REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCEN

THÈSE LMD

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT

Spécialité :Analyse mathématique et applications
Par :

Mme SENHADJI ASMA

Sur le thème

ETUDE DE CERTAINS PROBLEMES NON LOCAUX AVEC

PERTE DE COMPACITE

Soutenue publiquement **le 18 septembre 2023** à Tlemcen devant le jury composé de :

M. B. ABDELLAOUI	Pr.	Université de Tlemcen	Président
Mme Y. NASRI	Pr.	Université de Tlemcen	Directrice de thèse
M. O. BOUKARABILA	MCA	Université de Tlemcen	Co-directeur de thèse
M. A. ATTAR	MCA	Université de Tlemcen	Examinateur
M. A. B ENAISSA	Pr.	Université de SBA	Examinateur
M. S. BENSID	Pr.	Université de Tlemcen	Examinateur

Laboratoire Systèmes dynamiques et applications
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie

Dédicaces

Je dédie ce manuscrit à :

Mes chers parents pour tous les sacrifices et la confiance qu'ils m'ont accordés.

À mon époux pour ses encouragements.
À mes frères et ma grand-mère.

À celle qui a dessiné un sourire sur mon visage, ma chère fille Aya-Yasmine.

"Vivre avec l'espoir est une vie qui en vaut bien d'autres."
Philosophe : Blaise Pascal.

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donner le courage, la force et la volonté de mener à terme cette thèse, qui m'a ouvert les portes du savoir durant toutes mes années d'études.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à ma directrice de thèse Mme Yasmina Nasri pour sa disponibilité, ses encouragements et ses conseils qui m'ont été très utiles, sa précieuse aide et soutien pendant l'élaboration de cette thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Monsieur Youcef Oussama Boukarabila pour ses conseils avisés et son aide.

Je voudrai remercier chaleureusement Mr Boumediene Abdellaoui de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de soutenance.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements aux membres du jury : Mr A. Attar, Mr A. Benaissa et Mr S. Bensid, de m'avoir fait l'honneur de leur présence en acceptant d'évaluer ce travail.

Mes derniers remerciements vont à mes parents qui m'ont accompagné depuis le début de mes études. Ils m'ont toujours encouragé, aidé et ont été fiers de moi tout au long de mon parcours scolaire et universitaire. Mes frères ont toujours été une source de soutien pour moi.

Table des matières

Notations

$\lvert\Omega\rvert$	:	Mesure de Ω.
$supp(u)$	:	Le support de la fonction u.
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$	:	La classe de Schwartz, c'est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide.
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$	:	Le dual topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$.
$C_0^\infty(\Omega)$	:	L'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω.
$meas\{\cdot\}$	:	La mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$.
$M(\Omega)$	:	L'ensemble des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{H}$	:	Un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, la norme associée notée $\lVert\cdot\rVert$.
$\hookrightarrow$	:	L'injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	:	L'injection compacte.
$C_b(\mathbb{R}^N)$	:	L'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.
$C^m(\Omega)$	:	L'espace des fonctions ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre m.
$\mathcal{D}(\Omega)$	:	Espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
$W^{2s,q}_{Loc}(\Omega)$	:	$\{u \in L^p(\Omega)$ tel que $u\eta \in W^{2s,q}(\mathbb{R}^N)$ pour tout fonction $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)\}$, où $1 < q < +\infty$ et $s \in (0,1)$.
$B_r(x)$	:	La boule de centre x et de rayon r.
$\mathscr{C}B_r(x)$	:	le complémentaire de la boule $B_r(x)$ autrement dit $\mathbb{R}^N \backslash B_r(x)$.
$\Gamma(x)$	:	La fonction Gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
$[\alpha]$	:	Si $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est la partie entière de α.
$[\alpha]$	:	Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$, c'est la longueur du multi indice α, donné par $\sum_{i=0}^n \alpha_i$.
x^α	:	Désigne $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$.
$D^\alpha u$	:	La dérivée mixte de u qu'on note $\dfrac{\partial^{[\alpha]}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} u$.
$P.V.$	:	Une abréviation pour "valeur principale de l'intégrale".
$diam(\Omega)$	:	Le diamètre d'une partie bornée Ω de $\mathbb{R}^N$ tel que $diam(\Omega) = \sup\{\lVert x-y\rVert : x, y \in \Omega\}$.

Introduction générale

Cette thèse est consacrée à l'étude d'une classe de problèmes non locaux et non compacts.

Une attention particulière a été donnée au développement de la théorie du calcul fractionnaire ces dernières années. Ceci est d$\hat{u}$ au fait que cette dernière permet une meilleure modélisation et interprétation de beaucoup de phénomènes issus de la physique, la chimie, la finance, biologie , etc.

L'exemple typique est les processus de Lévy qu'on retrouve dans différents domaines. Ces processus sont générés par des équations faisant intervenir le Laplacien fractionnaire. Pour plus de détails concernant les applications nous invitons le lecteur à consulter les références [9, 14, 23, 25, 27, 31].

Notre contribution est l'étude mathématique d'une classe de problèmes non locaux, avec perte de compacité faisant intervenir essentiellement le Laplacien ou le p-Laplacien fractionnaire. On s'intéresse à l'existence et la multiplicité des solutions de la classe de problèmes suivants

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, $0 < s < 1$, $N > sp$, $p \in (1, +\infty)$, $f(x,u)$ est une fonction qui sera définie ultérieurement selon les différents cas considérés dans ce manuscrit,

$$(-\Delta)^s_p u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy, \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Si $p = 2$, $(-\Delta)^s$ est le Laplacien fractionnaire, pour $p \neq 2$ c'est le p-Laplacien fractionnaire.

Notons que l'existence de solutions dépend de la croissance de la fonction f i.e. sous critique, critique ou sur critique. La présence d'un terme non compact dans l'équation engendre certaines difficultés. Dans de telles situations, les méthodes classiques ne s'appliquent pas. Le problème type est le problème de Brézis-Nirenberg [22]. Ce dernier a été une source d'inspiration de beaucoup de travaux.

Ce travail comprend cinq chapitres.

Le chapitre 1 concerne un rappel sur les outils de l'analyse non linéaire qui nous seront utiles dans cette thèse tels que les espaces de Sobolev fractionnaires, les différentes injections, le Laplacien fractionnaire et d'autres résultats nécessaires pour la résolution des problèmes posés.

Dans le chapitre 2, on généralise les travaux de Cac, Gatica, et Li [24] au problème non local suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \mu g(x)\gamma(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant sp)$, $p \geqslant 2$, $s \in (0,1)$, γ est une fonction continue positive et g est une fonction qui change de signe satisfaisant certaines conditions.
Il est connu que l'existence de solutions positives dépend du signe du second membre de l'équation traitée. Dans cette partie on montre que le problème admet une solution positive sous certaines hypothèses sur la fonction g. En appliquant le théorème de Leray-Schauder. Il est à noter qu'on distinguera le cas $p = 2$ et le cas $p > 2$.
Les résultats établis dans cette partie nous seront d'une grande utilité pour la résolution des problèmes à venir.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du problème non compact suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = u^q + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

où Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N > 2s)$, $0 < s < 1$, $q = \frac{N+2s}{N-2s}$, λ un paramètre réel strictement positif et f une fonction qui change de signe.

En tenant compte des résultats du chapitre 2, on montre que le problème admet deux solutions strictement positives. La démonstration est basée sur la méthode de sous et sur-solution et une version du Théorème du Col.

Au chapitre 4, on étend les résultats obtenus précédemment au p-Laplacien fractionnaire. Comparé au cas semi-linéaire un certain nombre de difficultés ont été rencontrées, nous citons : l'absence de la fonction de Green associée au p-Laplacien fractionnaire chose qui existe pour le Laplacien fractionnaire, le principe du maximum qui n'est pas applicable ainsi la forme explicite des minimiseurs de l'inégalité de Sobolev fractionnaire. En définissant un problème auxiliaire on prouve l'existence de deux solutions positives du problème considéré.

Quant au chapitre 5, il s'agit d'étudier un problème avec un poids de Hardy de la forme

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \mu \frac{u}{|x|^{2s}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

avec $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné à frontière lipschitzienne, λ, μ des paramètres positifs, f une fonction de Caracthéodory asymptotiquement linéaire à l'infini i.e.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = \beta(x) \in L^p(\Omega), p > \frac{N}{2s}. \tag{1}$$

Selon les valeurs du paramètre λ, on prouve l'existence de solutions positives ainsi que la multiplicité de solutions sous certaines hypothèses sur f en utilisant une méthode variationnelle.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle les différents outils de l'analyse non linéaires dont on aura besoin dans cette thèse.
La majorité des définitions et résultats ont été pris des références [3, 4, 37, 38].

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions höldériennes

Définition 1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$, on définit*

$$C_b^m(\Omega) = \Big\{ u \in C^m(\Omega) \ / \ (\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, [\alpha] \leqslant m), \ \exists k; \ \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant k \Big\}.$$

L'espace $C_b^m(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{C_b^m(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant [\alpha] \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On note $C_b(\Omega) = C_b^0(\Omega)$.

Définition 1.2 *Soit $\lambda \in (0,1]$. On définit l'espace des fonctions höldériennes bornées sur Ω d'ordre λ*
$$C_b^{0,\lambda}(\Omega) = \Big\{ u \in C_b(\Omega) \ / \exists C > 0, \ \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega; \ |u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^\lambda \Big\}.$$
Si $\lambda = 1$, c'est l'espace des fonctions lipschitziennes bornées.
L'espace $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{C_b^{0,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\substack{(x,y) \in \Omega^2 \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Plus généralement, on définit l'espace $C_b^{m,\lambda}(\Omega)$ comme suit

$$C_b^{m,\lambda}(\Omega) = \Big\{u \in C^m(\Omega) \quad : D^m u \in C_b^{0,\lambda}(\Omega),\ (\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, [\alpha] = m)\Big\},$$

il est muni de la norme

$$\|u\|_{C_b^{m,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{C_b^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{C_b^{0,\lambda}(\Omega)}.$$

$(C_b^{m,\lambda}(\Omega), \|.\|_{C_b^{m,\lambda}(\Omega)})$ *est un espace de Banach et on a*

$$\forall(\gamma,\lambda), 0 < \gamma < \lambda < 1 \Rightarrow C_b^{m,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{m,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow C_b^m(\Omega),$$

avec des inclusions strictes.

1.1.2 Espace de Lebesgue L^p

Définition 1.3 *Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p < \infty$. On définit*

$$L^p(\Omega) = \Big\{ \ v : \Omega \to \mathbb{R};\ v \text{ est mesurable et } ||v||_{L^p} < \infty \ \Big\},$$

où

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Également on a

$$L^\infty(\Omega) = \{v \in M(\Omega) : \exists A > 0 \ \text{ tel que } \ \ meas\,\{x \in \Omega \quad |v(x)| > A\} = 0\,\},$$

on note

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{A \geq 0 \quad \text{tel que} \quad meas\,\{x \in \Omega \quad |v(x)| > A\} = 0\}.$$

Lemme 1.1 *Soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $p \leqslant q$. Si Ω est de mesure finie alors :*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

en particulier :

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow ... \hookrightarrow L^1(\Omega) \qquad \text{pour tout } 1 < p \leqslant +\infty.$$

Théorème 1.1 *L'espace $L^p(\Omega)$ est :*
- *Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,*
- *Séparable pour tout $1 \leqslant p < +\infty$,*
- *Réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Espace de Sobolev d'ordre entier $W^{m,p}$, $m \in \mathbb{N}$

Dans cette section on présente les espaces de Sobolev classiques et quelques propriétés fondamentales.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$.

Définition 1.4 *On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \backslash \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } [\alpha] \leqslant m, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \Big\},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $[\alpha] = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $D^\alpha = \dfrac{\partial^{[\alpha]}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.
$D^\alpha u$ représente la dérivée mixte au sens des distributions de u sur Ω, c.à.d.

$$\Big(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big) \quad \langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{[\alpha]} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :
$\star$ Pour $1 \leqslant p < +\infty$:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{[\alpha] \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

$\star$ Pour $p = +\infty$:

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{0 \leqslant [\alpha] \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

$\star$ **Si p=2** :
On note $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Cet espace est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{0 \leqslant [\alpha] \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier

$$\langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)} = \|u\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

Définition 1.5 *On définit l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. Supposons que Ω est un ouvert régulier, alors en utilisant le théorème de trace, on déduit la caractérisation suivante de l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$: Pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$ on a*

$$u \in W_0^{m,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \Big(\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, [\alpha] \leq (m-1) \Big) \quad D^\alpha u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega.$$

Proposition 1.1 *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace :*

- *Banach pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,*
- *Réflexif pour $1 < p < +\infty$,*
- *Séparable pour $1 \leqslant p < +\infty$.*

Théorème 1.2 *: Pour $1 \leq p < +\infty$ on a*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Théorème 1.3 ***(Injection continue pour l'espace de Sobolev)*** *[37]*
Soient $m \geqslant 1$ un entier et $1 \leqslant p < \infty$. Alors :

1. *Si $N > mp$:*
$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ pour} p \leqslant q \leqslant \frac{Np}{N - mp}.$$
2. *Si $N = mp$:*
   - *pour $p > 1$ on a :*
$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ pour } p \leqslant q < +\infty.$$
   - *pour $p = 1$ $(N = m)$ on a :*
$$W^{n,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N).$$
3. *Si $N < mp$:*
   - *pour $\frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$ et j tel que $(j-1)p < N < jp$:*
$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N) \qquad \text{pour tout } 0 < \lambda \leqslant j - \frac{N}{p}.$$
   - *pour $\frac{N}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geqslant j = \frac{N}{p} + 1$:*
$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-\frac{n}{p}-1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour tout } 0 < \lambda < 1.$$

Le théorème reste vrai pour un ouvert régulier qu'il soit borné ou pas.

Théorème 1.4 ***(Injection compacte pour l'espace de Sobolev)*** *[37]*
Soit Ω un ouvert borné, lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ avec $N > 1$.

1. *Si* $N > mp$ *:*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \textit{pour tout} \;\; q < \frac{Np}{N - mp}.$$

2. *Si* $N = mp$ *:*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; \textit{pour tout} \;\; q < +\infty.$$

3. *Si* $N < mp$ *et* $j = \left[\frac{N}{p}\right] + 1$ *:*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m-j,\lambda}(\overline{\Omega}) \;\; \textit{pour tout} \;\; 0 < \lambda < j - \frac{N}{p}.$$

Remarque 1.1 *Le Théorème précédent est appelé le Théorème de Rellich-Kondrachov. Noter que dans l'énoncé, sans aucune hypothèse de régularité sur* $\partial\Omega$ *on peut remplacer* $W^{m,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *.*

1.2.2 Espace de Sobolev factionnaire $W^{s,p}$, $s \in (0,1)$

Dans cette section on s'intéresse à l'espace de Sobolev de type fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s \in (0,1)$.

Définition 1.6 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $s \in$*(0,1) et* $p \in [1, +\infty[$ *.*
L'espace fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ *est donné par :*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}. \tag{1.1}$$

$W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach engendré par la norme :*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dxdx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

d'une manière équivalente on a

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{s,p}(\Omega)}, \tag{1.3}$$

où

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

est appelée semi norme de u (ou la norme de Gagliardo).

Définition 1.7 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$. On définit l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ par*

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ } p.p \text{ dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega \right\}.$$

Si Ω est borné, la norme équivalente est

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = [u]_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Proposition 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty)$, alors : l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est*

- *Banach si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,*
- *Réflexif si $1 < p < +\infty$,*
- *Séparable si $1 \leqslant p < +\infty$.*

Proposition 1.3 *[38] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,+\infty)$ et $0 < s \leqslant s' < 1$, alors on a :*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega).$$

En plus, il existe une constante $C = C(N,s,p)$ tel que pour tout $u \in W^{s',p}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}.$$

Pour un domaine régulier, la proposition suivante permet d'avoir que le résultat de la Proposition 1.3 reste vrai quand $s' = 1$.

Proposition 1.4 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ avec une frontière bornée, $p \in [1,+\infty)$ et $s \in (0,1)$. Alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Pour tout $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction mesurable on a

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{1.5}$$

où $C = C(N,s,p) \geqslant 1$ est une constante .

Remarque 1.2 *On suppose que Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$. Bourgain, Brezis et Mironescu [19] ont prouvé que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a*

$$\lim_{s \longrightarrow 1} (1-s) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = C_1 \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \tag{1.6}$$

où $C_1 = C_1(N,p) > 0$. Comme conséquence, si pour $s \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < +\infty,$$

alors en faisant tendre s vers 1 dans (1.6), on déduit

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = 0$$

ce qui implique que u est constante.

Par conséquent, La définition de l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ quand $s \geqslant 1$ par (1.1) est impossible.

L'espace $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, donc si on utilise l'opérateur prolongement, on récupère le résultat de densité suivante dans l'espace $W^{s,p}(\Omega)$.

Corollaire 1.1 *Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ avec une frontière bornée. On considère $p \in [1, +\infty)$ et $s \in (0,1)$. Pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$, il existe une suite $\{u_n\} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ telle que :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0.$$

Injection continue

On a trois cas :

• $\underline{sp < N}$ **:**

Théorème 1.5 *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty)$ tel que $sp < N$, alors il existe $C = C(N, s, p) > 0$, tel que, pour tout $v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, on a :*

$$\|v\|_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx \, dy\bigg)^{\frac{1}{p}} \tag{1.7}$$

avec $p_s^* = p_s^*(N, s) = \frac{Np}{N-sp}$ (exposant critique). Ainsi, on déduit

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p_s^*].$$

Remarque 1.3 *Les injections ci-dessus ne sont pas généralement vérifiées pour l'espace $W^{s,p}(\Omega)$, car ce n'est pas toujours possible de prolonger une fonction $f \in W^{s,p}(\Omega)$ à une fonction de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Pour pouvoir le faire, nous devrions exiger d'autres hypothèses de régularité sur Ω.*

Théorème 1.6 *On considère $s \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty)$ tel que $sp < N$. Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe $C = C(N, s, p, \Omega) > 0$, tel que pour tout $v \in W^{s,p}(\Omega)$ on a :*

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall q \in [p, p_s^*], \tag{1.8}$$

i.e.

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p_s^*],$$

avec $p_s^* = \dfrac{Np}{N - sp}$.
Si de plus Ω *est borné alors :*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p_s^*]. \tag{1.9}$$

• $\underline{sp = N}$ **:**

On a le théorème suivant qui nous donne l'injection quand $sp = N$.

Théorème 1.7 *On considère* $s \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty)$ *tel que* $sp = N$. *Alors il existe une constante* $C = C(N, s, p) > 0$ *tel que pour tout* $q \in [p, +\infty[$, *on a*

$$(\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)) \quad \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall q \in [p, +\infty),$$

autrement dit,

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, +\infty).$$

Quand le domaine Ω est régulier, en utilisant l'opérateur de prolongement, les injections précédentes restent vraies si on remplace $\mathbb{R}^n$ par Ω.

Théorème 1.8 *Supposons que* $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1, +\infty)$ *tel que* $sp = N$. *Si* Ω *est un ouvert lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$ *alors il existe une constante* $C = C(N, s, p, \Omega) > 0$ *tel que pour tout* $v \in W^{s,p}(\Omega)$ *on a :*

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad \forall q \in [p, +\infty),$$

i.e.

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty). \tag{1.10}$$

De plus, si Ω *est borné alors :*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

• $\underline{sp > N}$ **:**

Dans ce paragraphe on présente deux propriétés de régularité pour les fonctions de $W^{s,p}(\Omega)$ lorsque $sp > N$, avec $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 1.9 *Soient* $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1, +\infty)$ *tel que* $sp > N$, *alors il existe une constante* $C = C(N, s, p, \Omega)$ *tel que :*
$\forall v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|v\|_{C_b^{0,s-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C \ \|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)},$$

en particulier

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,s-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Corollaire 1.2 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est un ouvert lipschitzien et soient $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$, $sp > N$. Il existe une constante $C = C(N,s,p,\Omega)$ tel que : $\forall v \in W^{s,p}(\Omega)$,*

$$\|v\|_{C_b^{0,s-\frac{N}{p}}(\Omega)} \leqslant C\|v\|^p_{W^{s,p}(\Omega)},$$

en particulier

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,s-\frac{N}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Injection compacte

Théorème 1.10 *[37]*
Considérons Ω un ouvert borné de classe $C^{0,1}$ de frontière bornée, $s \in (0,1)$, $p > 1$. Soit $N \geqslant 1$ alors :

- *Si $sp < N$, on a $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < \dfrac{Np}{N-sp}$.*
- *Si $sp = N$, on a $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < +\infty$.*
- *Si $sp > N$, on a $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ pour tout $0 < \lambda < s - \frac{N}{p}$.*

1.2.3 Espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}$, $s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$

Définition 1.8 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,+\infty)$. Si $s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ avec $s > 1$ on peut écrire $s = m + \sigma$, avec $m \in \mathbb{N}$ est la partie entière de s et $\sigma \in (0,1)$, dans ce cas on définit l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ comme suit :*

$$W^{s,p}(\Omega) := \Big\{u \in W^{m,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \text{ t.q. } |\alpha| = m\Big\}, \tag{1.11}$$

c'est un espace de Banach.
C'est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \Big(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{[\alpha]=m} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.12}$$

Si $s = m$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ coïncide avec l'espace de Sobolev d'ordre entier, voir la définition 1.4.

Proposition 1.5 *Soient $p \in [1,+\infty)$ et s, $s' > 1$ des réels. On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{0,1}$.*
Alors, si $s' \geqslant s$, on a :

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Pour $s > 0$ et comme le cas classique ($s \in \mathbb{N}$), on peut approximer les fonctions de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ par des suites des fonctions régulières à support compact .

Théorème 1.11 *[3] Pour tout $s > 0$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ des fonctions régulières à support compact est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Propriété 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*
• On a :

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{s,p}(\Omega)} \qquad (\Omega \neq \mathbb{R}^N).$$

En plus, du théorème (1.11) on trouve :

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

• En outre, l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{s,p}(\Omega)$, et on a $W^{s,p}(\Omega) \neq W_0^{s,p}(\Omega)$.

Remarque 1.4 *•Il est clair que les inclusions obtenues dans les Propositions 1.3 et 1.4, sont valables pour l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$.*
• Quand $s < 0$ et $p \in (1, +\infty)$, $W^{s,p}(\Omega)$ est défini comme le dual de l'espace $W_0^{-s,q}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.2.4 L'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$

Dans cette partie on s'intéresse au cas particulier du $p = 2$. Notez que l'espace H^s fournit le cadre naturel pour les études des équations elliptiques dont l'opérateur principal est le Laplacien fractionnaire.

Soit $s \in (0, 1)$, pour $p = 2$ les espaces $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ et $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ deviennent des espaces de Hilbert où :

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^N) := H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : [u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)} < +\infty \right\}, \tag{1.13}$$

pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$

$$W_0^{s,2}(\Omega) := H_0^s(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ p.p dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega \right\}, \tag{1.14}$$

la notation $[\ .\ ]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)}$ est définie dans (1.4).
L'espace H^s est muni de produit scalaire :
$\forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$;

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} u(x).v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy.$$

1.3 Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$

Maintenant on va introduire la définition du Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ pour $s \in (0,1)$, et quelques résultats le concernant.

Définition 1.9 *Soit $s \in (0,1)$, pour tout $u \in \mathscr{S}$ on définit le Laplacien fractionnaire comme suit :*

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)^s u(x) &= C(N,s) P.V. \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy}_{\boldsymbol{I'}} \\
&= C(N,s) \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{\mathscr{C}B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

où $C(N,s)$ est une constante positive qui dépend de N et de s et elle est donnée par :

$$
C(N,s) = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \Big)^{-1}, \tag{1.16}
$$

et $\zeta = (\zeta_1, \zeta'), \zeta' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Remarque 1.5 *(1.15) n'est pas bien définie en général en raison de la singularité de l'intégrale **I'**, sauf si $s \in (0, \frac{1}{2})$. En effet, on a :*
Pour tout $u \in \mathscr{S}$ et pour $x \in \mathbb{R}^N$ fixé :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+2s}} dy &\leqslant C \int_{B_R} \frac{|x-y|}{|x-y|^{N+2s}} dy + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathscr{C}B_R} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}} dy \\
&\leqslant C \Big(\int_{B_R} \frac{1}{|x-y|^{N+2s-1}} dy + \int_{\mathscr{C}B_R} \frac{1}{|x-y|^{N+2s}} dy \Big) \\
&\leqslant C \Big(\int_0^R \frac{1}{|\rho|^{2s}} d\rho + \int_R^{+\infty} \frac{1}{|\rho|^{2s+1}} d\rho \Big) < +\infty.
\end{aligned}
$$

$C > 0$ est une constante qui dépend de la dimension et de $\|u\|_{L^\infty}$.

Dans le lemme suivant on donne une autre écriture pour $(-\Delta)^s$, tel qu'on écrit comme un quotient différentiel du second ordre pondéré.

Lemme 1.2 *Soit $s \in (0,1)$, alors pour tout $u \in \mathscr{S}$ on a :*

$$
(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.17}
$$

Propriétés de la constante $C(N,s)$

Dans la suite, on donnera quelques propriétés sur la constante $C(N,s)$ qui intervient dans (1.15). Ces résultats sont prouvés dans [38].

Lemme 1.3 *Soit $s \in (0,1)$, on rappelle que :*

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \right)^{-1}.$$

Soient $A(N,s)$ et $B(N,s)$ comme suit :

$$A(N,s) := \begin{cases} 1 & si \;\; N{=}1 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{(1+|\eta'|^2)^{\frac{N+2s}{2}}} d\eta' & si \;\; N \geqslant 2, \end{cases} \tag{1.18}$$

et

$$B(s) = s(1-s) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos t}{|t|^{1+2s}} dt. \tag{1.19}$$

Alors :

$$C(N,s) = \frac{s(1-s)}{A(N,s)B(s)}$$

Proposition 1.6 *On a :*

(i) $\displaystyle\lim_{s\longrightarrow 1^-} A(N,s) = \omega_{N-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{N}{2}+1}} d\rho < +\infty;$

(ii) $\displaystyle\lim_{s\longrightarrow 0^+} A(N,s) = \omega_{N-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{N}{2}}} d\rho < +\infty;$

(iii) $\displaystyle\lim_{s\longrightarrow 1^-} B(s) = \tfrac{1}{2};$

(iv) $\displaystyle\lim_{s\longrightarrow 0^+} B(s) = 1,$

où ω_{N-2} désigne la mesure dimensionnelle $(N-2)$ de la sphère unitaire S^{N-2}.
En conséquence on a :

$$\lim_{s\longrightarrow 1^-} \frac{C(N,s)}{s(1-s)} = \left(\frac{\omega_{N-2}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{N}{2}+1}} d\rho \right)^{-1},$$

et

$$\lim_{s\longrightarrow 0^+} \frac{C(N,s)}{s(1-s)} = \left(\omega_{N-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{N}{2}}} d\rho \right)^{-1}.$$

Corollaire 1.3 *On a les résultats suivants :*

(i) $\lim_{s\longrightarrow 1^-} \dfrac{C(N,s)}{s(1-s)} = \dfrac{4N}{\omega_{N-1}}$;

(ii) $\lim_{s\longrightarrow 0^+} \dfrac{C(N,s)}{s(1-s)} = \dfrac{2}{\omega_{N-1}}$.

où ω_{N-1} *désigne la mesure dimensionnelle* $(N-1)$ *de la sphère unitaire* S^{N-1}.

Remarque 1.6 *On peut trouver la définition du Laplacien fractionnaire par la transformée de Fourier (voir [17]).*

1.4 Outils fonctionnels

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats que nous allons utiliser dans les chapitres à venir.

