République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique

Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique .

Filière : Mathématiques .

Spécialité : Équations aux Dérivées Partielles et Applications .

Présenté Par :

M^{lle} Boudjelloul Salima

EXISTENCE ET RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATION D'ÉVOLUTION À RETARD .

Soutenu le *02-07-2023* devant le jury composé de :

Mr. S. M. Bouguima	Professeur	Université de Tlemcen	Président.
Mr. S. Bensid	Professeur	Université de Tlemcen	Examinateur.
Mme N. Daoudi-Merzagui	Professeur	Université de Tlemcen	Encadrante.

Année Universitaire : *2022 - 2023* .

Remerciement

En premier lieu, je remercie **Allah** le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée durant ma vie et pour m'avoir guidée pour atteindre ce stade.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à mon encadrante de ce mémoire, le Professeur **Daoudi-Merzagui Naima** pour son soutien et son encouragement constant, son grand professionnalisme, sa confiance en moi, la gentillesse et la patience qu'elle a manifestées à mon égard durant ce travail .

Un grand merci aux membres du jury :
Mr Sidi Mohammed Bouguima pour l'honneur qu'ils m'a donné d'avoir voulu de présider le jury et **Mr Sabri Bensid** pour avoir bien donner de leur temps pour examiner ce mémoire .

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères au corps professoral et administratif du département de mathématiques de la faculté des Sciences l'université de Tlemcen pour la qualité de leur enseignement .

Dédicaces

Je décide ce travail :

À ma mère, À mon père,

La femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse, mon adorable mère **Malika** .

À l'homme, mon précieux offre du dieu, à qui je dois ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon père **Abdelmadjid** .

Que Allah leur procure bonne santé et longue vie .

À mes frères,

Abdenasser, Abderrahmane, Abdelkader .

À mes soeurs,

Rabha, Bouchra, Takwa .

Que Allah les protège et leurs offre la chance et le bonheur .

À mes ami(e)s,

Meryem, Amina , Feryel, Hanae, Imad .

Pour leur amours et leurs encouragements .

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loi pour que ce travail soit possible .

Salima .

Abréviations Et Notations

- $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$: L'espace des fonctions continues ω-périodiques .

- $mes(S)$: La mesure de Lebesgue d'un ensemble Lebesgue-mesurable S .

- p.p : presque partout .

- $\mathcal{L}^1(\Omega, X)$: L'ensemble des fonctions Bochner-intégrables définies sur Ω à valeurs dans un Banach X .

Table des matières

Introduction générale

Les équations d'évolution périodiques interviennent dans la simulation des régimes périodiques comme les tubes à décharge ou les diodes à vide soumises à un potentiel harmonique, modélisés par les équations de Vlasov–Maxwell ou de Vlasov–Poisson ainsi que tout phénomène de propagation d'onde électromagnétique décrit par les équations de Maxwell .

La théorie des équations aux dérivées partielles avec retards a un arrière-plan physique étendu et un modèle mathématique réaliste, et elle a connu un développement rapide, voir [29], [56] .

Au cours des dernières décennies, une attention particulière a été porté à l'étude des équations d'évolution à retard neutre, voir [9]-[12], [18], [20], [22]-[25], [31], [34], [57] .

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'existence et la régularité de solutions ω-périodiques pour l'équation d'évolution avec retards, suivante :

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t) - G\big(t, u(t-\xi)\big)\Big) + Au(t) = F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

où :

- $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire fermé, tel que $-A$ génère un semi-groupe d'opérateurs analytiques, compact et exponentiellement stable $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ sur X ,
- G et F sont des fonctions continues vérifiant des hypothèses de régularité précisées dans les résultats énoncés,
- ξ et τ sont des constantes positives qui dénotent les retards .

Les équations différentielles ou aux dérivées partielles à retard de type neutres ont de nombreuses applications et modélisent des problèmes découlant de l'ingénierie, la dynamique des populations, les lignes de transmission, le système de réponse immunitaire ou la distribution de l'albumine dans le sang .

L'exemple suivant, d'équation aux dérivées partielles à retard modélisant la conduction thermique dans le matériau de mémoire qui s'estompe, voir [16], [47],

$$\frac{d}{dt}\left(u(t,x) + \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)u(s,x)ds\right) - c\Delta u(t,x) = \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\Delta u(s,x)ds \tag{2}$$

où, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné avec une frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$, le laplacien Δ est considéré par rapport à la variable $x \in \Omega$, pour $(t,x) \in [0,\infty) \times \Omega$, $u(t,x)$ représente la température en x à l'instant t, c est une constante physique et $k_1, k_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont respectivement l'énergie interne et la relaxation du flux de chaleur.

Si la solution u est connue sur $(-\infty, 0]$, $k_1 \equiv 1$ sur (r,∞), et $k_2 \equiv 1$, alors nous pouvons transformer le système (2) en l'équation abstraite d'évolution neutre (1). En fait, de nombreuses équations aux dérivées partielles à retard de type neutre peuvent être écrites sous forme d'équations différentielles fonctionnelles neutres abstraites du premier ordre sur un espace de Banach approprié .

Il y a eu un intérêt croissant pour l'étude des équations d'évolution neutre de la forme (1). L'existence et l'unicité des solutions intégrales (mild) pour des équations d'évolution avec retard ont été considérées par de nombreux auteurs dans la littérature, voir [2]-[4], [21], [28]-[33] .

Pour les équations d'évolution retardées sans élément neutre, l'existence de solutions périodiques a été discuté par plus d'auteurs, voir [15], [35], [42]-[58] et les références qui s'y trouvent.

De nombreux résultats significatifs sur le problème périodique de l'équation d'évolution neutre dans un espace de Banach ont été obtenus, l'approche la plus populaire est l'utilisation de la bornitude des solutions et la compacité de l'application de Poincaré réalisée à travers des plongements compacts. Cependant, dans certaines applications concrètes, il est difficile de choisir les conditions initiales appropriées pour garantir la bornitude de la solution .

La condition la plus imposée au terme non linéaire F est une condition de type Lipschitz. En fait, pour les équations apparaissant dans des processus complexes de réaction-diffusion, la fonction non linéaire F représente la source de matière ou de population, qui dépend du temps de manière diversifiée dans de nombreux contextes .

Dans ce mémoire, on considère l'existence, l'unicité et la régularité de solutions périodiques pour l'équation fonctionnelle neutre (1) en se basent sur [39]. Le terme non linéaire F ne satisfait que certaines conditions de croissance et les fonctions G et F peuvent ne pas être définies sur tout l'espace X. Ces conditions sont beaucoup plus faibles que les conditions de Lipschitz .

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres,

- Dans le premier chapitre, on introduit les notations, définitions, lemmes et théorèmes qu'on va utiliser à travers ce mémoire. On donne un aperçu sur les les équation différentielle à retard, et on rappelle quelques éléments d'analyse fonctionnelle, la théorie de semi-groupe et on recueille quelques notions et résultats connus sur les puissances fractionnaires du générateur d'un semi-groupe analytique. On introduit aussi la notion de mesure de non compacité et quelques théorèmes de point fixe.

- Dans le deuxième chapitre, on applique les résultats de chapitre 1 pour étudier l'existence et l'unicité de solution mild périodique pour l'équation (1) .

- Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solution périodique classique et forte pour l'équation (1) .

- Dans le dernier chapitre, on donne un exemple pour illustrer l'applicabilité des résultats abstraits obtenus dans le chapitre 2 et chapitre 3 .

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un certain nombre de définitions, de notations et de théorèmes qui seront utilisés à un moment ou un autre dans ce travail .
Pour plus de de détails sur les notions rappelées dans ce chapitre voir [14], [27] et [50] .

1.1 Les équations différentielles à retard

Bien que ressemblant en apparence aux équations différentielles ordinaires, les équations différentielles à retard ont plusieurs caractéristiques qui compliquent leur analyse . Dans la suite, on donne un aperçu sur ces équations dans le cas où la fonction inconnue $u(t)$ est dans $\mathbb{R}^n$ ou bien dans un espace de Banach X, pour plus de détails voir [54] .

Définition 1.1.1. *Une équation différentielle à retard (EDR) est une équation différentielle où la variable d'état apparaît avec un argument retardé, elle s'exprime mathématiquement sous une forme générale, pour $t \geq 0$, par :*

$$u'(t) = f\big(t, u(t), u(t-\tau_1), \ldots, u(t-\tau_p)\big). \tag{1.1}$$

avec $\tau_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, \ldots, p$ sont des constantes données .

1.1.1 Classification

On commence par exposer les différents types d'équations à retard, que l'on peut rencontrer dans la littérature, des exemples seront donnés dans le cas où $u(t)$ est dans $\mathbb{R}^n$:

- **EDR à retard constant :**

  De la forme :

  $$u'(t) = f\big(t, u(t), u(t-\tau)\big), \quad u(t) \in X.$$

  où X est un Banach et le retard $\tau > 0$ est constant .

  Exemple : Équation de Mackey-Glass.

  Les équations de Mackey-Glass, nommées d'après Michael Mackey et Leon Glass, font référence à une famille d'équations différentielles à retard dont le comportement parvient à imiter à la fois le comportement sain et pathologique dans certains contextes biologiques, contrôlés par les paramètres de l'équation .

  Á l'origine, ils servaient à modéliser la variation de la quantité relative de cellules matures dans le sang. Les équations sont définies comme suit :

  $$u'(t) = -\gamma u(t) + \beta \frac{u(t-\tau)}{1+u(t-\tau)^n}, \quad u(t) \in \mathbb{R}.$$

- **EDR avec retard dépendant du temps :**

  $$u'(t) = f\Big(t, u(t), u\big(t-\tau(t)\big)\Big), \quad u(t) \in X.$$

où le retard $\tau(t) \geq 0$ est une fonction donnée.

Exemple : ÉQUATION DU PANTOGRAPH.

Dans les années 1960, les chemins de fer britanniques voulaient rendre la locomotive électrique plus rapide .

Une construction importante était le pantographe, qui recueille le courant d'un fil aérien. Par conséquent, J. R. Ockendon et A. B. Tayler ont étudié le mouvement de la tête du pantographe sur une locomotive électrique. Dans la procédure de résolution de ce problème, ils sont arrivés à une équation différentielle à retard spéciale de la forme :

$$u'(t) = au(t) + bu(kt), \quad u(t) \in \mathbb{R}.$$

où a, b et k sont des paramètres avec $k \in (0, 1)$.

Ici $t - \tau(t) = kt$ donc $\tau(t) = (1 - k)t$.

- **EDR avec retard dépendant de l'état :**

$$u'(t) = f\Big(t, u(t), u\big(t - \tau\big(t, u(t)\big)\big)\Big), \quad u(t) \in X.$$

où le retard $\tau\big(t, u(t)\big) \geq 0$ dépend la fonction d'état (fonction inconnue $u(t)$) .

Exemple :

On cite l'exemple suivant qui à été proposé récemment par Arino, Hbid et Bravo [7], comme modèle décrivant l'évolution d'une population de poissons dont les larves consomment une nourriture, supposée limitée.

Le modèle est sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = f\Big(t, u(t), u\big(t - r(t)\big)\Big) \\ r' = h\Big(u\big(t - r(t)\big)\Big) \end{cases}$$

où u est le nombre total des individus de la population et r représente la durée nécessaire, pour que les larves deviennent des adultes .

L'état de larve correspond à la forme juvénile véligère des animaux à développement indirect. La forme adulte est acquise après le passage par un stade de transformations importantes appelé métamorphose. Il existe des larves dans tous les embranchements d'invertébrés .

La deuxième équation différentielle ordinaire, elle dépend de la variable u, c'est pourquoi l'équation est dite, équation à retard dépendant de l'état .

- **Équation différentielle Avancée :**

Nous citons l'exemple suivant :

$$u'(t) = f\big(t, u(t + \tau)\big), \quad \tau > 0, u(t) \in X.$$

- **Équation différentielle à retard de type Mixte :**

$$u'(t) = f\big(t, u(t - \tau), u(t + \tau)\big), \quad \tau > 0, u(t) \in X.$$

Cette équation a une caractéristique, c'est qu'on ne sait pas sous quelles conditions elle définit une fonction pour $t > 0$, car sa dérivée dépend à la fois du passé et du futur .

Remarque : Il existe de nombreux autres types d'équations à retard, mais dans notre travail nous sommes intéressés par *des équations différentielles à retard de type neutre* .

Définition 1.1.2. ***(Équations différentielles à retard de type neutre)***

$$u'(t) = f\big(t, u(t), u(t-\tau_1), u'(t-\tau_2)\big), \quad u(t) \in X, \tag{1.2}$$

c'est-à-dire, le retard intervient aussi sur la dérivée de la fonction d'état .

1.2 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Espace de Banach

Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme notée $\|\cdot\|_X$.
Le couple $(X, \|\cdot\|_X)$ est dit espace vectoriel normé (e.v.n) .

Remarque : Tout espace vectoriel normé est un espace métrique muni de la distance :

$$d(x, y) = \|x - y\|_X, \quad x, y \in X.$$

Définition 1.2.1. ***(Espace métrique complet)***

On dit qu'un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X .

Définition 1.2.2. ***(Espace de Banach)***

Un espace vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach .

1.2.2 Critères de compacité

Soit S un ensemble d'un espace métrique (X, d) .

Définition 1.2.3. ***(Recouvrement ouvert)***

On appelle recouvrement ouvert de S toute collection d'ouverts $\{V_i\}_{i\in I}$ de (X, d) telle que $S \subset \cup_{i\in I} V_i$.

Théorème 1.1. *Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si, de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Le recouvrement est dit fini si I est fini.*

Proposition 1.2.1. *Une partie S de (X, d) est compacte si et seulement si, de toute famille d'ouverts $\{V_i\}_{i\in I}$ de X telle que $S \subset \cup_{i\in I} V_i$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $S \subset \cup_{i\in J} V_i$.*

Définition 1.2.4. ***(Les parties relativement compactes)***

Une partie S d'un espace de Banach X est dite relativement compacte si l'adhérence de S est une partie compacte de X .

Définition 1.2.5. ***(Opérateur compact)***

Soient X et Y deux espace de Banach. Un opérateur $f : X \to Y$ est compact si l'image de tout borné S de X est relativement compact dans Y, c'est-à-dire, $\overline{f(S)}$ est compact .

Proposition 1.2.2.

Pour que l'adhérence de S soit compacte dans l'espace de Banach X, il faut et il suffit que S vérifie les deux conditions suivantes :

1. *L'ensemble S est borné ,*

2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\varepsilon \subset X$ de dimension finie tel que tout point de S soit à une distance $< \varepsilon$ de L_ε :*

$$\forall x \in S,\ dist(x, L_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.6. ***(Opérateur complètement continu)***

L'opérateur T est dit complètement continu, s'il est continu et compact .

Définition 1.2.7. ***(Opérateur fermé)***

Un opérateur non borné $T : dom(T) \to Y$ (où $dom(T)$ est un sous-espace de X) est dit fermé si son graphe est fermé dans $X \times Y$, où le graphe de T est défini par :

$$G(T) = \{(u, Tu), u \in dom(T)\}.$$

1.2.2.1 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Un critère très utile pour étudier la compacité d'un ensemble est fourni par le Théorème d'Ascoli-Arzela. Pour énonce ce théorème, on rappelle d'abord les notions suivantes :

Définition 1.2.8. ***(Opérateur borné)***

Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur linéaire f défini sur X dans Y est dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :

$$\|fu\|_Y \leq C\|u\|_X, \qquad \forall u \in X.$$

Proposition 1.2.3. ***(Continuité d'une fonction)***

Soient X et Y deux espace vectoriel munis respectivement des normes $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$, et f une fonction de X dans Y. Les assertions sont équivalentes :

i) *f est continue de X dans Y,*

ii) $\forall v_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in X, \|v - v_0\|_X \leq \eta \implies \|f(v) - f(v_0)\|_Y \leq \varepsilon,$

iii) *Pour tout $v \in X$, pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers v dans X , $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(v)$ dans Y,*

iv) *Pour tout ouvert O_Y de Y, l'image réciproque de O_Y par f, $f^{-1}(O_Y)$, est un ouvert de X,* *v) Pour tout fermé F_Y de Y, l'image réciproque de F_Y par f, $f^{-1}(F_Y)$, est un fermé de X .*

Définition 1.2.9. ***(Application lipschitzienne)***

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application et k un réel positif. On dit que f est k-lipschitzienne si :

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq k d_X(x, y), \quad \textit{pour tous } x, y \in X.$$

Définition 1.2.10. ***(Contraction)***

f est dite contractante s'il existe un $k \in (0, 1)$ tel que f soit k-lipschitzienne .

Définition 1.2.11. ***(Équicontinuité)***

Soient X, Y deux espace de Banach et $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble de fonctions continues de X dans Y. Une partie $M \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est dite équicontinue, si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall f \in M,\ \forall x, y \in X,\ \|x - y\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_Y < \epsilon.$$

Théorème 1.2. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace Banach, un sous-ensemble $M \subset \mathcal{C}(J, X)$, avec J l'intervalle infini $[0, +\infty)$, est relativement compact si et seulement si :

1. *M est équicontinu,*
2. *pour chaque $t \in J, M(t) = \{x(t) : x(.) \in M\}$ est relativement compact dans X .*

Théorème 1.3. *[38]*

Soit A un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X dans lui même avec $\|A\| < 1$, $I : X \to X$ l'opérateur identité, alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad (A^k \textit{ est le } k\textit{-composée fois de } A)\ ,$$

de plus on a :

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}\ .$$

Théorème 1.4. ***(Généralisation du Théorème de Rademacher)****[8]*

Soit X un espace de Banach réflexif. Alors toute fonction de Lipschitz $f : [0, t] \to X$ est dérivable presque partout .

