



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen  
Faculté de Technologie  
Département De génie mécanique

**MEMOIRE**

En vue de l'obtention du diplôme de

**MAGISTER**

**EN GENIE MECANIQUE**

Ecole doctoral : Mécanique des Matériaux et structures

Option : systèmes mécanique et matériaux

*Thème*

**Comportement vibratoire des roues  
aubagées**

**Présenté par :**

Mr. SAIMI Ahmed

**Soutenu devant le Jury :**

Président	MEFTAH KHOUANE	MC"A"	Univ. Tlemcen
Encadreur	HADJOUI ABDELHAMID	Prof	Univ. Tlemcen
Examineur	BENACHOUR MUSTAPHA	MC"A"	Univ. Tlemcen
Examineur	BOUKHALFA ABDELKRIM	MC"A"	Univ. Tlemcen

Année universitaire 2012 -2013

# *DEDICACES*

*Je remercie dieu tout puissant qui ma permet d'arriver à ce but.*

*Chaleureusement je dédie ce modeste travail*

*A ceux qui m'ont éclairé le chemin de la sagesse et m'ont offert*

*tout ce qui est cher et comble le cœur dans la vie avec une*

*immense générosité et une tendre affection.*

*A Mes chers parents en témoignage pour leur amour et leur sacrifice*

*sans limite à qui je souhaite la bonne santé et que dieu me les garde,*

*en particulier ma mère.*

*A mon frère et mes sœurs, et toute ma famille.*

*Et tous mes amis*

## Remercîment

*Mes vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à monsieur Mr. HADJOUI  
ABDLHAMID, professeur à l'université Abou Bakër Bel Kaid Tlemcen, pour m'avoir  
encadré tout en m'accordant sa confiance et apporté ses précieux conseils.*

*Mes remerciements aussi à monsieur MEFTAH KHOUANE, MC"A" à l'université à  
l'université Abou Bakër Bel Kaid Tlemcen, en acceptant d'être président du jury de  
soutenance de ce mémoire.*

*Je suis très heureuse que monsieur BENACHOUR MUSTAPHA, MC"A" à l'Université à  
l'université Abou Bakër Bel Kaid Tlemcen, me fasse l'honneur d'examiner ce travail.*

*Je remercie également monsieur BOUKHALFA ABDELKRIM, MC"A" à l'Université à  
l'université Abou Bakër Bel Kaid Tlemcen, à l'importance qu'il accorde à mon travail en  
acceptant de faire partie des examinateurs de soutenance.*

*Ma reconnaissance à tous les enseignants du département de génie mécanique qui ont  
contribué à ma formation.*

*Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues, amis et proches à l'université Abou Bakër Bel  
Kaid Tlemcen qui m'ont soutenu et aidé de manière directe ou indirecte.*

## Résumé

L'innovation technologique se fait par la compréhension des phénomènes physiques complexes que l'on rencontre lors de l'exploration des différents domaines scientifiques.

Parmi eux, la dynamique des rotors des machines tournantes constitue un domaine particulier de la mécanique qui a depuis longtemps intéressé autant la communauté scientifique que le monde industriel.

Dans ce travail nous proposons une étude du comportement dynamique de rotor aubagé de turbomachine. Les équations du mouvement sont déterminées par les équations de Lagrange en fonction des expressions des énergies cinétiques et de déformation ainsi que le travail virtuel correspondant aux éléments: disque, ailettes, arbre, palier et balourd.

La méthode de Rayleigh-Ritz généralisée à plusieurs fonctions de déplacements, est utilisée pour la résolution des équations du mouvement.

Un programme présenté sous forme d'application exécutable, appelée Analyse Dynamique des Rotors (ADR) a été réalisée en langage MATLAB.

Après avoir validé le programme, nous traçons les diagrammes de Campbell qui nous permettent de déterminer les vitesses critiques du rotor et étudions l'influence des différents paramètres géométriques et mécaniques de l'arbre, du disque et des ailettes du rotor sur les vitesses critiques et les amplitudes du système.

Mots Clés : rotor aubagé, vitesses critiques, diagramme de Campbell.

## Abstract

Technological innovation is the understanding of complex physical phenomena that occur during the exploration of different scientific fields.

Among them, the rotor dynamics of rotating machines is a particular area of mechanics that has long interested both the scientific community and the industrial world.

In this paper we propose a study of the dynamic behavior of bladed rotor of a turbomachine. The equations of motion are determined by the Lagrange equations based on the expressions of kinetic energy and deformation as well as the virtual work corresponding to the elements: disc blades, shaft, bearing and unbalance. The method of generalized Rayleigh-Ritz Multipurpose travel is used to solve the equations of motion. A program presented as an application, called Dynamic Analysis of Rotors (ADR) was performed in MATLAB. After validating the program, we draw diagrams Campbell that allow us to determine the critical speed of the rotor and study the influence of different geometrical and mechanical parameters of the shaft, disk and blades of the rotor critical speeds and the amplitudes of the system.

Key words: bladed rotor, critical speeds, Campbell diagram.

## ملخص

الابتكار التكنولوجي هو فهم الظواهر الفيزيائية المعقدة التي تحدث أثناء استكشاف المجالات العلمية المختلفة .

فيما بينها الديناميكا لدورات لآلات الدورية و التي تمثل منطقة خاصة للميكانيكا والتي ايضا مند مدة طويلة وهي تهتم كل من المجتمع العلمي والعالم الصناعي . في هذا البحث نقترح دراسة نظرية وتحليلية لسلوك ديناميكية الدوار ذات الريشة ل(turbomachine), تم تحديد معادلات الحركة عن طريق معادلات Lagrange التي تطبق استنادا إلى التعبير عن الطاقة الحركية وتشوه وكذلك العمل الظاهري المقابلة للعناصر التالية: قرص، فرشاة، الجذع، واضعة وعدم الاتزان. تم استخدام الأسلوب Rayleigh-Ritz لحل معادلات الحركة. نريد تحديد مخططات Campbell التي تعطينا السرعة الحرجة للدوار و قيمة ذروة الحركة.

تم كذلك صنع برنامج قابل للتطبيق عن طريق البرنامج MATLAB, بعد التحقق من صحة البرنامج، نلقت مخططات كامبل التي تسمح لنا لتحديد السرعة الحرجة من الدوار ودراسة تأثير مختلف المعلمات الهندسية والميكانيكية للقرص، فرشاة، الجذع بسرعة الحرجة الدوار وسعة النظام .

ندرس تأثير مختلف المعلمات الهندسية والميكانيكية للشفرات الجذع، القرص الدوار وللسرعات الحرجة وسعة النظام .



**Sommaire**

<i>Résumé</i> .....	01
<i>List des symboles</i> .....	04
<i>List des Figures</i> .....	06
<i>List des Tableaux</i> .....	08
<i>Introduction</i> .....	10
<i>Étude bibliographique</i> .....	13
<b>CHAPITRE I : DYNAMIQUE DES ROTORS</b> .....	<b>17</b>
<i>I.1 : Description des turbomachines</i> .....	17
<i>I.1.1 : Définition d'une turbomachine</i> .....	17
<i>I.1.2 : Domaines d'application</i> .....	18
<i>I.1.3 : Diversité des turbomachines</i> .....	19
<i>I.1.4 : Constitution et performance</i> .....	20
<i>I.1.5 : Classification des turbines</i> .....	21
<i>I.1.6 : Etudes et recherches</i> .....	21
<i>I.2 : Dynamique des rotors</i> .....	22
<i>I.2.1 : Objectifs de l'analyse dynamique des rotors</i> .....	22
<i>I.2.2 : Les prédictions du comportement dynamique des rotors</i> .....	23
<i>I.2.2.1 : Rotor rigide</i> .....	24
<i>I.2.2.2 : Rotor flexible</i> .....	24
<i>I.2.3 : Les différents mouvements de rotor</i> .....	24
<i>I.2.4 : Les divers types d'excitations</i> .....	25
<i>I.2.5 : Modes et vitesses critiques des rotors des machines tournants</i> .....	26
<i>I.2.6: L'influence des dissymétries</i> .....	29
<i>I.2.7 : L'effet de l'amortissement</i> .....	30
<i>I.2.8 : Conclusion</i> .....	31
<b>CHAPITRE II : ANALYSE DYNAMIQUE DES SOLIDES</b> .....	<b>33</b>
<i>II.1 Cinématique d'une particule du solide</i> .....	33
<i>II.2 Dynamique d'un corps déformable</i> .....	35
<i>II.3. Méthode de Rayleigh Ritz</i> .....	36
<i>II.4. Equation de mouvement de corps déformable</i> .....	38
<i>II.5 : Conclusion</i> .....	39
<b>CHAPITRE III : MODELISATION DE SYSTEME DU ROTORS</b> .....	<b>41</b>
<i>III.1 : Introduction</i> .....	41
<i>III.2 : Hypothèses</i> .....	41
<i>III.3 : Détermination des énergies des éléments de rotor</i> .....	42
<i>III.3.1. La roue aubage</i> .....	43
<i>III.3.1.1. Disque</i> .....	43
<i>III.3.1.2 Ailette</i> .....	46
<i>III.3.2. Arbre</i> .....	47
<i>III.3.2.1.Energie cinétique</i> .....	47
<i>III.3.2.2.Energie de déformation</i> .....	48
<i>III.3.3. Balourd</i> .....	50
<i>III.3.4. Paliers</i> .....	51
<i>III.4. Modèle analytique : rotor simple</i> .....	52
<i>III.4.1. Détermination des équations</i> .....	52
<i>III.5. Equation matricielle d'équilibre dynamique</i> .....	53
<i>III.5.1. Modes et fréquences en fonction de la vitesse de rotation : diagramme de Campbell</i> .....	54
<i>III.5.2.La réponse au balourd</i> .....	55
<i>III.5.3.Vitesses critiques</i> .....	56

<i>CHAPITRE IV : ETUDE DU ROTOR AUBAGE</i> .....	58
<i>IV.1. Présentation de l'application</i> .....	58
<i>IV.2. Organigramme de l'application</i> .....	59
<i>IV.3. Validation</i> .....	60
<i>IV.3.1. Etude du modèle symétrique</i> .....	60
<i>IV.3.2. Etude du modèle dissymétrique</i> .....	62
<i>IV.4. Influence de différents paramètres géométriques sur la dynamique du rotor</i> .....	64
<i>IV.4.1. Influence de la position du disque dans le rotor</i> .....	65
<i>IV.4.2. Influence de l'épaisseur du disque</i> .....	70
<i>IV.4.3. Influence de la longueur de l'arbre</i> .....	73
<i>IV.4.4. Influence de nombre des ailettes dans le disque</i> .....	76
<i>IV.4.5. Influence de rayon de l'arbre</i> .....	79
<i>IV.4.6. Influence de type de matériaux utilisé pour les pièces de système</i> .....	83
<i>IV.4.7. Influence de l'angle d'inclinaison des ailettes</i> .....	86
<i>IV.4.8. Influence de la longueur des ailettes</i> .....	89
 <i>CONCLUSION GENERALE</i> .....	 93
 <i>Références bibliographique</i> .....	 95
<i>Annexe</i> .....	100

Liste des symboles

$R :$	<i>Repère mobile</i>
$(X, Y, Z) :$	<i>coordonnée de repère fixe</i>
$(x, y, z) :$	<i>coordonnée de repère mobile</i>
$s :$	<i>l'axe de l'ailette</i>
$u :$	<i>déplacement suivant l'axe x</i>
$w :$	<i>déplacement suivant l'axe z</i>
$\eta :$	<i>déplacement suivant l'axe s</i>
$\theta :$	<i>Angle de rotation</i>
$\vec{\omega}_{R/R_0}^R :$	<i>Vecteur rotation de disque</i>
$(\omega_x, \omega_y, \omega_z) :$	<i>Composants du vecteur de rotation</i>
$m_d :$	<i>Masse du disque</i>
$I_C :$	<i>Tenseur d'inertie principal</i>
$T_d :$	<i>L'énergie cinétique du disque</i>
$\Omega :$	<i>Vitesse de rotation (rad/s)</i>
$\text{trans} :$	<i>Translation</i>
$\text{rot} :$	<i>Rotation</i>
$\dot{\phantom{x}} :$	<i>dérivée temporaire</i>
$\ddot{\phantom{x}} :$	<i>Deuxième dérivé temporaire</i>
$n_b :$	<i>nombre totale des ailettes</i>
$k :$	<i>le numéro de l'ailette de 1 : <math>n_b</math></i>
$P_k :$	<i>Position de l'ailette</i>
$\beta :$	<i>l'angle de décalage des aubes</i>
$R_{a1} :$	<i>Rayon intérieur du disque</i>
$R_{a2} :$	<i>Rayon extérieur du disque</i>
$\psi_k :$	<i>L'angle qui désigne la position de l'ailette</i>
$\omega_{Rb/R_0} :$	<i>Vecteur rotation de centre de masse de l'aube</i>
$L :$	<i>Longueur de rotor</i>
$\rho :$	<i>Masse volumique de l'arbre</i>
$S_a :$	<i>Aire de section de l'arbre</i>
$I_a :$	<i>Moment d'inertie transverse</i>
$m_{tot} :$	<i>Nombre total des modes de l'arbre</i>
$n_{tot} :$	<i>Nombre total des modes de l'ailette</i>
$I_{dx} :$	<i>Moment d'inertie du disque /x</i>
$I_{dy} :$	<i>Moment d'inertie du disque /y</i>
$\rho_b :$	<i>Masse volumique de l'aube</i>
$S_b :$	<i>Aire d'une section droite d'aube</i>
$l_b :$	<i>Longueur de l'aube</i>
$\Omega :$	<i>Vitesse de rotation de rotor</i>
$I_b :$	<i>Moment d'inertie de l'aube en flexion</i>
$I_z :$	<i>Moment d'inertie de l'aube polaire</i>
$I_y :$	<i>Moment d'inertie de l'aube</i>
$r :$	<i>Rayon du disque</i>
$y :$	<i>Position de disque dans le rotor</i>

$m_u$ :	<i>Masse de balourd</i>
$d$ :	<i>Distance de balourd</i>
$E_a$ :	<i>Module de Young</i>
$E_b$ :	<i>Module de Young de l'aube</i>
$t$ :	<i>Temps de réponse</i>
$\varepsilon$ :	<i>Déformation longitudinale</i>
$T_d$ :	<i>Énergie cinétique de disque</i>
$T_b$ :	<i>Énergie cinétique d'ailette</i>
$T_a$ :	<i>Énergie cinétique de l'arbre</i>
$T_{Bal}$ :	<i>Énergie cinétique de balourd</i>
$U_a$ :	<i>Énergie de déformation de l'arbre</i>
$U_b$ :	<i>Énergie de déformation de l'aube</i>
$\delta W_p$ :	<i>Travail virtuel des forces extérieures</i>
$F_u, F_w$ :	<i>Forces généralisées</i>
$k_{ij}$ :	<i>Rigidités</i>
$c_{ij}$ :	<i>Amortisseurs</i>
$V_m(y)$ :	<i>Fonctions de forme de l'arbre</i>
$Y_n(s)$ :	<i>Fonctions de forme de l'ailette</i>
$\frac{\partial^2}{\partial s^2}$ :	<i>Dérivées du second ordre</i>

Liste des Figures

Fig.I.1: Vue de l'ensemble des éléments tournants d'une turbomachine.....	18
Fig.I.2. turbine Francis .....	19
Fig.I.3. éoliennes à axe vertical de type Darrieus et une turbines Pelton .....	19
Fig.I.4. assemblage d'une turbine.....	20
Figure I.5 Diagramme de Campbell .....	26
Fig.I.6. Les trois premières formes de flexion d'une poutre appuyée aux deux extrémités .....	27
Fig.I.7.deformé modale par rapport à la rigidité des paliers.....	28
Fig.I.8. 1ères formes de vibration d'arbres avec différents disques .....	29
Fig.I.9. 2em formes de modes et les fréquences des tours de l'arbre rotatif.....	29
Fig.I.10. Influence des dissymétries sur le diagramme de Campbell .....	30
Fig.II.1 Configuration de référence .....	33
Fig.II.2 Configuration déformée.....	33
Fig.II.3. Rotor en rotation à deux paliers.....	40
Fig. III.1 model d'un rotor avec roues aubagé supporté par deux palier.....	42
Fig. III.2: Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible.....	43
Fig. III.3 vue de face du disque aubagée.....	46
Fig. III.4 model de disque aubagée.....	46
Fig. III.5 vue de haut du disque à aubes et l'angle $\beta$ de décalage des aubes.....	46
Fig. III.6: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor..	49
Fig. III.7 Masse de balourd .....	50
Fig. III.8 Amortissement et raideur de palier .....	51
Fig.III.9 Rotor simple.....	52
Fig.III.10 Comparaison entre les fréquences naturelles et les vitesses critiques.....	56
Fig.IV.1. : interface de l'application ADR.....	58
Fig. IV.2. Organigramme .....	59
Fig.IV.3. Modèle simple de mono rotor .....	60
Fig.IV.4 diagramme de Campbell [7] - cas symétrique .....	61
Fig.IV.5 diagramme de Campbell - ADR- cas symétrique .....	61
Fig.IV.6 Modèle simple de mono rotor avec raideur .....	62
Fig.IV.7.diagramme de Campbell [7] cas dissymétrique .....	62
Fig.IV.8 diagramme de Campbell, avec ADR dissymétrie .....	63
Fig.IV.9. modèle de référence - rotor BP de turbine à gaz MS 5002B .....	64
Fig.IV.10 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $y=1.842m$ ).....	67

Fig.IV.11 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $y=1.603m$ ).....	68
Fig.IV.12 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $y=1.4835m$ ).....	69
Fig.IV.13 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $h=0.05m$ ).....	71
Fig.IV.14 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $h=0.074m$ ).....	72
Fig.IV.15 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $L=1.2m$ ) .....	74
Fig.IV.16 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $L=1.5m$ ) .....	75
Fig.IV.17: Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $n_b=0$ ).....	77
Fig.IV.18 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $n_b=40$ ).....	78
Fig.IV.19: Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $R_a=0.1$ ) .....	81
Fig.IV.20 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $R_a=0.4$ ) .....	82
Fig.IV.21 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (tout le système en acier).....	84
Fig.IV.22 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (tout le système en aluminium) .....	85
Fig. IV.23 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (l'angle de décalage $B=20^\circ$ ) .....	87
Fig. IV.24 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (l'angle de décalage $B=60^\circ$ ) .....	88
Fig. IV.25 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $l_b=0.3m$ ).....	90
Fig. IV.26 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $l_b=0.1m$ ).....	91

Liste des Tableaux

<i>TAB N°1 : L'ECARTE ENTRE LES RESULTATS DE [7] ET ADR DES VALEURS DES FREQUENCES ET DES VITESSES CRITIQUES DE CAS SYMETRIQUE .....</i>	<i>62</i>
<i>TAB N°2 : L'ECARTE ENTRE LES RESULTATS DE [7] ET ADR DES VALEURS DES FREQUENCES ET DES VITESSES CRITIQUES DE CAS DISSYMETRIQUE.....</i>	<i>63</i>
<i>TAB N°3 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTES POSITIONS DU DISQUE .....</i>	<i>65</i>
<i>TAB N°4 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTES EPAISSEURS DU DISQUE .....</i>	<i>70</i>
<i>TAB N°5 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTES LONGUEURS DE L'ARBRE.....</i>	<i>73</i>
<i>TAB N°6 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DU NOMBRE D'AILETTES .....</i>	<i>76</i>
<i>TAB N°7 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTS RAYONS EXTERIEURS DE L'ARBRE.....</i>	<i>79</i>
<i>TAB N°8 : DIFFERENTS TYPES DE MATERIAUX DE SYSTEME .....</i>	<i>83</i>
<i>TAB N°9 : INFLUENCE DE L'ANGLE D'INCLINAISON DES AILETTES .....</i>	<i>86</i>
<i>TAB N°10 : INFLUENCE DE LA LONGUEUR DES AILETTES.....</i>	<i>89</i>

# Introduction



## Introduction

*Les machines tournantes telles que les pompes, les turbines (ou turbomachines) et les compresseurs sont devenues depuis nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Les progrès effectués dans la conception et la fabrication permettent aujourd'hui d'augmenter à la fois les performances et le rendement des machines en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesse de rotation de plus en plus élevées. Cependant, les efforts générés, de plus en plus importants, sollicitent fortement le comportement dynamique global de la machine et les amplitudes vibratoires deviennent souvent trop élevées pour que la structure puisse les supporter. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter qu'une trop grande vibration engendre un moindre rendement, un bruit trop important ; et cette vibration peut même aboutir à l'instabilité et à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. Ces phénomènes néfastes sont très amplifiés dans les vitesses critiques. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.*

*L'étude du comportement dynamique des machines tournantes et des différentes structures mécaniques à rotors tel que les centrifugeuses, les pompes, les compresseurs, les turbines, et les éoliennes permettant de résoudre divers problèmes liés à leurs fonctionnements. Les rotors sont définis comme tout élément tournant autour d'un axe fixe.*

*La dynamique du rotor est un domaine très particulier et riche de la mécanique, où l'abondance des phénomènes peut être responsable de l'instabilité des structures tournantes. Un intérêt commun notamment de l'industrie des machines tournantes est de comprendre correctement les phénomènes vibratoires et de prédire le comportement dynamique de la flexibilité des rotors à aubes. En effet, une connaissance suffisante des phénomènes vibratoires est essentielle pour l'examen des moyens adéquats pour réduire ou éliminer les vibrations et pour la conception de machines tournantes.*

*La maîtrise de cette structure est fondamentale pour l'industrie en raison du fait que les instabilités de rotors peuvent causer de graves dégâts. Afin d'éviter ces problèmes, les ingénieurs doivent donc trouver des dispositifs appropriés pour éliminer les instabilités.*

*Pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation que le rotor. On utilise un repère tournant principalement pour l'étude des roues ou des disques. Dans le contexte qui nous intéresse qui est la dynamique de l'ensemble, le repère fixe est le plus approprié.*

*Les études essentielles de la dynamique des rotors concernant le tracé du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation et le calcul des réponses à balourd principalement lors du passage des vitesses critiques.*

*Pour réaliser de telles études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode de matrice de transfert, la méthode des éléments finis et la méthode d'expansion polynomiale généralisée ou encore des fonctions de transfert distribuées. Toutes ces méthodes permettent de prendre en compte les particularités que présente la dynamique des rotors vis-à-vis de la dynamique des structures fixes. On peut citer par exemple l'existence des moments gyroscopiques responsables de la variation de la fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation ou celle de forces circulatoires qui rendent le mouvement instable à partir d'une certaine vitesse dans le cadre purement linéaire.*

*La thématique de recherche abordée dans le cadre de ce mémoire de magister concerne l'étude de comportement dynamique de rotors, nous prenons le modèle d'un rotor à pales.*

*Le présent mémoire s'organise autour de quatre chapitres.*

*Après une recherche bibliographique, le premier chapitre présente, dans une première partie, présente une vision globale de l'état de l'art dans le domaine de la dynamique des rotors, une synthèse de l'état d'avancement des recherches scientifiques, les connaissances acquises soit à partir des modèles analytiques ou éléments finis sont récapitulées. La seconde partie porte sur la description des phénomènes importants en dynamique des rotors, les principaux points propres sont donc précisés.*

*Le chapitre deux est consacré à la présentation de la dynamique d'un corps déformable, et la définition de la méthode utiliser pour l'équation du mouvement.*

*Afin de mieux appréhender les phénomènes qui régissent le comportement dynamique des structures tournantes, le troisième chapitre est composé d'une modélisation analytique qui concerne la mise en équation générale d'un rotor, les différentes hypothèses de modélisation*

*sont exposées, les caractéristiques des différents éléments qui composent un rotor sont présentées (énergie cinétique et énergie de déformation d'un arbre, énergie cinétique d'un disque et aubes, travail des forces extérieures dues aux paliers, énergie cinétique d'un balourd).*

*Et enfin dans le quatrième chapitre nous présentons l'organigramme du programme élaboré "ADR", une validation de ce programme et nous traitons quelques exemples pour déterminer les influences de différents paramètres des rotors aubagés.*

*Le présent mémoire se termine par une conclusion évaluant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les développements théoriques et expérimentaux futurs.*

### Étude bibliographique

*Le comportement dynamique des rotors a une utilisation vaste et importante dans le domaine industriel, l'analyse des systèmes rotor-dynamiques inclut la détermination des fréquences normales des vibrations libres, modes de mouvement giratoire et des caractéristiques de stabilité des modes propres. Les vitesses critiques du système de rotor sont des vitesses tournantes de rotation fournissant des excitations qui coïncident avec des fréquences normales du système, produisant de ce fait à l'état de résonance.*

*Les premiers travaux sur la prévision des vitesses critiques des rotors ont été présentés par Jeffcott [1], le modèle a été amélioré par la présentation des effets gyroscopiques et des vitesses critiques des systèmes simples de rotor.*

*La méthode des matrices de transfert (Myklestad [2], Prohi [3]) a laissé sa place à de différentes méthodes plus précises. Un des modèles souvent employé est le modèle de Jeffcott. Dans les travaux d'Ishida [4], ce modèle est utilisé pour étudier les oscillations non stationnaires d'un rotor lorsque celui-ci accélère en passant une vitesse critique. Ecker [5] développe une méthode pour supprimer les vibrations d'un rotor sans balourd, simplement excité par son amortissement interne et les forces agissant entre le rotor et le stator. La limitation du modèle de Jeffcott réside dans le fait que celui-ci ne prend pas en compte les effets gyroscopiques. Par conséquent, les fréquences de résonance de ce modèle de rotor sont indépendantes de sa vitesse de rotation. La méthode de Rayleigh-Ritz est aussi beaucoup utilisée car elle permet d'obtenir un modèle simple de rotor à quelques degrés de liberté (Tondi [6], Lalanne [7]), mais elle est peu précise dès qu'il s'agit d'étudier à un nombre élevé de degrés de liberté.*

*Durant ces dernières années, le modèle le plus utilisé est développé à partir de la méthode des éléments finis (Nelson [8], Tran [9]). Grâce à cette méthode, il est possible de déterminer avec précision les fréquences propres et les facteurs d'amortissement ainsi que la réponse à diverses excitations. De plus, cette méthode est modulaire car chaque élément du rotor est défini séparément.*

*Horkildsen [10] a inclus l'inertie rotatoire et le moment gyroscopique, pour la première fois. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou retirés selon les phénomènes qui veulent être mis en évidence. La méthode des éléments finis a ainsi été utilisée pour étudier les phénomènes*

*d'amortissement en dynamique des rotors (Kassai [11]) et pour l'étude de l'influence d'un couple axial sur le comportement des rotors (Dufour [12]). Cette méthode a également été appliquée à l'étude des rotors dont l'arbre tourne à vitesse variable (Lacroix [13], Al Majid [14]). De nombreux résultats concernant la dynamique des rotors dont le support est fixe pour les modèles de Rayleigh-Ritz et éléments finis sont présentés dans Lalanne [7].*

*Des études récentes se sont également intéressées à des systèmes rotor-paliers-fondation flexibles. C'est le cas par exemple de Bonello [15] qui développe un modèle de rotor sur fondation flexible grâce à une technique basée sur l'impédance mécanique (La méthode d'impédance mécanique est basée sur l'analyse de la réponse vibratoire d'une structure sollicitée par un choc) des éléments du système. Cette technique prend en compte à la fois un modèle théorique et des caractéristiques expérimentales. Edwards [16] utilise la même technique pour identifier expérimentalement l'excitation et les paramètres du support pour un système rotor-paliers- fondation afin de réduire ses vibrations.*

*Récemment, étant donnée l'évolution des normes de sécurité sur les tremblements de terre, une direction de recherche privilégiée est le comportement des rotors dont le support est soumis à un séisme. Différents modèles de rotor sont utilisés lors de l'étude d'une réponse à un séisme. Ils sont plus ou moins précis selon que le rotor et/ou les paliers sont rigides ou non, et selon que sont prises en compte les rotations du support ou non. Samali [17] étudie les vibrations aléatoires d'un rotor soumis à un séisme. Son modèle prend en compte les 6 composants de mouvement possibles pour le support (3 translations et 3 rotations), mais considère le rotor comme un arbre rigide posé sur des paliers flexibles. Suarez [18] et Singh [19] prennent en compte la flexibilité de l'arbre pour développer les équations du mouvement à l'aide de la méthode des éléments finis pour un rotor dont le support est soumis à 6 composants de mouvement. Néanmoins, ils ne prennent pas en compte certains termes paramétriques et autres pouvant causer des complications analytiques afin de pouvoir réaliser une analyse modale et une réponse par une méthode spectrale. Dans Subbiah [20], les équations sont résolues à partir d'une densité spectrale de puissance. Une méthode spectrale est également utilisée par Beley [21] sur un système rotor paliers fondation prenant en compte la flexibilité du support. Les équations développées dans Suarez [18] et Beley [21] sont presque identiques à celles présentées dans ce mémoire mais certains termes sont manquants et les modèles développés ne prennent pas en compte les possibles asymétries de l'arbre et du disque.*

*Les exigences accrues en matière de conception des machines industrielles orientent également les recherches vers l'étude des instabilités en dynamique des rotors. Les équations à coefficients périodiques, dont la forme la plus simple est l'équation de Mathieu, ont fait l'objet de nombreux travaux (Campbell [22]). Dans le laboratoire, ils ont concerné essentiellement les tiges de forage dans lesquelles l'outil génère des excitations paramétriques (Berlioz [23], Berlioz [24], Dufour [12]). Des études sur les machines tournantes ont par exemple été réalisées sur les vibrations non-stationnaires d'un rotor, posé sur paliers non- linéaires, en rotation constante Yamamoto ([25], [26]) ou durant son accélération Ishida [27]. La méthode multiéchelle a prouvé son efficacité dans l'étude des instabilités des équations différentielles comportant des termes paramétriques. El Shafei [28] utilise cette méthode pour résoudre les équations de Reynolds sur un palier lisse fini, et Kreider [29] l'utilise pour étudier la résonance interne de 2eme ordre d'une poutre sous flambage. Yamamoto [30] et Huang [31] étudient la stabilité d'une poutre en rotation à vitesse variable, appliquant cette méthode sur un système de deux équations avec des termes croisés. Mais la première application de cette méthode sur des systèmes gyroscopiques à termes paramétriques vient de Nayfeh [32] et Nayfeh [33].*

*Depuis de nombreuses études ont été réalisées à l'aide de la méthode multiéchelle sur différents modèles de rotor. Par exemple, Ji [34] traite des vibrations d'un rotor posé sur des paliers non linéaires. Cette étude est basée sur l'application des multiéchelles sur un rotor de type Timoshenko. Des simulations numériques sont réalisées sur le système libre et en oscillation forcée. Des travaux ont également été réalisés sur les instabilités d'un rotor asymétrique (Ganesan [35], Ganesan [36]). Le modèle utilisé étant cette fois un rotor de type Jeffcott (ne prenant pas en compte l'effet gyroscopique), différentes études ont été effectuées selon la présence d'amortissement ou non. Une compréhension fine des problèmes vibratoires associés aux systèmes tournants constitue à l'heure actuelle un enjeu majeur dans le domaine industriel. Afin d'optimiser le comportement dynamique des rotors et de dimensionner au mieux de tels systèmes, il est nécessaire de comprendre et prédire précisément leur comportement vibratoire (Ehrich 1992, Vance 1988) L'un des points clé réside par exemple dans la prédiction et le placement juste des premières vitesses critiques. En effet, les vitesses critiques sont fonction de la rigidité dynamique des systèmes tournants et la présence d'efforts gyroscopiques crée une dépendance entre la vitesse de rotation et les pulsations propres de telles structures: ceci implique que la détermination des vitesses critiques est un des éléments primordiaux lors du dimensionnement de tels systèmes dynamiques.*

# Dynamique des rotors

## CHAPITRE I : DYNAMIQUE DES ROTORS

### I.1 : Description des turbomachines

*Avant de commencer la dynamique des rotors des turbomachines, il convient de présenter brièvement les types de turbomachines sur lesquelles ont porté les travaux.*

#### I.1.1 : Définition d'une turbomachine:

*Une turbomachine est une machine tournante permettant d'échanger de l'énergie avec un fluide circulant à flux continu. Le fluide concerné peut être un gaz (de l'air par exemple) ou un liquide (de l'eau dans beaucoup d'applications).*

*C'est un ensemble mécanique de révolution comportant une ou plusieurs roues (rotors) mobiles munies d'aubes (aubages, ailettes) qui ménagent entre elles des canaux à travers lesquels le fluide s'écoule. L'échange d'énergie s'effectue dans le rotor et résulte du travail des forces aérodynamiques sur les aubes produites par l'écoulement du fluide autour de celles-ci, et qui résultent principalement de la différence de pression entre les deux faces des aubes.*

*On peut classer les turbomachines en deux grandes catégories selon que leur rôle est de récupérer de l'énergie d'un fluide afin d'entraîner mécaniquement une charge, ou de transmettre à un fluide l'énergie mécanique provenant d'un moteur.*

*A celles de la première catégorie est souvent associé le nom générique de turbine (turbine à gaz, à vapeur, hydraulique...), mais pas uniquement (éolienne, hydrolienne, moulinet...). Leurs grands ancêtres sont les moulins à eau et les moulins à vent.*

*Quant à celles de la seconde catégorie, leur dénomination est essentiellement associée à leur application (ventilateur, compresseur, booster, pompe...).*

*Des éléments des deux catégories sont parfois couplés, l'un donnant son énergie à l'autre (turbopompe, turbocompresseur...).*



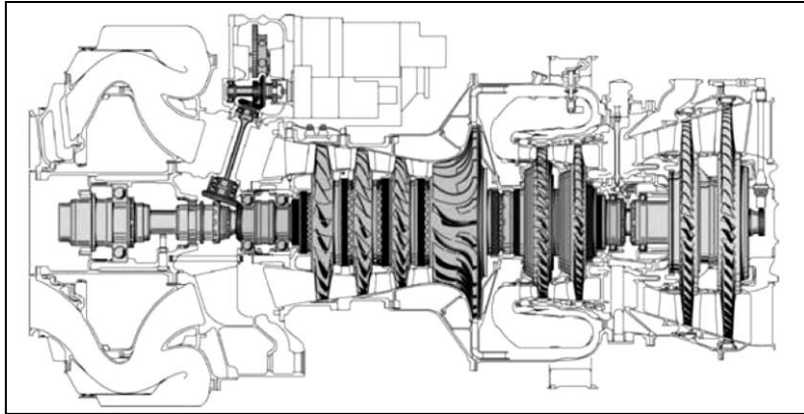


FIG.I.1: Vue de l'ensemble des éléments tournants d'une turbomachine

### **I.1.2 : Domaines d'application :**

*Les turbomachines sont utilisées dans un grand nombre de domaines d'application. Citons en quelques-uns.*