Lemme 1.4 ***(Lemme de Fatou)***
Soit $\{v_n\}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *telle que :*
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) \geqslant 0$ *p.p sur* Ω.
Pour p.p.$x \in \Omega$, *on pose* $v(x) = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} v_n(x)$, *alors*

$$\int_\Omega v(x)dx \leqslant \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega v_n(x).$$

Définition 1.10 *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert réel. On dit qu'une forme bilinéaire a(u,v) :* $\mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est :*

- *Continue s'il existe une constante* C *telle que*

$$|a(u,v)| \leqslant C\|u\|\,\|v\| \quad \forall u,v \in \mathcal{H}.$$

- *Coercive s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Théorème 1.12 ***(Lax Milgram)***
Soit a(u,v) une forme bilinéaire, continue et coercive sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. *Alors, pour tout* $\varphi \in \mathcal{H}$, *il existe un et un seul* $u \in \mathcal{H}$ *telle que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisée par :

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle\varphi,u\rangle = \min_{v\in\mathcal{H}} \left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle\varphi,v\rangle\right\}.$$

Proposition 1.7 ***(Inégalité de Hölder)***
Soit $1 \leq p \leq \infty$, *on note* p' *l'exposant conjugué de* p *i.e :*$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Si $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *alors* $uv \in L^1(\Omega)$
et

$$||uv||_{L^1(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Théorème 1.13 ***(Théorème de convergence monotone)***
Soit $\{v_n\}$ *une suite croissante de fonctions positives de* $L^1(\Omega)$ *qui converge p.p vers* v*. Alors*

$$\int_\Omega \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega v dx.$$

Théorème 1.14 ***(Théorème de convergence dominée)***
Soit $\{v_n\}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *telle que :*
$\bullet v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ *p.p, avec* $v \in M(\Omega)$.
$\bullet$ $\exists\ w \in L^1(\Omega)$ *telle que :*
$\forall n \geqslant 1, \quad |v_n(x)| \leqslant w(x)$ *p.p en* x.
Alors

$$v \in L^1(\Omega) et \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|v_n - v\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

ce qui implique

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega v_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n(x)dx = \int_\Omega v(x)dx.$$

Théorème 1.15 ***(Lemme de Brezis-Lieb)****[21]*
Soit $0 < p < \infty$*. On suppose que il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\|v_n\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C, \\ et \quad &v_n \longrightarrow v \ \ p.p\ dans\ \Omega. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|v_n - v\|^p_{L^p(\Omega)} \right) = \|v\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Considérons le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = g & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{1.20}$$

où $s \in (0,1)$ et Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. Le théorème de Lax Milgram nous assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.20).

Proposition 1.8 *[67] Soit* Ω *un domaine lipschitzien borné vérifiant la condition de la boule extérieure. Supposons que* u *est une solution du problème (1.20) avec* $g \in L^\infty(\Omega)$*. Alors,* $u \in C^s(\mathbb{R}^N)$ *tel que*

$$\|u\|_{C^s(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|g\|_{L^\infty(\Omega)},$$

avec $C = C(s,\Omega) > 0$.

Théorème 1.16 *[67] Soit Ω un domaine $C^{1,1}$ borné. Supposons que u est une solution du problème (1.20), $g \in L^\infty(\Omega)$ et $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$. Alors on a*

$$\|\frac{u}{\delta^s}\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leqslant C\|g\|_{L^\infty(\Omega)},$$

pour $0 < \alpha := \alpha(s,\Omega) < \min\{1, 1-s\}$ et $C := C(s,\Omega) > 0$.

Théorème 1.17 *[16] Soit $1 < q < \infty$. Si $g \in L^q(\Omega)$ et u est la solution faible unique du problème (1.20). Alors $u \in W^{2s,q}_{Loc}(\Omega)$.*

Lemme 1.5 *[16] Soit $N > 2s$. Supposons que $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{2N}{N+2s} \leqslant q \leqslant \frac{N}{2s}$ et u est la solution faible unique du problème (1.20). Alors, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Proposition 1.9 *[11] Soit Ω un domaine borné régulier. On suppose que u une solution positive du*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

tel que $|f(x,t)| \leqslant C(1+|t|^p)$, où $p \in [1, 2^*_s - 1]$ et $C > 0$. Alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Proposition 1.10 ***(Principe du maximum faible)*** *[1]*
Supposons que pour $\varepsilon > 0$, $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dans $C^{2s+\varepsilon}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|}{1+|y|^{N+2s}}dy < +\infty, \quad et \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u \leqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ u \leqslant 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $u \leqslant 0$ dans Ω.

Proposition 1.11 ***(Principe du maximum fort)*** *[64]*
Si u est une fonction semi-continue inférieurement dans $\bar{\Omega}$ qui satisfait

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u \geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ u \geqslant 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Alors, $u \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^N$. De plus s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = 0$, alors $u \equiv 0$ dans tout $\mathbb{R}^N$.

Proposition 1.12 ***(Principe de comparaison faible)*** *[66]*
Soit Ω un domaine borné. Supposons que u et v vérifient

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} (-\Delta)^s v = g & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Si $f \geqslant g$. Alors, $u \geqslant v$ dans Ω.

Proposition 1.13 ***(Principe de comparaison fort)[34]***
Soient $h_1, h_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Supposons que pour* $\gamma > 0$ *on a* $v, w \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^{2s+\gamma}(\Omega)$ *tel que*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v \geqslant h_1(x,v) & \textit{dans } \Omega, \\ (-\Delta)^s w \leqslant h_2(x,w) & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.21}$$

de plus, $w \leqslant v$ *dans* $\mathbb{R}^N$ *et*

$$h_2(x, w(x)) \leqslant h_1(x, w(x)) \quad \textit{pour tout } x \in \Omega.$$

S'il existe un point $x_0 \in \Omega$ *auquel* $v(x_0) = w(x_0)$*. Alors,* $v = w$ *dans tout* Ω*.*

Proposition 1.14 *[26]* ***(Lemme de Hopf)***
Soient Ω *un domaine régulier et* $u(x) \not\equiv 0$ *est une fonction strictement positive satisfaisant*

$$(-\Delta)^s u = 0.$$

S'il y'a un point $x_0 \in \partial\Omega$ *avec* $u(x_0) = 0$*. Alors, il existe* $a > 0$ *tel que* $u(x) \geqslant a(x - x_0)\nu_0(x_0)$*, où* ν_0 *est la normale extérieure au point* x_0*.*

Corollaire 1.4 *[49] Soient* $p \in (1, \infty)$ *et* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *vérifiant*

$$|(-\Delta)_p^s u| \leqslant K \qquad \textit{faiblement dans } \Omega,$$

pour $K > 0$*. Alors,*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant (C_d K)^{\frac{1}{p-1}},$$

avec $C_d = C(N, p, s, d)$ *et* $d = diam(\Omega)$*.*

Lemme 1.6 ***(Principe de comparaison)****[53] Soient* $p \geqslant 2$*,* $N < \alpha p < N + p$*. Si* $u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *deux fonctions continues tels que*
- $u \geqslant v$ *dans* $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$*.*
- *pour tout* $\psi \in C_0(\Omega)$ *tel que* $\psi \geqslant 0$ *on a*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{\alpha p}} dxdy \\ \geqslant \; & \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}(v(x) - v(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x - y|^{\alpha p}} dxdy. \end{aligned}$$

Alors, $u \geqslant v$ *dans* $\mathbb{R}^N$*.*

Théorème 1.18 ***(Inégalité de Picone fractionnaire)[13]***
Soit $p \in (1, +\infty)$ *et* $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *avec* $v > 0$*. Supposons que* $(-\Delta)_p^s v \geqslant 0$ *est une mesure de Radon bornée dans* Ω*. Alors, pour tout* $w \in W_0^{s,p}(\Omega)$*, on a*

$$2 \int_\Omega (-\Delta)_p^s v \frac{w^p}{v^{p-1}} dx \leqslant \|w\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}.$$

Théorème 1.19 *[49] Soient $p \in (1,\infty)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$. Il existe $\alpha \in (0,s]$ et $C_\Omega = C(N,p,s,\Omega) > 0$ tel que pour $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ solution faible de*

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = g & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{1.22}$$

On a

$$\|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leqslant C_\Omega \|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}},$$

en particulier $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$.

Chapitre 2

Problème non local avec une donnée qui change de signe

Ce chapitre est le développement des parties des articles [18], [58].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions positives du problème non-local suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \mu g(x)\gamma(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$, $p \in (1,+\infty)$, μ un paramètre réel strictement positif, γ une fonction continue positive et g une fonction qui change de signe satisfaisant certaines hypothèses qu'on spécifiera ultérieurement.

Ce problème est intéressant, ceci est dû au fait de la présence d'un coefficient qui change de signe. En général l'existence de solutions positives dépend du signe du second membre de l'équation. La plupart des travaux supposent que ce dernier est de signe positif.

A noter que pour $s = 1$ le problème a été traité par Cac et al [24], des résultats d'existence et de non existence ont été obtenu.

Notre objectif est de généraliser les résultats de Cac et al [24] à un problème non local faisant intervenir le Laplacien fractionnaire et le p-Laplacien fractionnaire.

Il s'avère que dans notre étude on aura besoin de deux types de problèmes :

Problème semi-linéaire i.e. $p = 2$, qui fera objet de la section 2.3. L'existence de la solution est établie en utilisant le théorème de Leray-Schauder. La positivité de la solution repose sur la fonction de Green associée au Laplacien fractionnaire.

La section 2.4 est dédiée au problème quasi-linéaire i.e. $p \neq 2$. La résolution de ce dernier a engendré certaines difficultés. L'existence de la solution est assurée par le théorème de Leray-Schauder. Par contre la positivité de la solution est plus délicate à prouver cela est dû à l'absence de la fonction de Green pour un opérateur quasi linéaire et qu'on ne peut pas appliquer le principe du maximum. L'idée est d'utiliser le principe de comparaison afin de surmonter les différentes difficultés.

La résolution de ce problème nous sera d'une très grande utilité pour les chapitres qui suivent.

2.2 Résultats préliminaires

Dans cette section on rappelle la définition du degré topologique de Leray-Schauder ainsi que quelques propriétés qui nous seront utiles. Pour plus de détails nous invitons le lecteur à consulter la référence [52].

On note par E un espace de Banach dont sa norme est notée par $\|.\|$, Ω un ouvert borné de E.

Définition 2.1 *On dit qu'un opérateur $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ n'admet pas un point fixe sur $\partial\Omega$ si l'équation $u = Tu$ n'admet pas de solution sur $\partial\Omega$. Autrement dit*

$$Tu \neq u \qquad \forall u \in \partial\Omega.$$

Lemme 2.1 *Si $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est un opérateur compact (linéaire ou non-linéaire) sans point fixe sur $\partial\Omega$ alors*

$$d := \inf_{u\in\partial\Omega} \|u - Tu\| > 0.$$

Lemme 2.2 *Soit $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ un opérateur compact (linéaire ou non-linéaire) sans point fixe sur $\partial\Omega$. Si $\varepsilon \in (0, \frac{d}{4})$ alors il existe un sous espace vectoriel de dimension fini E_ε et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ tels que :*

$$(\forall u \in \overline{\Omega})\ (\forall v \in \partial\Omega)\ \|T_\epsilon u - Tu\| \leq \epsilon, \ \text{ et } \|T_\epsilon v - v\| \geq 3\epsilon.$$

Maintenant nous allons définir le degré topologique de Leray-Schauder ce dernier a été définit à partir du degré topologique de Brouwer.

Définition 2.2 *Considérons F un sous espace vectoriel de dimension finie contenant E_ε tel que $E_\varepsilon \subset F \subset E$; $F \cap \Omega \neq \emptyset$. Le degré topologique de Leray-Schauder est défini par*

$$\deg(I - T, \Omega, 0) := \deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega \cap F, 0).$$

Signalons que cette définition ne dépend que de T et Ω (voir [52]).

Théorème 2.1 *Soit $b \in E$. Si $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Alors,*

$$\deg(I - T, \Omega, b) := \deg(I - T - b, \Omega, 0).$$

Dans ce qui suit, nous donnons des propriétés importantes sur le degré topologique.

Proposition 2.1 *Soit $b \in E$. Supposons que $deg(I - T, \Omega, b) \neq 0$ et que $u - Tu \neq b$ pour tout $u \in \partial\Omega$. Alors il existe $u \in \Omega$ solution de l'équation $u - Tu = b$.*

Ensuite on a le résultat suivant

Proposition 2.2 *Soient $b \in E$ et $P : \bar{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow E$ une application compacte vérifiant*

$$\forall (u,t) \in (\partial\Omega \times [0,1]), \qquad u - P(u,t) \neq 0.$$

Alors, $\deg(I - P(.t), \Omega, b)$ *est constant pour* $t \in [0,1]$. *Autrement dit,*

$$\forall t \in [0,1], \qquad \deg(I - P(.,t), \Omega, b) = \deg(I - P(.,0), \Omega, b).$$

2.3 Problème semilinéaire faisant intervenir le Laplacien fractionnaire

Considérons le problème semilinéaire suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v = g & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $(-\Delta)^s$ représente le Laplacien fractionnaire dont on rappelle

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{N,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy.$$

où $C_{N,s}$ est une constante qui dépend de N et s.

Nous notons par $\mathcal{G}(x,y)$ la fonction de Green associée au problème (2.1) alors

$$v(x) := ((-\Delta)^s)^{-1}(g) := \int_\Omega \mathcal{G}(x,y) g(y)\, dy.$$

En utilisant le comportement de $\mathcal{G}(.,.)$ et les injections compactes on montre que $g \in L^q(\Omega)$ alors $v \in L^q(\Omega)$ pour $1 < q < \infty$.

Dans cette section nous traitons le problème elliptique semi linéaire suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \mu g(x) \gamma(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

La théorie du degré topologique et la théorie de régularité nous permet d'établir l'existence de solutions strictement positives pour le problème (2.2).

En appliquant le théorème du point fixe de Schauder, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Soient $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\Omega)$ avec $q > 1$. Alors, problème (2.2) admet une solution $u_\mu \in W^{2s,q}_{Loc}(\Omega)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.*

Preuve
Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_1 = \nu\mu g(x)\gamma(u_1) & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Comme $((-\Delta)^s)^{-1}$ est un opérateur compact, alors pour tout $u_1 \in L^q(\Omega)$ et $\nu \in [0,1]$ on pose

$$T_\nu(u_1) := ((-\Delta)^s)^{-1}\Big(\nu\mu g(x)\gamma(u_1)\Big).$$

L'existence de solutions du problème (2.3) revient à résoudre l'équation suivante :

$$u_1 - T_\nu(u_1) = 0 \quad , u_1 \in L^q(\Omega), \tag{2.4}$$

pour cela on commence par trouver une boule $B_R(0)$ de $L^q(\Omega)$ avec $R > 0$, tel que pour tout $\nu \in [0,1]$ on a

$$0 \notin (I - T_\nu)(\partial B_R(0) \times [0,1]).$$

En utilisant les Propositions 2.1 et 2.2, on montre que (2.4) admet au moins une solution. L'existence d'une telle boule est établie en prouvant qu'il existe un $R > 0$ tel que pour tout $(u_1, t) \in L^q(\Omega) \times [0,1]$.

$$\text{Si } u_1 - T_\nu(u_1) = 0, \quad \text{alors } \|T_\nu(u_1)\|_{H_0^s(\Omega)} < R. \tag{2.5}$$

Prenons $u_1 - T_\nu(u_1) = 0$, le Théorème 1.17 nous donne

$$\begin{aligned} \|T_\nu\|_{W^{2s,q}_{Loc}(\Omega)} &\leqslant K|\nu||\mu|\|\gamma\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|g\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leqslant \bar{K}\|g\|_{L^q(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|T_\nu\|_{L^q(\Omega)} &\leqslant \|T_\nu\|_{W^{2s,q}_{Loc}(\Omega)} \\ &\leqslant \bar{K}\|g\|_{L^q(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

avec $0 < K, \bar{K} < +\infty$ qui ne dépendent pas de u_1, ν, μ et $\nu \in [0,1]$. Ce qui implique que (2.5) est vérifié d'où l'existence d'une boule $B_R(0)$ de $L^q(\Omega)$. De plus le degré topologique $\deg(T_\nu, B_R(0), 0)$ est bien défini et c'est égal à une constante d'après la Proposition 2.2.

On a

$$\begin{aligned} \deg(I - T_\nu, B_R(0), 0) &= \deg(I - T_0, B_R(0), 0) \\ &= \deg(I, B_R(0), 0) = 1 \neq 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

pour tout $\nu \in [0,1]$. La Proposition 2.1 nous donne que T_ν admet un point fixe dans $B_R(0)$ pour tout $\nu \in [0,1]$, par conséquent T_1 admet un point fixe.
On conclut que le problème (2.3) admet une solution $u_\mu \in W^{2s,q}_{Loc}(\Omega)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

$\square$

Maintenant on va montrer que la solution obtenue u_μ est strictement positive grâce à l'hypothèse (H_1). Remarquons qu'il est difficile de montrer la positivité de la solution en présence d'un terme qui change de signe, le principe du maximum n'est pas applicable directement.

Le résultat principal de cette section est le suivant

Théorème 2.3 *Soit $q > \frac{N}{2s}$ et $g \in L^q(\Omega)$ satisfaisant la condition suivante :*

$$(H_1): \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } \int_\Omega \mathcal{G}(x,t)\Big(g^+(t) - (1+\varepsilon)g^-(t)\Big)dt > 0,$$

où $g^+(x) = \max\{g(x), 0\}$, $g^-(x) = -\min\{g(x), 0\}$. Si $\gamma \in C(\mathbb{R})$ et $\gamma(0) > 0$. Alors il existe $\tilde{\mu} > 0$ tel que pour tout $\mu \in (0, \tilde{\mu})$, le problème (2.2) admet une solution strictement positive.

Preuve Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que M est strictement positif et suffisamment grand. On définit la fonction troncature $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{\gamma}(s) := \begin{cases} \gamma(0) & s \leqslant 0 \\ \gamma(s) & 0 < s \leqslant M \\ \bar{M} & s > M, \end{cases}$$

avec $\gamma(M) = \bar{M} > 0$.
Considérons le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \mu g(x)\bar{\gamma}(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

On a $\bar{\gamma} \in L^\infty(\mathbb{R})$, d'après le Lemme 2.2 le problème (2.9) admet une solution u_μ dans $W^{2s,q}_{Loc}(\Omega)$.

La fonction $\bar{\gamma}$ est continue, donc pour tout $\xi \in (0, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon})$ il existe $\eta \in (0, M)$ tel que

$$\text{Si } |y| < \eta \quad \text{alors } |\bar{\gamma}(y) - \bar{\gamma}(0)| < \bar{\gamma}(0)\xi,$$

ce qui nous donne

$$-\bar{\gamma}(0)\xi < \bar{\gamma}(y) - \bar{\gamma}(0) < \bar{\gamma}(0)\xi,$$

alors

$$\bar{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\xi < \bar{\gamma}(y) < \bar{\gamma}(0) + \bar{\gamma}(0)\xi. \tag{2.10}$$

Puisque $q > \frac{N}{2s}$, d'après les injections de Sobolev fractionnaires (Corollaire 1.2) nous déduisons que u_μ est dans $C(\bar{\Omega})$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{C(\bar{\Omega})} &\leqslant K_1\mu\|g\|_{L^q(\Omega)}\|\bar{\gamma}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leqslant K_2\mu\|g\|_{L^q(\Omega)} < +\infty, \end{aligned}$$

où K_1, K_2 sont des constants strictement positives. En Choisissant $\tilde{\mu} > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $\mu \in (0, \tilde{\mu})$ on ait

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{C(\bar{\Omega})} &\leqslant K_2\mu\|g\|_{L^q(\Omega)} \\ &< \eta. \end{aligned}$$

Comme $\eta < M$, on peut conclure que pour tout $\mu \in (0, \tilde{\mu})$, $\bar{\gamma}(u_\mu) = \gamma(u_\mu)$ et par conséquent u_μ est une solution du problème (2.2).

Maintenant il nous reste à montrer que la solution u_μ est strictement positive. Rappelons que pour tout $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, on a

$$\mathcal{G}(x, y) > 0. \tag{2.11}$$

On définit la solution u_μ via la fonction de Green on trouve

$$\begin{aligned} u_\mu(x) &= \mu \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)g(y)\bar{\gamma}(u_\mu(y))dy \\ &= \mu \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)(g^+(y) - g^-(y))\bar{\gamma}(u_\mu(y))dy \\ &= \mu \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)\Big(g^+(y)\bar{\gamma}(u_\mu(y)) - g^-(y)\bar{\gamma}(u_\mu(y))\Big)dy, \end{aligned}$$

en utilisant la continuité de $\bar{\gamma}$ et (2.10) on obtient que pour tout $\xi \in (0, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon})$

$$\begin{aligned} u_\mu(x) &\geqslant \mu \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)\Big((\bar{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\xi)g^+(y) - (\bar{\gamma}(0) + \bar{\gamma}(0)\xi)g^-(y)\Big)dy \\ &\geqslant \mu \int_\Omega \gamma(0)\mathcal{G}(x, y)\Big((1 - \xi)g^+(y) - (1 + \xi)g^-(y)\Big)dy \\ &\geqslant \mu\gamma(0)(1 - \xi) \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)\Big(g^+(y) - \frac{1 + \xi}{1 - \xi}g^-(y)\Big)dy \\ &> \mu\gamma(0)(1 - \xi) \int_\Omega \mathcal{G}(x, y)\Big(g^+(y) - (1 + \varepsilon)g^-(y)\Big)dy, \end{aligned}$$

finalement grâce à l'hypothèse (H_1), (2.11) et le fait que $\mu\gamma(0)(1 - \xi) > 0$, on déduit que pour tout $\mu \in (0, \tilde{\mu})$, $x \in \Omega$ on a $u_\mu(x) > 0$.

$\square$

2.4 Solution positive pour le p-Laplacien fractionnaire

L'objectif de cette section est de généraliser les résultats précédents au cas quasi linéaire. On cherchera à établir l'existence d'une solution positive du problème suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \mu g(x)\gamma(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

rappelons que le p-Laplacien fractionnaire est défini comme suit

$$(-\Delta)^s_p u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy, \ \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Afin d'assurer l'existence d'une solution positive, on impose l'hypothèse suivante : (H_2) : $g^+ \not\equiv 0$ et $g^- \not\equiv 0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Big(g^+ - (1+\varepsilon)g^-\Big) \in \mathcal{A},$$

où $g^+(x) = \max\{g(x), 0\}$, $g^-(x) = -\min\{g(x), 0\}$,

$$\mathcal{A} := \Big\{h \in L^\infty(\Omega) : S(h)(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in \Omega\Big\},$$

et S est l'application inverse de $(-\Delta)^s_p$, $S : (W^{s,p}_0(\Omega))^* \longrightarrow W^{s,p}_0(\Omega)$ qui est un homéomorphisme strictement monotone. $S(g^+ - (1+\varepsilon)g^-)$ n'est autre en réalité q'une solution positive du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p v = (g^+(x) - (1+\varepsilon)g^-(x)) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

L'existence est assurée par le théorème de minimisation et le principe de comparaison.

Théorème 2.4 *Soit $g \in L^\infty(\Omega)$ une fonction satisfaisant l'hypothèse (H_2). Si $\gamma \in C(\mathbb{R})$ avec $\gamma(0) > 0$. Alors il existe $\bar{\mu} > 0$ tel que le problème (2.12) admet une solution positive pour tout $\mu \in (0, \bar{\mu})$.*

Preuve En suivant les mêmes étapes que le cas $p = 2$, on commence par définir la fonction de troncature $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\bar{\gamma}(y) := \begin{cases} \gamma(0) & y \leqslant 0 \\ \gamma(s) & 0 < y \leqslant M \\ \gamma(M) & y > M, \end{cases}$$

où M est un paramètre réel, strictement positif et suffisamment grand.
Commençons en premier par traiter le problème suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u = \mu g(x) \bar{\gamma}(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

Pour tout $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\nu \in [0,1]$ on pose

$$T_{\nu,p}(u) := ((-\Delta)^s_p)^{-1}(\nu \mu g(x) \bar{\gamma}(u)).$$

Comme l'inverse de l'opérateur $(-\Delta)_p^s$ est compact, en procédant de la même manière que pour le cas $p=2$, on montre que le problème (2.13) admet une solution en résolvant l'équation

$$u - T_{\nu,p}(u) = 0 \quad , u \in L^\infty(\Omega), \tag{2.14}$$

en montrant l'existence d'une boule $B_r(0) \in L^\infty(\Omega)$ avec $r>0$, par la suite obtient que $0 \notin (I - T_{\nu,p})(\partial B_r(0) \times [0,1])$.

Le Corollaire 1.4 nous assure l'existence de $K_3 > 0$ tel que

$$\|T_\nu(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant K_3(\mu\|g\|_{L^\infty(\Omega)})^{\frac{1}{p-1}} < \infty,$$

Donc la boule $B_r(0)$ existe et elle est dans $L^\infty(\Omega)$.
En outre le degré topologique de Leray-Schauder $deg(T_{\nu,p}, B_r(0), 0)$ est bien défini et c'est une constante, ce qui nous donne que pour tout $\nu \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \deg(I - T_{\nu,p}, B_r(0), 0) &= \deg(I - T_0, B_r(0), 0) \\ &= \deg(I, B_r(0), 0) \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $\nu \in [0,1]$, $T_{\nu,p}$ admet un point fixe u_μ dans la boule $B_r(0)$. On déduit que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, u_μ est une solution du problème (2.13).
D'après les hypothèses on a la fonction $\gamma \in C(\mathbb{R})$ de même pour la fonction $\bar{\gamma}$, donc pour tout $\xi \in (0, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon})$ il existe $\eta \in (0, M)$ tell qu' on ait

$$\text{si } |y| < \eta \quad \text{ alors } |\bar{\gamma}(y) - \bar{\gamma}(0)| < \bar{\gamma}(0)\xi,$$

ce qui implique

$$\bar{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\xi < \bar{\gamma}(y) < \bar{\gamma}(0) + \bar{\gamma}(0)\xi. \tag{2.15}$$

En utilisant le Théorème 1.19 on obtient que pour tout $\alpha \in (0,s)$, la solution u_μ appartient à $C^\alpha(\overline{\Omega})$ donc

$$\|u_\mu\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leqslant K_4(\mu\|g\|_{L^\infty(\Omega)})^{\frac{1}{p-1}} < +\infty.$$

avec $K_4 > 0$.
Si on choisit $\bar{\mu} > 0$ suffisamment petit dans lequel on a pour tout $\mu \in (0, \bar{\mu})$, on a

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} &\leqslant K_4(\mu\|g\|_{L^\infty(\Omega)})^{\frac{1}{p-1}} \\ &< \eta. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Il s'ensuit que

$$|u_\mu| < \eta.$$

Ce qui nous donne que $\bar{\gamma}(u_\mu) = \gamma(u_\mu)$ ce qui implique que u_μ est une solution du problème (2.12).

Maintenant il nous reste à montrer que la solution u_μ est positive, pour cela on va appliquer le principe de comparaison (Lemme 1.6).
Soit $\psi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tel que $\psi \geqslant 0$, alors pour tout $\mu \in (0, \bar{\mu})$ on a

$$\begin{aligned} \mu \int_\Omega g(x)\bar{\gamma}(u_\mu(x))\psi dx &= \mu \int_\Omega (g^+(x) - g^-(x))\bar{\gamma}(u_\mu(x))\psi dx \\ &= \mu \int_\Omega \Big(g^+(x)\bar{\gamma}(u_\mu(x)) - g^-(x)\bar{\gamma}(u_\mu(x)) \Big) \psi dx. \end{aligned}$$

d'après (2.15), pour tout $\xi \in (0, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon})$ on obtient

$$\begin{aligned} \mu \int_\Omega g(x)\bar{\gamma}(u_\mu(x))\psi dx &\geqslant \mu \int_\Omega \Big(g^+(x)\bar{\gamma}(0)(1-\xi) - g^-(x)\bar{\gamma}(0)(1+\xi) \Big) \psi dx \\ &\geqslant \mu\gamma(0) \int_\Omega \Big(g^+(x)(1-\xi) - g^-(x)(1+\xi) \Big) \psi dx \\ &\geqslant \mu\gamma(0)(1-\xi) \int_\Omega \Big(g^+(x) - g^-(x)\frac{1+\xi}{1-\xi} \Big) \psi dx \\ &\geqslant \mu\gamma(0)(1-\xi) \int_\Omega \Big(g^+(x) - g^-(x)(1+\varepsilon) \Big) \psi dx. \end{aligned}$$

La fonction g satisfait (H_2) et $\mu\gamma(0)(1-\xi) > 0$ alors

$$\mu\gamma(0)(1-\xi)(g^+(x) - g^-(x)(1+\varepsilon)) \in \mathcal{A},$$

il s'ensuit que

$$\mu g(x)\gamma(u_\mu(x)) \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent, la solution u_μ est positive pour tout $x \in \Omega$.

$\square$

Chapitre 3

Sur un problème critique non local avec une donnée qui change de signe

Ce chapitre est le développement de l'article [18].

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'existence de solutions strictement positives du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = u^q + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ avec $N > 2s$, $s \in (0,1)$, λ est un paramètre réel strictement positif et f est une fonction de $C^1(\bar{\Omega})\backslash\{0\}$ qui change de signe satisfaisant certaines hypothèses.

Les problèmes locaux non compacts ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années nous citons à titre d'exemples le travaux de [8, 51] et leur références.

