République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité: Biomathématique & Modélisation

présentée par

Lamouri Feryel

Mesures de traitement et de protection pour un modèle SIR à retard

Soutenue devant le jury composé de:

M. Ali MOUSSAOUI	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. Salih DJILALI	MCA, Université de Chlef	Examinateur
M. Mohammed Amine MENOUER	MCA, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire: 2022-2023

Remerciements

Je rends grâce a Dieu **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné le courage la volonté et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons en premier temps à remercier chaleureusement et tout particulièrement notre encadreur Mr **Menouer Mohammed Amine** , de nous avoir encadré et nous guidé avec autant de sérieux, de gentillesse, pour ses précieux conseils et son aide durant tout la période du travail pour une meilleure maitrise du mémoire surtout sa grande patience.

Des remerciements à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université **Abou Bekr Belkaid Tlemcen**.

J'aimerais remercier tous mes enseignement pendant mes études, particulièrement **les enseignement de mathématiques**

Mes remerciements vont aussi **aux membres du jury** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Je tiens à passer mes sincères remerciements à **mes parents**.
À une maman qui ferait tout pour que je sois à l'aise et à un père qui a tout fait pour offrir le mieux qu'il pouvait,
je te chérirai pour toujours,
je vous remercie pour la confiance que vous m'avez donnée.

Je remercie **ma famille et mes collègues** qui m'ont accompagné pendant tout le processus scolaire.

Dédecas

***Je dédie ce travail**:*

*A mon **cher pére**.*
Pour son aide et soutien et son patience,
cette aventure n'aurait certainement pas existé sans vous.

*A ma **chére mére***
En témoignage de mon éternelle reconnaissance,
que Dieu vous protége et vous prête bonne santé et longue vie.

A ma soeur: Manel.
A mes frères: Amine et Riyad.

A mes meilleurs amies:
Abir, Amina, Hanaa, Meriem et Salima.

A ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succés.

A tous ceux que j'aime.

CONTENTS

0.1 Introduction

Dans le cas des épidémies, plusieurs mesures peuvent être prises par les pouvoirs publiques, l'une d'entre elles est la protection des susceptibles contre l'infection par des mesures de vaccination,de quarantaine... afin de réduire l'infection ou même de l'éradiquer. Plusieurs modèles ont été utilisés pour étudier l'effet de la protection sur l'émergence d'une épidémie, on citera [2, 3] où l'effet de la vaccination sur le développent de l'épidémie est analysé. Dans l'article [1], les auteurs ont considéré un modèle épidémique **SIR** à retard, ce retard étant due à une mesure de protection, le modèle a été formulé comme ceci:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu + \alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma), \\[2ex] \dfrac{dP}{dt} = \alpha S(t) - \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma) - \mu P(t), \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\delta + \eta + \mu)I(t), \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \delta I(t) - \mu R(t), \end{cases} \tag{1}$$

avec $\mathbf{S(t), \ P(t), \ I(t), \ R(t)}$, représentent les densités des susceptibles, des protégés, des infectés et des rétablis au temps t, respectivement.Λ représente les nouveaux nées susceptibles, μ est le taux de mortalité naturelle. β est le taux de transmission par unité de temps, δ est le taux de rétablissement par habitant. η est le coefficient de mortalité due à la maladie. α est le taux de protection des susceptibles par unité de temps, ε est la probabilité de quitter l'isolation et redevenir susceptible. Le terme $\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma)$ est la densité de personnes mises sous protection au temps $t-\sigma$ et redevenant susceptible au temps t. La probabilité de survivre jusqu'à au temps t est $e^{-\mu\sigma}$. Les auteurs ont calculé le taux de reproduction de base:

$$\Re_0 = \frac{\beta\Lambda}{(\alpha + \mu - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu + \delta + \eta)},$$

et ils ont démontré que le comportement asymptotique de la solution du système précédent est gouverné par la valeur de $\Re_0$. Pour $\Re_0$ <1, la maladie s'éteint par contre pour $\Re_0$>1 l'infection persiste.

La protection est une mesure préventive afin d'empêcher l'infection des individus. Néanmoins la lutte contre les épidémies requiert l'utilisation de toutes les mesures disponibles et parmi lesquelles, les traitements médicaux pour les infectés. C'est dans ce sens que le modèle de l'article [4] a été construit.

On va donc reprendre dans ce mémoire l'article [4], dans lequel les auteurs ont étudié un modèle **SIR** à retard. Ce modèle contient un retard discret pour exprimer la durée de la protection et un retard distribué pour représenter la durée pendant laquelle les individus prennent le traitement,les problèmes avec ce type de retard ont fait l'objet de plusieurs travaux voir par exemple: [9],[10],[11]. Il est démontré que le modèle a un seuil de comportement suivant $\Re_0$: Si $\Re_0$<1 alors le **DFE** est globalement stable et si $\Re_0$>1 alors le semiflow est uniformément persistant et le **EE** est globalement stable. Il est aussi pointé, dans l'article [4], l'effet du traitement aux côtés de la protection sur l'émergence de l'épidémie, les gouvenements ne pouvant pas toujours assurer une protection suffisante pour pousser la maladie vers l'extinction, il utilisent aussi des traitements médicaux pour faire baisser le taux de reproduction de base en dessous de 1.

Le mémoire va se présenter comme suit: au chapitre **1**, on va rappeler quelques notions mathématiques utilisées dans ce mémoire, au chapitre **2**, on va présenter le modèle SIR à retard et développer son analyse, au chapitre**3**, on présentera les mesures requises pour lutter contre l'épidémie et au chapitre 4, on terminera par une conclusion générale.

CHAPTER 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous décrivons les concepts de base utilisés dans le mémoire. Plus précisément, des définitions et des propriétés des systèmes dynamiques. Le lecteur pourra notamment consulter [5].

1.1 Fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov est une fonction servant à évaluer la stabilité d'un point d'équilibre.

Considérons le système autonome

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

où f: $D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application localement Lipschitzienne d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que $x^* \subset D$ est un point d'équilibre de (1.1) c'est-à-dire $f(x^*) = 0$. Notre but est de caractériser et d'étudier la stabilité de x^*.

Par commodité, nous énonçons toutes les définitions et théorèmes pour le cas où le point d'équilibre est à l'origine de $\mathbb{R}^n$; c'est-à-dire $x^* = 0$. Il n'y a pas de perte de généralité en procédant ainsi car tout point d'équilibre peut être déplacé vers l'origine via un changement de variables. Supposons $x^* \neq 0$ et considérons le changement de variables $y = x - x^*$. La dérivée de y est donnée par

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x^*) = g(y) \quad \text{où} \quad g(0) = 0.$$

Théoréme 1.1. *Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre pour (1.1) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x^* = 0$. Soit $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable telle que*

1. $V(0) = 0$,
2. $V(x) > 0, \qquad \forall\, x \in D \setminus \{0\}$
3. $\dot{V} \leq 0, \qquad$ *dans* D
   alors x^* est stable
   Si de plus $\dot{V}(x) < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable.

1.2 Principe d'invariance de LaSalle

Définition 1.1. *Soit $x(t)$ une solution de (1.1). Un point p est dit point limite positif de $x(t)$ s'il existe une suite $\{ t_n\}$, avec $t_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$, telle que $x(t_n) \longrightarrow p$ quand $n \longrightarrow \infty$ L'ensemble de tous les points limites positifs de x(t) est appelé* ***ensemble limite positif de x(t)****.*

Définition 1.2. *Un ensemble $\mathbb{M}$ est dit invariant par rapport à (1.1) si*

$$x(0) \in \mathbb{M} \Longrightarrow x(t) \in \mathbb{M} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, si une solution appartient à $\mathbb{M}$ à un instant donné, alors elle appartient à $\mathbb{M}$ pour tout le temps futur et passé.
Un ensemble $\mathbb{M}$ est dit positivement invariant si

$$x(0) \in \mathbb{M} \Longrightarrow x(t) \in \mathbb{M} \quad \forall t \geq 0.$$

on dit aussi que $x(t)$ approche vers un ensemble $\mathbb{M}$ quand t approche vers l'infini, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $T > 0$ tel que

$$dist(x(t), \mathbb{M}) < \varepsilon \qquad \forall\ t > \ T,$$

où $dist(p, \mathbb{M})$ désigne la distance d'un point p à un ensemble $\mathbb{M}$, c'est-à-dire la plus petite distance de p à tout point de $\mathbb{M}$. Plus précisément,

$$dist(p, \mathbb{M}) = \inf_{x \in \mathbb{M}} ||p - x||.$$

Lemme 1.1. *Si x(t) une solution de (1.1) est bornée et appartient à D pour $t \geq 0$, alors son ensemble limite positif L^+ est un ensemble non vide, compact et invariant. De plus, x(t) approches L^+ comme $t \longrightarrow \infty$.*

Théoréme 1.2. *(Principe d'invariance de LaSalle)*
Soit $\Omega \subset D$ un ensemble compact positivement invariant par rapport à (1.1).
Soit $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ dans Ω.
Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble de tous les points de Ω où $\dot{V}(x) = 0$.
Soit $\mathbb{M}$ le plus grand ensemble invariant dans $\mathbb{E}$.
Alors toute solution commençant dans Ω approche vers $\mathbb{M}$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

1.3 Ensembles limites

Définition 1.3. *[7] Soit φ_t un flot dans X et soit $a \in X$.*
Un point x est dans l'ensemble ω-limite $\omega(a)$ s'il existe une suite $t_k \longrightarrow +\infty$ telle que $\varphi_{t_k}(a) \longrightarrow x$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.
Un point x est dans l'ensemble α-limite $\alpha(a)$ s'il existe une suite $t_k \longrightarrow -\infty$ telle que $\varphi t_k(a) \longrightarrow x$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.
Si a est un point d'équilibre alors $\omega(a) = \alpha(a) = a$.
Si a est périodique alors $\omega(a) = \alpha(a) = \gamma(a)$.
Si a et b sont dans la même orbite alors $\omega(a) = \omega(b)$ et $\alpha(a) = \alpha(b)$, de sorte que l'on définit les ensembles limites d'une orbite comme étant les ensembles limites de l'un de ses points.

1.4 Équation différentielles ordinare

considérons l'**EDO** suivante [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

qui décrit la croissance d'une population y. Elle admet la solution exponentielle bien connue $y = y_0 e^{kt}$. La connaissance du présent (ici: $y(0) = y_0$) permet la prédiction du futur à tout temps t. Le passé n'est pas impliqué dans la solution.

1.5 Équation différentielles à retard

Pour une Équation Différentielle à Retard **EDR**, le passé exerce une influence sur le présent, et dès lors, sur le futur.
Considérons l'EDR suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(t-\tau), \\ y(t) = y_0(t) \qquad -\tau \leq t<0, \end{cases} \tag{1.3}$$

où le membre de droite dépend de y au temps $t - \tau$. Cette équation décrit, par exemple, la croissance de la population humaine et t=9 mois représente le temps de gestation. Notons que la condition initiale est maintenant une fonction initiale définie sur un intervalle de temps fini.

1.5.1 Les déférentes types des Équations à retard

Équation à retard discret

Équation à retard discret s'écrit se la forme :

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)).$$

Équation à retard distribué

[15] Un modèle à retard distribué peut être utilisé pour simuler la distribution de survie des adultes (modèle Curry et Feldman, 1987). Un modèle de distribution utilise les fonctions de la famille d'Erlang[1], les distributions normales ou les fonctions quadratiques[2] pour décrire les fonctions de densité de la distribution du temps de survie (modèle Sharpe et al., 1977).
Autrement dit équation à retard distribué s'écrit comme une convolution :

$$\frac{d}{dt}y(t) = (f * y)(t) = \int_0^\tau f(s)y(t-s)ds.$$

[1]Les fonctions de la famille Erlang sont utilisées pour prédire la distribution temporelle de l'émergence larvaire (modèle Throne, 1989, Flinn et Hagstrum, 1995, Throne et al., 1998).

[2]Les fonctions quadratiques sont des fonctions de plusieurs variables polynomiale de degré 2

1.6 Le nombre de reproduction de base

On renvoi aux références [12, 13, 14] pour plus de détails.
Le nombre (taux) de reproduction de base est un concept fondamental en épidémiologie. C'est une quantité, notée $\Re_0$ qui représente le nombre d'infections secondaires découlant d'une infection unique dans une population autrement sensible.
Suite au développement des approches de modélisation mathématique en épidémiologie au siècle dernier, $\Re_0$ est devenu un concept clé pour prévenir l'apparition d'épidémies.