*La production d'énergie électrique, locale ou sur réseau, fait en partie appel à des turbines utilisées isolément : éoliennes pour l'énergie du vent, hydroliennes pour celle des courants marins ou de l'écoulement des rivières, etc..., Mais elle fait aussi appel à des assemblages de compresseurs (ou pompes), de turbines et de sources de chaleur (énergie du charbon, du pétrole ou nucléaire) participant au fonctionnement d'un cycle thermodynamique : ce sont les turbines à gaz et turbines à vapeur.*

*Dans le transport terrestre, on trouve des ventilateurs pour l'aération des tunnels routiers et la climatisation des véhicules légers. Les turbocompresseurs sont utilisés pour la suralimentation des moteurs. Quant aux véhicules lourds et militaires, ils embarquent parfois des turbines à gaz pour assurer les servitudes.*

*Dans l'aéronautique, les turbomachines sont présentes dans tous les systèmes de propulsion : hélices et rotors, turbomoteurs pour les entraîner, turbosoufflantes et turboréacteurs pour assurer la propulsion à réaction. Dans l'aérospatiale, ce sont des turbopompes qui alimentent les moteurs cryogéniques.*

*La pétrochimie utilise des compresseurs pour faciliter l'extraction du pétrole et pour réaliser les opérations de raffinage, des boosters pour en assurer le transport (gazoducs et oléoducs), mais aussi pour réaliser le stockage.*

I.1.3 : Diversité des turbomachines :

*En fonction des domaines d'utilisation, les tailles et vitesses de rotation des turbomachines peuvent varier considérablement : de quelques millimètres de diamètre et tournant à plusieurs centaines de milliers de tours par minute (pour la turbine entraînant une fraise de dentiste), à quelques mètres de diamètre et tournant à quelques dizaines de tours par minute (pour une turbine Francis utilisant les ressources d'un barrage de montagne).*

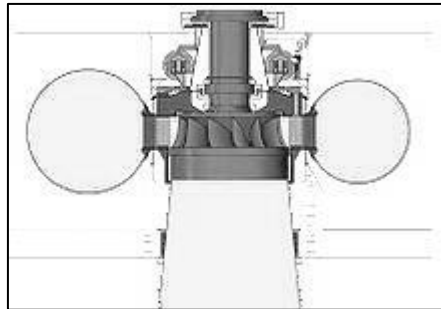


Fig.I.2. turbine Francis

*Quant à leurs formes, on peut les ranger en deux grandes catégories : les machines axiales où la vitesse débitante du fluide traversant la machine reste globalement parallèle à son axe, et les machines centrifuges (ou centripètes ou radiales) où la direction du fluide passe d'une direction parallèle à l'axe à une direction perpendiculaire à l'axe, ou inversement. Mais des géométries plus complexes existent aussi (turbines Pelton se rapprochant d'une roue à godets, éoliennes à axe vertical de type Darrieus...).*

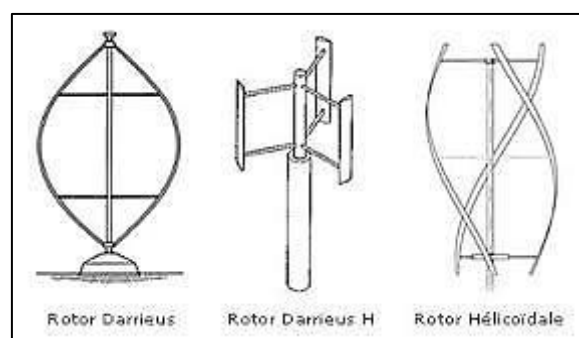


Fig.I.3. éoliennes à axe vertical de type Darrieus

### I.1.4 : Constitution et performance

*Une turbomachine est un assemblage de roues successives, chacune étant constituée par un moyeu central sur lequel sont fixées des pales (ou aubes) réparties régulièrement sur toute sa périphérie. Ces pales, de forme incurvée, exercent un effort sur le fluide en déviant sa trajectoire. Si la roue est animée d'un mouvement de rotation (roue mobile), il y a alors transfert d'énergie mécanique entre le fluide et la machine. Ce transfert se traduit, pour le fluide, par des variations de sa pression et de son énergie cinétique.*

*Afin de réaliser plus facilement ce transfert, en prenant en compte les conditions amont existantes ou aval souhaitées, une roue fixe est associée à la roue mobile (en amont pour une turbine et en aval pour un compresseur) dont le rôle est d'assurer un transfert entre pression et énergie cinétique.*

*L'ensemble d'une roue mobile et d'une roue fixe est appelé étage. Il peut y avoir plusieurs étages en série si la performance attendue le nécessite.*

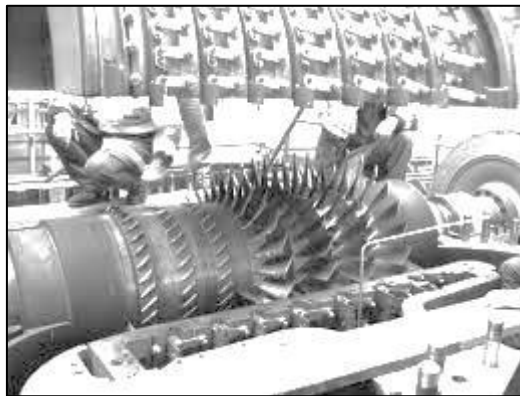


Fig.I.4. assemblage d'une turbine

*Les performances d'une turbomachine sont caractérisées par les valeurs du débit la traversant, de la variation de pression enregistrée entre l'amont et l'aval (pression totale, incluant pression statique et énergie cinétique) et de son rendement. On appelle point de fonctionnement nominal, celui pour lequel on a conçu la machine, et correspondant à peu près au meilleur rendement.*

*Mais il est aussi intéressant de connaître sa plage de fonctionnement, zone dans laquelle il est possible de faire varier son débit et sa vitesse de rotation, sans risque d'instabilité et sans détérioration inacceptable de ses performances.*

### I.1.5 : Classification des turbines

*L'objectif pour lequel, on utilise la turbine définit le type qu'on doit choisir.*

- *Dans l'industrie, on trouve les turbines à un seul arbre, dites aussi mono-arbre. Elles sont généralement utilisées dans le cas où on cherche un fonctionnement avec une charge constante (pour entraîner les générateurs d'électricité).*
- *Un deuxième type, englobe les turbines à deux arbres (bi-arbres); elles ont l'avantage d'entraîner des appareils à charges variables (pompes, compresseur,...). Elles se composent de deux parties, la première assure l'autonomie de la turbine, la deuxième est liée à la charge.*
- *Un troisième type peut être aussi cité, ce sont les turbines dites dérivées de l'aéronautique; Elles ont une conception spéciale suivant le domaine dans lequel elles sont utilisées. Dans ce troisième type, la partie qui assure l'autonomie de la turbine existe toujours, et l'énergie encore emmagasinée dans les gaz d'échappement est utilisée pour créer la poussée, en transformant cette énergie (thermique et de pression) en une énergie cinétique de jet dans une tuyère.*

### I.1.6 : Etudes et recherches

*L'étude complète d'une turbomachine nécessite l'interconnexion de plusieurs disciplines scientifiques : mécanique des fluides, mécanique des structures, matériaux, théorie des systèmes... Même en ne se contentant que de l'aspect mécanique des fluides, le problème est d'une grande complexité.*

*La géométrie de la machine induit un écoulement globalement tridimensionnel, accentué par l'existence d'écoulements tourbillonnaires locaux mais intenses. D'autre part, la succession d'organes fixes et mobiles induit des écoulements nécessairement instationnaires, du fait de la remontée des ondes de pression des roues aval et de la convection des écoulements issus des roues amont. De plus, la nature visqueuse du fluide (qui se manifeste notamment près des parois) agit à la fois sur le comportement de l'écoulement au passage de la machine et, par ses effets dissipatifs, sur le rendement de la machine. A ceci, on peut ajouter les effets de compressibilité (présence possible d'ondes de choc), ceux de la turbulence sur le comportement moyen de l'écoulement et des éventuelles possibilités de changements de phase (phénomène de cavitation dans les machines hydrauliques, ou de condensation dans les turbines à vapeur).*

*A l'état actuel des connaissances, la conception aérodynamique de telles machines reste donc complexe. C'est pourquoi la recherche sur le comportement des écoulements dans ce type de machine est toujours d'actualité.*

### **I.2 : Dynamique des rotors :**

*La dynamique des rotors est l'étude de la dynamique et de la stabilité du mouvement des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes.*

*Au fur et à mesure que la vitesse de rotation d'un objet tournant augmente, son niveau de vibration traverse souvent un seuil, sa vitesse critique. Cette évolution est souvent excitée par un déséquilibre de la structure tournante. Si l'ampleur de la vibration à ces vitesses critiques devient excessive, une défaillance catastrophique peut se produire. Une turbomachine peut également développer des instabilités liées à sa construction interne, entraînant également des défaillances catastrophiques. Pour l'ingénieur qui conçoit de grands rotors, avoir recours uniquement à de chers prototypes et tests physiques est un véritable handicap.*

*Dans ce chapitre on aborde quelques aspects importants concernant la dynamique des rotors. On verra plus particulièrement les notions de vitesses critiques, d'instabilités liées à l'amortissement tournant et le rôle que peuvent jouer les dissymétries sur la dynamique des rotors.*

#### **I.2.1 : Objectifs de l'analyse dynamique des rotors**

*Lors de la conception, l'exploitation et la maintenance des machines tournantes, l'analyse dynamique des rotors peut aider à atteindre les objectifs suivants:*

- 1- Prédire les vitesses critiques. Vitesses auxquelles les vibrations dues au déséquilibre du rotor est maximum. elle peut être calculée à partir de données de conception, de manière à les éviter en fonctionnement normal de la machine.*
- 2- Déterminer les modifications de conception pour changer les vitesses critiques. Chaque fois que les ingénieurs de conception ne parviennent pas à réaliser la premier objectif avec précision ci-dessus, ou il devient nécessaire de modifier la plage de vitesse de fonctionnement d'une machine, les modifications de conception peut être nécessaire pour changer les vitesses critiques.*
- 3- Prédire les fréquences propres de vibration en torsion, flexion et couplage. Cet objectif s'applique généralement au système de chaîne de transmission dans lequel la*

machine est utilisée. Par exemple, un rotor de compresseur centrifuge entraîné par un moteur électrique synchrone à travers une boîte de vitesses peut participer à un mode de vibration de torsion excité par pulsations du moteur lors du démarrage. Dans un tel cas, il pourrait être souhaitable de changer la fréquence naturelle à une valeur qui a le moins possible d'excitation (en amplitude et / ou durée).

4- Calculer les valeurs et les positions des masses du balourd de correction, dans une opération d'équilibrage, à partir des données de vibration mesurées. Cette capacité permet à l'équilibrage du rotor en place d'être accompli, ce qui réduit l'amplitude de synchrones-vibration.

5- Prévoir des amplitudes de vibration synchrone provoquée par le déséquilibre du rotor.

C'est l'un des objectifs les plus difficiles à accomplir avec exactitude puisque l'amplitude de la rotation de rotor dépend de deux facteurs qui sont à la fois très difficile à mesurer: (a) la distribution de déséquilibre le long du rotor, et (b) de l'amortissement du système rotor-palier. On peut, cependant, prédire les effets relatifs de déséquilibre du rotor et de l'amortissement du système dans des endroits précis.

6- Prédire des vitesses et des fréquences de vibration de seuil d'instabilité dynamique. Cet objectif est un autre défi à l'heure actuelle, car un certain nombre de forces de déstabilisation ne sont pas encore assez bien compris pour la modélisation mathématique précise. Cependant, l'instabilité causée par paliers lisses, connu sous le nom fouet l'huile, on peut prédire assez précisément.

7- Déterminer les modifications de conception pour supprimer les instabilités dynamiques.

Cet objectif peut être atteint plus facilement que l'objectif précédent, depuis que l'ordinateur permet de simuler et prédire l'effet relatif de stabilisation des modifications matérielles différentes, même si les modèles de force de déstabilisation ne sont que des approximations.

### **I.2.2 : Les prédictions du comportement dynamique des rotors**

Un système de rotor peut être constitué de disques et d'aubages de différentes formes, de différents diamètres des arbres et des paliers situés dans des positions différentes. Dans l'analyse des vibrations du système complexe du rotor sont simplifié et un modèle mathématique approprié est utilisé. Dans le processus de modélisation, nous devons savoir

quels paramètres sont importants pour le système. Les rotors des machines tournantes sont classés en fonction de leurs caractéristiques, comme suit:

### **I.2.2.1 : Rotor rigide**

Si la déformation de l'arbre de rotation est négligeable dans la plage de vitesse de fonctionnement, il est appelé un rotor rigide.

### **I.2.2.2 : Rotor flexible**

Un rotor est généralement considéré comme étant souple ou flexible quand il fonctionne à proximité ou au-dessus de sa fréquence naturelle (vitesse critique). La règle de base est de considérer un rotor flexible s'il fonctionne à 70% de la 1<sup>ère</sup> critique ou plus rapide.

Si l'arbre commence à se déformer sensiblement au début de la plage des vitesses de fonctionnement, il est appelé un rotor flexible.

La déformation la plus élevée d'un rotor est en général au voisinage de la vitesse critique. Donc la plage de la vitesse de fonctionnement par rapport aux vitesses critiques détermine si le rotor est rigide ou flexible.

### **I.2.3 : Les différents mouvements de rotor**

La dynamique des rotors peut être divisée en trois types de mouvement, latéral, longitudinal et de torsion.

- Latéral appelé aussi dynamique des rotors de pliage et est associé à la courbure du rotor.
- De torsion sont les modes lorsque le rotor tournant autour de son propre axe [46].
- Modes longitudinaux sont obtenus, lorsque les parties du rotor se déplacent dans la direction axiale.

Chaque système a ses propres fréquences naturelles et si la fréquence de la force perturbatrice est proche de l'une des fréquences naturelles, l'amplitude peut devenir très grande. Ce phénomène est appelé résonance. Pour maintenir les amplitudes à un niveau décent, l'amortissement peut être appliqué au système. L'amortissement est par exemple appliqué avec l'aide des roulements. Lorsqu'il s'agit d'un mouvement de torsion du système dans son ensemble en même temps que le générateur doit être modélisé, même s'il y a une transmission entre eux, car les mouvements de torsion ont une incidence sur l'autre. L'ensemble du système ne doit pas être modélisée lorsque les modes latéraux et longitudinaux doivent être analysés. Les vibrations latérales, les vibrations de torsion et les vibrations

longitudinales ne peuvent pas toujours être calculé séparément les unes des autres parce qu'elles ont une incidence les unes sur les autres [47] [48].

**I.2.4 : Les divers types d'excitations**

Les rotors sont soumis à diverses sollicitations extérieures, outre le poids propre, on trouve les efforts de balourd, qui sont propres aux machines tournantes. Ceux-ci correspondent aux forces d'inertie générées par le mouvement rotatif des masses excentrées et non équilibrées du rotor. Lorsqu'une pièce d'un rotor possède des axes principaux d'inertie transversale non orthogonaux à l'axe de rotation, un couple est aussi produit. On le qualifie de balourd dynamique, par opposition à balourd statique usuellement employé pour désigner la force. Pour une vitesse de rotation constante, l'expression de ces efforts dans un repère fixe est de la forme [7] :

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t - \alpha) \\ m \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \alpha) \\ (I_d - I_p) \cdot \tau \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t - \beta) \\ (I_d - I_p) \cdot \tau \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \beta) \end{pmatrix}$$

Où  $m$ ,  $I_d$  et  $I_p$  sont respectivement la masse, l'inertie diamétrale et l'inertie polaire,  $e$  l'excentricité du centre de gravité,  $\tau$  l'angle d'inclinaison de l'axe d'inertie (supposé faible),  $\alpha$  et  $\beta$  leur phase. Si la vitesse de rotation n'est pas constante, des termes de couplage en  $\dot{\Omega}$  viennent s'ajouter.

L'origine des efforts de balourd est variée. Il peut être soit des problèmes d'usinage, de montage, voir les gradients thermiques qui peuvent induire un fléchissement de l'arbre. Puisqu'ils constituent la source majeure d'excitation, il faut tenter de les minimiser.

Pour cela, l'usinage des pièces tournantes des organes est toujours suivi d'une rectification pour respecter des tolérances sévères. Ensuite, durant la phase de montage, un très grand soin est apporté; on effectue de plus un équilibrage.

Cette opération consiste à apporter des ajouts de masses ponctuels pour compenser les balourds résiduels, et permet de se retrouver avec un balourd final admissible.

Les réponses dynamiques pour ces balourds exceptionnels se distinguent de celles observées en condition normale de fonctionnement (induit par un faible balourd). En effet, les mécanismes qui rentrent en compte sont nombreux et très complexes : mouvement de grandes amplitudes et déformations importantes, problèmes de contacts et frottement avec le stator plastification des certaines pièces et propagation des fissures, desserremments de boulons et ouvertures de brides, décélération rapide des rotors... [39].



I.2.5 : Modes et vitesses critiques des rotors des machines tournants

Parmi les phénomènes classiquement observés en dynamique des rotors, on a la notion de vitesse critique. Selon Nelson [40], l'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle lors d'essais expérimentaux réalisés par Dunkerley, Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse à la résonance d'une structure élastique non tournante où les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés.

Aujourd'hui le concept de vitesse critique a évolué et se rattache d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant, la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système.

Il est connu que les modes propres d'un système conservatif en rotation sont des modes complexes deux à deux conjugués à pulsations propres purement imaginaires. Cela est dû aux effets gyroscopiques induits par la rotation, qui couplent les déplacements horizontaux et verticaux [41]. Ils peuvent cependant être associés pour obtenir des modes réels qualifiés soit de direct, soit de rétrograde, suivant que le mouvement de précession qui leur est associé est dans un sens identique ou contraire au mouvement de rotation.

Le point essentiel est la dépendance de leur fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . Le graphique représentant l'évolution de celles-ci en fonction de  $\Omega$  s'appelle le diagramme de Campbell [22]. On peut démontrer que la partie de l'énergie cinétique relative aux termes gyroscopiques est positive (négative) pour les modes directs (rétrogrades), si bien que les effets gyroscopiques tendent à rigidifier (assouplir) la structure [42]. Ainsi, les courbes croissantes (décroissantes) du diagramme de Campbell (Figure I.1) sont relatives au mode direct (rétrograde).

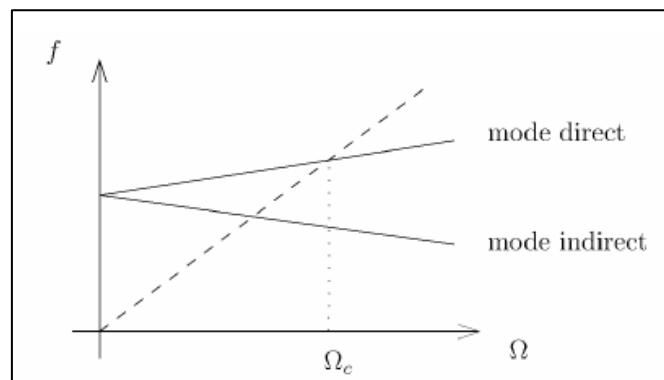


Figure I.5 Diagramme de Campbell

La détermination des vitesses critiques demande donc le tracé du diagramme de Campbell c'est-à-dire un calcul des modes propres à chaque vitesse de rotation (méthode de balayage en fréquence), Le temps de calcul est donc important. Pour traiter efficacement les systèmes de taille importante,

G. GENTA [44] a proposé une technique itérative basée sur la décomposition en parties proportionnelle et non proportionnelle des matrices d'amortissement et gyroscopique pour le calcul de valeurs propres.

Dans le cas particulier de systèmes non amortis et sans couplage directionnel, il est possible de calculer directement les vitesses critiques (c'est-à-dire sans passer par l'extraction des fréquences propres pour diverses valeurs de la vitesse de rotation). Il suffit d'injecter la relation  $\omega = \pm\lambda\Omega$

Dans l'équation homogène du mouvement, le signe étant positif (négatif) pour les vitesses critiques directes (rétrogrades). La résolution du problème aux valeurs propres alors obtenu fournit d'emblée les vitesses critiques. Le coefficient  $\lambda$  est introduit pour la conversion des unités ainsi que pour gérer les excitations induites par les balourds d'autres rotors ou rechercher les éventuels pics de réponses juste ou sous-harmoniques.

Les structures réelles peuvent être considérées comme une série de plus en plus fines regroupées approximations de masse qui se rapprochent d'une distribution de masse continue. La structure continue a un nombre infini de fréquences naturelles, chacune avec sa forme caractéristique propre vibration.

Un titre d'exemple, considérons une structure simple poutre supportée par des joints broches à chaque extrémité. Cette structures assez simple qu'une solution de forme formée pour les fréquences naturelles et les modes sont possibles. Les trois premières formes de mode sont représentées sur la figure I.6 :

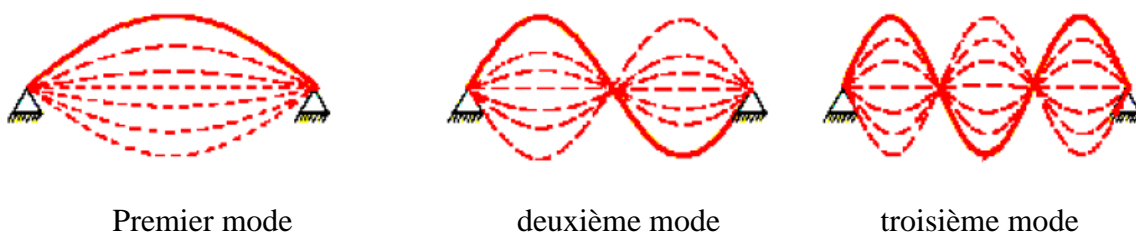


Fig.I.6. Les trois premières formes de flexion d'une poutre appuyée aux deux extrémités

Le mécanisme de rotation équivalent au système masse-ressort amortisseur unique est une masse ponctuelle sur une masse inférieure, arbre élastique. Ce modèle, historiquement considéré comme un «Jeffcott» ou «Laval» modèle, est un système à seul degré de liberté qui est généralement utilisé pour introduire des caractéristiques dynamiques du rotor.

Si l'on suppose que la machine ne tourne pas et qu'il existe trois versions de cette machine avec des paliers souples, intermédiaires et rigide. Puis, en effectuant un essai sur modèle, nous pouvons trouver un ensemble de fréquences propres et des modes.

La Figure I.7. montre les trois premières formes de modes et des fréquences pour les trois raideurs d'appui.

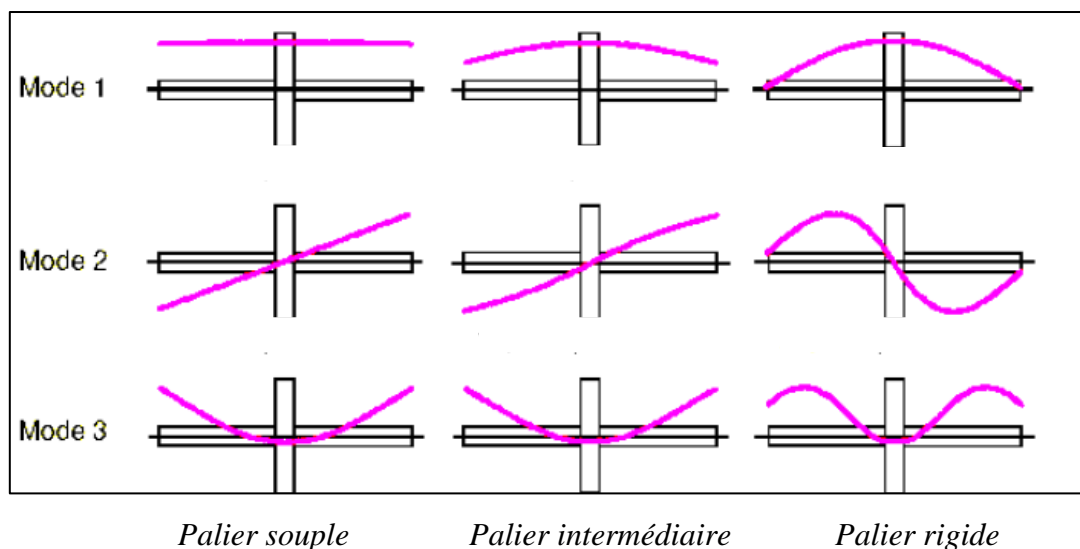


Fig.I.7. déformée modale par rapport à la rigidité des paliers

Le ratio de la rigidité de palier à la rigidité de l'arbre a un impact significatif sur les formes des modes. Pour les paliers souples et intermédiaires de l'arbre ne se plie pas beaucoup dans les deux modes inférieurs. Ceux-ci sont généralement appelés les modes de rotor rigide.

En considérant le mouvement de rotation du rotor, la déformée modale ressemble au cas du rotor non-tournant (déformée statique). Mais maintenant, ils impliquent des mouvements circulaires au lieu de mouvements planificateur. Voir les figures (I.8) et (I.9)

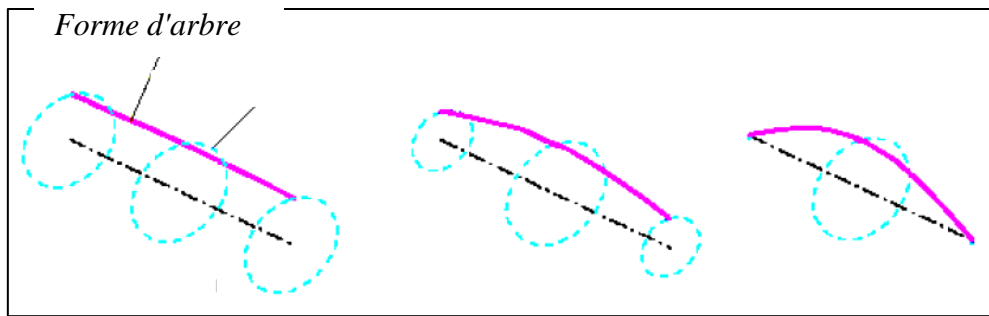


Fig.I.8. 1<sup>ères</sup> formes de vibration d'arbres avec différents disques

Comme représenté sur la Fig.8, la rotation de l'arbre de trace le contour d'un cylindre bombé. Ce mode est donc appelé mode cylindrique.

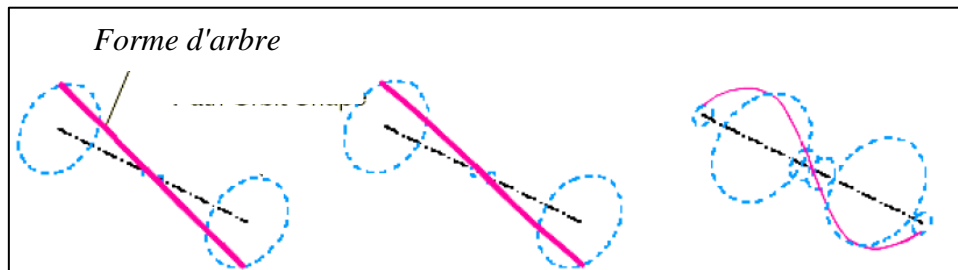


Fig.I.9. 2<sup>èmes</sup> formes de modes et les fréquences des tours de l'arbre rotatif

Comme représenté sur la Fig. 9, la rotation de l'arbre trace du contour de cônes saillants. Ce mode est donc appelé mode conique.

### **I.2.6: L'influence des dissymétries**

Si les rotors sont souvent axisymétriques, axisymétrique en comportement, il n'en est pas de même pour les stators : la présence d'éléments associés aux carters, la fixation avec l'aile, . . . créent des dissymétries à la fois de masse et surtout de raideur.

L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique du rotor est importante. Tout d'abord, on note que si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, la réponse synchrone du rotor à un balourd est un mouvement de précession elliptique au lieu de circulaire. De plus, à l'arrêt, les modes propres dans les plans vertical et horizontal ont naturellement des fréquences propres distinctes. Les modes classiquement associés par paires dans le contexte axisymétrique (car identiques à vitesse de rotation nulle),

avec un mode direct et un mode rétrograde, sont dès lors différents l'un de l'autre. On montre d'ailleurs que pour chacun des deux, une vitesse critique existe [7].

Lors d'une réponse à balourd, on observe donc non pas un pic de résonance mais deux (on parle de phénomène de dédoublement de résonance, Split résonances dans la littérature anglo-saxonne): le mode rétrograde est excité.

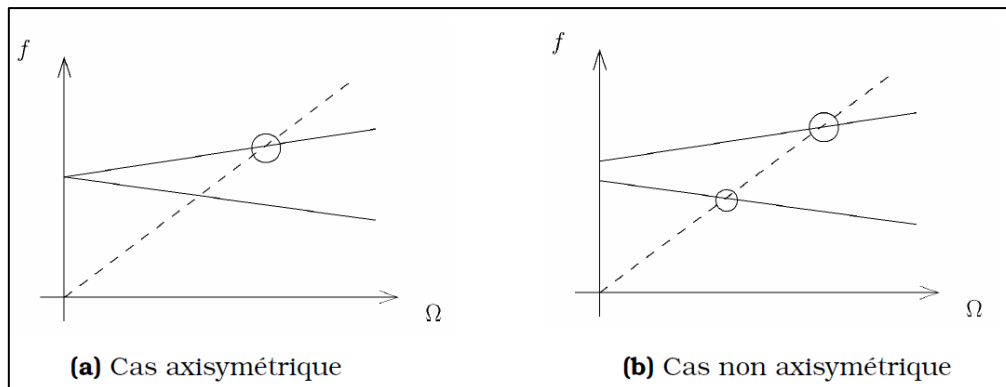


Fig.I.10. Influence des dissymétries sur le diagramme de Campbell

*Il faut préciser que les dissymétries dans les rotors peuvent apparaître au cours du temps avec la fatigue. La présence de fissures transversales dans l'arbre entraîne une modification locale de raideur qui rend les caractéristiques élastiques anisotropes.*

### I.2.7 : L'effet de l'amortissement

*Si l'amortissement a toujours un rôle bénéfique sur la dynamique des systèmes non tournants, il n'en est pas de même pour les systèmes tournants. C'est pour ça que Les ingénieurs ont depuis longtemps été conscients des effets déstabilisants induits par l'amortissement interne sur les rotors : il s'avère en effet que pour des systèmes axisymétriques le mouvement peut devenir instable à partir d'un certain seuil de vitesse de rotation, ce seuil dépend du ratio entre l'amortissement qualifié d'externe (c'est-à-dire celui introduit par les paliers, le couplage avec le fluide environnant, et l'amortissement interne, mais il est toujours supérieur à la première vitesse critique).*

*L'instabilité est liée à la rotation propre du rotor et n'est en rien attribuable à d'éventuelles non-linéarités. Lorsque l'on exprime les forces d'amortissement internes des parties tournantes dans un repère fixe, on remarque que celles-ci se décomposent en deux termes : un terme proportionnel à la vitesse, ce sont les forces d'amortissement au sens classique, et un terme proportionnel au déplacement les forces dites circulatoires. Ces dernières sont à*

*l'origine des phénomènes d'instabilité, car elles s'opposent aux forces d'amortissement externe [45].*

### **I.2.8 : Conclusion**

*Ce chapitre est constitué des rappels et de définitions de notions liées aux rotors, dans le but de donner une vision assez large sur les travaux effectués dans le cadre des rotors et les différents phénomènes qui influent sur la dynamique des rotors et leurs caractéristiques. On a montré comment de nombreuses instabilités peuvent survenir à cause de la rotation.*

# Analyse dynamique des solides

## CHAPITRE II ANALYSE DYNAMIQUE DES SOLIDES

### II.1 Cinématique d'une particule du solide

Considérons un corps flexible  $\Phi$  de frontière  $\partial\Phi$ . Dans sa configuration de référence, illustrée en figure II.1, chaque particule est décrite par un vecteur  $x = [x_1, x_2, x_3]^t$  dont les coordonnées sont mesurées dans le repère inertiel orthonormé  $O(x_1, x_2, x_3)$  (J.P.Lainé [49]).

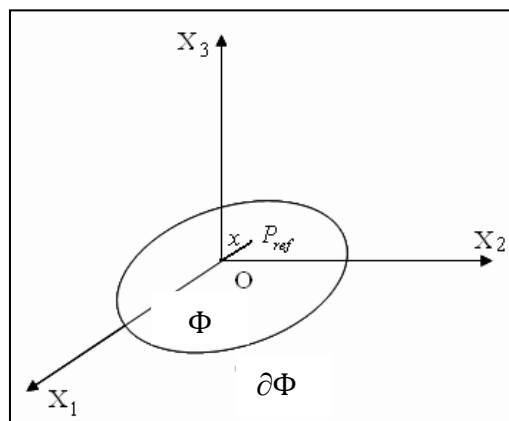


Fig.II.1 Configuration de référence

A l'instant initial ( $t = 0$ ), le corps est soumis à un champ de déplacement initial  $u_0(x)$ . La particule repérée dans la configuration de référence par le vecteur  $x$  occupe la position  $v_0(x)$  :

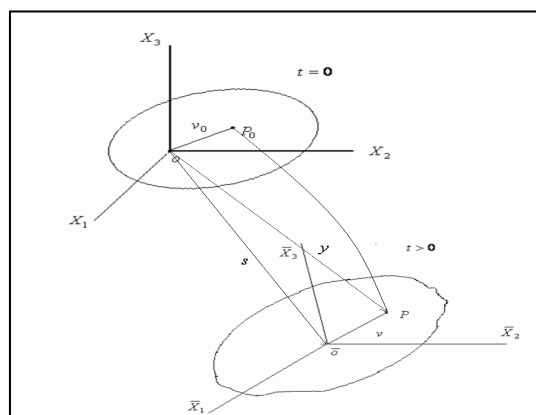


Fig.II.2 Configuration déformée



- $v_0(x)$  Vecteur position de solide non déformé dans le repère initial
- $v$  Vecteur position de solide déformé dans le repère mobile
- $s$  vecteur déplacement de center de repère mobile dans le repère initiale
- $y$  vecteur position de solide dans le repère initiale

$$v_0(x, t) = x + u_0(x, t) \quad (II-1)$$

Considérons maintenant un mouvement du corps, comme illustré en figure (II.2) à l'instant  $t = 0$ , le corps est déformé, dans une position quelconque.

Soit  $O (X_1, X_2, X_3)$  le repère rotationnel. Sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur translation  $s(t)$  et la vitesse angulaire autour d'un axe quelconque est  $\omega(t) = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^t$ . Cet axe sera spécifié ultérieurement pour définir l'axe de rotation de notre système tournant.

Dans la configuration déformée, la particule est maintenant au point  $P$  et sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur  $y(x, t)$  tandis que dans le repère rotationnel nous avons :

$$v(x, t) = x + u(x, t) \quad (II-2)$$

Où  $u(x, t)$  est le vecteur déplacement résultant de la déformation dynamique du corps.

Dans le repère inertiel, le vecteur  $y(x, t)$  est donné par :

$$y(x, t) = s(t) + R(t) v(x, t) = s(t) + R(t)(x + u(x, t)) \quad (II-3)$$

Où  $R(t)$  est une matrice de changement de repère (matrice de rotation dont les colonnes sont les cosinus directeurs des vecteurs de base de repère mobile exprimés dans le repère galiléen (initial)), elle est orthogonale ( $R^t R = 1$  et  $R^t = R^{-1}$ ).

