

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Présenté par

HACHEMI Nadjlae

Soutenu le : Septembre 2023

Thème :

Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques "ARCH"

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. A. ALLAM	M.C.A, Université de Tlemccen	Président
Mme. N. BENSMAIN	M.C.B, Université de Tlemccen	Examinatrice
Mme. S. BOUKHIAR	M.C.B, Université de Tlemccen	Encadrante

Année universitaire : 2023 - 2024

Table des matières

Table des matières	2
1 Processus stochastiques et modèle de séries chronologiques	11
1.1 Les séries temporelles	11
1.1.1 Vocabulaire et exemples	11
1.1.2 La modélisation d'une série temporelle	12
1.1.3 Les modèles d'une série temporelle	16
1.2 La volatilité	18
1.3 La stationnarité	19
1.3.1 La stationnarité au sens stricte	20
1.3.2 La stationnarité du second ordre (faible)	20
1.3.3 Le processus Bruit blanc	21
1.3.4 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation .	22
1.3.5 La décomposition de Wold	23

1.3.6	La notion de mémoire longue	24
1.4	Les modèles linéaire	26
1.4.1	Les opérateurs sur les série temporelles	26
1.4.2	le processus ARMA	28
1.5	Introduction ARGH	33
1.5.1	Hétéroscédasticité	33
1.5.2	Processus ARCH	35
2	Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscé-	
	dastiques "ARCH"	36
2.1	Intoduction	36
2.2	Présentation des modèles ARCH	37
2.2.1	Le modèle ARCH(1)	37
2.2.2	Le modèle ARCH(p)	48
2.2.3	Modèles avec erreurs ARCH	51
2.3	Estimation et prévision	55
2.3.1	Méthode d'estimation des moindres carrés	56
2.3.2	La méthode de la fonction auto-corrélation	64
2.3.3	Prévision et intervalle de confiance	65
3	Étude numérique	69
3.1	Simulation d'un processus ARCH(p)	69

3.1.1	Simulation d'un processus avec erreur ARCH . .	70
3.1.2	Données réelles	72
3.1.3	Prévision statistique	73

Bibliographie		84
----------------------	--	-----------

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage, la force et la volonté de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir durant toutes mes années d'études.

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Mme **BOUKHIAR Souad** qui m'a encadré tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail, j'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.*

*Je tiens à remercier également Mr **ALLAM Abdelaziz** pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.*

*Je tiens à remercier Mme **BENSMAIN Nawel** pour l'honneur d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.*

Je n'oublie pas mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance, ainsi que leur contribution, leur soutien et leur patience.

Je remercie mes soeurs Douae et Djihen et mon frère Allae pour tout leur soutien inconditionnel et leur encouragement.

Un grand merci à mon grand-père BENMANSOUR.M et ma grand-mère et ma famille pour leur soutien indéfectible. Leurs encouragements et leur compréhension m'ont permis de persévérer dans les moments difficiles.

Merci à tous ceux qui ont joué un rôle dans la réalisation de ce mémoire. Vos efforts et votre soutien ont été cruciaux, et je suis reconnaissant(e) de vous avoir eu à mes côtés tout au long de ce voyage académique.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagné et aidé à m'améliorer durant mes études.

Dédicace

À ma directrice de mémoire.

À mes chers parents.

À mon frère et ma soeur.

À ma famille.

À mes amis.

À mes professeurs.

À mes collègues.

Introduction

Les séries temporelles appelées aussi série chronologique sont largement utilisées dans la modélisation d'un phénomène aléatoire qui se déroule dans le temps. Elles sont de nos jours appliquées dans des domaines aussi divers que l'économétrie, la météorologie, la médecine ou la démographie, pour n'en citer qu'une petite partie. En général, on observe l'évolution, au cours du temps, d'un phénomène dans le but de l'expliquer puis prévoir ce phénomène dans le futur. On dispose ainsi d'observations à des dates différentes nécessitant bien évidemment différentes théories voir les séries temporelles univariées, multivariées, linéaires ou non linéaires.

Les séries financières (rentabilités d'action, taux d'intérêt, taux de change...) présentent des propriétés remarquables. La plus importante est le fait que les grandes variations de prix tendent à être suivies de grandes variations et les petites variations tendent à être suivies de petites variations, autrement dit, la volatilité évolue avec le temps (dépendance de la variance conditionnelle du temps appelée variabilité instantannée). D'autre part, les distributions marginales sont à queues épaisses par rapport à la loi normale. Cette propriété n'est

d'ailleurs pas uniquement la conséquence de la première citée, car même normalisés (i.e après division par les écarts-types conditionnels estimés), les rentabilités présentent encore un excès de Kurtosis (L'apparition de chocs n'est pas compatible avec la loi normale mais nécessite plutôt une modélisation avec une distribution plus étalée). Enfin, la volatilité est généralement plus élevée après une baisse qu'après une hausse. Cette asymétrie se traduit par une corrélation négative entre le cours présent et la volatilité future. Enfin, il est important de noter que ces effets sont d'autant plus marqués que l'unité est courte.

Le développement des modèles Autorégressifs Hétéroscédastique (ARCH) introduits par Engle en 1982 et généralisés par Bollerslev 1986, s'est montrée utile dans beaucoup d'applications du monde économique et financier. Dans la macro-économie, citons à titre illustratif, la construction des portefeuilles, des mesures d'incertitude d'inflation, l'étude des effets des décisions des banques centrales, la caractérisation, etc.

Dans le chapitre 1, nous présentons un rappel des principales définitions et propriétés des series chronologiques, de quelques modèles ainsi que quelques outils utiles dans le développement de ce travail.

Les modèles ARCH d'ordre 1 et d'ordre p sont introduits dans le second chapitre. Afin de tenir compte de l'effet d'ARCH, il serait convenable d'estimer les paramètres du modèles. Une estimation par la méthode des des Moindres Carré Ordinaires (MCO) est établie où la consistance et la normalité asymptotique sont développées. Le dernier résultat repose essentiellement sur le théorème de la limite centrale pour des différences de martingales.

Enfin, une étude numérique est réalisée pour des données simulées, permettant d'illustrer la partie théorique et aussi de valider la robustesse de la méthode d'estimation étudiée.

Chapitre 1

Processus stochastiques et modèle de séries chronologiques

1.1 Les séries temporelles

La théorie des séries temporelles (chronologiques) abordée dans ce travail est appliquée de nos jours dans des domaines aussi variés que l'économétrie, la médecine ou la démographie, pour n'en citer qu'une petite partie. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un phénomène aléatoire, dans le but de décrire, expliquer puis prévoir ce phénomène dans le futur.

1.1.1 Vocabulaire et exemples

Définition 1.1.1. *Une série temporelle est un ensemble d'observation d'une variable statistique durant un intervalle régulier (jour, mois, an-*

née, ect...) à des indices temporels de tout ordre de grandeur.

À chaque instant, la valeur de la quantité d'intérêt X_t est appelée **variable aléatoire**, l'ensemble des valeurs quand t varie est appelé **processus aléatoire** $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Une série temporelle est ainsi une réalisation d'un processus aléatoire et l'ensemble \mathbb{Z} est appelé espace de temps qui peut être :

- **Discret** : cas du nombre de voyageurs d'un vol d'avion.
- **Continu** : signal radio, résultat d'un électrocardiogramme, ect.

1.1.2 La modélisation d'une série temporelle

La modélisation d'une série temporelle se fait à partir de la décomposition classique en fonctions des éléments suivants :

- **La tendance Z_t (Trend)** qui représente l'évolution à long terme (longue période). Elle traduit le comportement moyen de la série.

Il y a trois types de tendance : $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

1. Tendance polynomiale : $Z_t = a + bt + ct^2 + \dots + dt^n$ (linéaire dans le cas où $n = 1$).
2. Tendance exponentielle : $Z_t = a \times \exp(bt + c)$.
3. Tendance logistique : $Z_t = \frac{c}{a + bt}$.

- **La Saisonnalité S_t** qui correspond à un phénomène qui se répète à un intervalles de temps réguliers (périodiques). Le phéno-

mène est dit saisonnier d'où le terme de variations saisonnières, l'étendue de cet intervalle appelé période, notée p , est donc liée au rythme imposé par les saisons (toutes les 12 périodes pour des données mensuelles, toutes les 4 périodes pour des données trimestrielles,...).

Une composante saisonnière notée S_t est une fonction périodique de période p (c'est à dire, $S_t = S_{t+p}$, $p > 0$). Cette fonction entièrement déterminée par ses p composantes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$. On suppose par ailleurs que l'effet du saisonnier est en moyenne nul sur une période, ce qui signifie que

$$\sum_{j=1}^p \gamma_j = 0$$

En d'autre terme

$$S_t = \gamma_1 S^1 + \gamma_2 S^2 + \dots + \gamma_p S^p$$

avec

$$S^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = t \\ 0 & \text{si } j \neq t \end{cases}$$

- **Résidu** ε_t (bruit ou erreur) qui correspond à des fluctuations irrégulières, en général de faible intensité mais de nature aléatoire (à courte durée).

Objectifs d'une série temporelle

La modélisation des séries chronologiques permet d'analyser et d'expliquer un phénomène au cours du temps et surtout d'en tirer des conséquences pour des prises de décision. L'un des objectifs les plus intéressants est la prévision pour prédire la valeur future X_{t+h} à partir des valeurs passées X_1, X_2, \dots, X_t .

Les domaines d'application des séries temporelles sont divers. En économétrie, elles sont utilisées pour détecter puis analyser les périodes de crises et croissances. Nous proposons dans la FIGURE 1.1 un exemple de la série "AirPassengers" qui représente le nombre de passagers passant par une compagnie aérienne.

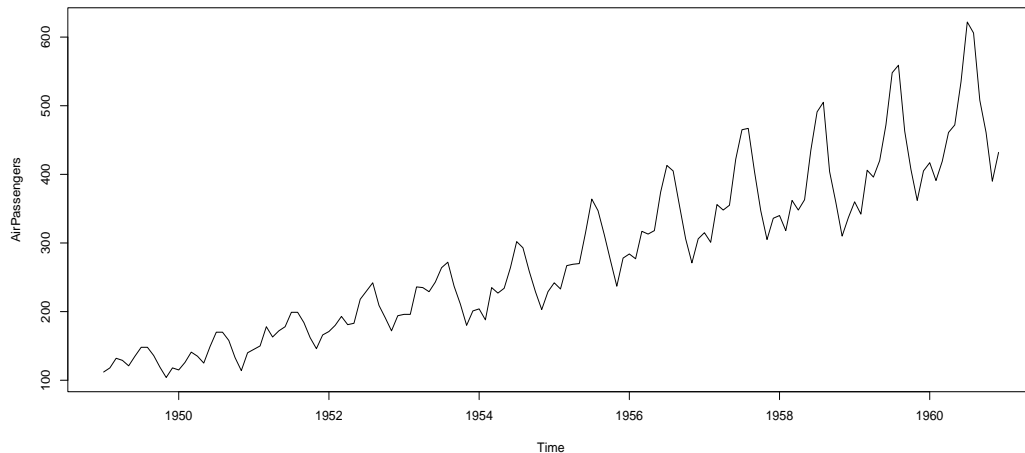


FIGURE 1.1 – Nombre mensuel de passagers aériens internationaux (en millions) entre 1949 et 1960.

En écologie, on pourra s'intéresser par exemple, à l'évolution de la température moyenne mensuelle d'un pays durant une période donnée, ou bien à la concentration en dioxyde de carbone (CO₂) dans l'atmosphère (voir FIGURE 1.2).

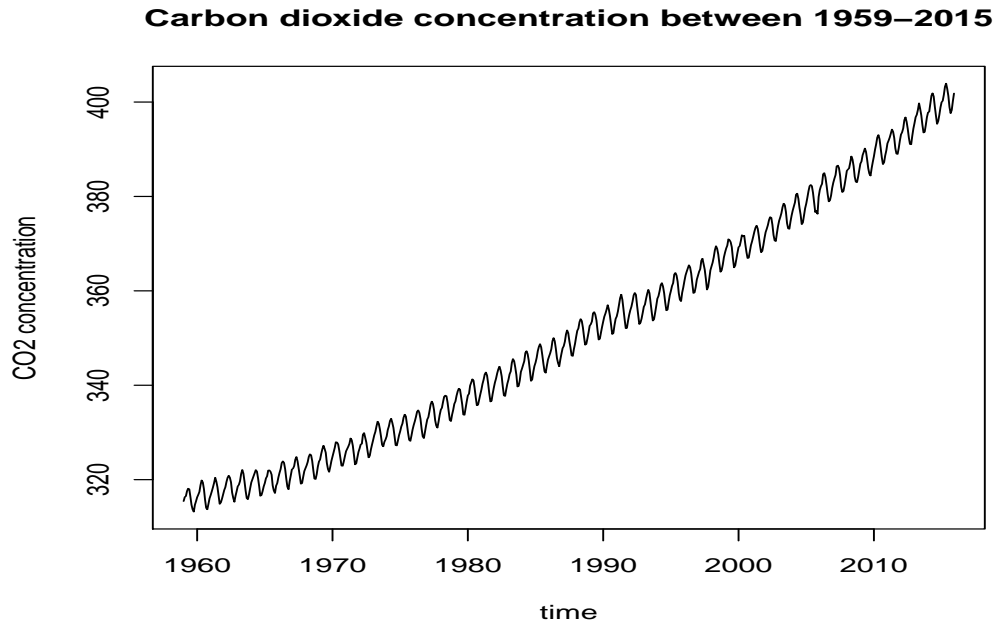


FIGURE 1.2 – Augmentation annuelle de la concentration en CO₂ dans l'atmosphère

Enfin, nous proposons dans la FIGURE 1.3, la série chronologique représentant les décès mensuels moyens dus à des maladies pulmonaires (la bronchite, l'emphysème et à l'asthme) observés au Royaume-Uni, de la population des hommes et des femmes dans laquelle nous observons des données mensuelles dont la période est visiblement $T = 12$.