Théoréme 1.3. *Théorème 2.39 [17]*
Soit ϕ un semi-flot continu, et A est un sous ensemble compact positivement invariant de X qui attire tous les sous ensembles compacts de voisinage de lui même (i.e un attracteur local des ensembles compacts). Alors A est stable.

CHAPTER 2

MODÈLE SIR À RETARD

2.1 Présentation du modèle

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma), \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = \alpha S(t) - \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma) - \mu P(t), \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\delta+\eta+\mu+k)I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds, \\ \\ \dfrac{dT}{dt} = kI(t) - (\mu+\delta_2)T(t) - k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds, \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \delta I(t) + \delta_2 T(t) - \mu R(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

avec
$\int_0^\tau f(s)ds = 1$
et aussi:
• $f(s)$: la probabilité de quitter le traitement.
• $T(t)$: la densité de personnes sous traitement à l'instant t.
• δ_2: taux de rétablissement.
• $k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds$: la densité des individus quittant le traitement et réintégrant la classe des infectés.
• $kI(s)$: les personnes qui ont suivi un traitement et qui ont été guéries au temps $s \in [t-\tau, t]$.
• $e^{-(\mu+\delta_2)(t-s)}$: la probabilité que l'individu survivra au traitement au temps s; jusqu'à la rechute dans la catégorie infectieuse au temps t.
• τ: durée de du traitement jusqu'au rétablissement.
On considère les conditions initiales comme suit:

$$
\begin{aligned}
&S(\theta_1) = \phi_1(\theta_1) \qquad \theta_1 \in [-\sigma, 0],\\
&P(0) = \alpha \int_{-(\sigma+\rho)}^{0} e^{\mu x} S(x)dx := \phi_2,\\
&I(\theta_2) = \phi_3(\theta_2) \qquad \theta_2 \in [-\tau, 0],\\
&T(0) = k \int_0^{\tau} \int_{-s}^{0} f(s) e^{-(\mu+s)(t-x)} I(x)dxds := \phi_4,\\
&R(0) = \phi_5,
\end{aligned}
$$

où $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5) \in \mathcal{C}([-\sigma, 0], \mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Nous supposons aussi que $\phi_1, \phi_3 \neq 0$.

2.2 La positivité des solutions

Théoréme 2.1. *supposons que $(S(t), P(t), I(t), T(t), R(t))$, soit la solution du problème (2.1), alors $S(t) > 0$, $P(t) > 0$, $I(t) > 0$, $T(t) > 0$, $R(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ fini. De plus on a que:*

$$\Omega = \{(S, P, I, T, R); S \geq 0, P \geq 0, I \geq 0, T \geq 0, R \geq 0$$

$$S + P + I + T + R \leq \frac{\Lambda}{\mu}\},$$

est un ensemble positivement invariant

Preuve. *Sur le bord $S(t) = 0$, on obtient:*

$$\dot{S}(t) = \Lambda + \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma} S(t-\sigma) > 0, \quad d'où \quad S(t) > 0, \quad pour\ tout \quad t \geq 0,$$

supposons qu'il existe un $t_1 > 0$ tel que $I(t_1) = 0$, et $I(t) > 0$ pour $t \in [0, t_1]$, posons:

$$h(t) = k \int_0^{\tau} f(s) e^{-(\mu+\delta_2)s} I(t-s)ds,$$

avec

$$h(t_1) \geq 0.$$

Car:

$$h(t) > 0, \quad si \quad f(s) e^{-(\mu+\delta_2)s} I(t-s) > 0,$$

pour $t = t_1$ alors $h(t_1) > 0$, car $f(s) > 0$, $e^{-(\mu+\delta_2)s} > 0$,
et on a l'intervalle de variation de s est $[0, \tau]$, donc

si $t_1 - s$ se trouve dans l'intervalle $[0, t_1[$ alors $I(t_1 - s) > 0$ (c'est l'hypothèse qu'on a fait).

Et si $t_1 - s < 0$ alors on a la condition initiale de I qui est positive aussi sur l'intervalle $[-\tau, 0]$. Notons aussi:

$$\alpha(t) = \beta S(t) - (\delta + \eta + \mu + k).$$

La troisième équation du modèle (2.1) se réécrit donc:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(t) I(t) + h(t),$$

intégrons là, entre 0 et t

✓ *L'équation sans second membre:*

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(t)I(t),$$

$$\frac{dI}{I(t)} = \alpha(t)dt,$$

$$\ln(I(t)) = \int_0^t \alpha(s)ds + \ln(I(0)),$$

$$I(t) = C \times e^{\int_0^t \alpha(s)ds} \quad avec \quad C = I(0).$$

✓ *L'équation avec second membre:*
Utilisons la méthode de variation de la constante:

$$\frac{dI}{dt} = \dot{C}(t) \times e^{\int_0^t \alpha(s)ds} + C(t)\alpha(t)e^{\int_0^t \alpha(s)ds},$$

$$\frac{dI}{dt} - \alpha(t)I(t) = h(t),$$

$$\Longrightarrow \dot{C}(t) \times e^{\int_0^t \alpha(s)ds} + C(t) \times \alpha(t)e^{\int_0^t \alpha(s)ds} - \alpha(t)C(t) \times e^{\int_0^t \alpha(s)ds} = h(t),$$

$$\Longrightarrow \dot{C}(t) \times e^{\int_0^t \alpha(s)ds} = h(t) \Longrightarrow \dot{C}(t) = h(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds},$$

$$C(t) = \int_0^t h(\sigma)e^{-\int_0^\sigma \alpha(s)ds}d\sigma,$$

$$I(t) = C \times e^{\int_0^t \alpha(s)ds} + \int_0^t h(\sigma)e^{-\int_0^\sigma \alpha(s)ds}d\sigma \times e^{\int_0^t \alpha(s)ds},$$

sachant que $C = I(0)$ on obtient:

$$I(t) = e^{\int_0^t \alpha(s)ds}[I(0) + \int_0^t h(\sigma)e^{-\int_0^\sigma \alpha(s)ds}d\sigma],$$

$$I(t)>0,$$

et donc pour $t = t_1$ on a:

$$I(t_1) = e^{\int_0^{t_1} \alpha(s)ds}[I(0) + \int_0^{t_1} h(\sigma)e^{-\int_0^\sigma \alpha(s)ds}d\sigma]>0,$$

alors t_1 n'existe pas, $I(t)>0$ pour tout $t \geq 0$

•Montrons maintenant la positivité de $P(t)$. Soit la fonction suivante:

$$h(t) = \alpha \int_{t-(\sigma+\rho)}^{t} e^{-\mu(t-x)} S(x)dx.$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \alpha S(t) - \alpha e^{-\mu(\sigma+\rho)} S(t-\sigma) + \alpha \textstyle\int_{t-\sigma}^{t} -\mu e^{-\mu(t-x)} S(x)dx, \\
&= \alpha S(t) - e^{-\mu\rho} \alpha e^{-\mu\sigma} S(t-\sigma) - \mu h(t). \qquad \textit{(formule identique à celle de } \frac{dP}{dt}\textit{).}
\end{aligned}$$

Prenons $\rho = -\dfrac{\ln \epsilon}{\mu}$, *on a alors* $e^{-\mu\rho} = e^{\mu \frac{\ln \epsilon}{\mu}} = \epsilon$. *Donc:*

$$\frac{dh}{dt} = \alpha S(t) - \epsilon \alpha e^{-\mu\sigma} S(t-\sigma) - \mu h(t).$$

D'un autre côté, on voit bien que $h(0) = P(0)$, d'où:

$$P(t) = h(t) = \alpha \int_{t-(\sigma+\rho)}^{t} e^{-\mu(t-x)} S(x)dx,$$

et puisque $S(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ alors $P(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.
•De la même façons montrons que $T(t)$ est positive. Soit la fonction suivante:

$$g(t) = k \int_{0}^{\tau} \int_{t-s}^{t} f(s) e^{-(\mu+\delta_2)(t-x)} I(x)dxds.$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} &= k \int_{0}^{\tau} \left[f(s)I(t) - f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} I(t-s) + \int_{t-s}^{t} -(\mu+\delta_2) f(s) e^{-(\mu+\delta_2)(t-x)} I(x)dx \right] ds, \\
&= k \int_{0}^{\tau} f(s)ds I(t) - k \int_{0}^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} I(t-s)ds - k(\mu+\delta_2) \int_{0}^{\tau} \int_{t-s}^{t} f(s) e^{-(\mu+\delta_2)(t-x)} I(x)dxds, \\
&= kI(t) - k \int_{0}^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} I(t-s)ds - (\mu+\delta_2) g(t). \qquad \textit{(formule identique à celle de } \frac{dT}{dt}\textit{).}
\end{aligned}$$

D'un autre côté, on voit bien que $g(0) = T(0)$, d'où:

$$T(t) = g(t) = k \int_{0}^{\tau} \int_{t-s}^{t} f(s) e^{-(\mu+\delta_2)(t-x)} I(x)dxds,$$

et puisque $I(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ alors $T(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$,

•Montrons la positivité de R(t)
Sur le bord $R(t) = 0$, on obtient:

$$\dot{R}(t) = \delta I(t) + \delta_2 T(t) > 0,$$

car $I(t)>0$, $T(t)>0$, pour tout $t \geq 0$. Donc $R(t)>0$, pour tout $t \geq 0$.

Maintenant, nous supposons que

$$N(t) = S(t) + P(t) + I(t) + T(t) + R(t),$$

puis en sommant les équations du modèle (2.1), on obtient:

$$\dot{N}(t) = \Lambda - \mu N(t) - \eta I(t) \leq \Lambda - \mu N(t).$$

En introduisant le facteur intégrant $e^{\mu t}$ *des deux côtés de l'inéquation:*

$$\dot{N}(t) + \mu N(t) \leq \Lambda,$$

on obtient:

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t} N(t)) \leq e^{\mu t}\Lambda.$$

En intégrant les deux côtés de l'inéquation entre 0 et t, on a:

$$[e^{\mu t} N(t)]_0^t \leq \left[\frac{\Lambda}{\mu} e^{\mu t}\right]_0^t,$$

$$\Longrightarrow e^{\mu t} N(t) - N(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu} e^{\mu t} - \frac{\Lambda}{\mu},$$

$$\Longrightarrow N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} + e^{-\mu t}\left(N(0) - \frac{\Lambda}{\mu}\right),$$

d'où $N(t) \leq \max\left\{\frac{\Lambda}{\mu}, N(0)\right\}$, *et pour* $N(0) \in \Omega$, *on a* $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.
On déduit que S(t), P(t), T(t), I(t), R(t) restent bornées. Donc, une solution avec une condition initiale dans Ω *existe pour tout* $t \geq 0$ *et reste dans* Ω.