La dérivée temporelle de  $y(x, t)$  est (la vitesse absolue exprimée dans le repère galiléen):

$$\dot{y} = \dot{s} + \dot{R}(x + u) + R\dot{u} \quad (II-4)$$

Où  $\dot{R} = R\Omega$  est la dérivée temporelle de  $R$ , avec  $\Omega$  donnée par une matrice antisymétrique définie par les composantes de :

$\omega$  : vecteur de rotation du repère mobile par rapport au repère galiléen, dans le repère mobile

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

Matrice vitesse de rotation  $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$  (II-5)

## II.2 Dynamique d'un corps déformable

Les équations du mouvement du système peuvent être établies de deux façons :

La première consiste à écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume infinitésimal du corps auquel on ajoute la loi de comportement du matériau et les conditions aux limites. L'accélération est obtenue à partir de l'équation (II -4). Le système ainsi obtenu correspond à la formulation forte de l'équation du mouvement. La forme faible est obtenue en intégrant l'équation aux dérivées partielles sur le volume du corps, pondérée par des fonctions tests.

La deuxième approche est la méthode énergétique. Après avoir écrit les énergies cinétiques et potentielles du corps, la fonction de dissipation et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques, les équations de Lagrange donnent l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial F_d}{\partial q_i} = 0 \quad (II .6)$$

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{y}^t \dot{y} d\Phi \quad (II.7)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Phi} \rho \dot{u}^t u d\Phi + \int_{\Phi} \dot{u}^t \Omega u d\Phi - \frac{1}{2} \int_{\Phi} \rho u^t \Omega^2 u d\Phi - \int_{\Phi} \rho u^t \Omega (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Phi$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Phi} \rho u^t (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Phi + \frac{1}{2} \int_{\Phi} \rho (\dot{s}^t \dot{s} + 2\dot{s}^t R \Omega x - x^t \Omega^2 x) d\Phi$$

L'énergie de déformation et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques sont groupés dans l'énergie potentielle sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Phi} \varepsilon^t C \varepsilon d\Omega - \left( \int_{\Phi} u^t f d\Phi + \int_{\partial\Phi} u^t t d(\partial\Phi) \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Phi} (\nabla u)^t C (\nabla u) d\Phi - \left( \int_{\Phi} u^t f d\Phi + \int_{\partial\Phi} u^t t d(\partial\Phi) \right) \quad (II.8)$$

Où  $C$  est la matrice des coefficients élasticité et

$\varepsilon = \nabla u$  est le vecteur de déformation (considérées petites), ou  $\nabla$  est l'opérateur différentiel qui a pour expression :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.9)$$

En supposant une loi de comportement viscoélastique :

Loi généralisée de Hooke  $\sigma = C(\varepsilon + \eta_b \dot{\varepsilon})$ ,

$\eta_b$  : Coefficient d'amortissement visqueux

La fonction de dissipation est exprimée par :

$$F_d = \frac{1}{2} \int_{\Phi} \eta_b (\nabla \dot{u})^t C (\nabla \dot{u}) d\Phi \quad (II.10)$$

### **II.3. Méthode de Rayleigh Ritz**

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à chercher une approximation des modes de vibration dans un espace de dimension  $N$  engendré par  $N$  fonctions  $H_i$  choisies. C'est-à-dire qu'on cherche des solutions de la forme :

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^N H_i(x, y, z) q_i = \{q\}^T \{H\} \quad (II-11)$$

$$\text{Avec } \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}; \text{ Et } \{H\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{Bmatrix} \quad (II-12)$$

Les fonctions  $H_i$  étant connues, le quotient de Rayleigh d'une telle forme dépend uniquement des paramètres  $q_i$  et peut être mis sous la forme :

$$R(u) = R(q_1, \dots, q_N) = \frac{\{q\}^T K \{q\}}{\{q\}^T M \{q\}} \quad (II-13)$$

Où  $K$  est appelé matrice de raideur et  $M$  matrice de masse.

La minimisation du quotient de Rayleigh par rapport aux paramètres  $q_i$  donne le système

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial q_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial R}{\partial q_N} = 0 \end{cases} \quad (II-14)$$

Qui correspond après développement à :

$$\frac{K\{q\}\{q\}^T M\{q\} - \{q\}^T K\{q\}M\{q\}}{(\{q\}^T M\{q\})^2} \quad (II-15)$$

En notant :

$$\omega^2 = \frac{\{q\}^T K \{q\}}{\{q\}^T M \{q\}} \quad (II-16)$$

La minimisation donne :

$$\frac{K\{q\} - \omega^2 M\{q\}}{\{q\}^T M\{q\}} \quad (II-17)$$

Les quantités  $\omega_i$  qui assurent le minimum du quotient de Rayleigh sont donc les termes qui annulent le déterminant :

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (II-18)$$

On peut montrer que  $\omega_i$  est une approximation par l'excès de la  $i^{\text{ème}}$  fréquence propre du système.

Les vecteurs  $\{q^i\}$ , associés aux  $\omega_i$ , qui sont solutions du problème aux valeurs propres :

$$[K - \omega^2 M]\{q\} = 0 \quad (II-19)$$

Donnent les composantes dans la base des fonctions  $H_i$  d'approximations des  $N$  premiers modes propres du système.

De manière générale, on peut faire les remarques suivantes sur la qualité d'une approximation par la méthode de Rayleigh-Ritz :

- la qualité de l'approximation du  $i^{\text{ème}}$  mode décroît avec  $i$ ,
- la qualité de l'approximation des pulsations est meilleure que celle de l'approximation des modes,
- la qualité de l'approximation augmente avec la dimension de la base  $N$ .

**II.4. Equation de mouvement de corps déformable**

Si les déplacements  $u$  sont exprimés par l'approximation de Rayleigh-Ritz en produits de fonctions de forme et coordonnées généralisées  $u = H(x)q(t)$ , nous pouvons réécrire les équations (II-7) (II-8) (II-10) sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^t M \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^t G q - \frac{1}{2} q^t N q - q^t \int_{\Phi} \rho H^t \Omega (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Phi + \dot{q}^t \int_{\Phi} \rho H^t (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Phi + \frac{1}{2} \int_{\Phi} \rho (\dot{s}^t \dot{s} + 2 \dot{s}^t R \Omega x - x^T \Omega x) d\Phi \quad (II-20)$$

$$U = \frac{1}{2} q^t K q - \left( q^t \int_{\Phi} H^t f d\Phi + q^t \int_{\partial\Phi} H^t t d(\partial\Phi) \right) \quad (II-21)$$

$$F = \frac{1}{2} \dot{q}^t D \dot{q} \quad (II-22)$$

Enfin, en utilisant les équations de Lagrange, nous trouvons l'équation du mouvement du système dans le repère mobile sous forme matricielle :

$$M \ddot{q} + (D + G) \dot{q} + (K + P + N) q = r + F \quad (II-23)$$

Où  $M$  est la matrice de masse,  $D$  la matrice d'amortissement,  $G$  la matrice gyroscopique,  $K$  la matrice de raideur,  $P$  la matrice d'accélération angulaire,  $N$  la matrice d'accélération centrifuge (ou assouplissement centrifuge),  $r$  le vecteur des excitations indirectes dues à l'entraînement du système de coordonnées et  $F$  le vecteur des excitations par les forces volumiques et surfaciques. Nous avons:

$$M = \int_{\Phi} \rho H^t H d\Phi \quad \text{Matrice de masse}$$

$$D = \int_{\Phi} \eta_b (\nabla H)^t C (\nabla H) d\Phi \quad \text{Matrice d'amortissement}$$

$$G = 2 \int_{\Phi} \rho H^t \Omega H d\Phi \quad \text{Matrice gyroscopique}$$

$$P = \int_{\Phi} \rho H^t \dot{\Omega} H d\Phi \quad \text{Matrice de rigidité d'accélération angulaire}$$

$$N = \int_{\Phi} \rho H^t \Omega^2 H d\Phi$$

*Matrice de rigidité centrifuge*

$$K = \int_{\Phi} (\nabla H)^t C (\nabla H) d$$

*Matrice de raideur*

$$r = - \int_{\Phi} \rho H^t (R^t \ddot{s} + \dot{\Omega} x + \Omega^2 x) d\Phi$$

*Vecteur forces d'inerties*

$$F = \int_{\Phi} H^t f d\Omega + \int_{\partial\Phi} H^t t d(\partial\Phi)$$

*Vecteur forces données*

### II.5. Conclusion

*Dans ce chapitre nous avons introduit les notions de base et les spécificités propres à l'analyse dynamique des systèmes élastique et tournants.*

# Modélisation de système du rotor

## CHAPITRE III : MODELISATION DE SYSTEME DU ROTOR

### III.1 : Introduction

*Pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation que le rotor. On utilise un repère tournant principalement pour l'étude des roues ou disques aubages. Dans le contexte qui nous intéresse, celui de la dynamique d'ensemble, le repère fixe est plus approprié. Il convient de préciser que ces deux domaines sont étudiés en parallèle, les fréquences propres des roues aubages se plaçant bien au-delà de celles des arbres sur lesquels elles sont montées.*

*Lors de la mise en équation, on utilise les angles d'Euler pour d'écrire le mouvement d'un élément de rotor, comme pour le mouvement général de tout solide. On suppose que la vitesse de rotation est constante, ou tout au moins qu'il s'agit d'une fonction connue du temps. Les vibrations axiales et de torsion se trouvent de plus découplées des vibrations de flexion, auxquelles on s'intéresse plus particulièrement en dynamique d'ensemble.*

*Les études essentielles en dynamique rotor concernent la trace du diagramme de Campbell, qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, et le calcul des réponses à balourd, principalement lors du passage des vitesses critiques.*

*Dans cette partie on va mettre en équation le rotor a fin de développé l'équation de mouvement à partir de la méthode de l'équation de Lagrange, et aussi déduire les modes et fréquences propres de système rotative et en fin le diagramme de Campbell*

### III.2 : Hypothèses

*D'une manière générale, un rotor est constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Dans cette étude, les sollicitations prises en compte sont le balourd et les déplacements imposés du support supposé rigide. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des énergies cinétiques et de déformation des différents composants du rotor et de l'application des équations de Lagrange. La démarche utilisée est semblable à celle développée dans [7]. La prévision du comportement dynamique de rotors dont le support est fixe.*



Les hypothèses suivantes sont retenues :

- l'arbre est déformable
- les disques sont rigides
- le rotor tourne à une vitesse constante
- les possibles asymétries de l'arbre et des disques ne sont pas prises en compte

Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels.

L'établissement des équations du mouvement [37] nécessite les étapes suivantes :

- Calcul des différentes énergies des composants du système : énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd, énergie de déformation de l'arbre, et travail virtuel des forces extérieures.
- Application des équations de Lagrange sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (III-1)$$

Où  $N$  ( $1 \leq i \leq N$ ) est le nombre de degrés de liberté, les  $q_i$  sont les coordonnées généralisées et les  $Q$  sont les forces généralisées. Le symbole  $d$  désigne la dérivée par rapport au temps.

### III.3 : Détermination des énergies des éléments de rotor

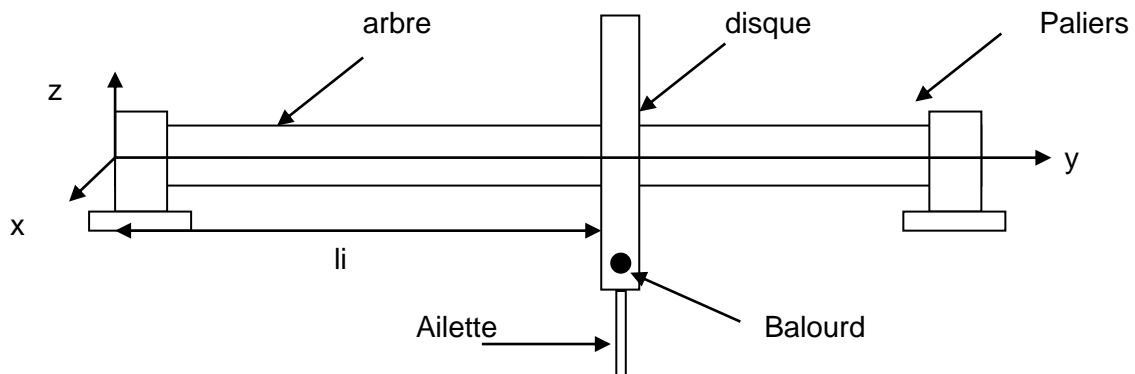


Fig. III.1 modèle d'un rotor avec roue aubagée supporté par deux paliers

Le rotor considéré dans cette étude a été développé sur une approche énergétique basée sur le même genre de rapprochement que celle décrite par Sinha [38].

Le modèle de rotor aubagé est constitué d'un arbre sur lequel est fixé une roue aubagée, l'arbre est modélisé par une poutre de type Euler-Bernoulli. Le disque, non-aubagé, est

modélisé par une masse concentrée et d'inertie en rotation. Le rotor est suspendu par des paliers représentés par des raideurs et des amortissements ponctuels.

En plus de la rotation autour de son axe longitudinal, l'arbre a deux translations orthogonales  $u(z, t)$  et  $w(z, t)$  dans le plan du disque. La position des ailettes est définie par sa déflexion  $\eta(s, t)$ , comme illustré dans la figure III.3.

### III.3.1. La roue aubagée

La roue aubagée est un disque rigide représenté par ses caractéristiques inertielles et des aubes flexibles modélisées par des poutres d'Euler-Bernoulli, encastrées sur le disque.

#### III.3.1.1. Disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient  $R_0(X, Y, Z)$  repère fixe et  $R(x, y, z)$  un repère tournant lié au disque Figure. III.2. Le système de coordonnées  $x, y$  et  $z$  est relié au système de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  par l'intermédiaire des angles  $\theta_z, \theta_x$  et  $\theta_y$  pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle  $\theta_z$  autour de l'axe  $Z$  puis d'un angle  $\theta_x$  autour du nouvel axe  $x$ , noté  $x_1$ , enfin d'un angle  $\theta_y$  autour de l'axe de rotation propre du disque  $y$ .

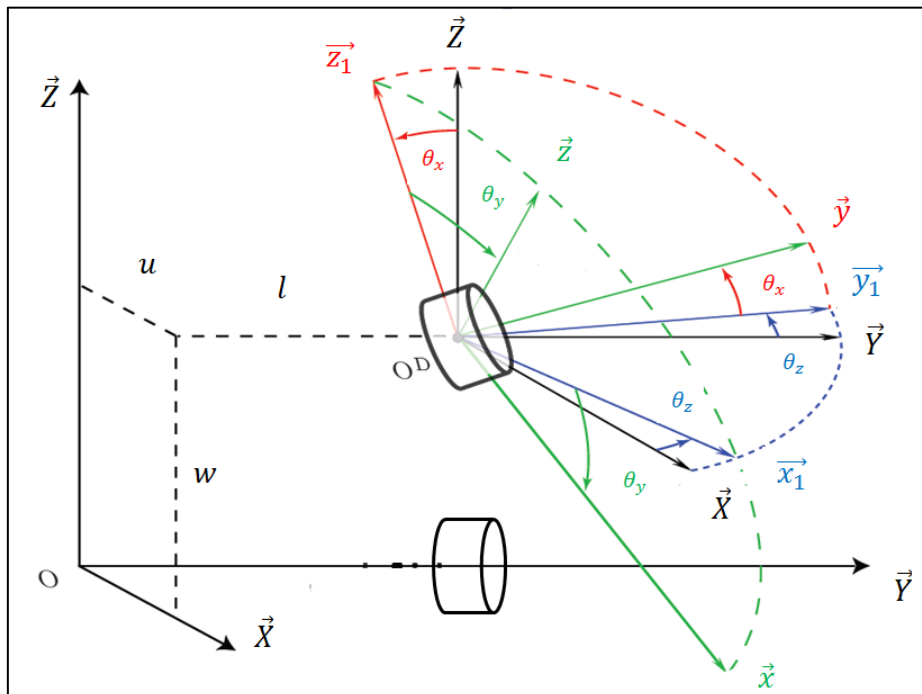


FIG. III.2: Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

Le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère  $R$  s'écrit :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \dot{\theta}_z \vec{z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y}' \quad (III-2)$$

Où  $\vec{z}$ ,  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}'$  sont les vecteurs unitaires suivant les axes  $\vec{OZ}$ ,  $\vec{Ox}_1$  et  $\vec{Oy}$

L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse  $O$  est calculée dans le repère tournant  $R$ . la vitesse de rotation du solide s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ \dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{pmatrix} \quad (III-3)$$

$\omega_x, \omega_y$  et  $\omega_z$  étant les composantes du vecteur de rotation instantanée suivant  $x, y$  et  $z$ . Soient  $u$  et  $w$  les coordonnées du centre du disque  $O$  suivant  $OX, OZ$  dans  $R_0$ .

La coordonnée suivant  $OY$  restant constante. Où  $m_d$  est la masse du disque et  $I_C$  sont tenseur d'inertie principal, exprimé dans le repère lié au disque:

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_z} \end{bmatrix} \quad (III-4)$$

$I_{d_x}, I_{d_z}$  et  $I_{d_y}$  sont les moments d'inertie du disque suivant  $x, y$  et  $z$ . L'expression générale de l'énergie cinétique du disque  $T_d$  s'écrit alors :

$$T_d = T_d^{trans} + T_d^{rot} = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{R/R_0}^R I_C \vec{\omega}_{R/R_0}^R \quad (III-5)$$

D'une part on a le disque qui tourne avec le rotor autour de son axe principal à la vitesse constante  $\Omega$  d'où  $\dot{\theta}_y = \Omega$ , et d'autre part les angles  $\theta_z$  et  $\theta_x$  sont petits d'où l'on peut faire les approximations  $\cos \theta \sim 1$  et  $\sin \theta \sim \theta$ . Dans ce cas le vecteur de rotation devient :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_z \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \Omega + \dot{\theta}_z \theta_x \\ \dot{\theta}_z \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{pmatrix} \quad (III-6)$$

L'énergie cinétique s'écrit:

$$\begin{aligned}
 T_d^{rot} &= \frac{1}{2}I_{dx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{dy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{dz}\omega_z^2 \\
 &= \frac{1}{2}I_{dx}(-\dot{\theta}_z \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y)^2 + \frac{1}{2}I_{dy}(\Omega + \dot{\theta}_z \theta_x)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}I_{dz}(\dot{\theta}_z \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y)^2 \\
 &= \frac{1}{2}I_{dx}(\dot{\theta}_z^2 \sin^2 \theta_y + \dot{\theta}_x^2 \cos^2 \theta_y - 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \cos \theta_y \sin \theta_y) \\
 &\quad + \frac{1}{2}I_{dy}(\Omega^2 + \dot{\theta}_z^2 \theta_x^2 + 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \\
 &\quad + \frac{1}{2}I_{dz}(\dot{\theta}_z^2 \cos^2 \theta_y + \dot{\theta}_x^2 \sin^2 \theta_y + 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \cos \theta_y \sin \theta_y) \quad (III - 7)
 \end{aligned}$$

Où  $I_{dx}, I_{dy}, I_{dz}$  représentent les moments d'inertie du disque par rapport à ses axes principaux d'inertie. Comme le disque est symétrique on a  $I_{dx} = I_{dz}$  et le terme  $\dot{\theta}_z^2 \theta_x^2$  qui est d'un ordre élevé peut être négligé. L'expression de l'énergie cinétique de rotation du disque sera donc :

$$T_d^{rot} = \frac{1}{2}I_{dx}(\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2}I_{dy}(\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \quad (III-8)$$

$$T_d^{trans} = \frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (III-9)$$

L'énergie cinétique totale du disque est finalement égale à :

$$\begin{aligned}
 T_d &= T_d^{trans} + T_d^{rot} \\
 &= \frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{dx}(\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2}I_{dy}(\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \quad (III - 10)
 \end{aligned}$$

Cette expression fait apparaître les termes classiques de la dynamique des rotors :

- $\frac{I_{dy}}{2}\Omega^2$ : Terme constant représentant l'énergie de rotation du disque. Il n'a pas d'influence sur les équations du mouvement.
- $\frac{m_d}{2}(\dot{u}(y)^2 + \dot{w}(y)^2)$  : énergie cinétique d'un élément en translation dans un plan.
- $\frac{I_{dx}}{2}(\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2)$  : énergie cinétique de rotation d'un élément autour des axes x et z.
- $I_{dy}\Omega \dot{\theta}_z \theta_x$  : effet gyroscopique (Coriolis).

**III.3.1.2. Ailette**

Les aubes de turbine ont une grande influence sur le comportement dynamique de rotor parce que ce sont eux qui subissent la majorité de la force appliquée par le fluide c'est pour cette raison on ne peut les négliger.

Le modèle simplifié défini pour la roue aubagée s'inspire d'un modèle précédemment développé par S. K. SINHA [38]. Les aubes flexibles sont donc modélisées par des poutres de type Euler-Bernoulli et sont encastrées sur un disque rigide du rotor.

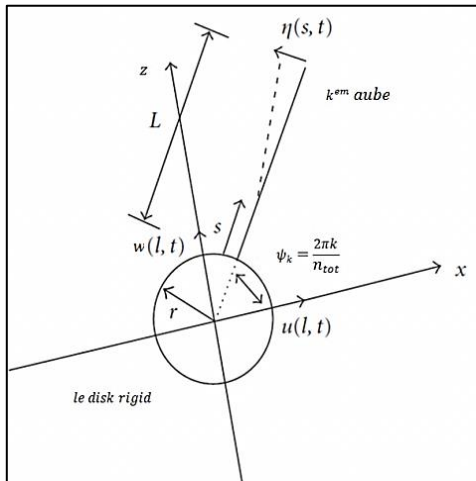


Fig. III.3 vue de face du disque aubagée.

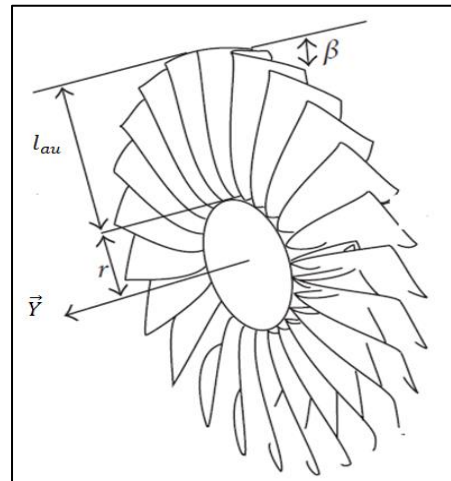


Fig. III.4 modèle de disque aubagé

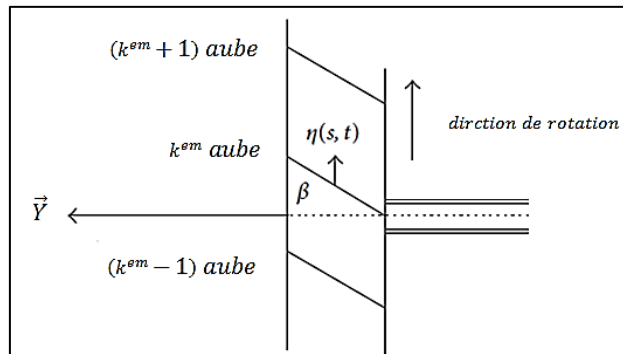


Fig. III.5 vue de haut du disque à aubes et l'angle β de décalage des aubes.

La position  $P_k$  de la  $k^{ème}$  aube par rapport au repère fixe se définit comme suit :

$$P_{k/R_0} = \begin{cases} u + (r + s) \cos \psi_k - \eta \cos \beta \sin \psi_k + \theta_z \eta \sin \beta \\ \eta \sin \beta - \theta_z (r + s) \cos \psi_k - \theta_x (r + s) \sin \psi_k + \theta_z \eta \cos \beta \sin \psi_k - \theta_x \eta \cos \beta \cos \psi_k \\ w + (r + s) \sin \psi_k + \eta \cos \beta \cos \psi_k + \theta_x \eta \sin \beta - \theta_z \theta_x (r + s) \cos \psi_k + \theta_z \theta_x \eta \cos \beta \sin \psi_k \end{cases} \quad (III-11)$$

Et  $k=1,2\dots n$  sont des constants qui désigne la position de la  $k^e$  aube dans le disque

$\psi_k = 2\pi k/n$  Avec  $n$  le nombre d'ailettes

Le vecteur rotation de centre de masse de l'aube est comme suit :

$$\omega_{Rb/R0} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_b + \dot{\theta}_z \sin \beta \cos \psi_k + \dot{\theta}_x \sin \beta \sin \psi_k + \Omega \theta_z \sin \beta \sin \psi_k - \Omega \theta_x \sin \beta \cos \psi_k + \Omega \cos \beta \\ \dot{\theta}_z \sin \psi_k + \dot{\theta}_x \cos \psi_k - \Omega \theta_z \cos \psi_k - \Omega \theta_x \sin \psi_k - \Omega \theta_b \sin \beta \\ \dot{\theta}_z \cos \beta \cos \psi_k + \dot{\theta}_x \cos \beta \sin \psi_k + \Omega \theta_z \cos \beta \sin \psi_k - \Omega \theta_x \cos \beta \cos \psi_k - \Omega \sin \beta \end{pmatrix}$$

(III – 12)

L'énergie cinétique de la  $k^{\text{ème}}$  aube peut être définie par :

$$T_b^i = \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) \vec{V}_{k/R0}^2 ds + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \vec{\omega}_{Rb/R0}^T I \vec{\omega}_{Rb/R0} ds \quad (III-13)$$

L'énergie potentielle associée à la déformation élastique des aubes est également définie par :

$$U_b = \frac{E_b I_b}{2} \int_0^{lb} \left[ \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \right)^2 \right] ds \quad (III-14)$$

### III.3.2. Arbre

L'arbre qui est flexible est considéré en tant qu'une poutre de section circulaire caractérisée par l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

#### III.3.2.1. Energie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque. Pour un élément de longueur  $L$ , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho S_a \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \rho \frac{I_a}{2} \int_0^L (\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2) dy + 2\rho I_a \Omega \int_0^L \dot{\theta}_z \theta_x dy + \rho I_a L \Omega^2 \quad (III-15)$$

Cette expression fait apparaître des termes classiques en dynamique des rotors :

- $\rho I_a L \Omega^2$  : Un terme constant, représente l'énergie de rotation de l'arbre, il a une contribution nulle dans les équations du mouvement.
- $2\rho I_a \Omega \int_0^L \dot{\theta}_z \theta_x dy$  : un terme représentant l'effet gyroscopique.
- $\frac{\rho I_a}{2} \int_0^L (\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2) dy$  : effet secondaire de l'inertie de rotation.
- $\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$  : expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.

Les autres termes sont dus au mouvement du rotor. Les mêmes remarques pour le disque peuvent être faites quant à la symétrie des équations obtenues.

### III.3.2.2. Energie potentielle (déformation)

Le calcul de l'énergie de déformation de l'arbre s'effectue en considérant le cas d'une poutre flexible en rotation sans déformation à l'effort tranchant.

Considérant le point C comme centre géométrique et B(x, z) un point générique de la section transversale de l'arbre et supposant que  $\varepsilon$  et  $\sigma$  représentent successivement la déformation et la contrainte suivant l'axe de l'arbre.

Soit  $u^*$  et  $w^*$  les déplacements du centre géométrique de l'arbre par rapport au repère xyz (voir Fig.III.6) et le déplacement suivant y supposé négligeable avec les termes du second ordre qui ne sont pas pris en compte.

La déformation longitudinale au point B, a pour expression :

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (III-16)$$

L'énergie de déformation est donnée par :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \varepsilon \sigma d\tau \quad (III-17)$$

Où  $\tau$  est le volume de l'arbre.

Compte tenu de la loi de Hooke  $\sigma = \varepsilon E$  qui donne la relation entre les contraintes et les déformations, on a :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{(\tau)} \varepsilon^2 d\tau \quad (III-18)$$

Alors l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{(\tau)} \left[ -x' \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z' \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right]^2 d\tau \quad (III-19)$$

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{(\tau)} \left[ \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy \quad (III-20)$$

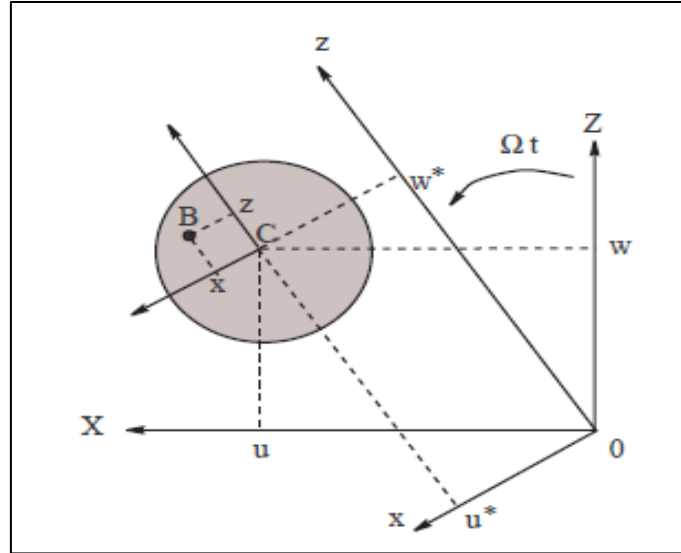


FIG. III.6: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

Le troisième terme de l'intégrale est nul par suite de la symétrie de la section, d'où :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \int_{(s)} \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dS dy \quad (III-21)$$

En introduisant les inerties diamétrales de la section,

$$I_x = \int_{(s)} z^2 ds ; I_z = \int_{(s)} x^2 ds \quad (III-22)$$

L'énergie de déformation a donc pour expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy \quad (III - 23)$$

Pour exprimer l'énergie de déformation dans le repère fixe XYZ ; on utilise les relations de passage  $u^*$  et  $w^*$  en fonction de  $u$  et  $w$  (voir Fig.III.6), soient :

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{aligned} \quad (III - 24)$$



Comme on a pour le cas de l'arbre symétrique  $I_x = I_z = I$ , l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos \Omega t - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \Omega t \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \Omega t + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \right)^2 \right) \right] dy \quad (III - 25)$$

Et finalement, on a :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy \quad (III-26)$$

### III.3.3. Balourd

Le balourd dont une représentation géométrique est donnée (figure III.7) peut être assimilé à une masse  $m_u$  située à la distance  $d$  du centre géométrique de l'arbre. Son énergie cinétique doit être prise en compte.

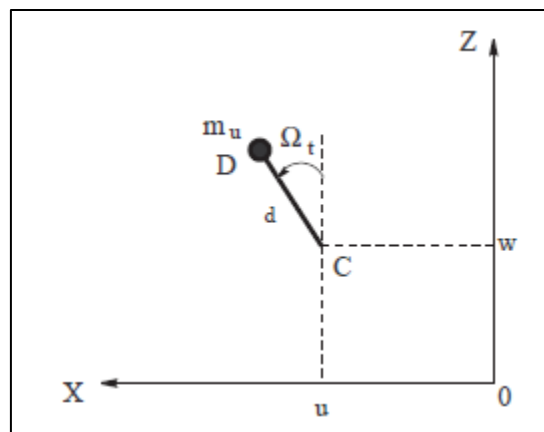


Fig. III.7 Masse de balourd

La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe  $y$ , sa coordonnée selon cet axe dans le repère  $R_0$  est donc constante :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} u + d \sin \Omega t \\ cte \\ w + d \cos \Omega t \end{pmatrix} \quad (III-27)$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (III-28)$$

- Energie cinétique de balourd :

$$T_{Bal} = \frac{1}{2} m_u (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \sin \Omega t - 2\Omega d \dot{w} \cos \Omega t) \quad (III - 29)$$

Le terme  $\frac{1}{2}\Omega^2 d^2$  est constant et n'interviendra pas dans les équations. La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor, l'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$T_{Bal} = m_u \Omega d (\dot{u} \sin \Omega t - \dot{w} \cos \Omega t) \quad (III-30)$$

### III.3.4. Paliers

D'une manière générale, les paliers qui induisent des forces extérieures agissantes sur l'arbre comportent des caractéristiques de raideurs et d'amortissement. Ces caractéristiques sont sur le plan de la section droite selon les directions montrées sur la figure suivante :

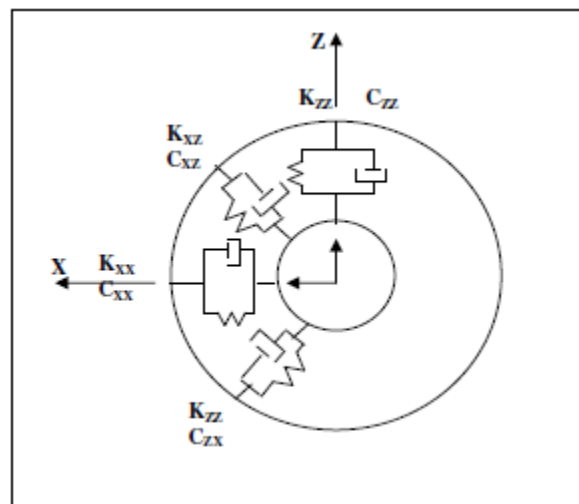


Fig. III.8 Amortissement et raideur de palier

Le travail virtuel  $\delta W_p$  des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta W_p = -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zx} \dot{u} \delta w \quad (III - 31)$$

Le travail virtuel des forces agissant sur l'arbre s'écrit :

$$\delta W_p = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (III-32)$$

Ou  $F_u$  et  $F_w$  sont les forces généralisées :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (III-33)$$

- $k_{xx}$ ,  $k_{zz}$ ,  $c_{xx}$ ,  $c_{zz}$  les rigidités et les amortisseurs selon les directions  $x$  et  $z$  de l'arbre.
- $k_{xz}$ ,  $k_{zx}$ ,  $c_{xz}$ ,  $c_{zx}$  les rigidités et les amortissements dans une direction ( $x$  ou  $z$ ) mais affectés par l'autre direction. Ils représentent des constantes d'accouplement.

#### III.4. Modèle analytique: rotor simple

Afin de bien comprendre et illustrer les phénomènes mis en jeu, une modélisation la plus simple possible a tout d'abord été envisagée. La structure présentée figure (III.9) se compose d'un arbre symétrique de longueur  $L$  et d'un disque symétrique situé à une distance  $l_i$  dans l'arbre et de un nombre  $k$  jusqu'à  $n$  aubes situé autour de périmètre de disque.