Proposition 1.2.4. ***(Formule de Leibniz)*** *[1], [48]*

La règle est représentée par l'équation :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, z)dz\right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, z)dz + f\big(t, b(t)\big)\frac{d}{dt}b(t) - f\big(t, a(t)\big)\frac{d}{dt}a(t). \tag{1.3}$$

Cette règle est utilisée dans les systèmes où les intégrations doivent être effectuées sur un domaine d'intégration dépendant du temps.

1.2.3 Intégrale de Bochner (Intégration des fonctions à valeurs dans un espace de Banach)

L'intégrale de Bochner généralise la notion d'intégrale de Lebesgue pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach X .

Définition 1.2.12. ***(Fonction simple)***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u : \Omega \to X$ est dite simple (ou étagée), si elle est mesurable et s'il existe un nombre fini d'ensembles Lebesgue-mesurables $(B_i)_{i=1,\ldots,n}$ de mesure finie, deux à deux disjoints tels que, u prenne une valeur constante $b_i \in X$ sur chaque B_i pour $i = 1, \ldots, n$ et u s'annule sur $B_n = \Omega / \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$.

Il revient au même de dire que $u = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{B_i}$, où χ_{B_i} est la fonction caractéristique de l'ensemble $B_i \subset \Omega$ et $b_n = 0$. On note $S(\Omega, X)$ l'ensemble des fonctions simples de Ω dans X .

Définition 1.2.13.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{B_i}$ une fonction simple de Ω dans X. On définit son intégrale au sens de Bochner par :

$$\int_{\Omega} u(x)dx = \sum_{i=1}^{n} b_i \; mes(B_i).$$

L'intégrale de u sur un sous-ensemble Lebesgue-mesurable W de Ω est l'élément de X défini comme suit :

$$\int_{W} u(x)dx = \sum_{i=1}^{n} b_i \; mes(B_i \cap W)$$

Définition 1.2.14. ***(Fonction Bochner-intégrable)***

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. Une fonction $u : \Omega \to X$ est dite Bochner-intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S(\Omega, X)$ telle que $u_n(x) \to u(x)$ pour p.p. $x \in X$ et $\int_{\Omega} \|u_n(x) - u(x)\|_X dx \to 0$.

On note l'ensemble des fonctions Bochner-intégrables de Ω dans X par $\mathcal{L}^1(\Omega, X)$.

Proposition 1.2.5.

$i)$ ***(Critère d'intégrabilité)*** *Une fonction $u : \Omega \to X$ est Bochner-intégrable si et seulement si u est μ-mesurable et*

$$\int_{\Omega} \|u(x)\|_X \; dx < \infty$$

$ii)$ *$\mathcal{L}^1(\Omega, X)$ est un espace vectoriel.*

1.2.4 Les Espaces $L^p(E, X)$

Soient (E, μ) un espace mesuré et X un espace de Banach.

Définition 1.2.15.

i) Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit :

$$L^p(E,X) = \left\{ f : E \to X \mu\text{-mesurable telle que} \int_E \|f\|^p d\mu < +\infty \right\} \Big/ p.p,$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(E,X)} = \left(\int_E \|f\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ii) On définit :

$$L^\infty(E,X) = \{ f : E \to X \mu\text{-mesurable} \mid \exists C > 0,\ \|f(x)\| \leq C \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \} /p.p,$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(E,X)} = \inf\{ C > 0 \mid \|f(x)\| \leq C \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \}.$$

où p.p est l'égalité presque partout qui définit une relation d'équivalence .

Définition 1.2.16. ***(Espace $L^1_{loc}(\Omega, X)$)***

On définit l'espace $L^1_{loc}(\Omega, X)$ des (classes des) fonctions localement intégrables sur Ω par :

$$L^1_{loc}(\Omega, X) = \left\{ f \text{ mesurable}, \int_K \|f(x)\| dx < \infty,\ \forall K \text{compact de } \Omega \right\}.$$

Théorème 1.5. ***(Convergence Dominée)***

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ des fonctions μ-mesurables de E dans X. Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ vérifie :

i) $f_n \to f$ μ-presque partout sur E,

ii) il existe $g \in L^p(E, \mathbb{R}^+)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $\|f_n(x)\|_X \leq g(x)$ μ-presque partout, alors $f_n \to f$ dans $L^p(E,X)$. En particulier, dans le cas $p = 1$,

$$\int_E f_n d\mu \longrightarrow \int_E f d\mu.$$

1.2.5 Espace de Sobolev

Définition 1.2.17. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit les espaces de Sobolev dans le cas de fonctions à valeurs réelles :*

1. *$H^1(\Omega, \mathbb{R}) = \{ u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $D_i u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, pour tout $i = 1, ..., N \}$.*

   Dans cette définition, lorsqu'on dit $D_i u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, on sous-entend :

   $$\text{il existe une fonction } g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \text{ telle que } \langle D_i f, \phi \rangle_{\mathcal{D}^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = -\int_\Omega g\ \phi\ dx \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

2. *Pour $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\Omega, \mathbb{R}) = \{ u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $D^\alpha u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m \}$.*

3. *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$ par $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}) = \{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}), D^\alpha u \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m \}$.*

   Noter que pour $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R})$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathbb{R})$.

1.3 Quelques notions de la théorie des semi-groupes

Dans cette section, on présente les notions de la théorie de semi-groupe nécessaires au développement de ce travail pour les démonstrations et amples détails on réfère à Pazy [52], [51] .

On suppose que X est un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$.

1.3.1 Semi-groupe

Définition 1.3.1.

Une famille à un paramètre $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :

(i) $T(0) = I$ *(où I est l'opérateur identité de X) ,*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \ \forall t, s \geq 0.$

Définition 1.3.2. ***(Semi-groupes uniformément continus)***

Un semi-groupe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés est un semi-groupe uniformément continu si :

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = \lim_{t\to 0^+} \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(t)x - x\|}{\|x\|} = 0.$$

Définition 1.3.3. ***(Semi-groupe de classe $\mathcal{C}_0$)***

Un semi-groupe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si :

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \ \ \forall x \in X.$$

Un semi-groupe fortement continu sur X est aussi appelé $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X .

Remarque : Les semi-groupes uniformément continus sont $\mathcal{C}_0$-semi-groupes, mais la réciproque est fausse.

Théorème 1.6. *[39] Soit $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur X. Alors il existe deux constantes $\nu \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\nu t} \ \ \text{, pour } t \geq 0 \text{ .}$$

Soit :

$$\nu_0 = \inf\{\nu \in \mathbb{R} | \text{ Il existe } M \geq 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq M e^{\nu t}, \ \forall t \geq 0\}.$$

ν_0 est appelé *l'exposant de croissance du semi-groupe* $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$.

Définition 1.3.4. ***($\mathcal{C}_0$-semi-groupe exponentiellement stable)***

Si $\nu_0 < 0$, alors $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ est appelé un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe exponentiellement stable .

Définition 1.3.5. ***($\mathcal{C}_0$-semi-groupe compact)***

Un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ sur X est dit compact, si $T(t)$ est un opérateur compact sur X pour chaque $t > 0$.

1.3.2 Générateur infinitésimal

Définition 1.3.6.

On appelle générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ un opérateur $-A$ défini sur l'ensemble :

$$D(\text{-}A)=\left\{x\in X: \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t} \ \textit{existe}\right\}$$

Par :

$$\text{-}Ax=\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}=\left.\frac{d^+T(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \textit{pour } x\in D(-A).$$

Définition 1.3.7. ***(Ensemble résolvant)***

L'ensemble définit par :

$$\rho(B)=\{\lambda\in\mathbb{C}: \ \lambda I-B \ \textit{est inversible}\}.$$

est l'ensemble résolvant de l'opérateur B.

1.3.3 Théorie de semi-groupe et équation de la chaleur

Dans ce paragraphe, on donne une application de la théorie des semi-groupes et l'étude du problème abstrait de Cauchy dans la résolution d'une équation aux dérivées partielles classiques en physique .

L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique, introduite originellement en 1811 par Fourier. Elle est également connue sous le nom d'équation de diffusion, décrit dans des applications typiques l'évolution dans le temps de la densité u d'une quantité par exemple la chaleur, la concentration chimique, etc .

On connaître l'équation de la chaleur suivante :

$$(EC)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad t>0, x\in\mathbb{R},\\ u(x,0)=f(x), \quad x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

où f est une fonction linéaire continue dans $\mathbb{R}$.

On va utiliser la transformée de Fourier partielle par rapport à x pour trouver une solution (formelle) de (EC) .

Rappelons que pour tout $u\in L^1(\mathbb{R})\cup L^\infty(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier partielle par rapport à x de u est la fonction notée $\hat{u}$ définie par :

$$\hat{u}(\xi,t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}u(x,t)dx, \quad \xi\in\mathbb{R}$$

On a aussi :

$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(\xi,t)=i\xi\hat{u}(\xi,t),$$
$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(\xi,t)=-\xi^2\hat{u}(\xi,t),$$
$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}(\xi,t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t).$$

En appliquant la transformée de Fourier à (EC), on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t), \quad t>0, x\in\mathbb{R}, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi). \end{cases} \tag{1.4}$$

L'équation (1.4) est une équation différentielle ordinaire, où ξ joue le rôle d'un paramètre, et dont la solution est donnée par :

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}\hat{f}(\xi), \quad t\geq 0, \xi\in\mathbb{R}.$$

Pour trouver u on applique la transformée de Fourier inverse en utilisant le fait que $e^{-\xi^2 t} = \widehat{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-\epsilon^2}{4t}}}$ pour $t>0$ et que $\hat{u}\hat{v} = \widehat{u*v}$. Par suite, on trouve que :

$$u(\cdot,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-\epsilon^2}{4t}} * f,$$

D'où :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)dy, \quad \forall t>0, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Puisque f est une fonction continue et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on montre que u est bien une solution de (EC). Notons que la condition initiale de (EC) est vérifiée par u donnée par (1.5) dans le sens suivant :

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x).$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et on note encore $u(x,0) = f(x)$.

Le résultat s'exprime dans le langage des semi-groupes de la façon suivante :
Pour toute fonction continue f et tout $t>0$ on pose :

$$T(t)f = u(\cdot,t),$$

où u est l'unique solution classique de (EC). On définit ainsi le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appelé le semi-groupe de Gauss-Weierstrass par :

$$\big(T(t)f\big)(x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)dy, \;\; \forall t>0, \forall x\in\mathbb{R}, \quad T(0) = I.$$

Le semi-groupe de Gauss-Weierstrass n'est pas un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe. On doit faire la remarque que $T(t)f \overset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ dans l'ensemble des fonctions continues dans $\mathbb{R}$ si et seulement si f est une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.3.4 Semi-groupe de la chaleur sur un ouvert borné

Soit Ω un ouvert borné régulier dans l'espace $\mathbb{R}^N$. Nous considérons le Laplacien de Dirichlet Δ_N sur Ω, qui est défini de $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. L'opérateur Δ_N est un opérateur auto-adjoint, négatif et inversible, et que son inverse Δ_N^{-1} est également auto-adjoint et compact sur $L^2(\Omega)$ (en raison de la compacité de H^2 dans L^2).

Selon la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts, il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres associée à Δ_N^{-1}, avec des valeurs propres réelles (μ_n) de multiplicité finie, qui convergent vers zéro. Par conséquent, (ϕ_n) forme également une base hilbertienne de fonctions propres de Δ_N, correspondant à des valeurs propres $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} < 0$, où λ_n tend vers moins l'infini.

Pour tout élément u appartenant à $L^2(\Omega)$, nous notons $c_n(u)$ le coefficient de ϕ_n dans la décomposition de u. Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $t \geq 0$, nous définissons :

$$u(t) = T(t)u_0 = \sum_{n\geq 0} c_n(u_0)e^{\lambda_n t}\phi_n.$$

Il peut être vérifié que cette expression définit un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe. Il est important de noter que $T(t)$ est une contraction compacte pour $t > 0$, mais n'est pas uniformément continue en $t = 0$. De plus, $u(t)$ est une solution (au moins de manière formelle) de l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \Delta_N u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Nous pouvons noter de manière formelle que $T(t) = e^{\Delta_N t}$.

1.3.5 Semi-groupe analytique

Pour plus de détails sur la notion de semi-groupe analytique , on se réfère à [36], [46] .

Définition 1.3.8.

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ \theta_1 < \arg z < \theta_2,\ \theta_1 < 0 < \theta_2\}$.

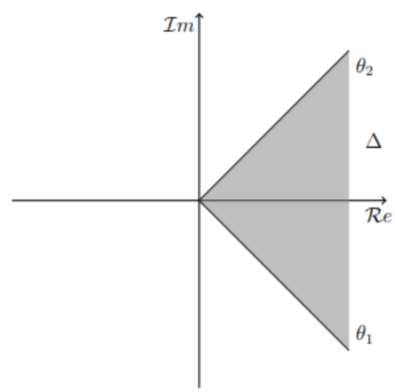


Figure 1.1 – Angle autour la demi-droite réelle positive .

Une famille $\big(T(z)\big)_{z\in\Delta}$ *d'opérateurs linéaires bornés sur* X *est dite* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe analytique dans* Δ *si :*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, *pour* $z_1, z_2 \in \Delta$,

(iii) $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta}} T(z)x = x,\ \forall x \in X$,

(iv) L'application $z \longmapsto T(z)$ *est analytique dans* Δ *.*

1.4 Puissances fractionnaires des opérateurs fermés

Dans la suite, supposons que $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur fermé et $-A$ génère un semi-groupe analytique compact $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ sur X .

Pour plus de détails sur les puissances fractionnaires d'opérateur fermé, on se réfère à [36], [39], [51].

Définition 1.4.1. *Si $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ est analytique satisfaisant $0 \in \rho(A)$, alors pour tout $\alpha > 0$, on peut définir $A^{-\alpha}$ par :*

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} T(t)\, dt, \quad \textit{avec} \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-z} dz\ .$$

Proposition 1.4.1. *L'opérateur $A^{-\alpha}$ est un endomorphisme continu injectif de X .*

1.4.1 La puissance α de A

Définition 1.4.2.

Soit $\alpha > 0$, l'opérateur A^{α} est défini comme l'inverse de $A^{-\alpha}$ et est appelé la puissance α de A avec $D(A^{\alpha})$ le domaine de A^{α} .

Proposition 1.4.2. *L'opérateur $A^{\alpha} := (A^{-\alpha})^{-1}$ est un opérateur linéaire bijectif fermé sur X .*

Dans ce que suit, on note $D(A^{\alpha})$ par X_{α} et $C_{\alpha} =: \|A^{-\alpha}\|$.

Lemme 1.1. *Si $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe analytique de générateur infinitésimal $-A$ satisfaisant $0 \in \rho(A)$, alors :*

(i) Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, X_{α} muni de la norme $\|x\|_{\alpha} =: \|A^{\alpha}x\|$ pour tout $x \in X_{\alpha}$ est un espace de Banach,

(ii) $A^{-\alpha}$ est un opérateur linéaire borné, pour $0 \leq \alpha \leq 1$ dans X,

(iii) $T(t) : X \to X_{\alpha}, \ \forall t > 0$,

(iv) $A^{\alpha}T(t)x = T(t)A^{\alpha}x, \ \forall x \in X_{\alpha}, t \geq 0$,

(v) Pour tout $t > 0$, $A^{\alpha}T(t)$ est borné dans X et il existe $M_{\alpha} > 0$ tel que :

$$\|A^{\alpha}T(t)\| \leq M_{\alpha} t^{-\alpha}\, ;$$

de plus, si $\alpha \in (0,1)$, alors $M_{\alpha} = M\Gamma(\alpha)$.

(vi) $X_{\beta} \hookrightarrow X_{\alpha}$ pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ $\Big($avec $X_0 = X$ et $X_1 = D(A)\Big)$. $X_{\beta} \hookrightarrow X_{\alpha}$ est compact si l'opérateur résolvant de A est compact .

- La notion des puissances factionnaires peuvent être utilisées pour établir le résultats du Théorème 18 dans [34] et d'autres résultats dans [51] .

1.4.2 La restriction T_α

Définition 1.4.3.

Pour l'opérateur T défini sur X, et pour $X_\alpha \subset X$, on appelle restriction de T à X_α noté T_α l'opérateur qui à tout x de X_α fait correspondre T_α. On restreint le domaine de définition de T à une partie de l'ensemble de départ .

Remarque : Par le Lemme 1.1 (iii) et (iv), la restriction $T_\alpha(t)$ est exactement la partie de $T(t)$ dans X_α .

Proposition 1.4.3. $\big(T_\alpha(t)\big)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu sur X_α et $\|T_\alpha(t)\|_\alpha \leq \|T(t)\|,\ \forall t \geq 0$.*

Démonstration.

Pour tout $x \in X_\alpha$ et d'après le Lemme 1.1 et la remarque précédente, on a :

$$\|T_\alpha(t)x - x\|_\alpha \overset{(i)}{=} \|A^\alpha T(t)x - A^\alpha x\| \overset{(iv)}{=} \|T(t)A^\alpha x - A^\alpha x\| \xrightarrow{t\to 0} 0$$

Aussi :

$$\|T_\alpha(t)x\|_\alpha \overset{(i)}{=} \|A^\alpha T(t)x\| \overset{(iv)}{=} \|T(t)A^\alpha x\| \leq \|T(t)\| \cdot \|A^\alpha x\| \overset{(i)}{=} \|T(t)\| \cdot \|x\|_\alpha$$

$\square$

Lemme 1.2. *[44] Si $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe compact dans X, alors $\big(T_\alpha(t)\big)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe compact dans X_α .*

Lemme 1.3. *[17] Si X est réflexif, alors X_α est également réflexif .*

1.5 Espaces fonctionnels utilisés

1.5.1 Espace de Hölder

Les espaces de Hölder $\mathcal{C}^\alpha(X, Y)$ sont des espaces constitués de fonctions $f : X \to Y$ satisfaisant une condition de Hölder :

$$\exists M > 0 : \forall x, y \in X, \|f(x) - f(y)\|_Y \leq M\|x - y\|_X^\alpha$$

Ces espaces sont fondamentaux dans le domaine de régularité des solutions d'équations différentielles .