On remarque que les trois équations de P, T, R sont exprimées par rapport à S et I, alors nous pouvons déterminer le comportement de S et I qui n'incluent pas P, T, R dans leurs expressions. On peut déduire le comportement de les trois équations, donc on n'a pas besoin de leurs équation et laisser seulement ceux de S et I,et on obtient le modèle réduit:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu + \alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma} S(t - \sigma), \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\delta + \eta + \mu + k)I(t) + k \int_0^\tau f(s) e^{-(\mu+\delta_2)s} I(t - s)ds. \end{cases} \tag{2.2}$$

Maintenant, nous allons démontrer un résultat de permanence pour la première équation de (2.2) par le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Pour toute condition initiale* $\phi \in \mathcal{C}([-\sigma, 0], \mathbb{R}_+) \times \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$, *on obtient:*

$$\liminf_{t\to+\infty} S(t) \geq \frac{\Lambda}{\beta\frac{\Lambda}{\mu} + \mu + \alpha}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t) + \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma),\\ &\geq \Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t).\end{aligned}$$

Pour t assez grand, on a bien:

$$I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

donc, il existe un T>0 assez large tel que pour tout $t \geq T$, on a:

$$\frac{dS}{dt} \geq \Lambda - \beta S(t)\frac{\Lambda}{\mu} - (\mu+\alpha)S(t) = \Lambda - (\beta\frac{\Lambda}{\mu} + \mu + \alpha)S(t).$$

En utilisant le facteur intégrant, on obtient:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\left(\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha\right)t}S(t)\right) \geq \Lambda e^{\left(\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha\right)t}.$$

L'intégration des deux côtés entre 0 et t donne:

$$e^{\left(\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha\right)t}S(t) \geq \frac{\Lambda}{\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha}e^{\left(\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha\right)t} + C,$$

d'où

$$S(t) \geq \frac{\Lambda}{\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha} + C \times e^{-\left(\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha\right)t},$$

donc

$$S(t) \geq \frac{\Lambda}{\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha},$$

d'où:

$$\liminf_{t\to+\infty} S(t) \geq \frac{\Lambda}{\beta\frac{\Lambda}{\mu}+\mu+\alpha}.$$

2.2.1 Les points d'équilibres

Soit (S, I) un point d'équilibre du système (2.2). (S, I) vérifie donc:

$$\begin{cases}\Lambda - \beta SI - (\mu+\alpha)S + \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S = 0,\\ \beta SI - (\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})I = 0.\end{cases} \tag{2.3}$$

de la deuxiéme équation de (2.3), on obtient:

$$I = 0 \qquad \text{où} \qquad \beta S - (\delta + \eta + \mu + k - k\tilde{f}) = 0,$$

c'est à dire que:

$$I = 0 \qquad \text{où} \qquad S = \frac{(\delta + \eta + \mu + k - k\tilde{f})}{\beta}.$$

On remplace $I = 0$ dans la 1 équation de (2.3):

$$\Lambda - (\mu + \alpha)S + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S = 0,$$

$$\Longrightarrow \Lambda = S(\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}),$$

$$\Longrightarrow S = \frac{\Lambda}{(\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})}.$$

Donc le premier point d'équilibre est le point noté $(S_0, 0)$, avec

$$S_0 = \frac{\Lambda}{(\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})}.$$

Vu que $I = 0$ on appel ce point: équilibre sans maladie **(Disease Free Equilibrium DFE)**
De la 1 équation de (2.3), on a:

$$\Lambda - \beta SI - (\mu + \alpha)S + \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S = 0,$$

$$\Lambda - (\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})S = \beta SI,$$

$$I = \frac{\Lambda - (\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})S}{\beta S}.$$

En remplaçant S par la formule trouvant avant:

$$S = \frac{(\delta + \eta + \mu + k - k\tilde{f})}{\beta},$$

on obtient:

$$I = \frac{\beta\Lambda - (\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu + \delta + \eta + k - k\tilde{f})}{\beta(\mu + \delta + \eta + k - k\tilde{f})},$$

Le deuxiéme point d'équilibre est donc:

$$(S^*, I^*) = \left(\frac{(\delta + \eta + \mu + k - k\tilde{f})}{\beta}, \frac{\beta\Lambda - (\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu + \delta + \eta + k - k\tilde{f})}{\beta(\mu + \delta + \eta + k - k\tilde{f})} \right).$$

qu'on appelle point d'équilibre endémique **(Endemic Equilibrium EE)**.
D'autre part, nous savons que I^* doit être positive,alors le point équilibre endémique existe si et seulement si

$$I^* > 0,$$

$$\Longrightarrow \beta\Lambda - (\mu + \alpha - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu + \delta + \eta + k - k\tilde{f}) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta\Lambda>(\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu+\delta+\eta+k-k\tilde{f}),$$

i.e

$$\mathbf{R}_0 := \frac{\beta\Lambda}{(\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu+\delta+\eta+k-k\tilde{f})}>1.$$

En conclusion, le point équilibre endémique existe si et seulement si $\mathbf{R}_0>1$.

Si en multipliant et divisant par : $(\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})$.
On obtient :

$$I^* = \frac{(\mathbf{R_0}-1)(\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})}{\beta}.$$

2.3 La stabilité globale pour $\mathbf{R_0}<1$

2.3.1 Stabilité locale du point d'équilibre sans maladie

Lemme 2.2. *Pour $\mathbf{R_0}<1$, $(S_0,0)$ est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. *La matrice jacobienne relative au système (2.2) en $(S_0,0)$ est*

$$J = \begin{pmatrix} -(\mu+\alpha)+\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}e^{-\lambda\sigma} & -\beta S_0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \beta S_0 - (\delta+\eta+\mu+k) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}e^{-\lambda\sigma}.$$

On calcule $det(J-\lambda I)=0$,

$$\begin{vmatrix} -(\mu+\alpha)+\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}e^{-\lambda\sigma}-\lambda & -\beta S_0 \\ 0 & A-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Et l'équation caractéristique relative au système (2.2) en $(S_0,0)$ est comme suit:

$$\left(\lambda-\beta S_0+(\mu+\delta+\eta+k)-k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}e^{-\lambda s}ds\right)$$
$$\times\left(\lambda+(\mu+\alpha)-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}e^{-\lambda\sigma}\right)=0.$$

Dans un premier temps on considère

$$\lambda+(\mu+\alpha)-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}e^{-\lambda\sigma}=0.$$

Ensuite on met

$$f(\lambda)=\lambda+(\mu+\alpha)-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}e^{-\lambda\sigma},$$

chercher des racines de la forme $\lambda=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $x>0$. Alors, on

$$\begin{aligned} |\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}e^{-\lambda\sigma}| &= \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}e^{-\sigma x}, \\ &< \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}, \\ &< \mu+\alpha, \\ &< |\lambda+\mu+\alpha|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f(\lambda)=0$ n'a pas de racines à partie réelle positive.
De l'autre côté, on pose

$$\lambda-\beta S_0+(\mu+\delta+\eta+k)-k\int_0^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}e^{-\lambda s}ds=0.$$

On suppose que λ a une partie réelle non négative.
Ainsi

$$\lambda+(-\beta S_0+\mu+\delta+\eta+k)=k\int_0^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}e^{-\lambda s}ds,$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\lambda+(-\beta S_0+\mu+\delta+\eta+k)| =&\left|k\int_0^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}e^{-\lambda s}ds\right|,\\ \leq& k\int_0^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}|e^{-\lambda s}|ds,\\ \leq& k\int_0^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}ds,\\ \leq& k\tilde{f}.\end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned}\mathbf{R_0}=&\frac{\beta\Lambda}{(\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})} \quad ,\\ \Longrightarrow (\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})=&\frac{\beta\Lambda}{(\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})\mathbf{R_0}},\end{aligned}$$

et on a:

$$S_0=\frac{\Lambda}{(\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})},$$

donc:

$$\begin{aligned}(\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})=&\frac{\beta\Lambda}{(\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})\mathbf{R_0}}=\frac{\beta S_0}{\mathbf{R_0}},\\ k\tilde{f}=&\delta+\eta+\mu+k-\frac{\beta S_0}{\mathbf{R_0}}.\end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}\left|k\int_0^{\tau} f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}e^{-\lambda s}ds\right|\leq& k\tilde{f},\\ \leq&\delta+\eta+\mu+k-\frac{\beta S_0}{\mathbf{R_0}},\\ \leq&\left|\delta+\eta+\mu+k-\frac{\beta S_0}{\mathbf{R_0}}\right|,\\ \leq&|\delta+\eta+\mu+k-\beta S_0|,\\ \leq&|\lambda+\delta+\eta+\mu+k-\beta S_0|,\end{aligned}$$

qui est une contradiction.
Nous allons montrer maintenant la propriété global de ce le résultat.

2.3.2 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Lemme 2.3. *Pour* $\mathbf{R_0} < 1$, $(S_0, 0)$ *est globalement stable.*

Preuve. *Soit la fonction de Lyapunov*

$$
\begin{aligned}
W(t) =& W_1(t) + W_2(t),\\
W_1(t) =& S_0 h\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) + \mathbf{R}_0 I(t),\\
W_2(t) =& \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\int_0^\sigma h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)d\sigma + \mathbf{R}_0\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times I(t-\eta)d\eta ds,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
h(x) = x{-}1 - \ln(x) \quad \textit{pour} \quad x{>}0,\\
h\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \frac{S(t)}{S_0} - 1 - \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right).
\end{aligned}
$$

$W(t)$ *est une fonction continument dérivable,* $(S_0, I_0) = (S_0, 0)$ *est un point d'équilibre tel que:*

1. $W(t)_{(S_0,0)} = W_1(t)_{(S_0,0)} + W_2(t)_{(S_0,0)}$.
   On remplace $(S(t), I(t))$ *par* $(S_0, 0)$,
   donc on a:

$$
\begin{aligned}
W_1(t)_{(S_0,0)} =& S_0 h\left(\frac{S_0}{S_0}\right),\\
=& S_0 h(1) \quad / \quad h(1) = 1 - 1\ln(1) = 0,\\
=& 0,\\
W_2(t)_{(S_0,0)} =& \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\int_0^\sigma h\left(\frac{S_0}{S_0}\right)d\sigma,\\
W_2(t)_{(S_0,0)} =& \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\int_0^\sigma h(1)d\sigma,\\
=& 0,
\end{aligned}
$$

   alors:

$$
W(t)_{(S_0,0)} = 0.
$$

2. $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$.

$$
\begin{aligned}
W_1(t) =& S_0 h\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) + \mathbf{R}_0 I(t)\\
W_1(t) \geq& 0
\end{aligned}
$$

   car:
   $S_0 \geq 0, \quad h\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \geq 0, \quad \mathbf{R}_0 \geq 0, \quad I(t) \geq 0.$

$$
\begin{aligned}
W_2(t) =& \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\int_0^\sigma h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)d\sigma + \mathbf{R}_0\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times I(t-\eta)d\eta ds,\\
W_2(t) \geq& 0.
\end{aligned}
$$

car:

$\varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma} \geq 0, \quad h\left(\dfrac{S(t-\sigma)}{S_0}\right) \geq 0, \qquad \mathbf{R}_0 \geq 0, \quad kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} \times I(t-\eta) \geq 0.$

Donc on obtient:

$W(t) \geq W(t)_{(S_0,0)} = 0.$

3. *Maintenant on calcule la dérive* $W(t)$.

   Nous calculons $\dfrac{W_1}{dt}$,

$$\begin{aligned}
\frac{dW_1(t)}{dt} =& S_0\left[\frac{\dot{S}(t)}{S_0} - \frac{\dot{S}(t)}{S_0}\frac{S_0}{S(t)}\right] + \mathbf{R}_0\dot{I}(t),\\
=& \dot{S}(t) - S_0\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} + \mathbf{R}_0\dot{I}(t),\\
\frac{dW_1(t)}{dt} =& \dot{S}(t)\left[1 - \frac{S_0}{S(t)}\right] + \mathbf{R}_0\dot{I}(t),\\
=& \left(1 - \frac{S_0}{S(t)}\right)\left[\Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma)\right]\\
&+\mathbf{R}_0\left[\beta S(t)I(t) - (\delta+\eta+\mu+k)I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds\right].
\end{aligned}$$

On a

$$S_0 = \frac{\Lambda}{\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Lambda = S_0(\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}).$$

On remplace Λ *dans l'équation précédentes*

$$\begin{aligned}
\frac{dW_1(t)}{dt} =& \left(1 - \frac{S_0}{S(t)}\right)\left[S_0(\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}) - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma)\right]\\
&+\mathbf{R}_0\left[\beta S(t)I(t) - (\delta+\eta+\mu+k)I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta 2)s}I(t-s)ds\right],\\
=& (\mu+\alpha)S_0\left(1 - \frac{S(t)}{S_0}\right)\left(1 - \frac{S_0}{S(t)}\right) + \left(1 - \frac{S_0}{S(t)}\right)\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S(t-\sigma) - S_0)\\
&+\beta S(t)I(t)(\mathbf{R}_0 - 1) + (\beta S_0 - \mathbf{R}_0(\delta+\eta+\mu+k)I(t) + k\mathbf{R}_0\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds,\\
=& (\mu+\alpha)S_0\left(1 - \frac{S(t)}{S_0} - \frac{S_0}{S(t)} + 1\right) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}[S(t-\sigma) - S_0]\left(1 - \frac{S_0}{S(t)}\right)\\
&+(\mathbf{R}_0 - 1)\beta S(t)I(t) + I(t)[\beta S_0 - \mathbf{R_0}(\delta+\eta+\mu+k)] + k\mathbf{R}_0\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds.
\end{aligned}$$