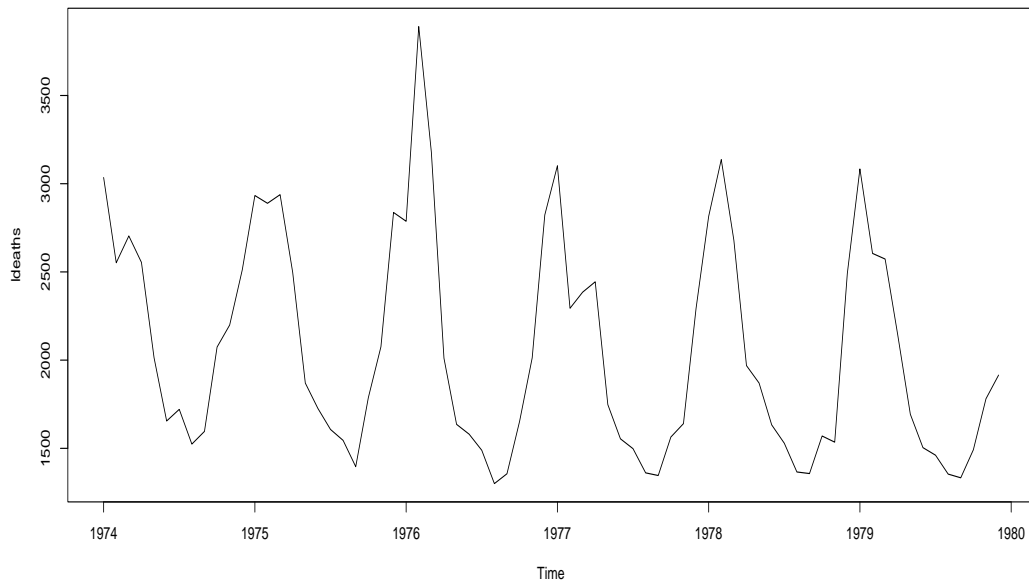


FIGURE 1.3 – Nombre de décès causés par les maladies pulmonaires.

1.1.3 Les modèles d'une série temporelle

On peut proposer un modèle qui représente la série temporelle étudiée en combinaison des éléments précédents. Pour cela, on a trois types de modèles :

1. **Le modèle d'ajustement.** Ces modèles relèvent de la statistique descriptive, peuvent s'écrire sous forme de trois cas :

— **additif.** C'est le modèle classique de décomposition dans le traitement des modèles d'ajustement. La variable X_t s'écrit comme

la somme des trois composantes :

$$X_t = Z_t + S_t + \varepsilon_t.$$

— **multiplicatif**. Dans ce cas, la série X_t s'écrit comme le produit des composantes :

$$X_t = Z_t \times S_t \times \varepsilon_t.$$

Notons que les modèles multiplicatifs sont largement utilisés pour des données de type économique.

— **mixte**. Il s'agit des différentes combinaisons de modèles additifs et multiplicatifs, par exemple

$$X_t = Z_t \times S_t + \varepsilon_t.$$

2. **Le modèle autoprojectif**. Dans ce cas, X_t est une fonction de ces valeurs passées et d'une perturbation aléatoire ε_t , ie :

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots; \varepsilon_t).$$

Dans cette classe, on peut citer les modèles *SARIMA*, *ARIMA*, *ARMA*,... .

3. **Le modèle explicatif**. Dans cette situation, la variable aléatoire

Y_t est exprimée en fonction d'un vecteur aléatoire X_t et d'une perturbation aléatoire ε_t :

$$Y_t = f(X_t, \varepsilon_t),$$

où X_t est soit déterministe ou aléatoire, dans ce cas les processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ont certaines propriétés d'indépendances ou de non-corrélation .

1.2 La volatilité

La volatilité est une notion statistique qui permet de mesurer la variabilité instantané de la série. En finance, la volatilité est considérée comme un facteur de risque .

La volatilité d'un instrument financier est un indicateur de son imprévisibilité. Elle évalue la taille des changements dans une action, un produit dérivé ou un marché. Il s'agit d'un paramètre permettant de quantifier le prix et le risque de retour. Le regroupement de la volatilité, qui est l'alternance des périodes de volatilité élevée et faible, est une caractéristique déterminante des séries monétaires et financières. Ce phénomène, que nous appelons souvent **l'hétéroscédasticité conditionnelle**, est particulièrement fréquent dans les cours des actions,

les taux de change et les autres prix fixés par les marchés financiers.

Mesure statistique

Une méthode utile pour décrire l'évolution de la volatilité est le calcul de l'écart-type. Ainsi après avoir récupéré l'historique des variations d'un actif, le calcul de l'écart type s'avère utile pour mesurer l'instabilité du marché financier. Il se traduit par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}{T - 1}},$$

où \bar{R} est la rentabilité moyenne de l'échantillon ($R_t, 1 \leq t \leq T$).

Lorsque l'écart-type est grand, cela dit qu'il y a de fortes chances de forte rentabilité.

Remarque 1.2.1. *La volatilité peut être définie comme l'ampleur des fluctuations ou l'amplitude des variations sur une période donnée (minute, heure, jour, semaine,...) pour un marché.*

1.3 La stationnarité

La notion de stationnarité joue un rôle capital dans la théorie des processus aléatoires surtout en analyse des séries temporelle . Généralement on considère deux types de stationnarités, la stationnarité

stricte et la stationnarité faible.

1.3.1 La stationnarité au sens stricte

Définition 1.3.1. Une série temporelle $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est fortement stationnaire (ou strictement stationnaire), si quelque soit le n -uplet du temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, tel que $t_i \in \mathbb{Z}$ et pour tout temps $h \in \mathbb{Z}$ avec $t_i + h \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n$; la suite $(X_{t_1+h}; \dots; X_{t_n+h})$ a la même loi de probabilité que la suite $(X_{t_1}; \dots; X_{t_n})$.

$$\mathcal{L}(X_{t_1+h}; \dots; X_{t_n+h}) = \mathcal{L}(X_{t_1}; \dots; X_{t_n})$$

Cette définition implique que tous les moments d'un tel processus sont invariants dans le temps. Cependant, la stationnarité au sens strict exige la connaissance de la loi conjointe du processus, ce qui est un travail très délicat en pratique.

1.3.2 La stationnarité du second ordre (faible)

Définition 1.3.2. Une série temporelle $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est faiblement stationnaire (ou stationnaire du second ordre) si les trois conditions ci-dessous sont remplies :

1.

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = m.$$

2.

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \text{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty.$$

3.

$$\forall t, h \in \mathbb{Z}, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h).$$

La première condition signifie que la moyenne du processus est indépendante du temps tandis que la troisième se base sur le fait que la covariance entre deux périodes différentes t et $t+h$ se réduit à une fonction de la différence h entre les deux périodes considérées (indépendante de t). Il convient de noter que la stationnarité forte implique la stationnarité faible.

1.3.3 Le processus Bruit blanc

Définition 1.3.3. Bruit blanc faible. *Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible si et seulement si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0. \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty. \\ \forall t \neq s, \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0. \end{array} \right.$$

Définition 1.3.4. Bruit blanc fort. *Un bruit blanc fort est une suite*

de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ centrées et de variances σ^2 .

1.3.4 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Définition 1.3.5. Fonction d'autocovariance. Soit $(X_t)_t$ un processus stationnaire. La **fonction d'autocovariance** associée est définie par :

$$\gamma_h = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t+h} - \mathbb{E}(X_{t+h}))].$$

Propriétés. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, nous avons

1. $\gamma_0 = \text{Var}(X_t) > 0$.
2. $\gamma(h) = \gamma(-h)$ (fonction paire).
3. $|\gamma(h)| < \gamma(0)$.

Définition 1.3.6. Fonction d'autocorrélation. Soit (X_t) un processus stationnaire. La fonction d'autocorrélation notée $\rho(h)$ est donnée par :

$$\rho_X(h) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{V}(X_t)\text{V}(X_{t+h})}} = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.$$

Propriétés. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, nous avons

1. $\rho_X(0) = 1$.
2. $\rho_X(h) = \rho_X(-h)$ (fonction paire).

3. $|\rho_X(h)| < 1$.

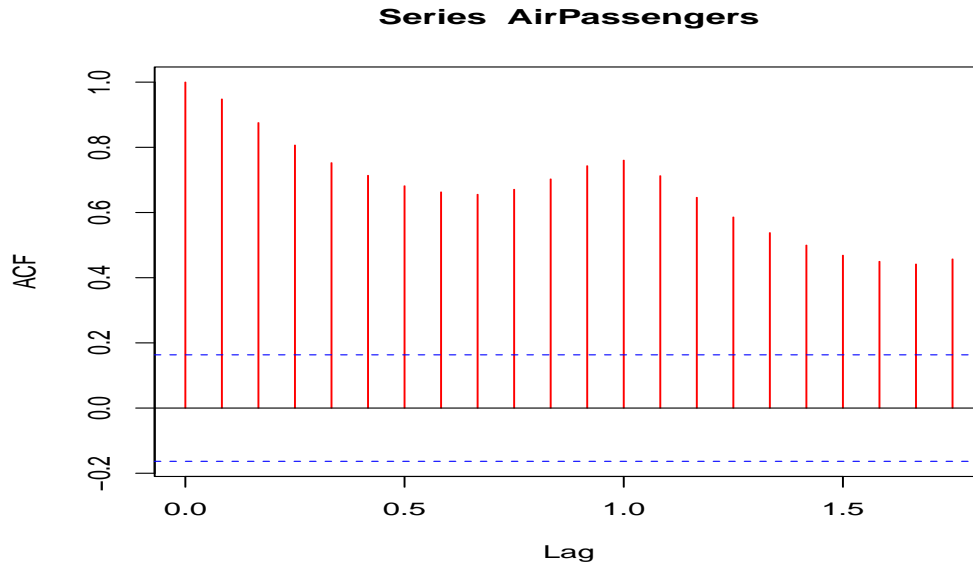


FIGURE 1.4 – Fonction d’autocorrélation mesurant la relation entre les données X_t et X_{t-h} dans la série (1.1).

1.3.5 La décomposition de Wold

Notons que le théorème de **Wold** est primordial pour l’analyse de séries temporelles stationnaires.

Définition 1.3.7. *Considérons un processus stationnaire X_t . Il est toujours possible de décomposer X_t en une composante déterministe D_t et une composante stochastique ϕ_t telle que :*

$$X_t = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t-i},$$

— où D_t est une composantes linéaire telle que $\text{Cov}(D_t, \varepsilon_{t-i}) = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$.

— ϕ_i sont des paramètres réels vérifiant :

$$\phi_0 = 1, \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^2 < \infty.$$

— ε_t :bruit blanc .

De plus, cette décomposition est unique.

1.3.6 La notion de mémoire longue

D'une manière générale, un processus est appelé processus à mémoire longue si ce processus est stationnaire au sens large et si sa fonction d'autocovariance n'est pas absolument sommable.

Définition 1.3.8. *Un processus stationnaire X_t est un processus à mémoire longue s'il existe un nombre réel d le paramètre de délai et et une constante C strictement positif vérifiant :*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\rho_h}{C \cdot h^{2d-1}} = 1$$

où ρ la fonction d'autocorrélation et h le retard et $d < \frac{1}{2}$.

Il est possible de faire une distinction suivant la valeur de d :

si $d < 0$, *la mémoire est dans ce cas intermédiaire avec $\sum |\rho_h| < \infty$.*

si $0 < d < \frac{1}{2}$, *la mémoire est longue et la série n'est pas absolument*

convergente $\sum |\rho_h| = 0$.

Par conséquent, les autocorrélations d'un processus à mémoire longue vérifient la relation asymptotique

$$\rho_h \sim C.h^{2d-1} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

*Les autocorrélations ρ_h décroissent très lentement à un taux hyperbolique. Ce décroissement hyperbolique des autocorrélations est à opposer au décroissement exponentiel des autocorrélations d'un processus **ARMA** :*

$$\rho_h \leq C.a^h$$

où C est une constante positive et $0 < a < 1$.

*En d'autres termes, la fonction d'autocorrélation des processus **ARMA** est géométriquement bornée.*

Généralement, les séries temporelles sont représentées par deux types de modèles, le premier est **linéaire** (modèles : AR, MA, ARMA,...) et le deuxième est **non-linéaire** (modèles : ARCH, GARCH,...).