1.5.2 Les espaces $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$ et $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$

Définition 1.5.1.

- *Soit $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X) = \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X) |\ u(t) = u(t+\omega),\ t \in \mathbb{R}\}$ l'espace des fonctions continue ω-périodiques muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{C}} = \max\limits_{t\in[0,\omega]} \|u(t)\|$.*
- *Soit $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha) = \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X_\alpha) |\ u(t) = u(t+\omega),\ t \in \mathbb{R}\}$ l'espace de Banach muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{C}_\alpha} = \max\limits_{t\in[0,\omega]} \|u(t)\|_\alpha$.*

Remarque : Il est clair que, $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$.

1.6 Mesure de non-compacité

La compacité joue un rôle majeur dans le théorème du point fixe de Schauder donc G.Darbo en 1955, a étendu le théorème de Schauder aux opérateurs non compacts. L'objectif principal de l'étude est de définir une nouvelle classe d'opérateurs qui associe tout ensemble borné à un ensemble compact. La première mesure de non-compacité a été définie et étudiée par Kuratowski en 1930 . On note par M_X la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de X, N_X la sous-famille de M_X constituée de tous les ensembles relativement compacts et pour tout $S \subset X$, on note par $Conv(S)$ l'enveloppe convexe, pour plus de détails on réfère à [6], [37] .

1.6.1 Notion de mesure de non-compacité

Définition 1.6.1.

On dit qu'une application $\mu : M_X \to \mathbb{R}^+$ est une mesure de non-compacité dans X si μ satisfait aux conditions suivantes :

1. *La famille* $\ker\mu = \{S \in M_X : \mu(S) = 0\}$ *est non vide et* $\ker\mu \subset N_X$,
2. $S \subset Z \implies \mu(S) \leq \mu(Z)$,
3. $\mu(\bar{S}) = \mu(S)$,
4. $\mu(ConvS) = \mu(S)$,
5. $\mu\big(\lambda S + (1-\lambda)Z\big) \leq \lambda\mu(S) + (1-\lambda)\mu(Z) \quad$ *pour* $\lambda \in [0,1]$,
6. *Si* $\{U_n\}_{n\geq 1}$ *est une suite imbriquée* $\Big(U_{n+1} \subset U_n\Big)$ *d'ensembles fermés de* M_X *tel que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(U_n) = 0$, *alors l'ensemble d'intersection* $U_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ *est non vide,*

Une mesure est dite sublinéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

7. $\mu(\lambda S) = |\lambda|\mu(S), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,
8. $\mu(S+Z) \leq \mu(S) + \mu(Z)$,

On dit qu'une mesure de non-compacité μ a la propriété maximale si :

9. $\mu(S \cup Z) = \max\{\mu(S), \mu(Z)\}$.

Remarques :

- L'ensemble d'intersection U_∞ définit dans 6 est un élément du noyau $\ker\mu$. En effet,

$$U_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \implies U_\infty \subset U_n \implies \mu(U_\infty) \leq \mu(U_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \mu(U_\infty) = 0.$$

  Cela donne $U_\infty \in \ker\mu$.

1.6.2 Mesure de Kuratowski

Pour la suite, on définit la mesures de non compacité de Kuratowski et on donne ses propriétés fondamentales . Soit Ω un ensemble non vide borné de l'espace de Banach X .

Définition 1.6.2.

La mesure de non compacité de Kuratowski, de l'ensemble Ω, notée $\alpha(\Omega)$ est le minimum des nombres $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d, c'est-à-dire,

$$\alpha(\Omega) = \inf\left\{ d > 0 : \ \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i, \ \delta(\Omega_i) < d \right\}$$

où $\delta(\Omega_i) = \sup \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega_i$ *et* $\delta(\emptyset) = 0$.

Proposition 1.6.1. *Soient X un espace de Banach et M_X la famille des ensembles non vide bornés de X .*
Alors, la mesure de non-compacité de Kuratowski α a les propriétés suivantes :

1. *Régularité :* $\alpha(S) = 0$ *si et seulement si* $\bar{S}$ *est compact,*
2. *Monotonie :* $S \subset Z \implies \alpha(S) < \alpha(Z)$,
3. *Invariance par passage à la fermeture :* $\alpha(S) = \alpha(\bar{S})$,
4. *Semi-additivité :* $\alpha(S \cup Z) = \max\{\alpha(S), \alpha(Z)\}, \quad \forall S, Z \in M_X$,
5. $\alpha(S \cap Z) \leq \min\{\alpha(S), \alpha(Z)\}, \quad \forall S, Z \in M_X$,
6. *Semi-homogénéité :* $\alpha(\lambda S) = |\lambda| \alpha(S), \quad \forall \lambda \in , \forall S \in M_X$,
7. *Semi-additivité algébrique :* $\alpha(S + Z) \leq \alpha(S) + \alpha(Z), \quad \forall S, Z \in M_X$,
8. *Invariance sous les traductions :* $\alpha(S + x_0) = \alpha(S), \quad \forall S \in M_X, \forall\, x_0 \in X$,
9. *Invariance par passage à l'enveloppement convexe :* $\alpha(ConvS) = \alpha(S), \quad \forall S \in M_X$.

1.6.3 Opérateur condensant

Définition 1.6.3. ***(k-Contraction d'ensemble)***

Soient X et Y deux espaces de Banach et $f : X \to Y$ une application continue et bornée (i.e., f transforme les bornés de X en des bornés de Y) .

I. *On dit que f est une k-contraction d'ensembles s'il existe $k \geq 0$, tel que,*

$$\alpha\big(f(S)\big) \leq k\alpha(S), \quad \forall S \in M_X.$$

II. *f est appelée k-contraction stricte d'ensembles (ou contraction stricte d'ensembles) si :*

$$0 \leq k \leq 1.$$

III. f est dite condensante si :

$$\alpha\big(f(S)\big) < \alpha(S), \quad S \textit{ borné non relativement compact } (\alpha(S) > 0).$$

Remarques : Il est évident que toute application f complètement continue, est une k-contraction stricte d'ensembles et toute k-contraction stricte d'ensembles est condensante. De plus on a :

- f est condensante $\Longrightarrow$ f est une 1-contraction d'ensembles .

- f est complètement continue $\Longleftrightarrow$ f est une 0-contraction d'ensembles .

Proposition 1.6.2.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un opérateur contractant, alors , f est une k-contraction d'ensemble .

Démonstration.

Pour Ω un ensemble borné dans X_1, admettant un recouvrement fini par les ouverts Ω_i .

et en utilisant la définition de la mesure de non compacité de Kuratowski :

$$\forall \epsilon > 0, \exists d_0 > 0, \exists \{\Omega_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Omega : \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \text{ et le diamètre } \delta(\Omega_i) \leq d_0 \leq \alpha(\Omega) + \epsilon.$$

Donc $\forall i \in [1, n]$, $\delta(\Omega_i) \leq \alpha(\Omega) + \epsilon$ et $f(\Omega) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} f(\Omega_i)$.

f est une contraction, donc pour $k \in (0, 1)$:

$$\forall x, y \in \Omega_i, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Par définition du diamètre de $f(\Omega_i)$, en passant au sup, on arrive à :

$$\delta\big(f(\Omega_i)\big) \leq k\big(\delta(\Omega_i)\big)$$

Ainsi, puisque $\{f(\Omega_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ recouvrement de $f(\Omega)$ et d'après la définition de $\alpha\big(f(\Omega)\big)$, on déduit que :

$$\alpha\big(f(\Omega)\big) \leq k\big(\alpha(\Omega) + \epsilon\big), \quad \forall \epsilon > 0,$$

ce qui implique que :

$$\alpha\big(f(\Omega)\big) \leq k\big(\alpha(\Omega)\big).$$

Donc, f est bien une k-contraction d'ensemble . $\square$

Proposition 1.6.3.

Soient deux opérateurs $f,\ g : X_1 \to X_2$ tels que f est complètement continu et g est une contraction. Alors la somme $h = f + g$ est un opérateur condensant .

Démonstration.

Soit Ω un ensemble borné dans X_1, admettant un recouvrement fini par les ouverts Ω_i .

On a $\alpha\big(g(\Omega)\big) < \alpha(\Omega)$, en effet, g est une contraction, donc pour $k \in (0,1)$ et en procédant comme pour la Proposition 1.6.2, on a :

$$\alpha\big(g(\Omega)\big) \leq k\big(\alpha(\Omega)\big) < \alpha(\Omega).$$

D'autre part, comme f est complètement continu, $\alpha\big(f(\Omega)\big) = 0$.

Par conséquent :

$$\alpha\big(h(\Omega)\big) \leq \alpha\big(f(\Omega) + g(\Omega)\big) \leq \alpha\big(f(\Omega)\big) + \alpha\big(g(\Omega)\big) < \alpha(\Omega).$$

□

1.7 Théorèmes de point fixe

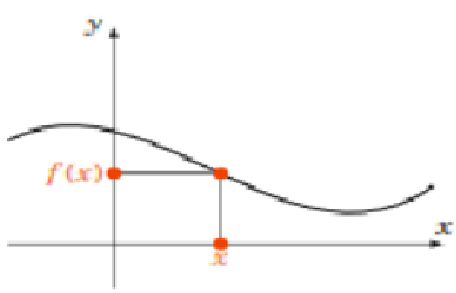
La plupart des phénomènes naturels de la vie réelle (en physique, en chimie, en mécaniques, en économie...) s'expriment mathématiquement sous forme d'équation différentielle .

De nombreuses questions liées à l'existence et à l'unicité de solution de certains types d'équation peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe .

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution, et de nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe .

Définition 1.7.1. ***(Point fixe)***

Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach X dans lui-même, alors pour tout $x \in X$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.



1.7.1 Principe de contraction de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou encore le théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922, dans l'article [60], dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale .

Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduites par Liouville en 1837 et développée par la suite, par Picard en 1890 .

A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier dans la branche des équation différentielles. Pour plus de détails voir [5].

Théorème 1.7. ***(Principe de contraction de Banach,*** 1922***)***

Soit (X, d) un espace métrique complet, soit $F : X \to X$ une application contractante. Alors, F admet un unique point fixe .

1.7.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème de Brouwer est l'un des théorèmes clés caractérisant la topologie d'un espace euclidien. Ce théorème intervient aussi pour établir des résultats d'existence de solution pour des équations différentielles, il est aussi présent dans les cours élémentaires de géométrie différentielle. Il apparaît dans des branches plus inattendues, comme la théorie des jeux, où John Nash l'utilise pour montrer l'existence d'un équilibre pour un jeu de n personnes avec stratégies mixtes, voir [49], [59] .

Théorème 1.8.

Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe alors $x \in X$ tel que $f(x) = x$.

1.7.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème généralise le résultat du théorème de Brouwer pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach .

Le théorème du point fixe de Schauder [59] affirme l'existence de point fixe qui n'est pas nécessairement unique .

Théorème 1.9.

Si K un sous-ensemble non vide, compact convexe dans un espace de Banach X et $T : K \to K$ une application continue, alors T admet un point fixe .

1.7.4 Théorème de Darbo

En 1955, Darbo, en utilisant le concept de mesure de non-compacité, a prouvé un théorème de points fixes pour les opérateurs k-contractants d'ensembles .

Ce théorème a eu une large application pour établir l'existence des solutions pour une classe d'équations différentielles, pour plus de détails voir [50] .

Théorème 1.10.

Soit Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace Banach X et $T : \Omega \to \Omega$ une k-contraction stricte d'ensembles, alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

1.7.5 Théorème de Sadovski

En 1967, Sadovski a généralisé le théorème de Darbo pour les applications condensantes, pour plus de détails voir [53], [60] .

Théorème 1.11.

Soient Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace de Banach X et $T : \Omega \to \Omega$ une application condensante, alors, T admet un point fixe dans Ω .

Chapitre 2

Résultats de l'existence et de l'unicité de solution mild

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité de solution mild, tout d'abord pour le problème linéaire et en suite pour le problème non linéaire (1) .

2.2 Problème linéaire non-homogène à valeur initiale

On considère le problème à valeur initiale pour l'équation d'évolution linéaire suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = h(t), \quad t \in J \\ u(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $h : J \to X$ est une fonction donnée avec J l'intervalle infini $[0, +\infty)$, A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ de X et $x_0 \in X$ une donnée initiale .

2.2.1 Notion de solution pour (2.1)

Supposons dans la suite que l'opérateur $-A$ génère un semi-groupe d'opérateurs analytiques, compact et exponentiellement stable $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ sur X .

2.2.1.1 Solution Classique

Définition 2.2.1. *[51]*

Une fonction $u : J \to X$ est une solution classique de (2.1) si :

i) u est continue sur J,

ii) u continûment differentiable sur l'ouvert $(0, +\infty)$,

iii) $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in (0, +\infty)$ et satisfait (2.1),

c'est-à-dire :

$$u \in \mathcal{C}(J, X) \cap \mathcal{C}^1\big((0, +\infty), X\big) \cap \mathcal{C}\big((0, +\infty), D(A)\big).$$

Proposition 2.2.1. *[52] Si $x_0 \in D(A)$ et $h \in \mathcal{C}^1(J, X)$, le problème à valeur initiale (2.1) admet une unique solution classique $u \in \mathcal{C}^1\big((0, +\infty), X\big) \cap \mathcal{C}(J, X_1)$ donnée par :*

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)h(s)ds. \tag{2.2}$$

2.2.1.2 Solution Mild ou Solution Intégrale

Définition 2.2.2. *Si $x_0 \in X$ et $h \in \mathcal{C}(J, X)$, la fonction u donnée par (2.2) appartient à $\mathcal{C}(J, X)$ et elle est appelée la solution mild pour l'équation d'évolution linéaire (2.1) .*

2.2.1.3 Solution Forte

Définition 2.2.3. *Une fonction $u : J \to X$ est appelée solution forte pour (2.1) si u est continue sur J, dérivable presque partout sur $(0, \infty)$, $u' \in L^1_{loc}(J, X)$ et satisfait l'équation différentielle dans (2.1) .*

Lemme 2.1. *(Chapitre 4 Théorème 4.3.1 dans [52])*

Soit $h \in \mathcal{C}([0, a], X)(a > 0),\ 0 \le \alpha \le \beta \le 1,\ \mu = \beta - \alpha,\ x_0 \in X_\beta$, alors la solution mild u pour (2.1) vérifie $u \in \mathcal{C}^\mu([0, a], X_\alpha)$.

Lemme 2.2. *(Chapitre 3 Théorème 3.5 et 3.6 dans [52])*

Soit $h \in \mathcal{C}^\mu([0, a], X)(a > 0),\ 0 < \mu < 1,\ x_0 \in X$. Alors la solution mild u pour (2.1) est une solution classique sur $[0, a]$.

2.3 Existence de solution périodique pour l'équation d'évolution linéaire

Pour la suite, prenons $h \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$ et on considère l'existence d'une solution mild ω-périodique pour l'équation d'évolution linéaire :

$$u'(t) + Au(t) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Lemme 2.3. *[40], [41] Si $-A$ génère $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe exponentiellement stable dans X, alors pour $h \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$, l'équation d'évolution linéaire (2.3) a une unique solution mild ω-périodique u, qui peut être exprimée par :*

$$u(t) = \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)h(s)ds =: (Ph)(t), \tag{2.4}$$

et l'opérateur solution $P : \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$ est un opérateur linéaire borné .

Démonstration.

Puisque $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe exponentiellement stable dans X, alors pour tout $\nu \in (0, |\nu_0|)$, il existe $M > 0$ tel que :

$$\|T(t)\| \le Me^{-\nu t} \le M. \tag{H}$$

Dans X, on définit la norme équivalente $|\cdot|$ par :

$$|x| = \sup_{t\ge 0} \|e^{\nu t}T(t)x\| \qquad \text{avec} \qquad \|x\| \le |x| \le M\|x\|,$$

En effet,

$$|x| = \sup_{t\ge 0} \|e^{\nu t}T(t)x\| \ge \|e^{\nu 0}T(0)x\| = \|x\|.$$

D'autre part, d'après (H), on a :

$$\begin{aligned} |x| &= \sup_{t\ge 0} \|e^{\nu t}T(t)x\| = \sup_{t\ge 0} e^{\nu t}\|T(t)x\| \\ &\le \sup_{t\ge 0} e^{\nu t}Me^{-\nu t}\|x\| = M\|x\| \end{aligned}$$

Par $|T(t)|$ on note la norme de $T(t)$ dans $(X, |\cdot|)$, alors, pour $t \geq 0$:

$$|T(t)x| = \sup_{s\geq 0} \|e^{\nu s} T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s\geq 0} \|e^{\nu s} T(s)x\| = |x|.$$

Donc, $|T(t)| \leq 1$.

