) et (3.2), on a pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}|Z_k| = \int_{\{|X_k| \geq a\}} |X_k| d\mathbb{P} < \varepsilon t / 8C$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} (Z_k - \mathbb{E}Z_k) \right| \leq \sum_{k \geq 1} |a_{nk}| \mathbb{E}|Z_k - \mathbb{E}Z_k| \leq 2 \sum_{k \geq 1} |a_{nk}| \mathbb{E}|Z_k| < \varepsilon t / 4.$$

Par conséquent, par l'inégalité de Chebychev, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} (Z_k - \mathbb{E}Z_k) \right| > t/2 \right\} < \varepsilon/2. \quad (3.3)$$

Ensuite, on choisit $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$\max_{k \geq 1} |a_{nk}| < \varepsilon t^2 / 32a^2 C.$$

On observe que pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} (Y_k - \mathbb{E}Y_k) \right| > t/2 \right\} &\leq (4/t^2) \operatorname{var} \left(\sum_{k \geq 1} a_{nk} (Y_k - \mathbb{E}Y_k) \right) \\ &= (4/t^2) \sum_{k \geq 1} a_{nk}^2 \mathbb{E} (Y_k - \mathbb{E}Y_k)^2 \\ &\leq (4/t^2) \left(\max_{k \geq 1} |a_{nk}| \right) \sum_{k \geq 1} |a_{nk}| \mathbb{E} (Y_k - \mathbb{E}Y_k)^2 \\ &< \varepsilon/2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Enfin, (3.3) et (3.4) donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k) \right| > t \right\} &\leq \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} (Y_k - \mathbb{E}Y_k) \right| > t/2 \right\} \\ &\quad + \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} (Z_k - \mathbb{E}Z_k) \right| > t/2 \right\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

pour tout $n \geq N$, donc $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k), n \geq 1 \right\}$ converge vers 0 en probabilité.

Il suffit de montrer que $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k), n \geq 1 \right\}$ est uniformément intégrable, pour établir la convergence en moyenne.

Comme $\{X_k, k \geq 1\}$ est uniformément intégrable et $\sum_{k \geq 1} |a_{nk}| \leq C$ pour tout $n \geq 1$, alors $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k), n \geq 1 \right\}$ est uniformément intégrable.

Donc d'après le théorème précédent $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k), n \geq 1 \right\}$ converge vers 0 en moyenne.

Théorème 3.2.2 : Voir Chung [[5], Théorème 4.5.4, p.97]

Soit $0 < r < \infty$, $X_n \in L^r$ et X_n converge vers X en probabilité. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable.

$X_n \longrightarrow X$ en L^r .

$\mathbb{E}(|X_n|^r) \longrightarrow \mathbb{E}(|X|^r)$.

Remarques 3.2.1 :

Rohatgi [[11], Théorème 1, p. 305] a montré que $\{\sum_{k \geq 1} a_{nk} (X_k - \mathbb{E}X_k), n \geq 1\}$ converge vers 0 en probabilité sous les conditions suivantes :

(i) $\{X_n, n \geq 1\}$ sont indépendantes.

(ii) Il existe une variable aléatoire X telle que $\mathbb{E}|X| < \infty$ et $\mathbb{P}\{|X_n| \geq x\} \leq \mathbb{P}\{|X| \geq x\}$.

(iii) Le double tableau $\{a_{nk}, n \geq 1, k \geq 1\}$ de nombres réels satisfait (i) et (ii) de Théorème 3.2.1

Le résultat de Rohatgi est une généralisation d'un résultat de Pruitt[6, Théorème 1, p. 770] qui partait de l'hypothèse que $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}|X_1| < \infty$.

Le Théorème 3.2.1 généralise le résultat de Rohatgi. De plus, la preuve est plus simple que celle présentée par Rohatgi.

La différence essentielle dans les preuves réside dans le fait que l'on tronque chaque X_n en un point fixe a , alors que Rohatgi a tronqué X_n en a_n avec n variant.

Pour illustrer la puissance du Théorème 3.2.1 sur le théorème de Rohatgi, considérons l'exemple suivant.

Exemple :

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n ayant la loi suivante.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_n = n\} &= \mathbb{P}\{X_n = -n\} = 1/2n \log(n+1). \\ \mathbb{P}\{X_n = 0\} &= 1 - (1/n \log(n+1)). \end{aligned}$$

La suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable. Mais (A) n'est pas valable pour la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ avec $s = 1$

Le théorème de Rohatgi n'est pas applicable pour déterminer la convergence de $\left\{ (1/n) \sum_{k \geq 1} X_k, n \geq 1 \right\}$ vers 0 en probabilité .

Mais d'après le Théorème 3.2.1, la suite $\left\{ (1/n) \sum_{k \geq 1} X_k, n \geq 1 \right\}$ converge effectivement vers 0 en probabilité.

Chung [[5], Théorème 5.2.2, p. 109] a prouvé (attribué à Khintchine) le résultat que $\left\{ (1/n)(X_1 + X_2 + \dots + X_n), n \geq 1 \right\}$ converge vers $\mathbb{E}X_1$ en probabilité si $\{X_n, n \geq 1\}$ est une suite de variable aléatoires deux à deux indépendantes distribuées de manière identique avec $\mathbb{E}|X_1| < \infty$.

Le Théorème 3.2.1 généralise ce résultat. De plus, la preuve présentée ici est beaucoup plus simple que celle présentée par Chung.

Wang et Rao ont imposé une condition plus forte sur le double tableau, pour établir une loi faible des grands nombres pour les sommes pondérées sans l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires mais en présence d'une intégrabilité uniforme.