La perte de compacité génère certaines difficultés pour prouver l'existence de solutions. Si on a un terme qui change signe ça serait encore plus pour montrer la positivité de la solution.

Inspirer par les travaux de [11, 35], on établit l'existence et la multiplicité de solutions strictement positives du problème (3.1).

Notre étude est partagée en deux principales parties.

Dans la section 3.3 on traite le cas où $q = 2_s^* - 1$ où $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ est l'exposant critique fractionnaire. En utilisant les résultats du chapitre 2, on obtient que le problème (3.1) admet une solution minimale strictement positive à énergie négative par la méthode de sous et sur solution.

En tenant compte de la structure variationnelle du problème (3.1) on prouve l'existence d'une seconde solution dont l'énergie est strictement positive et ceci par le Théorème du Col.

Dans la section 3.4, on considère le cas où $q > 2_s^* - 1$ et Ω un domaine étoilé par rapport à l'origine. On établit quelques propriétés des solutions du problème (3.1).

3.2 Le cadre fonctionnel

Nous commençons par introduire le cadre fonctionnel de notre problème. On définit l'espace de Sobolev fractionnaire

$$H_0^s(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

Définition 3.1 *On dit que $u \in H_0^s(\Omega)$ est une solution faible du problème (3.1), si pour tout $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \int_\Omega u^q \varphi dx + \lambda \int_\Omega f(x) \varphi dx,$$

Le problème a une structure variationnelle, donc les solutions faibles du problème (3.1) correspondent aux points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \frac{1}{q+1} \int_\Omega u_+^{q+1}\, dx - \lambda \int_\Omega f(x) u(x) dx, \quad (3.2)$$

avec $u_+ = \max(u, 0)$.

3.3 Problème critique

Dans cette setion nous allons montrer que grâce aux résultats du chapitre 2, on peut établir l'existence des solutions strictement positives. Avant de donner les résultats principaux , on fait l'hypothèse suivante
(H_1) il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_\Omega \mathcal{G}(x,t) \Big(f^+(t) - (1+\varepsilon) f^-(t) \Big) dt > 0,$$

où $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$.

Théorème 3.1 *Supposons que $q = 2_s^* - 1$ et $f \in C^1(\bar{\Omega}) \backslash \{0\}$ satisfaisant (H_1). Alors il existe $\Lambda > 0$ tel que :*
• *pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$ le problème (3.1) admet une solution minimale strictement positive u_λ tel que $\mathcal{J}(u_\lambda) < 0$. De plus, ces solutions sont croissantes par rapport à λ.*
• *si $\lambda = \Lambda$, le problème (3.1) admet au moins une solution faible strictement positive.*
• *si $\lambda > \Lambda$, le problème (3.1) n'a pas de solution positive.*

Théorème 3.2 *Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, le problème (3.1) admet une seconde solution.*

3.3.1 Existence de la première solution

Cette partie est consacrée à la preuve du Théorème 3.1.
Les résultats du Théorème 3.1 restent valables pour $1 < q \leqslant 2_s^* - 1$. L'existence de solutions strictement positives est étroitement liée au résultat du problème(2.2). On prend $\gamma = 1$ dans le problème (2.2) de la section 2.3, tel que on normalise le μ de telle sorte qu'on peut appliquer le Théorème 2.3 au le problème suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \ f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

ce problème admet une solution strictement positive notée u_0.

On définit

$$\Lambda := \sup \{\lambda > 0 : \ \text{ tel que le problème (3.1) admet une solution } \}.$$

La preuve du Théorème 3.1 se décompose en plusieurs lemmes. Commençons par montrer le résultat suivant :

Lemme 3.1 *On a $0 < \Lambda < \infty$.*

Preuve La preuve se base sur la méthode de sous-sur solution. Soit v_0 l'unique solution du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v_0 = 1 & \text{dans } \Omega \\ v_0 > 0 & \text{dans } \Omega \\ v_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

qui est strictement positive. Notons que l'existence de la solution est assurée par le Théorème de Lax Milgram, le principe du maximum assure la positivité.
On se propose de chercher la sur-solution de (3.1) sous la forme $\bar{u} = \mathcal{M} v_0$ où $\mathcal{M}$ est une constante strictement positive. Le problème (3.1) admet une sur-solution $\bar{u}$ si

$$(-\Delta)^s \bar{u} \geqslant \bar{u}^{2_s^*-1} + \lambda f(x).$$

On peut trouver un $\bar{\lambda} > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ on a

$$\mathcal{M} \geqslant \mathcal{M}^{2_s^*-1} \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2_s^*-1} + \lambda \max_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

ainsi

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s \bar{u} = \mathcal{M} \ &\geqslant \ \mathcal{M}^{2_s^*-1} \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{2_s^*-1} + \lambda \max_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &\geqslant \ (\mathcal{M} v_0)^{2_s^*-1} + \lambda f(x). \end{aligned}$$

On a $\bar{u} = \mathcal{M}v_0 > 0$ dans Ω et $\bar{u} = 0$ dans $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Ainsi $\bar{u}$ est une sur-solution du problème (3.1).

Maintenant on cherche une sous-solution de (3.1). Soit u_0 la solution strictement positive du problème (3.3), on pose $\underline{u} = \lambda u_0$ sous-solution tel que on a

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \underline{u} = \lambda f(x) \leqslant \underline{u}^{2_s^*-1} + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Alors $\underline{u}$ est bien une sous-solution de (3.1). De plus, on choisit λ assez petit tel que $\lambda u_0 \leqslant \mathcal{M}v_0$. Le théorème de sous-sur solution implique que le problème (3.1) admet une solution u_λ tel que $\underline{u} \leqslant u_\lambda \leqslant \bar{u}$ pour tout $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$. Par conséquent $\Lambda > 0$.

Pour montrer que $\Lambda < +\infty$, on prend $\lambda > 0$ tel que le problème (3.1) admet une solution u_λ. On considère le problème de valeurs propres suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \phi = \lambda \phi & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

on note par λ_1 la première valeur propre du problème (3.4) et ϕ_1 la fonction propre correspondante.

On multiplie l'équation du problème (3.1) par ϕ_1, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u_\lambda(x)\phi_1(x)dx = \int_\Omega u_\lambda^{2_s^*-1}(x)\phi_1(x)dx + \lambda \int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx,$$

ce qui nous donne aussi

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s \phi_1(x) u_\lambda dx = \int_\Omega u_\lambda^{2_s^*-1}(x)\phi_1(x)dx + \lambda \int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx,$$

en utilisant (3.4) on obtient

$$\lambda_1 \int_\Omega u_\lambda(x)\phi_1(x)dx = \int_\Omega u_\lambda^{2_s^*-1}(x)\phi_1(x)dx + \lambda \int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx &= \lambda_1 \int_\Omega u_\lambda(x)\phi_1(x)dx - \int_\Omega u_\lambda^{2_s^*-1}(x)\phi_1(x)dx \\ &= \int_\Omega (\lambda_1 u_\lambda(x) - u_\lambda^{2_s^*-1}(x))\phi_1(x)dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On pose $E(u_\lambda) = u_\lambda^{2_s^*-1} - \lambda_1 u_\lambda$, alors

$$E'(u_\lambda) = (2_s^* - 1)u_\lambda^{2_s^*-2} - \lambda_1.$$

Pour $E'(u_\lambda) = 0$ on trouve

$$(2_s^* - 1)u_\lambda^{2_s^*-2} - \lambda_1 = 0,$$

ce qui implique

$$u_\lambda^* = (\frac{\lambda_1}{2_s^* - 1})^{\frac{1}{2_s^*-2}}, \tag{3.6}$$

$E(u_\lambda)$ a un minimum u_λ^* sur $[0, +\infty)$

$$E(u_\lambda^*) \leqslant E(u_\lambda).$$

En remplaçant (3.6) dans $E(u_\lambda)$ on trouve

$$(\frac{\lambda_1}{2_s^* - 1})^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*-2}} - \lambda_1(\frac{\lambda_1}{2_s^* - 1})^{\frac{1}{2_s^*-2}} \leqslant u_\lambda^{2_s^*-1} - \lambda u_\lambda,$$

donc

$$(-2_s^*)(\frac{\lambda_1}{2_s^* - 1})^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*-2}} \leqslant u_\lambda^{2_s^*-1} - \lambda_1 u_\lambda,$$

ainsi

$$\lambda_1 u_\lambda - u_\lambda^{2_s^*-1} \leqslant 2_s^*(\frac{\lambda_1}{2_s^* - 1})^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*-2}}. \tag{3.7}$$

D'après (3.5) et (3.7), on obtient

$$\lambda \int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx \leqslant 2_s^*(\frac{\lambda_1}{2_s^* - 1})^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*-2}} \int_\Omega \phi_1(x)dx. \tag{3.8}$$

Soit u_0 la solution du problème (3.3), on multiplie l'équation du problème (3.3) par ϕ_1, en utilisant (3.4) on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u_0(x)\phi_1(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s \phi_1(x)u_0(x)dx = \lambda_1 \int_\Omega \phi_1(x)u_0(x)dx > 0,$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u_0(x)\phi_1(x)dx = \int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx > 0. \tag{3.9}$$

(3.8) et (3.9) avec $\lambda > 0$ nous donne

$$\lambda \leqslant 2_s^*\left(\frac{\lambda_1}{2_s^* - 1}\right)^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*-2}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi_1(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x)\phi_1(x)dx} = \Lambda^* < +\infty.$$

□

Lemme 3.2 *Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, le problème (3.1) admet une solution strictement positive .*

Preuve D'après le Lemme 3.1 il existe au moins λ_1 avec $\lambda_1 \in (0, \Lambda)$ tel que le problème (3.1) admet une solution u_{λ_1}. Soit $\lambda_2 \in (0, \lambda_1)$, montrons que le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = u^{2_s^*-1} + \lambda_2 f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

admet une solution non-triviale v.
On a

$$(-\Delta)^s u_{\lambda_1} = u_{\lambda_1}^{2_s^*-1} + \lambda_1 f(x) \geqslant u_{\lambda_1}^{2_s^*-1} + \lambda_2 f(x).$$

Comme $u_{\lambda_1} > 0$ dans Ω et $u_{\lambda_1} = 0$ dans $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ donc u_{λ_1} est une sur-solution du problème (3.10).

Posons $u_{\lambda_2} = \lambda_2 u_0$ où u_0 est solution du problème (3.3), on trouve que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_{\lambda_2} = \lambda_2 f(x) \leqslant u_{\lambda_2} + \lambda_2 f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

alors u_{λ_2} est une sous-solution du problème (3.10). Par le principe de comparaison on a $u_{\lambda_2} \leqslant u_{\lambda_1}$ et en utilisant la méthode de sous et sur solution on obtient que v est une solution du problème (3.10) tel que $u_{\lambda_2} \leqslant v \leqslant u_{\lambda_1}$.

□

Existence de la solution minimale

Maintenant on montre que le problème (3.1) possède une solution minimale, dont l'énergie est négative.

Lemme 3.3 *Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, le problème (3.1) admet une solution minimale u_λ tel que $\mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) < 0$. De plus la famille des solutions minimales u_λ est croissante par rapport à λ.*

Preuve Pour $\lambda \in (0, \Lambda)$, on considère v_λ solution du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v_\lambda = \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ v_\lambda > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_\lambda = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

et w_λ solution du problème (3.1). On définit la suite $\{w_n\}$ comme suit

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w_n = w_{n-1}^{2_s^*-1} + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ w_n > 0 & \text{dans } \Omega, \qquad \text{et} \quad w_0 = v_\lambda. \\ w_n = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

En résonnant par récurrence et en appliquant le principe de comparaison, on montre que

$$v_\lambda \leqslant ... \leqslant w_n \leqslant w_\lambda.$$

En utilisant w_n comme une fonction test dans l'équation du problème (3.11) on obtient

$$\begin{aligned}\|w_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} &\leqslant \lambda \int_\Omega f(x) w_n(x)dx + \int_\Omega |w_n(x)|^{2^*_s}dx \\ &\leqslant \lambda \max_{x\in\Omega} |f(x)| \int_\Omega w_\lambda(x)dx + \|w_\lambda\|^{2^*_s}_{L^{2^*_s}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Les injections de Sobolev fractionnaires nous donne

$$\|w_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} \leqslant K\|w_\lambda\|^{2^*_s}_{L^{2^*_s}(\Omega)} \leqslant K\|w_\lambda\|^{2^*_s}_{H^s_0(\Omega)},$$

où $K > 0$. Par conséquent la suite $\{w_n\}$ est bornée dans $H^s_0(\Omega)$, il s'ensuit qu'il existe u_λ tel que

$$\begin{aligned} w_n &\rightharpoonup u_\lambda \qquad \text{faiblement dans } H^s_0(\Omega) \\ w_n &\longrightarrow u_\lambda \qquad \text{fortement dans } L^q(\Omega),\ 1 \leqslant q < 2^*_s,\end{aligned}$$

de plus

$$w_n \nearrow u_\lambda \text{ p.p dans } \Omega.$$

Il est clair que $u_\lambda \leqslant w_\lambda$.

Soit $\xi \in H^s_0(\Omega)$, on multiplie l'équation du problème (3.11) par ξ et on intègre sur Ω, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s w_n.\xi dx = \int_\Omega w_{n-1}^{2^*_s-1}(x).\xi dx + \lambda \int_\Omega f(x).\xi dx,$$

en faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant la convergence faible et le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s w_n.\xi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_n.(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\xi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_\lambda.(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\xi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u_\lambda.\xi dx,$$

et

$$\lambda \int_\Omega f(x).\xi dx + \int_\Omega w_{n-1}^{2^*_s-1}.\xi dx \longrightarrow \int_\Omega u_\lambda^{2^*_s-1}.\xi dx + \lambda \int_\Omega f(x).\xi dx.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u_\lambda.\xi dx = \int_\Omega (u_\lambda^{2^*_s-1} + \lambda f(x)).\xi dx.$$

D'après ce qui précède on conclut que u_λ est une solution minimale du problème (3.1).

En utilisant le principe de comparaison fort dans Lemme 1.13, on obtient que la famille des solutions minimales $\{u_\lambda\}$ est croissante pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Pour la suite de la preuve on pose $a(x) = (2_s^* - 1)u_\lambda^{2_s^*-2}$ où u_λ est la solution minimale de (3.1), on considère le problème de valeurs propres suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s\varphi - a(x)\varphi = \nu_1\varphi & \text{dans } \Omega, \\ \varphi > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

où ν_1 est la première valeur propre du problème (3.12). Montrons que $\nu_1 \geqslant 0$.
Soit u_1 et u_2 sous-solution et sur-solution respectivement du problème (3.1) tel que $u_1 < u_\lambda \leqslant u_2$ où u_1 n'est pas une solution de (3.1). On raisonne par l'absurde, on suppose que $\mu_1 < 0$ et que $u_\lambda - \varepsilon\varphi$ est une sur solution de (3.1) pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Calculons

$$\begin{aligned} & (-\Delta)^s(u_\lambda - \varepsilon\varphi) - (\lambda f(x) + (u_\lambda - \varepsilon\varphi)^{2_s^*-1}) \\ = \; & (-\Delta)^s u_\lambda - \varepsilon(-\Delta)^s\varphi - \lambda f(x) - (u_\lambda - \varepsilon\varphi)^{2_s^*-1} \\ = \; & \lambda f(x) + u_\lambda^{2_s^*-1} - \varepsilon(2_s^* - 1)u_\lambda^{2_s^*-1}\varphi - \varepsilon\mu_1\varphi - \lambda f(x) - (u_\lambda - \varepsilon\varphi)^{2_s^*-1} \\ = \; & u_\lambda^{2_s^*-1} - \varepsilon(2_s^* - 1)u_\lambda^{2_s^*-1}\varphi - (u_\lambda - \varepsilon\varphi)^{2_s^*-1} - \varepsilon\mu_1\varphi \\ = \; & o(\varepsilon\varphi) - \varepsilon\mu_1\varphi > 0, \end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\nu_1 < 0$ et $\varphi > 0$. Alors $(u_\lambda - \varepsilon\varphi)$ est une sur solution de (3.1).
On a $u_\lambda > u_1$, si on prend ε suffisamment petit on peut supposer que $u_\lambda - \varepsilon\varphi \geqslant u_1$. Donc il existe une solution $\tilde{u}$ tel que $u_1 \leqslant \tilde{u} \leqslant u_\lambda - \varepsilon\varphi$, ceci est en contradiction avec le fait que u_λ est une solution minimale du problème (3.1), par conséquent $\nu_1 \geqslant 0$.

Revenons à la démonstration du Lemme 3.3. D'après ce qui précède on obtient que

$$\|\varphi\|^2_{H_0^s(\Omega)} \geqslant \int_\Omega a(x)\varphi^2 dx \quad \forall\phi \in H_0^s(\Omega). \tag{3.13}$$

Si on prend $\varphi = u_\lambda$ dans (3.13), on trouve

$$\|u_\lambda\|^2_{H_0^s(\Omega)} \geqslant (2_s^* - 1)\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)}. \tag{3.14}$$

En utilisant le fait que u_λ est une solution du problème (3.1) on a

$$\|u_\lambda\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \lambda\int_\Omega f(x)u_\lambda(x)dx + \|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)}. \tag{3.15}$$

De (3.14) et (3.15) on obtient

$$\lambda\int_\Omega f(x)u_\lambda(x)dx \geqslant (2_s^* - 2)\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)}. \tag{3.16}$$

En remplaçant (3.15) dans la fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1), on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) &= \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f(x)u_\lambda(x)dx + \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} - \lambda\int_\Omega f(x)u_\lambda(x)dx - \frac{1}{2_s^*}\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} \\ &= \frac{2_s^* - 2}{22_s^*}\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f(x)u_\lambda(x)dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) &= \frac{2_s^*-2}{22_s^*}\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} - \frac{2_s^*-2}{2}\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{(-2_s^*+1)(2_s^*-2)}{22_s^*}\|u_\lambda\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} < 0.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du premier point du Théorème 3.1.

□

La démonstration du deuxième point du Théorème 3.1 se trouve dans le lemme suivant.

Lemme 3.4 *Si $\lambda = \Lambda$, le problème (3.1) admet au moins une solution.*

Preuve Soit $\{\lambda_n\}$ une suite tel que $\lambda_n \nearrow \Lambda$. On prend $u_n = u_{\lambda_n}$ solution minimale au problème

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u_n = u_n^{2_s^*-1} + \lambda_n f(x) & \text{dans } \Omega,\\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega,\\ u_n = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega,\end{cases} \tag{3.18}$$

la suite $\{u_n\}$ est croissante. De plus $\mathcal{J}_{\lambda_n}(u_n) < 0$ et $\mathcal{J}'_{\lambda_n}(u_n) = 0$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{2_s^*}\langle \mathcal{J}'_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle + o(1) &= \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*})\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda_n(1 - \frac{1}{2_s^*})\int_\Omega f(x)u_n(x)dx + o(1) &< 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

En utilisant les inégalités de Poincaré et de Hölder, il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)u_n(x)dx &\leqslant \max_{x\in\Omega}|f(x)|\int_\Omega |u_n(x)|dx \\ &\leqslant C\max_{x\in\Omega}|f(x)||\Omega|^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |u_n(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C\max_{x\in\Omega}|f(x)|\|u_n(x)\|_{L^2(\Omega)}. \\ &\leqslant C\max_{x\in\Omega}|f(x)|\|u_n(x)\|_{H_0^s(\Omega)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}0 &\geqslant \frac{2_s^*-2}{22_s^*}\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda\frac{2_s^*-1}{2_s^*}\int_\Omega f(x)u_n(x)dx \\ &\geqslant \frac{2_s^*-2}{22_s^*}\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda C\frac{2^s-1}{2_s^*}\max_{x\in\Omega}|f(x)|\|u_n(x)\|_{H_0^s(\Omega)},\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} \leqslant C\lambda\frac{22_s^*-1}{2_s^*-2}\max_{x\in\Omega}|f(x)|\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}$$

$$\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)} \leqslant C\lambda \frac{22_s^*-1}{2_s^*-2} \max_{x\in\Omega} |f(x)| < +\infty.$$

Par conséquent la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$ donc il existe $u^* \in H_0^s(\Omega)$ tel que

$$u_n \rightharpoonup u^* \qquad \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega). \tag{3.20}$$

Soit $\xi \in H_0^s(\Omega)$, on multiplie (3.18) par ξ et on intègre sur Ω on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u_n \xi dx = \int_\Omega u_n^{2_s^*-1} \xi dx + \lambda_n \int_\Omega f(x)\xi dx.$$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$ et en utilisant le théorème de convergence monotone on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u_n \xi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \xi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^* (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \xi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u^* \xi dx,$$

et

$$\int_\Omega u_n^{2_s^*-1} \xi dx + \lambda_n \int_\Omega f(x)\xi dx \longrightarrow \int_\Omega u^{*2_s^*-1} \xi dx + \Lambda \int_\Omega f(x)\xi dx.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s u^* \xi dx = \int_\Omega (u^{*2_s^*-1} + \Lambda f(x))\xi dx. \tag{3.21}$$

Ce qui signifie que u^* est une solution faible du problème (3.1) pour $\lambda = \Lambda$.

$\square$

3.3.2 Existence de la seconde solution

Dans cette partie on prouve l'existence d'une deuxième solution du problème (3.1) en utilisant une méthode variationnelle.

Tout d'abord on montre que la solution minimale $u_\lambda > 0$ donnée par le premier point du Théorème 3.1 dans la sous-section 3.3.1 est un minimum local pour la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{J}_\lambda$ défini dans (3.2).

Pour faire ça, on commence par un lemme de séparation dans la topologie de la classe

$$\mathscr{C}_s(\Omega) = \left\{ w \in C^0(\bar\Omega) : \|w\|_{\mathscr{C}_s} = \|\frac{w}{\delta^s}\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\},$$

avec $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$.

Lemme 3.5 *Pour $0 < \lambda_1 < \bar\lambda < \lambda_2 < \Lambda$. Soient u_1, v, u_2 les solutions minimales correspondantes au problème (3.1) pour λ=λ_1, $\lambda = \bar\lambda$ et $\lambda = \lambda_2$ respectivement.*
On pose

$$X = \{u \in C_0^1(\Omega), u_1 \leqslant u \leqslant u_2\}.$$

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\{v\} \pm \varepsilon B_1 \subset X,$$

avec

$$B_1 := \left\{ w \in C^0(\bar\Omega) : \|\frac{w}{\delta^s}\|_{L^\infty(\Omega)} < 1 \right\}.$$

Preuve Pour $\lambda \in (0, \Lambda)$,soit u une solution arbitraire de (3.1) tel que $u \in \{v\} \pm \varepsilon B_1$, donc $u = v \pm \varepsilon$.
En utilisant le lemme de Hopf dans la Proposition 1.14, on obtient l'existence d'une constante strictement positive c telle que

$$u(x) \geqslant c\delta^s(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.22}$$

La Proposition 1.8 nous donne la C^s régularité de Hölder optimale pour u, il existe une constante strictement positive c' telle que

$$u(x) \leqslant c'\delta^s(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.23}$$

De (3.22) et (3.23) on trouve que

$$\|u\|_{\mathscr{C}_s} = \|\frac{u}{\delta^s}\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty,$$

ce qui implique que $u \in \mathscr{C}_s(\Omega)$.
Maintenant il ne reste plus qu'à montrer que

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2.$$

On a $\lambda_1 < \bar{\lambda} < \lambda_2$, par le principe de comparaison fort (Proposition 1.13) on a

$$u_1 < v < u_2,$$

en ajoutant $\pm\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\begin{aligned} & u_1 \pm \varepsilon < v \pm \varepsilon < u_2 \pm \varepsilon \\ \Rightarrow \quad & u_1 \pm \varepsilon < u < u_2 \pm \varepsilon \\ \Rightarrow \quad & u_1 \leqslant u \leqslant u_2. \end{aligned}$$

On obtient que $u \in X$, donc

$$\{v\} \pm \varepsilon B_1 \subset X.$$

□

Nous allons montrer que la fonctionnelle $\mathcal{J}_\lambda$ atteint un minimum local pour la topologie de $\mathscr{C}_s(\Omega)$, comme première étape on prouve que c'est un minimum local dans $H_0^s(\Omega)$.

Lemme 3.6 *Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, le problème (3.1) admet une solution qui est un minimum local de $\mathcal{J}_\lambda$ dans la topologie de $\mathscr{C}_s(\Omega)$.*

Preuve On fixe $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \Lambda$. Soit $u_1 = u_{\lambda_1}$ et $u_2 = u_{\lambda_2}$ les solutions minimales du problème (3.1) avec $\lambda = \lambda_1$ et $\lambda = \lambda_2$ respectivement.
Par le principe de comparaison on a $u_1 \leqslant u_2$, ce qui implique

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s(u_2 - u_1) &= \lambda_2 f(x) + u_2^{2_s^*} - \lambda_1 f(x) - u_1^{2_s^*} \\ &\geqslant \lambda_1 f(x) + u_2^{2_s^*} - \lambda_1 f(x) - u_1^{2_s^*} \\ &\geqslant u_2^{2_s^*} - u_1^{2_s^*} \\ &\geqslant 0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega.$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2$ on trouve que $u_1 < u_2$.

Par ailleurs, on pose

$$h^*_\lambda(x,t) = \begin{cases} \lambda f(x) + u_1^{2^*_s-1}(x) & \text{si } t \leqslant u_1 \\ \lambda f(x) + t^{2^*_s-1} & \text{si } u_1 < t < u_2 \\ \lambda f(x) + u_2^{2^*_s-1}(x) & \text{si } t \geqslant u_2. \end{cases} \tag{3.25}$$

$$H^*_\lambda(x,u) = \int_0^u h^*_\lambda(x,t)dt,$$

la fonctionnelle d'énergie associée est

$$\mathcal{J}^*_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \int_\Omega H^*_\lambda(x,u)dx.$$

On montre que $\mathcal{J}^*_\lambda$ atteint son minimum global. Calculons $H^*_\lambda(x,u)$, on sait que

$$\begin{aligned} H^*_\lambda(x,u) &= \int_0^u h^*_\lambda(x,t)dt \\ &= \int_0^{u_1} (\lambda f(x) + u_1^{2^*_s-1})dt + \int_{u_1}^{u_2} (\lambda f(x) + t^{2^*_s-1})dt + \int_{u_2}^u (\lambda f(x) + u_2^{2^*_s-1})dt \\ &= \lambda f(x)u_1 + u_1^{2^*_s} + \lambda f(x)(u_2 - u_1) + \frac{1}{2^*_s}(u_2^{2^*_s} - u_1^{2^*_s}) \\ &+ \lambda f(x)(u - u_2) + u_2^{2^*_s-1}u - u_2^{2^*_s} \\ &= \lambda f(x)u + u_1^{2^*_s} + \frac{1}{2^*_s}u_2^{2^*_s} - \frac{1}{2^*_s}u_1^{2^*_s} + u_2^{2^*_s-1}u - u_2^{2^*_s} \\ &= (\frac{1}{2^*_s} - 1)(u_2^{2^*_s} - u_1^{2^*_s}) + (\lambda f(x) + u_2^{2^*_s-1})u, \end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{2^*_s} - 1 < 0$ et $u_1 < u_2$, alors

$$(\frac{1}{2^*_s} - 1)\int_\Omega (u_2^{2^*_s} - u_1^{2^*_s})dx < 0.$$

D'un autre coté

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\lambda f(x) + u_2^{2^*_s-1}).udx &= \int_\Omega (-\Delta)^s u_2.udx \\ &= \int_\Omega (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_2.(-\Delta)^{\frac{s}{2}} udx \\ &\leqslant C\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_2\|_{L^2(\Omega)}.\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C\|u_2\|_{H^s_0(\Omega)}.\|u\|_{H^s_0(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\lambda^*(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} + (1-\frac{1}{2_s^*})\int_\Omega (u_2^{2_s^*} - u_1^{2_s^*})dx - \int_\Omega (\lambda f(x) + u_2^{2_s^*-1})udx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - C\|u_2\|_{H_0^s(\Omega)}.\|u\|_{H_0^s(\Omega)} \\ &\geqslant (\frac{1}{2}\|u\|_{H_0^s(\Omega)} - C\|u_2\|_{H_0^s(\Omega)}).\|u\|_{H_0^s(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Ce qui implique que $\mathcal{J}_\lambda^*(u)$ atteint son minimum global pour un certain $v \in H_0^s(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{J}_\lambda^*(u) \geqslant \mathcal{J}_\lambda^*(v) \qquad \forall u \in H_0^s(\Omega). \tag{3.27}$$

De plus

$$\begin{cases}(-\Delta)^s v = h_\lambda^*(x,v) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega.\end{cases}$$

Maintenant on veut prouver que $u_1 < v < u_2$ pour pouvoir utiliser le Lemme 3.5. En utilisant (3.25) et le fait que u_1 et u_2 sont des solutions minimales du problème (3.1) on trouve

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s(v-u_1) &= (-\Delta)^s v - (-\Delta)^s u_1 \\ &= h_\lambda^*(x,v) - \lambda f(x) - u_1^{2_s^*-1} \\ &= \begin{cases}0 & v \leqslant u_1 \\ v^{2_s^*-1} - u_1^{2_s^*-1} > 0 & u_1 < v < u_2 \\ u_2^{2_s^*-1} - u_1^{2_s^*-1} > 0 & v \geqslant u_2,\end{cases}\end{aligned}$$

on a également

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s(v-u_2) &= (-\Delta)^s v - (-\Delta)^s u_2 \\ &= h_\lambda^*(x,v) - \lambda f(x) - u_2^{2_s^*-1} \\ &= \begin{cases}u_1^{2_s^*-1} - u_2^{2_s^*-1} < 0 & v \leqslant u_1 \\ v^{2_s^*-1} - u_2^{2_s^*-1} < 0 & u_1 < v < u_2 \\ 0 & v \geqslant u_2,\end{cases}\end{aligned}$$

par conséquent

$$u_1 < v < u_2.$$

Le Lemme 3.5 nous donne que

$$\{v\} + \varepsilon B_1 \subset X \quad \text{avec } \varepsilon > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

Soit v satisfaisant

$$\|u - v\|_{\mathscr{C}_s(\Omega)} \leqslant \varepsilon,$$

alors $u_1 \leqslant v \leqslant u_2$ et de plus

$$\mathcal{J}_\lambda^*(u) = \mathcal{J}_\lambda(u) = 0 \qquad \text{pour tout } u \text{ tel que } \|u - v\|_{\mathscr{C}_s(\Omega)}.$$

De (3.27) on trouve

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \mathcal{J}_\lambda^*(u) \geqslant \mathcal{J}_\lambda^*(v) = \mathcal{J}_\lambda(v), \qquad \text{pour tout } u \in \mathscr{C}_s(\Omega) \text{ et } \|u - v\|_{\mathscr{C}_s(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, v est également un minimum local pour la fonctionnelle $\mathcal{J}_\lambda$ dans la topologie de $\mathscr{C}_s(\Omega)$.