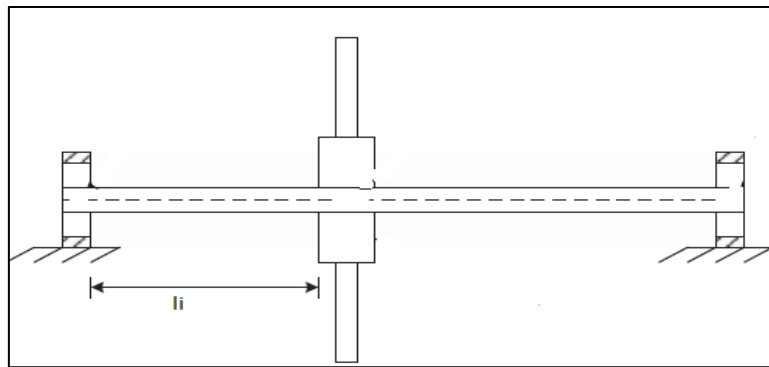


Fig.III.9 Rotor simple

##### III.4.1. Détermination des équations

Deux degrés de liberté sont pris en considération pour l'arbre: deux translations orthogonales  $u(y, t)$  et  $w(y, t)$  dans le plan du disque, et un degré de liberté pour chaque lame définissant sa déflexion  $\eta(s, t)$ , comme illustré sur la Figure (III.3).

Une approximation de Rayleigh-Ritz est utilisée pour exprimer les degrés de liberté de ces différentes parties. Ainsi, ils sont exprimés par une somme de fonctions de forme multiplié par des coefficients dépendants du temps

Sous la forme :

$$\begin{cases} u(y, t) = q_{10} + \sum_{m=1}^{mtot} V_m(y)q_{1m}(t) \\ w(y, t) = q_{20} + \sum_{m=1}^{mtot} V_m(y)q_{2m}(t) \\ \eta(s, t) = \sum_{n=1}^{ntot} Y_n(y)q_n(t) \end{cases} \quad (III - 34)$$

Avec

$$\begin{cases} V_m(y) = \sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{L}\right) \\ Y_n(s) = 1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi s}{2lb}\right) \end{cases} \quad (III - 35)$$

Dans ces expressions (III-34) (III-35),  $q_{10}(t)$  et  $q_{20}(t)$  représenté le corps rigide du rotor.  $m_{tot}$  et  $n_{tot}$  sont les nombre de modes considérés pour exprimer mouvement du rotor, et la flexion des ailettes.

Dans cette approche de Rayleigh-Ritz, les fonctions de forme doivent vérifier les conditions aux limites géométriques du problème :

Les fonctions de forme des ailettes doit vérifier les conditions :

$$Y_n(0) = 0; \quad Y'_n(0) = 0$$

Et celle de l'arbre doit vérifier les conditions :

$$V_m(0) = 0$$

Avec

$$V_0(y) = 1 \text{ et } V'_0(y) = 0$$

### III.5. Equation matricielle d'équilibre dynamique

L'application des équations de Lagrange, (III - 1)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \delta W_i$$

Le développement des équations de Lagrange sur chacune des coordonnées généralisées conduit au système matriciel d'équilibre dynamique :

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = \{F\} \quad (III - 36)$$

Où  $M$ ,  $C$  et  $K$  sont les matrices de masse, la matrice d'amortissement généralisée, et la matrice de rigidité généralisée, respectivement.

Et  $q$  représente le vecteur général de degrés de liberté du rotor, avec  $(2m_{tot}+2+n_{tot}n_b)$  coordonnées

$$q = [q_{10} \ q_{20} \ q_{11} \ q_{21} \ \dots \ q_{1m} \ q_{2m} \ q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$$

Toutes les expressions des énergies et des potentiels figurent à l'annexe 1 ainsi que ceux de la masse, d'amortissement et matrices de rigidité, à l'annexe 1.

### III.5.1. Modes et fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation : diagramme de Campbell

L'un des objectifs les plus importants pour les concepteurs de turbomachines est de définir les dangereuses plages de vitesse de fonctionnement du rotor.

La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres est une opération fondamentale en dynamique de rotor. Les valeurs propres comportent les fréquences propres. Les vecteurs propres comportent les formes modales et les précessions. Cette opération établit alors la "carte modale" du système rotor paliers, et l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation sous forme d'un diagramme de Campbell.

Rechercher les fréquences et modes propres d'un système à plusieurs degrés de liberté revient à étudier les vibrations libres non-amorties. Dans ce cas l'équation de mouvement est de la forme :

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = 0 \quad (III - 37)$$

Dans le cas général des fréquences propres en rotation on cherche des solutions de l'équation différentielle.

On suppose que les coordonnées généralisées sont de la forme suivante :

$$q_i = A_i \exp rt \quad (III - 38)$$

avec

$$\ddot{q}_i = r^2 A_i \exp rt \quad (III - 39)$$

On remplace dans l'équation différentielle

$$r^2[M]A + r[C]A + [K]A = 0 \quad (III - 40)$$

$$(r^2[M] + r[C] + [K])A = 0 \quad (III - 41)$$

Cette dernière équation (III-41) représente un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues. Si le déterminant de la matrice  $(r^2[M] + r[C] + [K])$  est différent de zéro, on aura la solution triviale  $[q] = 0$ . Dans ce cas le système est au repos et cela ne nous intéresse pas.

Une solution non triviale n'est donc possible que si :

$$\det(r^2[M] + r[C] + [K]) = 0 \quad (III - 42)$$

Cette équation est appelée équation aux pulsations (fréquences) propres du système. Le développement du déterminant nous donne une équation polynomiale de degré  $n$  en  $r$ .

Les  $n$  solutions  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  sont les pulsations des  $n$  modes de vibrations possibles. Le mode qui correspond à la pulsation la plus basse est appelé le premier mode, le second correspond à la pulsation suivante, etc.

Ainsi pour chaque sous-système on a la superposition de  $n$  modes de vibrations correspondant aux  $n$  pulsations.

La représentation des pulsations en fonction de vitesse de rotation est le diagramme de Campbell, et en générale ce dernier représente les fréquences en fonction de la vitesse de rotation:

$$f_i(\Omega) = \omega_i / 2\pi \quad (III - 43)$$

### III.5.2. réponse au balourd :

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation telle que le balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système avec second membre.

On doit chercher des solutions de la forme :

$$q_i = A_i \cos(\Omega t) \quad (III-44)$$

Qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$q_i = A_i \exp j\Omega t \quad (III-45)$$

Alors l'équation devient :

$$[-[M]\Omega^2 + j[C]\Omega + [K]][A_i] = [F] \quad (III-46)$$

**III.5.3. Vitesses critiques :**

Pour déterminer les vitesses critiques à partir du diagramme des fréquences (diagramme de Campbell) il faut le comparer avec le diagramme des amplitudes. Les vitesses critiques se trouvent au niveau des mêmes fréquences. La figure III.10 nous montre la concordance des fréquences entre les pics des amplitudes et l'intersection des droites  $\Omega/2\pi$  et  $\Omega/4\pi$  ; elles permettent aussi de déterminer la criticité des vitesses.

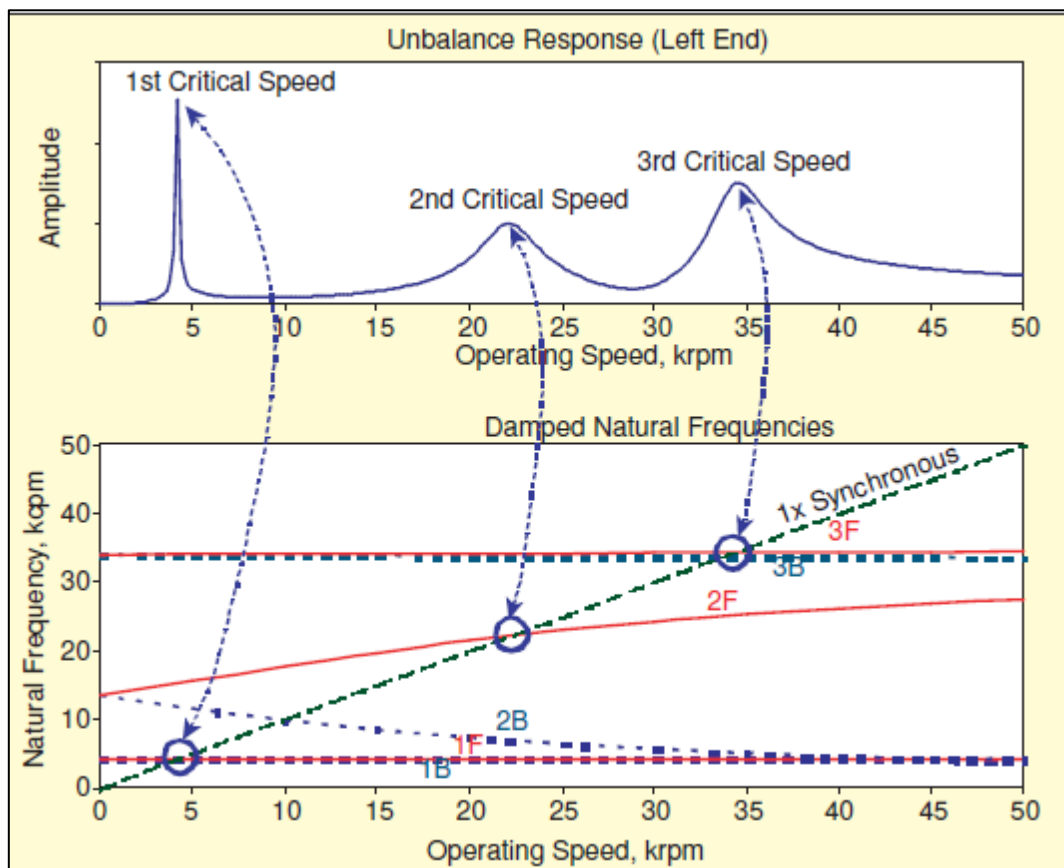


FIG III.10. Comparaison entre les fréquences naturelles et les vitesses critiques

Dans l'exemple analysons la criticité de trois vitesses de rotation de l'arbre :

- la première vitesse critique qui se situe à environ 4800 tr/mn est la plus dangereuse ; le pic est le plus élevé des trois vitesses critiques, mais la zone de criticité est la plus faible, le pic est étroit.
- La troisième vitesse critique 35000 tr/mn est plus dangereuse que la deuxième 23000tr/mn, son pic est 1,6 fois plus élevé que celui de la deuxième. On remarque aussi l'ouverture des pics sont larges ; la zone de criticité est grande.

# Etude du rotor aubage



**CHAPITRE IV : ETUDE DU ROTOR AUBAGE**

**IV.1. Présentation de l'application :**

Dans ce chapitre nous avons élaboré un programme qui fait l'analyse dynamique des rotors aubagé simples. Ce programme, présenté sous forme d'application, appelée Analyse Dynamique des Rotors (ADR) a été réalisée sous environnement MATLAB, il étudie les cas des rotors avec une seule roue aubagée. Les résultats obtenus, qui sont aussi déterminés sous forme des diagrammes sont les fréquences, les pulsations propres, les vitesses critiques et les amplitudes.

Afin d'introduire les données sous forme interactive, nous avons élaboré l'interface suivante :



Fig.IV.1. : Interface de l'application ADR

Le travail a été réalisé avec micro-ordinateur de configuration suivante :

- système d'exploitation Win7 (32)
- Intel® Core™ 2 CPU 1,80 GHz
- Mémoire physique 3Go

IV.2. Organigramme de l'application :

Les étapes de calcul de l'application sont données par l'organigramme suivant :

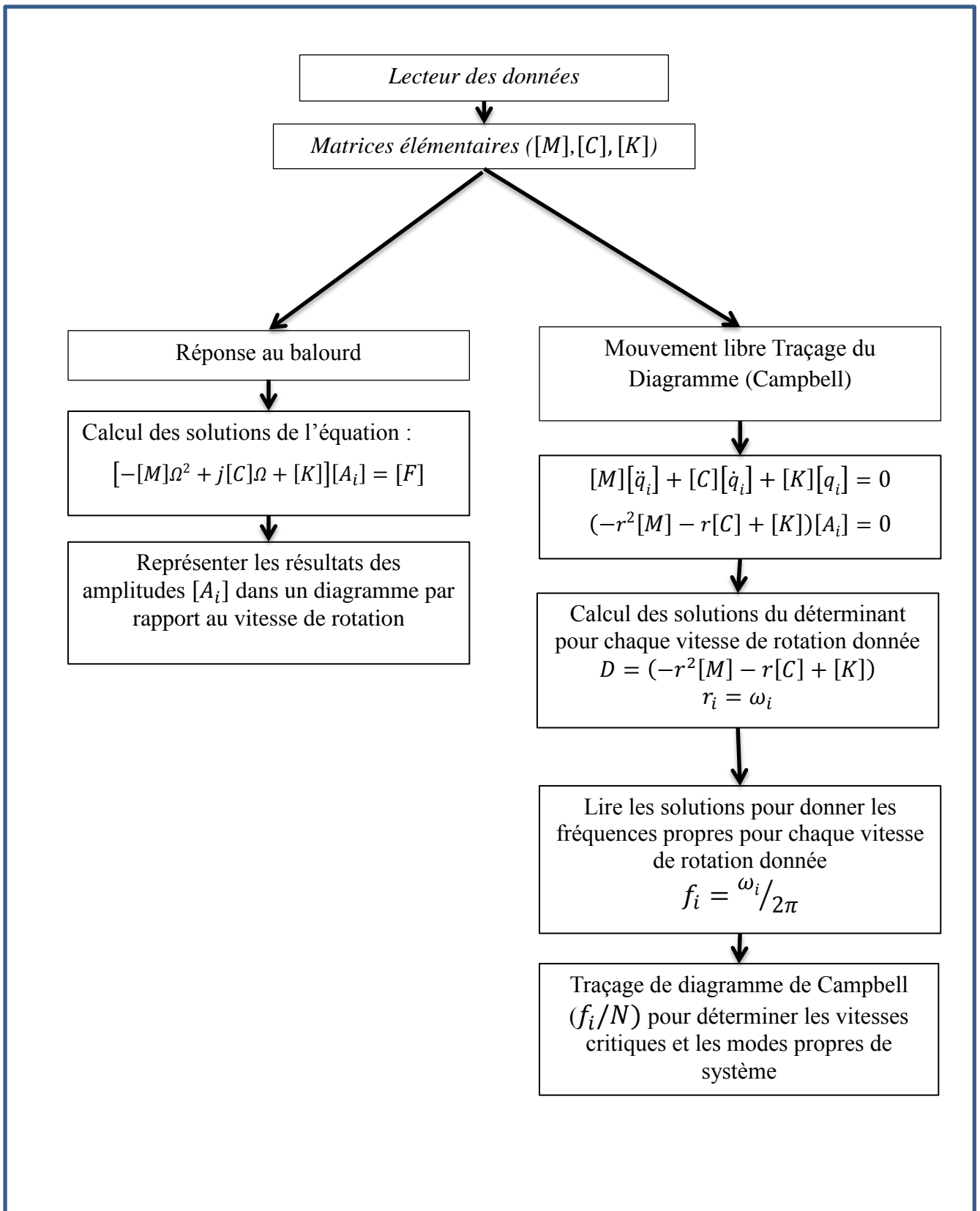


Fig. IV.2. Organigramme

**1- Données de rotor :**

Pour commencer l'opération de calcul il faut donner les caractéristiques géométriques de rotor qui sont présentés dans la première interface de l'application

**2- Opérations de calcul :**

Après la lecture des données l'application calcule les composantes des matrices de l'équation de mouvement, ensuite affiche les résultats qui sont les pulsations, les fréquences, et les amplitudes en forme de diagrammes

**IV.3. Validation :**

Pour valider notre programme, nous allons comparer les résultats de quelques exemples obtenus par notre programme avec ceux existants dans la littérature, pour cela nous traitons les exemples suivants :

**Exemple:**

Dans cet exemple, nous comparons les résultats obtenus par notre programme avec ceux de la référence [7], en étudiant un exemple simple symétrique dans un premier cas et dissymétrique dans le second cas.

**IV.3. 1. Etude du Modèle symétrique**

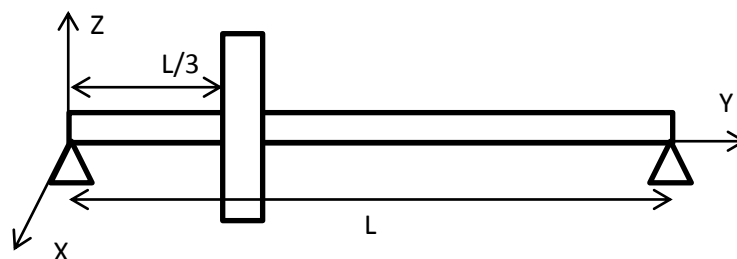


Fig.IV.3. Modèle simple de mono rotor

Dans le modèle symétrique les raideurs et les amortissements ne sont pas pris en compte

**Les paramètres de structure de rotor:**

➤ **Disque:**

- Rayon intérieur  $R_{d1}=0.01m$
- Rayon extérieur  $R_{d2}=0.15m$
- Masse volumique  $\rho_d=7800kg/m^3$
- Épaisseur  $h= 0.03m$
- Position de disque dans le rotor  $y=L/3$
- 

➤ **Arbre:**

- Rayon de section droit  $R_a=0.01m$
- Masse volumique  $\rho_a=7800 kg/m^3$
- Longueur de rotor  $L=0.4m$
- Module de Young  $E_a. = 2*10^{11} N/m^2$

- Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation : diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell est présenté sur les figures IV.4 et IV.5, et les valeurs des fréquences et des vitesses critiques du rotor sur le tableau 1. Ces valeurs sont données par les intersections de  $f_i(VR)$  avec les deux droites  $f=N/60$ , [ $\omega = VR$  (rad/s)] et  $f=0,5.N/60$  [ $\omega=VR/2$ (rad/s)].

Nous comparons les résultats obtenus par notre programme avec ceux donnés dans la référence [7] :

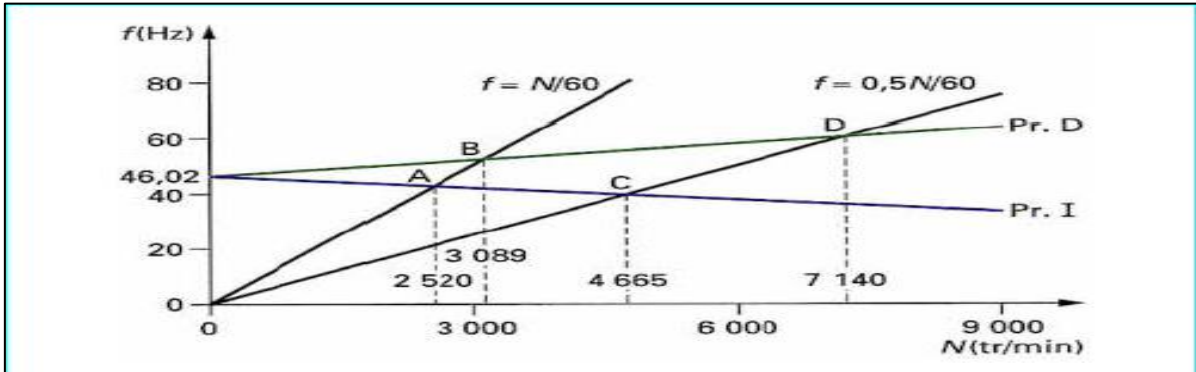


Fig.IV.4 diagramme de Campbell [7] - cas symétrique

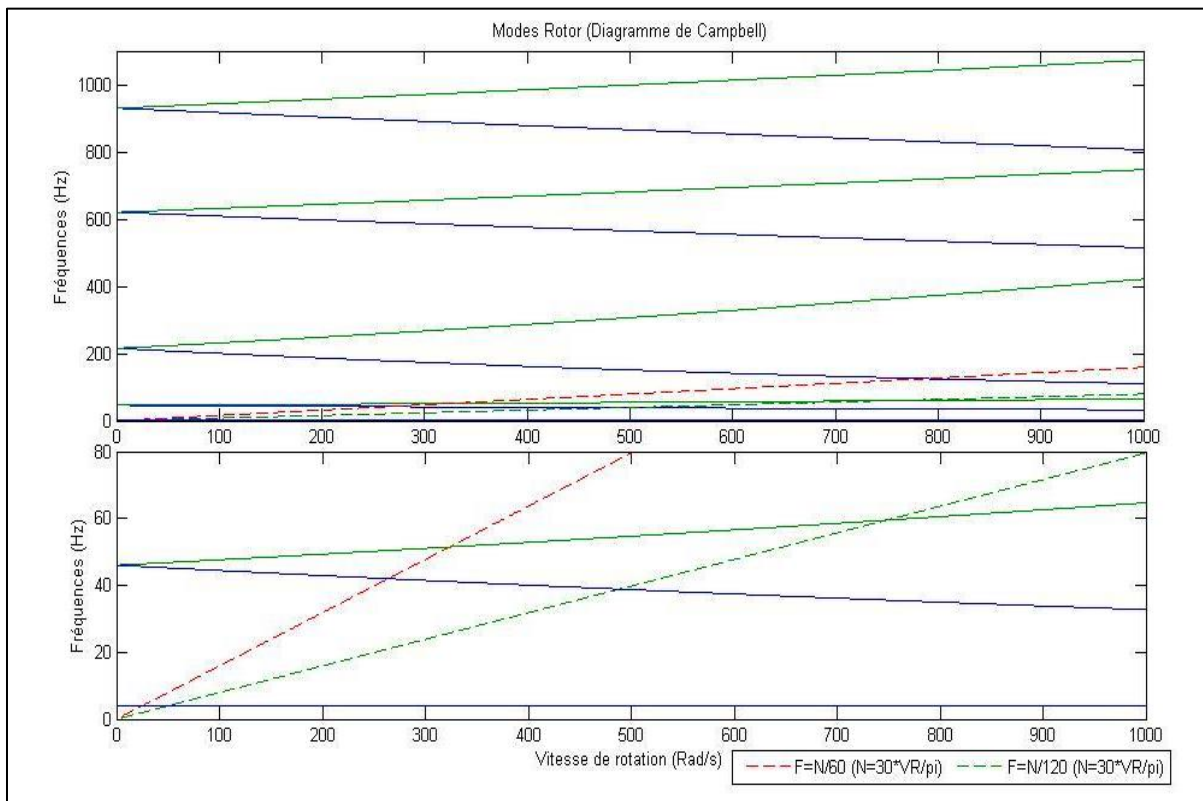


Fig.IV.5 diagramme de Campbell - ADR- cas symétrique

[7]		ADR		ε %
Fréquence (Hz)	Vitesse (t/min)	Fréquence (Hz)	Vitesse (Rad/s)t/min	
46.02	0	46.02	0	0
42	2520	42.00	(263.89)2520	0
51.48	3089	51.485	(323.488)3089	$9 \cdot 10^{-5}$
38.87	4665	38.868	(488.51)4664.92	$5 \cdot 10^{-5}$
59.50	7140	59.501	(747.732)7140.29	$1 \cdot 10^{-5}$

TAB N°1 : L'ECARTE ENTRE LES RESULTAT DE [7] ET ADR DES VALEURS DES FREQUENCES ET DES VITESSES CRITIQUES DE CAS SYMETRIQUE

**IV.3.2. Modèle dissymétrique**

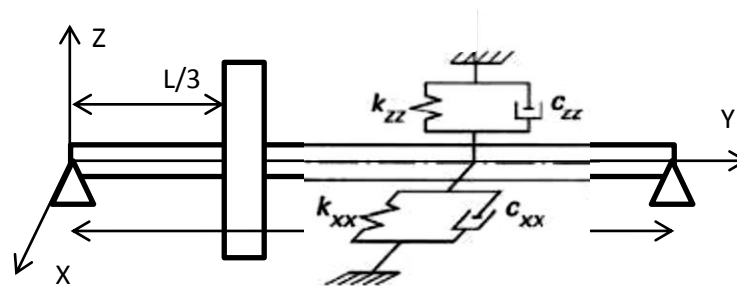


Fig.IV.6. Modèle simple de mono rotor avec raideur

La dissymétrie est introduite par la présence de la raideur, dans cet exemple la valeur de la raideur est  $k_{zz}=5 \cdot 10^5$  N/m

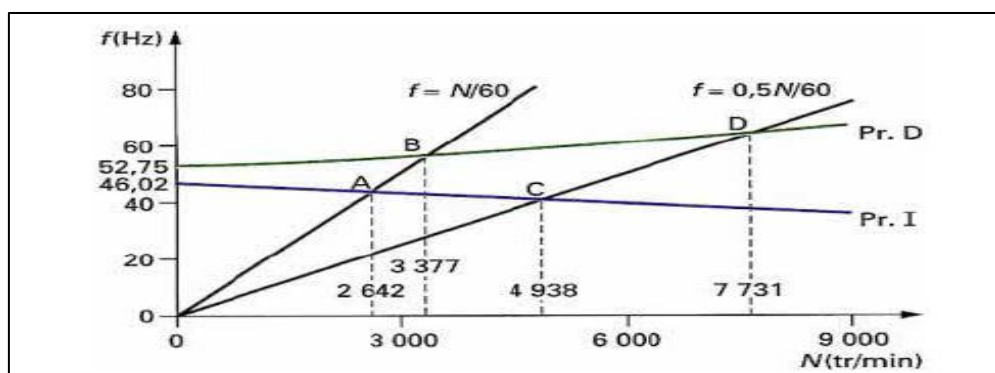


Fig.IV.7. diagramme de Campbell [7] cas dissymétrique

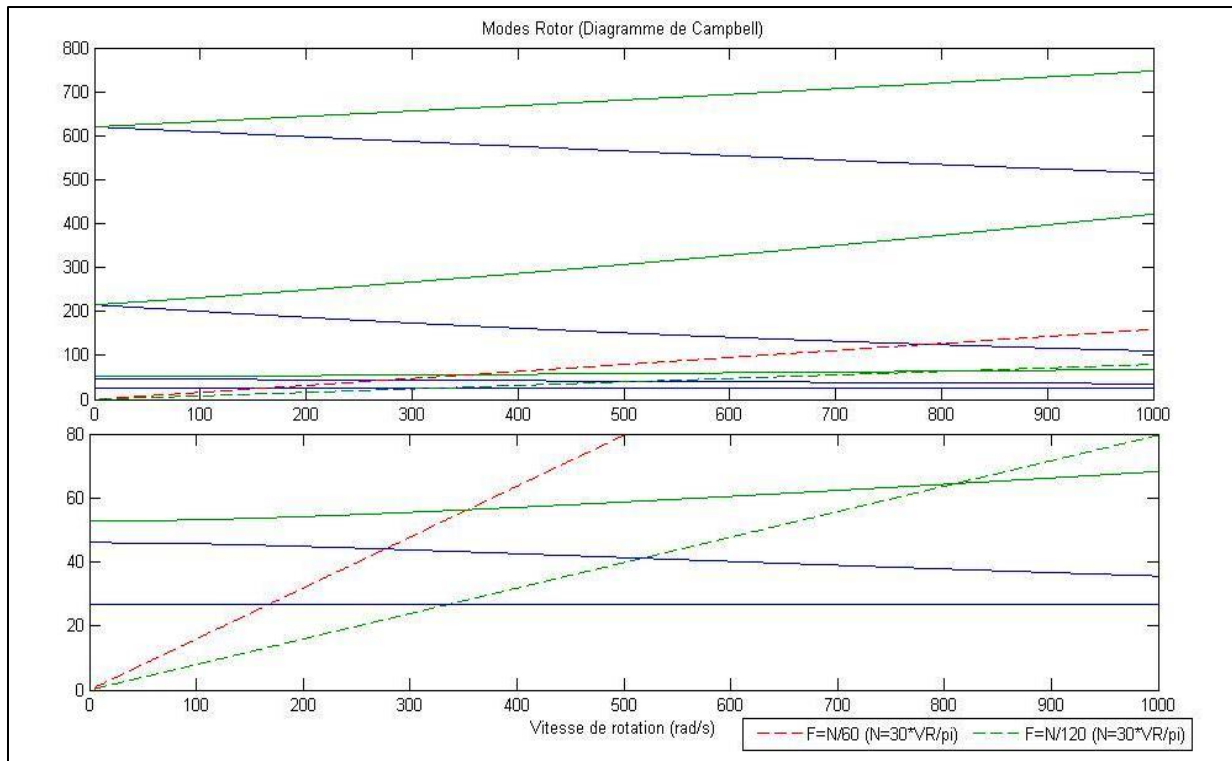


Fig.IV.8. diagramme de Campbell, avec ADR dissymétrie

[7]		ADR		ε %
Fréquence (Hz)	Vitesse (t/min)	Fréquence (Hz)	Vitesse (t/min)	
46.02	0	46.02	0	0
52.75	0	52.75	0	0
44.03	2642	44.03	(276.69)2642	0
56.29	3377	56.32	(353.87)3379	0.0005
41.15	4938	41.16	(517.254)4939	0.0002
64.24	7731	64.45	(809.984)7734	0.003

TAB N°2 : L'ECARTE ENTRE LES RESULTAT DE [7] ET ADR DES VALEURS DES FREQUENCES ET DES VITESSES CRITIQUES DE CAS DISSYMETRIQUE

Nous remarquons qu'il n'existe pratiquement aucune différence entre les résultats obtenus par notre programme et ceux de la référence [7] dans le cas symétrique et dissymétrique, ceci est dû aux fonctions de forme qui sont identiques pour  $m=1$ . En plus notre programme nous permet de calculer autant de modes que nous souhaitons ; le nombre de modes calculés est égal à la valeur de  $m$  dans la fonction de forme.

**IV.4. Influence de différents paramètres géométriques sur la dynamique du rotor**

Plusieurs paramètres peuvent influencer le comportement dynamique du rotor et faire varier les fréquences du rotor et ses vitesses critiques. L'étude de l'influence de ces paramètres est importante dans le dimensionnement et la conception des rotors tournants. Les paramètres que nous allons étudier sont les suivants :

- Position de disque
- Epaisseur du disque
- Nombre des ailettes
- Longueur de l'arbre
- Rayon de l'arbre
- Matériaux utilisés pour les pièces de système
- Angle d'inclinaison des ailettes
- Longueur des ailettes

Le modèle de référence est un rotor BP (basse pression) de turbine à gaz MS 5002B, dont les paramètres géométriques et physiques sont les suivants :

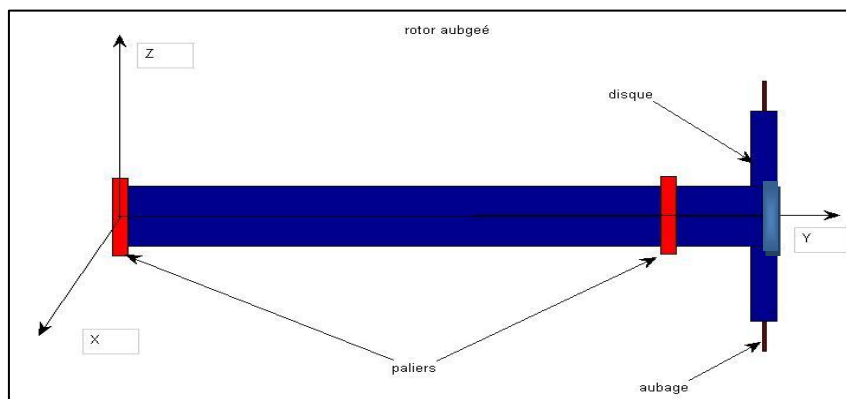


Fig.IV.9. modèle de référence - rotor BP de turbine à gaz MS 5002B

➤ Disque:

- Rayon intérieur  $R_{d1}=0.2m$
- Rayon extérieur  $R_{d2}=0.7m$
- Masse volumique  $\rho_d=7800kg/m^3$
- Épaisseur  $h= 0.064m$
- Position de disque sur le rotor  $y=1.603m$

➤ Ailettes:

- Longueur  $h_b=0.05m$ ;
- Epaisseur  $b_b=0.01m$ ;
- Masse volumique  $\rho_b=2700 kg/m^3$
- Longueur  $l_b=0.2m$
- Nombre total  $n_b=80$
- Angle de décalage  $B=40$
- Module de Young  $E_b=7.28e8 N/m^2$

➤ Arbre:

- Rayon de section droit  $R_a=0.2m$
- Masse volumique  $\rho_a=7800 kg/m^3$
- Longueur de rotor  $L=1.364m$
- Module de Young  $E_a = 20e10 N/m^2$

➤ Balourd:

- Masse de balourd  $\mu=0.0001 kg$
- Distance de balourd  $d=0.7$

Dans cet exemple on va calculer les fréquences et la réponse au balourd du système, et déterminer l'influence des paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement du rotor

**IV.4.1. Influence de la position du disque dans le rotor :**

Nous faisons déplacer le disque sur l'arbre par rapport au deuxième palier, la distance entre le palier et le disque est  $y$ . Les positions de disque proposé sont :

- $y=1.842m$
- $y=1.603m$
- $y=1.4835 m$

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences			$y=1.842m$		$y=1.603m$		$y=1.4835m$			
			$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)		
arbre	Mode 1	$F=VR/2$ $\pi$	indirect	296.80	0	308.2	0	312.95	0	
			direct	271.80	1710.76	244.06	1533.47	235.47	1479.50	
		$F=VR/4$ $\pi$	indirect	332.49	2089.09	510.93	3210.26	735.21	4619.46	
			direct	253.22	3182.05	210.3	2642.70	198.81	2498.32	
	Mode 2			1345.9	0	2485.7	0	1715.3	0	
	Mode 3				3099.1	0	2556.2	0	6145.3	0
					107.74	0	107.74	0	107.74	0
ailette	Mode 1			106.9	671.67	106.9	671.67	106.9	671.67	
		$F=VR/2$ $\pi$		104.47	1312.80	104.47	1312.80	104.47	1312.80	
		$F=VR/4$ $\pi$		332.59	0	332.59	0	332.59	0	
	Mode 2			329.82	2072.32	329.82	2072.32	329.82	2072.32	
		$F=VR/4$ $\pi$		321.92	4045.36	321.92	4045.36	321.92	4045.36	
	Mode 3			1097	0	1097	0	1097	0	
	Mode 4			1804.2	0	1804.2	0	1804.2	0	
couplé	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre		330.12	1959.54	332.45	473.5	332.53	300.1	
	Mode 3 ailette	Mode 2 arbre		1093.64	2090.58	---	---	---	---	
	Mode 4 ailette	Mode 2 arbre		1798.86	2885.87	---	---	1803.81	768.92	

**TAB N°3 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTES POSITIONS DU DISQUE**

La diminution de la longueur de la position du disque par rapport au deuxième palier fait diminuer le porte à faux disque, ce qui traduit par une augmentation de la rigidité donc une diminution des fréquences propres de la structure. Nous remarquons que dans ce cas nous obtenons le même phénomène



*L'influence de la longueur du porte à faux : cette longueur fait augmenter l'écart entre les courbes des précessions directe et indirecte et de ce fait les vitesses critiques des modes directes augmentent et celles des modes indirecte diminuent ; L'effet gyroscopique s'amplifie avec l'augmentation du la longueur du porte à faux. Les vitesses critiques dans ce cas doivent être déterminées pour chaque valeur du porte à faux.*

*Les fréquences des ailettes restent identiques pour les trois cas, l'influence du porte à faux sur les fréquences des ailettes est nul.*