1.4 Les modèles linéaire

Définition 1.4.1. *un processus $X_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus linéaire de moyenne μ s'il s'écrit sous la forme :*

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i},$$

où ε_t est le bruit blanc et la suite des coefficients α_i vérifie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty.$$

1.4.1 Les opérateurs sur les série temporelles

Opérateur de retard L .

L'opérateur retard L décale le processus d'une unité de temps vers le passé.

$$LX_t = X_{t-1}.$$

Plus généralement, on décale le processus de n unité de temps et on écrit :

$$L^n X_t = X_{t-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'une autre manière, nous avons la relation de récurrence suivante :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i L^i\right)X_t = \sum_{i=0}^n a_i X_{t-i}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Opérateur d'avance F .

L'opérateur avance F est linéaire et inversible. Son inverse $F^{-1} = L$ avec $L^{-1} = F$ est défini par :

$$FX_t = X_{t+1}$$

Opérateur de différentiation Δ .

L'opérateur de différentiation Δ d'ordre 1 d'une série temporelle est déterminé par :

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - LX_t = (1 - L)X_t$$

d'une façon général, la différentiation Δ l'ordre n de la série X_t est donné par :

$$\Delta^n X_t = (1 - L)^n X_t$$

Cet opérateur permet d'éliminer la composante tendancielle sans la calculer.

1.4.2 le processus ARMA

On considère certains modèles linéaires fréquemment utilisés pour une série temporelle. Nous commençons par deux modèles simples : le modèle **autorégressif (AR)** et le modèle **moyenne mobile (MA)**. On continue avec le modèle **ARMA** qui permet de combiner ces deux modèles (modèles mixtes).

Processus Autorégressif AR.

Les processus autorégressifs qui s'avèrent très utile dans la modélisation des séries chronologiques, sont linéaires et stationnaires (sous certaines conditions), tels que chaque valeur est décrite (expliquée) par une combinaison linéaire des valeurs passées plus une composante aléatoire qui est tout simplement le **bruit blanc**. Le nombre de valeurs passées considérées est appelé **ordre** du processus.

Définition 1.4.2. *On appelle processus autoregressif d'ordre p , noté $AR(p)$, un processus stationnaire X_t vérifiant une relation*

$$\begin{aligned} X_t &= \eta + \varepsilon_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} \\ &= \eta + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} \end{aligned}$$

où η est le coefficient d'accroissement, α_i sont les coefficients d'auto-

régressif ($\alpha_i \neq 0$) et ε_{t-i} est la suite de v.a bruit blanc indépendantes.

En utilisant l'opérateur retard L , on a l'écriture équivalente

$$\theta(L)X_t = \eta + \varepsilon_t$$

avec $\theta(L)$ est le polynome retard de degré p défini par :

$$\theta(L) = (1 - \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p).$$

Processus moyenne mobile MA (Moving Average).

Chaque valeur est décrite par une composante d'erreur aléatoire et une combinaison linéaire des erreurs aléatoires associées aux valeurs précédentes (l'observation au temps t s'explique linéairement par les observations d'un bruit). De même, l'ordre du processus est défini par le nombre d'erreurs précédentes prises en compte.

Définition 1.4.3. Un processus du second ordre $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est appelé **moyenne mobile** ou **moyenne ajustée** d'ordre q notée $MA(q)$ s'il satisfait la relation

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= \mu + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}, \end{aligned}$$

où

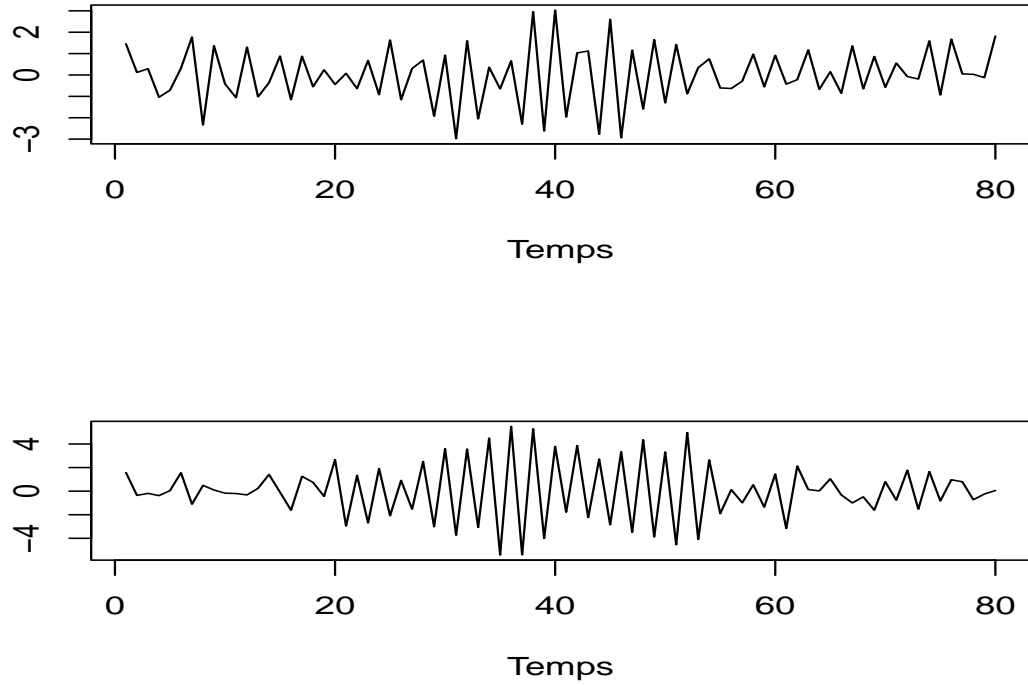


FIGURE 1.5 – Trajectoires d'un AR(1) : $X_t = .75 * X_{t-1} + \varepsilon_t$ et d'un AR(2) $X_t = .75 * X_{t-1} + 0.15 * X_{t-2} + \varepsilon_t$:

β_j sont les coefficients de moyenne mobile ($\beta_j \neq 0$), ε_{t-j} le bruit blanc.

En introduisant l'opérateur retard, la relation précédente s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \dots - \beta_q L^q) \varepsilon_t \\ &= \mu + \theta(L) \varepsilon_t \end{aligned}$$

avec

$$\theta(L) = (1 - \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q)$$

Remarque 1.4.1. — *Un modèle $MA(q)$ est toujours stationnaire et causal, il est de moyenne nulle.*

— *Il est possible d'inverser le polynôme $\theta(L)$ dans le cas où ses racines sont de module différent de 1 (mais un modèle $MA(q)$ est inversible si et seulement si ces racines sont de module strictement supérieur à 1).*

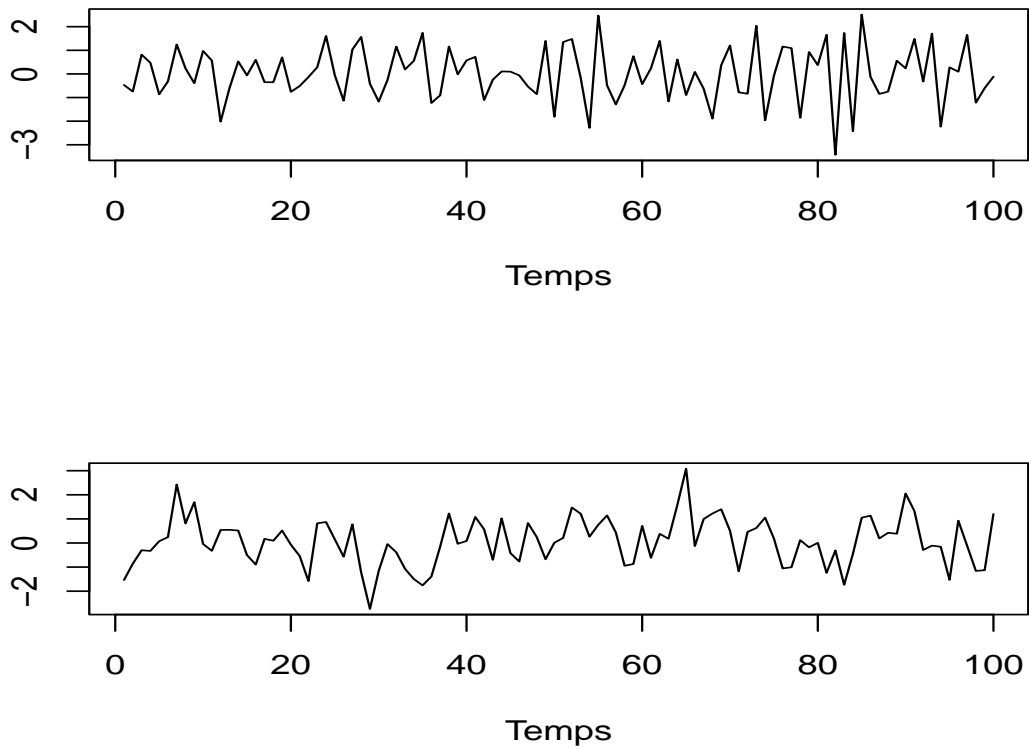


FIGURE 1.6 – Trajectoires d'un $MA(1)$: $X_t = \varepsilon_t + .7 * \varepsilon_{t-1}$ et d'un $MA(2)$ $X_t = \varepsilon_t .5 * \varepsilon_{t-1} + 0.15 * \varepsilon_{t-2}$.

Processus Autorégressif moyenne mobile ARMA.

*Les modèles ARMA appelés aussi **ARMA mixtes** constituent une généralisation des modèles AR et MA.*

Définition 1.4.4. *Un processus stationnaire X_t est dit ARMA(p, q) s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} - \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i},$$

où p et q représentent respectivement l'ordre des processus autorégressif et moyenne mobile. ε_t est un bruit blanc avec μ constante arbitraire.

En utilisant l'opérateur retard, ce processus ARMA peut s'écrire comme suit :

$$\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t + \mu,$$

avec

$$\phi(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p,$$

et

$$\theta(L) = 1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p.$$

Propriétés 1.4.1. *La représentation $ARMA(p, q)$ est dite minimale si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- *Les polynomes ϕ et θ ont leurs racines en module strictement supérieur à 1.*
- *$\theta_q \neq 0$ et $\phi_p \neq 0$.*
- *ϕ et θ n'ont pas de racines communes.*

Remarque 1.4.2. *Dans la représentation d'un $ARMA(p, q)$, il est facile de voir que :*

- *si $q = 0$, alors $ARMA(p, 0)$ est un $AR(p)$.*
- *si $p = 0$, alors $ARMA(0, q)$ est un $MA(q)$, il en suit que les processus $AR(p)$ et $MA(q)$ sont bien des $ARMA$ particulières.*

1.5 Introduction ARGH

1.5.1 Hétéroscédasticité

L'hétéroscédasticité est une caractéristique des séries financières, elle représente le caractère non constant de la variance d'une série dans le temps.

En statistique, on parle d'hétéroscédasticité lorsque les variances des variables examinées sont différentes.

Définition 1.5.1. *On appelle modèle linéaire hétéroscédastique le mo-*

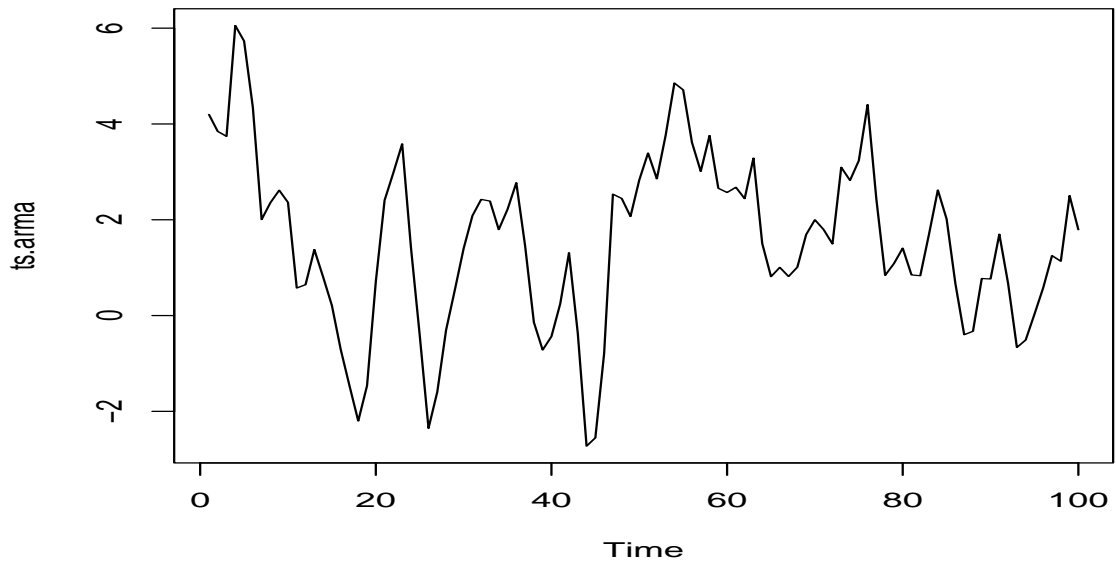


FIGURE 1.7 – Trajectoires Trajectoire du processus ARMA(1,1) : $X_t = 0.8X_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$.

déle dans lequel un vecteur de variables aléatoires Y dépend linéairement de variables explicatives X :

$$Y = Xb + U,$$

avec les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}(U_i/X) = 0 \\ \mathbb{E}(U_i U_j/X) = 0 \text{ pour } i \neq j \\ \mathbb{E}(U_i^2/X) = \sigma_i^2. \end{array} \right.$$

On dit que le modèle est hétéroscédastique si $\forall i, j \sigma_i \neq \sigma_j$ vérifié et

homoscédastique si $\text{var}(U_i) = \sigma^2$.