□

Maintenant, on montre qu'on a un minimum local dans l'espace $H_0^s(\Omega)$.

Proposition 3.1 *Soit $u_0 \in H_0^s(\Omega)$ un minimum local de $\mathcal{J}_\lambda$ dans $\mathscr{C}_s(\Omega)$, c'est à dire, qu'il existe $r_1 > 0$ tel que*

$$\mathcal{J}_\lambda(u_0) \leqslant \mathcal{J}_\lambda(u_0 + u) \qquad \forall u \in \mathscr{C}_s(\Omega) \text{ avec } \|u\|_{\mathscr{C}_s(\Omega)} \leqslant r_1. \tag{3.28}$$

Alors, u_0 est aussi un minimum local de $\mathcal{J}_\lambda$ dans $H_0^s(\Omega)$, c'est à dire, il existe $r_2 > 0$ tel que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_0) \leqslant \mathcal{J}_\lambda(u_0 + u) \qquad \forall u \in H_0^s(\Omega) \text{ avec } \|u\|_{H_0^s(\Omega)} \leqslant r_2. \tag{3.29}$$

Preuve Soit $u_0 \in H_0^s(\Omega)$ vérifiant (3.28), posons

$$B_\varepsilon(u_0) = \{u \in H_0^s(\Omega) : \|u - u_0\| \leqslant \varepsilon\} \qquad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

On choisit $v_\varepsilon \in B_\varepsilon(u_0)$ tel que

$$\mathcal{J}_\lambda(v_\varepsilon) = \min_{v \in B_\varepsilon(u_0)} \mathcal{J}_\lambda(v),$$

On fait un raisonnement par l'absurde . On suppose que pour $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathcal{J}_\lambda(v_\varepsilon) < \mathcal{J}_\lambda(u_0).$$

Montrons que

$$v_\varepsilon \to u_0 \qquad \text{dans } \mathscr{C}_s(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \searrow 0,$$

ce qui impliquera l'existence d'un $u \in \mathscr{C}_s(\Omega)$ proche de u_0 dans la métrique de $\mathscr{C}_s(\Omega)$, tel que

$$\mathcal{J}_\lambda(u) < \mathcal{J}_\lambda(u_0),$$

ce qui nous ramène à une contradiction avec l'hypothèse que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_0) \leqslant \mathcal{J}_\lambda(u_0 + u) \qquad \forall u \in \mathscr{C}_s(\Omega) \text{ avec } \|u\|_{\mathscr{C}_s(\Omega)} \leqslant r_1.$$

On prend $0 < \varepsilon \ll 1$. L'équation d'Euler Lagrange satisfaite par v_ε implique l'existence d'un multiplicateur de Lagrange ξ_ε tel que

$$\langle \mathcal{J}'_\lambda(v_\varepsilon), \varphi \rangle_{H^{-s}(\Omega), H_0^s(\Omega)} = \xi_\varepsilon \langle v_\varepsilon, \varphi \rangle_{H_0^s(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in H_0^s(\Omega). \tag{3.30}$$

On a v_ε est un minimum of $\mathcal{J}_\lambda$ dans $B_\varepsilon(u_0)$, donc

$$\xi_\varepsilon = \frac{\langle \mathcal{J}'_\lambda(v_\varepsilon), v_\varepsilon \rangle_{H^{-s}(\Omega), H_0^s(\Omega)}}{\|v_\varepsilon\|^2_{H_0^s(\Omega)}} \leqslant 0 \qquad \text{pour } 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{3.31}$$

avec

$$\xi_\varepsilon \to 0 \text{ quand } \varepsilon \searrow 0.$$

D'après (3.30), v_ε satisfaisant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v_\varepsilon = \dfrac{h_\lambda(v_\varepsilon)}{1-\xi_\varepsilon} := h_\lambda^\varepsilon(v_\varepsilon) & \text{dans } \Omega \\ v_\varepsilon > 0 & \text{dans } \Omega \\ v_\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

où $h_\lambda(v_\varepsilon) = \lambda f(x) + v_\varepsilon^{2_s^*-1}$.

On a $v_\varepsilon > 0$ et

$$\|v_\varepsilon\|_{H_0^s(\Omega)} \leqslant C,$$

d'après la Proposition 1.9 on a l'existence d'une constante $C_1 > 0$ indépendante de ε, telle que

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_1.$$

De plus, par (3.31) on obtient que

$$\|h_\lambda^\varepsilon(v_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C.$$

La Proposition 1.8 implique que

$$\|v_\varepsilon\|_{C^s(\bar{\Omega})} \leqslant C_2,$$

la constante C_2 est strictement positive indépendante de ε.
Par le théorème d'Ascoli-Arzelá il existe une sous suite encore noté $\{v_\varepsilon\}$ telle que

$$v_\varepsilon \to u_0 \qquad \text{uniformément quand } \varepsilon \searrow 0. \tag{3.32}$$

Le Théorème 1.16 implique l'existence d'une constante strictement positive C tel que

$$\left\| \frac{v_\varepsilon - u_0}{\delta^s} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C \sup_\Omega |h_\lambda^\varepsilon(v_\varepsilon) - h_\lambda(u_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, on trouve

$$\mathcal{J}_\lambda(v_\varepsilon) < \mathcal{J}_\lambda(u_0) \quad \text{pour tout } v_\varepsilon \ \text{ vérifiant } \ \|v_\varepsilon - u_0\|_{\mathscr{C}_s(\Omega)} < \varepsilon, \tag{3.33}$$

donc il existe $u \in \mathscr{C}_s(\Omega)$ proche de u_0 dans $\mathscr{C}_s(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{J}_\lambda(u) < \mathcal{J}_\lambda(u_0).$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse (3.28), par conséquent u_0 est un minimum local de $\mathcal{J}_\lambda$ dans $H_0^s(\Omega)$.

□

D'après le Lemme 3.6 et la Proposition 3.1 on obtient l'existence d'un minimum local de la fonctionnelle $\mathcal{J}_\lambda$ dans $H_0^s(\Omega)$, qu'on notera u_0.

Fixons $\lambda \in (0, \Lambda)$, on conclut l'existence d'une deuxième solution strictement positive u du problème (3.1) sous la forme $u = u_0 + v$, v satisfaisant le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v = g(u_0, v) & \text{dans } \Omega, \\ v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3.34}$$

avec la fonction g définie par

$$g(u_0, s) := \begin{cases} (u_0 + s)^{2_s^*-1} - u_0^{2_s^*-1} & \text{si } s \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } s < 0, \end{cases} \tag{3.35}$$

et

$$G(u_0, v) = \int_0^v g(x, s) ds.$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.34) est définie comme suit

$$I(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega G(u_0, v) dx. \tag{3.36}$$

Pour montrer l'existence d'une seconde solution, on suivra le raisonnement suivant : Si $v \not\equiv 0$ est un point critique de I alors c'est une solution du problème (3.34), en utilisant le principe du maximum (Proposition 1.11), on trouve que $v > 0$. Par conséquent u sera une deuxième solution strictement positive du problème (3.1) à énergie strictement positive ainsi $u \neq u_0$.
Pour cette raison, on va étudier l'existence des points critiques non triviaux pour la fonctionnelle I. Commençons par prouver le résultat suivant

Lemme 3.7 *$u = 0$ est un minimum local de I dans $H_0^s(\Omega)$.*

Preuve En utilisant la Proposition 3.1, il suffit de prouver que $u = 0$ est un minimum local de la fonctionnelle I dans $\mathscr{C}_s(\Omega)$.
Soit $u \in \mathscr{C}_s(\Omega)$ et on définit la fonction

$$H(z) = \lambda f(x) z + z^{2_s^*}, \qquad z \in H_0^s(\Omega).$$

Alors,

$$G(u_0, v) = H(u_0 + v) - H(u_0) - \lambda f(x)v - u_0^{2_s^*-1}v.$$

D'après(3.2), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\lambda(u_0+v) &= \frac{1}{2}\|u_0+v\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega H(u_0+v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \int_\Omega (-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_0.(-\Delta)^{\frac{s}{2}}vdx - \int_\Omega H(u_0+v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \int_\Omega (-\Delta)^s u_0.vdx - \int_\Omega H(u_0+v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \int_\Omega (\lambda f(x) + u_0^{2_s^*-1})vdx - \int_\Omega H(u_0+v)dx,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

et

$$\begin{aligned}
I(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega G(u_0,v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega (H(u_0+v) - H(u_0) - \lambda f(x)v - u_0^{2_s^*-1}v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega H(u_0+v)dx - \int_\Omega H(u_0)dx - \int_\Omega (\lambda f(x) - u_0^{2_s^*-1})vdx.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

On remplace (3.37) dans (3.38) on obtient

$$\begin{aligned}
I(v) &= \mathcal{J}_\lambda(u_0+v) - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \int_\Omega H(u_0)dx \\
&= \mathcal{J}_\lambda(u_0+v) - \mathcal{J}_\lambda(u_0),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

comme u_0 est un minimum local de $\mathcal{J}_\lambda$, alors

$$I(v) \geqslant 0 = I(0) \qquad \text{pour } \|v\|_{\mathscr{C}_s(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Donc 0 est un minimum local de I dans $\mathscr{C}_s(\Omega)$ et d'après la Proposition 3.1 on déduit que 0 est un minimum local de I dans $H_0^s(\Omega)$.

□

Condition de Palais-Smale

Dans cette partie on suppose que 0 est l'unique point critique de la fonctionnelle I. On prouve que I satisfaisant la condition de Palais-Smale locale au niveau $c < c*$ ($(PS)_c$) en abrégé) ce qui nous permettra d'avoir une compacité locale, cette idée a été développée par Brézis-Nirenberg [22].

Considérons le problème de valeur propre suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s\psi = \mu(2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2}\psi & \text{dans } \Omega, \\ \psi > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega. \end{cases} \tag{3.40}$$

On veut trouver la première valeur propre de ce problème, en considérant le problème de minimisation suivant

$$\mu_1 := \inf_{\psi \in H_0^s(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}{\displaystyle\int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2}\psi^2 dx}. \tag{3.41}$$

On prouve que ce infimum -qui est la première valeur propre- est strictement positif et de plus la fonction propre correspondante $\psi_1 \in H_0^s(\Omega)$ est strictement positive.

Lemme 3.8 *On a*

$$\mu_1 > 0 \qquad \textit{dans } \Omega.$$

De plus, il est atteint par $\psi_1 \in H_0^s(\Omega)$ *avec* $\psi_1 > 0$ *p.p dans* Ω.

Preuve Soit $\{\phi_n\} \subset H_0^s(\Omega)$ une suite minimisante du problème (3.40) vérifiant

$$\int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2}\phi_n^2 dx = 1, \tag{3.42}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi_n(x)-\phi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \longrightarrow \mu_1 \qquad \text{quand } n \to \infty. \tag{3.43}$$

En utilisant (3.42), (3.43) et le problème (3.40), on obtient l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$\|\phi_n\|_{H_0^s(\Omega)} \leqslant M,$$

alors la suite $\{\phi_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$. Par conséquent, il existe une sous suite on la note également par $\{\phi_n\}$ et une fonction $\psi_1(x)$ dans $H_0^s(\Omega)$ tel que

$$\begin{array}{ll} \phi_n \rightharpoonup \psi_1 & \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega) \\ \phi_n \to \psi_1 & \text{fortement dans } L^q(\Omega),\ 1 \leqslant q < 2_s^* \\ \phi_n \to \psi_1 & \text{p.p dans } \Omega. \end{array}$$

De (3.43) on trouve

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi_n(x)-\phi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to\infty} \frac{|\phi_n(x)-\phi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\psi_1(x)-\psi_1(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &\geqslant \|\psi_1\|^2_{H_0^s(\Omega)} > 0. \end{aligned}$$

Comme $(2_s^* - 1)u_0^{2_s^*-2} \in L^{\frac{N}{2s}}(\Omega)$, alors la suite $\{\phi_n^2\}$ est bornée dans $L^{\frac{N}{N-2s}}(\Omega)$ et par suite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2}\phi_n^2 dx &= \int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2}\psi_1^2 dx \\ &= 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\psi_1 \not\equiv 0$, cette dernière est la fonction propre associée à la valeur propre $\mu_1 > 0$.
On sait que

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b| \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}\||\psi_1|\|^2_{H_0^s(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{||\psi_1(x)| - |\psi_1(y)||^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\psi_1(x) - \psi_1(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \|\psi_1\|^2_{H_0^s(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

On déduit que μ_1 est atteinte par $|\psi_1|$ aussi . Ainsi, on peut supposer que $\psi_1 \geqslant 0$ $p.p$ dans Ω. De plus par (3.40) on a

$$\begin{cases} (-\Delta)^s\psi_1 = \mu_1(2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2}\psi_1 \geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_1 \geqslant 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega, \end{cases}$$

le principe de comparaison fort nous donne $\psi_1 > 0$ $p.p$ dans Ω.

□

Passons au lemme suivant :

Lemme 3.9 *Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda)$, on a*

$$\mu_1 > 1.$$

Preuve Soient $\lambda, \bar\lambda \in (0, \Lambda)$ avec $\lambda < \bar\lambda$. Considérons u_0, u_1 les solutions minimales du problème (3.1) correspondantes à λ et $\bar\lambda$ respectivement.
On prend $z = u_1 - u_0$, alors

$$\begin{cases} (-\Delta)^s z = u_1^{2_s^*-1} - u_0^{2_s^*-1} & \text{dans } \Omega, \\ z > 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega. \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité suivante

$$a^p - b^p \geqslant pb^{p-1}(a-b), \qquad \text{pour tout } a > b > 0 \text{ et } p \geqslant 1.$$

On obtient que

$$(-\Delta)^s z = u_1^{2_s^*-1} - u_0^{2_s^*-1} \geqslant (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2} z, \qquad \text{dans } \Omega. \tag{3.45}$$

On sait que (μ_1, ψ_1) est le couple associé à la première valeur propre et la fonction propre correspondante au problème (3.40), en utilisant z comme fonction test dans (3.40) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s \psi_1 . z dx = \mu_1 \int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2} \psi_1 z dx. \tag{3.46}$$

Ensuite on multiplie (3.45) par ψ_1 et on intègre sur Ω, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s z . \psi_1 dx > \int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2} \psi_1 z dx. \tag{3.47}$$

En combinant (3.46) et (3.47) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s z . \psi_1 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s \psi_1 . z dx \\
&= \mu_1 \int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2} \psi_1 z dx \\
&> \int_\Omega (2_s^*-1)u_0^{2_s^*-2} \psi_1 z dx,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\mu_1 > 1.$$

□

Par la suite, on définit la constante suivante associée a l'injection de Sobolev fractionnaire

$$S_s := \inf_{u \in H_0^s(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy}{\|u\|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)}}. \tag{3.48}$$

Cet infimum est bien défini, strictement positif et indépendant du domaine choisi. De plus, la constante est atteinte par la famille des fonctions u_ε tel que

$$u_\varepsilon := \frac{\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{N-2s}{2}}}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{3.49}$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{2_s^*} dx = S_s^{\frac{N}{2s}}, \tag{3.50}$$

voir [33] et [62] pour plus de détails.

Maintenant, on va montrer que I satisfaisant la condition de Palais-Smaile à un niveau bien déterminé notée $(PS)_c$

Lemme 3.10 *Soit $c \in \mathbb{R}$. Si 0 est le seule point critique de I dans $H_0^s(\Omega)$, alors I satisfaisant la condition de $(PS)_c$ pour tout*

$$c < c^* = \frac{s}{N} S_s^{\frac{N}{2s}}.$$

Preuve Soit $\{v_j\}$ une suite de Palais Smale pour la fonctionnelle I définie dans (3.36), c'est à dire

$$I(v_j) \to c \text{ et } I'(v_j) \to 0 \qquad \text{dans } H^{-s}(\Omega), \tag{3.51}$$

quand $j \to +\infty$. on a

$$\frac{1}{2}\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega G(u_0, v_j)dx = c + o(1), \tag{3.52}$$

et

$$\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega g(u_0, v_j)v_j dx = o(1). \tag{3.53}$$

Soit $r_{2_s^*} = \min\{1, 2_s^* - 2\}$, on multiplie (3.52) par $(2 + r_{2_s^*})$ on obtient

$$\frac{2 + r_{2_s^*}}{2}\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} - (2 + r_{2_s^*})\int_\Omega G(u_0, v_j)dx = c(2 + r_{2_s^*}) + o(1).$$

En combinant ce résultat avec $(-1) \times$ (3.53) on a

$$c(2 + r_{2_s^*}) \geqslant \frac{r_{2_s^*}}{2}\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \int_\Omega g(u_0, v_j)v_j - (2 + r_{2_s^*})G(u_0, v_j)dx + o(1).$$

En utilisant le Lemme B.1 de la référence [57], on trouve que

$$g(u_0, v_j)v_j - (2 + r_{2_s^*})G(u_0, v_j) \geqslant -\frac{r_{2_s^*}(2_s^* - 1)}{2}u_0^{2_s^*-2}v_j^2,$$

donc

$$\begin{aligned} c(2 + r_{2_s^*}) &\geqslant \frac{r_{2_s^*}}{2}\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega g(u_0, v_j)v_j - (2 + r_{2_s^*})G(u_0, v_j)dx + o(1) \\ &\geqslant \frac{r_{2_s^*}}{2}(\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega (2_s^* - 1)u_0^{2_s^*-2}v_j^2 dx) + o(1). \end{aligned} \tag{3.54}$$

En utilisant μ_1 défini dans (3.41)

$$\int_\Omega (2_s^* - 1)u_0^{2_s^*-2}v_j^2 dx \leqslant \frac{\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)}}{\mu_1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} c(2 + r_{2_s^*}) &\geqslant \frac{r_{2_s^*}}{2}(\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{1}{\mu_1}\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)}) + o(1) \\ &\geqslant \frac{r_{2_s^*}}{2}(1 - \frac{1}{\mu_1})\|v_j\|^2_{H_0^s(\Omega)} + o(1). \end{aligned}$$

Puisque $\mu_1 > 1$, alors

$$\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} \leqslant \frac{2c(2+r_{2^*_s})}{r^*_s}(\frac{\mu_1}{\mu_1 - 1}),$$

par la suite il existe $M > 0$ tel que

$$\|v_j\|_{H^s_0(\Omega)} \leqslant M,$$

et on conclut que la suite $\{v_j\}$ est bornée dans $H^s_0(\Omega)$.
Par hypothèse on a que 0 est le seul point critique de I, donc

$$\begin{aligned} v_j &\rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } H^s_0(\Omega), \\ v_j &\to 0 \quad \text{fortement dans } L^q(\Omega),\ 1 \leqslant q < 2^*_s, \\ v_j &\to 0 \quad \text{p.p dans } \Omega. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Par le lemme de Brezis-Lieb (Théorème 1.15), on a

$$\int_\Omega |u_0 + v_j|^q dx = \int_\Omega |v_j|^q dx + \int_\Omega |u_0|^q dx + o(1), \tag{3.56}$$

pour $q = 2^*_s - 1$ ou 2^*_s. En utilisant le résultat précédent et (3.51) on obtient

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle I'(v_j), v_j \rangle \\ &= \|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \int_\Omega g(u_0, v_j) v_j dx \\ &= \|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \int_\Omega ((u_0 + v_j)^{2^*_s - 1} - u_0^{2^*_s - 1}) v_j dx \\ &= \|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \int_\Omega |v_j|^{2^*_s} dx + o(1), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} = \int_\Omega |v_j|^{2^*_s} dx + o(1). \tag{3.57}$$

D'un autre coté, de (3.51), (3.55) et (3.56) on a

$$\begin{aligned} o(1) + c = I(v_j) &= \frac{1}{2}\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \int_\Omega G(u_0, v_j) dx \\ &= \frac{1}{2}\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{1}{2^*_s}\int_\Omega ((u_0 + v_j)^{2^*_s} - u_0^{2^*_s}) dx - \int_\Omega u_0^{2^* s - 1} v_j dx \\ &= \frac{1}{2}\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{1}{2^*_s}\int_\Omega |v_j|^{2^*_s} dx + o(1). \end{aligned} \tag{3.58}$$

En combinant (3.57) et (3.58) on trouve

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{1}{2^*_s}\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} + o(1) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_s})\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} + o(1) \\ &= \frac{s}{N}\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} + o(1), \end{aligned} \tag{3.59}$$

ce qui implique

$$\frac{s}{N}\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} \leqslant c. \tag{3.60}$$

En outre, on sait que la suite $\{v_j\}$ est bornée donc on peut supposer qu'il existe un $L \geqslant 0$ tel que

$$\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} \longrightarrow L,$$

de (3.57), on a aussi

$$\|v_j\|^{2^*_s}_{L^{2^*_s}(\Omega)} \longrightarrow L.$$

Par (3.48) on a

$$\|v_j\|^2_{H^s_0(\Omega)} \geqslant S_s\|v_j\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)},$$

et quand $j \longrightarrow \infty$ on obtient

$$L \geqslant S_s L^{\frac{2}{2^*_s}}.$$

Alors, on a soit $L = 0$ ou bien $L \geqslant S_s^{\frac{N}{2s}}$.
On suppose que $L \geqslant S_s^{\frac{N}{2s}}$ est vraie, (3.60) donne

$$c \geqslant \frac{s}{N}L \geqslant \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}.$$

Contradiction avec le fait que $c < \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}$, ainsi $L = 0$.
Par conséquent

$$\|v_j\| \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans} \quad H^s_0(\Omega).$$

Alors on déduit que I satisfaisant la condition de $(PS)_c$ pour tout $c < c^*$.

□

Maintenant, on peut montrer que le sup de la fonctionnelle I reste inférieur à la valeur c^*. Pour cela on suppose sans perte de généralité que $0 \in \Omega$ et on considère la fonction $\phi_0 \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ tel que

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{if } \ t \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.61}$$

On pose $\phi(x) = \phi_r(x) = \phi_0(\frac{|x|}{r})$, pour un r suffisamment petit pour que $\bar{B}_r \subset \Omega$, avec u_ε défini dans (3.49), on note que $\phi u_\varepsilon \in H^s_0(\Omega)$.

On a les estimations suivantes

Lemme 3.11 *[10], [62] Soit $s \in (0,1)$, $N > 2s$, alors les estimations suivantes tiennent*

$$\|\phi u_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} \leqslant S_s^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^{N-2s}). \tag{3.62}$$

$$\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \begin{cases} C\varepsilon^{2s} + O(\varepsilon^{N-2s}) & N > 4s \\ C\varepsilon^{2s}|\log(\varepsilon)| + O(\varepsilon^{2s}) & N = 4s. \\ C\varepsilon^{N-2s} + O(\varepsilon^{2s}) & N < 4s \end{cases} \tag{3.63}$$

$$\|\phi u_\varepsilon\|^{2^*_s}_{L^{2^*_s}(\Omega)} \leqslant S^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^N). \tag{3.64}$$

$$\|\phi u_\varepsilon\|^{2^*_s-1}_{L^{2^*_s-1}(\Omega)} \geqslant C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}. \tag{3.65}$$

La démonstration de ce lemme est faite en Annexe.