*Pour une vitesse de rotation nulle, les fréquences augmentent avec l'augmentation du la longueur du porte à faux.*

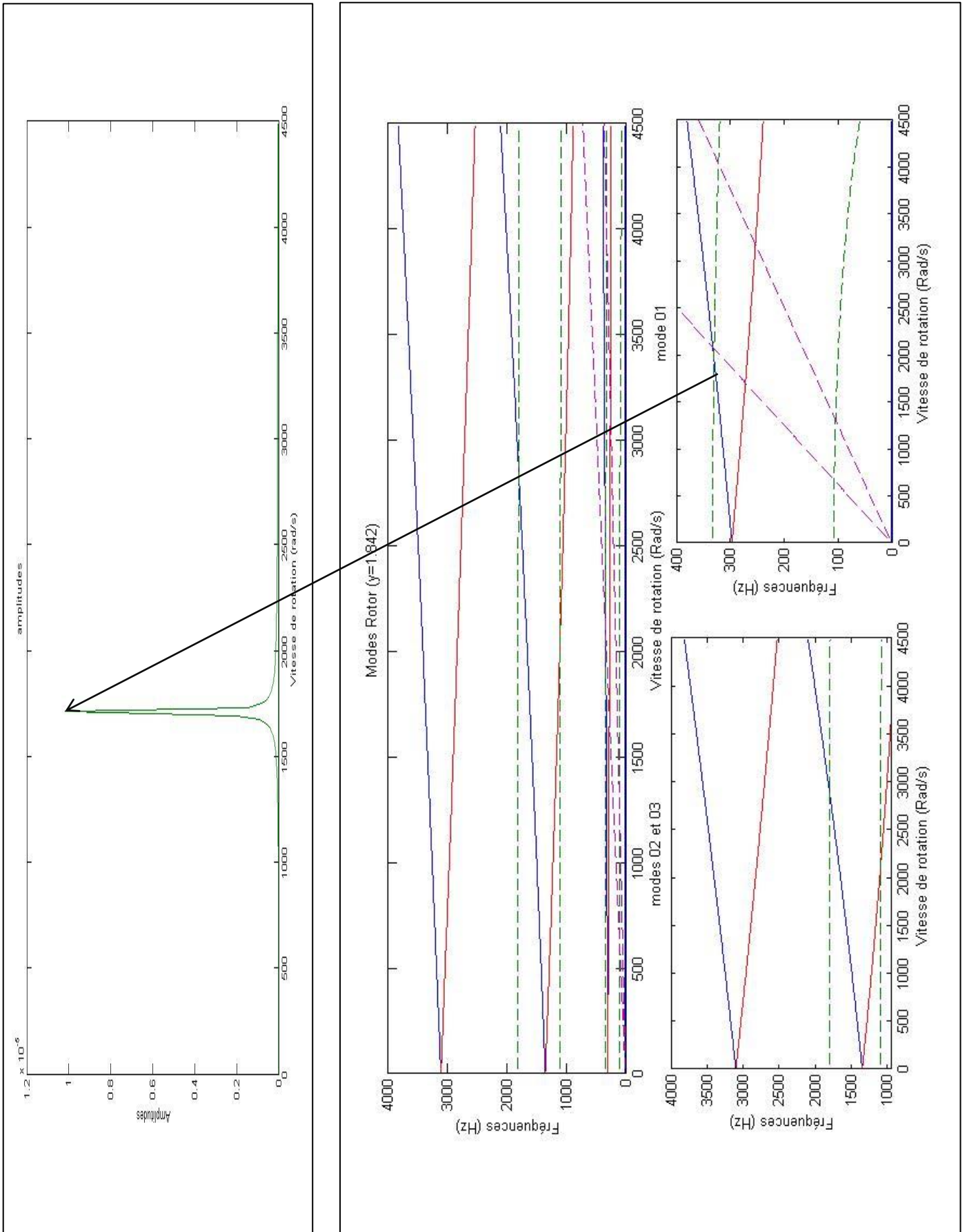


Fig.IV.10 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $y=1.842m$ )

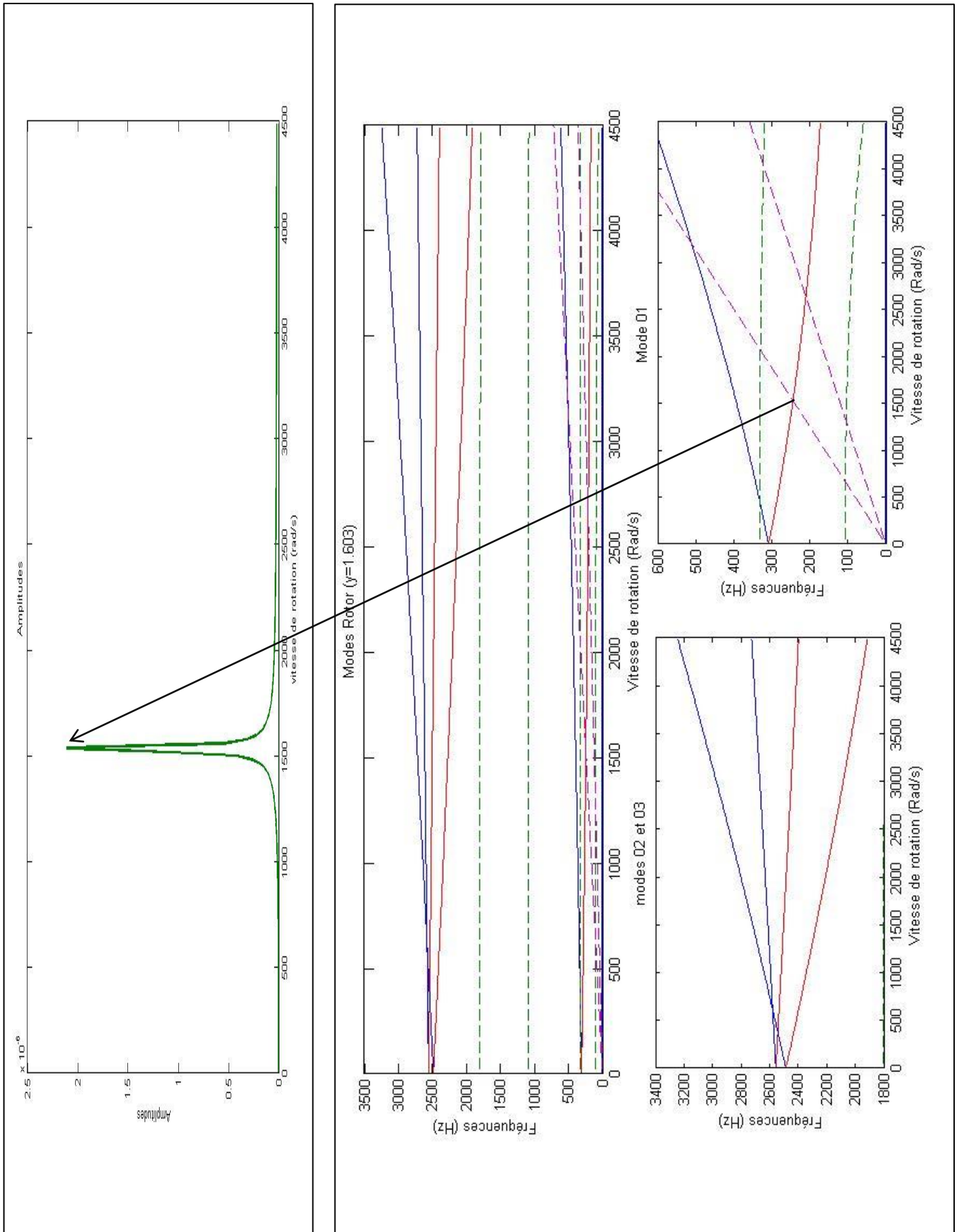


Fig.IV.11 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $y=1.603m$ )

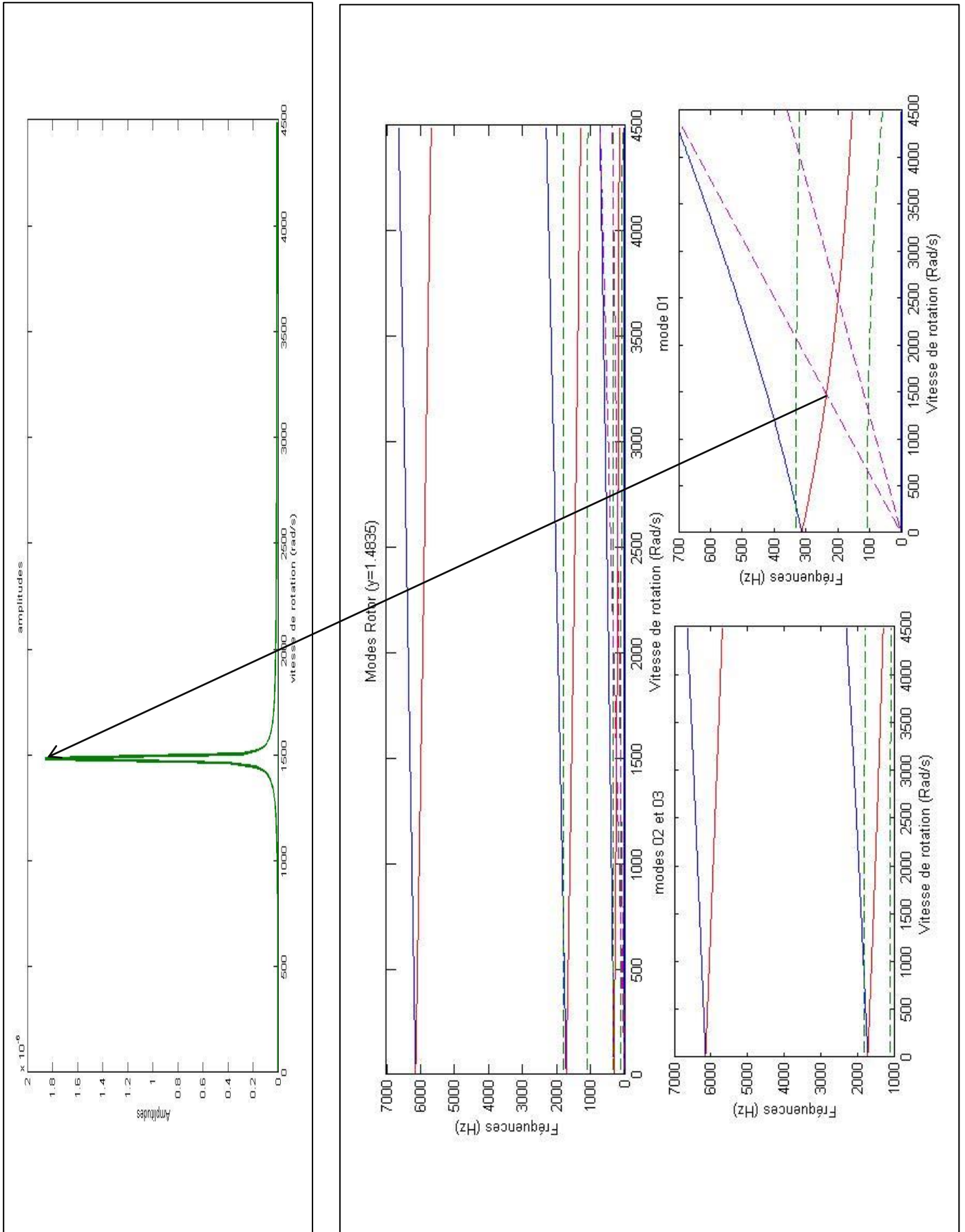


Fig.IV.12 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $y=1.4835m$ )

**IV.4.2. Influence de l'épaisseur du disque:**

Nous faisons varier l'épaisseur de disque  $h$ , les épaisseurs proposées sont :

- $h=0.05m$
- $h=0.064m$
- $h=0.074m$

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences			$h=0.05m$		$h=0.064m$		$h=0.074m$		
			$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	
- VR (rad/s) : vitesses critiques									
arbre	Mode 1		323.87	0	308.2	0	298.26	0	
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	262.58	1649.83	244.06	1533.47	232.99	1463.91
			direct	492.31	3093.27	510.93	3210.26	525.52	3301.93
		$F=VR/4$ $\pi$	indirect	229.2	2880.21	210.3	2642.70	199.33	2504.85
		direct	---	---	---	---	---	---	
	Mode 2		2702.65	0	2485.7	0	2331.4	0	
Mode 3		2763.39	0	2556.2	0	2465	0		
ailette	Mode 1		107.74	0	107.74	0	107.74	0	
		$F=VR/2$ $\pi$		106.9	671.67	106.9	671.67	106.9	671.67
		$F=VR/4$ $\pi$		104.47	1312.80	104.47	1312.80	104.47	1312.80
	Mode 2		332.59	0	332.59	0	332.59	0	
		$F=VR/2$ $\pi$		329.82	2072.32	329.82	2072.32	329.82	2072.32
		$F=VR/4$ $\pi$		321.92	4045.36	321.92	4045.36	321.92	4045.36
	Mode 3		1097	0	1097	0	1097	0	
Mode 4		1804.2	0	1804.2	0	1804.2	0		
couplé	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre	332.56	197.19	332.45	473.5	332.35	611.71	
	Mode 4 ailette	Mode 2 arbre	---	---	---	---	1792.87	4201.72	

TAB N°4 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTES EPAISSEURS DU DISQUE

L'augmentation de l'épaisseur du disque (du moment d'inertie) fait augmenter l'écart entre les courbes des précessions directe et indirecte, il accentue l'effet gyroscopique du premier et deuxième mode ; et de ce fait les vitesses critiques des modes directes augmentent et celles des modes indirectes diminuent. Pour troisième mode nous remarquons l'effet inverse.

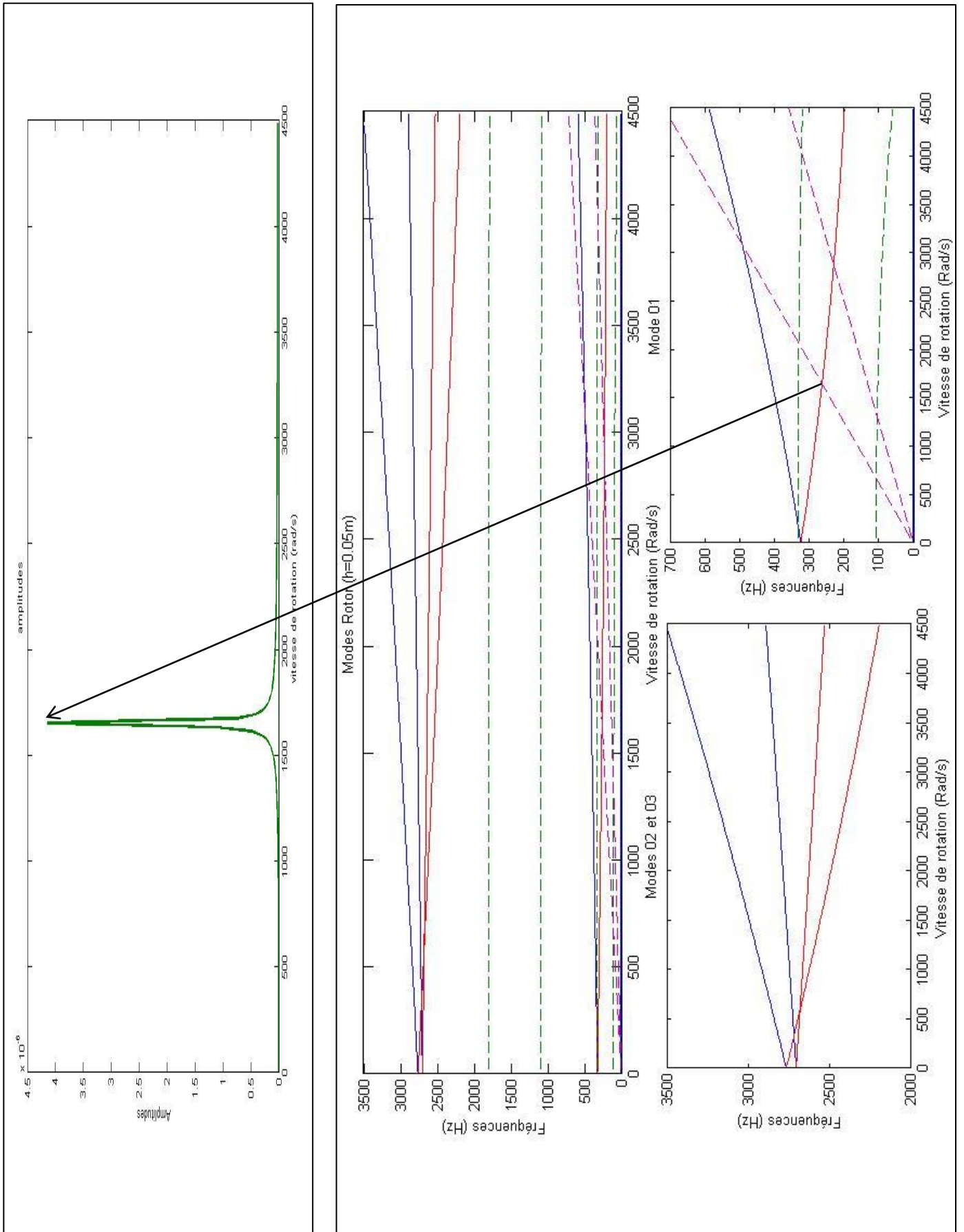


Fig.IV.13 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $h=0.05m$ )



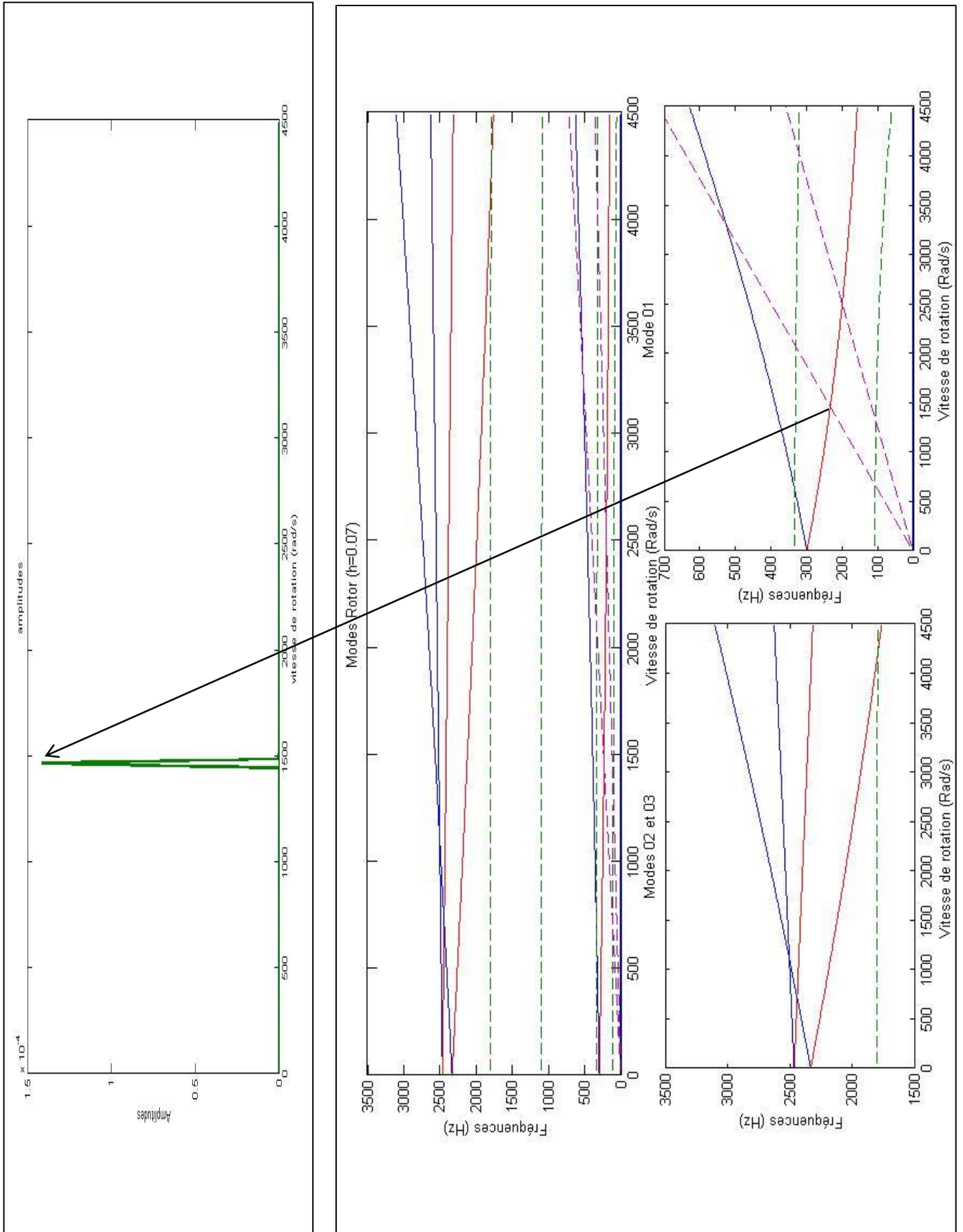


Fig.IV.14 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $h=0.074m$ )

**IV.4.3. Influence la longueur de l'arbre:**

Nous faisons varier la longueur de l'arbre  $L$ . Les longueurs d'arbre proposées sont :

- $L=1.200m$
- $L=1.364m$
- $L=1.500m$

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences - $VR$ (rad/s) : vitesses critiques			$L=1.200m$		$L=1.364m$		$L=1.500m$		
			$F_i(\text{Hz})$	$VR$ (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	$VR$ (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	$VR$ (rad/s)	
arbre	Mode 1		368.44	0	308.2	0	268.6	0	
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	284.72	1788.94	244.06	1533.47	217.28	1365.21
			direct	698.43	4388.36	510.93	3210.26	407.18	2558.38
		$F=VR/4$ $\pi$	indirect	242.84	3051.61	210.3	2642.70	189	2375.04
		direct	---	---	---	---	---	---	
	Mode 2		2496.45	0	2485.7	0	2176.88	0	
Mode 3		2761.09	0	2556.2	0	2635	0		
ailette	Mode 1		107.74	0	107.74	0	107.74	0	
		$F=VR/2$ $\pi$	106.9	671.67	106.9	671.67	106.9	671.67	
		$F=VR/4$ $\pi$	104.47	1312.80	104.47	1312.80	104.47	1312.80	
	Mode 2		332.59	0	332.59	0	332.59	0	
		$F=VR/2$ $\pi$	329.82	2072.32	329.82	2072.32	329.82	2072.32	
		$F=VR/4$ $\pi$	321.92	4045.36	321.92	4045.36	321.92	4045.36	
	Mode 3		1097	0	1097	0	1097	0	
Mode 4		1804.2	0	1804.2	0	1804.2	0		
couplé	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre	332.28	694.03	332.45	473.5	331.53	1283.26	

TAB N°5 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTES LONGUEUR DE L'ARBRE

L'augmentation de la longueur de l'arbre diminue de la rigidité de l'arbre, et les fréquences diminuent. Cette constatation est faite à partir des diagrammes de Campbell dans la figure IV.15,

Les fréquences des ailettes ne changent pas; la longueur de l'arbre n'influe pas sur les ailettes.



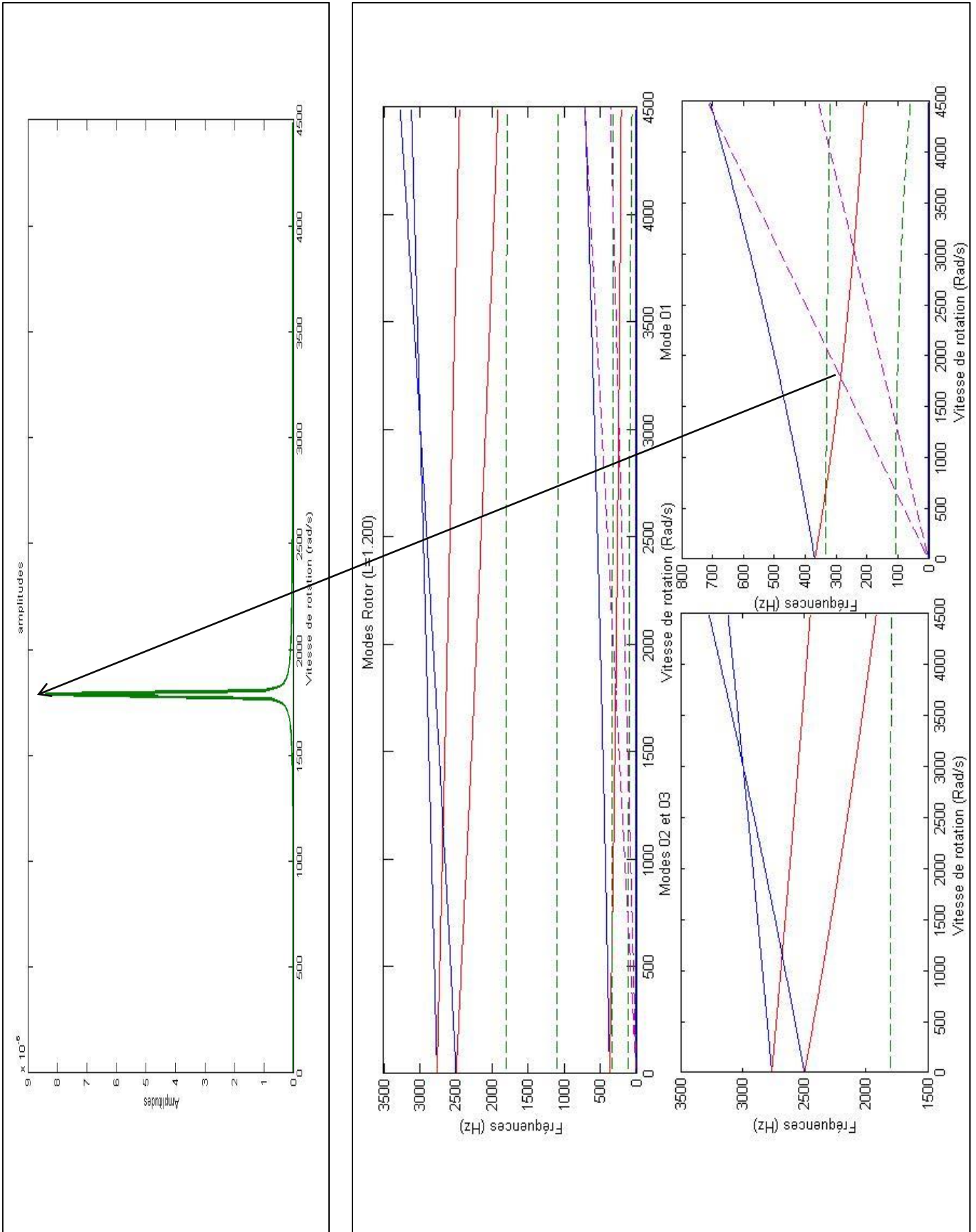


Fig.IV.15 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $L=1.200\ m$ )

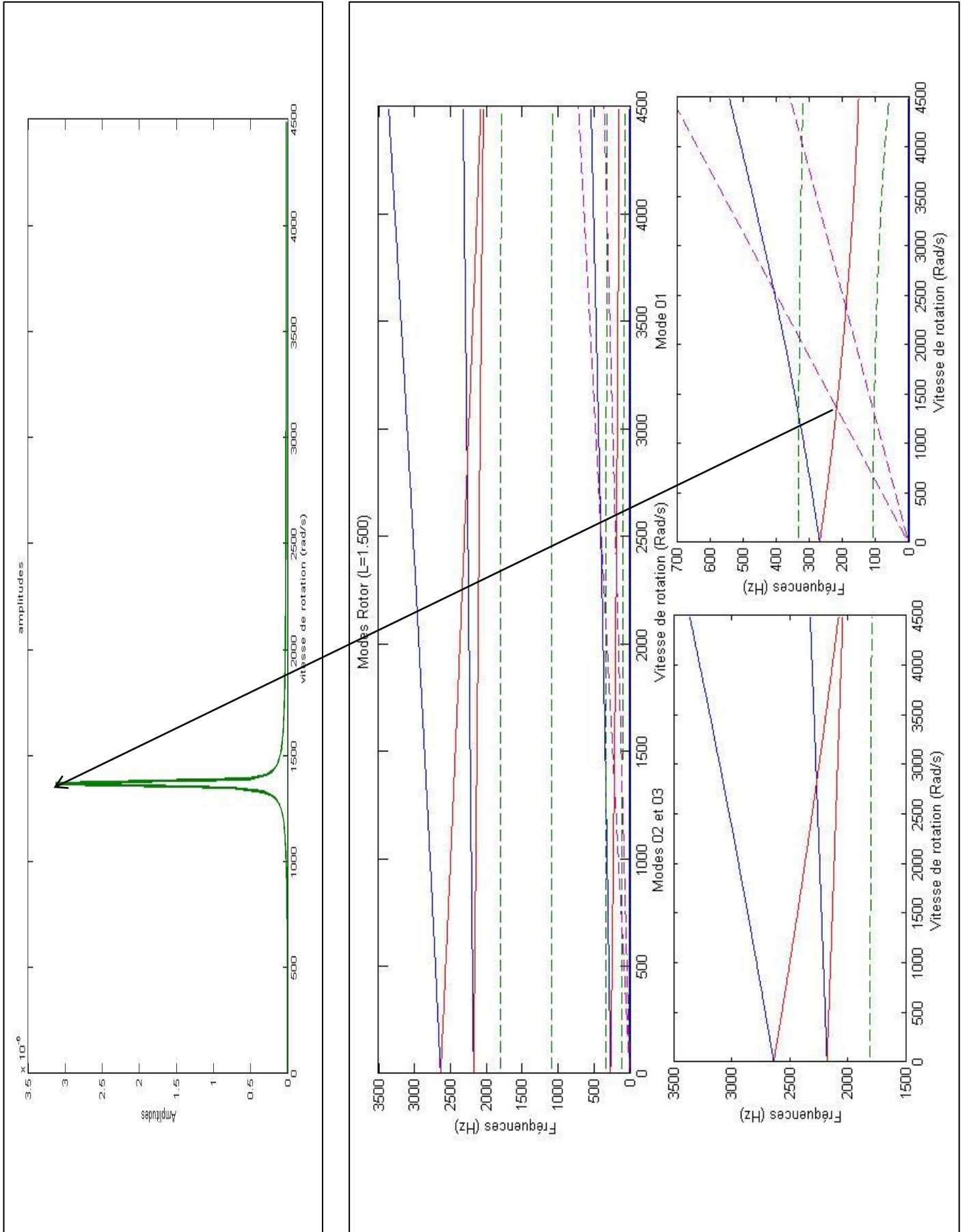


Fig.IV.16 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $L=1.500 \text{ m}$ )

**IV.4.4. Influence de nombre des ailettes dans le disque :**

Dans ce cas nous changeons le nombre des ailettes :

- $n_1=80$
- $n_2=40$
- $n_3=0$  (sans ailettes)

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences			$n_1=80$ ailettes		$n_2=40$ ailettes		$n_3=0$ ailettes		
			$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	
arbre	Mode 1		308.2	0	310.18	0	312.2	0	
		$F=VR/2$	indirect	244.06	1533.47	244.24	1534.60	244.42	1535.73
		$\pi$	direct	510.93	3210.26	512.57	3220.57	514.22	3230.93
		$F=VR/4$	indirect	210.3	2642.70	208.90	2625.11	207.53	2607.89
		direct	---	---	---	---	---	---	
	Mode 2		2485.7	0	2526.55	0	2569.4	0	
Mode 3		2556.2	0	2566.2	0	2576.3	0		
ailette	Mode 1		107.74	0	107.74	0	---	---	
		$F=VR/2$		106.9	671.67	106.9	671.67	---	---
		$\pi$		104.47	1312.80	104.47	1312.80	---	---
	Mode 2		332.59	0	332.59	0	---	---	
		$F=VR/2$		329.82	2072.32	329.82	2072.32	---	---
		$\pi$		321.92	4045.36	321.92	4045.36	---	---
	Mode 3		1097	0	1097	0	---	---	
	Mode 4		1804.2	0	1804.2	0	---	---	
couplé	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre	332.45	473.5	332.47	432.94	---	---	

TAB N°6 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DU NOMBRE D'AILETTES

Les fréquences des ailettes restent identiques par contre les fréquences de l'arbre varient légèrement (environ un écart de  $5 \cdot 10^{-4}$ ) et ceci est dû au poids des ailettes qui changent avec leur nombre et qui s'ajoute au poids du disque.

Le nombre des ailettes augmente donc la masse de la structure et accentue légèrement l'effet gyroscopique.