Par le Théorème 1.3, $\big(I - T(\omega)\big)$ admet un opérateur inverse borné tel que $\big($ la notation de puissance est étendue au sens de composition $\big)$:

$$\big(I - T(\omega)\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(T(\omega)\big)^n.$$

D'après les propriétés de semi-groupe $\Big(T(s+t) = T(s)T(t)\Big)$, on a :

$$\big(I - T(\omega)\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(T(\omega)\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} T(n\omega).$$

et sa norme satisfait :

$$\big|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \big|T(\omega)\big|^n \leq \frac{1}{1 - |T(\omega)|} \leq \frac{1}{1 - e^{-\nu\omega}}. \tag{2.5}$$

Si, on fixe :

$$x_0 = \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_0^{\omega} T(\omega - s)h(s)ds =: Bh, \tag{2.6}$$

Par application de la Proposition 2.2.1, l'équation (2.3) admet une solution mild unique qui vérifie la condition aux limites $u(0) = u(\omega) = x_0$. En effet,

- $u(0) = T(0)x_0 + \displaystyle\int_0^0 T(0 - s)h(s)ds = x_0$.
- $u(\omega) = T(\omega)x_0 + \displaystyle\int_0^{\omega} T(\omega - s)h(s)ds$
  $= T(\omega)\big(I - T(\omega)\big)^{-1} \displaystyle\int_0^{\omega} T(\omega - s)h(s)ds + \int_0^{\omega} T(\omega - s)h(s)ds$
  $= \displaystyle\int_0^{\omega} T(\omega - s)h(s)ds \left(T(\omega)\big(I - T(\omega)\big)^{-1} + I\right)$
  $= \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \displaystyle\int_0^{\omega} T(\omega - s)h(s)ds\Big(T(\omega) + I - T(\omega)\Big)$
  $= (I - T(\omega))^{-1} \displaystyle\int_0^{\omega} T(\omega - s)h(s)ds = x_0.$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, par (2.2) et les propriétés du semi-groupe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$, on a :

$$\begin{aligned}
u(t+\omega) &= T(t+\omega)x_0 + \int_0^{t+\omega} T(t+\omega-s)h(s)ds \\
&\overset{0\leq t\leq\omega}{=} T(t+\omega)x_0 + \int_0^{\omega} T(t+\omega-s)h(s)ds + \int_{\omega}^{t+\omega} T(t+\omega-s)h(s)ds \\
&= T(t)T(\omega)x_0 + \int_0^{\omega} T(t)T(\omega-s)h(s)ds + \int_{\omega}^{t+\omega} T(t+\omega-s)h(s)ds \\
&= T(t)\left(T(\omega)x_0 + \int_0^{\omega} T(\omega-s)h(s)ds\right) + \int_{\omega}^{t+\omega} T(t+\omega-s)h(s)ds \\
&= T(t)\left(T(\omega)x_0 + \int_0^{\omega} T(\omega-s)h(s)ds\right) + \int_0^{t} T(t-s)h(s-\omega)ds.
\end{aligned}$$

Puisque on a $u(0) = u(\omega) = x_0$, on obtient :

$$u(t+\omega) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)h(s)ds = u(t).$$

Par conséquent, l'extension ω-périodique de u sur $\mathbb{R}$ est l'unique solution mild ω-périodique de l'équation (2.3) .

Par (2.2) et (2.6), la solution mild ω-périodique peut être exprimée par :

$$\begin{aligned}
u(t) &= T(t)Bh + \int_0^t T(t-s)h(s)ds \\
&= T(t)\left(\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_0^\omega T(\omega-s)h(s)ds\right) + \int_0^t T(t-s)h(s)ds \\
&= \big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(T(t)\int_0^\omega T(\omega-s)h(s)ds + \big(I-T(\omega)\big)\int_0^t T(t-s)h(s)ds\right) \\
&= \big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(\int_0^\omega T(t+\omega-s)h(s)ds + \int_0^t T(t-s)h(s)ds - \int_0^t T(t+\omega-s)h(s)ds\right) \\
&\overset{0\leq t\leq\omega}{=} \big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(\int_0^t T(t+\omega-s)h(s)ds + \int_t^\omega T(t+\omega-s)h(s)ds\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \int_0^t T(t-s)h(s)ds - \int_0^t T(t+\omega-s)h(s)ds\right) \\
&=\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(\int_t^\omega T(t+\omega-s)h(s)ds + \int_0^t T(t-s)h(s)ds\right).
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $s' = s - \omega$, on obtient :

$$u(t) =\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(\int_{t-\omega}^0 T(t-s')h(s'+\omega)ds' + \int_0^t T(t-s)h(s)ds\right).$$

Par la ω-périodicité de h et la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
u(t) &=\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(\int_{t-\omega}^0 T(t-s)h(s)ds + \int_0^t T(t-s)h(s)ds\right) \\
&=\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(\int_{t-\omega}^t T(t-s)h(s)ds\right) \\
&= (Ph)(t).
\end{aligned}$$

L'opérateur défini par $P : \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$ est linéaire par linéarité de l'intégrale et de l'opérateur $T(t)$.

Pour tout $h \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X)$:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| = \|(Ph)(t)\| &= \|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\left(\int_{t-\omega}^t T(t-s)h(s)ds\right)\| \\
&\leq \|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\| \cdot \int_{t-\omega}^t \|T(t-s)\|\|h(s)\|ds \\
&\leq \|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\| \cdot \int_{t-\omega}^t \|T(t-s)\|ds\|h\|_{\mathcal{C}} \\
&\overset{\text{(H)}}{\leq} CM\omega\|h\|_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

où $C =: \|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\|$, ce qui implique que P est borné .

Ceci achève la preuve de Lemme 2.3 . □

2.4 Existence de Solution périodique pour l'équation d'évolution (1)

En premier lieu, on présente les hypothèses sous lesquelles on peut établir le résultat d'existence des solutions ω-périodique pour l'équation (1) donnée par :

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\xi)\big)\Big)+Au(t)=F\big(t,u(t),u(t-\tau)\big),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Pour $\alpha\in[0,1)$, on suppose que :

(H1) $F:\mathbb{R}\times X_\alpha^2\to X$ est une fonction continue et pour tout $x_0,x_1\in X_\alpha$, $F(t,x_0,x_1)$ est ω-périodique en t .

Pour tout $r>0$, il existe une fonction positive $h_r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\sup_{\|x_0\|_\alpha,\|x_1\|_\alpha<r}\|F(t,x_0,x_1)\|\le h_r(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

la fonction $s\mapsto\frac{h_r(t)}{(t-s)^\alpha}$ appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et il existe un constante $\gamma>0$ telle que :

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{t-\omega}^{t}\frac{h_r(t)}{(t-s)^\alpha}ds=\gamma<\infty.$$

(H2) $G:\mathbb{R}\times X_\alpha\to X_1$ est une fonction continue et pour $x\in X_\alpha,\ G(t,x)$ est ω-périodique en t .

$G(t,0)=0$ pour $t\in\mathbb{R}$, et il existe une constante $L\ge 0$ telle que :

$$\|AG(t,x)-AG(t,y)\|\le L\|x-y\|_\alpha,\quad t\in\mathbb{R},x,y\in X_\alpha.$$

(H3) $CM_\alpha\gamma+C_{1-\alpha}L+CM_\alpha L\dfrac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}<1$, avec $C=:\|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\|$.

2.4.1 Théorème d'existence de solution mild

Théorème 2.1.

*Si les conditions **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** sont satisfaites, alors, l'équation (1) admet au moins une solution mild ω-périodique .*

Démonstration.

Pour $u\in\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R},X_\alpha)$, $G\big(t,u(t-\xi)\big)$ est bien définit dans $D(A)$.

Ainsi, on peut réécrire l'équation (1) sous la forme de l'équation de problème (2.1) et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\xi)\big)\Big)\ +\ A\Big(\big(u(t)-G\big(t,u(t-\xi)\big)\Big)\\ =F\big(t,u(t),u(t-\tau)\big)-AG\big(t,u(t-\xi)\big),\quad t\in\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Ainsi, on obtient :

$$v'(t)+Av(t)=h(t)$$

où :

- $v(t)=u(t)-G\big(t,u(t-\xi)\big)$,

- $h(t) = F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big) - AG\big(t, u(t-\xi)\big)$.

Pour $r > 0$, on considère l'ensemble :

$$\overline{\Omega}_r = \{u \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha) |\ \|u\|_{\mathcal{C}_\alpha} \leq r\}. \tag{2.8}$$

Notons que $\overline{\Omega}_r$ est une boule non vide, fermée, bornée et convexe de centre 0 et de rayon r de l'espace de Banach $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$.

Par la définition de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\|T(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)\|_\alpha &= \|A^\alpha T(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)\| \\ &\leq \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|AG\big(s, u(s-\xi)\big)\|\end{aligned}$$

De plus, par la condition ***(H2)*** et pour $t > s$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\|T(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)\|_\alpha &\leq \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|AG\big(s, u(s-\xi)\big) - AG(s,0)\| \\ &\leq M_\alpha (t-s)^{-\alpha} L \|u(s-\xi)\|_\alpha \\ &= \frac{M_\alpha L}{(t-s)^\alpha} \|u(s-\xi)\|_\alpha\end{aligned}$$

ce qui implique que $s \mapsto T(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)$ est intégrable au sens de Bochner sur $[t-\omega, t]$ pour tout $u \in \overline{\Omega}_r$.

En appliquant les résultats de Lemme 2.3 à l'équation d'évolution (2.7) écrite sous la forme $v'(t) + Av(t) = h(t)$, on a :

$$u(t) - G\big(t, u(t-\xi)\big) = \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\Big(F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) - AG\big(t, u(t-\xi)\big)\Big) ds$$

Donc, on peut définir l'opérateur $\mathcal{Z}$ sur $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}u(t) =: \big(I - T(\omega)\big)^{-1} &\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) ds + G\big(t, u(t-\xi)\big) \\ -\big(I - T(\omega)\big)^{-1} &\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big) ds, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Montrer l'existence de solution de (2.7) revient à montrer que $\mathcal{Z}$ admet un point fixe et pour cela on applique le Théorème 1.11.

Étape 01 : On montre tout d'abord qu'il existe une constante positive r telle que $\mathcal{Z}(\overline{\Omega}_r) \subset \overline{\Omega}_r$.
Supposons qu'au contraire :

$$\text{pour tout } r > 0, \text{ il existe } u_r \in \overline{\Omega}_r \text{ et } t_r \in \mathbb{R} \text{ tels que } \|\mathcal{Z}u_r(t_r)\|_\alpha > r. \tag{2.10}$$

Ainsi, on voit par définition de l'opérateur $\mathcal{Z}$, les propriétés de l'intégrale et la norme $\|\cdot\|_\alpha$ que :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_r(t_r)\|_\alpha = \Bigg\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} &\int_{t_r-\omega}^{t_r} T(t_r-s)F\big(s, u_r(s), u_r(s-\tau)\big) ds + G\big(t_r, u_r(t_r-\xi)\big) \\ -\big(I - T(\omega)\big)^{-1} &\int_{t_r-\omega}^{t_r} T(t_r-s)AG\big(s, u_r(s-\xi)\big) ds \Bigg\|_\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_r-\omega}^{t_r} T(t_r - s) F\big(s, u_r(s), u_r(s-\tau)\big) ds \right\|_\alpha \\
&\qquad + \big\| G\big(t_r, u_r(t_r - \xi)\big) \big\|_\alpha \\
&\qquad + \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_r-\omega}^{t_r} T(t_r - s) A G\big(s, u_r(s-\xi)\big) ds \right\|_\alpha \\
&\le \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\| \cdot \int_{t_r-\omega}^{t_r} \| A^\alpha T(t_r - s) \| \cdot \big\| F\big(s, u_r(s), u_r(s-\tau)\big) \big\| \, ds \\
&\qquad + \big\| A^\alpha G\big(t_r, u_r(t_r - \xi)\big) \big\| \\
&\qquad + \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\| \cdot \int_{t_r-\omega}^{t_r} \| A^\alpha T(t_r - s) \| \cdot \big\| A G\big(s, u_r(s-\xi)\big) \big\| \, ds.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse ***(H2)***, on obtient :

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{Z} u_r(t_r) \|_\alpha \le \cdot & \int_{t_r-\omega}^{t_r} \| A^\alpha T(t_r - s) \| \cdot \big\| F\big(s, u_r(s), u_r(s-\tau)\big) \big\| \, ds \\
& + \left\| A^{\alpha-1} \Big(A G\big(t_r, u_r(t_r - \xi)\big) - A G(s, 0) \Big) \right\| \\
& + \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\| \cdot \int_{t_r-\omega}^{t_r} \| A^\alpha T(t_r - s) \| \cdot \big\| A G\big(s, u_r(s-\xi)\big) - A G(s, 0) \big\| \, ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (v) du Lemme 1.1 caractérisant les puissances fractionnaires de A, l'hypothèse ***(H1)*** et en posant $C = \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\|$, on a :

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{Z} u_r(t_r) \|_\alpha \le C M_\alpha & \int_{t_r-\omega}^{t_r} \frac{h_r(s)}{(t-s)^\alpha} ds \\
& + C_{1-\alpha} L \| u_r(t_r - \xi) \|_\alpha \\
& + \ C M_\alpha L \int_{t_r-\omega}^{t_r} \frac{1}{(t-s)^\alpha} \| u_r(s-\xi) \|_\alpha ds.
\end{aligned}$$

Par la définition de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{C}_\alpha}$, on arrive à :

$$\| \mathcal{Z} u_r(t_r) \|_\alpha \le C M_\alpha \int_{t_r-\omega}^{t_r} \frac{h_r(s)}{(t-s)^\alpha} ds \ + \ C_{1-\alpha} L \| u_r \|_{\mathcal{C}_\alpha} \ + \ C M_\alpha L \int_{t_r-\omega}^{t_r} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds \| u_r \|_{\mathcal{C}_\alpha}.$$

Par la supposition (2.10), on a $\| u_r \|_{\mathcal{C}_\alpha} \le r$ et $\| \mathcal{Z} u_r(t_r) \|_\alpha > r$, donc :

$$r < \| \mathcal{Z} u_r(t_r) \|_\alpha \le C M_\alpha \int_{t_r-\omega}^{t_r} \frac{h_r(s)}{(t-s)^\alpha} ds \ + \ C_{1-\alpha} L r + C M_\alpha L \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} r. \tag{2.11}$$

En divisant les deux membres de (2.11) par r, on obtient :

$$\frac{1}{r} C M_\alpha \int_{t_r-\omega}^{t_r} \frac{h_r(s)}{(t-s)^\alpha} ds \ + \ C_{1-\alpha} L + C M_\alpha L \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ \ge 1.$$

En considérant la limite inférieure quand $r \to \infty$ et d'après ***(H1)***, on arrive à :

$$C M_\alpha \gamma \ + \ C_{1-\alpha} L + C M_\alpha L \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ \ge 1, \tag{2.12}$$

ce qui contredit ***(H3)***.

Donc, notre supposition est fausse et il existe une constante positive r telle que $\mathcal{Z}(\overline{\Omega}_r) \subset \overline{\Omega}_r$.

Étape 02 : On montre que $\mathcal{Z}$ est un opérateur condensant. Pour cela et d'après la Proposition 1.6.3, on montre que $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$, où $\mathcal{Z}_1$ est un opérateur complètement continu et $\mathcal{Z}_2$ est une contraction .
En effet, l'opérateur $\mathcal{Z}u(t)$ définit dans (2.9), peut être écrit $\mathcal{Z}u(t) = \mathcal{Z}_1u(t) + \mathcal{Z}_2u(t)$ avec :

$$\mathcal{Z}_1u(t) =: \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{Z}_2u(t) =: G\big(t, u(t-\xi)\big) - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds. \tag{2.14}$$

1. On montre que $\mathcal{Z}_1$ est un opérateur compact .

Soit $\{u_n\} \subset \overline{\Omega}_r$ avec $u_n \to u$ dans $\overline{\Omega}_r$, alors par la continuité de F, on a :

$$F\big(t, u_n(t), u_n(t-\tau)\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

De plus , on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_1u_n(t) - \mathcal{Z}_1u(t)\|_\alpha &= \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\Big(F\big(s, u_n(s), u_n(s-\tau)\big) - F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)\Big)ds \right\|_\alpha \\
&\le \|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\| \cdot \int_{t-\omega}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|F\big(s, u_n(s), u_n(s-\tau)\big) - F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)\|ds \\
&\le CM_\alpha \int_{t-\omega}^{t} \frac{\|F\big(s, u_n(s), u_n(s-\tau)\big) - F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)\|}{(t-s)^\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Puisque $\|F\big(t, u_n(t), u_n(t-\tau)\big) - F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big)\| \le 2h_r(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\Big($D'après ***(H1)***$\Big)$, alors, le Théorème 1.5 de convergence dominée assure que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{t-\omega}^{t} & \frac{\|F\big(s, u_n(s), u_n(s-\tau)\big) - F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)\|}{(t-s)^\alpha} ds \\
&= \int_{t-\omega}^{t} \lim_{n\to\infty} \frac{\|F\big(s, u_n(s), u_n(s-\tau)\big) - F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)\|}{(t-s)^\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Par la continuité de F, on en déduit que $\|\mathcal{Z}_1u_n(t) - \mathcal{Z}_1u(t)\|_\alpha \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\|\mathcal{Z}_1u_n - \mathcal{Z}_1u\|_{\mathcal{C}_\alpha} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{Z}_1$ est continue dans $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{Z}_1(\overline{\Omega}_r) = \{\mathcal{Z}_1u, u \in \overline{\Omega}_r \subset \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)\}$ **est équicontinue .**

Pour tout $u \in \overline{\Omega}_r$, par la périodicité de u $\Big(u \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)\Big)$, on ne considère que l'intervalle $[0, \omega]$.