1.5.2 Processus ARCH

Définition 1.5.2. Un processus ARCH(p) est donnée par :

$$X_t = \varepsilon_t h_t,$$

avec

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$$

tel que $\forall t \in \mathbb{Z}, \alpha_0 > 0$

α_i sont des constantes positif données et $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Chapitre 2

Modèles Autorégressifs

Conditionnellement

Hétéroscédastiques "ARCH"

2.1 Introduction

Dans le but de répondre aux insuffisances des représentations $ARMA(p, q)$ pour les problèmes monétaires et financiers, notamment en ce qui concerne les séries financières qui présentent une volatilité (ou variabilité instantanée mesurée par la variance conditionnelle) en fonction du temps et par des ajustements asymétriques, Engle (1982) propose une nouvelle classe de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastique (ARCH) et leur extension GARCH, aptes à capter le comportement de la volatilité dans le temps. Le modèle ARCH est formé de deux équations

tions : La première met en relation le rendement et certaines variables qui l'expliquent (variables passées), tandis que la seconde modélise la variance conditionnelle des résidus.

Le principe proposé par Engle consiste à introduire une dynamique dans la détermination de la volatilité en supposant que la variance est conditionnelle aux informations dont nous disposons.

L'analogie entre les modèles ARCH en temps discret et les modèles de diffusion en temps continu a été établie par Nelsen en 1990, qui a permis en particulier, le développement des modèles à volatilité stochastique.

2.2 Présentation des modèles ARCH

2.2.1 Le modèle ARCH(1)

Cosidérons un processus $AR(1)$, nous avons le résultat suivant

Proposition 2.2.1. Soit (X_t) un processus $AR(1)$, tel que

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors pour $AR(1)$ centré $\mathbb{E}(X_t) = 0$, nous avons $\forall t$

$$V(X_t) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \sigma^2,$$

où la variance est clairement constante ne dépendant pas du temps.

Démonstration.

$$V(X_t) = \alpha^2 V(X_{t-1}) + V(\varepsilon_t)$$

par la stationnarité de modèle AR la variance est constante

ie : $V(X_t) = V(X_{t-1})$ et $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ on obtient :

$$V(X_t) = \alpha^2 V(X_t) + \sigma^2 \Rightarrow (1 - \alpha^2)V(X_t) = \sigma^2,$$

ce qui implique que

$$V(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}.$$

□

Définition 2.2.1. *Le processus (X_t) est un processus ARCH(1) si*

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}$$

où $(\varepsilon_t)_t$ est un bruit blanc gaussien $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

On notera généralement $h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$, et par suite

$$X_t = \varepsilon_t h_t.$$

Remarque 2.2.1. *Pour que le processus (X_t) soit stationnaire au second ordre, il faut que la variance marginale de (X_t) soit constante.*

Autrement dit

$$V(X_t) = V(X_{t-1}).$$

Or $V(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 V(X_{t-1})$, c'est à dire que l'on doit avoir $\alpha_1 < 1$, ce qui implique que :

$$V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

et la variance conditionnelle définie par :

$$V(X_t / \mathcal{F}_{t-1}) = h_t^2$$

où $\mathcal{F}_{t-h} = \sigma(X_{t-h})_{h \leq t}$ désigne la tribu engendrée par les X_{t-h} , $h \geq 1$.

Théorème 2.2.1. *Si un processus X_t satisfait une représentation ARCH(1) alors X_t^2 satisfait une représentation AR(1) telle que :*

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

Démonstration. pour montrer ce théorème, on doit faire appel au processus d'innovation.

Rappel

L'innovation (erreur) η_t d'un processus stochastique X_t est définie comme suit :

1. Les erreurs sont définies comme une différence entre la valeur

prévue et réelle.

$$\eta_t = X_t - \mathbb{E}(X_t/X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

2. Le carré des erreurs est donné par

$$\eta_t^2 = X_t^2 - V(X_t/\mathcal{F}_{t-1})$$

soit X_t un processus ARCH(1). Par définition

$$\begin{aligned}\eta_t^2 &= X_t^2 - V(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= X_t^2 - h_t^2, \quad \text{par suite} \\ X_t^2 &= \eta_t^2 + h_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \eta_t^2,\end{aligned}$$

l'équation devient sous la forme d'un AR(1)

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_t = X_t^2 - h_t^2$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ où ε_t est un processus d'innovation pour X_t^2 .

Proposition 2.2.2. (X_t) est stationnaire au second ordre si $\alpha_0 > 0$, $0 \leq \alpha_1 < 1$ et pour tout $h \geq 1$:

1. Les moments conditionnels sont définis comme suit :

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-h}) = 0.$$

2. La variance conditionnelle s'exprime de la manière suivante :

$$V(X_t/\mathcal{F}_{t-h}) = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 X_{t-h}^2.$$

3. Les auto-covariances conditionnelles du processus ARCH(1) $(X_t)_t$ sont nulles. C'est à dire que :

$$\text{Cov}((X_t, X_{t+k})/\mathcal{F}_{t-h}) = 0 \quad \forall k, h \geq 1.$$

Démonstration.

1. Pour le premier point, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-h}) &= \mathbb{E}(\varepsilon_t h_t/\mathcal{F}_{t-h}) \\ &= h_t \mathbb{E}(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-h}). \\ &= h_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \end{aligned}$$

car : h_t est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{F}_{t-h} , et ε_t est indépendante de \mathcal{F}_{t-h} avec $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$.

2. De ce qui précède, on en déduit que $V(X_t/\mathcal{F}_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t^2/\mathcal{F}_{t-h})$

Par itération successive, nous aurons

$$\begin{aligned}
X_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-2}^2 + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 X_{t-2}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 X_{t-2}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-3}^2 + \varepsilon_{t-2}) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 \alpha_0 + \alpha_1^3 X_{t-3}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 \alpha_0 + \alpha_1^3 \alpha_0 + \dots + \alpha_1^{h-1} \alpha_0 \\
&+ \alpha_1^{1-h} \varepsilon_{t-h+1} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \alpha_1^{h-1} X_{t-h}^2,
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
X_t^2 &= \alpha_0 [1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3 + \dots + \alpha_1^{h-1}] + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} \\
&\quad + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \alpha_1^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \alpha_1^{h-1} X_{t-h}^2
\end{aligned}$$

En considérant l'esperance conditionnelle de chacun de ces nombres,

il s'ensuit que

$$\mathbb{E}(X_t^2/\mathcal{F}_{t-h}) = \alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} \right) + \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_1^i \mathbb{E}(\varepsilon_{t-i}/\mathcal{F}_{t-h}) + \alpha_1^h \mathbb{E}(X_{t-h}^2/\mathcal{F}_{t-h}).$$

En utilisant la définition du bruit blanc, nous obtenons

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{t-i}/\mathcal{F}_{t-h}) = 0, \quad \forall i = 0, \dots, h-1.$$

Sachant que $\mathbb{E}(X_{t-h}^2/\mathcal{F}_{t-h}) = X_{t-h}^2$, comme conséquence, $\forall t$

$$V(X_t/\mathcal{F}_{t-h}) = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 X_{t-h}^2.$$

3. Rappelons que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux sous-tribu de \mathcal{F} avec $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ alors

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)/\mathcal{F}_2\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_2)/\mathcal{F}_1\right).$$

La troisième propriété s'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Cov}((X_t, X_{t+k})/\mathcal{F}_{t-h}) &= \mathbb{E}(X_t X_{t+k}/\mathcal{F}_{t-h}) - \underbrace{\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-h})\mathbb{E}(X_{t+k}/\mathcal{F}_{t-h})}_0 \\ &= \mathbb{E}(X_t X_{t+k}/\mathcal{F}_{t-h}) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_t X_{t+k}/\mathcal{F}_{t-h})/\mathcal{F}_{t+k-1}\right) \\ &= \mathbb{E}(X_t \mathbb{E}(X_{t+k}/\mathcal{F}_{t+k-1})/\mathcal{F}_{t-h}) \\ &= \mathbb{E}(X_t \cdot 0/\mathcal{F}_{t-h}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'absence de corrélations entre les valeurs d'un processus ARCH est une caractéristique très importante de cette famille de modèle, qui les rend utiles pour modéliser certaines séries financières.

□

Remarque 2.2.2. *Si h tend vers l'infini, ces variances conditionnelles convergent vers la variance non conditionnelle, et l'on retrouve alors la formule*

$$\begin{aligned} V(X_t) &= \lim_{h \rightarrow \infty} V(X_t / \mathcal{F}_{t-h}) \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^h}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 X_{t-h}^2 \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \end{aligned}$$

où $\alpha_0 > 0$ et $0 < \alpha_1 < 1$.

En statistique, les queues statistiques désignent les parties extrêmes d'une distribution de probabilité où les valeurs sont rares ou inhabituelles, à la fois du côté des valeurs basses (queue de gauche) et des valeurs élevées (queue de droite).

Proposition 2.2.3. "Moment centré d'ordre 4"

Les modèles ARCH permettent d'avoir des processus avec des queues de distribution plus épaisses.

1. Le moment conditionnel centré d'ordre 4 du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$:

$$\mathbb{E}(X_t^4 / \mathcal{F}_{t-1}) = 3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2.$$

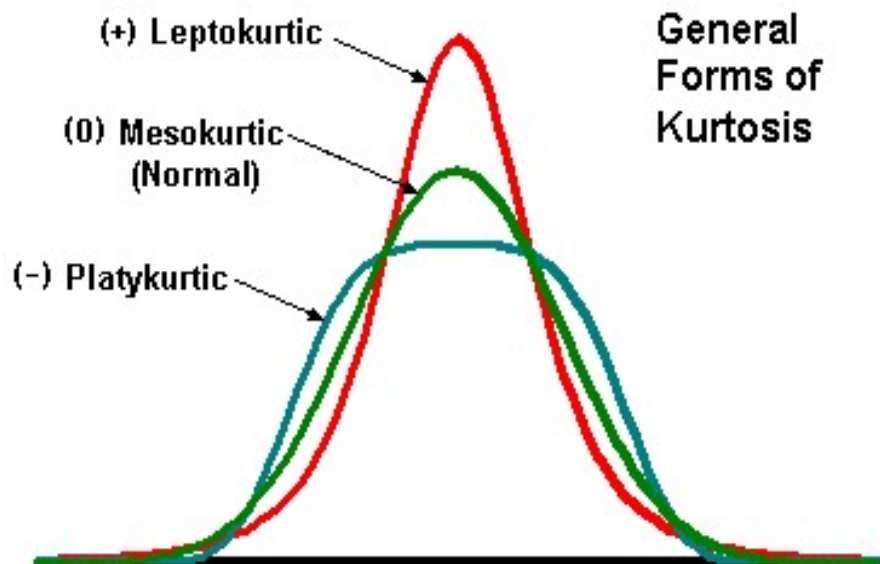
2. Pour que le moment d'ordre 4 existe, il serait nécessaire de supposer que $3\alpha_1^2 < 1$. Par suite, le moment non-conditionnel centré d'ordre 4 du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^4) &= 3 \left[\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_1\alpha_0^2}{1-\alpha_1} + \alpha_1^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^4) \right] \\ &= \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)}. \end{aligned}$$

3. Le kurtosis non conditionnelle associée au processus ARCH(1) donnée par :

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}(X_t^4)}{\mathbb{E}(X_t^2)^2} = 3 \left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \right] > 3$$

Le Kurtosis mesure le caractère pointu ou plat de la distribution de la série. Notons que le Kurtosis d'une distribution normale est égale à 3. Un Kurtosis dépassant 3 (queues épaisses) montre une distribution plutôt pointue (distribution leptokurtique). Dans le cas contraire, lorsque la Kurtosis est inférieure à 3, la distribution sera cette fois-ci plate, elle sera dite platikurtique.



Démonstration. 1. On rappelle que si une variable centrée X suit une loi normale centrée, alors

$$\mathbb{E}(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}$$

on a

$$\mathbb{E}(X^4) = 3(\sigma^2)^2 = 3(V(X))^2 = 3(\mathbb{E}(X^2))^2.$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^4 / \mathcal{F}_{t-1}) &= 3 \left[\mathbb{E}(X_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) \right]^2 \\ &= 3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2. \end{aligned}$$

2. Sous la condition $3\alpha_1^2 < 1$; on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_t^4) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_t^4/\mathcal{F}_{t-1})\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[3(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[3(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4 + 2\alpha_0\alpha_1 X_{t-1}^2)\right] \\
 &= 3\left[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^4) + 2\alpha_0\alpha_1 \mathbb{E}(X_{t-1}^2)\right] \\
 &= 3\left[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \mathbb{E}(X_{t-1}^4) + \frac{2\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}\right] \\
 &= \frac{3\alpha_0^2(1-\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)}
 \end{aligned}$$

3. La kurtosis non conditionnelle s'écrit sous la forme

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}(X_t^4)}{\mathbb{E}(X_t^2)^2}$$

si on remplace les résultat des moments d'orde 2 et d'ordre 4 on obtient :

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{3\alpha_0^2(1-\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)} \cdot \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} \\
 &= 3\left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}\right] > 3
 \end{aligned}$$

En conclusion, la kurtosis est donc liée à une mesure de l'hétéroscédasticité conditionnelle.