Théorème 3.2.3 :

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{B}, P) telle que $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable pour $0 < r < 1$.

Soit $\{a_{nk}, n \geq 1, k \geq 1\}$ un double tableau de nombres réels satisfaisant.

- (i) $\sum_{k \geq 1} |a_{nk}|^r \leq C$ pour tout $n \geq 1$ pour une constante $C > 0$.
- (ii) $\max_{k \geq 1} |a_{nk}|, n \geq 1$ converge vers 0.

Alors $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} X_k, n \geq 1 \right\}$ converge vers 0 en moyenne.

Preuve :

Cela peut être prouvé par une simple modification de la preuve du Théorème 3.2.1.

La série $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} X_k, n \geq 1 \right\}$ converge absolument p.s pour chaque $n \geq 1$ puisque $\sum_{k \geq 1} |a_{nk}|^r |X_k|^r$ converge p.s et $0 < r < 1$.

L'inégalité (3.1) prend la forme

$$\sup_{k \geq 1} \int_A |X_k|^r d\mathbb{P} < \varepsilon t / 8C$$

et l'inégalité (3.2) reste intacte telle que les suites $\{Y_k, k \geq 1\}$ et $\{Z_k, k \geq 1\}$ sont définis exactement de la même manière que dans la preuve ci-dessus.

La probabilité $\mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} Z_k \right| > t/2 \right\}$ est estimé par $\left\{ \sum_{k \geq 1} |a_{nk}|^r \mathbb{E} |Z_k|^r \right\}$

Maintenant le point de départ dans la preuve du Théorème 3.2.1, nous avons montré que $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} (Y_k - \mathbb{E} Y_k) \right\}$ converge vers 0 en probabilité

Dans les conditions du Théorème 3.2.2, nous pouvons faire mieux que cela. la suite $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} Y_k, n \geq 1 \right\}$ converge bien vers 0 p.s.

Cela découle de la chaîne d'inégalités suivante. Pour chaque $n \geq 1$

$$\left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} Y_k \right| \leq a \sum_{k \geq 1} |a_{nk}| \leq a (\max_{k \geq 1} |a_{nk}|)^{1-r} \sum_{k \geq 1} |a_{nk}|^r$$

Il s'ensuit maintenant que $\left\{ \sum_{k \geq 1} a_{nk} X_k, n \geq 1 \right\}$ converge vers 0 en probabilité.

Pour établir la convergence dans L^r , il suffit de montrer que $\left\{ \left| \sum_{k \geq 1} a_{nk} X_k \right|^r, n \geq 1 \right\}$ est uniformément intégrable.

Remarques 3.2.2 :

Rohatgi [7, Théorème 1, p.305] a établi une conclusion plus faible que celle donnée ci-dessus dans des conditions plus fortes que la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est distribuée indépendamment et que (A) est valable pour la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ avec $s = r$.

L'amélioration majeure apportée par le Théorème 3.2.2 par rapport au théorème de Rohatgi est l'abandon de l'hypothèse d'indépendance.

Conclusion

Comme expliqué dans les chapitres de cet ouvrage, les deux notions importantes de convergence en moyenne sont la convergence en probabilité et la convergence presque sûre. La première se distingue à la convergence de la distribution des moyennes pondérées, tandis que la seconde se réfère à la convergence presque partout des valeurs elles-mêmes.

En conclusion, la convergence en moyenne de sommes pondérées de variables aléatoires réelles offre un cadre mathématique pertinent, ce qui nous facilite la compréhension du comportement des données aléatoires à grande échelle, cela reste indispensable pour de nombreuses applications tels que le domaine de la science, de l'ingénierie, de la recherche, de l'économie et de la finance.

Cela nous permet également de faire des prédictions fiables, afin de prendre des décisions claires, en se basant sur des données empiriques. Cette convergence permet notamment, de comprendre comment les moyennes pondérées de variables aléatoires tendent vers une valeur limite lorsque le nombre d'observations augmente.

Bibliographie

- [1] Allan Gut, (2005) . *Probability : A Graduate Course*. Springer texts in statistics.

- [2] Boukhari,F (2017) . *Cours de Probabilités*, Université Abou Bekr Belkaid.

- [3] Chatterji, S. D. (1969) *An L_p -convergence theorem* . Ann. Math. Statist , 40 1068-1070.

- [4] Chow ,Y.S (1971) *On the L_p -convergence for $n^{1/p}S_n$, $0 < p < 2$* Ann. Math. Statist, 42 393-394

- [5] Chung, K.L. (1974) *A Course in Probability Theory*, Second Edition, Academic Press, New York,.

- [6] Dharmadhikari ,S.W (1976) *A Simple Proof of Mean Convergence in the Law of Large Numbers*. The American Mathematical Monthly , 83(6), pp. 474-475

- [7] Essen ,C.,and Von Bahr,B.(1965) *Inequalitie for the r th absolute moment of sum of random variables , $0 < r \leq 2$* Ann. Math. Statist ,36 299-303.

- [8] Jamison, B., Orey, S. and Pruitt, W.(1965) *Convergence of Weighted Averages of Independent Random Variables*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete, ,40-44.

- [9] Pruitt, W.E. (1966) *Summability of Independent Random variables*, J. Math. Mech., 15, 769-776.
- [10] Pyke,R .and Root,D (1968) *On convergence in r -mean of normalized partial sums*, Ann.Math.Statist ,39 379-381.
- [11] Rohatgi, V.K. (1971) *Convergence of weighted sums of independent random variables*, Proc. Camb. Phil. Soc., 69, 305-307.