Soient $0 \le t_1 < t_2 \le \omega$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1u(t_2) \ - \ \mathcal{Z}_1u(t_1) = \big(I - T(\omega)\big)^{-1} & \int_{t_2-\omega}^{t_2} T(t_2-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds \\
& - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_1-\omega}^{t_1} T(t_1-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds.
\end{aligned}$$

Pour $t_2-\omega \leq t_1 \leq t_2$ et $t_1-\omega \leq t_2-\omega \leq t_1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 u(t_2) \ - \ \mathcal{Z}_1 u(t_1) = \big(I-T(\omega)\big)^{-1} &\int_{t_2-\omega}^{t_1} T(t_2-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds \\
&+ \big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t_1}^{t_2} T(t_2-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds \\
&- \big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega} T(t_1-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds \\
&- \big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t_2-\omega}^{t_1} T(t_1-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds,
\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 u(t_2) \ - \ \mathcal{Z}_1 u(t_1) &= \left(\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t_2-\omega}^{t_1}\Big(T(t_2-s)-T(t_1-s)\Big)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\right) \\
&\quad - \left(\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega} T(t_1-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\right) \\
&\quad + \left(\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t_1}^{t_2} T(t_2-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\right) \\
&=: I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\|\mathcal{Z}_1 u(t_2) \ - \ \mathcal{Z}_1 u(t_1)\|_\alpha = \|I_1+I_2+I_3\|_\alpha \leq \|I_1\|_\alpha + \|I_2\|_\alpha + \|I_3\|_\alpha. \tag{2.15}$$

Donc, il suffit de vérifier que $\|I_i\|_\alpha$ tend vers 0 indépendamment de $u \in \overline{\Omega}_r$ lorsque $t_2-t_1 \to 0$ pour $i=1,2,3$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_\alpha &= \left\|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t_2-\omega}^{t_1}\Big(T(t_2-s)-T(t_1-s)\Big)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\right\|_\alpha \\
&\leq \left\|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\right\| \cdot \int_{t_2-\omega}^{t_1} \|A^\alpha\Big(T(t_2-s)-T(t_1-s)\Big)\| \cdot \|F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)\|ds0
\end{aligned}$$

Les propriétés de semi-groupe permettent d'écrire [52] :

$$\begin{aligned}
T(t_2-s)-T(t_1-s) &= T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\left(T\left(t_2-s+\frac{s-t_1}{2}\right)-T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\right) \\
&= T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\left(T\left(\frac{2t_2-2s+s-t_1}{2}\right)-T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\right) \\
&= T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\left(T\left(\frac{t_2-s}{2}+\frac{t_2-t_1}{2}\right)-T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, par la continuité de $t \mapsto \|T(t)\|$ pour $t>0$,on obtient :

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_\alpha &\leq C\cdot\int_{t_2-\omega}^{t_1}\left\|A^\alpha T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\left(T\left(\frac{t_2-s}{2}+\frac{t_2-t_1}{2}\right)-T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\right)\right\|\cdot h_r(s)ds \\
&\leq C\cdot\int_{t_2-\omega}^{t_1}\left\|A^\alpha T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\right\|\cdot\left\|T\left(\frac{t_2-s}{2}+\frac{t_2-t_1}{2}\right)-T\left(\frac{t_1-s}{2}\right)\right\|\cdot h_r(s)ds,
\end{aligned}$$

où $C = \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\|$.

Et, l'hypothèse ***(H1)***, permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\|I_1\|_\alpha &\le CM_\alpha \cdot \int_{t_2-\omega}^{t_1} \frac{h_r(s)}{\left(\frac{t_1-s}{2}\right)^\alpha} \cdot \left\| T\left(\frac{t_2-s}{2} + \frac{t_2-t_1}{2}\right) - T\left(\frac{t_1-s}{2}\right) \right\| ds \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{quand } t_2 - t_1 \to 0 \ \big(t_2 \to t_1\big).\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\|I_2\|_\alpha &= \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega} T(t_1 - s) F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) ds \right\|_\alpha \\ &\le \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\| \cdot \int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega} \left\| A^\alpha T(t_1 - s) \right\| \cdot \left\| F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) \right\| ds\end{aligned}$$

Par l'hypothèse ***(H1)***, la propriété (v) du Lemme 1.1, on a :

$$\begin{aligned}\|I_2\|_\alpha &\le CM_\alpha \cdot \int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega} \frac{h_r(s)}{(t_1-s)^\alpha} ds \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{quand } t_2 - t_1 \to 0 \ \big(t_2 \to t_1\big),\end{aligned}$$

où $C = \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\|$.

De même, on a :

$$\begin{aligned}\|I_3\|_\alpha &= \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} T(t_2 - s) F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) ds \right\|_\alpha \\ &\le \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\| \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left\| A^\alpha T(t_2 - s) \right\| \cdot \left\| F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) \right\| ds.\end{aligned}$$

L'hypothèse ***(H1)***, la propriété (v) du Lemme 1.1 permettent d'en déduire :

$$\begin{aligned}\|I_3\|_\alpha &\le CM_\alpha \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{h_r(s)}{(t_2-s)^\alpha} ds \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{quand } t_2 - t_1 \to 0 \ \big(t_2 \to t_1\big),\end{aligned}$$

où $C = \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\|$.

Par conséquent, $\|\mathcal{Z}_1 u(t_2) - \mathcal{Z}_1 u(t_1)\|_\alpha$ tend vers 0 indépendamment de $u \in \overline{\Omega}_r$ lorsque $t_2 - t_1 \to 0$, ce qui signifie que $\mathcal{Z}_1(\overline{\Omega}_r)$ est équicontinu .

Il reste à montrer que $(\mathcal{Z}_1\overline{\Omega}_r)(t)$ est relativement compact dans X_α pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour cela, on définit un ensemble $(\mathcal{Z}_\epsilon\overline{\Omega}_r)(t)$ par :

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}, \qquad (\mathcal{Z}_\epsilon\overline{\Omega}_r)(t) := \{(\mathcal{Z}_\epsilon u)(t) \mid u \in \overline{\Omega}_r,\ 0 < \epsilon < \omega\}, \tag{2.16}$$

où :

$$\begin{aligned}(\mathcal{Z}_\epsilon u)(t) &= \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t-\epsilon} T_\alpha(t-s) F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) ds \\ &= T_\alpha(\epsilon)(I - T(\omega))^{-1} \int_{t-\omega}^{t-\epsilon} T_\alpha(t-s-\epsilon) F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) ds,\end{aligned}$$

et on montre que $\|\mathcal{Z}_1u(t) - \mathcal{Z}_\epsilon u(t)\|_\alpha$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0 .

D'après le Lemme 1.2, l'opérateur $T_\alpha(\epsilon)$ est compact dans X_α si T l'est dans X , il s'ensuit que l'ensemble $(\mathcal{Z}_\epsilon\overline{\Omega}_r)(t)$ est relativement compact dans X_α .

Pour tout $u \in \overline{\Omega}_r$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}_1u(t) - \mathcal{Z}_\epsilon u(t)\|_\alpha = \bigg\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(&\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds \\ &- \int_{t-\omega}^{t-\epsilon} T_\alpha(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\bigg)\bigg\|_\alpha .\end{aligned}$$

D'après la Remarque (1.4.3), on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}_1u(t) - \mathcal{Z}_\epsilon u(t)\|_\alpha = \bigg\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(&\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds \\ &- \int_{t-\omega}^{t-\epsilon} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\bigg)\bigg\|_\alpha .\end{aligned}$$

Pour $t-\omega \le t-\epsilon \le t$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}_1u(t) - \mathcal{Z}_\epsilon u(t)\|_\alpha &= \bigg\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(\int_{t-\omega}^{t-\epsilon} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds \\ &\qquad + \int_{t-\epsilon}^{t} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds \\ &\qquad - \int_{t-\omega}^{t-\epsilon} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\bigg)\bigg\|_\alpha \\ &= \bigg\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\epsilon}^{t} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\bigg\|_\alpha .\end{aligned}$$

Par suite on a, d'après définition de la norme $\|\cdot\|_\alpha$:

$$\|\mathcal{Z}_1u(t) - \mathcal{Z}_\epsilon u(t)\|_\alpha \le \Big\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\Big\| \cdot \int_{t-\epsilon}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)\| ds.$$

Ainsi, pour $C = \Big\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\Big\|$ et en utilisant l'hypothèse ***(H1)***, la propriété (v) du Lemme 1.1, on arrive à :

$$\|\mathcal{Z}_1u(t) - \mathcal{Z}_\epsilon u(t)\|_\alpha \le CM_\alpha \int_{t-\epsilon}^{t} \frac{h_r(s)}{(t-s)^\alpha} ds. \tag{2.17}$$

De l'inégalité (2.17), l'ensemble $(\mathcal{Z}_1\overline{\Omega}_r)(t)$ est relativement compact dans X_α pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, le Théorème 1.2 d'Ascoli–Arzelà garantit que $(\mathcal{Z}_1\overline{\Omega}_r)$ est relativement compact et par suite Q_1 est un opérateur complètement continu .

2. On prouve que $\mathcal{Z}_2$ est une contraction .

Soit $u, v \in \overline{\Omega}_r$, on a :

$$\|\mathcal{Z}_2u(t) - \mathcal{Z}_2v(t)\|_\alpha = \bigg\| G\big(t,u(t-\xi)\big) - \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s,u(s-\xi)\big)ds$$

$$
\begin{aligned}
&-G\big(t, v(t-\xi)\big) + \big(I + T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) AG\big(s, v(s-\xi)\big) \Big\|_{\alpha} \\
&\leq \|G\big(t, u(t-\xi)\big) - G\big(t, v(t-\xi)\big)\|_{\alpha} \\
&\quad + \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) \Big(AG\big(s, u(s-\xi)\big) - AG\big(s, v(s-\xi)\big)\Big) ds \right\|_{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_{\alpha}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_2 u(t) - \mathcal{Z}_2 v(t)\|_{\alpha} \leq& \left\| A^{\alpha-1} \Big(AG\big(t, u(t-\xi)\big) - AG\big(t, v(t-\xi)\big)\Big) \right\| \\
&+ \|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\| \cdot \int_{t-\omega}^{t} \|A^{\alpha} T(t-s)\| \cdot \left\|AG\big(s, u(s-\xi)\big) - AG\big(s, v(s-\xi)\big)\right\| ds.
\end{aligned}
$$

La notation $C_{\alpha} := \|A^{-\alpha}\|$ implique que $C_{1-\alpha} := \|A^{\alpha-1}\|$.
Aussi, pour $C = \left\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\right\|$ et on utilisant la propriété (v) du Lemme 1.1, il suit que :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_2 u(t) - \mathcal{Z}_2 v(t)\|_{\alpha} \leq& C_{1-\alpha} \left\|AG\big(t, u(t-\xi)\big) - AG\big(t, v(t-\xi)\big)\right\| \\
&+ CM_{\alpha} \int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\alpha}} \cdot \left\|AG\big(s, u(s-\xi)\big) - AG\big(s, v(s-\xi)\big)\right\| ds.
\end{aligned}
$$

Par l'hypothèse ***(H2)*** et la définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{\alpha}}$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_2 u(t) - \mathcal{Z}_2 v(t)\|_{\alpha} &\leq C_{1-\alpha} L \|u(t-\xi) - v(t-\xi)\|_{\alpha} + CM_{\alpha} L \int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\alpha}} \cdot \|u(s-\xi) - v(s-\xi)\|_{\alpha} ds \\
&\leq \left(C_{1-\alpha} L + CM_{\alpha} L \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \cdot \|u - v\|_{\mathcal{C}_{\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\|\mathcal{Z}_2 u - \mathcal{Z}_2 v\|_{\mathcal{C}_{\alpha}} \leq \left(C_{1-\alpha} L + CM_{\alpha} L \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \cdot \|u - v\|_{\mathcal{C}_{\alpha}}. \tag{2.18}
$$

D'après l'hypothèse ***(H3)*** $CM_{\alpha}\gamma + C_{1-\alpha} L + CM_{\alpha} L \dfrac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} < 1$, donc $C_{1-\alpha} L + CM_{\alpha} L \dfrac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} < 1$.
Il s'ensuit que $\mathcal{Z}_2$ est une contraction .

Ainsi $\mathcal{Z}$ est condensant, et d'après le Théorème 1.11, $\mathcal{Z}$ admet un point fixe $u \in \overline{\Omega}_r$, c'est-à-dire, l'équation (1) admet une mild solution ω-périodique .

La démonstration est terminée. □

Remarques :

I. Concernant la condition ***(H1)***, si la fonction h_r est indépendante de t, on obtient facilement une constante $\gamma \geq 0$ satisfaisant ***(H3)*** .

II. Si la condition ***(H1)*** est remplacée par la suivante :

(H1′) Il existe des constantes positives a_0, a_1 et K indépendantes de t, telles que :

$$
\|F(t, x_0, x_1)\| \leq a_0 \|x_0\|_{\alpha} + a_1 \|x_1\|_{\alpha} + K, \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } x_0, x_1 \in X_{\alpha}. \tag{2.19}
$$

Dans ce cas, pour tout $r > 0$ et $x_0, x_1 \in X_\alpha$ avec $\|x_0\|_\alpha, \|x_1\|_\alpha \leq r$, on a :

$$\|F(t, x_0, x_1)\| \leq r(a_0 + a_1) + K := h_r(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{t-\omega}^{t} \frac{h_r(t)}{(t-s)^\alpha} ds &= \liminf_{r\to\infty}(a_0 + a_1)\int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds + \liminf_{r\to\infty} \frac{K}{r}\int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds \\
&= \liminf_{r\to\infty}(a_0 + a_1)\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \liminf_{r\to\infty} \frac{K\omega^{1-\alpha}}{r(1-\alpha)} \\
&= (a_0 + a_1)\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} =: \gamma > 0.
\end{aligned}$$

L'hypothèse **(H1′)** est une adaptation de l'hypothèse ***(H1)*** dans le cas où la fonction $h_r(t)$ est indépendante de t .

Par conséquent, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2.4.1. *Pour $\alpha \in [0, 1)$, on suppose que :*

- *$G : \mathbb{R} \times X_\alpha \to X_1$ et $F : \mathbb{R} \times X_\alpha^2 \to X$ sont deux fonctions continues .*
- *Pour tout $x, x_0, x_1 \in X_\alpha$, $G(t, x), F(t, x_0, x_1)$ sont ω-périodiques en t .*

*Si les conditions **(H1′)**,**(H2)**, et*

(H3′) $CM_\alpha(a_0 + a_1 + L)\dfrac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_{1-\alpha}L < 1,$ *avec* $C = \left\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\right\|,$

sont satisfaites, alors, l'équation (1) admet au moins une solution mild ω-périodique u .

Remarque : L'hypothèse **(H3′)** est une adaptation de l'hypothèse ***(H3)*** aux hypothèses **(H1′)** et ***(H2)*** .

2.4.2 Théorème d'unicité de solution mild

Si F vérifie la condition de Lipschitz suivante :

(H1″) Il existe deux constantes positives a_0, a_1 indépendantes de t, telles que :

$$\|F(t, x_0, x_1) - F(t, y_0, y_1)\| \leq a_0\|x_0 - y_0\|_\alpha + a_1\|x_1 - y_1\|_\alpha, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, x_0, x_1, y_0, y_1 \in X_\alpha,$$

Alors on a le résultat suivant :

Théorème 2.2. *Pour $\alpha \in [0, 1)$, on suppose que :*

- *$G : \mathbb{R} \times X_\alpha \to X_1$ et $F : \mathbb{R} \times X_\alpha^2 \to X$ sont deux fonctions continues .*
- *Pour tout $x, x_0, x_1 \in X_\alpha$, $G(t, x), F(t, x_0, x_1)$ sont ω-périodiques en t .*

*Si les conditions **(H1″)**, **(H2)** et **(H3′)** sont satisfaites, alors, l'équation (1) admet une unique solution mild ω-périodique .*

Démonstration.

1. Existence de la solution mild :

De **(H1″)**, on peut obtenir **(H1′)**, en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x_0, x_1 \in X_\alpha$,on a :

$$\begin{aligned}\|F(t,x_0,x_1)\| &= \|F(t,x_0,x_1) - F(t,0,0) + F(t,0,0)\| \\ &\leq \|F(t,x_0,x_1) - F(t,0,0)\| + \|F(t,0,0)\|.\end{aligned}$$

Par la condition **(H1″)**,on obtient :

$$\|F(t,x_0,x_1)\| \leq a_0\|x_0\|_\alpha + a_1\|x_1\|_\alpha + \|F(t,0,0)\|.$$

A partir de la continuité et la périodicité de F, on peut choisir $K = \max_{t\in[0,\omega]} \|F(t,0,0)\|$, donc, on arrive à **(H1′)**. Ainsi, par le Corollaire 2.4.1, l'équation (1) admet au moins une solution mild ω-périodique .