On définit la famille de fonctions

$$w_\varepsilon = \frac{\phi u_\varepsilon}{\|\phi u_\varepsilon\|_{L^{2^*_s}(\Omega)}} \in H^s_0(\Omega),$$

telle que

$$\|w_\varepsilon\|_{L^{2^*_s}(\Omega)} = 1.$$

Grâce aux précédentes estimations on peut établir le lemme suivant :

Lemme 3.12 *Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que*

$$\sup_{t \geqslant 0} I(tw_\varepsilon) < c^*.$$

Preuve Pour la démonstration on a besoin de l'inégalité algébrique suivante

$$(a+b)^p \geqslant a^p + b^p + \bar{\mu} a^{p-1} b, \quad a, b \geqslant 0, p > 1, \bar{\mu} > 0. \tag{3.66}$$

De (3.35) on a

$$\begin{aligned} g(x,t) &\geqslant t^{2^*_s-1} + \bar{\mu} u_0^{2^*_s-2} t & \text{pour } t > 0 \\ G(x,t) &\geqslant \frac{1}{2^*_s} t^{2^*_s} + \frac{\bar{\mu}}{2} t^2 u_0^{2^*_s-2} & \text{pour } t > 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I(tw_\varepsilon) &= \frac{1}{2} t^2 \|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \int_\Omega G(x, tw_\varepsilon) dx \\ &\leqslant \frac{1}{2} t^2 \|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{t^{2^*_s}}{2^*_s} \|w_\varepsilon\|^{2^*_s}_{L^{2^*_s}(\Omega)} - \frac{\bar{\mu} t^2}{2} \int_\Omega u_0^{2^*_s-2} w_\varepsilon^2 dx, \end{aligned} \tag{3.67}$$

comme $\|w_\varepsilon\|_{L^{2^*_s}(\Omega)} = 1$ et le fait que $u_0 \geqslant \bar{\alpha} > 0$ dans $supp(w_\varepsilon)$ alors

$$I(tw_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2} t^2 \|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{t^{2^*_s}}{2^*_s} - \bar{\mu}\alpha \frac{t^2}{2} \|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} := \bar{E}(t).$$

On remarque que $\lim_{t\to+\infty} \bar{E}(t) = -\infty$, par suite $\sup_{t\geqslant 0} \bar{E}(t)$ est atteint par un certain $t_\varepsilon > 0$, ainsi $\sup_{t\geqslant 0} I(tw_\varepsilon)$ est atteint.
En dérivant la fonction $\bar{E}(t)$ on obtient

$$\bar{E}'(t) = t\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - t^{2^*_s-1} - \bar{\mu}\alpha t\|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)},$$

Si

$$\bar{E}'(t_\varepsilon) = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} t_\varepsilon^{2^*_s-1} &= t_\varepsilon\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \mu\alpha t_\varepsilon\|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)},\\ &\leqslant t_\varepsilon\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$t_\varepsilon \leqslant (\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)})^{\frac{1}{2^*_s-2}}.$$

La fonction $t \longrightarrow \frac{t^2}{2}\|w_\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*_s}}{2^*_s}$ est croissante sur l'intervalle $[0, \|w_\varepsilon\|^{\frac{2}{2^*_s}}_{H^s_0(\Omega)}]$, donc

$$\begin{aligned} \sup_{t\geqslant 0} I(tw_\varepsilon) = I(t_\varepsilon w_\varepsilon) &\leqslant \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{t_\varepsilon^{2^*_s}}{2^*_s} - \mu\alpha\frac{t_\varepsilon^2}{2}\|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)})^{\frac{N}{2s}} - \frac{1}{2^*_s}(\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)})^{\frac{N}{2s}} - \widetilde{C}\|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \frac{s}{N}(\|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)})^{\frac{N}{2s}} - \widetilde{C}\|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.68}$$

avec $\widetilde{C} > 0$.
Notons que $\|u_\varepsilon\|_{L^{2^*_s}(\Omega)}$ est indépendante de ε, par (3.62) on a

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} = \frac{\|\phi u_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)}}{\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)}} &\leqslant \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}{\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^{2^*_s}(\Omega)}} + O(\varepsilon^{N-2s})\\ &\leqslant S_s + O(\varepsilon^{N-2s}), \end{aligned} \tag{3.69}$$

D'aprés l'estimation (3.63) on a

$$\|w_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \begin{cases} C\varepsilon^{2s} & \text{if } N > 4s\\ C\varepsilon^{2s}|\log(\varepsilon)| & \text{if } N = 4s. \end{cases} \tag{3.70}$$

Par conséquent, à partir de (3.68), (3.69) et (3.70), nous distinguons les cas suivants,
• Si **N>4s**

$$\begin{aligned} \sup_{t\geqslant 0} I(tw_\varepsilon) &\leqslant \frac{s}{N}\Big(S_s + C\varepsilon^{N-2s}\Big)^{\frac{N}{2s}} - \widetilde{C}\varepsilon^{2s}\\ &\leqslant \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}} + C\varepsilon^{N-2s} - \widetilde{C}\varepsilon^{2s}\\ &< \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

• Si **N=4s**, on a

$$\begin{aligned}\sup_{t\geqslant 0} I(tw_\varepsilon) &\leqslant \frac{s}{N}\Big(S_s + C\varepsilon^{N-2s}\Big)^{\frac{N}{2s}} - \widetilde{C}\varepsilon^{2s}|\log(\varepsilon)| \\ &< \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}} = c^*. \end{aligned} \tag{3.72}$$

• Si **2s<N<4s**, en utilisant (3.66) encore une fois, on obtient

$$\begin{aligned} g(x,t) &\geqslant t^{2_s^*-1} + \bar{\mu}t^{2_s^*-2}u_0 \qquad t>0 \\ G(x,t) &\geqslant \frac{1}{2_s^*}t^{2_s^*} + \frac{\bar{\mu}}{2_s^*-1}t^{2_s^*-1}u_0 \quad t>0. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sup_{t\geqslant 0} I(tw_\varepsilon) = I(tw_\varepsilon) &\leqslant \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{t_\varepsilon^{2_s^*}}{2_s^*} - \frac{\mu\alpha}{2_s^*-1}t^{2_s^*-1}\|w_\varepsilon\|^{2_s^*-1}_{L^{2_s^*-1}(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{s}{N}(\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^s(\Omega)})^{\frac{N}{2s}} - \widetilde{C}\|w_\varepsilon\|^{2_s^*-1}_{L^{2_s^*-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

A partir de (3.65) et en suivant les mêmes étapes que précédemment, on obtient.

$$\begin{aligned}\sup_{t\geqslant 0} I(tw_\varepsilon) &\leqslant \frac{s}{N}\Big(S_s^{\frac{N}{2s}} - C\varepsilon^{N-2s}\Big) - \widetilde{C}\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}} \\ &< \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}} = c^*. \end{aligned}$$

□

Preuve de Théorème 3.2 D'après ce qui précède, on définit

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in C([0,1], H_0^s(\Omega)) : \quad \gamma(0)=0, \gamma(1)=Mw_\varepsilon\},$$

et

$$c_\varepsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} I(\gamma(t)).$$

où M et une constante strictement positive.

On a

$$\begin{aligned} I(tw_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\|tw_\varepsilon\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega G(u_0, tw_\varepsilon)dx \\ &= \frac{1}{2}\|tw_\varepsilon\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \int_\Omega \Big(\frac{1}{2_s^*}(u_0+tw_\varepsilon)^{2_s^*} - \frac{1}{2_s^*}u_0^{2_s^*} - tu_0^{2_s^*-1}w_\varepsilon\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\|tw_\varepsilon\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega (u_0+tw_\varepsilon)^{2_s^*}dx + t\int_\Omega u_0^{2_s^*-1}w_\varepsilon dx + \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega u_0^{2_s^*}dx. \end{aligned}$$

En utilisant (3.66) on obtient

$$\begin{aligned} I(tw_\varepsilon) &\leqslant \frac{1}{2}\|tw_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{1}{2^*_s}\int_\Omega (u_0^{2^*_s} + t^{2^*_s} w_\varepsilon^{2^*_s} + \bar{\mu} t u_0^{2^*_s-1} w_\varepsilon) dx \\ &+ t\int_\Omega u_0^{2^*_s-1} w_\varepsilon dx + \frac{1}{2^*_s}\int_\Omega u_0^{2^*_s} dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|tw_\varepsilon\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{1}{2^*_s} t^{2^*_s}\int_\Omega |w_\varepsilon|^{2^*_s} dx - (\frac{1}{2^*_s}\bar{\mu} - 1)t\int_\Omega u_0^{2^*_s-1} w_\varepsilon dx. \quad (3.74) \end{aligned}$$

Puisque $2^*_s > 2$ si t tend vers $+\infty$ dans (3.74) on trouve

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} I(tw_\varepsilon) = -\infty.$$

Pour $M > 0$ assez grand on a

$$I(Mw_\varepsilon) < I(0) = 0, \quad (3.75)$$

du Lemme 3.7 et pour $\|v\|_{H^s_0(\Omega)} < \varepsilon$ on obtient

$$I(v) \geqslant I(0) = 0. \quad (3.76)$$

Il s'ensuit que

$$c_\varepsilon \geqslant I(0). \quad (3.77)$$

Ainsi, par (3.74) et (3.75)

$$c_\varepsilon \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} I(\gamma(t)) \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} I(tMw_\varepsilon). \quad (3.78)$$

En choisissant $\theta = tM \geqslant 0$, le Lemme 3.12 nous donne

$$I(0) \leqslant c_\varepsilon \leqslant \sup_{\theta\geqslant 0} I(\theta w_\varepsilon) < c^*.$$

Pour terminer avec ce qui précède :
• Si $I(v) = c_\varepsilon > I(0) = 0$, alors v est un point critique non trivial de I.
• Si $I(v) = c_\varepsilon = I(0) = 0$, en utilisant le même raisonnement que dans [5] alors il existe un point critique non trivial de I. Comme hypothèse dans Lemme 3.10 on a que 0 est le seule point critique de la fonctionnelle I, cela nous donne une contradiction.

En conclusion, v est une solution non trivial de (3.34). En outre $u = u_0 + v$ est une deuxième solution strictement positive du problème (3.1) différente de la première solution u_0.

□

3.4 Problème sur-critique

Voyons maintenant ce qui se passe quand Ω est un domaine étoilé par rapport à l'origine avec une croissance sur critique i.e. $q > 2_s^* - 1 = \frac{N+2s}{N-2s}$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 3.3 *Supposons que $q > \frac{N+2s}{N-2s}$, Ω un domaine étoilé par rapport à l'origine et $f \in C^1(\bar{\Omega})\backslash\{0\}$. Alors,*
il existe λ_0 un réel strictement positif tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ le problème (3.1) admet au moins une solution strictement positive si et seulement si f satisfaisant la condition (H_1).

Avant de commencer la démonstration de ce résultat, établissons la propriété suivante

Proposition 3.2 *Supposons que $q > \frac{N+2s}{N-2s}$ et Ω un domaine étoilé. Alors, toute solution strictement positive v_λ du problème (3.1) vérifiant*

$$\|v_\lambda\|_{H_0^s(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

quand $\lambda \to 0$.

Pour prouver cette propriété on a besoin des lemmes suivants

Lemme 3.13 *Pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, il existe une constante $M > 0$ tel que le problème (3.1) possède au plus une solution strictement positive satisfaisant*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M.$$

Preuve Soit λ_1 la première valeur propre bu problème (3.4). Choisissons $M > 0$ assez petit tel que

$$qM^{q-1} < \lambda_1,$$

avec $q > \frac{N+2s}{N-2s}$.
En raisonnant par l'absurde, tel que on suppose que le problème (3.1) admet une

deuxième solution de la forme $v = u_\lambda + z$ où u_λ est la solution minimale du problème (3.1) et z vérifiant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s z = (u_\lambda + z)^q - u_\lambda^q & \text{dans } \Omega, \\ z > 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.79}$$

Ainsi, v satisfaisant

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M.$$

On multiplie l'équation du problème (3.79) par z on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s z.z dx = \int_\Omega ((u_\lambda + z)^q - u_\lambda^q).z dx,$$

il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} z)^2 dx = \int_\Omega ((u_\lambda + z)^q - u_\lambda^q).z dx.$$

En appliquant l'inégalité suivante

$$a^q - b^q \leqslant q a^{q-1}(a-b) \qquad \text{pour } 0 < b < a,$$

on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} z)^2 dx \leqslant q \int_\Omega (u_\lambda + z)^{q-1} z^2 dx. \tag{3.80}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} z)^2 dx \geqslant \lambda_1 \int_\Omega z^2 dx. \tag{3.81}$$

En combinant (3.80) et (3.81) on obtient

$$\lambda_1 \int_\Omega z^2 dx \leqslant q \int_\Omega (u_\lambda + z)^{q-1} z^2 dx.$$

Puisque $v = u_\lambda + z$, alors

$$\lambda_1 \int_\Omega z^2 dx \leqslant q \|v\|_\infty^{q-1} \int_\Omega z^2 dx.$$

Ce qui implique

$$\lambda_1 \int_\Omega z^2 dx \leqslant q M^{q-1} \int_\Omega z^2 dx. \tag{3.82}$$

Par hypothèse on a $qM^{q-1} < \lambda_1$, donc (3.82) donne que $z = 0$. Contradiction avec le fait que $z > 0$.
Par conséquent, le problème (3.1) admet au plus une solution strictement positive u qui satisfait

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M.$$

□

Lemme 3.14 *[68] Soit Ω un domaine borné et $C^{1,1}$, régulier et g une fonction localement Lipschitzienne. Si u une solution bornée vérifiant*

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u = g(u) & \textit{dans } \Omega,\\ u = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega.\end{cases}$$

Notons $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$. Alors, on a

$$\frac{u}{\delta^s}|_{\Omega} \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \textit{ pour } \alpha \in (0,1).$$

De plus, on a l'identité suivante :

$$\Gamma(1+s)^2 \int_{\partial\Omega} (\frac{v}{\delta^s})^2 (x.\nu) d\sigma = 2N \int_{\Omega} G(v)dx - (N-2s)\int_{\Omega} vg(v)dx,$$

où $G(v) = \int_0^v g(t)dt$, ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$ en x et Γ est la fonction Gamma.

Preuve de la Proposition 3.2 Soit v_λ solution du problème (3.1), on pose $v_\lambda = \lambda w_\lambda$ donc

$$\begin{cases}(-\Delta)^s v_\lambda = (-\Delta)^s(\lambda w_\lambda) = \lambda^q w_\lambda^q + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega,\\ v_\lambda = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega.\end{cases}$$

Alors, w_λ vérifie

$$\begin{cases}(-\Delta)^s w_\lambda = \lambda^{q-1} w_\lambda^q + f(x) & \text{dans } \Omega,\\ w_\lambda = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\Omega.\end{cases} \tag{3.83}$$

En utilisant le Lemme 3.14 on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(1+s)^2 \int_{\partial\Omega} (\frac{w_\lambda}{\delta^s})^2 (x.\nu) d\sigma &= 2N\frac{\lambda^{q-1}}{q+1}\int_\Omega w_\lambda^{q+1}dx + 2N\int_\Omega f(x)w_\lambda \\ &\quad -(N-2s)\int_\Omega w_\lambda(\lambda^{q-1}w_\lambda^q + f(x))dx \\ &= (\frac{2N}{q+1} - (N-2s))\lambda^{q-1}\int_\Omega w_\lambda^{q+1}dx \\ &\quad +(N+2s)\int_\Omega f(x)w_\lambda dx.\end{aligned}$$

Comme Ω est étoilé par rapport à l'origine, on a

$$\Gamma(1+s)^2 \int_{\partial\Omega} (\frac{w_\lambda}{\delta^s})^2 (x.\nu) d\sigma \geqslant 0,$$

donc

$$(N+2s)\int_\Omega f(x)w_\lambda dx \geqslant \underbrace{((N-2S) - \frac{2N}{q+1})}_{C} \lambda^{q-1}\int_\Omega w_\lambda^{q+1}dx. \tag{3.84}$$

Puisque $q > \frac{N+2s}{N-2s}$ on a $C > 0$ et par (3.84), on trouve

$$\lambda^{q-1} \int_{\Omega} w_{\lambda}^{q+1} dx \leqslant \frac{1}{C}(N+2s) \int_{\Omega} f(x) w_{\lambda} dx. \tag{3.85}$$

De (3.83), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_{\lambda}|^2 dx = \lambda^{q-1} \int_{\Omega} w_{\lambda}^{q+1} dx + \int_{\Omega} f(x) w_{\lambda} dx, \tag{3.86}$$

combinant ceci avec (3.85) nous donne

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_{\lambda}|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) w_{\lambda} dx \leqslant \frac{1}{C}(N+2s) \int_{\Omega} f(x) w_{\lambda} dx \\ \Rightarrow \quad & \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_{\lambda}|^2 dx \leqslant (1 + \frac{N+2s}{C}) \int_{\Omega} f(x) w_{\lambda} dx. \end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante strictement positive C_1 indépendant de λ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_{\lambda}|^2 dx \leqslant C_1, \tag{3.87}$$

de plus on a

$$\|v_{\lambda}\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \lambda^2 \|w_{\lambda}\|^2_{H_0^s(\Omega)}.$$

Par conséquent

$$\|v_{\lambda}\|_{H_0^s(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0. \tag{3.88}$$

$\square$

Preuve du Théorème 3.3 On a déjà prouvé dans le Lemme 3.2 que pour λ assez petit et si f satisfaisant la condition(H_1), alors le problème (3.1) admet une solution strictement positive. Ainsi, le premier coté de l'équivalence est démontré.

Maintenant, on veut montrer que la condition (H_1) est nécessaire, c'est à dire, si $q > 2_s^* - 1$, le domaine étoilé et pour un λ assez petit le problème (3.1) a une solution strictement positive alors f satisfaisant la condition (H_1).

Soit u_{λ} une solution du problème (3.1) pour λ suffisamment petit, on pose $u_{\lambda} = \lambda w_{\lambda}$ donc

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_{\lambda} = \lambda^q w_{\lambda}^q + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u_{\lambda} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w_{\lambda} = \lambda^{q-1} w_{\lambda}^q + f(x) & \text{dans } \Omega, \\ w_{\lambda} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.89}$$

En procédant de la même manière que dans la preuve de la Proposition 3.2 , on conclut l'existence des constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de λ tels que

$$\int_\Omega w_\lambda^{q+1} dx \leqslant C_1 \frac{N+2s}{\lambda^{q-1}},$$

et

$$\|w_\lambda\|_{H_0^s(\Omega)} \leqslant C_2.$$

Ainsi, on peut extraire une sous-suite, encore notée par w_λ telle que

$$w_\lambda \rightharpoonup w \quad \text{faiblement dans} \quad H_0^s(\Omega), \tag{3.90}$$

quand $\lambda \to 0$.
Par conséquent, quand $\lambda \to 0$ et pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_\lambda . (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \psi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w . (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \psi dx. \tag{3.91}$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_\lambda^q . \psi dx &\leqslant \|w_\lambda\|^q_{L^{q+1}(\Omega)} . \|\psi\|_{L^{\frac{q+1}{q}}} \\ &\leqslant \left(\frac{C}{\lambda}\right)^{q\frac{q+1}{q-1}}. \end{aligned}$$

Donc, quand $\lambda \to 0$ on trouve

$$\lambda^{q-1} \int_\Omega w_\lambda^q . \psi dx \to 0. \tag{3.92}$$

D'après le problème (3.1) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s w_\lambda . \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w_\lambda . (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \psi dx \tag{3.93}$$

$$= \lambda^{q-1} \int_\Omega w_\lambda . \psi dx + \int_\Omega f(x) . \psi dx. \tag{3.94}$$

En tenant compte de (3.91), (3.92) et en faisant tendre λ vers 0 dans (3.93) on conclut que pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w . (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s w . \psi dx = \int_\Omega f(x) . \psi dx. \tag{3.95}$$

On déduit que w est une solution faible du problème (3.3). De plus le fait que $w_\lambda > 0$ pour $\lambda > 0$ nous donne que $w > 0$ alors

$$w(x) = \int_\Omega \mathcal{G}(x,t) f(t) dt = \int_\Omega \mathcal{G}(x,t) \Big(f^+(t) - f^-(t) \Big) d > 0,$$

donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_\Omega \mathcal{G}(x,t) \Big(f^+(t) - (1+\varepsilon) f^-(t) \Big) dt > 0,$$

alors la condition (H_1) est vérifiée.

$\square$

Chapitre 4

Problème critique impliquant le p-Laplacien fractionnaire

Ce chapitre est le développement de l'article [58].

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on généralise les résultats du chapitre 3 pour le p-Laplacien fractionnaire. On considère le problème elliptique suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = |u|^{p_s^*-2}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N > sp$, $s \in (0,1)$, $p \in (1,+\infty)$, λ est un paramètre, $p_s^* = \frac{Np}{N-sp}$ est l'exposant critique de Sobolev fractionnaire et f une fonction de $C^1(\bar{\Omega})\backslash\{0\}$ qui change de signe qui sera spécifiée ultérieurement.

Les problèmes fractionnaires ont été largement étudiés. Nous référons le lecteur aux articles [15, 29, 48, 50, 56, 60].

Motivés par ce type de problèmes et inspirés par [28, 36]. Nous étudions le problème (4.1) avec $p \neq 2$ et nous prouvons l'existence de multiples solutions positives malgré que la fonction f change de signe.

On décompose ce chapitre en deux sections.
Dans la section 4.3, en tenant compte les résultats obtenues dans le chapitre 2 et en utilisant la méthode de sous et sur solution, on montre l'existence d'une solution minimale positive à énergie négative.

Dans la deuxième section 4.4, on cherche une seconde solution du problème (4.1), positive et distincte de la première, en utilisant le théorème du Col avec la condition de Palais-Smale locale.

4.2 Le cadre fonctionnel

On utilise la notation suivante

$$\|u\| := \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \Big(\int_{\mathcal{Q}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

où $\mathcal{Q} = (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)\backslash(\mathcal{C}_\Omega \times \mathcal{C}_\Omega)$ et $\mathcal{C}_\Omega = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$.

On définit l'opérateur p-Laplacien fractionnaire $(-\Delta)_p^s u$ par

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy, \;\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Cet opérateur n'est rien d'autre que le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ pour $p = 2$.

Définition 4.1 *On dit que $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution faible du problème (4.1) si pour tout $\psi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on a*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\ = & \int_\Omega |u|^{p_s^*-2} u\psi dx + \lambda \int_\Omega f(x)\psi dx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (4.1) est définie par

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p_s^*}\int_\Omega |u(x)|^{p_s^*} dx - \lambda \int_\Omega f(x)u(x)dx. \tag{4.3}$$

Notons que $\mathcal{J}_{\lambda,p} \in C^1(W_0^{s,p}(\Omega), \mathbb{R})$. De plus, les points critiques de cette fonctionnelle sont les solutions faibles du problème (4.1).

4.3 Résultat d'existence et de non existence

Dans cette section on montre que l'existence et la non existence de solutions positives du problème (4.1) dépend de la position du paramètre λ. Avant d'introduire nos résultats, faisons quelques commentaires. Nous rappelons l'hypothèse (H_2) :
(H_2) : $f^+ \not\equiv 0$ et $f^- \not\equiv 0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Big(f^+ - (1+\varepsilon)f^-\Big) \in \mathcal{A},$$

où $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ et

$$\mathcal{A} := \Big\{h \in L^\infty(\Omega) : S(h)(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in \Omega\Big\}.$$

$S(f^+ - (1+\varepsilon)f^-)$ est une solution positive du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f^+(x) - (1+\varepsilon)f^-(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

Grâce à cette hypothèse le problème

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \ f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

admet une solution positive z_0 (d'après le Théorème 2.4 pour $\gamma = 1$ et $\mu = 1$).
On remarque que le problème (4.5) admet comme sous solution $\underline{u} = v_0$ où v_0 est une solution positive du problème (4.4)

et comme sur solution $\bar{u} = v_1$ où v_1 est une solution positive du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s v_1 = f^+(x) + f^-(x) = |f(x)| & \text{dans } \Omega, \\ v_1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Le principe de comparaison nous assure que $v_0 \leqslant v_1$, par conséquent $0 \leqslant v_1 \leqslant z_0 \leqslant v_1$ p.p. dans Ω. Ce qu'on peut retenir de ceci est que si la partie positive, d'une fonction qui change signe, est supérieure à la partie négative de la fonction (on peut voir ceci graphiquement) on assure l'existence d'une solution positive.

Un exemple d'une fonction f qui change de signe est $f(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) m(x)$, où $m(x) \in L^\infty(\Omega)$ tel que $m^+(x) \neq 0$ et $m^-(x) \neq 0$, λ_1 est la première valeur propre du problème $(-\Delta)_p^s u = \lambda m(x) u$, avec la condition de Dirichlet au bord et $\varphi_1(x) > 0$ est la fonction propre associée. Cette dernière est solution du problème (4.5).

Le théorème principal de cette section est le suivant

Théorème 4.1 *Soit $f \in C^1(\bar{\Omega}) \backslash \{0\}$ satisfaisant la condition (H_2). Alors, il existe un réel $\Lambda^* > 0$ tel que le problème (4.1) :*
- *admet une solution minimale positive u_1 pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ avec $\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) < 0$.*
- *n'a aucune solution positive pour $\lambda > \Lambda^*$.*

D'abord on définit Λ^* comme suit

$$\Lambda^* := \sup \{\lambda > 0 : \quad \text{le problème (4.1) admet une solution } \}. \tag{4.6}$$

La preuve du théorème principal sera diviser en plusieurs résultats auxiliaires. On commence par le lemme suivant

Lemme 4.1 *Il existe un $\Lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ le problème (4.1) admet une solution positive .*

Preuve Dans cette preuve on utilise la méthode de sous et sur solution.
On pose $\underline{z} = \lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0$ avec z_0 est la solution positive de (4.5), alors on obtient que $\underline{z}$ est une solution de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p \underline{z} = \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{z} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

et on a

$$\lambda f(x) \leqslant \underline{z}^{p^*_s - 1} + \lambda f(x).$$

Cela nous donne que $\underline{z}$ est une sous solution de (4.1). Ensuite, on cherche une sur solution, on considère z_1 l'unique solution positive du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p z_1 = 1 & \text{dans } \Omega, \\ z_1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

z_1 est continue jusqu'au bord. On pose $\bar{z} = m^{\frac{1}{p-1}} z_1$ avec m assez petit. Donc, $\bar{z}$ satisfait

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p \bar{z} = m & \text{dans } \Omega, \\ \bar{z} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

On a l'existence d'un réel strictement positif λ_* tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$ l'inégalité suivante

$$m \geqslant m^{\frac{p^*_s - 1}{p-1}} \max_{x \in \Omega} z_1^{p^*_s - 1}(x) + \lambda \max_{x \in \Omega} |f(x)|, \tag{4.10}$$

est vérifiée pour un certain $m > 0$. D'après ce qui précède on obtient

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s_p \bar{z} = m &\geqslant m^{\frac{p^*_s - 1}{p-1}} \max_{x \in \Omega} z_1^{p^*_s - 1}(x) + \lambda \max_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &\geqslant m^{\frac{p^*_s - 1}{p-1}} z_1^{p^*_s - 1}(x) + \lambda \max_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &\geqslant (m^{\frac{1}{p-1}} z_1)^{p^*_s - 1}(x) + \lambda f(x), \end{aligned} \tag{4.11}$$

ce qui implique

$$(-\Delta)^s_p \bar{z} \geqslant (\bar{z})^{p^*_s - 1}(x) + \lambda f(x).$$

De plus, on a $\bar{z} = m^{\frac{1}{p-1}} z_1 > 0$ dans Ω et $\bar{z} > 0$ dans $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. On déduit que $\bar{z}$ est une sur solution du problème (4.1). Ensuite on choisit le paramètre λ tel qu'on ait

$$\underline{z} = \lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0 \leqslant \bar{z} = m^{\frac{1}{p-1}} z_1.$$

En utilisant (4.7), (4.9) et (4.10) on trouve que

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s_p \bar{z} = m &\geqslant m^{\frac{p^*_s - 1}{p-1}} \max_{x \in \Omega} z_1^{p^*_s - 1}(x) + \lambda \max_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &\geqslant \lambda \max_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &\geqslant \lambda f(x) = (-\Delta)^s_p \underline{z}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$. Par le principe de comparaison on obtient que

$$\underline{z} = \lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0 \leqslant m^{\frac{1}{p-1}} z_1 = \bar{z},$$

pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$.
On utilise la méthode de sous et sur solution on obtient une solution positive u_1 du (4.1) pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$ tel que $\underline{z} \leqslant u_1 \leqslant \bar{z}$.

□

Par la suite on montre :

Lemme 4.2 *On a*

$$0 < \Lambda^* < +\infty.$$

Preuve Du Lemme 4.1 on a que $\Lambda^* > 0$.

Maintenant on veut montrer que $\Lambda^* < +\infty$. On considère $\lambda > 0$ tel que le problème (4.1) admet une solution positive $\bar{u}_1$. Soit $\underline{z} = \lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0$ est la sous solution de (4.1) , avec z_0 est la solution positive de (4.5). Par le principe de comparaison on a $\underline{z} \leqslant \bar{u}_1$.
Soit $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tel que $supp(\varphi) \subset supp(f^+)$ avec $f^+ \not\equiv 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité de Picone fractionnaire (Théorème 1.18), on a

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^p &\geqslant 2\int_\Omega \frac{(-\Delta)_p^s(\bar{u}_1 + \frac{1}{n})\varphi^p}{(\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p-1}} dx \\ &\geqslant 2\int_\Omega \frac{\Big((\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p_s^*-1} + \lambda f(x)\Big)\varphi^p}{(\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p-1}} dx \\ &\geqslant 2\int_\Omega (\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p_s^*-p}\varphi^p dx + 2\lambda\int_\Omega \frac{f(x)\varphi^p}{(\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p-1}} dx, \end{aligned} \tag{4.13}$$

car $\lambda > 0$, $supp(\varphi) \subset supp(f^+)$ et $f^+ \not\equiv 0$, alors

$$\lambda \int_\Omega \frac{f(x)\varphi^p}{(\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p-1}} dx \geqslant 0.$$

Il s'ensuit que

$$\|\varphi\|^p \geqslant 2\int_\Omega (\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p_s^*-p}\varphi^p dx,$$

en faisant tendre n vers $+\infty$ et en appliquant le lemme de Fatou (Lemme 1.4), on obtient

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^p &\geqslant 2\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega (\bar{u}_1 + \frac{1}{n})^{p_s^*-p}\varphi^p dx \\ &\geqslant \int_\Omega \bar{u}_1^{p_s^*-p}\varphi^p dx \\ &\geqslant \int_\Omega \underline{z}^{p_s^*-p}\varphi^p dx \\ &\geqslant \lambda^{\frac{p_s^*-p}{p-1}} \int_\Omega z_0^{p_s^*-p}\varphi^p dx. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\lambda \leqslant \left(\frac{\|\varphi\|^p}{\int_\Omega z_0^{p_s^*-p} \varphi^p dx} \right)^{\frac{p-1}{p_s^*-p}} = \bar{\Lambda}.$$

On déduit que

$$\Lambda^* \leqslant \bar{\Lambda} < +\infty.$$

Par conséquent on a que

$$0 < \Lambda^* < +\infty.$$

Donc on peut conclure le deuxième point du Théorème 4.1.