On ajoute et on soustrait $k\mathbf{R_0}\tilde{f}I(t)$

$$\begin{aligned}
\frac{dW_1(t)}{dt} =& (\mu+\alpha)S_0\left(2 - \frac{S(t)}{S_0} - \frac{S_0}{S(t)}\right) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}[S(t-\sigma - S_0]\left(1 - \frac{S_0}{S(t)}\right)\\
&+(\mathbf{R}_0 - 1)\beta S(t)I(t) + I(t)[\beta S_0 - \mathbf{R}_0(\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})]\\
&+k\mathbf{R}_0\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}[I(t-s) - I(t)]ds.
\end{aligned}$$

On voit bien que

$$\beta S_0 - \mathbf{R}_0(\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f}) = \frac{\beta\Lambda}{\mu+\alpha-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}} - \frac{\beta\Lambda(\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})}{(\alpha+\mu-\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW_1(t)}{dt} =& (\mu+\alpha)S_0\left(2-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0}\right)+\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}\left[S(t-\sigma)-S_0-\left(\frac{S_0S(t-\sigma)}{S(t)}\right)+\left(\frac{S_0^2}{S(t)}\right)\right] \\
&+(\mathbf{R}_0-1)\beta S(t)I(t)+k\mathbf{R}_0\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}[I(t-s)-I(t)]ds, \\
=& (\mu+\alpha)S_0\left(2-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0}\right)+\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S_0\left[-1+\frac{S(t-\sigma)}{S_0}-\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)+\left(\frac{S_0}{S(t)}\right)\right] \\
&+(\mathbf{R}_0-1)\beta S(t)I(t)+k\mathbf{R}_0\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}[I(t-s)-I(t)]ds.
\end{aligned}$$

A présent on calculons $\dfrac{W_2}{dt}$*:*

$$\frac{dW_2(t)}{dt} = \varepsilon\alpha S_0e^{-\mu\sigma}\int_0^\sigma\frac{d}{dt}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)\right)d\sigma+\mathbf{R_0}\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times\frac{d}{dt}I(t-\eta)d\eta ds,$$

on a:

$$\frac{d}{dt}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)\right) = \frac{1}{S_0}\frac{d}{dt}S(t-\sigma)\frac{d}{dt}h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right),$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)\right) = -\frac{1}{S_0}\frac{d}{d\sigma}S(t-\sigma)\frac{d}{d\sigma}h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right),$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)\right) = -\frac{d}{d\sigma}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)\right),$$

Alors:

$$\begin{aligned}
\frac{dW_2(t)}{dt} &= -\varepsilon\alpha S_0e^{-\mu\sigma}\int_0^\sigma\frac{d}{d\sigma}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)\right)d\sigma-\mathbf{R_0}\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times\frac{d}{d\eta}I(t-\eta)d\eta ds, \\
&= -\varepsilon\alpha S_0e^{-\mu\sigma}\left[h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)\right]_0^\sigma-\mathbf{R_0}\int_0^\tau kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times[I(t-\eta)]_0^s ds, \\
&= -\varepsilon\alpha S_0e^{-\mu\sigma}\left[h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)-h\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)\right]-\mathbf{R_0}\int_0^\tau kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times[I(t-s)-I(t)]ds, \\
&= -\varepsilon\alpha S_0e^{-\mu\sigma}\left[\frac{S(t-\sigma)}{S_0}-1-\ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right)-\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)+1+\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)\right] \\
&-\mathbf{R_0}\int_0^\tau kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times[I(t-s)-I(t)]ds,
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\left[-\frac{S(t-\sigma)}{S_0} + 1 + \ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S_0}\right) + \left(\frac{S(t)}{S_0}\right) - 1 - \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)\right]$$

$$+ \mathbf{R_0}\int_0^\tau kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} \times [I(t) - I(t-s)]ds,$$

$$= \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\left[-\frac{S(t-\sigma)}{S_0} + \ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right) + \left(\frac{S(t)}{S_0}\right)\right]$$

$$+ k\mathbf{R_0}\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} \times [I(t) - I(t-s)]ds.$$

On somme les dérives du W_1 et W_2,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt},$$

$$= (\mu+\alpha)S_0\left(2 - \frac{S_0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S_0}\right) + \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S_0\left[-1 + \frac{S(t-\sigma)}{S_0} - \frac{S(t-\sigma)}{S(t)} + \frac{S_0}{S(t)}\right]$$

$$+ (\mathbf{R_0} - 1)\beta S(t)I(t) + k\mathbf{R_0}\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)}[I(t-s) - I(t)]ds$$

$$+ \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\left[-\frac{S(t-\sigma)}{S_0} + \ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right) + \frac{S(t)}{S_0}\right]$$

$$+ k\mathbf{R_0}\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} \times [I(t) - I(t-s)]ds,$$

$$= (\mu+\alpha)S_0\left(2 - \frac{S_0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S_0}\right) - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S_0\left(2 - \frac{S_0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S_0}\right) + (\mathbf{R_0} - 1)\beta S(t)I(t)$$

$$+ \varepsilon\alpha S_0 e^{-\mu\sigma}\left[-1 - \frac{S(t-\sigma)}{S(t)} + \ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)\right],$$

$$= (\mu + \alpha - \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})S_0\left(2 - \frac{S_0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S_0}\right) + (\mathbf{R_0} - 1)\beta S(t)I(t) - \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S_0 h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right),$$

$$\frac{dW}{dt} \leq 0,$$

on a bien que:

$$(\mathbf{R_0} - 1)\beta S(t)I(t) \leq 0,$$

car

$$\mathbf{R_0}<1, \qquad \beta S(t)I(t)>0,$$

et on a

$$-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S_0 h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right) \leq 0$$

car

$$\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S_0>0, \qquad h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)>0,$$

et

$$(\mu + \alpha - \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})S_0\left(2 - \frac{S_0}{S(t)} - \frac{S(t)}{S_0}\right) \leq 0,$$

car

$$(\mu + \alpha - \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})S_0>0,$$

$$2-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0}=1+1-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0},$$

on peut écrire 1 comme une fraction, on obtient:

$$\begin{aligned}
1+1-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0} &= \frac{S_0}{S_0}+\frac{S(t)}{S(t)}-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0},\\
&= \frac{S_0-S(t)}{S_0}-\frac{S_0-S(t)}{S(t)},\\
&= (S_0-S(t))\left(\frac{1}{S_0}-\frac{1}{S(t}\right),\\
&= (S_0-S(t))\left(\frac{S(t)-S_0}{S(t)S_0}\right)\\
&= (S_0-S(t))^2\left(\frac{-1}{S(t)S_0}\right),\\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

car

$$(S_0-S(t))^2\geq 0 \qquad \frac{-1}{S(t)S_0}<0.$$

Par conséquence on a:
Ω *est positivement invariant*
$\frac{dW}{dt}\leq 0,$

$$\mathbb{E}=\left\{\frac{dW}{dt}=0\right\},$$

$$\frac{dW}{dt}=(\mu+\alpha-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})S_0\left(2-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0}\right)+(\mathbf{R_0}-1)\beta S(t)I(t)-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S_0h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)=0,$$
$\Longrightarrow$

1. $(\mu+\alpha-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})S_0\left(2-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0}\right)=0,$

$$(\mu+\alpha-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})S_0=0, \qquad \textit{où} \qquad 2-\frac{S_0}{S(t)}-\frac{S(t)}{S_0}=0,$$

$$\textit{on a} \qquad (\mu+\alpha-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})S_0\neq 0, \qquad \textit{donc} \qquad 2=\frac{S_0}{S(t)}+\frac{S(t)}{S_0},$$

$$2=\frac{S_0^2+S(t)^2}{S(t)S_0},$$

$$S_0^2+S(t)^2-2S(t)S_0=0\Longrightarrow(S_0-S(t))^2=0\Longrightarrow S_0=S(t).$$

2. $(\mathbf{R_0}-1)\beta S(t)I(t)=0,$

$$\mathbf{R_0}-1=0, \qquad \textit{où} \qquad \beta S(t)I(t)=0,$$

$$\mathbf{R_0}<1, \qquad \textit{donc} \qquad \mathbf{R_0}-1\neq 0, \qquad \textit{alors} \qquad \beta S(t)I(t)=0,$$

$$S(t)=S_0, \qquad \textit{donc} \qquad I(t)=0.$$

3. $\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S_0 h\left(\dfrac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)=0,$

$$\Longrightarrow h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)=0 \Longrightarrow S(t-\sigma)=S(t).$$

$$\mathbb{E}=\{S(t)=S(t-\sigma)=S_0, I(t)=0\}=\{(S_0,0)\}.$$

Ainsi, à partir du principe d'invariance de LaSalle, on déduit que $(S_0,0)$ *est globalement stable.Alors* $P(t),T(t),R(t)$ *sont globalement stable*
car on a

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} S(t)=S_0,$$

donc $\exists\epsilon>0$ *et un* $T>0$ *tel que pour tout* $t\geq T$ *on a:*

$$|S(t)-S_0|\leq\epsilon,$$

c-à-d

$$S_0-\epsilon\leq S(t)\leq S_0+\epsilon.$$

En utilisant cette l'inégalité dans la 2 équation de système (2.1) . on obtient:

$$\frac{dP}{dt}\leq\alpha(S_0+\epsilon)-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S_0-\epsilon)-\mu P(t).$$

alors on a pour $t>T$.

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} P(t)\leq\frac{\alpha(S_0+\epsilon)-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S_0-\epsilon)}{\mu}.$$

de même manière on a

$$\frac{dP}{dt}\geq\alpha(S_0-\epsilon)-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S_0+\epsilon)-\mu P(t),$$

alors on a pour $t>T$.

$$\liminf_{t\longrightarrow\infty} P(t)\geq\frac{\alpha(S_0-\epsilon)-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S_0+\epsilon)}{\mu}.$$

Et quant $\epsilon\longrightarrow 0$ *(la continuité de la solution)on obtient alors*

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} P(t)=\liminf_{t\longrightarrow\infty} P(t)=\lim_{t\longrightarrow\infty} P(t)=\frac{\alpha S_0-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S_0}{\mu}.$$

De même on a

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} I(t)=0,$$

donc $\exists\epsilon>0$ *et un* $T>0$ *tel que pour tout* $t\geq T$ *on a:*

$$|I(t)|\leq\epsilon,$$

c-à-d

$$-\epsilon \leq I(t) \leq \epsilon,$$

En utilisant cette l'inégalité dans la 4 et 5 équations de système (2.1) . on obtient :

$$\frac{dT}{dt} \leq k\epsilon - (\mu + \delta_2)T(t) - k\tilde{f}\epsilon,$$

pour t >T on a

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} T(t) \leq \frac{k\epsilon - k\tilde{f}\epsilon}{\mu + \delta_2}.$$

De même méthode on a

$$\frac{dT}{dt} \geq -k\epsilon - (\mu + \delta_2)T(t) + k\tilde{f}\epsilon,$$

pour t> T on a

$$\liminf_{t \longrightarrow \infty} T(t) \geq \frac{-k\epsilon + k\tilde{f}\epsilon}{\mu + \delta_2}.$$

Et quant $\epsilon \longrightarrow 0$ alors

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} T(t) = \liminf_{t \longrightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \longrightarrow \infty} T(t) = 0.$$

Même chose pour $R(t)$

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} R(t) = \liminf_{t \longrightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \longrightarrow \infty} R(t) = 0.$$

2.4 La stabilité globale pour $\mathbf{R_0}$>1

2.4.1 Persistance uniforme

A partir du lemme (2.1), nous concluons que $S(t)$ est persistant. Il reste donc à vérifier $I(t)$ est permanent ou non.