2. Unicité de la solution mild :

Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$ deux solutions mild ω-périodiques pour l'équation (1), alors ce sont des points fixes de l'opérateur $\mathcal{Z}$ qui est défini par (2.9). Ainsi :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha &= \Big\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s, u_2(s), u_2(s-\tau)\big)ds + G\big(t, u_2(t-\xi)\big) \\ &\quad - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s, u_2(s-\xi)\big)ds \\ &\quad - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s, u_1(s), u_1(s-\tau)\big)ds - G\big(t, u_1(t-\xi)\big) \\ &\quad + \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s, u_1(s-\xi)\big)ds \Big\|_\alpha \\ &\leq \Big\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\Big(F\big(s, u_2(s), u_2(s-\tau)\big) - F\big(s, u_1(s), u_1(s-\tau)\big)\Big)ds \Big\|_\alpha \\ &\quad + \|G\big(t, u_2(t-\xi)\big) - G\big(t, u_1(t-\xi)\big)\|_\alpha \\ &\quad + \Big\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\Big(AG\big(s, u_2(s-\xi)\big) - AG\big(s, u_1(s-\xi)\big)\Big)ds \Big\|_\alpha .\end{aligned}$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_\alpha$ et pour $C = \Big\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\Big\|$, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha &\leq C \cdot \int_{t-\omega}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|F\big(s, u_2(s), u_2(s-\tau)\big) - F\big(s, u_1(s), u_1(s-\tau)\big)\|ds \\ &\quad + \|A^{\alpha-1}\Big(AG\big(t, u_2(t-\xi)\big) - AG\big(t, u_1(t-\xi)\big)\Big)\| \\ &\quad + C \cdot \int_{t-\omega}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|AG\big(s, u_2(s-\xi)\big) - AG\big(s, u_1(s-\xi)\big)\|ds.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse **(H1″)**, la propriété (v) du Lemme 1.1 et $C_{1-\alpha} = \|A^{\alpha-1}\|$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha &\leq CM_\alpha \cdot \int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^\alpha}\Big(a_0\|u_2(s) - u_1(s)\|_\alpha + a_1\|u_2(s-\tau) - u_1(s-\tau)\|_\alpha\Big)ds \\ &\quad + C_{1-\alpha}L\|u_2(t-\xi) - u_1(t-\xi)\|_\alpha\end{aligned}$$

$$+ CM_\alpha \int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^\alpha} \|u_2(t-\xi) - u_1(t-\xi)\|_\alpha ds.$$

De plus , on a :

$$\int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds = \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{2.20}$$

Par définition de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{C}_\alpha}$ et l'équation (2.20), il s'en suit que :

$$\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}(a_0 + a_1)\|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} + C_{1-\alpha}L\|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}\|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}.$$

Donc :

$$\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq \left(CM_\alpha(a_0 + a_1 + L)\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_{1-\alpha} \right) \cdot \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}. \tag{2.21}$$

D'autre part, $u_1, u_2 \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$ sont des points fixes de l'opérateur $\mathcal{Z}$ qui est défini par (2.9), implique que :

$$\|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} = \|\mathcal{Z}u_2 - \mathcal{Z}u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}. \tag{2.22}$$

D'après (2.21) et (2.22), on obtient :

$$\|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} = \|\mathcal{Z}u_2 - \mathcal{Z}u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} \leq \left(CM_\alpha(a_0 + a_1 + L)\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_{1-\alpha} \right) \cdot \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}.$$

A partir de cette dernière inégalité et de la condition **(H3′)**, il s'ensuit que $\|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} < \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}$.

Ainsi, l'équation (1) n'a qu'une seule solution mild ω-périodique .

La démonstration est terminée . $\square$

Chapitre 3

Régularité de solution mild

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on discute les propriétés de régularité de la solution mild ω-périodique et on obtient le fait que la solution mild est classique ou encore forte si F et G vérifient des conditions de régularité différentes en t, Höldériennes pour les solutions classiques et Lipschitziennes pour les solutions fortes .

3.2 Théorème d'existence de solution forte

3.2.1 Hypothèses considérées

Pour l'étude de l'existence de solution forte on considère pour les fonctions F et G certaines conditions .
Pour $\alpha \in [0,1)$, supposons que :

- X est un espace de Banach réflexif .

(H4) $F : \mathbb{R} \times X_\alpha^2 \to X$ est une fonction continue et pour tout $x_0,\ x_1 \in X_\alpha$, $F(t,x_0,x_1)$ est ω-périodique en t .
Il existe une constante $L_1 > 0$ telle que :

$$\|F(t_2,x_0,x_1) - F(t_1,y_0,y_1)\| \leq L_1\big(|t_2-t_1| + \|x_0-y_0\|_\alpha + \|x_1-y_1\|_\alpha\big),$$

pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1 \in X_\alpha$.

(H5) $G : \mathbb{R} \times X_\alpha \to X_1$ est une fonction continue et pour $x \in X_\alpha,\ G(t,x)$ est ω-périodique en t .
$G(t,0) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, il existe L_2 tel que :

$$\|AG(t_2,x) - AG(t_1,y)\| \leq L_2\big(|t_2-t_1| + \|x-y\|_\alpha\big).$$

(H6) $CM_\alpha(2L_1+L_2)\dfrac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_{1-\alpha}L_2 < 1, \quad \text{avec } C = \left\|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\right\|$.

Remarque :

- Les hypothèses **(H4)** et **(H5)** sont donné dans le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 1$.
- L'hypothèse **(H6)** est une adaptation de l'hypothèse ***(H3)*** aux hypothèses **(H4)** et **(H5)** .

3.2.2 Résultat principal

Théorème 3.1.

*Si les condition **(H6)**, **(H4)** et **(H5)** sont satisfaites, alors, l'équation (1) admet une solution forte ω-périodique .*

Démonstration.

Soit $\mathcal{Z}$ l'opérateur défini par (2.9), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}u(t) = \big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds + G\big(t,u(t-\xi)\big)\\ -\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s,u(s-\xi)\big)ds, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pour un $r > 0$ donné, soit $\overline{\Omega}_r \subset \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$ défini par (2.8) .

Par les conditions **(H4)**,**(H5)** et **(H6)**, on procède comme dans la démonstration du Théorème 2.1 pour obtenir que $(\mathcal{Z}\overline{\Omega}_r) = \{\mathcal{Z}u, u \in \overline{\Omega}_r\} \subset \overline{\Omega}_r$.

Pour ce r, considérons l'ensemble :

$$\overline{\Omega} = \{u \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha) | \; \|u\|_{\mathcal{C}_\alpha} \leq r, \; \|u(t_2) - u(t_1)\|_\alpha < L^*|t_2 - t_1|, \; \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{3.1}$$

pour un certain L^* sur le quel on imposera par la suite des contraintes .

Remarque : $\overline{\Omega}$ est un ensemble convexe fermé et non vide et on a $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_r$, on peut utiliser le Théorème 1.10 pour montrer que $\mathcal{Z}$ admet un point fixe .

Étape 01 : On montre que $\mathcal{Z}(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$.

On a $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_r$ ce qui implique que :

$$\mathcal{Z}(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{Z}(\overline{\Omega}_r) \subset \overline{\Omega}_r.$$

Pour tout $u \in \overline{\Omega}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{Z}u)(t_2) - (\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha = \Big\| & \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_2-\omega}^{t_2} T(t_2 - s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds \\
& + G\big(t_2, u(t_2 - \xi)\big) \\
& - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_2-\omega}^{t_2} T(t_2 - s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds \\
& - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_1-\omega}^{t_1} T(t_1 - s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds \\
& - G\big(t_1, u(t_1 - \xi)\big) \\
& + \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_1-\omega}^{t_1} T(t_1 - s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds \Big\|_\alpha \\
\leq \Big\| & \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_2-\omega}^{t_2} T(t_2 - s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds \\
& - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_1-\omega}^{t_1} T(t_1 - s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds \Big\|_\alpha \\
& + \Big\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_2-\omega}^{t_2} T(t_2 - s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds \\
& - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t_1-\omega}^{t_1} T(t_1 - s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds \Big\|_\alpha \\
& + \big\|G\big(t_2, u(t_2 - \xi)\big) - G\big(t_1, u(t_1 - \xi)\big)\big\|_\alpha .
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $s' = t_i - s$ pour $i = 1, 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{Z}u)(t_2) - (\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha \leq \Big\| & \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_0^\omega T(s')F\big(t_2 - s', u(t_2 - s'), u(t_2 - s' - \tau)\big)ds' \\
& - \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_0^\omega T(s')F\big(t_1 - s', u(t_1 - s'), u(t_1 - s' - \tau)\big)ds' \Big\|_\alpha \\
& + \Big\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_0^\omega T(s')AG\big(t_2 - s', u(t_2 - s' - \xi)\big)ds'
\end{aligned}$$

$$-\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_0^\omega T(s')AG\big(t_1-s',u(t_1-s'-\xi)\big)ds'\Big\|_\alpha$$
$$+\big\|G\big(t_2,u(t_2-\xi)\big)-G\big(t_1,u(t_1-\xi)\big)\big\|_\alpha .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{Z}u)(t_2)-(\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha \le{}& \Big\|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_0^\omega T(s)\Big(F\big(t_2-s,u(t_2-s),u(t_2-s-\tau)\big)\\ &-F\big(t_1-s,u(t_-s),u(t_1-s-\tau)\big)\Big)ds\Big\|_\alpha\\ &+\Big\|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_0^\omega T(s)\Big(AG\big(t_2-s,u(t_2-s-\xi)\big)ds\\ &-AG\big(t_1-s,u(t_1-s-\xi)\big)\Big)\Big\|_\alpha\\ &+\big\|G\big(t_2,u(t_2-\xi)\big)-G\big(t_1,u(t_1-\xi)\big)\big\|_\alpha .\end{aligned}$$

Pour $C=\Big\|\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\Big\|$ et par la définition de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{Z}u)(t_2)-(\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha \le{}& C\int_0^\omega \|A^\alpha T(s)\|\cdot\big\|F\big(t_2-s,u(t_2-s),u(t_2-s-\tau)\big)\\ &-F\big(t_1-s,u(t_-s),u(t_1-s-\tau)\big)\big\|\,ds\\ &+C\int_0^\omega \|A^\alpha T(s)\|\cdot\big\|AG\big(t_2-s,u(t_2-s-\xi)\big)\\ &-AG\big(t_1-s,u(t_1-s-\xi)\big)\big\|\,ds\\ &+\Big\|A^{\alpha-1}\Big(AG\big(t_2,u(t_2-\xi)\big)-AG\big(t_1,u(t_1-\xi)\big)\Big)\Big\|.\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses **(H4)**, **(H5)** et pour $C_{1-\alpha}=\|A^{\alpha-1}\|$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{Z}u)(t_2)-(\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha \le{}& CM_\alpha\int_0^\omega s^{-\alpha}\cdot\Big(L_1\big(|t_2-t_1|+\|u(t_2-s)-u(t_1-s)\|_\alpha\\ &+\|u(t_2-s-\tau)-u(t_1-s-\tau)\|_\alpha\big)\Big)ds\\ &+CM_\alpha\int_0^\omega s^{-\alpha}\cdot\Big(L_2\big(|t_2-t_1|+\|u(t_2-\xi)-u(t_1-\xi)\|_\alpha\big)\Big)ds\\ &+C_{1-\alpha}L_2\big(|t_2-t_1|+\|u(t_2-\xi)-u(t_1-\xi)\|_\alpha\big).\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\int_0^\omega s^{-\alpha}ds=\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{3.2}$$

En utilisant (3.2), on arrive à :

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{Z}u)(t_2)-(\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha \le{}& CM_\alpha\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big(L_1\big(|t_2-t_1|+\|u(t_2-s)-u(t_1-s)\|_\alpha\\ &+\|u(t_2-s-\tau)-u(t_1-s-\tau)\|_\alpha\big)\Big)\\ &+CM_\alpha\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big(L_2\big(|t_2-t_1|+\|u(t_2-\xi)-u(t_1-\xi)\|_\alpha\big)\Big)\\ &+C_{1-\alpha}L_2\big(|t_2-t_1|+\|u(t_2-\xi)-u(t_1-\xi)\|_\alpha\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_1 |t_2 - t_1| + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_1 \|u(t_2 - s) - u(t_1 - s)\|_\alpha \\
&\quad + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_1 \|u(t_2 - s - \tau) - u(t_1 - s - \tau)\|_\alpha \\
&\quad + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_2 |t_2 - t_1| + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_2 \|u(t_2 - \xi) - u(t_1 - \xi)\|_\alpha \\
&\quad + C_{1-\alpha} L_2 |t_2 - t_1| + C_{1-\alpha} L_2 \|u(t_2 - \xi) - u(t_1 - \xi)\|_\alpha .
\end{aligned}
$$

De la définition de $\overline{\Omega}$ dans (3.1), on a :

- $\|u(t_2 - s) - u(t_1 - s)\|_\alpha < L^* |t_2 - t_1|$,
- $\|u(t_2 - s - \tau) - u(t_1 - s - \tau)\|_\alpha < L^* |t_2 - t_1|$,
- $\|u(t_2 - \xi) - u(t_1 - \xi)\|_\alpha < L^* |t_2 - t_1|$.

Ceci implique que :

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{Z}u)(t_2) - (\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha &\leq CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_1 |t_2 - t_1| + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_1 L^* |t_2 - t_1| \\
&\quad + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_1 L^* |t_2 - t_1| \\
&\quad + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_2 |t_2 - t_1| + CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_2 L^* |t_2 - t_1| \\
&\quad + C_{1-\alpha} L_2 |t_2 - t_1| + C_{1-\alpha} L_2 L^* |t_2 - t_1|_\alpha \\
&\leq \Bigg[\left(CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} (2L_1 + L_2) + C_{1-\alpha} L_2 \right) L^* \\
&\qquad + \left(CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} (L_1 + L_2) + C_{1-\alpha} L_2 \right) \Bigg] |t_2 - t_1| .
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\|(\mathcal{Z}u)(t_2) - (\mathcal{Z}u)(t_1)\|_\alpha \leq (K^* L^* + K_0) |t_2 - t_1| ,
$$

où :

- $K_0 = CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} (L_1 + L_2) + C_{1-\alpha} L_2$ est une constante indépendante de L^*.

Et d'après l'hypothèse **(H6)** :

- $K^* = CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} (2L_1 + L_2) + C_{1-\alpha} L_2 < 1$.

Par conséquent :

$$
\|\mathcal{Z}u(t_2) - \mathcal{Z}u(t_1)\|_\alpha \leq L^* |t_2 - t_1|, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.3}
$$

en considérant $L^* \geq \dfrac{K_0}{1 - K^*}$, pour que $K_0 + K^* L^* \leq L^*$. Ce qui montre que $\mathcal{Z}(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$.

Étape 02 : On montre que $\mathcal{Z}$ est une contraction dans $\overline{\Omega}$.

Pour tout $u_1,\ u_2 \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha),\ t \in \mathbb{R}$, et en procédant comme pour le Théorème 2.2, on a :

$$
\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha = \bigg\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) F\big(s, u_2(s), u_2(s-\tau)\big) ds + G\big(t, u_2(t-\xi)\big)
$$

$$
\begin{aligned}
&- \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) AG\big(s, u_2(s-\xi)\big) ds \\
&- \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) F\big(s, u_1(s), u_1(s-\tau)\big) ds - G\big(t, u_1(t-\xi)\big) \\
&+ \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) AG\big(s, u_1(s-\xi)\big) ds \Big\|_\alpha \\
\leq &\left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) \Big(F\big(s, u_2(s), u_2(s-\tau)\big) - F\big(s, u_1(s), u_1(s-\tau)\big) \Big) ds \right\|_\alpha \\
&+ \|G\big(t, u_2(t-\xi)\big) - G\big(t, u_1(t-\xi)\big)\|_\alpha \\
&+ \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) \Big(AG\big(s, u_2(s-\xi)\big) - AG\big(s, u_1(s-\xi)\big) \Big) ds \right\|_\alpha .
\end{aligned}
$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_\alpha$ et pour $C = \left\| \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \right\|$, on a :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq C \cdot \int_{t-\omega}^{t} &\|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|F\big(s, u_2(s), u_2(s-\tau)\big) - F\big(s, u_1(s), u_1(s-\tau)\big)\| ds \\
&+ \|A^{\alpha-1} \Big(AG\big(t, u_2(t-\xi)\big) - AG\big(t, u_1(t-\xi)\big) \Big)\| \\
&+ C \cdot \int_{t-\omega}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|AG\big(s, u_2(s-\xi)\big) - AG\big(s, u_1(s-\xi)\big)\| ds.
\end{aligned}
$$

Par la propriété (v) du Lemme 1.1, les hypothèse **(H4)** et **(H5)** et pour $C_{1-\alpha} = \|A^{\alpha-1}\|$, on a :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq CM_\alpha \int_{t-\omega}^{t} &\frac{1}{(t-s)^\alpha} L_1 \big(\|u_2(s) - u_1(s)\|_\alpha + \|u_2(s-\tau) - u_1(s-\tau)\|_\alpha \big) ds \\
&+ C_{1-\alpha} L_2 \big(\|u_2(s-\xi) - u_1(s-\xi)\|_\alpha \big) \\
&+ CM_\alpha \int_{t-\omega}^{t} \frac{1}{(t-s)^\alpha} L_2 \big(\|u_2(s-\xi) - u_1(s-\xi)\|_\alpha \big) ds.
\end{aligned}
$$

D'après l'équation (2.20) et la définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\alpha}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq CM_\alpha &\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} 2L_1 \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} + C_{1-\alpha} L_2 \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha} \\
&+ CM_\alpha \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} L_2 \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq \left(CM_\alpha (2L_1 + L_2) \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_{1-\alpha} L_2 \right) \|u_2 - u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}.
$$

D'après l'hypothèse **(H6)**, on a :

$$
\left(CM_\alpha (2L_1 + L_2) \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_{1-\alpha} L_2 \right) < 1.
$$

Ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{Z}$ est bien une contraction dans $\overline{\Omega}$.

La Proposition 1.6.2 nous donne que l'opérateur $\mathcal{Z}$ est une k-contraction d'ensemble.

Alors par application du Théorème 1.10, l'opérateur $\mathcal{Z}$ admet un point fixe u qui est une solution mild ω-périodique de l'équation (1).

Par les hypothèses et le calcul ci-dessus, pour ce $u(\cdot)$ appartenant à $\overline{\Omega}$, on voit que $u(\cdot)$ est Lipschitzienne. Ainsi, toutes les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
g(t) &= G\big(t, u(t-\xi)\big), \\
\Phi(t) &= \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds, \\
\Psi(t) &= \big(I - T(\omega)\big)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds
\end{aligned}$$

sont Lipschitziennes .