□

On continue à montrer le Théorème 4.1. D'abord on montre le premier point, tel qu'on considère deux lemmes.
Dans le premier on montre que le problème (4.1) admet une solution minimale avec une propriété concernant cette solution

Lemme 4.3 *Pour tout* $\lambda \in (0, \Lambda^*)$, *le problème* (4.1) *a une solution minimale* u_1 *vérifiant*

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \qquad \textit{quand } \lambda \to 0. \tag{4.14}$$

Preuve D'abord, on prend $v_\lambda = \lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0$ comme sous solution de (4.1) où z_0 est la solution positive du problème (4.5). En outre, on considère $v_{\bar{m}} = \bar{m}^{\frac{1}{p-1}} z_1$ comme sur solution du problème (4.1) avec z_1 est la solution du problème (4.8) et $\bar{m}$ satisfaisant

$$\bar{m} \geqslant \bar{m}^{\frac{p_s^*-1}{p-1}} \max_{x\in\Omega} z_1^{p_s^*-1}(x) + \lambda \max_{x\in\Omega} |f(x)|, \tag{4.15}$$

pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$ avec λ_* assez petit. En plus

$$\bar{m}^{\frac{1}{p-1}} \max_{x\in\Omega} z_1(x) < \epsilon, \text{ pour tout } \epsilon > 0 \text{ assez petit.} \tag{4.16}$$

Par ailleurs, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$ on ait

$$\lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0 \leqslant \bar{m}^{\frac{1}{p-1}} z_1. \tag{4.17}$$

En utilisant la méthode de sous et sur solution on obtient que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$, le problème (4.1) admet une solution w_λ tel que $v_\lambda \leqslant w_\lambda \leqslant v_{\bar{m}}$.

On définit une suite $\{w_n\}$ par

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s w_n = w_{n-1}^{p_s^*-1} + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \quad \text{et} \quad w_0 = v_\lambda. \tag{4.18}$$

En raisonnant par récurrence et en utilisant le principe de comparaison on a

$$w_0 \leqslant \ldots \leqslant w_n \leqslant w_\lambda,$$

alors

$$v_\lambda \leqslant \ldots \leqslant w_n \leqslant w_\lambda. \tag{4.19}$$

On multiplie (4.18) par w_n, puis on intègre sur Ω on obtient

$$\|w_n\| \leqslant \|w_\lambda\|.$$

Puisque w_λ est une solution de (4.1) alors la suite $\{w_n\}$ est bornée dans $W_0^{s,p}(\Omega)$ ce qui nous donne l'existence de $u_1 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tel que

$$w_n \nearrow u_1 \qquad \text{p.p dans } \Omega. \tag{4.20}$$

De plus par (4.19) on a $u_1 \leqslant w_\lambda$.
Ensuite, soit $\xi \in W_0^{s,p}(\Omega)$. En utilisant ξ comme fonction test dans (4.18) on trouve

$$\int_\Omega (-\Delta)_p^s w_n.\xi dx = \int_\Omega w_{n-1}^{p_s^*-1}.\xi dx + \lambda \int_\Omega f(x).\xi dx$$

On fait tendre n vers $+\infty$. Par la convergence faible et le théorème de convergence monotone on obtient

$$\int_\Omega (-\Delta)_p^s w_n.\xi dx \longrightarrow \int_\Omega (-\Delta)_p^s u_1.\xi dx,$$

et

$$\int_\Omega w_{n-1}^{p_s^*-1}.\xi dx + \lambda \int_\Omega f(x).\xi dx \longrightarrow \int_\Omega u_1^{p_s^*-1}.\xi dx + \lambda \int_\Omega f(x).\xi dx.$$

Alors, on déduit

$$\int_\Omega (-\Delta)_p^s u_1.\xi dx = \int_\Omega (u_1^{p_s^*-1} + \lambda \int_\Omega f(x)).\xi dx. \tag{4.21}$$

En utilisant le fait que $u_1 \leqslant w_\lambda$, on conclut que u_1 est une solution minimale.

Maintenant il reste à montrer que

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \qquad \text{quand } \lambda \to 0.$$

Pour cela on utilise (4.17) et le fait que u_1 est une solution minimale, alors on obtient

$$0 \leqslant v_\lambda \leqslant u_1 \leqslant w_\lambda \leqslant v_{\bar{m}} = \bar{m}^{\frac{1}{p-1}} z_1(x),$$

pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$. De (4.16), il s'ensuit que

$$0 \leqslant u_1 \leqslant \bar{m}^{\frac{1}{p-1}} z_1(x) \leqslant \bar{m}^{\frac{1}{p-1}} \max_{x\in\Omega} z_1(x) \leqslant \epsilon,$$

pour tout $\epsilon > 0$ assez petit.
Par la définition de Λ^*, on déduit que pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ le problème (4.1) admet une solution minimale positive te que

$$0 \leqslant u_1 < \epsilon,$$

pour tout $\epsilon > 0$ assez petit. En conclusion, pour λ assez petit la solution u_1 converge vers 0 ce qui implique

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \qquad \text{quand } \lambda \to 0.$$

□

En dernier, montrons que la solution minimale u_1 a une énergie négative.

Lemme 4.4 *Pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ on a*

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) < 0.$$

Preuve On sait que pour tout $\lambda \in (0, \Lambda^*)$ le problème (4.1) admet une solution minimale u_1. En utilisant u_1 comme fonction test dans (4.1), on trouve

$$\|u_1\|^p = \int_\Omega u_1(x)^{p_s^*} dx + \lambda \int_\Omega f(x)u_1(x)dx,$$

ce qui implique

$$\lambda \int_\Omega f(x)u_1(x)dx = \|u_1\|^p - \int_\Omega u_1(x)^{p_s^*} dx. \tag{4.22}$$

Ensuite, on utilise la fonctionnelle d'énergie définie dans (4.3) avec la solution u_1 on a

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) = \frac{1}{p}\|u_1\|^p - \frac{1}{p_s^*}\int_\Omega u_1(x)^{p_s^*} dx - \lambda \int_\Omega f(x)u_1(x)dx. \tag{4.23}$$

En insérant (4.22) dans (4.23) on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) &= \frac{1}{p}\|u_1\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_1\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - \|u_1\|^p + \|u_1\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} \\
&= (\frac{1}{p} - 1)\|u_1\|^p + (1 - \frac{1}{p_s^*})\|u_1\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} \\
&= (1 - \frac{1}{p_s^*})\|u_1\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - (1 - \frac{1}{p})\|u_1\|^p.
\end{aligned}$$

Par le Théorème 1.6 on peut déduire qu'il existe une constante strictement positive C_1 tel que

$$C_1\|u_1\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leqslant \|u_1\|^p. \tag{4.24}$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) \leqslant (1 - \frac{1}{p_s^*})\|u_1\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - C_1(1 - \frac{1}{p})\|u_1\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega)}. \tag{4.25}$$

Par le Lemme 4.3 on a

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \qquad \text{quand } \lambda \to 0.$$

Par le Lemme 1.1 et pour λ assez petit on obtient

$$\|u_1\|_{L^{p_s^*}(\Omega)} \to 0.$$

Ainsi on peut choisir $\hat{\lambda}$ assez petit tel que

$$\|u_1\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*-p} \leqslant C_1(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{p_s^*})^{-1} \qquad \text{pour tout } \lambda \in (0,\hat{\lambda}). \tag{4.26}$$

En combinant (4.25) et (4.26) on trouve

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) < 0 \qquad \text{pour tout } \lambda \in (0,\Lambda^*).$$

□

4.4 Résultat de multiplicité

Cette section est consacrée à trouver une deuxième solution du problème (4.1) notée par u_2, telle que u_2 est différente de la solution minimale positive du problème (4.1)(u_1 trouvée dans la section précédente (section 4.3)).

En utilisant le Théorème du Col avec la condition de Palais-Smale locale (notée $(PS)_c$ en abrégé) on prouve le résultat suivant

Théorème 4.2 *Pour tout $\lambda \in (0,\Lambda^*)$, le problème (4.1) admet une seconde solution.*

Pour commencer, on prouve que la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{J}_{\lambda,p}$ satisfaisant les conditions géométriques du Théorème du Col [5]

Lemme 4.5 *Il existe des constantes strictement positives α et β, tel que*
- *Si $\|u\| = \alpha$, on a $\mathcal{J}_{\lambda,p}(u) \geqslant \beta$.*
- *Il existe $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tel que $\|v\| > \alpha$ et on a $\mathcal{J}_{\lambda,p}(v) < 0$.*

Preuve • Par la définition de $\mathcal{J}_{\lambda,p}(u)$ et l'inégalité de Hölder on a

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u) \geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} - \lambda\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)},$$

où $p' = \frac{p}{p-1}$. En utilisant le Théorème 1.6, on obtient l'existence des constantes $C_1, C_2 > 0$ tel que

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u) \geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{C_1}{p_s^*}\|u\|^{p_s^*} - C_2\lambda\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|u\|.$$

De plus, l'inégalité de Young nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\lambda,p}(u) &\geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{C_1}{p_s^*}\|u\|^{p_s^*} - C_\varsigma\lambda^{p'}\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} - \varsigma\|u\|^p\\ &\geqslant (\frac{1}{p}-\varsigma)\|u\|^p - \frac{C_1}{p_s^*}\|u\|^{p_s^*} - C_\varsigma\lambda^{p'}\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)},\end{aligned}$$

où $0<\varsigma<\frac{1}{p}$ et C_1, C_ς sont des constantes strictement positives.
Si on choisit α strictement positif et assez petit tel que pour tout $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ avec $\|u\| = \alpha$ on a

$$(\frac{1}{p}-\varsigma)\|u\|^p > \frac{C_1}{p_s^*}\|u(x)\|^{p_s^*} + C_\varsigma\lambda^{p'}\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)},$$

alors

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u) \geqslant \beta > 0.$$

• Maintenant on considère une fonction positive $w \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et $t>0$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\lambda,p}(tw) &= \frac{1}{p}\|tw\|^p - \frac{1}{p_s^*}\int_\Omega (tw)^{p_s^*}dx - \lambda\int_\Omega f(x)tw(x)dx\\ &= \frac{t^p}{p}\|w\|^p - \frac{t^{p_s^*}}{p_s^*}\int_\Omega w^{p_s^*}dx - \lambda t\int_\Omega f(x)w(x)dx.\end{aligned}$$

Puisqu'on a $1<p<p_s^*$ donc si on fait tendre t vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}\mathcal{J}_{\lambda,p}(tw) = -\infty.$$

On conclut qu'il existe t_0 assez large tel que $\|t_0w\| > \alpha$ et $\mathcal{J}(t_0w) < 0$.

□

Pour continuer notre raisonnement on définit la constante de Sobolev fractionnaire par

$$S_{s,p} := \inf_{u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy}{\|u\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)}}, \tag{4.27}$$

Cette constante est strictement positive par l'inégalité de Sobolev fractionnaire (1.7).
La difficulté essentielle dans cette section est l'absence d'une formule explicite pour les minimiseurs de la constante $S_{s,p}$.
Ce problème a été résolu dans [56], en utilisant certaines estimations asymptotiques obtenues dans [20], les auteurs donnent une conjecture selon laquelle tous les minimiseurs sont de la forme $cU((x-x')/\varepsilon)$, où $c \neq 0$, $\varepsilon > 0$, $x' \in \mathbb{R}^N$ et

$$U(x) = \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-sp}{p}}}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Cette conjecture est vraie pour le cas où $p = 2$ et c'est prouvé dans [29]. Autrement, il n'ya aucun résultat pour le cas $p \neq 2$.

Suivons les idées de [56]. On a un minimiseurs pour $S_{s,p}$ décroissant non négatif à symétrie radiale $U = U(r)$. En multipliant U tel que pour tout $\varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}} U(\frac{|x|}{\varepsilon}),$$

est un minimiseur pour $S_{s,p}$.

Ensuite, rappelons que la fonction f change de signe donc il existe $x_0 \in \Omega$ et $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \Omega, |x - x_0| < \delta \quad , \text{ on a } f(x) > 0. \tag{4.28}$$

Sans perte de généralité, on suppose que $0 \in \Omega$. Pour $\theta > 1$ et $\delta, \varepsilon > 0$, soit

$$m_{\varepsilon,\delta} = \frac{u_\varepsilon(\delta)}{u_\varepsilon(\delta) - u_\varepsilon(\theta\delta)},$$

et

$$g_{\varepsilon,\delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant u_\varepsilon(\delta) \\ m^p_{\varepsilon,\delta}(t - u_\varepsilon(\theta\delta)) & \text{si } u_\varepsilon(\theta\delta) \leqslant t \leqslant u_\varepsilon(\delta), \\ t + u_\varepsilon(\delta)(m^p_{\varepsilon,\delta} - 1), & \text{si } t \geqslant u_\varepsilon(\delta), \end{cases}$$

avec

$$G_{\varepsilon,\delta}(t) = \int_0^t g'_{\varepsilon,\delta}(\tau)^{\frac{1}{p}} d\tau.$$

$g_{\varepsilon,\delta}$ et $G_{\varepsilon,\delta}$ sont des fonctions non décroissantes et absolument continues.
La fonction radialement symétrique non croissante est donnée par

$$u_{\varepsilon,\delta}(r) = G_{\varepsilon,\delta}(u_\varepsilon(r)),$$

telle que

$$u_{\varepsilon,\delta}(r) = \begin{cases} u_\varepsilon(r) & \text{si } r \leqslant \delta, \\ 0 & \text{si } r \geqslant \theta\delta. \end{cases}$$

Ainsi, on a besoin des estimations suivantes

Lemme 4.6 *[56] Il existe une constante $C = C(N, s, p) > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{2}$ on a*

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon,\delta}\|^p &\leqslant S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} + C(\frac{\varepsilon}{\delta})^{\frac{N-sp}{p-1}}, \\ \|u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}} &\geqslant S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} - C(\frac{\varepsilon}{\delta})^{\frac{N}{p-1}}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\int_\Omega |u_{\varepsilon,\delta}(x)|^q dx \geqslant C \begin{cases} \varepsilon^{N - \frac{N-sp}{p} q} & si\ q > \frac{N(p-1)}{N-sp}, \\ \varepsilon^{N - \frac{N-sp}{p} q} |\log \varepsilon| & si\ q = \frac{N(p-1)}{N-sp}, . \\ \varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)} q} & si\ q < \frac{N(p-1)}{N-sp}. \end{cases}$$

Maintenant on montre qu'on a une suite de $(PS)_c$ de la fonctionnelle $\mathcal{J}_{\lambda,p}$ pour un niveau qui sera déterminé plus tard. Pour cela on considère la famille des fonctions données par

$$w_{\varepsilon,\delta}(x) := u_{\varepsilon,\delta}(x - x_0) \in W_0^{s,p}(\Omega). \tag{4.30}$$

On prouve le résultat suivant

Lemme 4.7 *Il existe un paramètre strictement positif λ_0 tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ on a*

$$\sup_{t \geqslant 0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + tw_{\varepsilon,\delta}) < \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} \quad \textit{pour tout } \varepsilon > 0 \textit{ assez petit.} \tag{4.31}$$

Preuve Rappelons que

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) = \frac{1}{p}\|u_1\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_1\|_{L^{p*s}(\Omega)}^{p_s^*} - \lambda \int_\Omega f(x)u_1(x)dx, \tag{4.32}$$

et

$$\|u_1\|^p = \|u_1\|_{L^{p*s}(\Omega)}^{p_s^*} + \lambda \int_\Omega f(x)u_1(x)dx,$$

ce qui implique

$$\|u_1\|_{L^{p*s}(\Omega)}^{p_s^*} = \|u_1\|^p - \lambda \int_\Omega f(x)u_1(x)dx. \tag{4.33}$$

En remplaçant (4.33) dans (4.32) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) &= \frac{1}{p}\|u_1\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_1\|^p + \frac{\lambda}{p_s^*}\int_\Omega f(x)u_1(x)dx - \lambda\int_\Omega f(x)u_1(x)dx \\ &= (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*})\|u_1\|^p - \lambda(1 - \frac{1}{p_s^*})\int_\Omega f(x)u_1(x)dx. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young et les injections de Sobolev fractionnaires nous donne que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) &\geqslant \frac{s}{N}\|u_1\|^p - C_{\tilde{\varsigma}}\lambda^{p'}(\frac{N(p-1)+sp}{Np})^{p'}\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} - \tilde{\varsigma}\|u_1(x)\|^p \\ &\geqslant (\frac{s}{N} - \tilde{\varsigma})\|u_1\|^p - C_{\tilde{\varsigma}}\lambda^{p'}(\frac{N(p-1)+sp}{Np})^{p'}\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \\ &\geqslant -C_{\tilde{\varsigma}}\lambda^{p'}(\frac{N(p-1)+sp}{Np})^{p'}\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}, \end{aligned}$$

avec $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < \tilde{\varsigma} < \frac{s}{N}$ et $C_{\tilde{\varsigma}}$ est une constante strictement positive. Alors, on choisit λ_0 assez petit tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ on trouve

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N}S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} \geqslant \frac{s}{N}S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} - C_\varsigma\lambda^{p'}(\frac{N(p-1)+sp}{Np})^{p'}\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}.$$

Donc, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ on a

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} > 0.$$

Ce qui implique

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} > \mathcal{J}_{\lambda,p}(0).$$

La fonctionnelle $\mathcal{J}_{\lambda,p}$ est continue, donc il existe un $t_0 \in (0,1)$ tel qu'on ait

$$\sup_{0 \leqslant t < t_0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + t w_{\varepsilon,\delta}) < \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}}.$$

pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ et $\varepsilon > 0$ assez petit

D'autre part, montrons que

$$\sup_{t > t_0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + t w_{\varepsilon,\delta}) < \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}}.$$

Le fait que le support de u_1 et $w_{\varepsilon,\delta}$ sont disjoints nous donne

$$\|u_1 + t w_{\varepsilon,\delta}\|^p \leqslant \|u_1\|^p + t^p \|w_{\varepsilon,\delta}\|. \tag{4.34}$$

On a aussi

$$\|u_1 + t w_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} \geqslant \|u_1\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} + t^{p_s^*} \|w_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*}.$$

D'après ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + t w_{\varepsilon,\delta}) &= \frac{1}{p}\|u_1 + t w_{\varepsilon,\delta}\|^p - \|u_1 + t w_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} \\
&- \lambda \int_\Omega f(x)(u_1(x) + t w_{\varepsilon,\delta}) dx \\
&\leqslant \frac{1}{p}\|u_1\|^p + \frac{t^p}{p}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_1\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} - \frac{t^{p_s^*}}{p_s^*}\|w_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} \\
& \quad -\lambda \int_\Omega f(x) u_1(x) dx - \lambda t \int_\Omega f(x) w_{\varepsilon,\delta}(x) dx.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\int_\Omega f(x) u_1(x) dx \geqslant \int_{|x - x_0| < \delta} f(x) u_1(x) dx,$$

et par (4.28) on a

$$\int_{|x - x_0| < \delta} f(x) u_1(x) dx > 0. \tag{4.35}$$

Par la définition de $w_{\varepsilon,\delta}$ dans (4.30) et (4.28) on a

$$\int_\Omega f(x) w_{\varepsilon,\delta}(x) dx > 0. \tag{4.36}$$

On pose

$$\bar{H}(t) = \frac{t^p}{p}\|w_{\varepsilon,\delta}\| - \frac{t^{p_s^*}}{p_s^*}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - \lambda t \int_\Omega f(x) w_{\varepsilon,\delta}(x)dx + \frac{1}{p}\|u_1\|^p.$$

Puisque $1 < p < p_s^*$ alors quand on fait tendre $t \to +\infty$ on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{H}(t) = -\infty.$$

Ainsi, $\sup_{t>t_0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + tw_{\varepsilon,\delta})$ est atteint pour un certain $t_\varepsilon^* \geqslant 0$.
En dérivant la fonction $\bar{H}$ on trouve

$$\bar{H}'(t) = t^{p-1}\|w_{\varepsilon,\delta}\| - t^{p_s^*-1}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - \lambda \int_\Omega f(x) w_{\varepsilon,\delta}(x)dx.$$

Pour

$$\bar{H}'(t_\varepsilon^*) = 0,$$

on a

$$t_\varepsilon^{*p_s^*-1}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} = t_\varepsilon^{*p-1}\|w_{\varepsilon,\delta}\| - \lambda \int_\Omega f(x) w_{\varepsilon,\delta}(x)dx.$$

De (4.36) on obtient

$$\begin{aligned}
& t_\varepsilon^{*p_s^*-1}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leqslant t_\varepsilon^{*p-1}\|w_{\varepsilon,\delta}\|, \\
\Rightarrow\quad & t_\varepsilon^{*p_s^*-1} \leqslant t_\varepsilon^{*p-1}\frac{\|w_{\varepsilon,\delta}\|}{\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}}, \\
\Rightarrow\quad & t_\varepsilon^{*(p_s^*-p)} \leqslant \frac{\|w_{\varepsilon,\delta}\|}{\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}}, \\
\Rightarrow\quad & t_\varepsilon^{*} \leqslant \left(\frac{\|w_{\varepsilon,\delta}\|}{\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{(p_s^*-p)}}.
\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0, \|w_{\varepsilon,\delta}\|^{\frac{p}{p_s^*}}]$ la fonction $t \longrightarrow \frac{t^p}{p}\|w_{\varepsilon,\delta}\| - \frac{t^{p_s^*}}{p_s^*}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}$ est croissante. De plus on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_1 + tw_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}dx \geqslant & \int_\Omega |u_1|^{p_s^*}dx + t^{p_s^*}\int_\Omega |w_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*} \\
+ & \, p_s^* t \int_\Omega |u_1|^{p_s^*-2}u_1 w_{\varepsilon,\delta}dx + C\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

En utilisant (4.34), (4.36) et (4.37) on trouve

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geqslant t_0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1+tw_{\varepsilon,\delta}) &= \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1+t^*_\varepsilon w_{\varepsilon,\delta})\\
&= \frac{1}{p}\|u_1+t^*_\varepsilon w_{\varepsilon,\delta}\|^p - \frac{1}{p^*_s}\int_\Omega |u_1+t^*_\varepsilon w_{\varepsilon,\delta}|^{p^*_s}dx\\
&- \lambda\int_\Omega f(x)(u_1(x)+t^*_\varepsilon w_{\varepsilon,\delta}(x))dx\\
&\leqslant \frac{1}{p}\|u_1\|^p - \frac{1}{p^*_s}\int_\Omega |u_1|^{p^*_s}dx - \lambda\int_\Omega f(x)u_1(x)dx\\
&+ \frac{t^{*p}_\varepsilon}{p}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^p - \frac{t^{*p^*_s}_\varepsilon}{p^*_s}\int_\Omega |w_{\varepsilon,\delta}|^{p^*_s}dx - \lambda t_0\int_\Omega f(x)w_{\varepsilon,\delta}(x)dx\\
&- t_0\int_\Omega |u_1|^{p^*_s-2}u_1w_{\varepsilon,\delta}dx - C(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}})\\
&\leqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{1}{p}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^p\Big(\frac{\|w_{\varepsilon,\delta}\|}{\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}}\Big)^{\frac{p}{(p^*_s-p)}}\\
&- \frac{1}{p^*_s}\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\Big(\frac{\|w_{\varepsilon,\delta}\|}{\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}}\Big)^{\frac{p^*_s}{(p^*_s-p)}} - C(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}})\\
&\leqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + (\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*_s})\|w_{\varepsilon,\delta}\|^p\Big(\frac{\|w_{\varepsilon,\delta}\|}{\|w_{\varepsilon,\delta}\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}}\Big)^{\frac{p}{(p^*_s-p)}} - C(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}),
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Par (4.29) on obtient

$$\sup_{t\geqslant t_0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1+tw_{\varepsilon,\delta}) \leqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N}(S_{s,p}^{\frac{N}{ps}} + C_1\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}) - C_2(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}).$$

Puisque $\frac{N-sp}{p} < \frac{N-sp}{p-1}$, on déduit que

$$\sup_{t\geqslant t_0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1+tw_{\varepsilon,\delta}) \leqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N}S_{s,p}^{\frac{N}{ps}}.$$

Finalement on obtient notre résultat

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1+tw_{\varepsilon,\delta}) \leqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N}S_{s,p}^{\frac{N}{ps}},$$

pour tour $\lambda \in (0,\lambda_0)$.

□

Maintenant on définit

$$\Gamma_{\varepsilon,\delta} := \{\gamma \in C([0,1], W_0^{s,p}(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1 + Mw_{\varepsilon,\delta}\}, \tag{4.38}$$

et le point
$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma_{\varepsilon,\delta}} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathcal{J}_{\lambda,p}(\gamma(t)), \tag{4.39}$$
pour $M > 0$ assez grand tel que
$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + Mw_{\varepsilon,\delta}) < 0.$$
En outre, on montre l'existence d'une deuxième solution du problème (4.1).

Lemme 4.8 *Il existe une solution positive notée u_2 du problème (4.1) satisfaisant*
$$c = \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) \quad \text{ou bien} \quad c \geqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}}. \tag{4.40}$$

Preuve Soit $\{u_j\}$ une suite de $(PS)_c$ pour la fonctionnelle $\mathcal{J}_{\lambda,p}$. Alors, on a
$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_j) \longrightarrow c \quad \text{and} \quad \mathcal{J}'_{\lambda,p}(u_j) \longrightarrow 0. \tag{4.41}$$
Ce qui implique
$$\frac{1}{p}\|u_j\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_j\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - \lambda \int_\Omega f(x)u_j(x)dx = c + o(1), \tag{4.42}$$
et
$$\|u_j\|^p - \|u_j\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - \lambda \int_\Omega f(x)u_j(x)dx = o(1). \tag{4.43}$$
On fait (4.42) $- \frac{1}{p_s^*}$(4.43) on trouve
$$c = (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*})\|u_j\|^p - (1 - \frac{1}{p_s^*})\lambda \int_\Omega f(x)u_j(x)dx + o(1).$$
Par l'inégalité de Young et les injections de Sobolev fractionnaires on obtient
$$\begin{aligned} c &\geqslant (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*})\|u_j\|^p - C_{\bar{\varsigma}}\lambda^{p'}(1 - \frac{1}{p_s^*})^{p'}\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} - \bar{\varsigma}\|u_j(x)\|^p \\ &\geqslant (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*} - \bar{\varsigma})\|u_j\|^p - C_{\bar{\varsigma}}\lambda^{p'}(1 - \frac{1}{p_s^*})^{p'}\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$
Ainsi, on a
$$c + C_{\bar{\varsigma}}\lambda^{p'}(1 - \frac{1}{p_s^*})^{p'}\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} \geqslant (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*} - \bar{\varsigma})\|u_j\|^p, \tag{4.44}$$
pour tout $\lambda > 0$, $\bar{\varsigma} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*}$ et $C_{\bar{\varsigma}}$ une constante positive.
Donc, il existe $C > 0$ telle que
$$\|u_j\| \leqslant C.$$
Alors la suite $\{u_j\}$ est bornée dans $W_0^{s,p}(\Omega)$. Ainsi, il existe $u_2 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tel que
$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u_2 && \text{faiblement dans } W_0^{s,p}(\Omega), \\ u_j &\longrightarrow u_2 && \text{fortement dans } L^q,\ 1 \leqslant q < p_s^*, \\ u_j &\longrightarrow u_2 && \text{p.p dans } \Omega. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Ce qui implique que pour tout $\xi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on a

$$\langle \mathcal{J}'_{\lambda,p}(u_2), \xi \rangle = 0. \tag{4.46}$$

Par conséquent, u_2 est une solution faible du problème (4.1).
On considère $\bar{z}_\lambda = \lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0 \geqslant 0$, avec z_0 solution de (4.5). On sait que

$$(-\Delta)_p^s u = |u|^{p_s^*-2}u + \lambda f(x) \geqslant \lambda f(x),$$

par le principe de comparaison (Lemme 1.6) on obtient $u_2 \geqslant \lambda^{\frac{1}{p-1}} z_0 \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$. On conclut que u_2 est une solution positive du (4.1). Par le lemme de Brézis Lieb (Théorème 1.15) on a

$$\begin{aligned} \|u_j\|^p &= \|u_j - u_2\|^p + \|u_2\|^p + o(1) \\ \|u_j\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} &= \|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} + \|u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} + o(1). \end{aligned}$$

Insérons ces deux relations dans (4.42) on trouve

$$\begin{aligned} c &= \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_j) \\ &= \frac{1}{p}\|u_j - u_2\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} \\ &+ \frac{1}{p}\|u_2\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} - \lambda \int_\Omega f(x) u_2(x) dx + o(1) \\ &= \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + \frac{1}{p}\|u_j - u_2\|^p - \frac{1}{p_s^*}\|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} + o(1). \end{aligned} \tag{4.47}$$

D'après (4.41) on a

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle \mathcal{J}'_{\lambda,p}(u_j), u_j \rangle \\ &= \|u_j - u_2\|^p - \|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} + \|u_2\|^p - \|u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} - \lambda \int_\Omega f(x) u_2(x) dx + o(1). \end{aligned}$$

En utilisant $\xi = u_j$ dans (4.46) on obtient

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle \mathcal{J}'_{\lambda,p}(u_2), u_j \rangle \\ &= \|u_2\|^p - \|u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} - \lambda \int_\Omega f(x) u_2(x) dx. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & o(1) = \|u_j - u_2\|^p - \|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} + o(1). \\ \Rightarrow \quad & \|u_j - u_2\|^p = \|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

On a déjà montré que la suite $\{u_j\}$ est bornée donc on peut supposer qu'il existe $l \geqslant 0$ tel que on a

$$\|u_j - u_2\|^p \to l.$$

Également, par (4.48) on trouve

$$\|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} \to l. \tag{4.49}$$

Par (4.47), (4.48) et (4.49) on a

$$\begin{aligned}
& c = \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*})\|u_j - u_2\|^p + o(1),\\
\Rightarrow \quad & c = \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + (\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*})l,\\
\Rightarrow \quad & c = \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + \frac{s}{N}l.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

De (4.27) on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \|u_j - u_2\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} S_{s,p} \leqslant \|u_j - u_2\|^p,\\
\Rightarrow \quad & l^{p_s^*} \geqslant S_{s,p} l^p,\\
\Rightarrow \quad & l \geqslant S_{s,p} l^{\frac{p}{p_s^*}},
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Alors on a

$$\text{soit } l = 0 \text{ ou bien } l \geqslant S_{s,p}^{\frac{N}{sp}}.$$

• Si on prend $l = 0$ dans (4.50) on trouve

$$c = \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2).$$

• par ailleurs si $l \geqslant S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} > 0$ on obtient

$$c \geqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}}.$$

Ce qui nous donne le résultat de notre lemme.