Théoréme 2.2. *Pour $\mathbf{R_0}>1$, alors $I(t)$ est uniformément persistant ce qui signifie*

$$\liminf_{t \to +\infty} I(t) \geq I^* e^{-(\delta+\eta+\mu+k)\tau} = I^*\nu.$$

Preuve. *On pose*

$$\begin{aligned}
B(t) =& I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\int_{t-s}^t I(\epsilon)d\epsilon ds,\\
\dot{B}(t) =& \dot{I}(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\left[I(\epsilon)\right]_{t-s}^t ds\\
=& \beta S(t)I(t) - (\delta+\eta+\mu+k)I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds\\
&+k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t)ds - k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t-s)ds,\\
=& \beta S(t)I(t) - (\delta+\eta+\mu+k)I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}I(t)ds,\\
\dot{B} =& [\beta S(t) - (\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})]I(t).
\end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'il est impossible d'avoir $\forall t \geq \rho\tau$ *avec* ρ *grand et* ,$\forall 0<q<1$, $I(t) \leq qI^*$
Supposons alors que $[\forall t \geq \rho\tau, \quad \forall 0<q<1, \quad I(t) \leq qI^*]$ *est vraie*

Soit $t \geq \rho\tau$, *et remplaçons* $I(t) \leq qI^*$ *dans la première équation de (2.2) nous obtenons*

$$\begin{aligned}\dot{S} =& \Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma), && (2.4)\\ \geq& \Lambda - \beta S(t)I^*q - (\mu+\alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma), && (2.5)\\ =& \Lambda - (\beta I^*q + \mu + \alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma). && (2.6)\end{aligned}$$

Donc, $S(t)>\tilde{S}(t)$ *(Par le Principe de Comparaison), avec* $\tilde{S}(t)$, *étant la solution de l'équation*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{S}} = \Lambda - (\beta I^*q + \mu + \alpha)\tilde{S}(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}(t-\sigma), \\ \tilde{S}(\rho\tau) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

On trouve alors que

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{S}(t) = \tilde{S}^* = \frac{\Lambda}{\mu+\alpha+\beta I^*q - \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}},$$

où $\tilde{S}^* > S^*$. *De plus,* $\forall t \geq \rho_1\tau$ *avec* $\rho_1 = \sup\{\rho, m\}$ *(* ρ_1 *qui est un nombre suffisamment grand et* ε *qui est suffisamment petit)*

$$S^* < \tilde{S}^* - \varepsilon < \tilde{S}(t) < S(t).$$

*Pour la preuve de ces résultats, voir (4)**Annexe 1**.*
En substituant ce résultat dans l'équation $\dot{B}$ *pour obtenir pour* $t \geq (\rho_1+1)\tau$

$$\dot{B} > [\beta(\tilde{S}^* - \varepsilon) - (\delta+\eta+\mu+k-k\tilde{f})]I(t) = \beta[(\tilde{S}^* - \varepsilon) - S^*]I(t),$$

où $(\tilde{S}^* - \varepsilon) - S^* > 0$.
Maintenant, on pose

$$\underline{I} = \min_{\theta\in[-\tau,0]} I(\rho_1\tau + \tau + \theta).$$

Montrons maintenant que $I(t) \geq \underline{I}$, $\forall t \geq \rho_1\tau$.
Supposons que $\exists T>0$,*tel que*

- $I(t) \geq \underline{I}$ *pour* $\rho_1\tau \leq t \leq, (\rho_1+1)\tau + T$,
- $I(t) = \underline{I}$ *pour* $t = (\rho_1+1)\tau + T$,
- $\dot{I}(t) \leq 0$ *pour* $t = (\rho_1+1)\tau + T$.

On obtient alors de la deuxième équation de (2.2) pour $t = \tau(\rho_1+1)+T$

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) \geq& [\beta S(t) - (\mu+\eta+\delta+k)]\underline{I} + \int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}k\underline{I}ds,\\ =& [\beta S(t) - (\mu+\eta+\delta+k-k\tilde{f})]\underline{I},\\ \geq& [\beta(\tilde{S}^* - \varepsilon) - (\mu+\eta+\delta+k-k\tilde{f})]\underline{I}\\ =& \beta[(\tilde{S}^* - \varepsilon) - S^*]\underline{I} > 0,\end{aligned}$$

car $(\tilde{S}^* - \varepsilon) - S^* > 0$. *On obtient donc une contradiction.*
Donc

$$I(t) > \underline{I} \quad \forall t \geq \rho_1 \tau.$$

D'où:

$$\dot{B}(t) \geq \beta[(\tilde{S}^* - \varepsilon) - S^*]\underline{I} > 0 \quad \forall t \geq \rho_1 \tau.$$

On en déduit que

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} B(t) = +\infty.$$

Or

$$\begin{aligned} B(t) &= I(t) + \int_0^\tau f(s) e^{(\mu+\delta_2)s} \int_{t-s}^t I(\varepsilon) d\varepsilon ds, \\ &\leq \frac{\Lambda}{\mu} + \int_0^\tau f(s) e^{(\mu+\delta_2)s} \int_{t-s}^t \frac{\Lambda}{\mu} d\varepsilon ds, \\ &\leq \frac{\Lambda}{\mu} + \int_0^\tau f(s) e^{(\mu+\delta_2)s} \left[\frac{\Lambda}{\mu}\right]_{t-s}^t ds, \\ &\leq \frac{\Lambda}{\mu} + \int_0^\tau f(s) e^{(\mu+\delta_2)s} \frac{\Lambda}{\mu} s ds, \\ &\leq \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\mu} \tau \tilde{f}, \end{aligned}$$

et ceci une contradiction.
donc note hypothèse $I(t) \leq I^* q$ *est fausse.*
On obtient donc les deux cas possibles suivants
✓ *Cas 1:* $I(t) \geq qI^*$ *pour une grande valeur de t.*
✓ *Cas 2: I(t) oscille au voisinage de* qI^* *pour t suffisamment grand.*
Il suffit de vérifier le cas 2. On considère donc t_0, t_1 *deux valeurs de temps suffisamment grandes vérifiant :* $I(t_0) = I(t_1) = qI^*, \quad$ *et* $\quad I(t) < qI^* \quad$ *pour* $\quad t_0 < t < t_1$.
Si $t_1 - t_0 \leq \tau$, *et puisque la deuxième équation de (2.2) nous donne*

$$\dot{I}(t) > -(\mu + \eta + \delta + k)I(t),$$

alros pour $\quad t \in [t_0, t_1]$, *on obtient*

$$\begin{aligned} I(t) &> I(t_0) e^{-(\mu+\eta+\delta+k)(t-t_0)}, \\ &> qI^* e^{-(\mu+\eta+\delta+k)\tau} := qI^* \nu. \end{aligned}$$

Évidemment, pour $t_1 - t_0 > \tau$, *on a* $I(t) \geq qI^* \nu$ *pour* $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, *car la deuxième équation de (2.2) donne*

$$\begin{aligned} I(t) &> I(t_0) e^{-(\mu+\eta+\delta+k)(t-t_0)}, \\ &> qI^* e^{-(\mu+\eta+\delta+k)(t-t_0)} \\ &> qI^* e^{-(\mu+\eta+\delta+k)\tau}, \\ &= qI^* \nu. \end{aligned}$$

Pour $t \in [t_0+\tau, t_1]$, *montrons qu'on a* $I(t)>qI^*\nu$ *par l'absurde.*
Supposons qu'il $\exists T^*>0$ *tel que* $I(t)>qI^*\nu$ *pour* $t_0+\tau<t<t_0+\tau+T^*$, $I(t_0+\tau+T^*)=qI^*\nu$, *et* $\dot I(t_0+\tau+T^*)<0$. *On obtient alors de l'équation I de (2.2) au point* $t=t_0+\tau+T^*$*:*

$$\begin{aligned}\dot I \geq &[\beta S(t)-(\mu+\eta+k-k\tilde f)]qI^*\nu,\\ =&[\beta S(t)-\beta S^*]qI^*\nu,\\ >&\beta[(\tilde S^*-\varepsilon)-S^*]qI^*\nu,\\ >&0,\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction avec $\dot I(t_0+\tau+T^*)<0$.
Donc, $I(t)\geq qI^*\nu$ *pour* $t\in[t_0,t_1]$.
Mentionnant que t_0,t_1 *sont arbitraires alors* $I(t)\geq qI^*\nu$ *pour tout t qui est grand dans le cas 2. Donc,*

$$\liminf_{t\longrightarrow+\infty} I(t)\geq qI^*\nu.$$

En posant $q\longrightarrow 1$, *on obtient*

$$\liminf_{t\longrightarrow+\infty} I(t)\geq I^*\nu.$$

2.4.2 Stabilité globale de l'équilibre endémique

On définit la fonction de Lyapunov:

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t),$$

avec

$$V_1(t)=S^*h\left(\frac{S(t)}{S^*}\right)+I^*h\left(\frac{I(t)}{I*}\right),$$

$$V_2(t)=\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S^*\int_0^\sigma h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right)d\sigma+I^*\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times h\left(\frac{I(t-\sigma)}{I^*}\right)d\sigma ds.$$

Remarque 1. *Pour que la fonction* $h\left(\frac{S(t)}{S^*}\right)$ *et* $h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right)$ *definie, doit être* S^* *et* I^* *des points non nul, pour cela nous avons étudié la persistence de* S^* *et* I^*.

$V(t)$ est une fonction continument dérivable tel que:
et le point d'équilibre $E^*=(S^*,I^*)$,

1. On calcule: $V(t)_{(S^*,I^*)}=V_1(t)_{(S^*,I^*)}+V_2(t)_{(S^*,I^*)}$.
   On remplace $(S(t),I(t))$ par (S^*,I^*).

$$\begin{aligned}V_1(t)_{(S^*,I^*)}=&S^*h\left(\frac{S^*}{S^*}\right)+I^*h\left(\frac{I^*}{I^*}\right),\\ =&S^*h(1)+I^*h(1),\\ =&0,\\ V_2(t)=&\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S^*\int_0^\sigma h\left(\frac{S^*}{S^*}\right)d\sigma+I^*\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\times h\left(\frac{I^*}{I^*}\right)d\sigma ds,\\ =&\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S^*\int_0^\sigma h(1)d\sigma+I^*\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}h(1)d\sigma ds,\\ =&0,\end{aligned}$$

donc on a:

$$V(t)_{(S^*,I^*)} = 0.$$

2. On assure la positivité de $V(t)$ on a:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= S^* h\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + I^* h\left(\frac{I(t)}{I*}\right), \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

car on a:

$$S^* h\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) \geq 0, \quad I^* h\left(\frac{I(t)}{I*}\right) \geq 0,$$

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma} S^* \int_0^\sigma h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right) d\sigma + I^* \int_0^\tau \int_0^s kf(s) e^{-(\mu+\delta_2)s} \times h\left(\frac{I(t-\sigma)}{I^*}\right) d\sigma ds, \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

car on a:

$$\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma} S^* \geq 0, \quad h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right) \geq 0, \quad kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} h\left(\frac{I(t-\sigma)}{I^*}\right) \geq 0.$$

3. On calcule la dérive de V(t) et montre qu 'elle est négative
Nous calculons $\dot{V}_1$,

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= S^* \left[\frac{\dot{S}(t)}{S^*} - \frac{\dot{S}(t)}{S^*}\frac{S^*}{S(t)}\right] + I^* \left[\frac{\dot{(t)}}{I^*} - \frac{\dot{I}(t)}{I^*}\frac{I^*}{I(t)}\right], \\ &= \dot{S}(t)\left[1 - \frac{S^*}{S(t)}\right] + \dot{I}(t)\left[1 - \frac{I^*}{I(t)}\right], \\ &= [\Lambda - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma} S(t-\sigma)]\left[1 - \frac{S^*}{S(t)}\right] \\ &+ \left[\beta S(t)I(t) - (\delta+\eta+\mu+k)I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)} I(t-s) ds\right]\left[1 - \frac{I^*}{I(t)}\right]. \end{aligned}$$

le point d'équilibre (S^*, I^*) vérifie

$$\Lambda = \beta S^* I^* + (\mu+\alpha)S^* - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*,$$
$$\delta + \eta + \mu + k = \beta S^* + k\tilde{f},$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= [\beta S^* I^* + (\mu+\alpha)S^* - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^* - \beta S(t)I(t) - (\mu+\alpha)S(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}S(t-\sigma)]\left[1 - \frac{S^*}{S(t)}\right] \\
&+ \left[\beta S(t)I(t) - (\beta S^* + k\tilde{f})I(t) + k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)}I(t-s)ds\right]\left[1 - \frac{I^*}{I(t)}\right], \\
&= \frac{(\mu+\alpha)}{S(t)}[S(t) - S^*][S^* - S(t)] + \beta S^* I^*\left(1 - \frac{S^*}{S(t)} + 1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) \\
&+ \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\left(\frac{S^*}{S(t)} - 1 + \frac{S(t-\sigma)}{S^*} - \frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right) + \int_0^\tau I^* k f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} \\
&\times \left(\frac{I(t-s)}{I^*} - \frac{I(t-s)}{I(t)} - \frac{I(t)}{I^*} + 1\right)ds, \\
&= (\mu+\alpha)S^*\left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*}\right) + \beta S^* I^*\left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*}\right) \\
&+ \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\left(\frac{S^*}{S(t)} - 1 + \frac{S(t-\sigma)}{S^*} - \frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right) + \int_0^\tau I^* k f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s} \\
&\times \left(\frac{I(t-s)}{I^*} - \frac{I(t-s)}{I(t)} - \frac{I(t)}{I^*} + 1\right)ds.
\end{aligned}$$