Puisque u est Lipschitz continue sur $\mathbb{R}$ et que l'espace X_α est réflexif par l'hypothèse et le Lemme 1.3, alors le Théorème 1.4 affirme que $u(\cdot)$ est presque partout différentiable sur $\mathbb{R}$ et $u'(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X_\alpha)$.

De plus, par la formule de Leibniz on obtient que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &= \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(T(t-t)F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big) - T(t-t+\omega)F\big(t-\omega, u(t-\omega), u(t-\omega-\tau)\big) \\
&\qquad + \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\left(\frac{\partial}{\partial t}F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big) - AF\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)\right)ds\bigg) \\
&= \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big) - T(\omega)F\big(t-\omega, u(t-\omega), u(t-\omega-\tau)\big) \\
&\qquad - \int_{t-\omega}^{t} AT(t-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds\bigg).
\end{aligned}$$

$F(t, x_0, x_1)$ est ω-périodique en t et $u \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$, alors :

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(\big(I - T(\omega)\big)F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big) - \int_{t-\omega}^{t} AT(t-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds\bigg).$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi(t) &= \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(T(t-t)AG\big(t, u(t-\xi)\big) - T(t-t+\omega)AG\big(t-\omega, u(t-\omega-\xi)\big) \\
&\qquad + \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\left(\frac{\partial}{\partial t}AG\big(s, u(s-\xi)\big) - A\Big(AG\big(s, u(s-\xi)\big)\Big)\right)ds\bigg) \\
&= \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(AG\big(t, u(t-\xi)\big) - T(\omega)AG\big(t-\omega, u(t-\omega-\xi)\big) \\
&\qquad - \int_{t-\omega}^{t} AT(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds\bigg).
\end{aligned}$$

$G(t, x)$ est ω-périodique en t et $u \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$, alors :

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(\big(I - T(\omega)\big)AG\big(t, u(t-\xi)\big) - \int_{t-\omega}^{t} AT(t-s)AG\big(s, u(s-\xi)\big)ds\bigg).$$

Ainsi, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u(t) &= \frac{d}{dt}\Phi(t) + \frac{d}{dt}g(t) - \frac{d}{dt}\Psi(t) \\
&= \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\bigg(\big(I - T(\omega)\big)F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big) - \int_{t-\omega}^{t} AT(t-s)F\big(s, u(s), u(s-\tau)\big)ds\bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{d}{dt}G\big(t,u(t-\xi)\big)\\
&-\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\Big(\big(I-T(\omega)\big)AG\big(t,u(t-\xi)\big)-\int_{t-\omega}^{t}AT(t-s)AG\big(s,u(s-\xi)\big)ds\Big)\\
=\;& F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)-AG\big(t,u(t-\xi)\big)+\frac{d}{dt}G\big(t,u(t-\xi)\big)\\
&-A\Big(\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t}T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds\\
&-\big(I-T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t}T(t-s)AG\big(s,u(s-\xi)\big)ds\Big)\\
=\;& F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)-AG\big(t,u(t-\xi)\big)+\frac{d}{dt}G\big(t,u(t-\xi)\big)\\
&-A\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\xi)\big)\Big).
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que :

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\xi)\big)\Big)+Au(t)=F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big),\quad \text{pour presque tout } t\in\mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Cela montre que u est une solution forte pour l'équation (1) .

La démonstration est terminée . $\square$

3.3 Théorème d'existence de solution classique

3.3.1 Hypothèses considérées

On considère le problème (1),

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\xi)\big)\Big)+Au(t)=F\big(t,u(t),u(t-\tau)\big),\quad t\in\mathbb{R}.$$

où F et G vérifient les hypothèses suivantes :

Pour $\alpha\in[0,1)$, on suppose que :

(H4′) $F:\mathbb{R}\times X_\alpha^2\to X$ est une fonction continue et pour tout $x_0,\ x_1\in X_\alpha$, $F(t,x_0,x_1)$ est ω-périodique en t .
Il existe L_1 et $\mu_1\in(0,1)$ tels que :

$$\|F(t_2,x_0,,x_1)-F(t_1,y_0,y_1)\|\le L_1\big(|t_2-t_1|^{\mu_1}+\|x_0-y_0\|_\alpha+\|x_1-y_1\|_\alpha\big),$$

pour chaque $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ et $x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1\in X_\alpha$.

(H5′) $G:\mathbb{R}\times X_\alpha\to X$ est une fonction continue et pour tout $x\in X_\alpha$, $G(t,x)$ est ω-périodique en t .
$G(t,0)=0$ pour $t\in\mathbb{R}$, il existe L_2 et $\mu_2\in(0,1)$ tels que :

$$\|AG(t_2,x)-AG(t_1,y)\|\le\big(|t_2-t_1|^{\mu_2}+\|x-y\|_\alpha\big)$$

pour chaque $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ et $x,y\in X_\alpha$.

Remarque : Pour montrer que la solution mild est une solution classique sous les hypothèses **(H4′)**, **(H5′)** et **(H6)**, on considère que le retard est unique, c'est-à-dire, $\tau=\xi=\delta$.

3.3.2 Résultat principal

Théorème 3.2.

*Si les conditions **(H4′)**, **(H5′)** et **(H6)** sont remplies, alors, l'équation (1) admet une solution classique ω-périodique .*

Démonstration.

Étape 01 : Existence et unicité de la solution mild.

Soit $\mathcal{Z}$ l'opérateur défini par (2.9), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}u(t) = \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s,u(s),u(s-\tau)\big)ds + G\big(t,u(t-\xi)\big)\\ -\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s,u(s-\xi)\big)ds, \quad t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Par les hypothèses **(H4′)**, **(H5′)**, **(H6)** et la preuve du Théorème 2.1, nous savons que l'opérateur $\mathcal{Z} : \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$ est bien défini .

Pour tout $u_1,\ u_2 \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha),\ \ t\in\mathbb{R}$, en procédant de la même manière que dans la preuve du Théorème 2.2, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha &= \bigg\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s,u_2(s),u_2(s-\tau)\big)ds + G\big(t,u_2(t-\xi)\big)\\ &\quad - \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s,u_2(s-\xi)\big)ds\\ &\quad - \big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)F\big(s,u_1(s),u_1(s-\tau)\big)ds - G\big(t,u_1(t-\xi)\big)\\ &\quad +\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)AG\big(s,u_1(s-\xi)\big)ds\bigg\|_\alpha\\ &\le \bigg\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\Big(F\big(s,u_2(s),u_2(s-\tau)\big) - F\big(s,u_1(s),u_1(s-\tau)\big)\Big)ds\bigg\|_\alpha\\ &\quad + \|G\big(t,u_2(t-\xi)\big) - G\big(t,u_1(t-\xi)\big)\|_\alpha\\ &\quad + \bigg\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\Big(AG\big(s,u_2(s-\xi)\big) - AG\big(s,u_1(s-\xi)\big)\Big)ds\bigg\|_\alpha.\end{aligned}$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_\alpha$ et pour $C = \Big\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\Big\|$, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \le C\cdot\int_{t-\omega}^{t}\|A^\alpha T(t-s)\|\cdot\|F\big(s,u_2(s),u_2(s-\tau)\big) - F\big(s,u_1(s),u_1(s-\tau)\big)\|ds\\ + \|A^{\alpha-1}\Big(AG\big(t,u_2(t-\xi)\big) - AG\big(t,u_1(t-\xi)\big)\Big)\|\\ + C\cdot\int_{t-\omega}^{t}\|A^\alpha T(t-s)\|\cdot\|AG\big(s,u_2(s-\xi)\big) - AG\big(s,u_1(s-\xi)\big)\|ds.\end{aligned}$$

Par la propriété (v) du Lemme 1.1, les hypothèse **(H4′)** et **(H5′)** et pour $C_{1-\alpha} = \|A^{\alpha-1}\|$, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_2(t) - \mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \le CM_\alpha\int_{t-\omega}^{t}\frac{1}{(t-s)^\alpha}L_1\big(\|u_2(s)-u_1(s)\|_\alpha + \|u_2(s-\tau)-u_1(s-\tau)\|_\alpha\big)ds\\ + C_{1-\alpha}L_2\big(\|u_2(s-\xi)-u_1(s-\xi)\|_\alpha\big)\\ + CM_\alpha\int_{t-\omega}^{t}\frac{1}{(t-s)^\alpha}L_2\big(\|u_2(s-\xi)-u_1(s-\xi)\|_\alpha\big)ds.\end{aligned}$$

D'après l'équation (2.20) et la définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\alpha}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}u_2(t)-\mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq CM_\alpha\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}2L_1\|u_2-u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}+C_{1-\alpha}L_2\|u_2-u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}\\ +CM_\alpha\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}L_2\|u_2-u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\|\mathcal{Z}u_2(t)-\mathcal{Z}u_1(t)\|_\alpha \leq \left(CM_\alpha(2L_1+L_2)\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C_{1-\alpha}L_2\right)\|u_2-u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}.$$

En utilisant **(H6)**, ceci implique que :

$$\|\mathcal{Z}u_2-\mathcal{Z}u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}<\|u_2-u_1\|_{\mathcal{C}_\alpha}. \tag{3.5}$$

Donc, $\mathcal{Z}:\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R},X_\alpha)\to\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R},X_\alpha)$ est une contraction. D'après le Théorème 1.7 de point fixe de Banach , $\mathcal{Z}$ admet un unique point fixe $u_0\in\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R},X_\alpha)$.

Par la définition de $\mathcal{Z}$, u_0 est une solution mild ω-périodique de l'équation (1) .

Étape 02 : Solution classique .

Ensuite, on prouve que u_0 est une solution classique ω-périodique. A partir de la périodicité de u_0, il suffit de le prouver sur $[0,\omega]$.

On considère le problème (1) avec $\xi=\tau=\delta$, l'équation considérée est donc :

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\delta)\big)\Big)+Au(t)=F\big(t,u(t),u(t-\delta)\big),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Pour $t\in[0,\omega]$ et :

$$h(t)=F\big(t,u(t),u(t-\delta)\big)-AG\big(t,u(t-\delta)\big).$$

Par les hypothèses de continuité de F et G, $h\in\mathcal{C}([0,\omega],X)$.

Pour tout $\epsilon\in(0,\omega)$, puisque u_0 est la solution mild ω-périodique de l'équation (1), donc u_0 est la solution mild du problème à valeur initiale :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\delta)\big)\Big)+A\Big(u(t)-G\big(t,u(t-\delta)\big)\Big)=h(t),\quad t\in[0,\omega]\\ u(\epsilon)=u_0(\epsilon),\end{cases} \tag{3.6}$$

avec $u_0(\epsilon)\in X_\alpha$, du Lemme 2.1 il s'ensuit que :

$$u_0\in\mathcal{C}^{\mu_3}\big([\epsilon,\omega],X_{\alpha-\mu_3}\big)\hookrightarrow\mathcal{C}^{\mu_3}\big([\epsilon,\omega],X\big),\quad \mu_3\in(0,\alpha).$$

D'autre part, $h\in\mathcal{C}^\mu([\epsilon,\omega],X)$, où $\mu=\min\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$, en effet :

$$\begin{aligned}\|h(t_2)-h(t_1)\|&=\|F\big(t_2,u(t_2),u(t_2-\delta)\big)-AG\big(t_2,u(t_2-\delta)\big)\\&\quad-F\big(t_1,u(t_1),u(t_1-\delta)\big)+AG\big(t_1,u(t_1-\delta)\big)\|\\&\leq\|F\big(t_2,u(t_2),u(t_2-\delta)\big)-F\big(t_1,u(t_1),u(t_1-\delta)\big)\|\\&\quad+\|AG\big(t_2,u(t_2-\delta)\big)-AG\big(t_1,u(t_1-\delta)\big)\|.\end{aligned}$$

D'après les conditions **(H4′)**, **(H5′)** et $u_0 \in C^{\mu_3}\big([\epsilon, \omega], X\big)$, on a bien que :

$$\begin{aligned}\|h(t_2) - h(t_1)\| &\leq L_1\big(|t_2 - t_1|^{\mu_1} + \|u(t_2) - u(t_1)\|_\alpha + \|u(t_2 - \delta) - u(t_1 - \delta)\|_\alpha\big) \\ &\quad + L_2\big(|t_2 - t_1|^{\mu_2} + \|u(t_2 - \delta) - u(t_1 - \delta)\|_\alpha\big) \\ &\leq L_1\big(|t_2 - t_1|^{\mu_1} + 2|t_2 - t_1|^{\mu_3}\big) + L_2\big(|t_2 - t_1|^{\mu_2} + |t_2 - t_1|^{\mu}\big).\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.2, on obtient que u_0 est une solution classique de l'équation (3.6) et satisfait :

$$u_0 \in \mathcal{C}^1\big((\epsilon, \omega], X\big) \cap \mathcal{C}\big([\epsilon, \omega], X_1\big).$$

Et, puisque ϵ est quelconque dans $(0, \omega)$, alors :

$$u_0 \in \mathcal{C}^1\big((0, \omega], X\big) \cap \mathcal{C}\big([0, \omega], X_1\big).$$

Par conséquent, u_0 est une solution classique ω-périodique de l'équation (1) et satisfait :

$$u_0 \in \mathcal{C}^1_\omega\big(\mathbb{R}, X\big) \cap \mathcal{C}_\omega\big(\mathbb{R}, X_1\big).$$

La démonstration est terminée . □

Chapitre 4

Application

Introduction

Dans cette section, on présente un exemple, qui indique comment nos résultats abstraits peuvent être appliquer à des problèmes concrets .

4.1 Position du problème

On considère le problème aux limites associé à une équation aux dérivées partielles parabolique avec des retards suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\psi(x,t) - \displaystyle\int_0^1 g\big(x,y,t,\psi(y,t-\xi)\big)dy\Big) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \\ \qquad\qquad = f\big(x,t,\psi(x,t),\psi(x,t-\tau)\big), \qquad x\in[0,1], t\in\mathbb{R}, \\ \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où :

- $g \in \mathcal{C}\big([0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}\big)$ et $f \in \mathcal{C}\big([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}\big)$,
- f, g sont ω-périodiques en t,
- ξ, τ sont des constantes positives qui dénotent les retards.

Pour formuler ce système sous la forme abstraite (1), on choisit l'espace $X = L^2([0,1],\mathbb{R})$, c'est un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, X est réflexif .

De plus, pour $\psi : \mathbb{R}\times[0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction inconnue dans (4.1), on définit $u : \mathbb{R} \to X$ par $u(t)(x) = \psi(x,t)$ pour $x \in [0,1]$, ce qui implique que $u(t-\tau)(\cdot) = \psi(\cdot, t-\tau)$ et $u(t-\xi)(\cdot) = \psi(\cdot, t-\xi)$.

Par conséquent, l'équation aux dérivées partielles avec retards (4.1) peut être réécrite sous la forme de l'équation d'évolution abstraite avec retards (1) :

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t) - G\big(t, u(t-\xi)\big)\Big) + Au(t) = F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big)\Big). \tag{4.2}$$

On définit l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ par :

$$D(A) := \{v \in X |\ v', v'' \in X, v(0) = v(1) = 0\}, \qquad Av = -\frac{d^2 v}{dx^2}. \tag{4.3}$$

$-A$ génère un semi-groupe analytique compact exponentiellement stable $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ dans X, pour l'analyticité du semi-groupe, voir ([19], Corollaire 5) ou [26]. De plus, on note que $0 \in \rho(A)$ et que les puissances fractionnaires de A sont bien définies .

Les valeurs propres de l'opérateur A sont de la forme $n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$, et les fonctions propres normalisées associées sont données par $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ pour $x \in [0,1]$, le semi-groupe associé $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ est explicitement donné par :

$$T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}(w, e_n)e_n, \quad t \geq 0, w \in X, \tag{4.4}$$

où $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire sur X, tel que, $\|T(t)\| \leq e^{-\pi^2 t}$ pour tout $t \geq 0$. Donc, on prend $M = 1$, $M_{\frac{1}{2}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\|\big(I - T(\omega)\big)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - e^{-\pi^2 \omega}}$.

Lemme 4.1. *[55] Si $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$, alors v est absolument continue avec $v' \in X$ et $\|v'\|_{L^2} = \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{L^2}$.*

4.2 L'étude du problème

D'après le Lemme 4.1, on définit l'espace de Banach $X_{\frac{1}{2}} := \big(D(A^{\frac{1}{2}}), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}}\big)$, où $\|v\|_{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}} v\|_{L^2}$ pour tout $v \in X_{\frac{1}{2}}$.

4.2.1 Hypothèses considérées

Pour discuter l'existence et la régularité de la solution mild ω-périodiques du problème (4.1), on impose les hypothèses suivantes :

(F1) Il existe des constantes positives a_0, a_1 et K telles que, pour tout $(x,t,v,w) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$|f(x,t,v,w)| \leq a_0|v| + a_1|w| + K.$$

(F2) $g : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

(i) Il existe une fonction positive $b : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$|g(x,y,t,v_2) - g(x,y,t,v_1)| \leq b(x,y,t)|v_2 - v_1|, \quad x,y \in [0,1], t \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

De plus, $(x,y,t) \mapsto \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} b(x,y,t)$ est bien défini et mesurable avec :

$$l^2 := \max_{t \in [0,\omega]} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x,y,t)\right)^2 dy\, dx < \infty.$$

(ii) $g(0,y,t,v) = g(1,y,t,v) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, y \in [0,1], v \in \mathbb{R}$.

(F3) $\dfrac{2\omega^{\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\pi^2 \omega}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(a_0 + a_1 + l) + l < 1$.