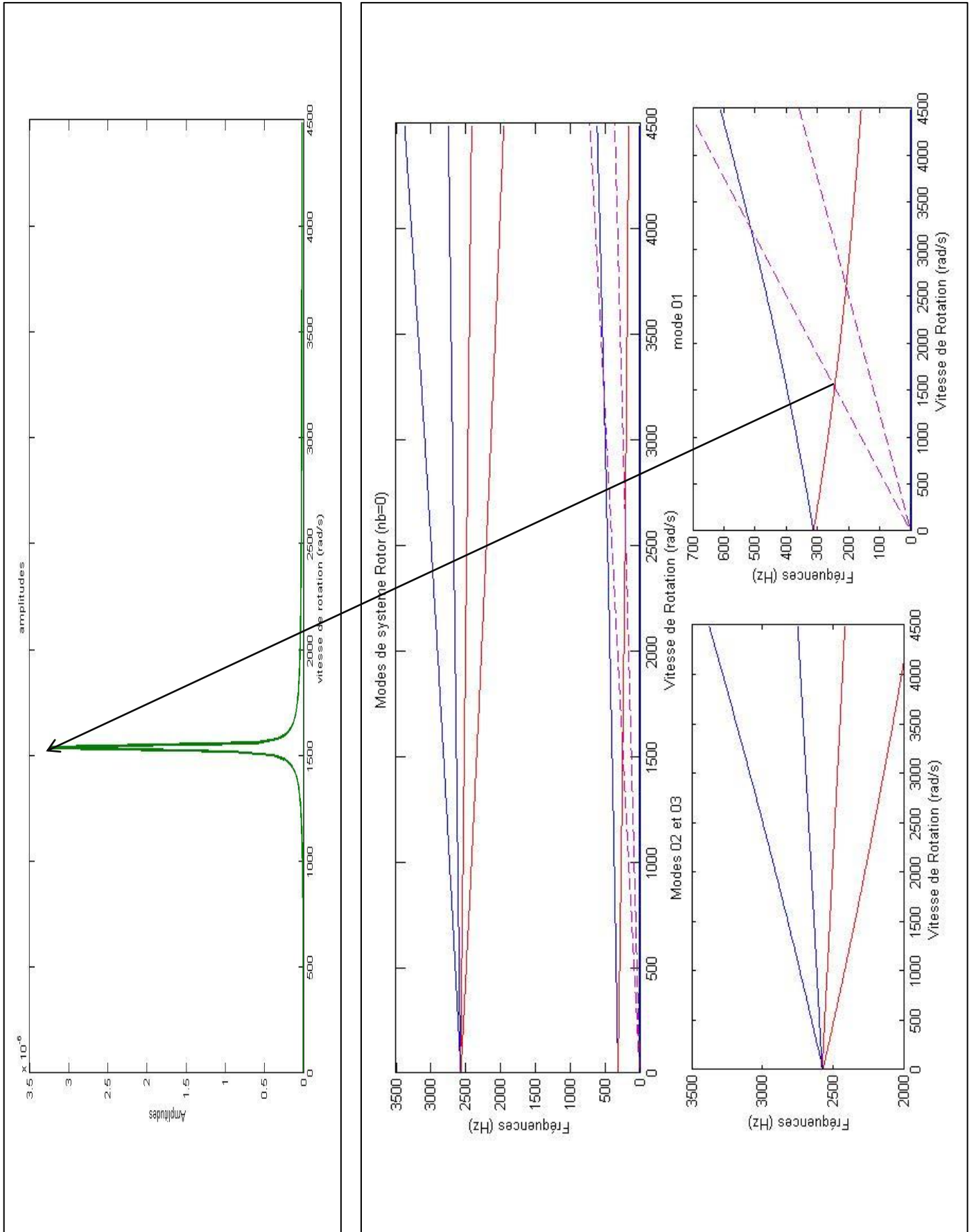


Fig.IV.17 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (nb=0 ailettes)

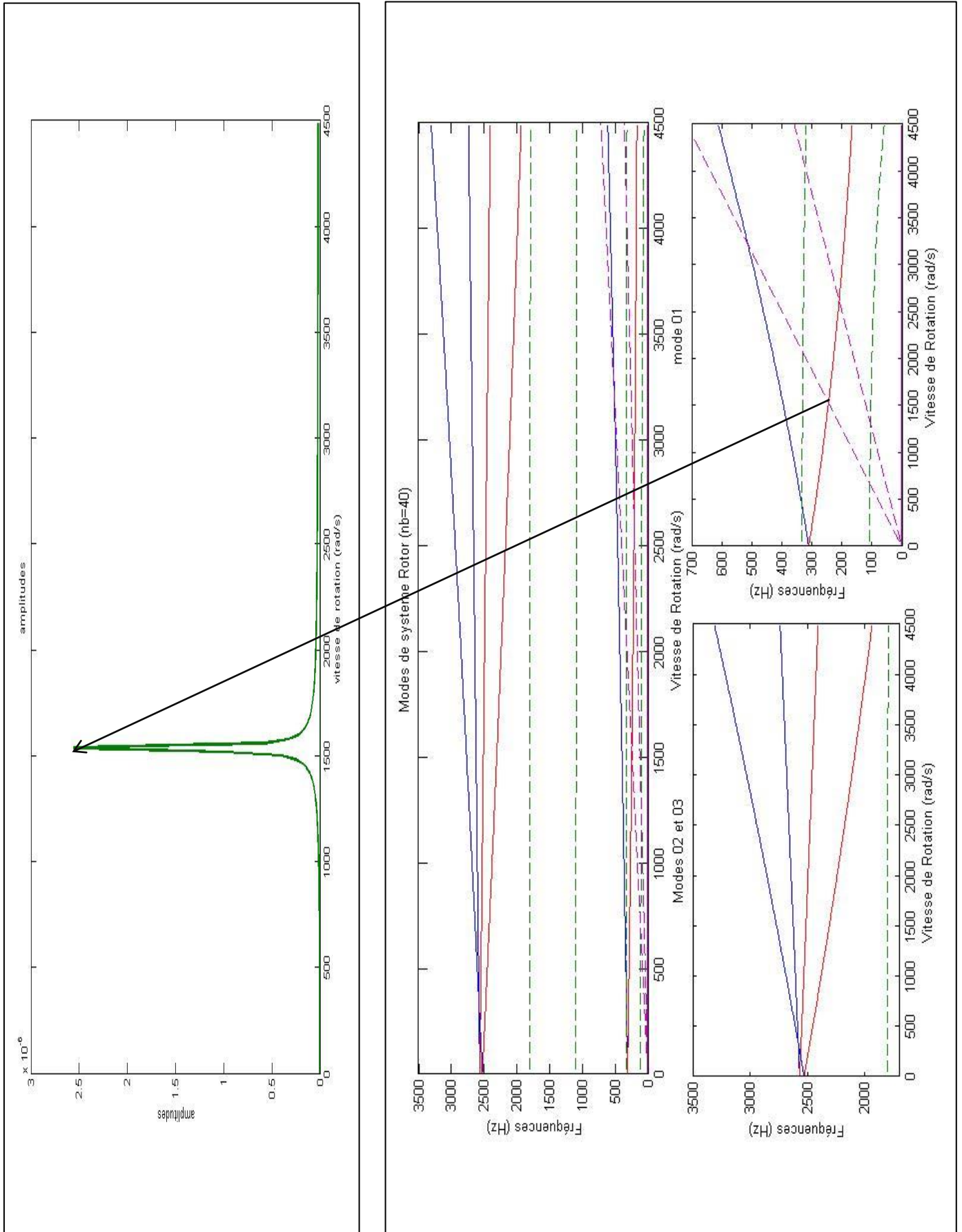


Fig.IV.18 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (nb=40 ailettes)

**IV.4.5. Influence du rayon de l'arbre :**

Dans cet exemple nous faisons varier le rayon de l'arbre  $R_a$ . Les différents rayons d'arbre que nous considérons sont :

- $R_a=0.1$
- $R_a=0.2$
- $R_a=0.25$

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences			$R_a=0.1$		$R_a=0.2$		$R_a=0.25$		
			$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	
arbre	Mode 1		99.5	0	308.2	0	419.7	0	
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	71.97	452.20	244.06	1533.47	341.77	2147.40
			direct	---	---	510.93	3210.26	618.41	3885.58
		$F=VR/4$ $\pi$	indirect	60	753.98	210.3	2642.70	297.94	3744.02
		direct	---	---	---	---	---	---	
	Mode 2			636.26	0	2485.7	0	3485.8	0
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	383.3465	2408.63	---	---	---	---
		direct	---	---	---	---	---	---	
	Mode 3			797.07	0	2556.2	0	3809.3	0
	ailette	Mode 1		107.74	0	107.74	0	---	---
$F=VR/2$ $\pi$				106.9	671.67	106.9	671.67	---	---
		$F=VR/4$ $\pi$		104.47	1312.80	104.47	1312.80	---	---
Mode 2				332.59	0	332.59	0	---	---
		$F=VR/2$ $\pi$		329.82	2072.32	329.82	2072.32	---	---
		$F=VR/4$ $\pi$		321.92	4045.36	321.92	4045.36	---	---
Mode 3				1097	0	1097	0	---	---
Mode 4			1804.2	0	1804.2	0	---	---	
couplé	Mode 1 ailette	Mode 1 arbre	107.72	104.43	---	---	---	---	
	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre	330.19	1928.40	332.45	473.5	328.23	2599.07	
	Mode 2 ailette	Mode 2 arbre	325.19	3376.74	---	---	---	---	
	Mode 3 ailette	Mode 2 arbre	1092.37	2457.07	---	---	---	---	

**TAB N°7 : FREQUENCES ET VITESSES CRITIQUES EN FONCTION DES DIFFERENTS RAYONS EXTERIEURS DE L'ARBRE**

*La variation du rayon de l'arbre influe faiblement sur les vibrations de torsion, par contre les vibrations des ailettes et les vibrations couplées de flexion et des ailettes sont fortement affectées. Les fréquences augmentent avec l'augmentation du rayon de l'arbre. L'effet gyroscopique pour les faibles rayons est important ;*

*La rigidité de l'arbre augmente avec l'augmentation du rayon de l'arbre. Pour le cas où le rayon est de 0.1 m les modes 1,2 et 3 sont rapprochés et de ce fait nous pouvons obtenir plusieurs vitesses critiques pour les vitesses de rotation allant jusqu'à  $\Omega=4500$  rad/s. Pour les autres cas de rayon 0.2 m et 0.25 m le moment d'inertie augmente et la plage des modes 1,2 et 3 augmente Les fréquences des ailettes restent identiques avec la variation des rayons de l'arbre qui n'a aucune influence sur les fréquences ailettes*



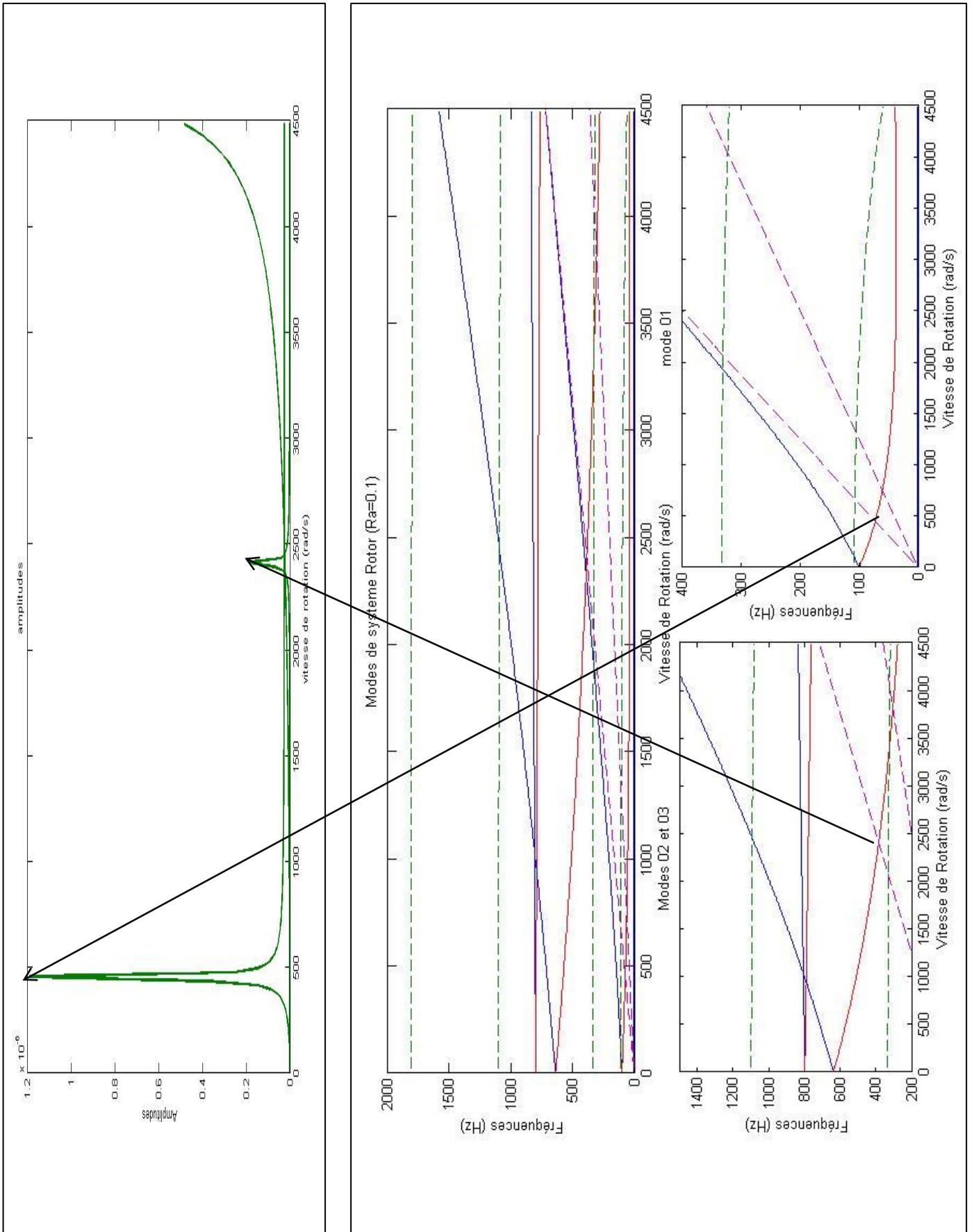


Fig.IV.19 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $R_a=0.1$ )



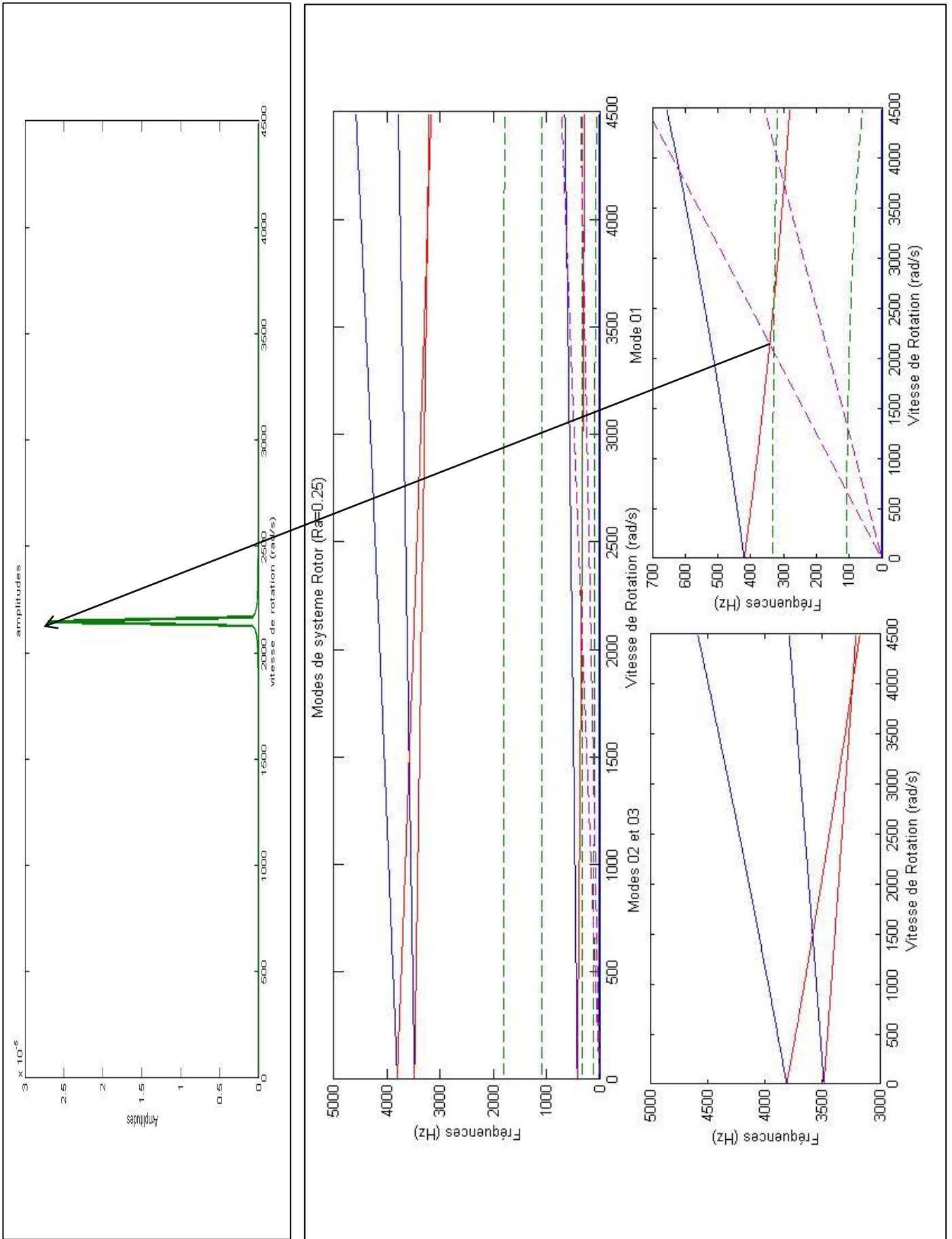


Fig.IV.20 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd ( $R_a=0.25$ )

**IV.4.6. Influence de type de matériaux utilisé pour les pièces de système :**

1: rotor en acier et ailettes en alliage d'aluminium ;

2: tout le système est en acier (masse volumique = 7800 kg/m<sup>3</sup> ; module de Young=20 GPa);

3: tout le système est en alliage d'aluminium (masse volumique = 2700 kg/m<sup>3</sup> ; module de Young=7.28 GPa)

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences - $VR$ (rad/s) : vitesses critiques			rotor est en acier et ailettes en alliage d'aluminium		système en acier		système en alliage d'aluminium		
				$F_i(\text{Hz})$	$VR$ (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	$VR$ (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	$VR$ (rad/s)
arbre	Mode 1			308.2	0	301.06	0	30.87	0
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	244.06	1533.47	243.38	1529.20	25	157.07
			direct	510.93	3210.26	504.89	3172.31	51.77	325.28
		$F=VR/4$ $\pi$	indirect	210.3	2642.70	215.83	2712.19	22.14	278.21
	direct		---	---	---	---	---	---	
	Mode 2			2485.7	0	2347.67	0	240.75	0
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	---	---	---	---	152.36	957.30
	direct		---	---	---	---	---	---	
	Mode 3			2556.2	0	2519.51	0	258.35	0
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	---	---	---	---	215.1	1351.51
direct	---		---	---	---	348.50	2189.69		
ailette	Mode 1			107.74	0	1050.7	0	107.74	0
		$F=VR/2$ $\pi$		106.9	671.67	---	---	106.9	671.67
		$F=VR/4$ $\pi$		104.47	1312.80	---	---	104.47	1312.80
	Mode 2			332.59	0	3242.36	0	332.59	0
		$F=VR/2$ $\pi$		329.82	2072.32	---	---	329.82	2072.32
		$F=VR/4$ $\pi$		321.92	4045.36	---	---	321.92	4045.36
	Mode 3			1097	0	---	---	1097	0
	Mode 4			1804.2	0	---	---	1804.2	0
couplé	Mode 1 ailette	Mode 1 arbre		---	---	---	---	106.16	916.97
	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre		332.45	473.5	---	---	326.65	3028.43
	Mode 2 ailette	Mode 2 arbre		---	---	---	---	332.37	581.87
	Mode 3 ailette	Mode 2 arbre		---	---	---	---	1086.44	3710.119

TAB N°8 : DIFFERENTS TYPES DE MATERIAUX DE SYSTEME

La masse volumique du matériau a une grande influence sur la rigidité du système. Quand tout l'ensemble du rotor est en alliage d'aluminium les fréquences et les vitesses critiques sont petites par rapport aux fréquences et vitesses critiques du cas où tout le rotor est en acier et du cas où le rotor est en acier et les ailettes en alliage d'aluminium. L'effet gyroscopique s'amplifie fortement avec la diminution de la masse volumique de l'arbre, par contre l'amplification est faible avec la diminution de la masse volumique des ailettes.

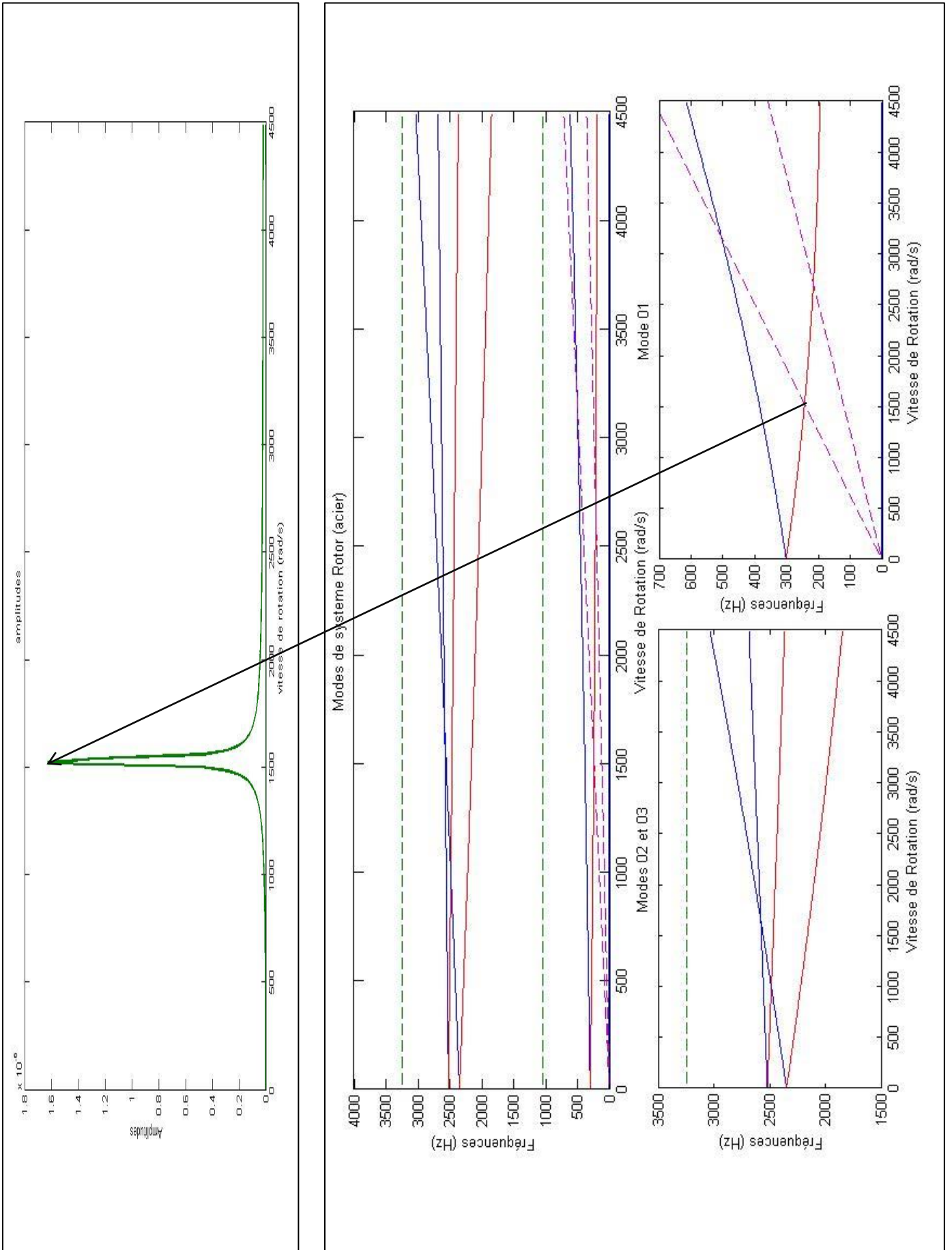


Fig.IV.21 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (le matériau utiliser : acier)

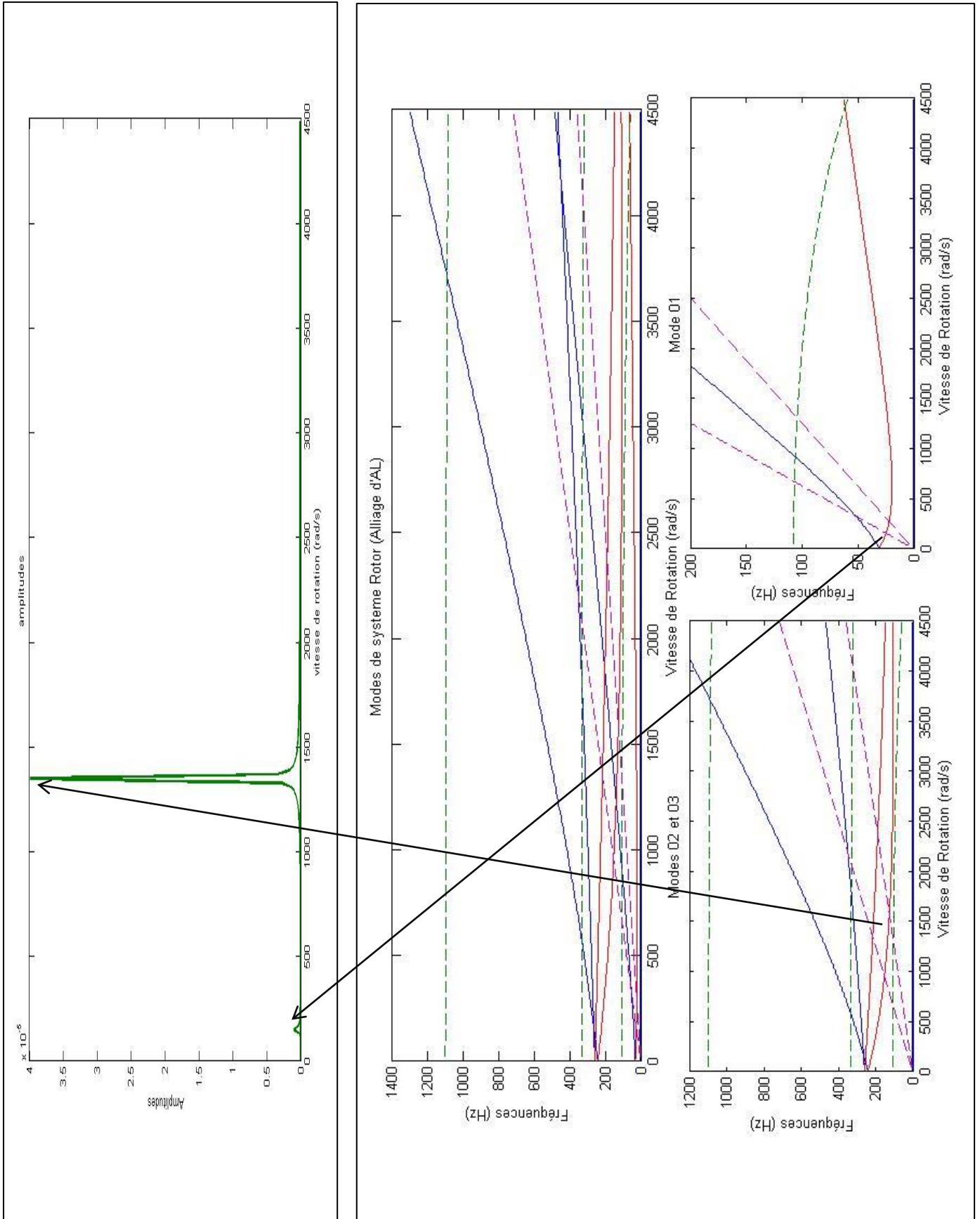


Fig.IV.22 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (le matériau utiliser : alliage d'aluminium)

**IV.4.7. Influence de l'angle d'inclinaison des ailettes :**

Dans cet exemple nous faisons varier l'angle d'inclinaison des ailettes, nous prenons trois cas :

- $B=20^\circ$
- $B=40^\circ$
- $B=60^\circ$ ,

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences			$B=20^\circ$		$B=40^\circ$		$B=60^\circ$		
			$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	
- VR (rad/s) : vitesse critiques									
arbre	Mode 1			308.2	0	308.2	0	308.2	0
		$F=VR/2$ $\pi$	indirect	244.06	1533.47	244.06	1533.47	244.06	1533.47
			direct	510.93	3210.26	510.93	3210.26	510.93	3210.26
		$F=VR/4$ $\pi$	indirect	210.3	2642.70	210.3	2642.70	210.3	2642.70
		direct	---	---	---	---	---	---	
	Mode 2			2485.7	0	2485.7	0	2485.7	0
	Mode 3			2556.2	0	2556.2	0	2556.2	0
ailette	Mode 1			107.74	0	107.74	0	107.74	0
		$F=VR/2$ $\pi$		106.48	669.03	106.9	671.67	107.6	676.07
		$F=VR/4$ $\pi$		102.93	1293.45	104.47	1312.80	107.7	1353.39
	Mode 2			332.59	0	332.59	0	332.59	0
		$F=VR/2$ $\pi$		328.46	2063.77	329.82	2072.32	332.12	2086.77
		$F=VR/4$ $\pi$		316.94	3982.78	321.92	4045.36	330.73	4156.17
		Mode 3			1097	0	1097	0	1097
	Mode 4			1804.2	0	1804.2	0	1804.2	0
couplé	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre		332.37	472.2	332.45	473.5	332.57	475.75

TAB N°9 : INFLUENCE DE L'ANGLE D'INCLINAISON DES AILETTES

*L'inclinaison des ailettes a une légère influence sur les fréquences de vibration de système. Elle n'influe ni sur les vibrations de l'arbre ni sur celles des ailettes.*

*Son influence se situe au niveau de la force d'impact avec le fluide qui est en contact avec les ailettes.*

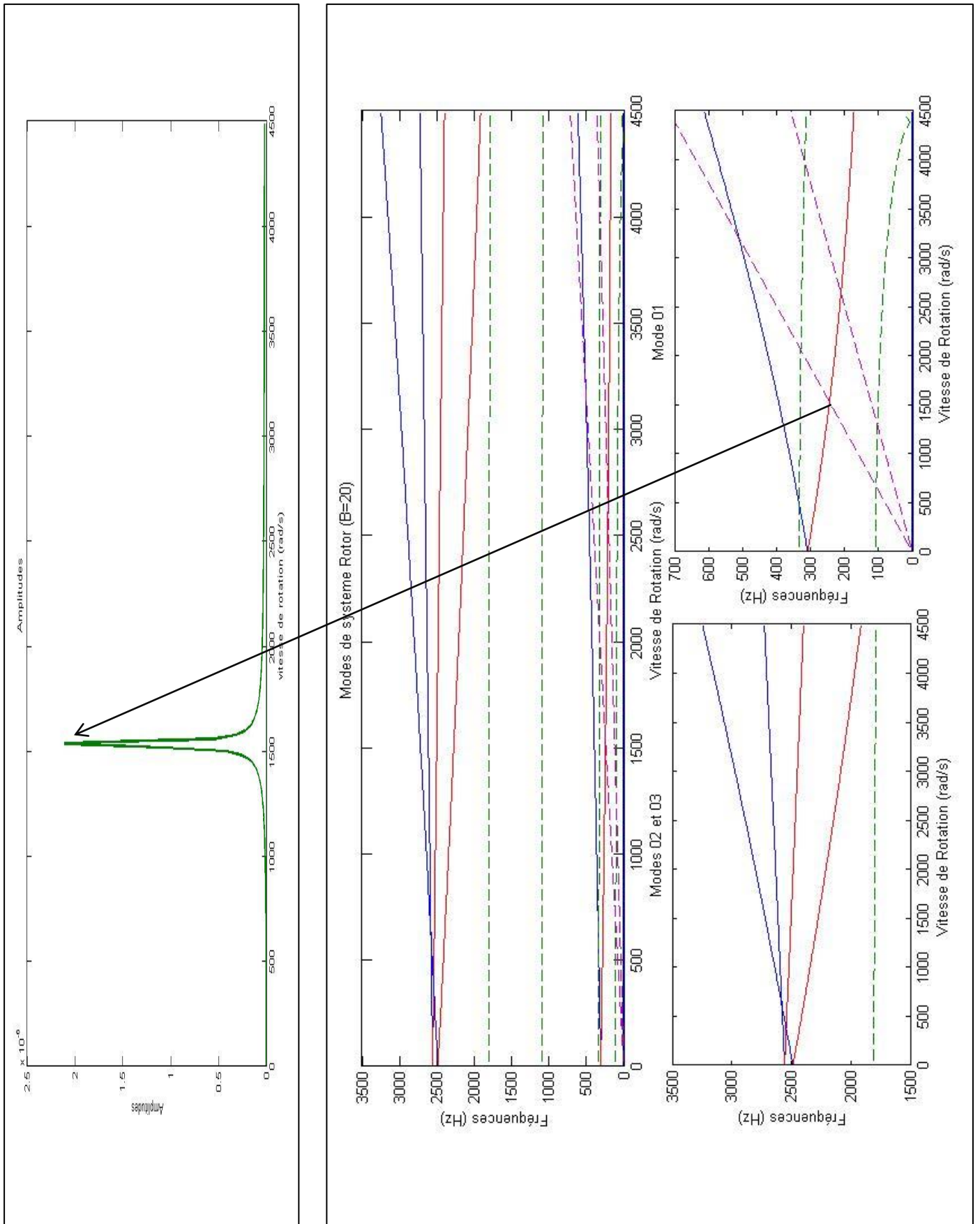


Fig.IV.23 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (l'angle de décalage des ailettes  $B=20^\circ$ )



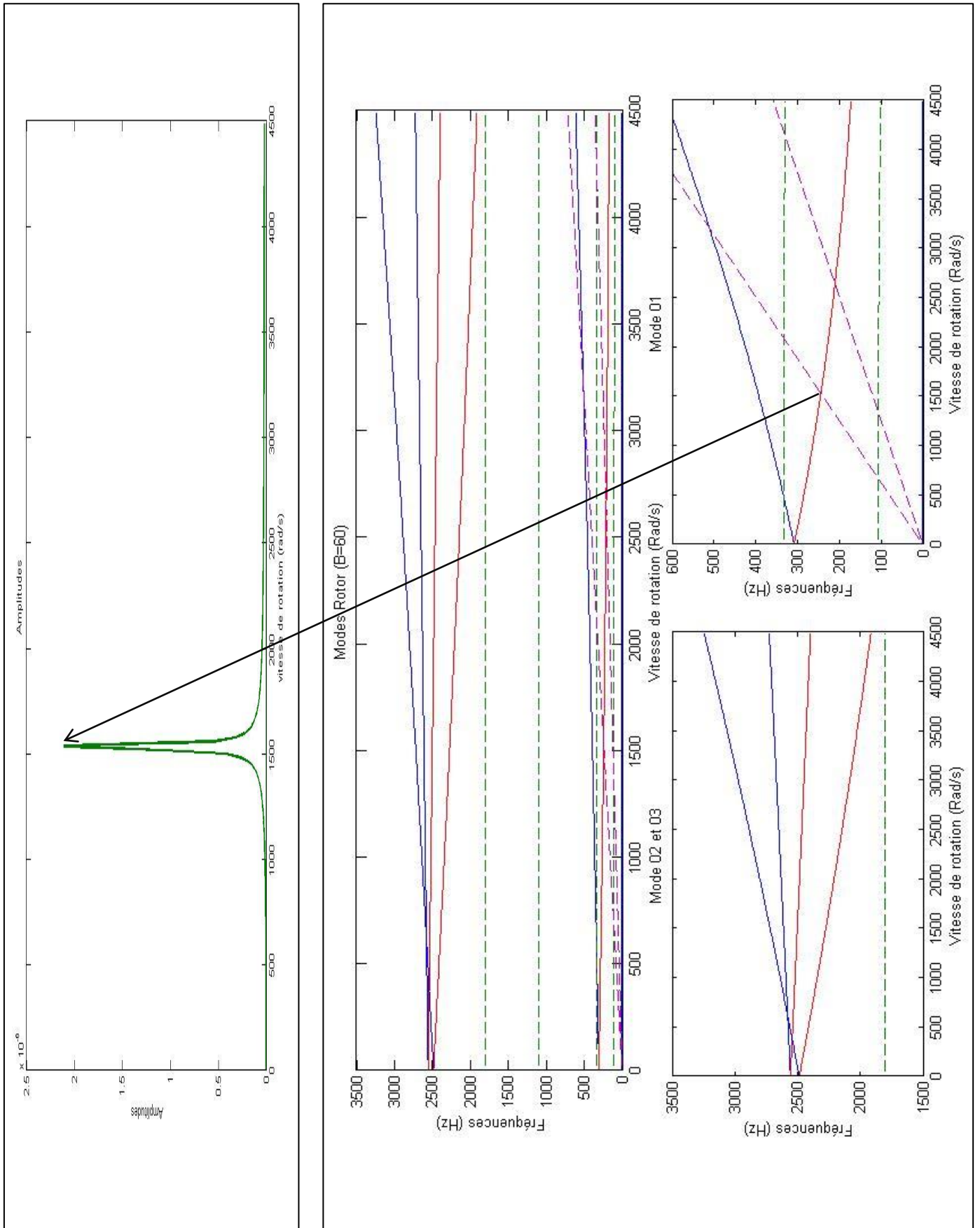


Fig.IV.24 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (l'angle de décalage des ailettes  $B=60^\circ$ )

**IV.4.8. Influence de la longueur des ailettes :**

Dans cet exemple nous faisons varier les longueurs des ailettes ; nous prenons :

- $l_b=0.1m$
- $l_b=0.2m$
- $l_b=0.4m$

- $F_i(\text{Hz})$ : fréquences			$l_b=0.1m$		$l_b=0.2m$		$l_b=0.4m$		
			$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	$F_i(\text{Hz})$	VR (rad/s)	
- VR (rad/s) : vitesses critiques									
arbre	Mode 1		310.35	0	308.2	0	302.64	0	
		$F=VR/2$	indirect	244.24	1534.60	244.06	1533.47	243.70	1531.21
		$\pi$	direct	512.55	3220.44	510.93	3210.26	507.74	3190.22
		$F=VR/4$	indirect	208.71	2622.72	210.3	2642.70	214.99	2701.64
	$\pi$	direct	---	---	---	---	---	---	
	Mode 2		2531.7	0	2485.7	0	2370.25	0	
Mode 3		2566.3	0	2556.2	0	2535.48	0		
ailette	Mode 1		414.2	0	107.74	0	27.24	0	
		$F=VR/2$		402.54	2529.23	106.9	671.67	27.1	170.27
		$\pi$		---	---	104.47	1312.80	27.0	339.29
	Mode 2		1275.71	0	332.59	0	84.02	0	
		$F=VR/2$		---	---	329.82	2072.32	83.89	527.09
		$\pi$		---	---	321.92	4045.36	83.35	1047.40
	Mode 3		3786.67	0	1097	0	286.8	0	
		$F=VR/2$		---	---	---	---	284.255	1786.02
		$\pi$		---	---	---	---	276.99	3480.75
	Mode 4		5946.16	0	1804.2	0	480.04	0	
$F=VR/2$			---	---	---	---	474.26	2979.86	
couplé	Mode 1 ailette	Mode 1 arbre	408.80	1726.18	---	---	---	---	
	Mode 2 ailette	Mode 1 arbre	---	---	332.45	473.5	---	---	
	Mode 3 ailette	Mode 1 arbre	---	---	---	---	286.71	352.73	
	Mode 4 ailette	Mode 1 arbre	---	---	---	---	475.10	2767.411	

TAB N°10 : INFLUENCE DE LA LONGUEUR DES AILETTES

Les fréquences du rotor diminuent légèrement avec l'augmentation de la longueur des ailettes, cette diminution est due à la petite variation du poids des ailettes. Les fréquences des ailettes seules diminuent. La longueur des ailettes a une influence importante sur les vibrations de ces dernières ; elle diminue la rigidité des ailettes. Les vitesses critiques des ailettes diminuent considérablement.