□

Preuve du Théorème 4.2 Comme résultat du Théorème 4.1 on a obtenu que le problème (4.1) admet une solution minimale positive u_1 à énergie négative :

$$\mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) < 0.$$

Par le Lemme 4.8 on trouve que le problème (4.1) admet une deuxième solution u_2 satisfaisant soit :
• $c = \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) > 0$ par la définition de c dans (4.39), on déduit que les solutions u_1 et u_2 sont différentes .
• Sinon

$$c \geqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}},$$

et dans ce cas aussi $u_1 \neq u_2$. On suppose que $u_1 = u_2$ on trouve

$$\begin{aligned} c &\geqslant \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_2) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} \\ &= \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Par (4.38) et (4.39)

$$\begin{aligned} c &= \inf_{\gamma \in \Gamma_{\varepsilon,\delta}} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \mathcal{J}_{\lambda,p}(\gamma(t)) \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \mathcal{J}_{\lambda,p}(\gamma(t)) \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + tMw_{\varepsilon,\delta}), \end{aligned}$$

pour $M > 0$ assez grand. On met $\tau = tM \geqslant 0$, alors

$$c \leqslant \sup_{\tau \geqslant 0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + \tau w_{\varepsilon,\delta})$$

Le Lemme 4.7 nous donne

$$c \leqslant \sup_{\tau \geqslant 0} \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1 + \tau w_{\varepsilon,\delta}) < \mathcal{J}_{\lambda,p}(u_1) + \frac{s}{N} S_{s,p}^{\frac{N}{sp}}.$$

On arrive à une contradiction. Par conséquent $u_1 \neq u_2$.

Finalement, on conclut que le problème (4.1) admet deux solutions positives u_1 et u_2 distinctes.

$\square$

Chapitre 5

Problème elliptique impliquant le potentiel de Hardy et un terme asymptotiquement linéaire

Ce chapitre est le développement de l'article [59].

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on considère un problème elliptique non local avec le potentiel de Hardy

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \mu \frac{u}{|x|^{2s}} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne tel que $0 \in \Omega$, $N > 2s$, $s \in (0,1)$, λ un paramètre strictement positif, $0 \leqslant \mu < \mu_H := \frac{2^{2s}\Gamma^2(\frac{N+2s}{4})}{\Gamma^2(\frac{N-2s}{4})}$ étant la meilleure constante de l'inégalité de Hardy fractionnaire et f une fonction de Carathéodory satisfaisant certaines hypothèses qui seront précisées ultérieurement.

Une grande attention a été consacrée à l'étude des problèmes elliptiques avec le potentiel de Hardy soit dans le cadre linéaire ou non-linéaire, voir par exemple [2, 12, 44, 63].

L'objectif de ce chapitre est d'établir l'existence des solutions positives, ainsi que des résultats de multiplicité dans le cas où f est asymptotiquement linéaire à l'infini. Pour le cas local nous invitons le lecteur à consulter les travaux de [70, 55].

Le plan de ce chapitre est comme suit : dans la section 5.3, on considère le cas où f est une fonction asymptotiquement linéaire, on établit l'existence et la non existence des solutions positives du problème (5.1).

Ensuite, on prouve la multiplicité des solutions du problème (5.1). On obtient l'existence de deux solutions non triviales, l'une est positive et l'autre est négative.

Dans la section 5.4, on suppose que f est une fonction super-linéaire, sous-critique. On montre que le problème (5.1) admet une solution positive.

5.2 Cadre fonctionnel et résultats préliminaires

Dans cette partie on établit quelques résultats préliminaires.

Définition 5.1 *On dit que $u \in H_0^s(\Omega)$ est une solution faible du problème (5.1), si u satisfait*

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{u}{|x|^{2s}}\psi dx = \lambda\int_\Omega f(x,u)\psi dx,$$

pour tout $\psi \in H_0^s(\Omega)$.

Notre approche est variationnelle, la fonctionnelle d'énergie associée au problème (5.1) est

$$\tilde{\mathcal{J}}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}}dx - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx, \tag{5.2}$$

où

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds.$$

Rappelons que tout point critique u de $\tilde{\mathcal{J}}(u)$ est une solution faible du problème (5.1).

Définition 5.2 *L'inégalité fractionnaire de Hardy est*

$$\frac{C_{N,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \geqslant \mu_H\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}}dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{5.3}$$

où $C_{N,s}$ est une constante positive qui dépend de N et s. Voir [42] pour plus détails.

Définition 5.3 *La fonctionnelle $\tilde{\mathcal{J}}$ satisfait la condition de Cerami (notée (C)). Si pour toute suite $\{u_n\} \in H_0^s(\Omega)$ telle que*

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_n) \longrightarrow c \quad et \quad (1+\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)})\tilde{\mathcal{J}}'(u_n) \longrightarrow 0, \tag{5.4}$$

possède une sous-suite convergente.

Maintenant, nous rappelons une version du Théorème du Col avec la condition de Cerami qui sera utilisé ultérieurement

Proposition 5.1 *[32] Soit E un espace de Banach. Supposons qu'ils existent a, b et d des réels telle que la fonctionnelle $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\max\{J(0), J(v_1)\} \leqslant a \quad et \quad \inf_{\|v\|_E = c} J(v) \geqslant b. \tag{5.5}$$

avec $a < b$,$d > 0$ et $v_1 \in E$ tel que $\|v_1\|_E > b$. Soit

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in C([0,1], E) : \quad \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v_1\},$$

et

$$c_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma_0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} I(\gamma(t)) \geqslant b.$$

Alors, il existe une suite $\{v_n\} \subset E$ *tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} J(v_n) = c_0 \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} (1 + \|v_n\|_E) \|J'(v_n)\|_{E^*} = 0.$$

Nous imposons les hypothèses suivantes :

(f_1) $f(x,t) = 0$, $\forall t \leqslant 0$, $x \in \Omega$ et $f(x,t) \geqslant 0$, $\forall t \geqslant 0$, $x \in \Omega$.
(f_2) il existe $0 \leqslant \alpha \in L^p(\Omega)$ avec $p > \frac{N}{2s}$, $c > 0$ tel que

$$|f(x,t)| \leqslant \alpha(x)|t| + c|t|^{q-1} \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

avec $q \in (2, 2_s^*)$.

(f_3) $\lim\limits_{|t| \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = \beta(x) \not\equiv 0$ uniformément pour *p.p.* $x \in \Omega$, $\beta \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2s}$, telle que $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$ et *meas*$\{x \in \Omega$ tel que $\alpha(x) < \beta(x)\} \neq 0$.

(f_4) $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = +\infty$ et $\frac{f(x,t)}{t}$ est non décroissante en $t \geqslant 0$.

Considérons le problème de valeur propre suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \varphi - \mu \frac{\varphi}{|x|^{2s}} = \lambda \sigma(x) \varphi & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{5.7}$$

On définit le problème de minimisation suivant

$$\lambda_{1,\sigma} := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \phi|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{|\phi|^2}{|x|^{2s}} dx : \phi \in H_0^s(\Omega), \int_\Omega \sigma(x) \phi^2 dx = 1 \right\}. \tag{5.8}$$

Nous allons montrer que $\lambda_{1,\sigma}$ est une valeur propre principale positive.

Lemme 5.1 *Soit* $\sigma(x) \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2s}$ *tel que* $\sigma(x) \geqslant 0$ $(\not\equiv 0)$. *Alors,* $\lambda_{1,\sigma} > 0$ *et il existe une fonction* $\phi_{1,\sigma} \in H_0^s(\Omega)$ *telle que*

$$\int_\Omega \sigma(x) \phi_{1,\sigma}^2 dx = 1 \quad \text{ et } \quad \|\phi_{1,\sigma}\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{|\phi_{1,\sigma}|^2}{|x|^{2s}} dx = \lambda_{1,\sigma}.$$

De plus, $\phi_{1,\sigma}(x) > 0$ *p.p. dans* Ω.

Preuve Considérons une suite minimisante $\{\phi_n\}$ satisfaisant (5.8) i.e.

$$\int_\Omega \sigma(x)\phi_n^2 dx = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\inf\,(\|\phi_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu\int_\Omega \frac{|\phi_n|^2}{|x|^{2s}}dx) = \lambda_{1,\sigma}. \tag{5.9}$$

La suite $\{\phi_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$, alors il existe $\phi_{1,\sigma} \in H_0^s(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} &\phi_n \rightharpoonup \phi_{1,\sigma} && \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega),\\ &\phi_n \to \phi_{1,\sigma} && \text{fortement dans } L^p(\Omega)\;\; 1 \leqslant p < 2_s^*,\\ &\phi_n \to \phi_{1,\sigma} && \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_{1,\sigma} = \lim_{n\to+\infty}\inf\,(\|\phi_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu\int_\Omega \frac{|\phi_n|^2}{|x|^{2s}}dx) \geqslant \|\phi_{1,\sigma}\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu\int_\Omega \frac{|\phi_{1,\sigma}|^2}{|x|^{2s}}dx. \tag{5.11}$$

En utilisant (5.3) on a

$$\lambda_{1,\sigma} \geqslant \|\phi_{1,\sigma}\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu\int_\Omega \frac{|\phi_{1,\sigma}|^2}{|x|^{2s}}dx \geqslant (1-\frac{\mu}{\mu_H})(\|\phi_{1,\sigma}\|^2_{H_0^s(\Omega)}).$$

comme $\mu < \mu_H$ alors $\lambda_{1,\sigma} > 0$.

La suite $\{\phi_n\}$ est bornée dans $L^{2_s^*}(\Omega)$, alors

$$\phi_n \rightharpoonup \phi_{1,\sigma} \qquad \text{faiblement dans } L^{2_s^*}(\Omega),$$

et

$$\phi_n^2 \rightharpoonup \phi_{1,\sigma}^2 \qquad \text{faiblement dans } L^{\frac{N}{N-2s}}(\Omega)$$

Puisque $\sigma \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2s}$, on trouve

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega \sigma(x)\phi_n^2 dx = \int_\Omega \sigma(x)\phi_{1,\sigma}^2 dx.$$

Ainsi

$$\int_\Omega \sigma(x)\phi_{1,\sigma}^2 dx = 1. \tag{5.12}$$

De (5.11) et (5.12), on conclut que $\phi_{1,\sigma} \not\equiv 0$ atteint $\lambda_{1,\sigma} > 0$. De plus

$$\begin{aligned} \||\phi_{1,\sigma}|\|^2_{H_0^s(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{||\phi_{1,\sigma}(x)| - |\phi_{1,\sigma}(y)||^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi_{1,\sigma}(x) - \phi_{1,\sigma}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = \|\phi_{1,\sigma}\|^2_{H_0^s(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc $|\phi_{1,\sigma}|$ atteint $\lambda_{1,\sigma}$. Supposons que $\phi_{1,\sigma} \geqslant 0$ p.p. dans Ω, par le principe de comparaison on conclut que $\phi_{1,\sigma} > 0$ dans Ω.

□

On remarque que $\lambda_{1,\sigma}$ n'est autre que la première valeur propre associée au problème (5.7), cette dernière est simple voir la référence [47]. L'hypothèse (f_3) implique que $\lambda_{1,\beta} < \lambda_{1,\alpha}$.

Maintenant, prouvons que la fonctionnelle d'énergie $\tilde{\mathcal{J}}$ satisfait les conditions géométriques du Théorème du Col.

Proposition 5.2 *Supposons que les hypothèses* (f_1)-(f_3) *sont satisfaites,* $0 \leqslant \mu < \mu_H$ *et* $\lambda_{1,\beta} < \lambda < \lambda_{1,\alpha}$. *Alors*
(i) *pour tout* $u \in H_0^s(\Omega)$, *si* $\|u\|_{H_0^s(\Omega)} = r$, *on a* $\tilde{\mathcal{J}}(u) \geqslant R$,
(ii) *il existe* $v \in H_0^s(\Omega)$ *tel que* $\|v\|_{H_0^s(\Omega)} > r$ *et on a* $\tilde{\mathcal{J}}(v) < 0$.

Preuve (i) Nous avons

$$\lambda_{1,\alpha} \int_\Omega \alpha(x)|u|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx.$$

En utilisant (5.3), (f_2) et les injections du Théorème 1.6 on trouve

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{J}}(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}}dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \alpha(x)|u|^2 dx - \lambda c \int_\Omega |u|^q dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}}dx - \frac{\lambda}{2\lambda_{1,\alpha}}\int_\Omega (\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}}dx)dx \\
&- \lambda c \int_\Omega |u|^q dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1,\alpha}})(\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}}dx) - C_1\|u\|^q_{H_0^s(\Omega)} \\
&\geqslant \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{1,\alpha}})(1 - \frac{\mu}{\mu_H})\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - C_1\|u\|^q_{H_0^s(\Omega)},
\end{aligned}$$

où $0 \leqslant \mu < \mu_H$, $0 < \lambda < \lambda_{1,\alpha}$, $q \in (2, 2_s^*)$ et C_1 une constante positive .
En choisissant $r > 0$ assez petit tel que pour $\|u\|_{H_0^s(\Omega)} = r$ on a $\tilde{\mathcal{J}}(u) \geqslant R > 0$.

(ii) Pour $\phi_{1,\beta} > 0$ on a

$$\tilde{\mathcal{J}}(t\phi_{1,\beta}) = \frac{t^2}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H_0^s(\Omega)} - t^2\frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|\phi_{1,\beta}|^2}{|x|^{2s}}dx - \lambda\int_\Omega F(x, t\phi_{1,\beta})dx.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{J}}(t\phi_{1,\beta})}{t^2} = \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|\phi_{1,\beta}|^2}{|x|^{2s}}dx - \lambda \lim_{t\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x, t\phi_{1,\beta})}{t^2\phi_{1,\beta}^2}\phi_{1,\beta}^2 dx.$$

En utilisant le lemme de Fatou (Lemme 1.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{\tilde{\mathcal{J}}(t\phi_{1,\beta})}{t^2} &\leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}-\frac{\mu}{2}\int_\Omega\frac{|\phi_{1,\beta}|^2}{|x|^{2s}}dx-\lambda\liminf_{t\to+\infty}\int_\Omega\frac{F(x,t\phi_{1,\beta})}{t^2\phi^2_{1,\beta}}\phi^2_{1,\beta}dx\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}-\frac{\mu}{2}\int_\Omega\frac{|\phi_{1,\beta}|^2}{|x|^{2s}}dx-\lambda\int_\Omega\liminf_{t\to+\infty}\frac{F(x,t\phi_{1,\beta})}{t^2\phi^2_{1,\beta}}\phi^2_{1,\beta}dx.\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}-\frac{\mu}{2}\int_\Omega\frac{|\phi_{1,\beta}|^2}{|x|^{2s}}dx-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\beta(x)\phi^2_{1,\beta}dx
\end{aligned}$$

De (5.3) et (f_3) on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{\tilde{\mathcal{J}}(t\phi_{1,\beta})}{t^2} &\leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\beta(x)\phi^2_{1,\beta}dx\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\beta(x)\phi^2_{1,\beta}dx\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}-\frac{\lambda}{2\lambda_{1,\beta}}\lambda_{1,\beta}\int_\Omega\beta(x)\phi^2_{1,\beta}dx\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}-\frac{\lambda}{\lambda_{1,\beta}}\|\phi_{1,\beta}\|_{H^s_0(\Omega)}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big(1-\frac{\lambda}{\lambda_{1,\beta}}\Big)\|\phi_{1,\beta}\|^2_{H^s_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{1,\beta}<\lambda$ et $\phi_{1,\beta}>0$ on trouve que

$$\lim_{t\to+\infty}\tilde{\mathcal{J}}(t\phi_{1,\beta})=-\infty.$$

Alors, il existe t_0 assez large tel que on a $\|t_0\phi_{1,\beta}\|_{H^s_0(\Omega)}>r$ et $\tilde{\mathcal{J}}(t_0\phi_{1,\beta})<0$.

□

5.3 Problème avec un terme asymptotiquement linéaire

5.3.1 Solutions positives

Dans cette partie on montre que le problème (5.1) possède une solution positive sous certaines conditions appropriées sur $f(x,u)$. Les principaux résultats sont les suivants :

Théorème 5.1 *Soit $0\leqslant\mu<\mu_H$, $0<\lambda<\lambda_{1,\alpha}$ et f une fonction de Caratheodory satisfaisant les hypothèses (f_1)-(f_3). Alors on a*
- *Si $\lambda_{1,\beta}<\lambda$, le problème (5.1) admet une solution positive.*
- *Si $\lambda_{1,\beta}=\lambda$, le problème (5.1) admet une solution positive $u\in H^s_0(\Omega)$ si et seulement s'il existe une constante positive a tel que $u(x)=a\phi_{1,\beta}(x)$ et $f(x,u)=\beta(x)u$ p.p. $x\in\Omega$.*

Remarque 5.1 *On remarque que si $\lambda_{1,\beta} > \lambda$, le problème (5.1) n'admet pas de solutions positives.*
En effet, supposons que le problème (5.1) admet une solution positive $u \in H_0^s(\Omega)$. Multiplions l'équation du problème (5.1) par u et intégrons sur Ω, on obtient

$$\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx = \lambda \int_\Omega f(x,u) u dx.$$

En utilisant (f_1) et (f_3) on trouve

$$f(x,u)u \leqslant \beta(x) u^2 \qquad \text{pour p.p. } x \in \Omega. \tag{5.13}$$

Il s'ensuit que

$$\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx \leqslant \lambda \int_\Omega \beta(x) u(x)^2 dx.$$

De (5.8), on déduit que $\lambda_{1,\beta} \leqslant \lambda$.
Par conséquent pour $\lambda < \lambda_{1,\beta}$ le problème (5.1) n'admet aucune solution positive.

Montrons que la suite de Cerami est bornée

Lemme 5.2 *Si les hypothèses (f_1)-(f_3) sont satisfaites et $\lambda_{1,\beta} < \lambda$. Alors, toute suite $\{u_n\}$ de Cerami est bornée.*

Preuve On définit

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H_0^s(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \tilde{M}\phi_{1,\beta}\},$$

et

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \tilde{\mathcal{J}}(\gamma(t)),$$

où $\phi_{1,\beta} > 0$ et $\tilde{M} > 0$ assez grand tel que $\tilde{\mathcal{J}}(\tilde{M}\phi_{1,\beta}) < 0$.

D'après la Proposition 5.2, on trouve $c \geqslant R > 0$. Soit $\{u_n\}$ une suite de Cerami telle que

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_n) \longrightarrow c \quad \text{et} \quad (1 + \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}) \|\tilde{\mathcal{J}}'(u_n)\|_{H^{-s}(\Omega)} \longrightarrow 0, \tag{5.14}$$

ce qui implique que

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2} \int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x|^{2s}} dx - \lambda \int_\Omega F(x,u_n) dx = c + o(1), \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{J}}'(u_n), \psi \rangle_{H_0^s(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u_n(x) - u_n(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dx dy - \mu \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^{2s}} \psi dx \\ &- \lambda \int_\Omega f(x,u_n) \psi dx = o(1) \text{ pour tout } \psi \in H_0^s(\Omega). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Pour montrer que la suite $\{u_n\}$ est bornée, on raisonne par l'absurde. Supposons que

$$\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)} \xrightarrow{n} +\infty.$$

Prenons

$$w_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}}, \tag{5.17}$$

alors

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{H_0^s(\Omega)} &= \frac{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}} \\ &= 1, \end{aligned} \tag{5.18}$$

ce qui implique que la suite $\{w_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$, alors il existe $w \in H_0^s(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} &w_n \rightharpoonup w && \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega), \\ &w_n \to w && \text{fortement dans } L^p(\Omega) \ \ 1 \leqslant p < 2_s^*, \\ &w_n \to w && \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Montrons que $w \not\equiv 0$. On raisonne par l'absurde, supposons que $w \equiv 0$, donc

$$\begin{aligned} &w_n \rightharpoonup 0 && \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega), \\ &w_n \to 0 && \text{fortement dans } L^p(\Omega) \ \ 1 \leqslant p < 2_s^*, \\ &w_n \to 0 && \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.20}$$

D'après les conditions (f_1)-(f_3) et pour tout $(x,t) \in (\Omega \times \mathbb{R}^*)$, il existe une fonction $0 \leqslant \kappa(x) \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2s}$ telle que

$$\left| \frac{f(x,t)}{t} \right| \leqslant \kappa(x). \tag{5.21}$$

En utilisant (5.16) pour $\psi = u_n$ on trouve

$$\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x|^{2s}} dx = \lambda \int_\Omega f(x,u_n) u_n dx + o(1). \tag{5.22}$$

On multiplie (5.22) par $\frac{1}{\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)}}$, on utilise (5.17) on obtient

$$1 - \mu \int_\Omega \frac{|w_n|^2}{|x|^{2s}} dx = \lambda \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{u_n} w_n^2 dx + o(1).$$

L'inégalité de Hardy Sobolev (5.3) nous donne

$$1 - \frac{\mu}{\mu_H} \|w_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} \leqslant 1 - \mu \int_\Omega \frac{|w_n|^2}{|x|^{2s}} dx = \lambda \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{u_n} w_n^2 dx + o(1).$$

Il s'ensuit

$$1-\frac{\mu}{\mu_H}\leqslant 1-\mu\int_\Omega\frac{|w_n|^2}{|x|^{2s}}dx=\lambda\int_\Omega\frac{f(x,u_n)}{u_n}w_n^2dx+o(1).$$

Ce qui implique

$$1-\frac{\mu}{\mu_H}\leqslant \lambda\int_\Omega\frac{f(x,u_n)}{u_n}w_n^2dx+o(1).$$

Par (5.21) on a

$$1-\frac{\mu}{\mu_H}\leqslant \lambda\int_\Omega\kappa(x)w_n^2(x)dx+o(1).$$

En faisant tendre $n\to+\infty$. De (5.20) on a

$$w_n\rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } L^{2_s^*}(\Omega),$$

il s'ensuit que

$$w_n^2\rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } L^{\frac{N}{N-2s}}(\Omega).$$

Puisque $0\leqslant\kappa(x)\in L^p(\Omega)$, $p>\frac{N}{2s}$, on obtient

$$\int_\Omega\kappa(x)w_n^2(x)dx\to 0.$$

On déduit

$$1-\frac{\mu}{\mu_H}\leqslant 0.$$

Comme $0\leqslant\mu<\mu_H$ on arrive à une contradiction. Par conséquent $w\not\equiv 0$.

Ensuite, montrons que pour tout $\psi\in H_0^s(\Omega)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{(w(x)-w(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy-\mu\int_\Omega\frac{w}{|x|^{2s}}\psi dx=\lambda\int_\Omega\beta(x)w\psi dx. \quad (5.23)$$

(5.21) nous donne que pour tout $x\in\Omega$ la suite $\{\frac{f(x,u_n)}{u_n}\}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, $p>\frac{N}{2s}$. Alors, il existe une fonction $h(x)\in L^p(\Omega)$, $p>\frac{N}{2s}$ tel que

$$\frac{f(x,u_n)}{u_n}\rightharpoonup h(x)\quad\text{faiblement dans } L^p(\Omega), p>\frac{N}{2s}. \quad (5.24)$$

D'après ce qui précède et (5.19) la suite $\{\frac{f(x,u_n)}{u_n}w_n\}$ est bornée dans $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{2_s^*}$. De (5.24) on obtient

$$\frac{f(x,u_n)}{u_n}w_n\rightharpoonup h(x)w\quad\text{faiblement dans } L^q(\Omega), \quad (5.25)$$

puisque $f(x,t)=0$ pour $t\leqslant 0$, on a

$$\frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}w_n^+\rightharpoonup h(x)w^+\quad\text{faiblement dans } L^q(\Omega). \quad (5.26)$$

Multiplions (5.16) par $\frac{1}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}}$ on trouve

$$\frac{1}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}}|\langle \mathcal{J}'(u_n), \psi\rangle_{H_0^s(\Omega)}| =$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{(w_n(x)-w_n(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{w_n^+}{|x|^{2s}}\psi dx - \lambda\int_\Omega \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}w_n^+\psi dx\right|,$$

pour tout $\psi \in H_0^s(\Omega)$. Par (5.14) et le fait que $\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)} \to +\infty$ on a

$$\frac{1}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}}|\langle \tilde{\mathcal{J}}'(u_n), \psi\rangle_{H_0^s(\Omega)}| \leqslant \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}}\|\tilde{\mathcal{J}}'(u_n)\|_{H^{-s}(\Omega)}\|\psi\|_{H_0^s(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n\to+\infty,$$

pour tout $\psi \in H_0^s(\Omega)$. Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{(w_n(x)-w_n(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{w_n^+}{|x|^{2s}}\psi dx = \lambda\int_\Omega \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}w_n^+\psi dx, \tag{5.27}$$

pour tout $\psi \in H_0^s(\Omega)$. De plus, par (5.17) on a

$$u_n = \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}w_n.$$

En combinant (5.19) avec (5.27) et d'après ce qui précède, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{(w(x)-w(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{w^+}{|x|^{2s}}\psi dx = \lambda\int_\Omega h(x)w^+\psi dx, \tag{5.28}$$

D'après (5.19) et le fait que $\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}\longrightarrow+\infty$, si on suppose que pour tout $x\in\Omega$ on a $w(x)>0$, on trouve que $u_n \longrightarrow +\infty$ p.p. dans Ω. Ainsi (f_3) nous donne que $h(x)=\beta(x)$ p.p. dans Ω.

Considérons $\psi = w^-$, (5.28) nous donne $\|w^-\|_{H_0^s(\Omega)} = 0$, alors $w(x)=w^+(x)\geqslant 0$ p.p dans Ω. Par le principe du maximum on obtient que $w(x)>0$ p.p. dans Ω, ainsi $u_n \longrightarrow +\infty$ p.p. dans Ω. En utilisant (f_3) et (5.24), on conclut que $h(x)=\beta(x)$ p.p. dans Ω.

On déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{(w(x)-w(y))(\psi(x)-\psi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{w}{|x|^{2s}}\psi dx = \lambda\int_\Omega \beta(x)w\psi dx, \tag{5.29}$$

pour tout $\psi \in H_0^s(\Omega)$. Ce implique que $\lambda_{1,\beta}=\lambda$.

On obtient une contradiction avec le fait que $\lambda_{1,\beta}<\lambda$. Par conséquent, la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$ pour $\lambda_{1,\beta}<\lambda$.