Nous calculons $\dot{V}_2$,

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\int_0^\sigma \frac{d}{dt}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right)\right)d\sigma \\
&+ I^*\int_0^\tau\int_0^s kf(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\frac{d}{dt}\left(h\left(\frac{I(t-\sigma)}{I^*}\right)\right)d\sigma ds, \\
&= -\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\int_0^\sigma \frac{d}{d\sigma}\left(h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right)\right)d\sigma - I^* k\int_0^\tau\int_0^s f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\frac{d}{d\sigma}h\left(\left(\frac{I(t-\sigma)}{I^*}\right)\right)d\sigma ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= -\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\left[h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right)\right]_0^\sigma - I^* k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\left[h\left(\frac{I(t-\sigma)}{I^*}\right)\right]_0^s ds, \\
&= \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\left[-\frac{S(t-\sigma)}{S^*} + 1 + \ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S^*}\right) + \frac{S(t)}{S^*} - 1 - \ln\left(\frac{S(t)}{S^*}\right)\right] \\
&+ I^* k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\left[-\frac{I(t-s)}{I^*} + 1 + \ln\left(\frac{I(t-s)}{I^*}\right) + \frac{I(t)}{I^*} - 1 - \ln\left(\frac{I(t)}{I^*}\right)\right]ds, \\
&= \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\left[-\frac{S(t-\sigma)}{S^*} + \ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right) + \frac{S(t)}{S^*}\right] \\
&+ I^* k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\left[-\frac{I(t-s)}{I^*} + \ln\left(\frac{I(t-s)}{I(t)}\right) + \frac{I(t)}{I^*}\right]ds.
\end{aligned}$$

On somme les dérives de $\dot{V}_1(t)+\dot{V}_2(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} =& \frac{dV_1(t)}{dt}+\frac{dV_2(t)}{dt},\\
=&(\mu+\alpha)S^*\left(2-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{S(t)}{S^*}\right)+\beta S^*I^*\left(2-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{S(t)}{S^*}\right)\\
&+\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\left[\frac{S^*}{S(t)}-1+\frac{S(t-\sigma)}{S^*}-\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}-\frac{S(t-\sigma)}{S^*}+\ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)+\frac{S(t)}{S^*}\right],\\
&+I^*k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\\
&\times\left[-\frac{I(t-s)}{I^*}+\ln\left(\frac{I(t-s)}{I(t)}\right)+\frac{I(t)}{I^*}+1+\frac{I(t-s)}{I^*}-\frac{I(t-s)}{I(t)}-\frac{I(t)}{I^*}\right]ds,\\
=&[\mu+\alpha+\beta S^*I^*-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*]\left(2-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{S(t)}{S^*}\right)+\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\left(1-\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right.\\
&\left.+\ln\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)\right)+I^*k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}\left[1+\ln\left(\frac{I(t-s)}{I(t)}\right)-\frac{I(t-s)}{I(t)}\right]ds,\\
=&\Lambda\left(2-\frac{S^*}{S(t)}-\frac{S(t)}{S^*}\right)-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*h\left(\frac{S(t-\sigma)}{S(t)}\right)-I^*k\int_0^\tau f(s)e^{-(\mu+\delta_2)s}h\left(\frac{I(t-s)}{I(t)}\right).
\end{aligned}$$

Donc, pour $\mathbf{R_0}>1$, on a $\dot{V}(t)\leq 0$,

soit

$$\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{D}$$

une trajectoire totale dans $\mathbb{D}$ tel que

$$\phi(t)=(S(t),I(t))$$

$$\begin{aligned}
S(\theta_1)&=\phi_1(\theta_1)\quad \theta_1\in[-\sigma,0],\\
I(\theta_2)&=\phi_3(\theta_2)\quad \theta_2\in[-\tau,0].
\end{aligned}$$

avec $(S(t),I(t))$ solution de problème (2.2)
On remarque que

$$\frac{d}{dt}V(\phi(t))=0\Longrightarrow S(t)=S(t-\sigma)=S^*, I(t-s)=I(t).$$

Soit M le plus grand ensemble invariant tel que $\frac{d}{dt}V(\phi(t))=0$, alors l'ensemble M vérifie que $S(t)=S(t-\sigma)=S^*$, $I(t-s)=I(t)$, pour tout $t\in\mathbb{R}$ En remplaçant $S(t)$ et $S(t-\sigma)$ par S^* dans l'équation de $\dot{S}$ dans (2.2).
On obtient

$$I(t)=I^*\quad\text{pour tout}\quad t\in\mathbb{R},$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$ le plus grand ensemble invariant

$$M=\left\{\frac{d}{dt}V(\phi(t))=0\right\}=\{(S^*,I^*)\},$$

(principe d'invariance de LaSalle)
la compacité de $\mathbb{D}$ nous permet de conclure que $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ respectivement non vides, compacts, invariants. De plus $\phi(t)$ est attire par $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ lorsque $t \longrightarrow^{+}_{-} \infty$.

Par définition V est constante sur $\omega(x)$ et $\alpha(x)$, et donc

$$\omega(x) = \alpha(x) = (S^*, I^*).$$

Ainsi

$$\lim_{t \longrightarrow^{+}_{-} \infty} \phi(t) = (S^*, I^*),$$

et

$$\lim_{t \longrightarrow_{-}\infty} V(\phi(t)) = \lim_{t \longrightarrow_{+}\infty} V(\phi(t)) = V(S^*, I^*).$$

Alors $V(\phi(t))$ est une fonction décroissante par rapport t
On obtient :

$$V(\phi(t)) = V(S^*, I^*) \quad \text{Pour tout} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\phi(t) = (S^*, I^*) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particulier

$$(\phi_1, \phi_3) = (S^*, I^*).$$

donc l'attracteur de $\mathbb{D}$ est réduit au singleton par l'équilibre endémique (S^*, I^*) D'après théorème (1.3), nous avons conclure que l'équilibre endémique est Globalement asymptotique stable. alors $P(t)$, $T(t)$, $R(t)$ sont globalement stable,
car on a

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} S(t) = S^*.$$

donc $\exists \epsilon > 0$ et un $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a:

$$|S(t) - S^*| \leq \epsilon,$$

c-à-d

$$S^* - \epsilon \leq S(t) \leq S^* + \epsilon.$$

et

$$-(S^* + \epsilon) \leq -S(t) \leq -(S^* - \epsilon).$$

En utilisant cette l'inégalité dans la 2 équation de système (2.1) . on obtient:

$$\frac{dP}{dt} \leq \alpha(S^* + \epsilon) - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S^* - \epsilon) - \mu P(t),$$

alors on a pour $t > T$.

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} P(t) \leq \frac{\alpha}{\mu}\Big((S^* + \epsilon) - \varepsilon e^{-\mu\sigma}(S^* - \epsilon)\Big),$$

de même manière on a

$$\frac{dP}{dt} \geq \alpha(S^* - \epsilon) - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S^* + \epsilon) - \mu P(t),$$

alors on a pour $t>T$

$$\liminf_{t\longrightarrow\infty} P(t) \geq \frac{\alpha}{\mu}\left((S^*-\epsilon)-\varepsilon e^{-\mu\sigma}(S^*+\epsilon)\right).$$

Mettant $\epsilon \longrightarrow 0$(continuité de la solution on obtient)

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} P(t) = \liminf_{t\longrightarrow\infty} P(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} P(t) = \frac{1}{\mu}\left(\alpha S^*-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}S^*\right)$$

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} I(t) = I^*.$$

donc $\exists\epsilon>0$ et un $T>0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a :

$$|I(t)-I^*| \leq \epsilon,$$

c-à-d

$$I^*-\epsilon \leq I(t) \leq I^*+\epsilon.$$

et

$$-(I^*+\epsilon) \leq -I(t) \leq -(I^*-\epsilon).$$

En utilisant cette l'inégalité dans la 4 et 5 équations de système (2.1) . on obtient :

$$\frac{dT}{dt} \leq k(I^*+\epsilon)-(\mu+\delta_2)T(t)-k\tilde{f}(I^*-\epsilon).$$

alors on a pour $t>T$.

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} T(t) \leq \frac{1}{\mu+\delta_2}\left(k(I^*+\epsilon)-k\tilde{f}(I^*-\epsilon)\right),$$

de même manière on a

$$\frac{dT}{dt} \geq k(I^*-\epsilon)-(\mu+\delta_2)T(t)-k\tilde{f}(I^*+\epsilon)$$

$$\liminf_{t\longrightarrow\infty} T(t) \geq \frac{1}{\mu+\delta_2}\left(k(I^*-\epsilon)-k\tilde{f}(I^*+\epsilon)\right).$$

Et quant $\epsilon \longrightarrow 0$

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} T(t) = \liminf_{t\longrightarrow\infty} T(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} T(t) = \frac{1}{\mu+\delta_2}\left(kI^*-k\tilde{f}I^*\right).$$

Le même $R(t)$ on a

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} R(t) = \liminf_{t\longrightarrow\infty} R(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} R(t) = \frac{1}{\mu}\left(\delta I^*+\frac{\delta_2}{\mu+\delta_2}(kI^*-k\tilde{f}I^*)\right).$$

On conclure que $P(t), T(t), R(t)$ sont globalement stable pour $\mathbf{R}_0>1$.

CHAPTER 3

LES MESURES REQUISES

3.1 Mesures Requises

Dans cette section, nous utiliserons l'efficacité des mesures (protection et traitement), et montrerons si cela peut réduire l'infection, et dans quelle mesure cela peut réduire les cas d'infection. Nous définissons R_0^{SIR} le nombre de reproduction de base pour le modèle SIR ($\alpha = 0$ et $k = 0$), où

$$R_0^{SIR} = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu+\delta+\eta)}.$$

Évidemment, $\Re_0$ correspondant au modèle (1) est

$$\Re_0 = \frac{\beta\Lambda}{(\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu+\delta+\eta)},$$

qui peut s'écrire comme

$$\Re_0 = R_0^{SIR}\frac{\mu}{\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}} < R_0^{SIR}.$$

De même, nous avons

$$\mathbf{R}_0 = \frac{\beta\Lambda}{(\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu+\delta+\eta+k-k\tilde{f})},$$

qui peut s'écrire comme

$$\mathbf{R}_0 = R_0^{SIR}\frac{\mu(\mu+\delta+\eta)}{(\alpha+\mu-\alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma})(\mu+\delta+\eta+k-k\tilde{f})} < R_0^{SIR}.$$

Aussi,

$$\mathbf{R}_0 = \Re_0\frac{\mu+\delta+\eta}{(\mu+\delta+\eta+k-k\tilde{f})} < \Re_0.$$

On a donc l'estimation

$$\mathbf{R}_0 < \Re_0 < R_0^{SIR}.$$

Cela signifie que le traitement à côté de la protection est un meilleur moyen de réduire l'infection que la protection seule, qu'il peut être utilisé comme vaste public des mesures sanitaires pour réduire rapidement les cas infectieux. Maintenant, nous allons vérifier les forces de traitement et de protection nécessaires qui peuvent conduire à aucune situation d'infection.
A présent, nous considérons que $R_0^{SIR}>1$. Nous rechercherons l'intervention nécessaire en matière de santé publique, un chemin $\Re_0$ ou $\mathbf{R}_0$ devient inférieur à un. Cela signifie que l'infection a disparu de la population.
Maintenant, nous prendrons $R_0^{SIR}>1$, il suffit donc de trouver l'effort de protection minimal pour réduire $\Re_0$ et $\mathbf{R}_0$ en dessous de 1.