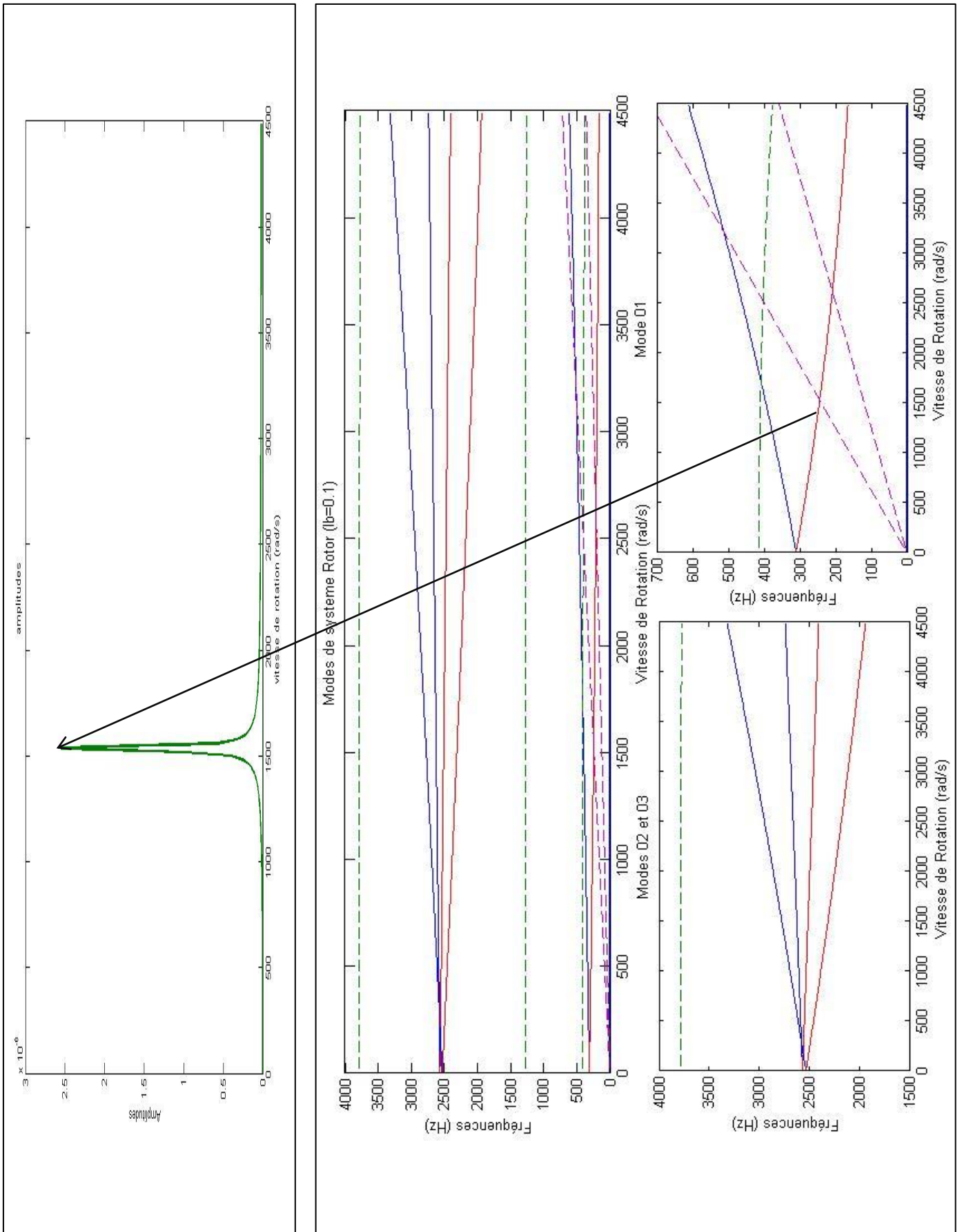


Fig.IV.25 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (longueur des ailettes  $l_b=0.1$ )

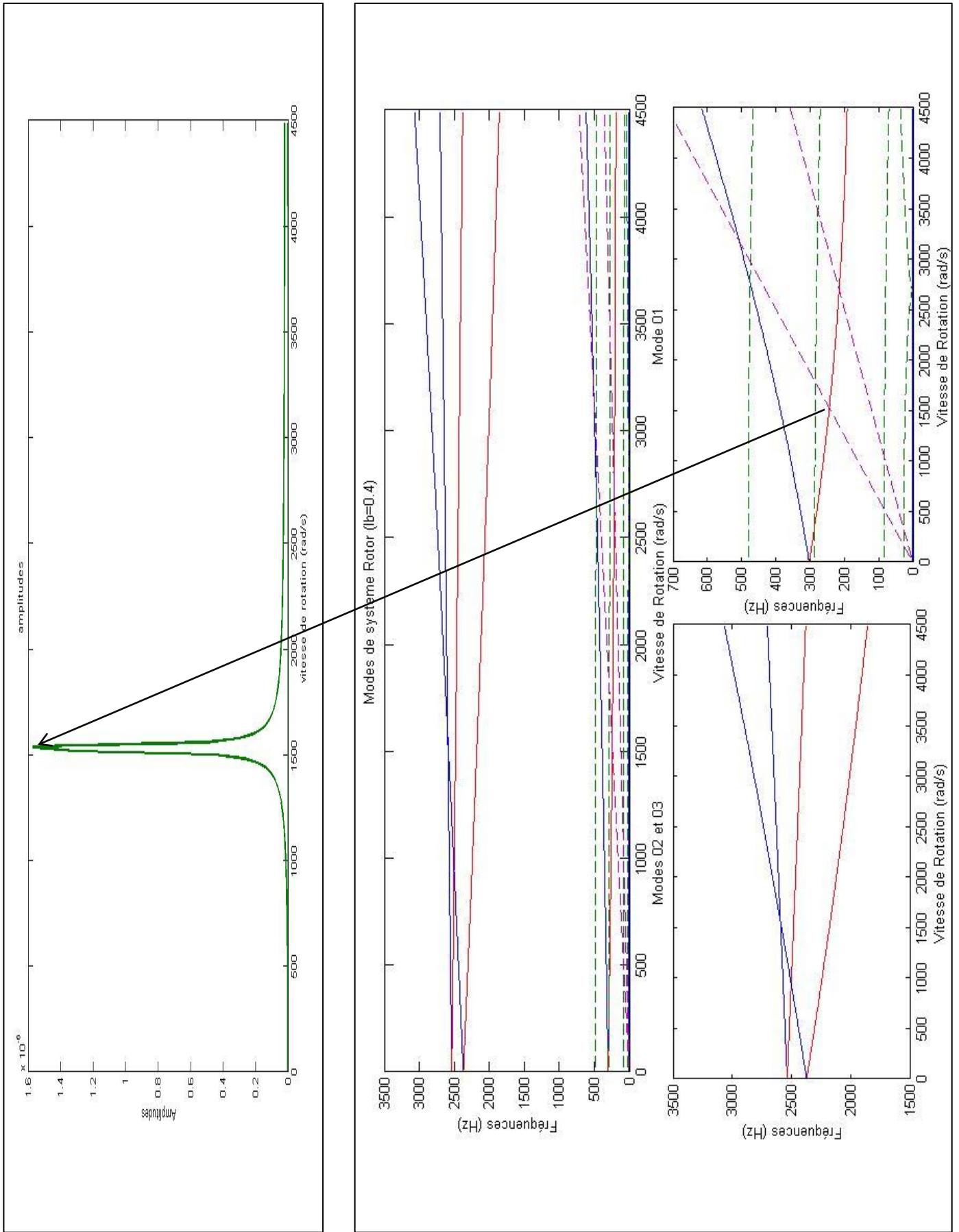


Fig.IV.26 : Diagramme de Campbell et réponse au balourd (longueur des ailettes  $l_b=0.4$ )

Conclusion

## CONCLUSION

*L'objectif de ce travail est de déterminer les fréquences propres et les vitesses critiques d'un rotor aubagé. Le comportement dynamique du système est déterminé par les équations de Lagrange, où les énergies de l'ensemble des éléments constituant le rotor aubagé ont été calculées dans un repère unique. La méthode de Rayleigh-Ritz, en utilisant un nombre important de fonctions de forme a été utilisée pour la détermination d'une équation différentielle simple du comportement vibratoire du rotor. Un programme pour la détermination des fréquences propres et des vitesses critiques du rotor présenté sous forme d'une application, appelée Analyse Dynamique des Rotors (ADR) a été élaboré sous environnement MATLAB*

*Après avoir validé le programme élaboré, nous avons étudié plusieurs cas qui nous ont permis de déterminer l'influence des paramètres géométriques et mécaniques des différents éléments du rotor sur les caractéristiques dynamiques, que nous pouvons résumer comme suit :*

- *L'augmentation du porte à faux du disque diminue la rigidité de la structure, et amplifie l'effet gyroscopique du mouvement.*
- *La variation du rayon de l'arbre influe faiblement sur les vibrations de torsion, par contre les vibrations des ailettes et les vibrations couplées de flexion et des ailettes sont fortement affectées. Les fréquences augmentent avec l'augmentation du rayon de l'arbre. L'effet gyroscopique pour les faibles rayons est important.*
- *L'effet gyroscopique s'amplifie fortement avec la diminution de la masse volumique de l'arbre, par contre l'amplification est faible avec la diminution de la masse volumique des ailettes.*
- *L'inclinaison des ailettes a une légère influence sur les fréquences de vibration de système. Elle n'influe ni sur les vibrations de l'arbre ni sur celles des ailettes. Son influence se situe au niveau de la force d'impact avec le fluide qui est en contact avec les ailettes.*
- *La longueur des ailettes a une influence importante sur les vibrations de ces dernières ; leur augmentation diminue la rigidité des ailettes. Les vitesses critiques des ailettes diminuent considérablement. Les fréquences du rotor par contre ne varient que légèrement avec la variation de la longueur des ailettes, cette petite variation est due à la variation du poids des ailettes.*

- *Le nombre des ailettes n'influe que légèrement sur les fréquences et les vitesses critiques de la structure.*

*Le paramètre le plus important dans un système de rotor avec disque est donc la rigidité du système ; plus elle diminue plus l'effet gyroscopique est amplifié. Cette rigidité est affectée par la variation du rayon de l'arbre, du matériau du système, du porte à faux.*

*Les ailettes n'ont qu'une faible influence sur les vitesses critiques du rotor, elles n'affectent que les fréquences propres de ces dernières.*

*Les rotors peuvent être affectés par plusieurs paramètres et les perspectives dans ce domaine sont nombreuses, nous citons pour nos futurs travaux l'étude de l'influence des paliers hydrodynamiques sur le comportement vibratoire des arbres tournants.*

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] Jeffcott. H. 1919 *Phil Mag., Series 6*, 37, 304. *The Lateral Vibration of Loaded shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed the Effect of Want of Balance.*
- [2] Myklestad N. O. *A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams, Journal of Aeronautique Science*, 1944, pp. 153-162.
- [3] Prohi, M. A. *A general method for calculating critical speeds of flexible rotors, ASME Journal of Applied Mechanics*, 1945, Vol. 12, pp. A142-A148.
- [4] Ishida Y., Ikeda T., Yamamoto T., Murakami S. *Nonstationary oscillations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics during acceleration through critical speed, Memoirs of the School of Engineering, Nagoya University, October 1 992, Vol. 44, n°1, pp. 1-70.*
- [5] Ecker H., Pumphisse1 T., Tondi A. *A study on parametric excitation for suppressing selfexcited rotor vibrations, IFToMM, in: "Proceedings of the sixth international conference on rotor dynamics", Sidney, Australia, 30 September - 4 October 2002, pp. 85-92, ISBN 0-7334-1963-1.*
- [6] Tondi A. *Some problems of rotor dynamics, London, Chapman and Hall, 1965, 433 p.*
- [7] Lalanne M., Ferraris G. *Rotordynamics prediction in engineering, 2nd Edition, Chichester, John Wiley, 1998, 254 p.*
- [8] Kassai A. *Contribution à l'étude dynamique des rotors amortis, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1989, 159 p.*
- [9] Tran D. M. *Etude du comportement dynamique des rotors flexibles, Thèse Université C. Bemard, Lyon, 1981.*
- [10] Horkildsen T. 1972 *MSE Engineering Report, Arizona University. Solution of a Distrbuted Mass and Unbalanced Rotor System Using a consistent Mass Matrix Approach*
- [11] Kassai A. *Contribution à l'étude dynamique des rotors amortis, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1989, 159 p.*
- [12] Dufour R. *Influence d'un couple axial sur le comportement dynamique des rotors flexibles, Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1985, 112 p.*
- [13] Lacroix J. *Comportement dynamique d 'un rotor au passage des vitesses critiques, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1988, 161 p.*
- [14] Al Majid A., Allezy A., Dufour R. *Metric of MD 0F systems in high transient motion, Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences, 26 September, 2003 Chicago, Illinois, USA, DETC2003/VIB-48613, 6 p.*

- [15] Bonello P., Brennan M. J. *Modelling the dynamical behaviour of a supercritical rotor on a flexible foundation using the mechanical impedance technique*, *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol. 239, n° 3, pp. 445-466.
- [16] Edwards S., Lees A. W., Friswell M. I. *Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single rundown*, *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 232, n° 5, pp. 963-992. 103
- [17] Samali B., Kim K. B., Yang J. N. *Random vibration of rotating machines under earthquake excitations*, *Journal of Engineering Mechanics*, June 1986, Vol. 112, n° 6, pp. 550-565.
- [18] Suarez L. E., Rohanimanesh M. S., Singh M. P. *Seismic response of rotating machines*, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, vol. 21, pp. 2 1-36.
- [19] Singh M. P., Chang T. S., Suarez L. E. *A response spectrum method for seismic design evaluation of rotating machines*, *ASME*, October 1992, vol. 114, pp. 454-460.
- [20] Subbiah R., Bhat R. B., Sankar T. S. *Response of rotors subjected to random support excitations*, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, October 1985, Vol. 107, pp. 453-459.
- [21] Beley-Sayettat A. *Effèt des dissymétries et effet sismique en dynamique des rotors*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1994, 159 p.
- [22] Campbell R. *Théorie Générale de l'Equation de Mathieu (et de quelques autres équations essentielles de la mécanique)*, Paris, Masson et Cie, 1955, 271p.
- [23] Berlioz A., Der Hagopian J., Dufour R., Draoui E. *Dynamic behavior of a drill-string. Experimental investigation of lateral instabilities*, *ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 1996, vol. 118, pp. 292-298.
- [24] Berlioz A., Dufour R., Ferraris G. *Etude des phénomènes vibratoires dans les trains de tige de forage pétrolier*, *Mécanique Industrielle et Matériaux*, 1996, vol. 49, n° 4, pp. 193-195.
- [25] Yamamoto T., Ishida Y. *On the vibrations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics*, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University*, May 1978, Vol. 30, n°1, pp. 59-109.
- [26] Yamamoto T., Ishida Y., Ikeda T. *Vibrations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics and unsymetry*, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University*, November 1983, Vol. 35, n°2, pp. 131-204.
- [27] Ishida Y., Murakami S., moue T. *Non stationary oscillations of a nonlinear rotor system with internal resonance during acceleration through critical speed*, *JSME International Journal, Series 3: Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry*, September 1992, Vol. 35, n° 3, pp. 360-368.
- [28] E1-Shafei A. *Perturbation solution of Reynolds equation for finite journal bearing*,

IFTToMM, In : “Proceedings of the sixth international conference on rotor dynamics”, Sidney, Australia, 30 September - 4 October 2002, pp. 588-598, ISBN 0-7334-1963-1.

[29] Kreider W., Nayfeh A. H., Chin C. M. Two-to-one internal resonances in buckled beams, ASME, Design Engineering Technical Conferences, 1995, DE-Vol. 84-1, Volume 3—Part A, pp. 345-356.

[30] Yamamoto T., Ota H., Kono K. On the vibrations of a rotor with rotating inequality and with variable rotating speed, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, May 1972, Vol. 24, n°1, pp. 1-80.

[31] Huang Y. M., Lin M. S. On the dynamics of a beam rotating at non constant speed, ASME, Rotating Machinery and Vehicle Dynamics, 1991, DE-Vol. 35, pp. 147-154.

[32] Nayfeh A. H., Mook D. T. Non-linear oscillations, New York : Wiley Interscience, 1979, 704p.

[33] Nayfeh A. H. Introduction to perturbation techniques, J Wiley, New-York, 1993, 519p, ISBN 0-471-31013-1.

[34] Ji Z., Zu J. W. Method of multiple scales for vibration of rotor-shaft systems with nonlinear bearing pedestal model, Journal of Sound and Vibration, 1998, Vol. 218, n° 2, pp. 293-305.

[35] Ganesan R., Sankar T. S. Resonant oscillations and stability of asymmetric rotors, ASME, Dynamics and vibration of Time-Varying Systems and Structures, 1993, DE-Vol. 56, pp. 131-137.

[36] Ganesan R., Sankar T. S. Non-stationary vibrations of rotor systems with non-symmetric clearance, ASME, Dynamics and vibration of Time-Varying Systems and Structures, 1993, DE-Vol. 56, pp. 295-301.

[37] Duchemin M., Berlioz A ; Ferraris G. Modélisation du comportement dynamique des rotors embarqués ; Actes du colloque de Giens 2001

[38] S. K. Sinha, “Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub,” Journal of Sound and Vibration, vol. 273, no. 4-5, pp. 875–919, 2004.

[39] M. J. Stallone, V. Gallardo, A. F. Storace, L. J. Bach, G. Black, and E. F. Gaffney. "Blade loss transient dynamic analysis of turbomachinery". American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 21(8):1134- 1138, (1983).

[40] F.C. Nelson. “A review of the origins and current status of rotor dynamics”. In IFTToMM - Sixth International Conference on Rotor Dynamics, Sydney, Australia, (2002).

[41] M. Imregun and D. J. Ewins. “Complex modes- Origins and limits”. In Proceedings of the 13th IMAC, (1995).



- [42] W. J. Chen. "Energy analysis to the design of rotor-bearing systems". *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119:411-417, (1997).
- [43] Swanson, E.E., Powel, C.D., Weissman, S., *A Practical Review of Rotating Machinery Critical Speeds and Modes, Sound and Vibration*, pp. 10-17, May 2005.
- [44] G. Genta. "A fast modal technique for the computation of the Campbell diagram of multi-degree-of-freedom rotors". *Journal of Sound and Vibration*, 155(3):385-402,(1992).
- [45] J. M. Vance. "Rotordynamics of turbomachinery". John Wiley & Sons, (1988).
- [46] Erich, Fredric F (1992) *Handbook of Rotor dynamics*, USA: McGraw-HILL, Inc
- [47] Domeij, Thomas, GRCRM, SIT AB, private conversations
- [48] Boyce, Meherwan P Ph.D (2004) *Gas Turbine Engineering Handbook*, Houston: Gulf Professional Publishing
- [49] T. Gmür. *Dynamique des Structures : « Analyse Modale Numérique »*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, (1997).
- [50] Jozef HERING. « *Cours de mécanique (Mécanique newtonienne)* » : Ed. O.P.U, (1990).
- [51] *shaft lateral and torsional vibration responses to blade(s) random vibration excitation (Mechanical Engineering Department University of Jordan, P.O. Box 13568, Amman 11942, Jordan)*

# Annexes

**Annexes:**

I- Détermination de la position de l'ailette

La position  $P_k$  de la  $k^{eme}$  ailette dans le repère initial

D'après la figure(III.3) (vue de face du disque aubagée)

Les ailettes se posent dans l'extrémité de disque,

On suppose qu'elles ont un déplacement  $\eta(s, t)$  qui dépende de temps et la longueur de l'ailette

Donc la position de l'ailette dans le repère initial est sa position dans son repère mobile par rapport au repère initial de l'ailette en suit par rapport au repère mobile de disque :

$$P_k = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_x \\ 0 & \theta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \theta_z & 0 \\ -\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi_k & 0 & -\sin \psi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_k & 0 & \cos \psi_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (r + s) \\ \eta \sin \beta \\ \eta \cos \beta \end{Bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{Bmatrix}$  : Vecteur déplacement de disque dans le repère initial

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_x \\ 0 & \theta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \theta_z & 0 \\ -\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  : Les matrices de transformation de repère mobile de disque au repère initial

$\begin{bmatrix} \cos \psi_k & 0 & -\sin \psi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_k & 0 & \cos \psi_k \end{bmatrix}$  : Matrice de transformation de repère mobile de l'ailette au repère initial de l'ailette

$P_{k/R_0}$

$$= \begin{cases} u + (r + s) \cos \psi_k - \eta \cos \beta \sin \psi_k + \theta_z \eta \sin \beta \\ \eta \sin \beta - \theta_z (r + s) \cos \psi_k - \theta_x (r + s) \sin \psi_k + \theta_z \eta \cos \beta \sin \psi_k - \theta_x \eta \cos \beta \cos \psi_k \\ w + (r + s) \sin \psi_k + \eta \cos \beta \cos \psi_k + \theta_x \eta \sin \beta - \theta_z \theta_x (r + s) \cos \psi_k + \theta_z \theta_x \eta \cos \beta \sin \psi_k \end{cases}$$

II- L'expression de l'énergie cinétique de l'ailette

$$T_b^i = \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) \vec{V}_{k/R_0}^2 ds + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \vec{\omega}_{Rb/R_0}^T I_{Rb/R_0} \vec{\omega}_{Rb/R_0} ds$$

$$T_b^i = \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (\dot{u}^2(y, t) + \dot{w}^2(y, t) + \dot{\eta}^2(s, t) - 2\dot{u}\dot{\eta} \cos \beta \sin \psi_k + 2\dot{w}\dot{\eta} \cos \beta \cos \psi_k) ds + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (\dot{\theta}_z^2 (r + s)^2 \cos^2 \psi_k + \dot{\theta}_x^2 (r + s)^2 \sin^2 \psi_k + 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x (r + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2\dot{\theta}_z \dot{\eta} (r+s) \sin \beta \cos \psi_k \\
& \quad + 2\dot{\theta}_x \dot{\eta} (r+s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2\Omega (\dot{u} \cos \psi_k \\
& \quad + \dot{w} \sin \psi_k) \eta \cos \beta) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2(r+s)\Omega (\dot{w} \cos \psi_k \\
& \quad - \dot{u} \sin \psi_k) + (r+s)^2 \Omega^2) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2(r \\
& \quad + s)^2 \Omega (\dot{\theta}_z \theta_z \cos \psi_k \sin \psi_k \\
& \quad - \dot{\theta}_x \theta_x \cos \psi_k \sin \psi_k \\
& \quad - \dot{\theta}_z \theta_x \cos \psi_k \\
& \quad - \dot{\theta}_x \theta_z \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) \left( 2(r \\
& \quad + s)\Omega \left( (\dot{\eta} \theta_z \\
& \quad + \eta \dot{\theta}_z) \sin \beta \sin \psi_k \right. \right. \\
& \quad - (\dot{\eta} \theta_x + \eta \dot{\theta}_x) \sin \beta \cos \psi_k \\
& \quad \left. \left. + \dot{\eta} \cos \beta \right) \right) ds \\
& - \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (\Omega^2 (r+s) (2\eta \theta_x \sin \beta \sin \psi_k \\
& \quad + 2\eta \theta_z \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
& - \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) \left( \Omega^2 (r+s)^2 (\theta_z^2 \cos^2 \psi_k \right. \\
& \quad + \theta_x^2 \sin^2 \psi_k \\
& \quad \left. + 2\theta_z \theta_x \cos \psi_k \sin \psi_k) \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b \left( \theta_z^2 \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k \right. \\
& \quad + \dot{\theta}_x^2 \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k + \dot{\theta}_b^2 \\
& \quad + 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_b \sin \beta \cos \psi_k \\
& \quad \left. + 2\dot{\theta}_x \dot{\theta}_b \sin \beta \sin \psi_k \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b \left( 2\Omega (\dot{\theta}_x (\theta_z \sin \psi_k \right. \\
& \quad - \theta_x \cos \psi_k) \sin^2 \beta \sin \psi_k \\
& \quad \left. + \dot{\theta}_x \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k) \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b \left( 2\Omega (\dot{\theta}_z (\theta_z \sin \psi_k \right. \\
& \quad - \theta_x \cos \psi_k) \sin^2 \beta \cos \psi_k \\
& \quad \left. + \dot{\theta}_z \sin \beta \cos \beta \cos \psi_k) \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b \left( 2\Omega (\dot{\theta}_b \cos \beta \right. \\
& \quad + \dot{\theta}_b \theta_z \sin \beta \sin \psi_k \\
& \quad \left. - \dot{\theta}_b \theta_x \sin \beta \cos \psi_k) \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b \left( \Omega^2 (\theta_z^2 \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k \right. \\
& \quad + \theta_x^2 \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k \\
& \quad \left. + \cos^2 \beta) \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (2\Omega^2 (\theta_z \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k \\
& \quad - \theta_x \cos \beta \sin \beta \cos \psi_k \\
& \quad - \theta_z \theta_x \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z \left( \dot{\theta}_z^2 \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k \right. \\
& \quad + \dot{\theta}_x^2 \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k \\
& \quad \left. + 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z \left( 2\Omega (\dot{\theta}_x (\theta_z \sin \psi_k \right. \\
& \quad - \theta_x \cos \psi_k) \cos^2 \beta \sin \psi_k \\
& \quad \left. - \dot{\theta}_x \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k) \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z \left( 2\Omega (\dot{\theta}_z (\theta_z \sin \psi_k \right. \\
& \quad - \theta_x \cos \psi_k) \cos^2 \beta \cos \psi_k \\
& \quad \left. - \dot{\theta}_z \sin \beta \cos \beta \cos \psi_k) \right) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z \left( \Omega^2 (\theta_z^2 \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k \right. \\
& \quad + \theta_x^2 \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k \\
& \quad \left. + \sin^2 \beta) \right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z (2\Omega^2 (\theta_z \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k \\
 & - \theta_x \sin \beta \cos \beta \cos \psi_k \\
 & + \theta_z \theta_x \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (\dot{\theta}_z^2 \sin^2 \psi_k + \dot{\theta}_x^2 \cos^2 \psi_k \\
 & - 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (2\Omega (\dot{\theta}_x (\theta_z \cos \psi_k \\
 & + \theta_x \sin \psi_k) \cos \psi_k \\
 & + \dot{\theta}_x \theta_b \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (2\Omega (\dot{\theta}_z (\theta_z \cos \psi_k \\
 & + \theta_x \sin \psi_k) \sin \psi_k \\
 & + \dot{\theta}_z \theta_b \sin \beta \sin \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (\Omega^2 (\theta_z^2 \cos^2 \psi_k + \theta_x^2 \sin^2 \psi_k \\
 & + \theta_b^2 \sin^2 \beta)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (2\Omega^2 (\theta_b \theta_z \sin \beta \cos \psi_k \\
 & + \theta_b \theta_x \sin \beta \sin \psi_k \\
 & + \theta_z \theta_x \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

III- L'expression de l'énergie cinétique totale et de l'énergie de déformation totale :

Après l'application de la méthode Rayleigh Ritz L'expression de l'énergie cinétique totale et de l'énergie de déformation totale devient de la forme suivant :