Notons que toutes ces propriétés peuvent être généralisées dans le cas

d'un processus ARCH(p). En effet, dans la section qui suit, nous montrons la représentation d'un modèle ARCH(p) et ces propriétés, ainsi que le modèle avec erreurs ARCH(p).

2.2.2 Le modèle ARCH(p)

Définition 2.2.2. *Le processus (X_t) qui définit un processus ARCH(p) est une extension des modèles ARCH(1) si*

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2}$$

où (ε_t) est un bruit blanc gaussien $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

La volatilité de la date t est alors fonction des carrés des écarts à la moyenne observés dans le passé proche. Si les coefficients α_i sont tous positifs (et assez grands), il y a une persistance des niveaux de volatilité, on observe des périodes de forte volatilité suivies de période de faible volatilité.

Proposition 2.2.4. *(X_t) est dite stationnaire si $\alpha_i > 0$ avec*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$$

1. Les moments conditionnels se représentent comme suit :

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-h}) = 0.$$

2. La variance conditionnelle est donnée par

$$V(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 = h_t^2.$$

3. La variance non-conditionnelle définit par :

$$V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i}$$

4. Les auto-covariances conditionnelles du processus ARCH(p) sont nulles. C'est à dire que

$$\text{cov}(X_t, X_{t+k}/\mathcal{F}_{t-h}) = 0 \quad \forall k, h \geq 1.$$

Démonstration.

Soit $(\varepsilon_t)_t$ un bruit blanc centrée réduite et $(h_t)_t$, \mathcal{F}_{t-h} -mesurable avec le fait que la suite $(\varepsilon_t)_t$ est indépendante de \mathcal{F}_{t-h} . Les mêmes techniques utilisées plus haut, nous permettrons de conclure que

1. le moment conditionnels

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}(\varepsilon_t h_t/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t).h_t \\ &= 0\end{aligned}$$

2. la variance conditionnelle

$$\begin{aligned}V(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) - \underbrace{\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-1})^2}_0 \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 h_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= h_t^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= h_t^2 \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)}_1 \\ &= h_t^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2\end{aligned}$$

3. la variance non-conditionnelle

$$\begin{aligned}V(X_t) &= V(\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-h})) + \mathbb{E}(V(X_t/\mathcal{F}_{t-h})) \\ &= V(0) + \mathbb{E}(\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2) \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{E}(X_{t-i}^2) \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i V(X_{t-i})\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de stationnarité (i.e : $V(X_t) = V(X_{t-1})$), on peut avoir

$$V(X_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i V(X_t) \Rightarrow (1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) V(X_t) = \alpha_0,$$

pour aboutir à

$$V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i}$$

4. Pour le dernier point, on peut procéder de la même manière que celle utilisée pour les auto-covariance conditionnelles d'un ARCH(1).

□

2.2.3 Modèles avec erreurs ARCH

Dans cette partie, pour modéliser les séries financières, on considèrera plutôt les résidus d'un modèle linéaire. Prenons à titre d'exemple le modèle linéaire autorégressif avec résidus de type ARCH(p) défini comme suit

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2}.$$

Dans le cas où (Y_t) est un $AR(1)$ avec un résidu (ε_t) qui n'est plus un bruit blanc, en particulier lorsque (ε_t) est un processus $AR(1)$:

$$\varepsilon_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \eta_t.$$

ou encore, lorsque (ε_t) est un processus $ARCH(1)$:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}.$$

Le premier cas correspond aux modèles ARMA tandis que le second, correspond aux modèles autorégressifs à erreurs ARCH.

Considérons le modèle

$$Y_t = \mu + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{où } |\phi| < 1 \text{ et } (\varepsilon_t) \text{ satisfait } \left\{ \begin{array}{l} (1) : \mathbb{E}(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0. \\ (2) : V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}. \\ (3) : V(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-h}) = \alpha_0 \left[\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1} \right] + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2, \end{array} \right.$$

où $\mathcal{F}_{t-h} = \sigma(Y_{t-h})_{h \leq t}$.

1. L'espérance conditionnelle de (Y_t) :

$$\mathbb{E}(Y_t / \mathcal{F}_{t-h}) = \mu + \phi \mathbb{E}(Y_{t-1} / \mathcal{F}_{t-h}) = \mu \frac{1-\phi^h}{1-\phi} + \phi Y_{t-h}.$$

2. La variance conditionnelle de (Y_t) :

$$V(Y_t / \mathcal{F}_{t-h}) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \left[\frac{1-\phi^{2h}}{1-\phi^2} - \alpha_1 \frac{\alpha_1^h - \phi^{2h}}{\alpha_1 - \phi^2} \right] + \alpha_1 \frac{\alpha_1^h - \phi^{2h}}{\alpha_1 - \phi^2} \varepsilon_{t-h}^2.$$

qui n'est pas constante (puisque'elle dépend de ε_{t-h}).

Proposition 2.2.5. *La variance d'une erreur de prévision à l'horizon h est donnée par*

$$V(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \phi^2 \varepsilon_{t-1}^2.$$

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \mu + \phi \left[\mu + \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \right] + \varepsilon_t \\ &= \mu(1 + \phi) + \phi^2 Y_{t-2} + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \mu(1 + \phi) + \phi^2 \left[\mu + \phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} \right] + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \mu(1 + \phi + \phi^2) + \phi^3 Y_{t-3} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= \mu(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{h-1}) + \phi^h Y_{t-h} + \phi^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \dots + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \mu \left[\frac{1 - \phi^h}{1 - \phi} \right] + \phi^h Y_{t-h} + \phi^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \dots + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

En prenant l'espérance conditionnelle des deux membres de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y_t/\mathcal{F}_{t-h}) = \mu \frac{1 - \phi^h}{1 - \phi} + \phi^h Y_{t-h}$$

De même, on peut montrer que la variance conditionnelle de Y_t dépend du temps. En effet

$$\begin{aligned}
V(Y_t \setminus \mathcal{F}_{t-h}) &= V\left(\mu \left[\frac{1-\phi^h}{1-\phi} \right] + \phi^h Y_{t-h} + \phi^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \dots + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \setminus \mathcal{F}_{t-h}\right) \\
&= V(\varepsilon_t \setminus \mathcal{F}_{t-h}) + \phi^2 V(\varepsilon_{t-h} \setminus \mathcal{F}_{t-h}) + \dots + \phi^{2(h-1)} V(\varepsilon_{t-h} \setminus \mathcal{F}_{t-h}) \\
&= \alpha_0 \left[\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1} \right] + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2 + \phi^2 \left(\alpha_0 \left[\frac{1-\alpha_1^{h-1}}{1-\alpha_1} \right] + \alpha_1^{h-1} \varepsilon_{t-(h-1)}^2 \right) \\
&\quad + \dots + \phi^{2(h-1)} \alpha_0 \left[\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} \right] + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \\
&= \sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} \left[\alpha_0 \frac{1-\alpha_1^{h-j}}{1-\alpha_1} + \alpha_1^{h-j} \varepsilon_{t-h}^2 \right] \\
&= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \left[\sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} - \sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} \alpha_1^{h-j} \right] + \varepsilon_{t-h}^2 \sum_{j=0}^{h-1} \phi^{2j} \alpha_1^{h-j} \\
&= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \left[\frac{1-\phi^{2h}}{1-\phi^2} - \alpha_1 \frac{\alpha_1^h - \phi^{2h}}{\alpha_1 - \phi^2} \right] + \alpha_1 \frac{\alpha_1^h - \phi^{2h}}{\alpha_1 - \phi^2} \varepsilon_{t-h}^2
\end{aligned}$$

avec

$$V\left(\mu \left[\frac{1-\phi^h}{1-\phi} \right] + \phi^h Y_{t-h} / \mathcal{F}_{t-h}\right) = 0,$$

et cela est toujours vrai puisque la variance d'une constante est toujours nulle

$$V\left(\mu \left[\frac{1-\phi^h}{1-\phi} \right] / \mathcal{F}_{t-h}\right) = 0,$$

et de plus

$$V(Y_{t-h} / \mathcal{F}_{t-h}) = \mathbb{E}(Y_{t-h}^2 / \mathcal{F}_{t-h}) - (\mathbb{E}(Y_{t-h} / \mathcal{F}_{t-h}))^2 = Y_{t-h}^2 - Y_{t-h}^2 = 0.$$

□

En conclusion, si nous désirons prévoir le processus X_t dans le cas d'erreur $ARCH(1)$, l'erreur de prévision à un horizon h d'une période admet une variance $V(Y_t/\mathcal{F}_{t-h})$ qui varie dans le temps t en fonction de la valeur de ε_{t-h}^2 .

Remarque 2.2.3. *La variance d'une erreur de prévision d'un processus avec erreur ARCH peut s'écrire en fonction du temps sous la forme*

$$V(Y_t/\mathcal{F}_{t-h}) = f(\varepsilon_{t-h}), \forall h \geq 1.$$

2.3 Estimation et prévision

Les modèles avec erreurs hétéroscédastiques peuvent être généralement estimés en faisant appel aux trois approches :

1. **Estimation par Maximum de Vraisemblance :** Nous nous intéressons dans ce cas à estimer les paramètres en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Pour cela, nous devons connaître la distribution de probabilité des erreurs et maximiser la fonction de vraisemblance pour obtenir une estimation appropriée des paramètres.

2. **Estimation des moindres carrés ordinaires :** Cette approche consiste à estimer les paramètres du modèle ARCH en utilisant les moindres carrés ordinaires. Cela implique de spécifier l'équation de volatilité conditionnelle et de résoudre les équations normales pour aboutir à une estimation des paramètres.
3. **Spécification du modèle ARCH :** Ici, nous devons spécifier le modèle ARCH approprié en déterminant l'ordre du modèle (c'est-à-dire le nombre de retards de volatilité à inclure) et en choisissant la fonction d'autocorrélation conditionnelle (ACF).

Une fois que le modèle ARCH est bien estimé et validé, il serait possible de l'utiliser pour réaliser des prévisions de la volatilité future.

Nous nous intéresserons dans la suite à l'estimation des paramètres par la méthode des moindres carrés (MCO).

2.3.1 Méthode d'estimation des moindres carrés

Considérons l'estimation par la MCO du modèle ARCH(p) défini par les relations :

$$\varepsilon_t = \eta_t h_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

avec $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, p$. Rappelons que (η_t) est une suite de variables i.i.d, centrée et réduite.

La représentation d'un AR(p) nous permet d'écrire :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \mu_t,$$

où $\mu_t = \varepsilon_t^2 - h_t^2$. Il est facile de vérifier que la suite $(\mu_t, \mathcal{F}_{t-1})$ constitue une différence de martingale. Supposons que l'on dispose d'observations $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ réalisation partielle du processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ayant comme valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-p}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{n-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{n-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{n-p}^2 + \mu_n \\ \varepsilon_{n-1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{n-2}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{n-3}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{n-1-p}^2 + \mu_{n-1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \varepsilon_1^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_0^2 + \alpha_2 \varepsilon_{-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{1-p}^2 + \mu_1 \end{aligned}$$

Pour une écriture matricielle, nous allons d'abord introduire le vecteur

$$\mathbf{Z}_{t-1}^T = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2) \text{ pour } t = 1, \dots, n,$$

où

$$\theta_0 = (\alpha_0, \dots, \alpha_p),$$

On en déduit que

$$\varepsilon_t^2 = \mathbf{Z}_{t-1}^T \theta_0 + \mu_t. \quad (2.1)$$

D'où

$$Y = X\theta_0 + U,$$

Considérons la matrice $n \times (p + 1)$ et les vecteurs $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{n-1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_0^T \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \varepsilon_n^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} \mu_n \\ \vdots \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Il serait impératif de supposer que la matrice $X^T X$ est inversible pour conclure l'estimateur des MCO de θ donné par :

$$\hat{\theta}_n = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.2)$$

L'étude du comportement asymptotique, voir la consistance et la normalité asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés, repose essentiellement sur les hypothèses suivantes :

C1 : $\{\varepsilon_t\}$ solution non anticipatives strictement stationnaire.

C2 : $\mathbb{E}(\varepsilon_t^4) < +\infty$.

C3 : $\mathbb{P}(\eta_t^2 = 1) \neq 1$.

Donnons le résultat de la convergence des estimateurs MCO pour les modèles ARCH

Théorème 2.3.1. *Soit $(\hat{\theta}_n)$ une suite d'estimateurs défini par la relation (2.1). Si les hypothèses $H1-H3$ sont remplies, nous avons presque sûrement*

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_0, \hat{h}_t^2 \rightarrow h_t^2, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration.