C'est pour cela que nous considérons la force de la protection α comme paramètre de contrôle. Ainsi, $\Re_0<1$ équivaut à

$$\alpha>\alpha_{\Re_0} := \frac{\mu(R_0^{SIR}-1)}{1-\varepsilon e^{-\mu\sigma}}.$$

De même, $\mathbf{R}_0 < 1$ équivaut à

$$\alpha>\alpha_{\mathbf{R}_0} := \frac{\mu}{1-\varepsilon e^{-\mu\sigma}}\left[\frac{\mu+\delta+\eta}{\mu+\delta+\eta+k(1-\tilde{f})}R_0^{SIR}-1\right].$$

Comme première remarque, nous pouvons voir que $\alpha_{\mathbf{R}_0}<\alpha_{\Re_0}$, cela signifie que la force de protection requise en présence de traitement est inférieure à celle avec la cure.
Pour mentionner que $\alpha_{\Re_0}$ est toujours positif, ce qui signifie que toujours chaque fois que $R_0^{SIR}>1$, il a fallu une force suffisante pour réduire $\Re_0$ (pour le modèle (1)) en dessous de 1.
Cependant, $\alpha_{\mathbf{R}_0}$ n'est pas toujours positif. En effet, si

$$1<R_0^{SIR}<\frac{\mu+\delta+\eta+k(1-\tilde{f})}{\mu+\delta+\eta},$$

nous obtenons $\alpha_{\mathbf{R}_0}<0$. Cela signifie qu'aucune force de protection n'est nécessaire pour que $\mathbf{R}_0$ pour (2.1) devienne inférieur à un. Par conséquent, en présence de traitement, il n'est pas toujours nécessaire d'effectuer la protection pour arrêter la propagation de maladie.

3.2 Les simulations numériques

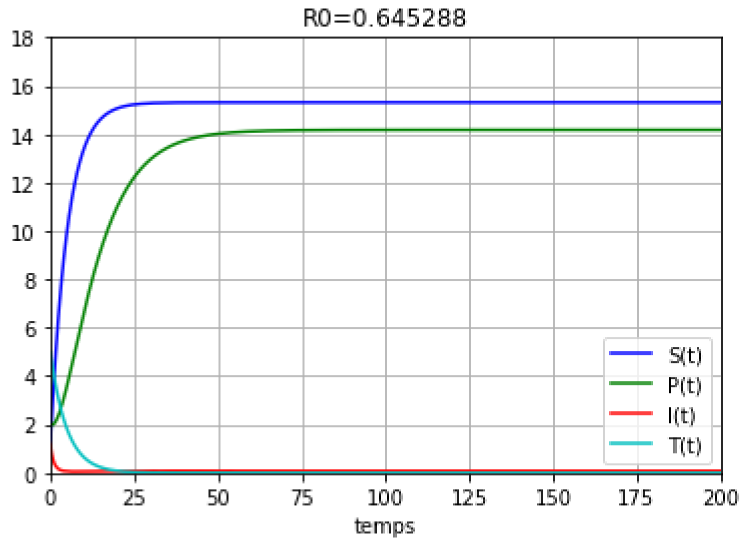
Nous allons effectuer quelques simulations numériques, pour déterminer les résultats théoriques obtenus dans le chapitre précédent,en utilisant c++, python,matlab.

Nous utilisons :
nous prendrons les l'ensemble suivant de valeurs de paramètres pour simuler le système (2.1):
$\Lambda=3, \mu=0.1, \eta=0.7, \delta=0.1, \alpha=0.1, \varepsilon=0.1, k=0.1, \sigma=3, \tau=1, \delta_2=0.1,\ f(\sigma)=ae^{-\sigma a}$
avec $a=\frac{1}{\tau}e^{-\ln(2)}$
Et les données initiales:

$$S(\theta)=1+0.2\cos(\theta) \quad \theta\in[-\sigma,0],$$
$$I(\theta)=0.5+0.2\cos(\theta) \quad \theta\in[-\tau,0],$$

$$I(0) = 3, P(0) = 2, T(0) = 3.$$

Ces valeurs de paramètres avec $\beta = 0.04$ satisfont la condition $\mathbf{R}_0$<1.
Ainsi avec $\beta = 0.1$ satisfont la condition $\mathbf{R}_0$>1

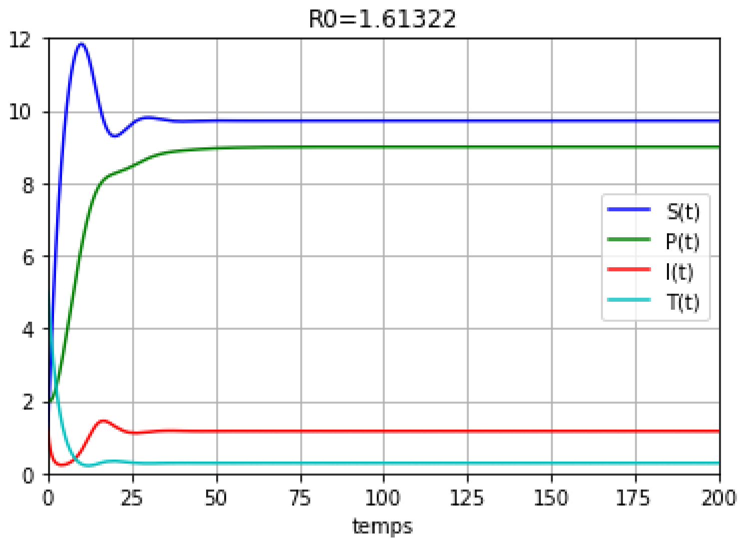


$\beta = 0.04$

Figure 3.1: **Stabilité globale de l'équilibre sans maladie.**
l'équilibre sans maladie est

$$E_0 = (S_0, I_0) = (15.577, 0)$$

une stabilité asymptotique globale qui implique que la maladie aura disparu.



$\beta = 0.1$

Figure 3.2: **La stabilité globale de l'équilibre endémique**
l'équilibre endémique est

$$E^* = (S^*, I^*) = (9.65583, 1.18101)$$

globalement asymptotiquement stable, cela implique que la maladie se maintiendra et conduira éventuellement à une maladie épidémique.

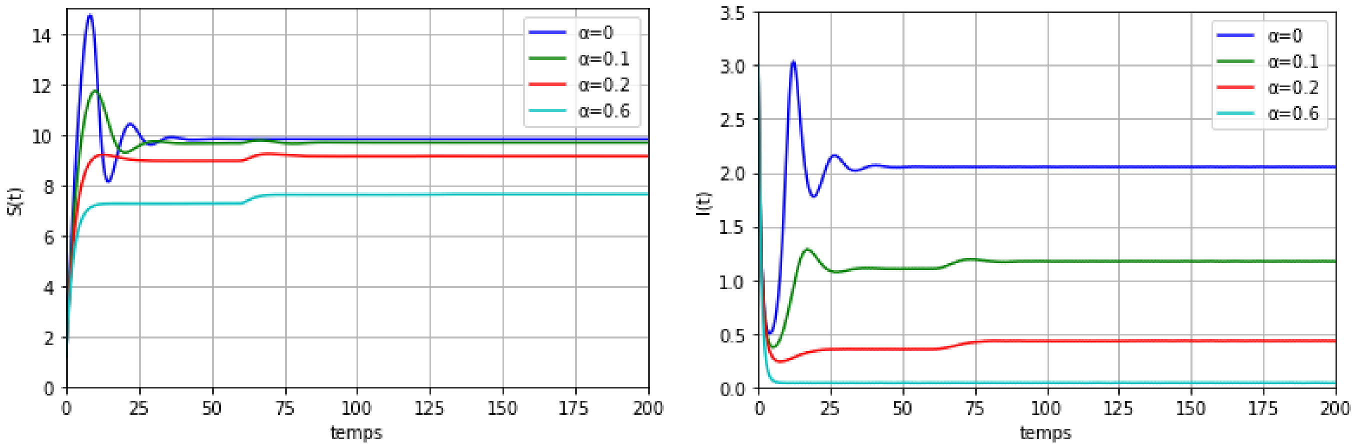


Figure 3.3: **Effet de la force de protection α sur la diffusion de la maladie en présence de traitement.**
On remarque que l'augmentation de la force protectrice peut empêcher la diffusion de la maladie.

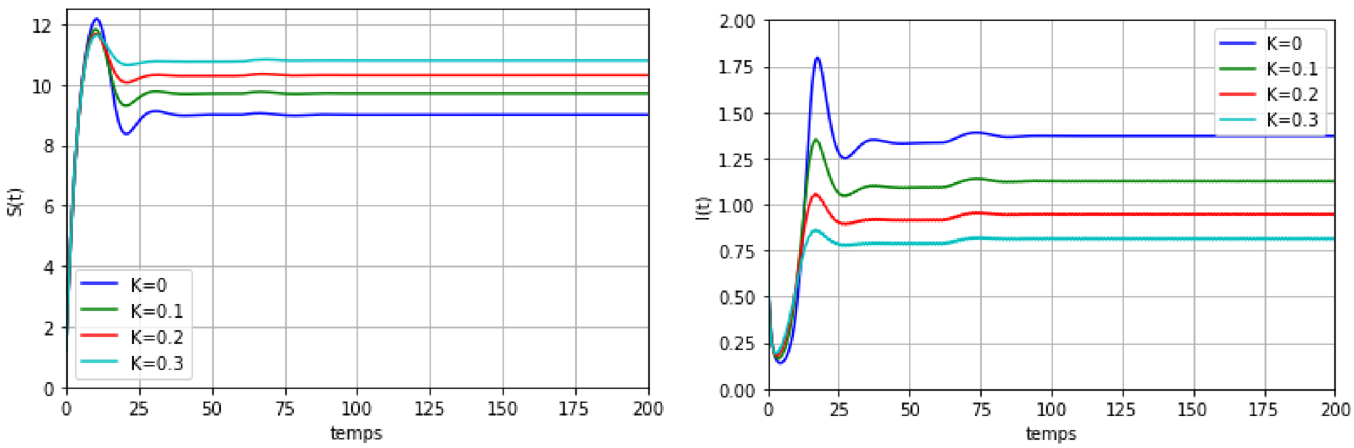


Figure 3.4: **L'influence du traitement k sur la la diffusion de la maladie en présence de protection.**
Il montre qu'augmenter la puissance du traitement peut mener à l'arrêt de l'épidémie.

Pour cette graphe on change un peu les valeurs :
$\Lambda = 15$, $\mu = 0.8$, $\eta = 0.7$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $\sigma = 3$, $\tau = 3$, $\delta_2 = 0.1$, $\beta = 0.3$

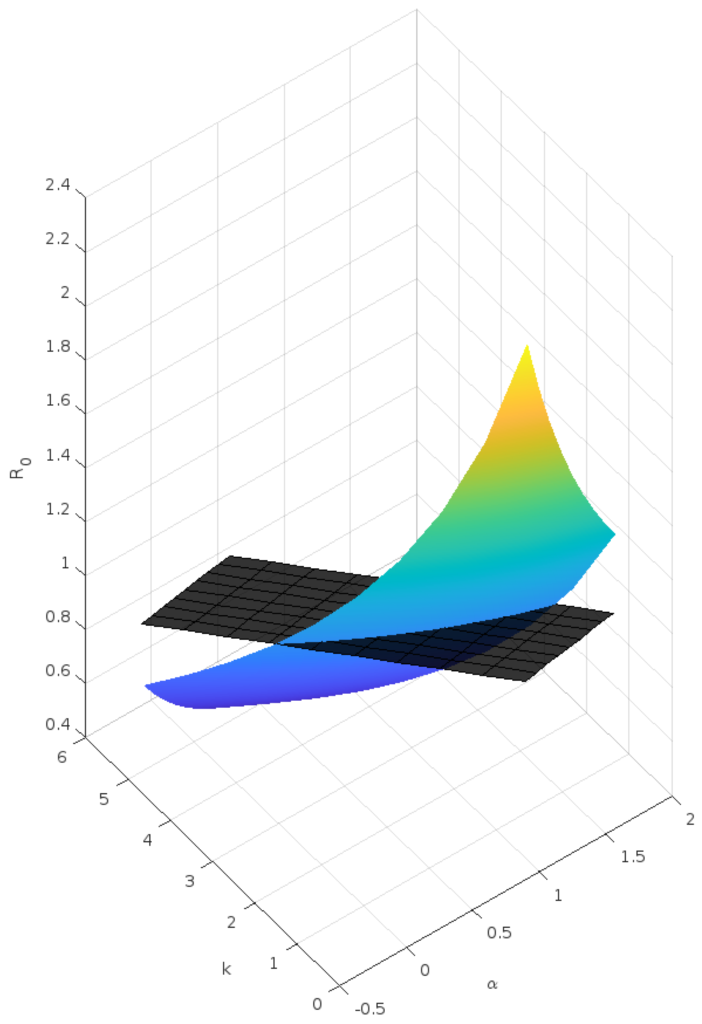


Figure 3.5: **L'effet du traitement k et du taux de protection α sur la valeur de $\mathbf{R}_0$**
Noter que $\mathbf{R}_0$ est en décroissance pour les deux paramètres. Dans le cas des valeurs supérieures à un, on obtient la stabilité globale de l'EE, et dans le cas des valeurs inférieures à un, on obtient la stabilité globale du DFE.