Avec

$$u(y, t) = V_m(y)q_{1m} \quad \dot{u}(y, t) = V_m(y)\dot{q}_{1m} \quad \dot{\theta}_z = V'_m(y)\dot{q}_{1m} \quad \theta_z = V'_m(y)q_{1m}$$

$$w(y, t) = V_m(y)q_{2m} \quad \dot{w}(y, t) = V_m(y)\dot{q}_{2m} \quad \dot{\theta}_x = V'_m(y)\dot{q}_{2m} \quad \theta_x = V'_m(y)q_{2m}$$

$$\eta(s, t) = Y_n(s)q_{nNtot} \quad \dot{\eta}(s, t) = Y_n(s)\dot{q}_{nNtot} \quad \dot{\theta}_b = Y'_n(s)\dot{q}_{nNtot} \quad \theta_b = Y'_m(y)q_{nNtot}$$

$$Td = (\dot{q}_{1m}^2 + \dot{q}_{2m}^2) \left[ \frac{1}{2} m_d V^2_m(li) + \frac{1}{2} I_{dx} V'^2_m(li) \right] + \frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2 - I_{dy} \Omega V'^2_m(li) \dot{q}_{1m} q_{2m}$$

$$\begin{aligned}
 T_a = & \frac{1}{2} \rho S_a \int_0^L V^2_m(y) (\dot{q}_{1m}^2 + \dot{q}_{2m}^2) dy + \rho \frac{I_a}{2} \int_0^L V'^2_m(y) (\dot{q}_{1m}^2 + \dot{q}_{2m}^2) dy + \rho I_a L \Omega^2 \\
 & - 2\rho I_a \Omega \int_0^L V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} q_{2m} dy
 \end{aligned}$$

$$T_{Bal} = m_u \Omega d V_m(y) (\dot{q}_{1m} \sin \Omega t - \dot{q}_{2m} \cos \Omega t)$$

$$\begin{aligned}
 T_b^i & = \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (V^2_m(y) (\dot{q}_{1m}^2 + \dot{q}_{2m}^2) \\
 & + Y_n^2(s) \dot{q}_{nNtot}^2 \\
 & - 2V_m(y) \dot{q}_{1m} Y_n(s) \dot{q}_{nNtot} \cos \beta \sin \psi_k \\
 & + 2V_m(y) \dot{q}_{2m} Y_n(s) \dot{q}_{nNtot} \cos \beta \cos \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (V'^2_m(y) \dot{q}_{1m}^2 (r \\
 & + s)^2 \cos^2 \psi_k \\
 & + V'^2_m(y) \dot{q}_{2m}^2 (r \\
 & + s)^2 \sin^2 \psi_k \\
 & + 2V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} \dot{q}_{1m} (r \\
 & + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2V'_m(y) Y'_n(s) \dot{q}_{nNtot} \dot{q}_{1m}(r \\
& + s) \sin \beta \cos \psi_k \\
& + 2V'_m(y) Y'_n(s) \dot{q}_{nNtot} \dot{q}_{2m}(r \\
& + s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2\Omega V_m(y) Y_n(s) (\dot{q}_{1m} \cos \psi_k \\
& + \dot{q}_{2m} \sin \psi_k) q_{nNtot} \cos \beta) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2(r+s)\Omega V_m(y) (\dot{q}_{2m} \cos \psi_k \\
& - \dot{q}_{1m} \sin \psi_k) \\
& + (r+s)^2 \Omega^2) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2(r \\
& + s)^2 \Omega V'^2_m(y) (\dot{q}_{1m} q_{1m} \cos \psi_k \sin \psi_k \\
& - \dot{q}_{2m} q_{2m} \cos \psi_k \sin \psi_k - \dot{q}_{1m} q_{2m} \cos \psi_k \\
& - \dot{q}_{2m} q_{1m} \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (2(r \\
& + s)\Omega(Y_n(s)V'_m(y)(q_{1m}\dot{q}_{nNtot} \\
& + \dot{q}_{1m}q_{nNtot}) \sin \beta \sin \psi_k \\
& - Y_n(s)V'_m(y)(q_{2m}\dot{q}_{nNtot} \\
& + \dot{q}_{2m}q_{nNtot}) \sin \beta \cos \psi_k \\
& + Y_n(s)\dot{q}_{nNtot} \cos \beta) ds \\
& - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega^2(r \\
& + s)Y_n(s)V'_m(y)(q_{2m}q_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k \\
& + q_{1m}q_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} \frac{1}{2} (\rho_b S_b) (\Omega^2(r \\
& + s)^2 V'^2_m(y) (q^2_{1m} \cos^2 \psi_k + q^2_{2m} \sin^2 \psi_k \\
& + 2q_{1m}q_{2m} \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (V'^2_m(y) \dot{q}^2_{1m} \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k \\
& + V'^2_m(y) \dot{q}^2_{2m} \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k \\
& + Y'^2_m(s) \dot{q}^2_{nNtot} \\
& + 2V'_m(y) Y'_n(s) \dot{q}_{nNtot} \dot{q}_{1m} \sin \beta \cos \psi_k \\
& + 2V'_m(y) Y'_n(s) \dot{q}_{nNtot} \dot{q}_{2m} \sin \beta \sin \psi_k) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (2V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} \dot{q}_{2m} \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (2\Omega(V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (q_{1m} \sin \psi_k \\
& - q_{2m} \cos \psi_k) \sin^2 \beta \sin \psi_k \\
& + V'_m(y) \dot{q}_{2m} \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (2\Omega(V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (q_{1m} \sin \psi_k \\
& - q_{2m} \cos \psi_k) \sin^2 \beta \cos \psi_k \\
& + V'_m(y) \dot{q}_{1m} \sin \beta \cos \beta \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (2\Omega(Y'_n(s) \dot{q}_{nNtot} \cos \beta \\
& + Y'_n(s) V'_m(y) \dot{q}_{nNtot} q_{1m} \sin \beta \sin \psi_k \\
& - Y'_n(s) V'_m(y) \dot{q}_{nNtot} q_{2m} \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
& \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (\Omega^2(V'^2_m(y) q^2_{1m} \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k \\
& + V'^2_m(y) q^2_{2m} \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k + \cos^2 \beta)) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (2\Omega^2(V'_m(y) q_{1m} \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k \\
& - V'_m(y) q_{2m} \cos \beta \sin \beta \cos \psi_k \\
& - V'^2_m(y) q_{2m} q_{1m} \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z V'^2_m(y) (\dot{q}^2_{1m} \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k \\
& + \dot{q}^2_{2m} \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k \\
& + 2\dot{q}_{1m} \dot{q}_{2m} \cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z (2\Omega(V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (q_{1m} \sin \psi_k \\
& - q_{2m} \cos \psi_k) \cos^2 \beta \sin \psi_k \\
& - \dot{q}_{2m} \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z (2\Omega(V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (q_{1m} \sin \psi_k \\
& - q_{2m} \cos \psi_k) \cos^2 \beta \cos \psi_k \\
& - \dot{q}_{1m} \sin \beta \cos \beta \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z (\Omega^2(V'^2_m(y) q^2_{1m} \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k \\
& + V'^2_m(y) q^2_{2m} \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k + \sin^2 \beta)) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_z (2\Omega^2 (V'_m(y) q_{1m} \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k \\
 & - V'_m(y) q_{2m} \sin \beta \cos \beta \cos \psi_k \\
 & + V'^2_m(y) q_{1m} q_{2m} \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y V'^2_m(y) (\dot{q}^2_{1m} \sin^2 \psi_k \\
 & \quad + \dot{q}^2_{2m} \cos^2 \psi_k \\
 & \quad - 2\dot{q}_{1m} \dot{q}_{2m} \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (2\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (q_{1m} \cos \psi_k \\
 & + q_{2m} \sin \psi_k) \cos \psi_k \\
 & + V'_m(y) Y'_n(y) \dot{q}_{2m} q_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (2\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (q_{1m} \cos \psi_k \\
 & + q_{2m} \sin \psi_k) \sin \psi_k \\
 & + V'_m(y) Y'_n(y) \dot{q}_{1m} q_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (\Omega^2 (V'^2_m(y) q^2_{1m} \cos^2 \psi_k \\
 & \quad + V'^2_m(y) q^2_{2m} \sin^2 \psi_k \\
 & \quad + Y'^2_n(y) q^2_{nNtot} \sin^2 \beta)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (2\Omega^2 (Y'_m(y) V'_m(y) q_{1m} q_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k \\
 & + Y'_m(y) V'_m(y) q_{2m} q_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k \\
 & + V'^2_m(y) q_{1m} q_{2m} \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

$$U_a = \frac{EIa}{2} \int_0^L V'^2_m(y) (q^2_{1m} + q^2_{2m}) dy$$

$$U_b = \frac{E_b I_b}{2} \int_0^{lb} Y'^2_n(s) [q^2_{nNtot}] ds$$

IV- Les équations du mouvement :

L'équation (II.6) nous donne le système des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (1) \dots \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1m}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{1m}} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}_{1m}} = 0 \\
 (2) \dots \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{2m}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{2m}} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}_{2m}} = 0 \\
 (3) \dots \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{nNtot}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{nNtot}} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}_{nNtot}} = 0
 \end{array} \right.$$

(1) ... :

$$\begin{aligned}
& (\ddot{q}_{1m})[m_d V_m^2(li) + I_{dx} V_m'^2(li)] \\
& \quad - I_{dy} \Omega V_m'^2(li) \dot{q}_{2m} \\
& \rho S_a \int_0^L V_m^2(y) (\ddot{q}_{1m}) dy \\
& \quad + \rho I_a \int_0^L V_m'^2(y) (\ddot{q}_{1m}) dy \\
& \quad - 2\rho I_a \Omega \int_0^L V_m'^2(y) \dot{q}_{2m} dy \\
& + m_u \Omega^2 dV_m(y) (\cos \Omega t) \\
& + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V_m^2(y) (\ddot{q}_{1m}^2) \\
& - V_m(y) Y_n(s) \ddot{q}_{nNtot} \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V_m'^2(y) \ddot{q}_{1m}(r+s)^2 \cos^2 \psi_k \\
& \quad + V_m'^2(y) \ddot{q}_{2m}(r \\
& \quad + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V_m'(y) Y_n'(s) \ddot{q}_{nNtot}(r \\
& \quad + s) \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega V_m(y) Y_n(s) (\cos \psi_k) \dot{q}_{nNtot} \cos \beta) ds \\
& + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r \\
& + s)^2 \Omega V_m'^2(y) (\dot{q}_{1m} \cos \psi_k \sin \psi_k \\
& - \dot{q}_{2m} \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r \\
& + s) \Omega (Y_n(s) V_m'(y) (\dot{q}_{nNtot}) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V_m'^2(y) \ddot{q}_{1m} \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k \\
& + V_m'(y) Y_n'(s) \ddot{q}_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V_m'^2(y) \ddot{q}_{2m} \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (V_m'^2(y) (\dot{q}_{1m} \sin \psi_k \\
& - \dot{q}_{2m} \cos \psi_k) \sin^2 \beta \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \rho_b I_z V_m'^2(y) (\ddot{q}_{1m} \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k \\
& + \ddot{q}_{2m} \cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega (V_m'^2(y) (\dot{q}_{1m} \sin \psi_k \\
& - \dot{q}_{2m} \cos \psi_k) \cos^2 \beta \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} \rho_b I_y V_m'^2(y) (\ddot{q}_{1m} \sin^2 \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V_m'^2(y) (\dot{q}_{1m} \cos \psi_k \\
& + \dot{q}_{2m} \sin \psi_k) \sin \psi_k \\
& + V_m'(y) Y_n'(y) \dot{q}_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
& + EI a \int_0^L V_m''^2(y) (q_{1m}) dy \\
& - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r \\
& + s)^2 \Omega V_m'^2(y) (\dot{q}_{1m} \cos \psi_k \sin \psi_k \\
& - \dot{q}_{2m} \cos \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r \\
& + s) \Omega (Y_n(s) V_m'(y) (\dot{q}_{nNtot}) \sin \beta \sin \psi_k \\
& -)) ds \\
& + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega^2 (r \\
& + s) Y_n(s) V_m'(y) (\dot{q}_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
& + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega^2 (r \\
& + s)^2 V_m'^2(y) (q_{1m} \cos^2 \psi_k \\
& + q_{2m} \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (V_m'^2(y) \dot{q}_{2m} (\sin \psi_k) \sin^2 \beta \sin \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (V_m'^2(y) \dot{q}_{1m} (\sin \psi_k) \sin^2 \beta \cos \psi_k) ds \\
& - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (Y_n'(s) V_m'(y) \dot{q}_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k) ds
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega^2 (V'^2_m(y) q_{1m} \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k)) ds & + \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega^2 (V'_m(y) \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega^2 (V'_m(y) \sin \beta \cos \beta \sin \psi_k & + V'^2_m(y) q_{2m} \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
 & - V'^2_m(y) q_{2m} \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (\cos \psi_k) \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (\sin \psi_k) \cos^2 \beta \sin \psi_k)) ds & + \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (\cos \psi_k) \sin \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (\sin \psi_k) \cos^2 \beta \cos \psi_k)) ds & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega^2 (V'^2_m(y) q_{1m} \cos^2 \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega^2 (V'^2_m(y) q_{1m} \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k)) ds & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega^2 (Y'_m(y) V'_m(y) q_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k \\
 & & + V'^2_m(y) q_{2m} \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

(2) ... :

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{q}_{2m}) [m_d V^2_m(li) + I_{dx} V'^2_m(li)] & + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'^2_m(y) \ddot{q}_{2m} \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k \\
 & \rho S_a \int_0^L V^2_m(y) (\ddot{q}_{2m}) dy & + V'_m(y) Y'_n(s) \ddot{q}_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
 & + \rho I_a \int_0^L V'^2_m(y) (\ddot{q}_{2m}) dy & + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'^2_m(y) \ddot{q}_{1m} \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 & + m_u \Omega^2 dV_m(y) (\sin \Omega t) & + \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (V'^2_m(y) (\dot{q}_{1m} \sin \psi_k \\
 & \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V^2_m(y) (\ddot{q}_{2m})) & - \dot{q}_{2m} \cos \psi_k) \sin^2 \beta \sin \psi_k)) ds \\
 & + V_m(y) Y_n(s) \ddot{q}_{nNtot} \cos \beta \cos \psi_k) ds & + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'^2_m(y) (\ddot{q}_{2m} \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'^2_m(y) \ddot{q}_{2m} (r & + \ddot{q}_{1m} \cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k)) ds \\
 & + s)^2 \sin^2 \psi_k & + \int_0^{lb} \rho_b I_y V'^2_m(y) (\ddot{q}_{2m} \cos^2 \psi_k \\
 & + V'^2_m(y) \ddot{q}_{1m} (r & - \ddot{q}_{1m} \sin \psi_k \cos \psi_k)) ds \\
 & + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds & + \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'^2_m(y) (\dot{q}_{1m} \cos \psi_k \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_m(y) Y'_n(s) \ddot{q}_{nNtot} (r & + \dot{q}_{2m} \sin \psi_k) \cos \psi_k \\
 & + s) \sin \beta \sin \psi_k) ds & + V'_m(y) Y'_n(y) \dot{q}_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega V_m(y) Y_n(s) (\sin \psi_k) \dot{q}_{nNtot} \cos \beta) ds & + I_{dy} \Omega V'^2_m(li) \dot{q}_{1m} \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r & + 2\rho I_a \Omega \int_0^L V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} dy \\
 & + s)^2 \Omega V'^2_m(y) (-\dot{q}_{2m} \cos \psi_k \sin \psi_k & + EIa \int_0^L V'^2_m(y) (q_{2m}) dy \\
 & - \dot{q}_{1m} \cos \psi_k) ds & \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r & \\
 & + s) \Omega (-Y_n(s) V'_m(y) (\dot{q}_{nNtot}) \sin \beta \cos \psi_k)) ds &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r + s)^2 \Omega V'^2_m(y) (-\dot{q}_{2m} \cos \psi_k \sin \psi_k - \dot{q}_{1m} \cos \psi_k) ds \\
 & - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r + s) \Omega (-Y_n(s) V'_m(y) (\dot{q}_{nNtot}) \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega^2 (r + s) Y_n(s) V'_m(y) (q_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega^2 (r + s)^2 V'^2_m(y) (q_{2m} \sin^2 \psi_k + q_{1m} \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (-\cos \psi_k) \sin^2 \beta \sin \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (-\cos \psi_k) \sin^2 \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (-Y'_n(s) V'_m(y) \dot{q}_{nNtot} \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega^2 (V'^2_m(y) q_{2m} \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega^2 (-V'_m(y) \cos \beta \sin \beta \cos \psi_k - V'^2_m(y) q_{1m} \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (-\cos \psi_k) \cos^2 \beta \sin \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (-\cos \psi_k) \cos^2 \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega^2 (V'^2_m(y) q_{2m} \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_z (\Omega^2 (-V'_m(y) \sin \beta \cos \beta \cos \psi_k + V'^2_m(y) q_{1m} \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{2m} (\sin \psi_k) \cos \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'^2_m(y) \dot{q}_{1m} (\sin \psi_k) \sin \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega^2 (V'^2_m(y) q_{2m} \sin^2 \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega^2 (Y'_m(y) V'_m(y) q_{nNtot} \sin \beta \sin \psi_k + V'^2_m(y) q_{1m} \cos \psi_k \sin \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

(3) ... :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (Y^2_n(s) \ddot{q}_{nNtot} - V_m(y) \ddot{q}_{1m} Y_n(s) \cos \beta \sin \psi_k + V_m(y) \ddot{q}_{2m} Y_n(s) \cos \beta \cos \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_m(y) Y'_n(s) \ddot{q}_{1m} (r + s) \sin \beta \cos \psi_k + V'_m(y) Y'_n(s) \ddot{q}_{2m} (r + s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r + s) \Omega (Y_n(s) V'_m(y) (\dot{q}_{1m}) \sin \beta \sin \psi_k - Y_n(s) V'_m(y) (\dot{q}_{2m}) \sin \beta \cos \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_b (Y'^2_m(s) \ddot{q}_{nNtot} + V'_m(y) Y'_n(s) \ddot{q}_{1m} \sin \beta \cos \psi_k + V'_m(y) Y'_n(s) \ddot{q}_{2m} \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (Y'_n(s) V'_m(y) \dot{q}_{1m} \sin \beta \sin \psi_k - Y'_n(s) V'_m(y) \dot{q}_{2m} \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & E_b I_b \int_0^{lb} Y''^2_n(s) [q_{nNtot}] ds \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega V_m(y) Y_n(s) (\dot{q}_{1m} \cos \psi_k + \dot{q}_{2m} \sin \psi_k) \cos \beta) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{lb} (\rho_b S_b) ((r + s) \Omega (Y_n(s) V'_m(y) (\dot{q}_{1m}) \sin \beta \sin \psi_k \\
 & - Y_n(s) V'_m(y) (\dot{q}_{2m}) \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (\Omega^2 (r + s) Y_n(s) V'_m(y) (q_{2m} \sin \beta \sin \psi_k \\
 & + q_{1m} \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'_m(y) Y'_n(y) \dot{q}_{2m} \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'_m(y) Y'_n(y) \dot{q}_{1m} \sin \beta \sin \psi_k)) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega^2 (Y'^2_n(y) q_{nNtot} \sin^2 \beta)) ds \\
 & - \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y (2 \Omega^2 (Y'_m(y) V'_m(y) q_{1m} \sin \beta \cos \psi_k \\
 & + Y'_m(y) V'_m(y) q_{2m} \sin \beta \sin \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

V- Les éléments des matrices de système matriciel d'équilibre dynamique

$M_{ij}$  sont les éléments de la matrice masse

$C_{ij}$  sont les éléments de la matrice gyroscopique

$K_{ij}$  sont les éléments de la matrice raideur

L'équation de mouvement :

$$[M][\ddot{q}_i] + [C][\dot{q}_i] + [K][q_i] = [F]$$

$$\begin{aligned}
 M(1,1) = & [m_d V'^2_0(li) + I_{dx} V'^2_0(li)] + \rho S_a \int_0^L V'^2_0(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'^2_0(y) dy \\
 & + \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'^2_0(li)) ds + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'^2_0(li) (r + s)^2 \cos^2 \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'^2_0(li) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'^2_0(li) (\cos^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_y V'^2_0(li) (\sin^2 \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(1,2) = & \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'^2_0(li) (r + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'^2_0(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'^2_0(li) (\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y V'^2_0(li) (\sin \psi_k \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(1,2m + 1) = & [m_d V_0(li) V_m(li) + I_{dx} V'^2_m(li)] + \rho S_a \int_0^L V_0(y) V_m(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'_0(y) V'_m(y) dy \\
 & + \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) V_0(li) V_m(li) ds + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_0(li) V'_m(li) (r + s)^2 \cos^2 \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'_0(li) V'_m(li) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li) V'_m(li) (\cos^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds \\
 & + \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_0(li) V'_m(li) (\sin^2 \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(1,2m+2) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_0(li) V'_m(li) (r+s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'_0(li) V'_m(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li) V'_m(li) (\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_0(li) V'_m(li) (\sin \psi_k \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(1,2mtot + c) + (k-1)ntot &= \int_0^{lb} -(\rho_b S_b) (V_0(li) Y_{(c-2)}(s) \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_0(li) Y'_{(c-2)}(s) (r+s) \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'_0(y) Y'_{(c-2)}(s) \sin \beta \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2,1) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'^2_0(li) (r+s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'^2_0(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'^2_0(li) (\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y V'^2_0(li) (\sin \psi_k \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2,2) &= [m_d V^2_0(li) + I_{dx} V'^2_0(li)] + \rho S_a \int_0^L V^2_0(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'^2_0(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V^2_0(li) ds) + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'^2_0(li) (r+s)^2 \cos^2 \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'^2_0(li) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'^2_0(li) (\cos^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_y V'^2_0(li) (\sin^2 \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2,2m+1) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_0(li) V'_m(li) (r+s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'_0(li) V'_m(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li) V'_m(li) (\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_0(li) V'_m(li) (\sin \psi_k \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2,2m+2) &= [m_d V_0(li) V_m(li) + I_{dx} V'^2_m(li)] + \rho S_a \int_0^L V_0(y) V_m(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'_0(y) V'_m(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) V_0(li) V_m(li) ds + \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_0(li) V'_m(li) (r+s)^2 \cos^2 \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b (V'_0(li) V'_m(li) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li) V'_m(li) (\cos^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_0(li) V'_m(li) (\sin^2 \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2,2mtot + c + (k - 1)ntot) &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V_0(y)Y_{(c-2)}(s) \cos \beta \cos \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_0(y)Y'_{(c-2)}(s)(r + s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_m(y)Y'_{(c-2)}(s) \sin \beta \sin \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2m + 1,1) &= [m_d V_0(li)V_m(li) + I_{dx} V'^2_m(li)] + \rho S_a \int_0^L V_0(y)V_m(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'_0(y)V'_m(y) dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)V_0(li)V_m(li) ds + \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_0(li)V'_m(li)(r + s)^2 \cos^2 \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_0(li)V'_m(li)(\sin^2 \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2m + 1,2) &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_0(li)V'_m(li)(r + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
 &- \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_y V'_0(li)V'_m(li)(\sin \psi_k \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2m + 1,2q + 1) &= [m_d V_q(li)V_m(li) + I_{dx} V'^q_q(li)V'_m(li)] + \rho S_a \int_0^L V_q(y)V_m(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'_q(y)V'_m(li) dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)V_q(li)V_m(li) ds + \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_q(li)V'_m(li)(r + s)^2 \cos^2 \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_q(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'^q_q(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_y V'^q_q(li)V'_m(li)(\sin^2 \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(2m + 1,2q + 2) &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_q(li)V'_m(li)(r + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_q(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_z V'^q_q(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_y V'^q_q(li)V'_m(li)(\sin \psi_k \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$M(2m + 1, 2mtot + c + (k - 1)ntot)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{lb} -(\rho_b S_b)(V_m(li)Y_{(c-2)}(s) \cos \beta \sin \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_m(li)Y'_{(c-2)}(s)(r + s) \sin \beta \cos \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_m(y)Y'_{(c-2)}(s) \sin \beta \cos \psi_k) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(2m + 2, 1) &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_0(li)V'_m(li)(r + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_0(li)V'_m(li)(\sin \psi_k \cos \psi_k) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(2m + 2, 2) &= [m_d V_0(li)V_m(li) + I_{dx} V'^2_m(li)] + \rho S_a \int_0^L V_0(y)V_m(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'_0(y)V'_m(y) dy \\ &+ \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)V_0(li)V_m(li) ds + \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_0(li)V'_m(li)(r + s)^2 \cos^2 \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_0(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \cos^2 \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_0(li)V'_m(li)(\sin^2 \psi_k) ds \end{aligned}$$

$$M(2m + 2, 2q + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_q(li)V'_m(li)(r + s)^2 \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_q(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_q(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \sin \psi_k \cos \psi_k) ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_q(li)V'_m(li)(\sin \psi_k \cos \psi_k) ds \end{aligned}$$

$$M(2m + 2, 2q + 2) = [m_d V_q(li)V_m(li) + I_{dx} V'^2_q(li)V'_m(li)] + \rho S_a \int_0^L V_q(y)V_m(y) dy + \rho I_a \int_0^L V'_q(y)V'_m(y) dy$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b)V_q(li)V_m(li) ds + \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_q(li)V'_m(li)(r + s)^2 \sin^2 \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_q(li)V'_m(li) \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z V'_q(li)V'_m(li)(\cos^2 \beta \sin^2 \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_y V'_q(li)V'_m(li)(\cos^2 \psi_k) ds \end{aligned}$$

$$M(2m + 2, 2mtot + c + (k - 1)ntot)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V_0(y)Y_{(c-2)}(s) \cos \beta \cos \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(V'_0(y)Y'_{(c-2)}(s)(r + s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\ &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b(V'_m(y)Y'_{(c-2)}(s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M(2mtot + p + (k - 1)ntot, 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (-V_0(y) Y_{(p-2)}(s) \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_0(y) Y'_{(p-2)}(s) (r + s) \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (V'_0(y) Y'_{(p-2)}(s) \sin \beta \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2) \\
 &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V_0(y) Y_{(p-2)}(s) \cos \beta \cos \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (+V'_0(y) Y'_{(p-2)}(s) (r + s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (V'_0(y) Y'_{(p-2)}(s) \sin \beta \sin \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2q + 1) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (-V_q(y) Y_{(p-2)}(s) \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V'_q(y) Y'_{(p-2)}(s) (r + s) \sin \beta \cos \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (V'_q(y) Y'_{(p-2)}(s) \sin \beta \cos \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2q + 2) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (V_q(y) Y_{(p-2)}(s) \cos \beta \cos \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} (\rho_b S_b) (+V'_q(y) Y'_{(p-2)}(s) (r + s) \sin \beta \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \frac{1}{2} \rho_b I_b (V'_q(y) Y'_{(p-2)}(s) \sin \beta \sin \psi_k) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2mtot + c + (k - 1)ntot) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) Y_{(p-2)}(s) Y_{(c-2)}(s) ds + \int_0^{lb} \rho_b I_b Y'_{(p-2)}(s) Y'_{(c-2)}(s) ds
 \end{aligned}$$

$$C(1,1) = \sum_{i=1}^{nbpalier} cxxi(amortis) V_0(yi_{palier}) V_0(yi_{palier})$$

$$\begin{aligned}
 C(1,2) &= -I_{dy} \Omega V_0^2(li) - 2\rho I_a \Omega \int_0^L V_0^2(y) dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{Ntot} - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V_0^2(li) \sin^2 \beta ds - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V_0^2(li) \cos^2 \beta ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V_0^2(li) ds
 \end{aligned}$$

$$C(1,2m + 1) = \sum_{i=1}^{nbpalier} cxxi(amortis) V_m(yi_{palier}) V_0(yi_{palier})$$

$$\begin{aligned}
 C(1,2m+2) &= -I_{dy}\Omega V'_0(li)V'_m(li) - 2\rho I_a\Omega \int_0^L v'_0(y)V'_m(y)dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta ds - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V'_0(li)V'_m(li) \cos^2 \beta ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_0(li)V'_m(li) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(1,2mtot + (c) + (k-1)ntot) &= - \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(\Omega V_0(y)Y_{(c-2)}(s)(\cos \psi_k) \cos \beta) ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega(V'_0(y)Y'_{(c-2)}(y) \sin \beta \sin \psi_k)) ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega(Y'_{(c-2)}(s)V'_0(y) \sin \beta \sin \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(2,1) &= I_{dy}\Omega V'^2_0(li) + 2\rho I_a\Omega \int_0^L V'^2_0(y)dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V'^2_0(li) \sin^2 \beta ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V'^2_0(li) \cos^2 \beta ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'^2_0(li) ds
 \end{aligned}$$

$$C(2,2) = \sum_{i=1}^{nbpalier} czzi(amortis)V_0(yi_{palier})V_0(yi_{palier})$$

$$\begin{aligned}
 C(2,2m+1) &= I_{dy}\Omega V'_0(li)V'_m(li) + 2\rho I_a\Omega \int_0^L v'_0(y)V'_m(y)dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V'_0(li)V'_m(li) \cos^2 \beta ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_0(li)V'_m(li) ds
 \end{aligned}$$

$$C(2,2m+2) = \sum_{i=1}^{nbpalier} czzi(amortis)V_m(yi_{palier})V_0(yi_{palier})$$

$$\begin{aligned}
 C(2,2mtot + c + (k-1)ntot) &= - \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(\Omega V_m(y)Y_{(c-2)}(s) \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega(V'_0(y)Y'_{(c-2)}(y) \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega(Y'_{(c-2)}(s)V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

$$C(2m+1,1) = \sum_{i=1}^{nbpalier} cxxi(amortis)V_m(yi_{palier})V_0(yi_{palier})$$



$$\begin{aligned}
 C(2m + 1,2) &= -I_{dy}\Omega V'_0(li)V'_m(li) - 2\rho I_a\Omega \int_0^L v'_0(y)V'_m(y)dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_{tot}} - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta ds - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V'_0(li)V'_m(li) \cos^2 \beta ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_0(li)V'_m(li) ds \\
 C(2m + 1,2q + 1) &= \sum_{i=1}^{nbpalier} cxxi(amortis)V_m(yi_{palier})V_q(yi_{palier})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(2m + 1,2q + 2) &= -I_{dy}\Omega V'_q(li)V'_m(li) - 2\rho I_a\Omega \int_0^L v'_q(y)V'_m(y)dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_{tot}} - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V'_q(li)V'_m(li) \sin^2 \beta ds - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V'_q(li)V'_m(li) \cos^2 \beta ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_q(li)V'_m(li) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(2m + 1,2mtot + c + (k - 1)ntot) &= - \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(\Omega V_0(y)Y_{(c-2)}(s)(\cos \psi_k) \cos \beta) ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'_0(y)Y'_{(c-2)}(y) \sin \beta \sin \psi_k)) ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (Y'_{(c-2)}(s)V'_0(y) \sin \beta \sin \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(2m + 2,1) &= I_{dy}\Omega V'_0(li)V'_m(li) + 2\rho I_a\Omega \int_0^L v'_0(y)V'_m(y)dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V'_0(li)V'_m(li) \sin^2 \beta ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V'_0(li)V'_m(li) \cos^2 \beta ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_0(li)V'_m(li) ds \\
 C(2m + 2,2) &= \sum_{i=1}^{nbpalier} czzi(amortis)V_m(yi_{palier})V_0(yi_{palier})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(2m + 2,2q + 1) &= I_{dy}\Omega V'_q(li)V'_m(li) + 2\rho I_a\Omega \int_0^L v'_q(y)V'_m(y)dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega V'_q(li)V'_m(li) \sin^2 \beta ds + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega V'_q(li)V'_m(li) \cos^2 \beta ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_q(li)V'_m(li) ds
 \end{aligned}$$

$$C(2m + 2,2q + 2) = \sum_{i=1}^{nbpalier} czzi(amortis)V_m(yi_{palier})V_q(yi_{palier})$$

$$\begin{aligned}
 C(2m + 2,2mtot + c + (k - 1)ntot) &= - \int_0^{lb} (\rho_b S_b)(\Omega V_m(y)Y_{(c-2)}(s) \cos \beta \sin \psi_k) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_y (\Omega (V'_0(y)Y'_{(c-2)}(y) \sin \beta \cos \psi_k)) ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b (\Omega (Y'_{(c-2)}(s)V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k)) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & C(2mtot + p + (k - 1)ntot, 1) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega V_0(y) Y_{(p-2)}(s) \cos \psi_k \cos \beta \, ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega Y'_{(p-2)}(s) V'_0(y) \sin \beta \sin \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_0(y) Y'_{(p-2)}(y) \sin \beta \sin \psi_k \, ds \\
 & C(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega V_0(y) Y_{(p-2)}(s) \sin \psi_k \cos \beta \, ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega Y'_{(p-2)}(s) V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega Y'_{(p-2)}(s) V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k \, ds \\
 & C(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2q + 1) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega V_q(y) Y_{(p-2)}(s) \cos \psi_k \cos \beta \, ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega Y'_{(p-2)}(s) V'_q(y) \sin \beta \sin \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega V'_q(y) Y'_{(p-2)}(y) \sin \beta \sin \psi_k \, ds \\
 & C(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2q + 2) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega V_q(y) Y_{(p-2)}(s) \sin \psi_k \cos \beta \, ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega Y'_{(p-2)}(s) V'_q(y) \sin \beta \cos \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega Y'_{(p-2)}(s) V'_q(y) \sin \beta \cos \psi_k \, ds \\
 & C(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2mtot + c + (k - 1)ntot) = 0 \\
 & K(1,1) = \sum_{i=1}^{nbpalier} kxxi(raideur) V_0(yi_{palier}) V_0(yi_{palier}) + EI_a \int_0^L V''^2_0(y) dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'^2_0(y) \cos^2 \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'^2_0(y) \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k \, ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'^2_0(y) \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'^2_0(y) \cos^2 \psi_k \, ds \\
 & K(1,2) = \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'^2_0(y) \cos \psi_k \sin \psi_k \, ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'^2_0(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k \, ds \\
 &+ \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'^2_0(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'^2_0(y) \cos \psi_k \sin \psi_k \, ds \\
 & K(1,2m + 1) = \sum_{i=1}^{nbpalier} kxxi(raideur) V_0(yi_{palier}) V_m(yi_{palier}) + EI_a \int_0^L V''_0(y) V''_m(y) dy \\
 &+ \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \psi_k \, ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \sin^2 \psi_k \, ds \\
 &- \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k \, ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \psi_k \, ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(1,2m+2) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r+s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &K(1,2m_{tot} + (c) + (k-1)n_{tot}) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r+s) Y_{(c-2)}(s) V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(c-2)}(y) V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(2,1) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r+s)^2 V'^2_0(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'^2_0(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'^2_0(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'^2_0(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(2,2) &= \sum_{i=1}^{n_{palier}} k_{zzi}(\text{raideur}) V_0(y_{i_{palier}}) V_0(y_{i_{palier}}) + EI_a \int_0^L V''^2_0(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r+s)^2 V'^2_0(y) \sin^2 \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'^2_0(y) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'^2_0(y) \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'^2_0(y) \sin^2 \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(2,2m+1) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r+s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(2,2m+2) &= \sum_{i=1}^{n_{palier}} k_{zzi}(\text{raideur}) V_0(y_{i_{palier}}) V_m(y_{i_{palier}}) + EI_a \int_0^L V''_0(y) V''_m(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r+s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & K(2,2mtot + c + (k - 1)ntot) \\
 &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s) Y_{(c-2)}(s) V'_0(y) \sin \beta \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(c-2)}(y) V'_0(y) \sin \beta \sin \psi_k ds \\
 K(2m + 1,1) &= \sum_{i=1}^{nbpalier} kxxi(raideur) V_0(yi_{palier}) V_m(yi_{palier}) + EI_a \int_0^L V''_0(y) V''_m(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \psi_k ds \\
 K(2m + 1,2) &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 K(2m + 1,2q + 1) &= \sum_{i=1}^{nbpalier} kxxi(raideur) V_q(yi_{palier}) V_m(yi_{palier}) + EI_a \int_0^L V''_q(y) V''_m(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \sin^2 \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos^2 \psi_k ds \\
 K(2m + 1,2q + 2) &= \sum_{k=1}^{Ntot} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 K(2m + 1,2mtot + c + (k - 1)ntot) &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s) Y_{(c-2)}(s) V'_m(y) \sin \beta \cos \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(c-2)}(y) V'_m(y) \sin \beta \cos \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(2m + 2,1) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 K(2m + 2,2) &= \sum_{i=1}^{n_{palier}} k_{zzi}(\text{raideur}) V_0(y_{i_{palier}}) V_m(y_{i_{palier}}) + EI_a \int_0^L V''_0(y) V''_m(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_0(y) V'_m(y) \sin^2 \psi_k ds \\
 K(2m + 2,2q + 1) &= \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad + \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos \psi_k \sin \psi_k ds \\
 K(2m + 2,2q + 2) &= \sum_{i=1}^{n_{palier}} k_{zzi}(\text{raideur}) V_q(y_{i_{palier}}) V_m(y_{i_{palier}}) + EI_a \int_0^L V''_q(y) V''_m(y) dy \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_{tot}} \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s)^2 V'_q(y) V'_m(y) \sin^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_b \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \sin^2 \beta \cos^2 \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_z \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \cos^2 \beta \cos^2 \psi_k ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 V'_q(y) V'_m(y) \sin^2 \psi_k ds \\
 K(2m + 2,2mtot + c + (k - 1)ntot) &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s) Y_{(c-2)}(s) V'_m(y) \sin \beta \sin \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(c-2)}(y) V'_m(y) \sin \beta \sin \psi_k ds \\
 K(2mtot + p + (k - 1)ntot, 1) &= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2 (r + s) Y_{(p-2)}(s) V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k ds \\
 &\quad - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(p-2)}(y) V'_0(y) \sin \beta \cos \psi_k ds
 \end{aligned}$$

$$K(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2)$$

$$= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2(r + s) Y_{(p-2)}(s) V'_0(y) \sin \beta \sin \psi_k ds$$

$$- \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(p-2)}(y) V'_0(y) \sin \beta \sin \psi_k ds$$

$$K(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2q + 1)$$

$$= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2(r + s) Y_{(p-2)}(s) V'_q(y) \sin \beta \cos \psi_k ds$$

$$- \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(p-2)}(y) V'_q(y) \sin \beta \cos \psi_k ds$$

$$K(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2q + 2)$$

$$= \int_0^{lb} (\rho_b S_b) \Omega^2(r + s) Y_{(p-2)}(s) V'_q(y) \sin \beta \sin \psi_k ds$$

$$- \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(p-2)}(y) V'_q(y) \sin \beta \sin \psi_k ds$$

$$K(2mtot + p + (k - 1)ntot, 2mtot + c + (k - 1)ntot)$$

$$= E_b I_b \int_0^{lb} Y''_{(p-2)}(s) Y''_{(c-2)}(s) ds - \int_0^{lb} \rho_b I_y \Omega^2 Y'_{(p-2)}(s) Y'_{(c-2)} \sin^2 \beta ds$$