étape 1 : Sous l'hypothèse **H1**, la suite $(\varepsilon_t)_t$ est solution unique stationnaire non anticipative et ergodique. Le processus (Z_t) est également ergodique car Z_t s'écrit comme fonction mesurable.

$$\frac{1}{n} X^T X = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_{t-1}^T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(Z_{t-1} Z_{t-1}^T). \quad (2.3)$$

L'hypothèse **C3** assurera l'existence de l'espérance, par suite

$$\frac{1}{n} X^T Y = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{t-1} \varepsilon_t^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(Z_{t-1} \varepsilon_t^2),$$

étape 2 Par l'absurde, montrons l'inversibilité de la matrice

$$\mathbb{E}(Z_{t-1} Z_{t-1}^T) = \mathbb{E}(Z_t Z_t^T).$$

Supposons qu'il existe un vecteur non nul $\alpha \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que

$$\alpha^T \mathbb{E}(Z_t Z_t^T) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\alpha^T Z_t (\alpha^T Z_t)^T) = 0.$$

Dans ce cas, il est clair que le vecteur $\alpha^T Z_t$ est *p.s* constant. Comme conséquence, il existe une combinaison linéaire *p.s* égale à une constante des variables $\varepsilon_t^2, \dots, \varepsilon_{t-p+1}^2$. Sans perdre de généralité, on suppose que le coefficient de ε_t^2 égale à 1.

Donc (η_t) s'exprime *p.s* comme fonction mesurable des variables $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}$ et puisque (η_t) est indépendante de ces variables, donc $(\eta_t^2)_t$ est constante *p.s* et cette constante ne peut être que 1.

On aboutit donc à une contradiction avec l'hypothèse **C3**.

étape 3 De ce qui précède, il en suit que $\frac{1}{n} X^T X$ est *p.s* inversible.

Pour n assez grand, nous avons

$$\hat{\theta}_n = \left(\frac{X^T X}{n} \right)^{-1} \frac{X^T Y}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} \left[\mathbb{E}(Z_{t-1} Z_{t-1}^T) \right]^{-1} \mathbb{E}(Z_{t-1} \varepsilon_t^2).$$

étape 4 Sachant que le processus (μ_t) est l'innovation forte de ε_t^2 .

En particulier, nous avons les relations d'orthogonalité suivantes

$$\mathbb{E}(\mu_t) = \mathbb{E}(\mu_t \varepsilon_{t-1}^2) = \dots = \mathbb{E}(\mu_t \varepsilon_{t-p}^2)$$

impliquant que

$$\mathbb{E}(\mu_t \mathbf{Z}_{t-1}) = 0,$$

d'où

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z}_{t-1} \varepsilon_t^2) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T) \theta_0.$$

D'après les étapes 2 et 3, nous concluons la convergence p.s

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_0$$

Celle de \hat{h}_t^2 vers h_t^2 s'en déduit facilement.

□

Pour la normalité asymptotique de l'estimateur des MCO, nous devons faire l'hypothèse supplémentaire suivante :

C4 : $\mathbb{E}(\varepsilon_t^8) < \infty$.

Introduisons les matrices carrées symétriques de taille $p + 1$

$$A = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T), \quad I = \mathbb{E}(h_t^4 \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T)$$

L'inversibilité de la matrice A ce démontre de la même manière que celle utilisée plus haut. celle de I sera montrée dans la preuve du résultat suivant, qui établit la normalité asymptotique de l'estimateur des MCO.

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèses C1 – C4, on a*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (\mu_4 - 1)A^{-1}IA^{-1})$$

où $\mu_4 = \mathbb{E}(\eta_t^4)$.

Démonstration. En utilisant la relation (2.3), on aura

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n &= \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} \varepsilon_t^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} (\mathbf{Z}_{t-1}^T \theta_0 + \mu_t) \right) \\ &= \theta_0 + \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} \mu_t \right), \end{aligned}$$

par conséquent

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{Z}_{t-1}^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_{t-1} \mu_t \right). \quad (2.4)$$

Prenons un vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^{p+1}$. La suite $(u^T \mathbf{Z}_{t-1} \mu_t)_t$ est une différence de martingale stationnaire par rapport à la filtration \mathcal{F}_t . Autrement dit

$$\mathbb{E}(u^T \mathbf{Z}_{t-1} \mu_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Nontons aussi qu'elle est ergodique et de carré intégrable de vraieance

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(u^T Z_{t-1} \mu_t) &= u^T \mathbb{E}(Z_{t-1} Z_{t-1}^T \mu_t^2) u \\
 &= u^T \mathbb{E}(Z_{t-1} Z_{t-1}^T (\eta_t^2 - 1) h_t^4) \\
 &= (\mu_4 - 1) u^T I u.
 \end{aligned}$$

Pour tout u non nul, nous appliquons le théorème de la limite centrale pour les différence de martingale pour conclure que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n u^T Z_{t-1} \mu_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (\mu_4 - 1) u^T I u).$$

En utilisant la propriété de Cramer-Wold, nous aboutissons à

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_{t-1} \mu_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (\mu_4 - 1) I) \tag{2.5}$$

par le même raisonnement que celui utilisé pour établir l'inversibilité de A , on montre que cette loi limite est non dégénérée, c.à.d que I est inversible. Par un raisonnement classique, et des relations (2.3), (2.4) et (2.5), on arrive à conclure que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ est asymptotiquement normal, de moyenne nulle, et de variance la matrice citée dans le théorème. □

2.3.2 La méthode de la fonction auto-corrélation

"Procédure de Diebold (1987)"

soit une série X_t de moyenne nulle, l'autocorrélation empirique d'ordre h est donnée par :

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

où

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=h-1}^T X_t X_{t-h}$$

avec (X_t) est un bruit blanc ($X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

$\hat{\rho}(h)$ est asymptotiquement normalement distribuée, de moyenne nulle et de variance $V(\hat{\rho}(h))$ équivalente à $\frac{1}{T}$.

Cependant en présence d'hétéroscédasticité, la variance de l'auto-corrélation n'est plus en $\frac{1}{T}$ et donnée par :

$$V(\hat{\rho}_X(h)) = \frac{1}{T} \left[1 + \frac{\gamma_{X^2}(h)}{\sigma^4} \right]$$

où $\gamma_{X^2}(h)$ est l'autocovariance du processus $X_t^2(h)$.

Sachant que les $\gamma_{X^2}(h)$ et σ^2 sont aisément estimables et comme estimation de la variance des autocorrélations, on propose l'estimateur

$$\hat{V}(\hat{\rho}_X(h)) = \frac{1}{T} \left[1 + \frac{\hat{\gamma}_{X^2}(h)}{\hat{\sigma}^4} \right]$$

Aussi, l'intervalle de confiance de Bartlett ($\pm 1.96\sqrt{T}$ à 95%) s'avère trop étroit en présence d'effet ARCH et l'intervalle de confiance corrigé des effets ARCH devient, à (95%, $\pm 1.96\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\rho}_X(h))}$). La statistique de Box-Pierce corrigée est alors donnée par

$$Q'(k) = T \sum_{h=1}^k \left[\frac{\sigma^4}{\sigma^2 + \widehat{\gamma}_{X^2}(h)} \right] \widehat{\rho}_X^2(h)$$

qui est asymptotiquement distribuée comme une loi du khi-deux à k degrés de liberté.

2.3.3 Prévision et intervalle de confiance

On va étudier la prévision d'une variable, modélisée par un modèle ARMA dont les erreurs suivent un bruit blanc ou un modèle ARCH. Considérons le modèle AR(1)

$$X_t(1) = \mu + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

À l'instant $t + 1$, X_{t+1} sera écrite comme

$$X_{t+1} = \mu + \rho X_t + \varepsilon_{t+1}$$

le meilleur prédicteur statistique réalisé à l'instant t est défini par

$$\widehat{X}_t = \mathbb{E}(X_{t+1}/X_t, X_{t-1}, \dots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) = \mu + \rho X_t + \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}/\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$$

Dans le cas où (ε_t) est un bruit blanc, ε_{t+1} est orthogonal à son passé, et donc

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}/\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) = 0,$$

alors

$$\hat{X}_t(1) = \mu + \rho X_t.$$

Par itération, on aura, pour tout $h > 0$,

$$\hat{X}_t(h) = \mu + \rho \hat{X}_t(h-1) = \mu \frac{1-\rho^h}{1-\rho} + \rho^h X_t$$

L'erreur de prévision est

$$e_h = X_{t+h} - \hat{X}_t(h) = \varepsilon_{t+h} + \rho \varepsilon_{t+h-1} + \dots + \rho^{h-1} \varepsilon_{t+1}$$

On peut noter que $\hat{X}_t(h) \rightarrow \frac{\mu}{1-\rho}$ quand $h \rightarrow \infty$.

À un seuil α , l'intervalle de prévision aura la forme $[\underline{X}(h), \overline{X}(h)]$ de telle façon que

$$\mathbb{P}(e_h \in [\underline{X}(h), \overline{X}(h)]) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in [\hat{X}_t(h) + \underline{X}(h), \hat{X}_t(h) + \overline{X}(h)]) = 1 - \alpha$$

Dans le cas où (ε_t) est un bruit blanc fort gaussien, alors pour un horizon de 1, on en constate que

$$e_1 = X_{t+1} - \hat{X}_t(1) = \varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

et donc, à un niveau de confiance de 95%, on aura comme intervalle de confiance pour la valeur en $t + h$

$$\left[\hat{X}_t(1) - 1.96\sigma, \hat{X}_t(1) + 1.96\sigma \right].$$

Plus généralement

$$e_h = X_{t+h} - \hat{X}_t(h) = \varepsilon_{t+h} + \rho\varepsilon_{t+h-1} + \dots + \rho^{h-1}\varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, [1 + \rho^2 + \dots + \rho^{2(h-1)}]\sigma^2)$$

et donc intervalle de confiance à 95% pour la valeur en $t + 1$ sera

$$\left[\hat{X}_t(h) - 1.96\sigma\sqrt{1 + \rho^2 + \dots + \rho^{2(h-1)}}, \hat{X}_t(h) + 1.96\sigma\sqrt{1 + \rho^2 + \dots + \rho^{2(h-1)}} \right]$$

Modèle ARCH(1)

Supposons maintenant que (ε_t) n'est plus un bruit blanc (indépendant de son passé) mais plutôt un ARCH(1), c'est à dire que $\varepsilon_t = \eta_t h_t$, où $h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ et (η_t) est un bruit blanc que l'on supposera de variance unitaire, indépendant du passé de (ε_t) , c'est à dire η_t indépendant de $\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots$. On notera tout d'abord que $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ pour tout t , et que la corrélation entre deux dates est donnée par la relation

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) &= \mathbb{E}(\eta_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \cdot \eta_s \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{s-1}^2}) \\ &= \mathbb{E}(\eta_t) \mathbb{E} \left(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \cdot \eta_s \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{s-1}^2} \right) \\ &= 0 \text{ pour } s < t. \end{aligned}$$

et que la variance à la date t vérifie

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \\ &= \mathbb{E}(\eta_t^2[\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2]) \\ &= \mathbb{E}(\eta_t^2)\mathbb{E}(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\sigma^2\end{aligned}$$

c'est à dire $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$. Pour obtenir un intervalle de confiance pour X_{t+h} , rajoutons une hypothèse supplémentaire de normalité du bruit (η_t). Dans ce cas, l'intervalle de confiance, à 95%, pour la valeur à la date $t + 1$ est donné par

$$\left[\hat{X}_t - 1.96\sigma\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_t^2}; \hat{X}_t + 1.96\sigma\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_t^2} \right]$$

Aussi, dans le cas d'un modèle ARCH, la taille de l'intervalle de confiance dépend de la valeur ε_t^2 .

Chapitre 3

Étude numérique

Après avoir étudié les concepts de base des séries temporelles et leurs représentations notamment, les caractéristiques des modèles ARCH et l'estimation proposée, nous faisons, dans cette partie, des simulations des modèles ARCH et une application simple d'une série financière par la méthodologie de Box et Jenkins afin de choisir le modèle approprié pour les données.

3.1 Simulation d'un processus ARCH(p)

La simulation d'un modèle ARCH se fait à l'aide du code **garchSim(.)** de package **fGarch**. Le modèle à simuler est défini par **garchSpec(.)**, il doit être donné sous forme de liste, les noms des composantes de la liste indiquant le type de modèle. Dans ce contexte, nous présen-

tons quatre séries simulant un modèle ARCH(1) où les données simulés sont considérés pour différents scénarios résumés dans le tableau suivant où nous avons adopté le cas où $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

3.1.1 Simulation d'un processus avec erreur ARCH

D'abord, nous simulons 200 et 500 observations suivant le modèle

$$X_t = 1 + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \eta_t h_t^2 \text{ où } \eta_t \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$h_t^2 = 0.2 + 0.7\varepsilon_{t-1}^2$$

Le modèle à simuler est défini par le code **garchSpec()** où il doit être donné sous forme de liste, les noms des composantes de la liste indiquant le type de modèle.