CHAPTER 4

CONCLUSION GÉNÉRALE

On a repris dans ce mémoire le travail réalisé dans l'article [4]. On a alors étudié un modèle épidémique avec deux retards, discret et distribué. Le modèle considère deux types de mesures prises par les services de santé publiques pour contrer la maladie. La première étant la protection qui peut être vu comme la vaccination, le confinement… qui peuvent aider les gens à éviter la maladie. La deuxième mesure est les traitements médicaux qui peuvent aider les personnes infectés à se rétablir et à minimiser les contacts avec les susceptibles.
L'analyse mathématique du modèle a montré que le comportement dynamique de la solution a un seuil gouverné par $\mathbf{R}_0$. Si $\mathbf{R}_0<1$, le point d'équilibre sans maladie (DFE) est globalement stable et pour $\mathbf{R}_0>1$ le point d'équilibre endémique (EE) est globalement stable. Pour revenir à la problématique principale du travail qui est les mesures à appliquer pour contrer l'épidémie, il a été établie que le tau de reproduction de base pour le modèle étudié est inférieur à celui du modèle avec les mesures de protection à elles seules, ce qui a permis de déduire que les traitements en plus de la protection donnent un résultat meilleur que la protection toute seule sur la réduction de l'infection. Ces mesures conjointes peuvent donc être appliquées par les services de santé pour réduire les cas d'infections. En désignant les mesures de protection comme un paramètre de contrôle on a montré que la force de protection nécessaire en présence de traitements est inférieure à celle nécessaire en leur absence. On a pu aussi déterminer que les mesures de traitement à elles seules étaient capables de réduire le tau de reproduction en dessous de 1.
Les mesures de protection et de traitement contribuent effectivement à faire baisser les cas d'infections jusqu'à l'extinction de la maladie et donc les services de santé doivent les compter parmi leur moyens de lutte contre les épidémies.

Annexe

Annexe 1

On considère que $\tilde{S}$ est la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{S}}{dt} & = \Lambda - (\beta q I^* + \mu + \alpha)\tilde{S}(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}(t-\sigma), \\ S(\rho\tau) & = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

pour obtenir que $\tilde{S}(t)<S(t)$. Maintenant,nous allons prouver

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \tilde{S} = \tilde{S}^* = \frac{\Lambda}{\mu + \alpha + \beta q I^* - \alpha\varepsilon e^{-\mu\sigma}},$$

On considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) =& \tilde{V}_1(t) + \tilde{V}_2(t), \\ \tilde{V}_1(t) =& \tilde{S}^* h\left(\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}\right), \\ \tilde{V}_2(t) =& \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \int_0^\sigma h\left(\frac{\tilde{S}(t-\epsilon)}{\tilde{S}^*}\right) d\epsilon, \end{aligned}$$

1. $\tilde{V}(t)_{(\tilde{S}^*)} = \tilde{V}_1(t)_{(\tilde{S}^*)} + \tilde{V}_2(t)_{(\tilde{S}^*)}$,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1(t)_{(\tilde{S}^*)} =& \tilde{S} h\left(\frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}^*}\right), \\ =& \tilde{S} h(1), \\ =& \tilde{S}\left(1 - 1 - \ln(1)\right), \\ =& 0. \\ \tilde{V}_2(t)_{(\tilde{S}^*)} =& \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \int_0^\sigma h\left(\frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}^*}\right) d\epsilon, \\ =& \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \int_0^\sigma h(1) d\epsilon, \\ =& \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \int_0^\sigma 0 d\epsilon, \\ \tilde{V}_2(t)_{(\tilde{S}^*)} =& 0, \\ \tilde{V}(t)_{(\tilde{S}^*)} =& 0, \end{aligned}$$

2. $\tilde{V}(t) = \tilde{V}_1(t) + \tilde{V}_2(t)$,

$$\tilde{V}_1(t) = \tilde{S}h\left(\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}\right),$$
$$\tilde{V}_1(t) \geq 0,$$
car: ,
$$h\left(\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}\right) \geq 0, \quad \tilde{S}^* \geq 0,$$
$$\tilde{V}_2(t) = \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \int_0^\sigma h\left(\frac{\tilde{S}(t-\epsilon)}{\tilde{S}^*}\right) d\epsilon,$$
$$\tilde{V}_2(t) \geq 0,$$
car:
$$\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \geq 0, \qquad \int_0^\sigma h\left(\frac{\tilde{S}(t-\epsilon)}{\tilde{S}^*}\right) d\epsilon \geq 0 \quad car: \quad h\left(\frac{\tilde{S}(t-\epsilon)}{\tilde{S}^*}\right) \geq 0,$$
donc:
$$\tilde{V}(t) \geq \tilde{V}(t)_{(\tilde{S}^*)} = 0,$$

3. On calcule $\dot{\tilde{V}}(t)$:
$\dot{\tilde{V}}(t) = \dot{\tilde{V}}_1(t) + \dot{\tilde{V}}_2(t)$.
On calcule $\dot{\tilde{V}}_1$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{V}}_1(t) =& \dot{\tilde{S}}(t)\left(1 - \frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}\right),\\
=& \left(1 - \frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}\right)[\Lambda - (\beta q I^* + \mu + \alpha)\tilde{S}(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}(t-\sigma)],\\
=& \left(1 - \frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}\right)[(\beta q I^* + \mu + \alpha)\tilde{S}^* + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* - (\beta q I^* + \mu + \alpha)\tilde{S}(t) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}(t-\sigma)],\\
=& (\beta q I^* + \mu + \alpha)\tilde{S}^*\left(2 - \frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*} - \frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}\right) + \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*\left(-1 + \frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}^*} + \frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)} - \frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}(t)}\right).
\end{aligned}$$

On calcule $\dot{\tilde{V}}_2(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{V}}_2(t) =& \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \int_0^\sigma \frac{d}{dt}h\left(\frac{\tilde{S}(t-\epsilon)}{\tilde{S}^*}\right) d\epsilon,\\
=& -\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^* \int_0^\sigma \frac{d}{d\epsilon}h\left(\frac{\tilde{S}(t-\epsilon)}{\tilde{S}^*}\right) d\epsilon,\\
=& \varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*\left[h\left(\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}\right) - h\left(\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}^*}\right)\right].
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{V}}_2(t) =&\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*\left[\left(\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}\right)-1-\ln\left(\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}\right)-\left(\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}^*}\right)+1+\ln\left(\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}^*}\right)\right],\\
=&\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*\left[\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}-\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}^*}+\ln\left(\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}(t)}\right)\right].
\end{aligned}
$$

On somme $\dot{\tilde{V}}_1(t)+\dot{\tilde{V}}_2(t)$,

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{V}}(t) =&\dot{\tilde{V}}_1(t)+\dot{\tilde{V}}_2(t),\\
=&(\beta qI^*+\mu+\alpha)\tilde{S}^*\left(2-\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}-\frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}\right)+\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*\left(-1+\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}^*}+\frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}-\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}(t)}\right)\\
&+\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*\left[\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}-\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}^*}+\ln\left(\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}(t)}\right)\right],\\
=&(\beta qI^*+\mu+\alpha-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma})\tilde{S}^*\left(2-\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}-\frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}\right)\\
&+\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*\left(-1-\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}(t)}+\ln\left(\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}(t)}\right)\right),\\
=&\Lambda\tilde{S}^*\left(2-\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}^*}-\frac{\tilde{S}^*}{\tilde{S}(t)}\right)-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}\tilde{S}^*h\left(\frac{\tilde{S}(t-\sigma)}{\tilde{S}(t)}\right),\\
\leq&0.
\end{aligned}
$$

Alors $\dot{\tilde{V}}<0$ et $\dot{\tilde{V}}=0$ équivalent à $\tilde{S}(t)=\tilde{S}(t-\sigma)$ et $\tilde{S}(t)=\tilde{S}^*$. Ainsi, à partir du principe d'invariance de LaSalle, on en déduit que $\tilde{S}^*$ est globalement stable.
En utilisant le fait que nous obtenons pour $0<q<1$

$$
\tilde{S}^*=\frac{\Lambda}{\mu+\alpha+\beta qI^*-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}}>\frac{\Lambda}{\mu+\alpha+\beta I^*-\varepsilon\alpha e^{-\mu\sigma}}=S^*.
$$

Utilisant aussi le résultat

$$
\lim_{t\to+\infty}\tilde{S}(t)=\tilde{S}^*.
$$

On a
$\forall\varepsilon>0$ il existe $m\geq 1$ telle que pour $t>m\tau$ nous avons

$$
|\tilde{S}(t)-\tilde{S}^*|<\varepsilon
$$

Choisir $\varepsilon=\dfrac{\tilde{S}^*-S^*}{2}>0$, ainsi $t>m\tau$ on a

$$
-\varepsilon<\tilde{S}(t)-\tilde{S}^*.
$$

Puis pour $t>\rho_1\tau$ avec $\rho_1=\sup\{m,\rho\}$ on obtient

$$
S^*<\tilde{S}^*-\varepsilon<S(t),
$$

nous désignons $\sigma=\tilde{S}^*-\varepsilon=\dfrac{\tilde{S}^*+S^*}{2}$ qui vérifie $S^*<\sigma<S(t)$ pour $t>\rho_1\tau+\tau$.

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Mezouaghi et al., Global proprieties of a delayed epidemic model with partial susceptible protection, Math. Biosci. Eng. 19(1) (2022) 209–224.

[2] S. Djilali and S. Bentout, Global dynamics of SVIR epidemic model with distributed delay and imperfect vaccine, Results Phys. 25 (2021) 104245.

[3] X. Duan, S. Yuan and X. Li, Global stability of an SVIR model with age of vaccination, Appl. Math. Comput. 226 (2014) 528–540.

[4] M. A. Menouer, N. Gul, S. Djilali, A. Zeb and Z. A. Khan, Effect of treatment and protection measures on the outbreak of infectious disease using an SIR epidemic model with two delays, discrete and distributed, Fractals, Vol. 30, No. 8 (2022) 2240223 (14 pages).

[5] H.K.KHALIL:Nonlinear systems,Third edition ,Prentice Hall Upper Saddke ,New Jersey 07458.2002

[6] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney."Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos." Elsevier, Academic Press,2ème édition,2003.

[7] H.L.Smith and P. Waltman, The theory of the chemostat, Published by the Press Syndicate of the university of Cambridge,Libray of Congress Cataloging-in-publication Data,1995

[8] E. Thomas : Équations à retard et leurs applications. In : Bulletin de la Classe des sciences, tome 15, n°1-6, 2004. pp. 7-21

[9] G. Huang and A. Liu, A note on global stability for a heroin epidemic model with distributed delay, Appl. Math. Lett. 26(7) (2013) 687–691

[10] J. Liu and T. Zhang, Global behaviour of a heroin epidemic model with distributed delays, Appl. Math. Lett. 24(10) (2011) 1685–1692.

[11] R. P. Sigdel and M. C. McCluskey, Complete global stability for an SIR epidemic model with delay- Distributed or discrete, Math. Biosci. Eng. 17(2) (2010) 1329–1354.

[12] M.Dauhou,L.Dumas,P.Gabriel,P.Lafitte.An introduction to the basic reproduction number in mathematical epidemiology ,ESAIM: proceedings and surveys , September 2018, Vol. 62, p. 123-138

[13] J. M. Heffernan, R. J. Smith and L. M. Wahl,Perspectives on the basic reproductive ratio,J. R. Soc. Interface (2005) 2, 281–293 doi:10.1098/rsif.2005.0042 Published online 7 June 2005

[14] P. van den Driessche and J. Watmough, reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, Math. Biosci., 180 (2002), pp. 29–48.

[15] N. D. G. White F. Jian, D. S. Jayas and P. G. Fields. A distributed-delay model to predict ageing and survival rates of adults of cryptolestes ferrugineus (stephens) (coleoptera: Laemophloeidae) in granaries filled with wheat

[16] Srishti D. Chatterji, Cours d'analyse, vol. 3 : Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, PPUR, 1998

[17] H. L. Smith and H. R. Thieme, Dynamical Systems and Population Persistence (American Mathematical Society, 2011).