4.3 Existence de solution mild

Proposition 4.3.1.

*Si les conditions **(F1)**, **(F2)** et **(F3)** sont remplies, alors, l'équation différentielle partielle neutre avec retards (4.1) admet au moins une solution mild ω-périodique par rapport au temps .*

Démonstration.

Soient $F : \mathbb{R} \times X_{\frac{1}{2}} \times X_{\frac{1}{2}} \to X$ et $G : \mathbb{R} \times X_{\frac{1}{2}} \to X$ définies par :

- $F(t,\phi,\varphi)(x) = f\big(x,t,\phi(x),\varphi(x)\big)$,

- $G(t,\phi)(x) = \displaystyle\int_0^1 g\big(x,y,t,\phi(y)\big)\, dy,$

pour $t \in \mathbb{R}, \phi, \varphi \in X_{\frac{1}{2}}$ et $x \in [0,1]$.

A partir de la définition de F et de l'hypothèse **(F1)**, on en déduit que $F : \mathbb{R} \times X_{\frac{1}{2}} \times X_{\frac{1}{2}} \to X$ est une fonction continue, et pour chaque $\phi, \varphi \in X_{\frac{1}{2}}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\|F(t,\phi,\varphi)\|_{L^2} &= \left(\int_0^1 \Big(f\big(x,t,\phi(x),\varphi(x)\big)\Big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \big(a_0|\phi(x)| + a_1|\varphi(x)| + K\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq a_0\|\phi\|_{L^2} + a_1\|\varphi\|_{L^2} + K \\
&\leq a_0\|\phi\|_{\frac{1}{2}} + a_1\|\varphi\|_{\frac{1}{2}} + K.
\end{aligned}$$

Donc, la condition **(H1′)** est bien vérifiée .

Par la définition de G et l'hypothèse **(F2)**, on voit que $G : \mathbb{R} \times X_{\frac{1}{2}} \to X1, \big(X_1 =: D(A)\big)$ est continue et on a :

$$\begin{aligned}
\|AG(t,\phi) - AG(t,\varphi)\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \left|\int_0^1 \Big(g\big(x,y,t,\phi(y)\big) - g\big(x,y,t,\varphi(y)\big)\Big)^2 dy\right| dx \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x,y,t) \cdot |\phi(x) - \varphi(x)|\right)^2 dy\, dx \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x,y,t)\right)^2 dy\, dx \cdot \|\phi - \varphi\|_{L^2}^2 \\
&\leq l^2 \|\phi - \varphi\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $\phi, \varphi \in X_{\frac{1}{2}}$. Donc, la condition ***(H2)*** est bien vérifiée .

Enfin, d'après **(F3)** et le Corollaire 2.4.1, alors l'équation d'évolution (4.2) admet une solution mild ω-périodique . La preuve est terminée . □

4.4 Existence de solution classique et forte

Pour montrer l'existence de solutions classiques et fortes, les hypothèses suivantes sont nécessaires :

(F4) Il existe des constantes l_1 et $\mu_1 \in (0,1]$ telles que, pour tout $t_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}(i = 1,2)$ et $x \in [0,1]$:

$$|f(x,t_2,v_2,w_2) - f(x,t_1,v_1,w_1)| \leq l_1\big(|t_2 - t_1|^{\mu_1} + |v_2 - v_1| + |w_2 - w_1|\big).$$

(F5) $g : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :

(i) $(x,y,t,v) \mapsto \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y,t,v)$ est bien défini et mesurable .

De plus, il existe des constantes $l_2 > 0$ et $\mu_2 \in (0,1]$ telles que, pour tout $t_i, v_i \in \mathbb{R}(i = 1,2)$:

$$\left|\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y,t_2,v_2)dy - \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y,t_1,v_1)dy\right| \leq l_2\big(|t_2 - t_1|^{\mu_2} + |v_2 - v_1|\big).$$

(ii) $g(0, y, t, v) = g(1, y, t, v) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}, y \in [0, 1]$ et $v \in \mathbb{R}$,

(F6) $\dfrac{2\omega^{\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\pi^2\omega}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2l_1 + l_2) + l_2 < 1.$

Donc, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $\phi_1, \varphi_1, \phi_2, \varphi_2 \in X_{\frac{1}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|F(t_2, \phi_2, \varphi_2) - F(t_1, \phi_1, \varphi_1)\|_{L^2} &= \left(\int_0^1 \left|f\big(x, t_2, \phi_2(x), \varphi_2(x)\big) - f\big(x, t_1, \phi_1(x), \varphi_1(x)\big)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 l_1^2\big(|t_2 - t_1|^{\mu_1} + |\phi_2(x) - \phi_1(x)| + |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq l_1\big(|t_2 - t_1|^{\mu_1} + \|\phi_2 - \phi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L^2}\big) \\
&\leq l_1\big(|t_2 - t_1|^{\mu_1} + \|\phi_2 - \phi_1\|_{\frac{1}{2}} + \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{\frac{1}{2}}\big).
\end{aligned}$$

Et, on a :

$$\begin{aligned}
\|AG(t_2, \phi_2) - AG(t_1, \phi_1)\|_{L^2} &= \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g\big(x, y, t_2, \phi_2(y)\big)dy - \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g\big(x, y, t_1, \phi_1(y)\big)dy\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 l_2^2\big(|t_2 - t_1|^{\mu_2} + |\phi_2(x) - \phi_1(x)|\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq l_2\big(|t_2 - t_1|^{\mu_2} + \|\phi_2 - \phi_1\|_{L^2}\big) \\
&\leq l_2\big(|t_2 - t_1|^{\mu_2} + \|\phi_2 - \phi_1\|_{\frac{1}{2}}\big),
\end{aligned}$$

ce qui implique que les conditions **(H4′)** et **(H5′)** pour $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$ ou **(H4)** et **(H5)** pour $\mu_1 = \mu_2 = 1$ sont bien vérifiées .

D'autre part, par la condition **(F6)**, on peut facilement prouver la condition **(H6)** .

Par conséquent, toutes les conditions énoncées dans le Théorème 3.2 et le Théorème 3.1 sont satisfaites, et nous obtenons les résultats intéressants suivants :

Résultat 1 :

Si les conditions **(F4)**, **(F5)** sont vraies pour $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$, alors l'équation d'évolution à retards de type neutre (4.2)$\big($avec $\xi = \tau\big)$ admet une solution classique ω-périodique .

Résultat 2 :

Si les conditions **(F4)**, **(F5)** sont vraies pour $\mu_1 = \mu_2 = 1$, alors l'équation d'évolution à retards de type neutre (4.2) admet une solution forte ω-périodique .

Résumé :

Ce mémoire vise à examiner le problème périodique d'une équation d'évolution à retard neutre dans un espace de Banach X . L'équation considérée est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t) - G\big(t, u(t-\xi)\big)\Big) + Au(t) = F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

où $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire fermé et $-A$ génère un semi-groupe d'opérateurs analytiques compacts $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$.

En utilisant la théorie de semi-groupes d'opérateurs analytiques et certains théorèmes de point fixe, l'existence et l'unicité d'une solution mild périodique pour cette équation sont établies .

Nous étudions également la régularité des ces solutions mild et nous obtenons des résultats d'existence de solutions classiques et fortes .

Et, un exemple illustrant l'applicabilité des résultats abstraits obtenus est présenté .

Ce travail représente une application de la théorie de semi-groupe exponentiallement stables et de la notion mesure de non compacité pour l'étude d'une certaines classes d'équations aux drivées partielles pouvant s'exprime sous forme d'une équation d'évolution à retard de type neutre, en basant sur la référence [39] .

Abstract :

This thesis aims to examine the periodic problem of a neutral evolution equation with delay in a Banach space X. The considered equation is of the form :

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t) - G\big(t, u(t-\xi)\big)\Big) + Au(t) = F\big(t, u(t), u(t-\tau)\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

where, $A : D(A) \subset X \to X$ is a closed linear operator, and $-A$ generates a compact analytic operator semigroup $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$.

Using the theories of analytic operator semigroups and some fixed point theorems, the existence and uniqueness of a periodic mild solution for this equation are proved .

The regularity of these mild solutions and existence results for classical and strong solutions is considered .
An example illustrating the applicability of the abstract results obtained is present .

This work represents an application of the theory of exponentially stable semi-groups and of the notion of measurement of non-compactness for the study of a certain class of partial differential equations which can be expressed in the form of an evolution equation with neutral type delay, based on reference [39] .

Bibliographie

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A.(1965) : *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, New York .

[2] Adimy, M., Bouzahir, H., Ezzinbi, K. : *Existence and stability for some partial neutral functional differential equations with infinite delay.* J. Math. Anal. Appl. 294, 438–461 (2004) .

[3] Adimy, M., Ezzinbi, K. : *A class of linear partial neutral functional differential equations with nondense domain.* J. Differ.Equ. 147, 285–332 (1998) .

[4] Adimy, M., Ezzinbi, K. : *Existence and stability in the α-norm for partial functional equations of neutral type.* Ann. Mat. Pura Appl. 185, 437–460 (2006) .

[5] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan : *Fixed point theory and applications.* Cambridge University Press, New York, (2001) .

[6] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina and B.N. Sadovskii : *Measures of Noncompactness and Condensing Operators.* Birkhäuser, Basel, (1992) .

[7] O. Arino, M.L, Hbid, R. Bravo de la Parra, *A mathematic model of growth of population of fish in the larval stage : density-dependence effects*, Math. Biosci 150 (1), (1998). 1-120.

[8] N. Aronszajn, *Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces*, Studia Mathematica (1976) Volume : 57, Issue : 2, page 147-190

[9] Babram, M.A., Ezzinbi, K. : *Periodic solutions of functional differential equations of neutral type.* J. Math. Anal. Appl. 204, 898–909 (1996) .

[10] Benkhalti, R., Elazzouzi, A., Ezzinbi, K. : *Periodic solutions for some partial neutral functional differential equations.* Electron. J. Differ. Equ. 2006, 56 (2006) .

[11] Benkhalti, R., Elazzouzi, A., Ezzinbi, K. : *Periodic solutions for some nonlinear partial neutral functional differential equations.* Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. 20, 545–555 (2010) .

[12] Benkhalti, R., Ezzinbi, K. : *Periodic solutions for some partial functional differential equations.* J. Appl. Math. Stoch. Anal.1, 9–18 (2004) .

[13] Benlechheb Imane : *Sur une Classe de Problème Semi Linéaire*,2011/2012, http ://dspace.univ-msila.dz :8080/xmlui/handle/123456789/36525 .

[14] H. Brezis : *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*. Masson, Paris, 1983 .

[15] Burton, T.A., Zhang, B. : *Periodic solutions of abstract differential equations with infinite delay*. J. Differ. Equ. 90, 357–396 (1991) .

[16] Cannarsa, P., Sforza, D. : *Global solutions of abstract semilinear parabolic equations with memory terms*. NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 10, 399–430 (2003) .

[17] Chang, J., Liu, H. : *Existence of solutions for a class of neutral partial differential equations with nonlocal conditions in the α-norm*. Nonlinear Anal. 71, 3759–3768 (2009) .

[18] Chen, Y. : *The existence of periodic solutions for a class of neutral differential difference equations*. J. Aust. Math. Soc. Ser. B 33, 507–516 (1992) .

[19] Edward B. Davies : *Non-Gaussian aspects of heat kernel behaviour*. J. London Math. Soc., (2), 55(1) : 105–125, 1997 .

[20] Ezzinbi, K., Fu, X.L. : *Existence and regularity of solutions for some neutral partial differential equations with non-local conditions*. Nonlinear Anal. 57, 1029–1041 (2004) .

[21] Ezzinbi, K., Ghnimib, S. : *Existence and regularity of solutions for neutral partial functional integrodifferential equations*. Nonlinear Anal, Real World Appl. 11, 2335–2344 (2010) .

[22] Ezzinbi, K., Kyelem, B.A., Ouaro, S. : *Periodicity in the α-norm for partial functional differential equations in fading memory spaces*. Nonlinear Anal. 97, 30–54 (2014) .

[23] Ezzinbi, K., Lui, J. : *Periodic solutions of non-densely defined delay evolutions equations*. J. Appl. Math. Stoch. Anal. 15, 113–123 (2002) .

[24] Fu, X. : *Existence of solutions and periodic solutions for abstract neutral equations with unbounded delay*. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. 15, 17–35 (2008) .

[25] Fu, X., Liu, X. : *Existence of periodic solutions for abstract neutral non-autonomous equations with infinite delay*. J. Math. Anal. Appl. 325, 249–267 (2007) .

[26] Gilles Carron, Thierry Coulhon et El-Maati Ouhabaz : *Gaussian estimates and L^p-boundedness of Riesz means*. J. Evol. Equ., 2(3) :299–317, 2002 .

[27] F. Golse, Y. Laszlo, F. Pacard et C. Viterbo : *Analyse réelle*. http ://bremy.perso.math.cnrs.fr/Cours-MAT311-2015.

[28] Hale, J. : *Partial neutral functional-differential equations*. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 39, 339–344 (1994) .

[29] Hale, J.K., Verduyn Lunel, S.M. : *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, Berlin (1993) .

[30] Hernández, E. : *Existence results for partial neutral integrodifferential equations with unbounded delay.* J. Math. Anal.Appl. 292, 194–210 (2004) .

[31] Hernández, E., Henriquez, H.R. : *Existence of periodic solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay.* J. Math. Anal. Appl. 221, 499–522 (1998) .

[32] Hernández, E., O'Regan, D., Ponce, R. : *On C^{α}-Hölder classical solutions for non-autonomous neutral differential equations : the nonlinear case.* J. Math. Anal. Appl. 420, 1814–1831 (2014) .

[33] Hernández, E., Pelicer, M.L. : *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for partial neutral differential equations.* Appl. Math. Lett. 18, 1265–1272 (2005) .

[34] Hernández, E., Pierri, M., Prokopczyk, A. : *On a class of abstract neutral functional differential equations.* Nonlinear Anal. 74, 3633–3643 (2011) .

[35] Huy, N., Dang, N. : *Dichotomy and periodic solutions to partial functional differential equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst, Ser. B 22, 3127–3144 (2017) .

[36] K. Jochen Engel Rainer Nagel : *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Alfred A.Knopf, 1995 .

[37] Józef Banaś : *On measures of noncompactness in Banach spaces*, volume 21. Comment. Math.Univ. Carolinae, 1980 .

[38] R.KRESS, *Linear Integral equations*, Third Edition, Institut fur Numerische und Angewandte Georg-August-Universitat Gottingen Gottingen, Germany, Springer 2014 .

[39] Li Qiang and Zhang Huanhuan : *Existence and regularity of periodic solutions for neutral evolution equations with delays.* Advances in Difference equations, 2019 :330 (2019) .

[40] Li, Q., Li, Y. : *Existence of positive periodic solutions for abstract evolution equations.* Adv. Differ. Equ. 2015, 135 (2015) .

[41] Li, Y. : *Existence and uniqueness of positive periodic solution for abstract semilinear evolution equations.* J. Syst. Sci.Math. Sci. 25, 720–728 (2005) (in Chinese) .

[42] Li, Y. : *Existence and asymptotic stability of periodic solution for evolution equations with delays.* J. Funct. Anal. 261, 1309–1324 (2011) .

[43] Liang, J., Liu, J.H., Xiao, T.J. : *Condensing operators and periodic solutions of infinite delay impulsive evolution equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B 10, 475–485 (2017) .

[44] Liu, H., Chang, J. : *Existence for a class of partial differential equations with nonlocal conditions.* Nonlinear Anal. 70, 3076–3083 (2009) .

[45] Liu, J. : *Bounded and periodic solutions of infinite delay evolution equations.* J. Math. Anal. Appl. 286, 705–712 (2003) .

[46] Liu, Z. Zheng, S. : *Semigroups Associated with Dissipative Systems.* Chapman Hall, 1999 .

[47] Lunardi, A. : *On the linear heat equation with fading memory.* SIAM J. Math. Anal. 21, 1213–1224 (1990) .

[48] V. Majer, C. R. Svoboda, V. (1985) Wylie, and L. C. (1982) Barrett : *Advanced Engineering Mathematics.* 5th Edn.McGraw-Hill Book Company .

[49] A. Monier : *Théorème du point fixe de Brouwer*, volume 1,no.4,p 202-206. ENS Lyon, 1998 .

[50] D. O'Regan : *Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators*, volume 202, p 413-432. J.Math. Anal. Appl., (1996).

[51] Pazy, A. : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-verlag, Berlin, 1983 .

[52] Pazy, A. : *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, New York, (1993) .

[53] Sadovskii .B .N : *On a fixed point principle.* Funct. Anal. Appl, 1, 74–76 (1967) .

[54] Tony Humphries : *Delay Differential Equations.* 2016 NZMRI Summer School, Continuation Methods in Dynamical Systems. Raglan, New Zealand .

[55] Travis, C.C., Webb, G.F. : *Existence, stability and compactness with α-norm for partial functional differential equations.* Transl. Am. Math. Soc. 240, 129–143 (1978) .

[56] Wu, J. : *Theory and Application of Partial Functional Differential Equations.* Springer, New York (1996) .

[57] Wu, J., Xia, H. : *The existence of periodic solutions to integro-differential equations of neutral type via limiting equations.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 112, 403–418 (1992) .

[58] Xiang, X., Ahmed, N.U. : *Existence of periodic solutions of semilinear evolution equations with time lags.* Nonlinear Anal. 18, 1063–1070 (1992) .

[59] E. Zeidler : *Nonlineair analysis and its application Fixed point theorem. Springer Verlage*, New York Berlin Heiderberg, Tokyo, 1985 .

[60] E. Zeidler : *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986 .