Script R :

```
spec<-garchSpec(model=list(mu=3,omega=0.2,alpha=0.7,beta=0))
n.sim<- 200 Nombre de pas de temps à simuler
sim<-garchSim(spec, n = n.sim)
plot(sim,type="l",ylab="ARCH",xlab="time",main="Simulation avec er-
reur ARCH")
```

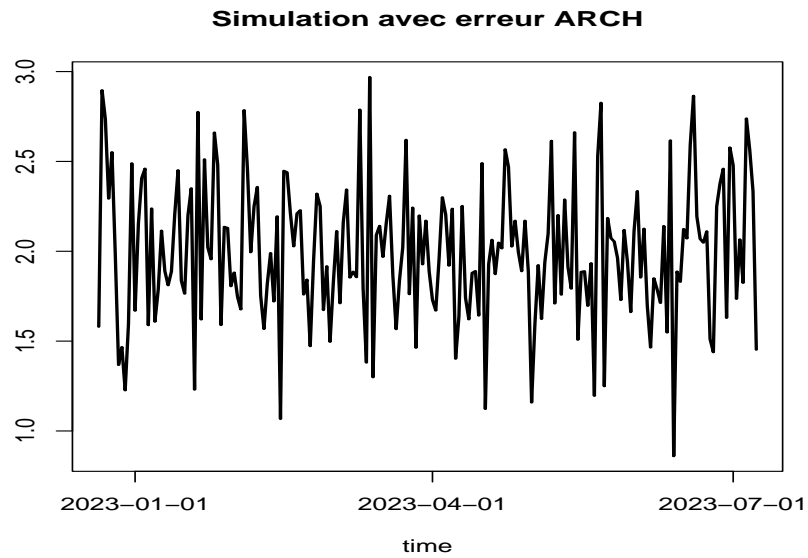


FIGURE 3.1 – Trajectoire d'un ARCH(1) pour $n = 200$ observations, $\mu = 3$, $\omega = 0.2$, $\alpha = 0.7$.

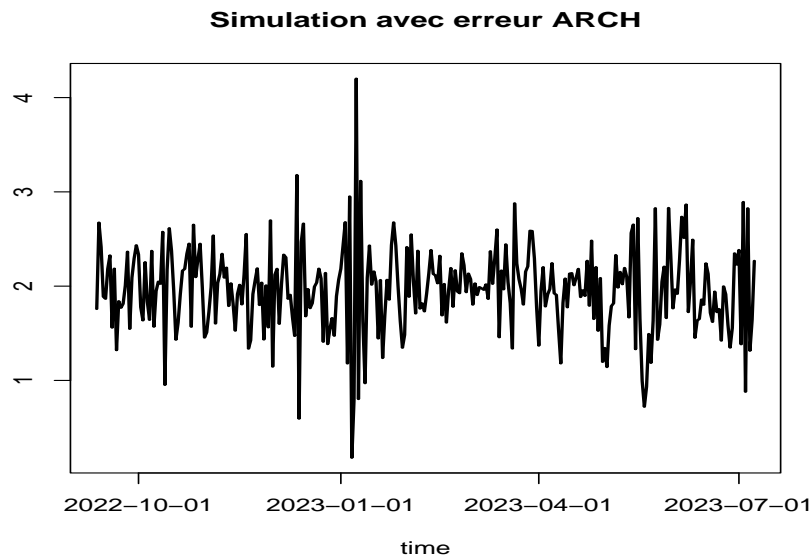


FIGURE 3.2 – Trajectoire d'un ARCH(1) pour $n = 300$ observations, $\mu = 2$, $\omega = 0.3$, $\alpha = 0.45$.

3.1.2 Données réelles

Série des prix moyen mensuels du pétrol : Les données que nous avons utilisées dans le cadre de cette étude proviennent de Insee (Institut national de statistique et des études économiques). Ces données représentent l'évolution du prix de pétrole à Londres et sont mesurées mensuellement durant la période allant de Janvier 2015 jusqu'à Mai 2023. Sur la base du graphique ci dessous (voir FIGURE (3.3)), nous pouvons conclure la non stationnarité de la série, et surtout qu'il y a des mois avec une volatilité très élevée et des mois avec une volatilité très faible, suggérant le modèle stochastique pour la volatilité conditionnelle.

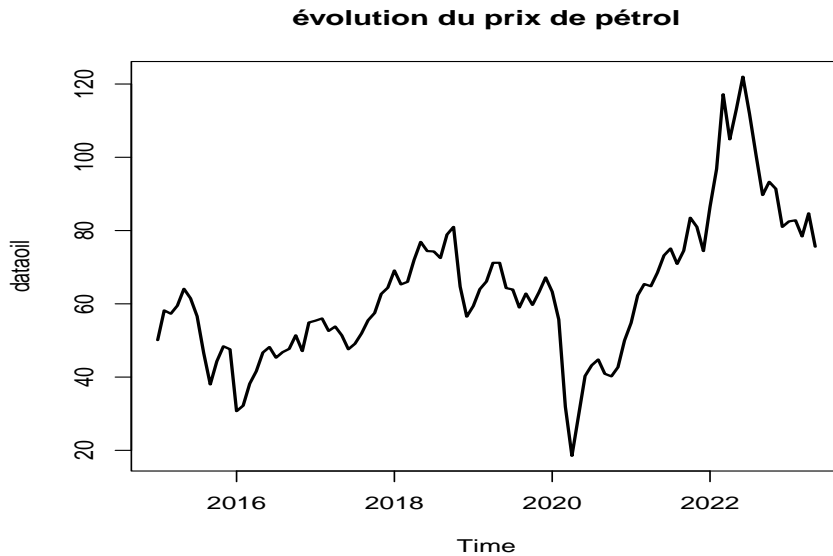


FIGURE 3.3 – Évolution du prix de pétrol à londre duran la période Janvier 2015 et Mai 2023.

L'analyse du corrélogramme simple de la série permet préalablement de confirmer la non-stationnarité puisque la fonction d'autocorrélation décroît très lentement en la comparant au cas des séries stationnaires (voir FIGURE (3.4)).

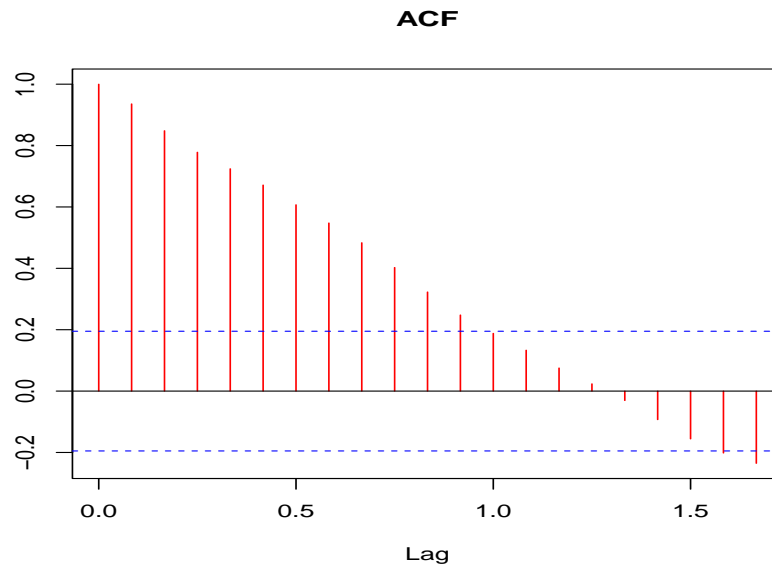


FIGURE 3.4 – Fonction d'autocorrélation.

3.1.3 Prévision statistique

Nous pouvons commencer par le modèle ARCH(1) où nous considérons que le terme d'erreur conditionnel est une distribution normale. Nous utilisons la fonction **ugarchspec()** pour la spécification du modèle et **ugarchfit()** pour l'ajustement du modèle.

```

*-----*
*           GARCH Model Fit           *
*-----*

```

Conditional Variance Dynamics

```

-----
GARCH Model      : sGARCH(1,0)
Mean Model       : ARFIMA(0,0,0)
Distribution      : norm

```

Optimal Parameters

```

-----
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
mu      0.036707   0.030649   1.1977  0.231052
omega   0.080538   0.017361   4.6391  0.000003
alpha1  0.192881   0.176903   1.0903  0.275572

```

Robust Standard Errors:

```

      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
mu      0.036707   0.032758   1.1205  0.262488
omega   0.080538   0.019835   4.0605  0.000049
alpha1  0.192881   0.166456   1.1588  0.246557

```

LogLikelihood : -24.98532

Information Criteria

```

-----
Akaike          0.55971
Bayes           0.63786
Shibata         0.55798
Hannan-Quinn   0.59134

```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals

```

-----
                        statistic p-value
Lag[1]                  0.06406  0.8002
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2] 0.72350  0.5973
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5] 2.92164  0.4215
d.o.f=0
H0 : No serial correlation

```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals

```

-----
                        statistic p-value
Lag[1]                  0.01344  0.9077
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2] 1.25499  0.4224
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5] 4.27269  0.2219
d.o.f=1

```

Weighted ARCH LM Tests

```

-----
      Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[2]    2.386 0.500 2.000 0.12245
ARCH Lag[4]    5.010 1.397 1.611 0.08753
ARCH Lag[6]    6.310 2.222 1.500 0.10081

```

Nyblom stability test

```

-----
Joint Statistic: 0.7119
Individual Statistics:
mu      0.12921
omega   0.07073
alpha1  0.17158

```

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
Joint Statistic: 0.846 1.01 1.35
Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75

Sign Bias Test

 t-value prob sig
Sign Bias 1.18904 0.2374
Negative Sign Bias 0.02123 0.9831
Positive Sign Bias 0.41733 0.6774
Joint Effect 2.64250 0.4501

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:

 group statistic p-value(g-1)
1 20 6.4 0.9968
2 30 16.4 0.9707
3 40 21.6 0.9892
4 50 29.0 0.9898

Elapsed time : 4.016582

La première partie de l'estimation (voir tableau " Paramètres optimaux ") présente les paramètres estimés optimaux et montre la signification des paramètres estimés.

Le deuxième tableau présente les critères d'information (voir tableau "Critères d'information"). Il affiche les critères d'Akaike (AIC), Bayes (BIC), Hannan-Quinn et Shibata pour l'estimation du modèle. Notons que plus ces valeurs sont faibles, meilleur est le modèle en termes d'ajustement.

Le tableau suivant présente le test de Ljung-Box pour tester la corrélation sérielle des termes d'erreur. L'hypothèse nulle est qu'il n'y a pas de corrélation sérielle des termes d'erreur. La règle de décision est simple. Fondamentalement, si la p -valeur est inférieure à 5%, alors l'hypothèse nulle est rejetée. Dans notre exemple, la p -valeur est supérieure à 5%, ce qui signifie qu'il n'y a pas de corrélation sérielle du terme d'erreur.

Un dernier tableau intéressant à interpréter (voir tableau "Adjusted Pearson Goodness of Fit"), est consacré à la qualité d'ajustement de l'erreur. En effet, il est impératif de vérifier si le terme d'erreur suit la distribution normale. L'hypothèse nulle est que le terme d'erreur conditionnel suit une distribution normale. Si la p -valeur est inférieure à 5%, l'hypothèse nulle est rejetée. Comme on peut le voir, la distribution normale est loin d'être rejetée puisque la p -valeur est supérieure à 5%.

Nous présentons dans la figure les performances du modèle similaire à celui présenté dans le tableau des résultats. En bas à gauche, nous pouvons voir le graphique QQ-plot (quantiles théoriques versus quantiles empiriques, une approche utile pour tester la normalité des données, voir graphique à l'intersection de la troisième ligne et de la première colonne), qui montre que les résidus sont parfaitement alignés, ce qui signifie que les résidus suivent la normale distribution. Ce résultat peut également être confirmé par le tracé du noyau des résidus et de la distribution normale (voir le graphique à l'intersection de la deuxième ligne et de la quatrième colonne).

En bas à droite, nous pouvons observer l'impact de la volatilité qui est positif, que les nouvelles soient positives ou négatives. De plus, nous avons le graphique de la fonction d'autocorrélation des résidus (première ligne et quatrième colonne et autres graphiques connexes).

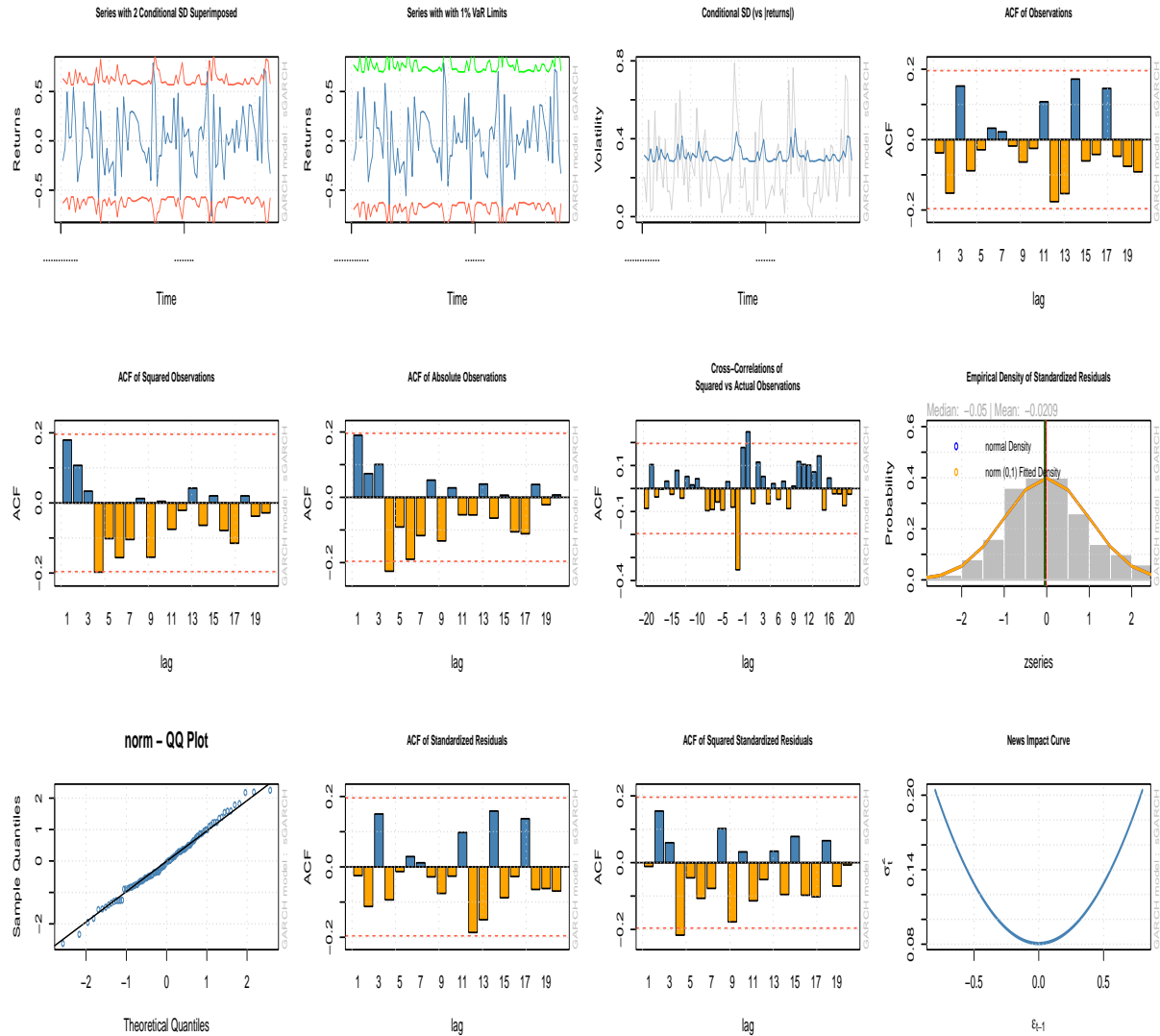


FIGURE 3.5

Prévision

Le problème de la prévision dans le cadre des processus ARCH a été abordé par de nombreux auteurs. Engel et Kraft (1983) ainsi que Engel et Bollerslev (1986) ont dérivé les expressions de la variance de l'erreur de prévision dans le cas de processus avec erreurs ARCH. Une application importante de la théorie des modèles ARCH consiste à évaluer la précision de prévision des valeurs futures d'une série chronologique. Dans cette partie, le package **tseries** est utilisé afin de réaliser numériquement la prévision. La FIGURE (3.6) et FIGURE (3.1.3) représentent la prévision en rouge des observations réelles en noire respectivement dans un ARCH(1) et un ARCH(4).

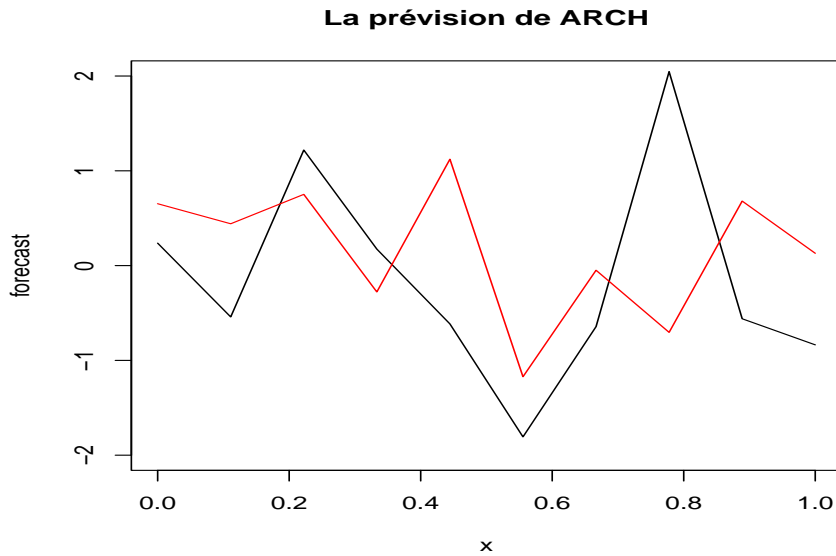


FIGURE 3.6 – Prédiction d'un ARCH(1)

Notons que la qualité de la prédiction est mesurée généralement par l'erreur quadratique moyenne MSE (Mean Square Error), l'écart au carré moyen entre les prévisions et les observations réelles calculé au points de discrétisations m . Elle est

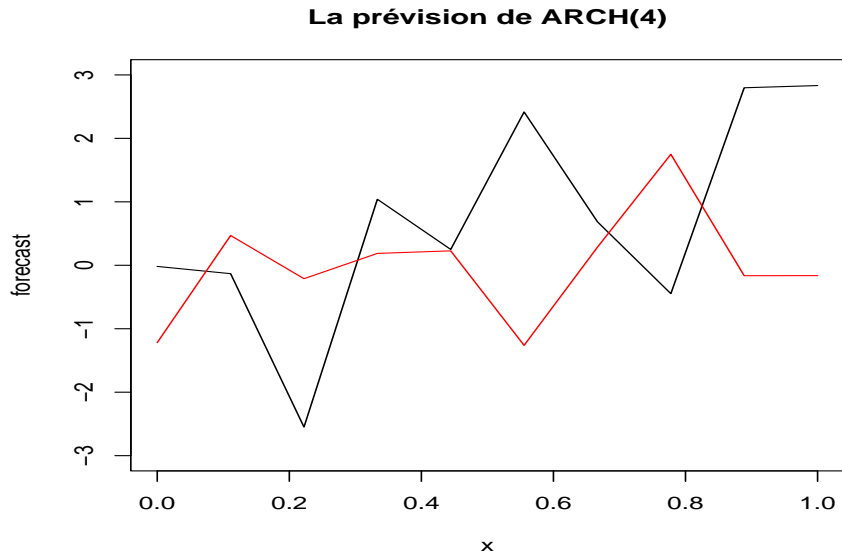


FIGURE 3.7 – Prédiction d'un ARCH(4)

définie par :

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\hat{X}_j - X_j)^2,$$

où m est le nombre de discrétisations, \hat{X}_j est la j -ème valeur de prévision et X_j est la j -ème d'observation réelle.

La Table 3.1 et Table 3.2 comportent les erreurs MSE des prévisions pour les différentes valeurs de n en $m = 30$ points de dicrétisations (chaque scénario est répété 100 fois).

..

Les Tables montrent que, pour les mêmes paramètres, lorsque le nombre d'observations augmente, l'erreur MSE a tendance à diminuer. Cela est cohérent avec l'idée générale selon laquelle un échantillon plus grand fournit plus d'informations et permet une meilleure estimation des paramètres du modèle conduisant naturellement à des prévisions plus performantes avec des erreurs très réduites.

TABLE 3.1 – "MSE pour ARCH(1)"

n		α_0				
		$\alpha_0 = 0.3$	$\alpha_0 = 0.2$	$\alpha_0 = 0.1$	$\alpha_0 = 0.09$	$\alpha_0 = 0.05$
100	α_1	0.4	0.7	0.9	0.5	0.09
	MSE	1.3831	0.7708	0.3563	0.2440	0.1123
500	α_1	0.4	0.7	0.9	0.5	0.09
	MSE	0.3912	0.3318	0.1982	0.1268	0.0519

TABLE 3.2 – "MSE pour ARCH(4)"

n		α_0				
		$\alpha_0 = 0.5$	$\alpha_0 = 0.2$	$\alpha_0 = 0.1$	$\alpha_0 = 0.08$	$\alpha_0 = 0.01$
100	α_1	0.1	0.09	0.03	0.5	0.05
	α_2	0.2	0.15	0.4	0.07	0.1
	α_3	0.3	0.2	0.2	0.12	0.2
	α_4	0.3	0.3	0.15	0.2	0.4
	MSE	2.6624	0.84083	0.466106	0.337982	0.0415
500	α_1	0.1	0.04	0.3	0.2	0.4
	α_2	0.2	0.2	0.4	0.4	0.12
	α_3	0.3	0.6	0.08	0.05	0.06
	α_4	0.3	0.1	0.1	0.18	0.2
	MSE	1.14356	0.44287	0.24356	0.1871944	0.022062

Lorsque les coefficients d'un modèle ARCH sont modifiés, cela peut affecter la volatilité conditionnelle estimée, les prévisions et notamment l'erreur MSE .

Le paramètre α_0 contrôle la volatilité de base, Une augmentation de α_0 augmente cette volatilité, ce qui peut entraîner des prévisions plus volatiles et une erreur MSE remarquable. En revanche, une diminution de α_0 réduit la volatilité de base, ce qui peut conduire à des prévisions moins volatiles et une erreur plus faible.

Le paramètre d'autorégression α_1 influence l'impact de **la volatilité conditionnelle**. Une augmentation de α_1 entraînera des prévisions plus volatiles et une erreur plus élevée et donc une diminution de α_1 réduira l'impact et conduira à des prévisions moins volatiles et et plus robustes.

Il est important de noter que l'effet des changements de coefficients sur le MSE

peut varier en fonction des données et des caractéristiques de la série temporelle. Il est donc recommandé de tester les différentes valeurs de coefficients et d'évaluer l'impact sur l'erreur MSE pour mieux comprendre les changements affectant les prévisions du modèle ARCH.

Conclusion

Le présent mémoire constitue une introduction aux modèles ARCH avec une présentation de quelques outils de base de la théorie des séries chronologiques qui présentent une dynamique non linéaire. L'objectif a été mis en évidence l'utilité des modèles non linéaire et l'hétéroscédasticité conditionnelle qui possède des outils puissants d'analyse et de modélisation fondés sur des bases théoriques solides pour modéliser des séries chronologiques stationnaire présentant une dynamique non linéaire. Le concept de la variance conditionnelle joue un grand rôle et caractérise les modèles venus élargir la classe des modèles classiques fondés essentiellement sur une structure de dépendance linéaire entre une variable à un instant t et ses valeurs passées et celles d'un bruit blanc et de ses valeurs passées. D'un autre côté, il est important de noter que les séries financières sont aussi caractérisées par une volatilité non stationnaire et par des phénomènes d'asymétrie qui ne peuvent pas être pris en compte par les modélisations classique.

Les modèles ARCH ayant l'avantage de modéliser des séries temporelles complexes et sont pour cette raison très utilisés notamment pour certaines séries financières, en particulier pour prédire la volatilité.

Les représentations des différentes approches qui s'offrent à nous pour estimer les paramètres du modèle ARCH, entre autres la méthode de moindres carrés que nous avons traitée. Sous des conditions appropriées, les résultats de convergence asymp-

totiques et de normalité asymptotique ont été établis.

Afin d'illustrer la théorie, une étude numérique est présentée à la fin, qui a pu montrer l'efficacité des modèles considérés.

Bibliographie

- [1] Amari. K. Les modèles Auto-Régressifs Double (DAR), mémoire de Maste Processus stochastiques et statistique de décision, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2017.
- [2] Azrak, I. Estimation et représentation $ARCH(\infty)$ des modèle GARCH, mémoire de Maste Analyse mathématique et application , Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2018.
- [3] Ben bouabdellah, L. Estimation en ligne des modèles ARCH, mémoire de Master, département de Mathématiques, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2014.
- [4] Berhoune, K. Processus ARCH-GARCH Applications. Mémoire de Master, département de Mathématiques, Université AbouBeker Belkaid - Tlemcen, 2013.
- [5] Bougerol, P. et Picard, N. Stationarity of garch processes and of some nonegative time series. *Journal of Econometrics* 52., 115–127, 1992.
- [6] Boukheloua, N. Modèles non linéaires ARCH-GARCH applications et simulations, mémoire de Maste Probabilités et Statistique, Université Mohammed Seddik Ben Yahia , Jijel, 2019-2020.
- [7] Chafia, D et Lévy-leduc, C. Introduction aux série temporelle, Master 1 mathématique appliqué, Université Paris-Dauphine, 2017-2018.

- [8] Charpentier, A. Cours de séries temporelles. Théorie et applications.
- [9] Dendouga, S. Séries Temporelles : Théorie et Application, Mémoire de Master, Département de Mathématiques, Université Mohamed Khider, Biskra, 2020.
- [10] Engel, R.F. AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica*, 50, 987- 1008, 1982.
- [11] Lagnoux, A. Série chronologique, master 1, Université de Toulouse Le Miral.
- [12] Prenant, M. Cours de série chronologique, Master 2 ingénierie mathématique, Université Paris-Sud, 2010-2011.
- [13] Monbet, V. Modélisation des séries temporelles, Master 1 Statistique et Économétrie, Notes de cour, 2017.
- [14] Yahia, D. Séries Temporelles et test d'adéquation pour une modèle $GARCH(1; 1)$. Mémoire de Magister, Université Biskra, 2005.