□

Preuve du Théorème 5.1

On définit

$$\Gamma_1 := \{\gamma \in C([0,1], H_0^s(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = M_1\phi_{1,\beta}\},$$

pour $\phi_{1,\beta} > 0$ et $M_1 > 0$ assez grand tel que $\tilde{\mathcal{J}}(M_1\phi_{1,\beta}) < 0$.
D'après le premier point de la Proposition 5.2 on peut choisir $t_0 \in (0,1)$ tel qu'on ait $\|\gamma(t_0)\|_{H_0^s(\Omega)} = r$ alors $\tilde{\mathcal{J}}(\gamma(t_0)) \geqslant R > 0$. Alors

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathcal{J}(\gamma(t)) \geqslant \tilde{\mathcal{J}}(\gamma(t_0)) > 0.$$

Par conséquent

$$c_1 := \inf_{\gamma\in\Gamma_1} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \tilde{\mathcal{J}}(\gamma(t)) > 0.$$

La Proposition 5.1 nous assure l'existence d'une suite de Cerami $\{u_n\}$ vérifiant (5.6). Par le Lemme 5.2 , $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$, donc il existe $u \in H_0^s(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega),\\ u_n &\to u && \text{fortement dans } L^p(\Omega)\ \ 1 \leqslant p < 2_s^*,\\ u_n &\to u && \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.30}$$

On veut montrer que

$$u_n \to u \text{ fortement dans } H_0^s(\Omega).$$

Notons

$$\|u_n\|_H^2 := \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 - \mu \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx. \tag{5.31}$$

La norme $\|.\|_H^2$ est équivalente à la norme $\|.\|_{H_0^s(\Omega)}$ d'après (5.3). Puisque la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$, il existe $C > 0$ telle que

$$\|u_n\|_H \leqslant C.$$

Pour montrer que u_n converge fortement vers u dans $H_0^s(\Omega)$, il suffit de montrer que

$$\|u_n - u\|_H^2 \to 0.$$

En utilisant (5.16) avec $\psi = u_n - u$, alors

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle \tilde{\mathcal{J}}'(u_n), u_n - u\rangle\\ &= \langle \tilde{\mathcal{J}}'(u_n) - \mathcal{J}'(u), u_n - u\rangle\\ &= \|u_n - u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 - \mu \int_\Omega \frac{(u_n-u)^2}{|x|^{2s}} dx - \lambda \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))(u_n - u)dx + o(1). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|u_n - u\|_H^2 = \lambda \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))(u_n - u)dx + o(1).$$

D'après les hypothèses (f_1)-(f_3) et (5.30) on déduit que

$$\lambda \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))(u_n - u)dx = o(1).$$

Il s'ensuit que

$$\|u_n - u\|_H^2 \to 0.$$

Par conséquent $u_n \to u$ fortement dans $H_0^s(\Omega)$.

Par le Théorème du Col on conclut que la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{J}}$ possède un point critique non trivial $u \in H_0^s(\Omega)$ tel que $c_1 = \tilde{\mathcal{J}}(u) > 0 = \tilde{\mathcal{J}}(0)$. De plus, par le principe du maximum fort (Proposition 1.11) u est une solution positive du problème (5.1).

• D'après (5.8), on a pour tout $v \in H_0^s(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(\phi_{1,\beta}(x) - \phi_{1,\beta}(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{\phi_{1,\beta}}{|x|^{2s}}vdx = \lambda_{1,\beta}\int_\Omega \beta(x)\phi_{1,\beta}(x)v(x)dx.$$

Pour $\lambda_{1,\beta} = \lambda$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(\phi_{1,\beta}(x) - \phi_{1,\beta}(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{\phi_{1,\beta}}{|x|^{2s}}vdx = \lambda\int_\Omega \beta(x)\phi_{1,\beta}(x)v(x)dx, \tag{5.32}$$

pour tout $v \in H_0^s(\Omega)$.

D'autre part, soit u une solution positive du problème (5.1). Multiplions l'équation du problème (5.1) par $\phi_{1,\beta}$ on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(\phi_{1,\beta}(x) - \phi_{1,\beta}(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{u}{|x|^{2s}}\phi_{1,\beta}dx = \lambda\int_\Omega f(x,u(x))\phi_{1,\beta}(x)dx. \tag{5.33}$$

Prenons $v = u$ dans (5.32)

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(\phi_{1,\beta}(x) - \phi_{1,\beta}(y))(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \mu\int_\Omega \frac{\phi_{1,\beta}}{|x|^{2s}}udx = \lambda\int_\Omega \beta(x)\phi_{1,\beta}(x)u(x)dx. \tag{5.34}$$

En combinant (5.34) et (5.33) on a

$$\lambda\int_\Omega \beta(x)\phi_{1,\beta}(x)u(x)dx = \lambda\int_\Omega f(x,u(x))\phi_{1,\beta}(x)dx,$$

ce qui implique

$$\lambda\int_\Omega [f(x,u(x)) - \beta(x)u(x)]\phi_{1,\beta}(x)dx = 0.$$

Par (f_3) et le fait que $\phi_{1,\beta}(x) > 0$ p.p. dans Ω, on conclut

$$f(x,u(x)) = \beta(x)u(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Ainsi $u(x) > 0$ est également atteint par $\lambda_{1,\beta} = \lambda$, Alors, il existe $a > 0$ tel que $u(x) = a\phi_{1,\beta}(x)$ p.p $x \in \Omega$.

D'un autre côté, considérons $u(x) = a\phi_{1,\beta}(x)$ et $f(x, a\phi_{1,\beta}(x)) = a\beta(x)\phi_{1,\beta}(x)$ pour $a > 0$ et $x \in \Omega$ et montrons que $u \in H_0^s(\Omega)$ est une solution du problème (5.1).
On sait que $\lambda_{1,\beta} = \lambda$ est atteint par $a\phi_{1,\beta}(x)$, alors pour chaque $v \in H_0^s(\Omega)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(a\phi_{1,\beta}(x) - a\phi_{1,\beta}(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \mu \int_\Omega \frac{\phi_{1,\beta}}{|x|^{2s}} v dx = \lambda a \int_\Omega \beta(x)\phi_{1,\beta}(x)v(x)dx.$$

Par hypothèse, on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(a\phi_{1,\beta}(x) - a\phi_{1,\beta}(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \mu \int_\Omega \frac{\phi_{1,\beta}}{|x|^{2s}} v dx = \lambda \int_\Omega f(x, a\phi_{1,\beta}(x))v(x)dx.$$

Ce qui nous donne que $u(x) = a\phi_{1,\beta}(x)$ est une solution positive du problème (5.1).

$\square$

5.3.2 Solutions multiples

Cette partie est consacrée pour trouver des solutions multiples non triviales du problème (5.1). En particulier, montrons le résultat suivant :

Théorème 5.2 *Supposons que $0 \leqslant \mu < \mu_H$, $0 < \lambda < \lambda_{1,\alpha}$ et f une fonction de Caratheodory satisfaisant les conditions (f_2)-(f_3) sont vérifiées. Alors, le problème (5.1) possède deux solutions non triviales l'une est positive et l'autre est négative pour tout $\lambda_{1,\beta} \leqslant \lambda$.*

On pose $u^+ = \max\{u, 0\}$ et $u^- = \min\{u, 0\}$. Notre objectif est de traité le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \mu \frac{u^\pm}{|x|^{2s}} = \lambda f^\pm(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{5.35}$$

où

$$f^+(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & \forall s \geqslant 0 \\ 0 & \forall s < 0, \end{cases} \qquad f^-(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & \forall s \leqslant 0 \\ 0 & \forall s > 0. \end{cases} \tag{5.36}$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (5.35) est définie par

$$\tilde{\mathcal{J}}^\pm(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|u^\pm|^2}{|x|^{2s}} dx - \lambda \int_\Omega F^\pm(x, u)dx, \tag{5.37}$$

où

$$F^\pm(x, u) = \int_0^u f^\pm(x, s)ds.$$

Preuve du Théorème 5.2 • On commence par étudier le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \mu \frac{u^+}{|x|^{2s}} = \lambda f^+(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{5.38}$$

On définit

$$\Gamma_3 := \{\gamma \in C([0,1], H_0^s(\Omega)) : \quad \gamma(0) = 0, \gamma(1) = M_3 \phi_{1,\beta}\}$$
$$et$$
$$c^+ := \inf_{\gamma \in \Gamma_3} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \tilde{\mathcal{J}}^+(\gamma(t)).$$

pour $\phi_{1,\beta} > 0$ et $M_3 > 0$ assez grand tel que $\tilde{\mathcal{J}}^+(M_3\phi_{1,\beta}) < 0$. Ce M_3 existe d'après la Proposition 5.2 (ii).
La Proposition 5.2 nous donne que $c^+ > 0$. En suivant le même raisonnement que le Théorème 5.1, on déduit que c^+ est la valeur critique du $\tilde{\mathcal{J}}^+$, tel que on a $c^+ = \tilde{\mathcal{J}}^+(u^+) > \tilde{\mathcal{J}}^+(0)$ donc u^+ est une solution non triviale du problème (5.38). De plus, le principe du maximum fort (Proposition 1.11) nous donne la positivité.

• Ensuite, considérons le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \mu \frac{u^-}{|x|^{2s}} = \lambda f^-(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{5.39}$$

D'après la Proposition 5.2, il existe $r > 0$ tel que pour tout $u^- \in H_0^s(\Omega)$ avec $\|u^-\|_{H_0^s(\Omega)} = r$ on a $\tilde{\mathcal{J}}^-(u^-) > \tilde{\mathcal{J}}^-(0)$. Ainsi, on peut choisir $M_4 > 0$ assez grand et $\xi = -\phi_{1,\beta}$ dans lequel $\tilde{\mathcal{J}}^-(M_4\xi) < 0$.
Posons l'espace

$$\Gamma_4 := \{\gamma \in C([0,1], H_0^s(\Omega)) : \quad \gamma(0) = 0, \gamma(1) = M_4 \xi\}$$
$$et$$
$$c^- := \inf_{\gamma \in \Gamma_4} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \tilde{\mathcal{J}}^-(\gamma(t)).$$

par ce qui précède $c^- > \tilde{\mathcal{J}}(0) > 0$.

En utilisant le Lemme 5.2, le Théorème du Col et en procédant de la même manière que dans la preuve du Théorème 5.1, nous obtenons que $\tilde{\mathcal{J}}^-$ admet un point critique non trivial u^- tel que $c^- = \tilde{\mathcal{J}}^-(u^-)$. Par le principe du maximum fort on déduit que u^- est une solution négative de (5.39).

Par conséquent le problème (5.1) possède une solution positive et une solution négative pour $\lambda_{1,\beta} \leqslant \lambda$.

□

5.4 Problème avec un terme super-linéaire

Dans cette section on considère le cas où $\beta(x) \equiv +\infty$. Le principal résultat est le suivant

Théorème 5.3 *Supposons que les hypothèses (f_1), (f_2) et (f_4) sont satisfaites, $0 \leqslant \mu < \mu_H$ et $0 < \lambda < \lambda_{1,\alpha}$. Alors, le problème (5.1) admet une solution positive.*

Pour prouver ce résultat, nous avons besoin de quelques lemmes en plus. D'abord on montre que le deuxième point de la Proposition 5.2 est satisfait même pour le cas $\beta(x) \equiv +\infty$.

Lemme 5.3 *Supposons que les hypothèses (f_1), (f_2) et (f_4) sont satisfaites. Alors, il existe $e \in H_0^s(\Omega)$ tel que $\|e\|_{H_0^s(\Omega)} > r$ et $\tilde{\mathcal{J}}(e) < 0$.*

Preuve Considérons le cas $\beta(x) \equiv +\infty$. En utilisant le fait que $\frac{f(x,t)}{t}$ est non-décroissante en $t \geqslant 0$, on trouve que pour tout $x \in \Omega$ et $t \geqslant 0$ on a

$$0 \leqslant 2F(x,t) \leqslant f(x,t)t.$$

Ainsi, $\frac{F(x,t)}{t^2}$ est non-décroissante en $t > 0$.
Soit $\varphi_1 > 0$ la fonction propre associée à la valeur propre λ_1, où λ_1 est la première valeur propre de $((-\Delta)^s - \mu|x|^{-2s}, H_0^s(\Omega))$. Alors il existe $\rho > 0$ tel que $\varphi_1(x) \geqslant \rho > 0$ p.p. $x \in \Omega$, ce qui nous donne que pour tout $x \in \Omega$, $t > 0$ on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2} \geqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{F(x,t\rho)}{t^2\rho^2} = +\infty.$$

Alors, il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_0$, $x \in \Omega$ on a

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2} \geqslant K,$$

pour $K > 0$ assez grand.
Le fait que $\mu \geqslant 0$ nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{J}}(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{\varphi_1^2}{|x|^{2s}}dx - \lambda\int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2}dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda\int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2}dx
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \geqslant t_0$ et $x \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{J}}(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda\int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2}dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda\int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2\varphi_1^2}\varphi_1^2dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \lambda K\int_\Omega \varphi_1^2dx.
\end{aligned}$$

On choisit $K>0$ suffisamment grand pour avoir $\lim\limits_{t\to+\infty}\tilde{\mathcal{J}}(t\varphi_1)=-\infty$.
Alors, il existe t_0 assez large tel que on a $\|t_0\varphi_1\|_{H_0^s(\Omega)}>r$ et $\tilde{\mathcal{J}}(t_0\varphi_1)<0$.

□

Lemme 5.4 *Si f vérifie (f_4) et $\lim\limits_{n\to\infty}\langle\tilde{\mathcal{J}}'(u_n),u_n\rangle_{H_0^s(\Omega)}=0$. Alors pour tout $t>0$ et $n\geqslant 1$ on a*

$$\tilde{\mathcal{J}}(tu_n)\leqslant\frac{1+t^2}{2n}+\tilde{\mathcal{J}}(u_n).$$

Preuve En utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to\infty}\langle\tilde{\mathcal{J}}'(u_n),u_n\rangle_{H_0^s(\Omega)}=0$ et pour une sous-suite, supposons que pour tout $n\geqslant 1$ on a

$$-\frac{1}{n}<-\frac{1}{n}\langle\tilde{\mathcal{J}}'(u_n),u_n\rangle_{H_0^s(\Omega)}=\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)}-\mu\int_\Omega\frac{|u_n|^2}{|x|^{2s}}dx-\lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_ndx<\frac{1}{n}. \tag{5.40}$$

Alors, pour tout $n\geqslant 1$ on a

$$\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)}-\mu\int_\Omega\frac{|u_n|^2}{|x|^{2s}}dx<\frac{1}{n}+\lambda\int_\Omega f(x,u_n)u_ndx. \tag{5.41}$$

Pour tout $t>0$ et $n\geqslant 1$ on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}(tu_n) &= \frac{t^2}{2}\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)}-t^2\frac{\mu}{2}\int_\Omega\frac{|u_n|^2}{|x|^{2s}}dx-\lambda\int_\Omega F(x,u_n)dx\\ &\leqslant \frac{t^2}{2n}+\frac{\lambda t^2}{2}\int_\Omega f(x,u_n)u_ndx-\lambda\int_\Omega F(x,u_n)dx\\ &\leqslant \frac{t^2}{2n}+\lambda\int_\Omega(\frac{t^2}{2}f(x,u_n)u_n-F(x,tu_n))dx.\end{aligned}$$

On pose $g(t)=\frac{t^2}{2}f(x,u_n)u_n-F(x,tu_n)$, en dérivant g on obtient

$$g'(t)=tu_n\Big(f(x,u_n)-\frac{f(x,tu_n)}{t}\Big).$$

Calculons $g'(t)=0$, on trouve que $t^*=1$. On déduit que

$$g(t)\leqslant g(1)\quad\forall t>0,$$

donc

$$\frac{t^2}{2}f(x,u_n)u_n-F(x,tu_n)\leqslant\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n).$$

D'après ce qui précède on a

$$\tilde{\mathcal{J}}(tu_n)\leqslant\frac{t^2}{2n}+\lambda\int_\Omega(\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n))dx. \tag{5.42}$$

D'autre part, (5.40) implique que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\|u_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x|^{2s}} dx > -\frac{1}{n} + \lambda \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{|u_n|^2}{|x|^{2s}} dx - \lambda \int_\Omega F(x,u_n)dx \\ &\geqslant -\frac{1}{2n} + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - \lambda \int_\Omega F(x,u_n)dx \\ &\geqslant -\frac{1}{2n} + \lambda \int_\Omega (\frac{1}{2} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n))dx, \end{aligned} \tag{5.43}$$

(5.42) implique que

$$\tilde{\mathcal{J}}(tu_n) - \frac{t^2}{2n} \leqslant \lambda \int_\Omega (\frac{1}{2} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n))dx \leqslant \tilde{\mathcal{J}}(u_n) + \frac{1}{2n}. \tag{5.44}$$

Par conséquent

$$\tilde{\mathcal{J}}(tu_n) \leqslant \frac{t^2+1}{2n} + \mathcal{J}(u_n).$$

$\square$

Preuve du Théorème 5.3 D'abord, on définit

$$\Gamma_5 := \{\gamma \in C([0,1], H^s_0(\Omega)) : \qquad \gamma(0) = 0, \gamma(1) = M_5\varphi_1\}$$
$$et$$
$$\tilde{c} := \inf_{\gamma \in \Gamma_5} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \tilde{\mathcal{J}}(\gamma(t)).$$

D'après le Lemme 5.3, il existe $M_5 > 0$ assez grand tel que $\tilde{\mathcal{J}}(M_5\varphi_1) < 0$ avec $\varphi_1 > 0$ est la fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_{1,\alpha}$.
La Proposition 5.2 nous donne que $\tilde{c} \geqslant R > 0$.
En suivant le même argument que dans le Théorème 5.1 (le deuxième point). D'après la Proposition 5.1 on obtient l'existence d'une suite de Cerami $\{u_n\}$ satisfaisant

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_n) \longrightarrow \tilde{c} \quad \text{et} \quad (1 + \|u_n\|_{H^s_0(\Omega)})\|\tilde{\mathcal{J}}'(u_n)\|_{H^{-s}(\Omega)} \longrightarrow 0, \tag{5.45}$$

ce qui implique

$$\tilde{\mathcal{J}}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}} dx - \lambda \int_\Omega F(x,u_n)dx = \tilde{c} + o(1), \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{J}}'(u_n), \psi \rangle_{H^s_0(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u_n(x) - u_n(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \mu \int_\Omega \frac{u_n}{|x|^{2s}} \psi dx \\ &- \lambda \int_\Omega f(x,u_n)\psi dx = o(1) \text{ pour tout } \psi \in H^s_0(\Omega). \end{aligned} \tag{5.47}$$

Montrons que la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$. Prenons

$$w_n = \frac{2\sqrt{\tilde{c}}}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}} u_n. \tag{5.48}$$

On raisonne par l'absurde. Supposons que $\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)} \to +\infty$. On a

$$\|w_n\|_{H_0^s(\Omega)} = 2\sqrt{\tilde{c}},$$

la suite $\{w_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$, donc il existe $w \in H_0^s(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} w_n &\rightharpoonup w && \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega), \\ w_n &\to w && \text{fortement dans } L^p(\Omega) \;\; 1 \leqslant p < 2_s^*, \\ w_n &\to w && \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Multiplions (5.47) par $\frac{2\sqrt{\tilde{c}}}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}}$. De (5.48) et comme $f(x,t) = 0$ pour $t \leqslant 0$, on a

$$\lambda \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{u_n}(w_n)^2 dx = \lambda \int_\Omega \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx = \|w_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{(w_n^+)^2}{|x|^{2s}} dx.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_\Omega \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx &= \lim_{n\to+\infty} (\|w_n^+\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \mu \int_\Omega \frac{(w_n^+)^2}{|x|^{2s}} dx) \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \|w_n^+\|^2_{H_0^s(\Omega)} = 4\tilde{c} < \infty. \end{aligned} \tag{5.50}$$

D'autre part, on prend $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \;\; w^+(x) > 0\}$. Si $\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)} \to +\infty$, par (5.48) on obtient que $u_n(x) \to +\infty$ p.p. dans Ω_1. En utilisant le fait que $\frac{f(x,t)}{t}$ est non décroissante en $t \geqslant 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t} = +\infty$

$$\frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+} \geqslant K \qquad \text{pour } K > 0 \text{ dans } \Omega_1. \tag{5.51}$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lambda \int_\Omega \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \lambda \int_{\Omega_1} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx \\ &\geqslant \lambda K \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_1} (w_n^+)^2 dx. \end{aligned} \tag{5.52}$$

De (5.49) on a

$$\lambda K \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_1} (w_n^+)^2 dx \to \lambda K \int_{\Omega_1} (w^+)^2 dx \tag{5.53}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \lambda \int_{\Omega} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx \geqslant \lambda K \int_{\Omega_1} (w^+)^2 dx. \tag{5.54}$$

En combinant (5.50) et (5.54), on obtient

$$\lambda K \int_{\Omega_1} (w^+)^2 dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda \int_{\Omega} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx \leqslant 4\tilde{c}. \tag{5.55}$$

Comme $w^+ > 0$ dans Ω_1 et $K > 0$ est assez grand, (5.55) nous donne une contradiction. Ainsi, $|\Omega_1| = 0$ ce qui implique que $w^+ \equiv 0$ dans Ω.
Puisque $\frac{f(x,t)}{t}$ est non-décroissante en $t \geqslant 0$, donc pour tout $(x, w_n) \in (\Omega \times \mathbb{R}^+)$ on a

$$0 \leqslant F(x, w_n^+) \leqslant \frac{1}{2} f(x, w_n^+) w_n^+.$$

En utilisant (f_2) on a

$$F(x, w_n^+) \leqslant \alpha(x)(w_n^+)^2 + c(w_n^+)^q, \tag{5.56}$$

où $0 \leqslant \alpha(x) \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2s}$, $2 < q < 2_s^*$ et $c > 0$.
Si $w \equiv 0$, (5.49) nous donne

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \Big(\int_{\Omega} \alpha(x)(w_n^+) dx + c\int_{\Omega} (w_n^+)^q dx\Big) = 0,$$

pour tout $2 < q < 2_s^*$ et $c > 0$. Par (5.56), il s'ensuit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\Omega} F(x, w_n^+) dx = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(w_n) &= \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_{\Omega} \frac{(w_n^+)^2}{|x|^{2s}} dx - \lambda \int_{\Omega} F(x, w_n^+) dx \\ &= \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{\mu}{2}\int_{\Omega} \frac{(w_n^+)^2}{|x|^{2s}} dx. \end{aligned}$$

De (5.3), on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(w_n) &\geqslant \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{\mu_H})\|w_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} \\ &\geqslant 2(1 - \frac{\mu}{\mu_H})\tilde{c} + o(1) > 0 \quad 0 \leqslant \mu < \mu. \end{aligned} \tag{5.57}$$

En utilisant le Lemme 5.4 avec (5.48), on trouve que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(w_n) = \tilde{\mathcal{J}}(\frac{\sqrt{\tilde{c}}}{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}} u_n) &\leqslant \frac{1 + \frac{\tilde{c}}{\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)}}}{2n} + \tilde{\mathcal{J}}(u_n) \\ &\leqslant \frac{1}{2n} + \frac{\tilde{c}}{2n\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)}} + \tilde{\mathcal{J}}(u_n). \end{aligned} \tag{5.58}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ alors $\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)} \to +\infty$, on obtient

$$\tilde{\mathcal{J}}(w_n) \leqslant \tilde{\mathcal{J}}(u_n),$$

(5.46) nous donne

$$\tilde{\mathcal{J}}(w_n) \leqslant \tilde{c}.$$

On arrive à une contradiction avec (5.57).
Par conséquent, la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$. Ainsi, il existe $u \in H_0^s(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \qquad \text{faiblement dans } H_0^s(\Omega), \\ u_n &\to u \qquad \text{fortement dans } L^q(\Omega) \;\; 1 \leqslant q < 2_s^*, \\ u_n &\to u \qquad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Pour terminer la démonstration, on montre que $u_n \to u$ fortement dans $H_0^s(\Omega)$. Comme les normes sont équivalentes, on suit les mêmes étapes que précédemment.
Posons

$$\|u_n\|_H^2 := \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2 - \mu \int_\Omega \frac{u_n^2}{|x|^{2s}} dx. \tag{5.60}$$

Montrons que

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_H^2 = 0.$$

En utilisant (5.47) pour $\psi = u_n - u$, on a

$$\langle \tilde{\mathcal{J}}'(u_n) - \tilde{\mathcal{J}}'(u), u_n - u \rangle_{H_0^s(\Omega)} = o(1).$$

Ainsi,

$$\|u_n - u\|_H^2 = \lambda \int_\Omega (f(x, u_n) - f(x, u))(u_n - u) dx + o(1). \tag{5.61}$$

L'hypothèse (f_2) implique que

$$f(x, t) \leqslant \alpha(x)|t| + c|t|^{q-1},$$

où $0 \leqslant \alpha(x) \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2s}$, $2 < q < 2_s^*$ et $c > 0$.
Par (5.59) on obtient

$$\begin{aligned} & \lambda \int_\Omega (f(x, u_n) - f(x, u))(u_n - u) dx \\ \leqslant \;& \lambda \int_\Omega \alpha(x)|u_n - u|^2 dx + \lambda c \int_\Omega (|u_n|^{q-1} - |u|^{q-1})(u_n - u) dx \\ & = \lambda \int_\Omega \alpha(x)|u_n - u|^2 dx + \lambda c \Big(\int_\Omega |u_n|^q dx - \int_\Omega |u_n|^{q-1} u dx - \int_\Omega |u|^{q-1} u_n dx + \int_\Omega |u|^q dx \Big) \\ & = o(1), \end{aligned} \tag{5.62}$$

avec $0 \leqslant \alpha(x) \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2s}$, $2 < q < 2_s^*$ et $c > 0$.
Par conséquent, (5.61) implique

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_H^2 = 0.$$

On conclut que $u_n \to u$ fortement dans $H_0^s(\Omega)$.

Par le Théorème du Col on conclut que la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{J}}$ possède un point critique $u \in H_0^s(\Omega)$ tel que $\tilde{c} = \tilde{\mathcal{J}}(u) > 0 = \tilde{\mathcal{J}}(0)$, donc u est une solution du problème (5.1) non triviale. De plus, le principe du maximum fort (Proposition 1.11) nous donne que u est une solution positive de (5.1).

$\square$

Conclusion et perspectives

Conclusion

Sur la base des études et recherches ci-dessus, nous concluons les résultats suivants :
• Dans le chapitre 2, grâce à l'étude réalisée et à l'aide de théorème du point fixe de Schauder, on a montré l'existence d'une solution positive du problème (P_1) malgré que le second membre change de signe.
• Dans le chapitre 3, on a établit que le problème (3.1) admet deux solutions positives. La première solution est obtenue par la méthode de sous et sur solution avec une énergie négative. La deuxième solution est positive, elle découle du théorème du Col, cette dernière est à énergie positive.
• Le chapitre 4 est une extension du chapitre 3. En surmontant les différentes difficultés, on a pu montrer l'existence de deux solutions positives.
• Le chapitre 5 est consacré à l'étude d'un problème elliptique non local avec le potentiel de Hardy. En considérant que le second membre du problème (5.1) est asymptotiquement linéaire et en utilisant une version du théorème du Col, on conclut l'existence et la multiplicité de solutions.

Perspectives

Pour les travaux futurs, nous suggérons :
• L'étude du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u - \mu \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{sp}} = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne tel que $0 \in \Omega$, $N > sp$, $p > 2$, $s \in (0,1)$, $\lambda > 0$, $0 \leqslant \mu < \mu_{H,p}$ la meilleure constante de l'inégalité de Hardy fractionnaire et f une fonction satisfaisant certaines hypothèses.
• Traiter les travaux antérieurs avec la condition au bord de Neumann.

Annexe

Dans cette partie on re-détaille la preuve du Lemme 3.11. Pour cela on considère la fonction $\phi(x) = \phi_r(x) = \phi_0(\frac{|x|}{r})$ pour r suffisamment petit pour que $\bar{B}_r \subset \Omega$ et ϕ_0 défini dans (3.61).

D'abord on a besoin du lemme suivant.

Lemme 5.5 *Soit $R > 0$ tel que $x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R$. Alors on a*

$$|\phi u_\varepsilon(x)| \leqslant |u_\varepsilon(x)| \leqslant C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}, \tag{5.63}$$

avec $\varepsilon > 0$, et une constante $C = C(s, R, N) > 0$.

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R$ alors $|x| \geqslant R$.
En utilisant (3.49), on trouve que

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)| &= \Big|\frac{\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{N-2s}{2}}}\Big| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon^{\frac{(N-2s)}{2}}}{(\varepsilon^2 + |R|^2)^{\frac{N-2s}{2}}} \\ &\leqslant C\varepsilon^{\frac{(N-2s)}{2}}. \end{aligned} \tag{5.64}$$

De (3.61) on obtient

$$|\phi u_\varepsilon(x)| \leqslant |u_\varepsilon(x)| \leqslant C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}, \tag{5.65}$$

pour $\varepsilon > 0$ et $C = C(s, R, N) > 0$.

□

Ensuite, on prouve notre résultat **Lemme** 3.11.

Preuve du Lemme 3.11 On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\phi u_\varepsilon(x)-\phi u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &= \int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi u_\varepsilon(x)-\phi u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi u_\varepsilon(x)-\phi u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.\end{aligned} \tag{5.66}$$

- Pour $x,y\in\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}$, $|\phi|\leqslant 1$ dans $\mathbb{R}^N$ et Lemme 5.5, on a

$$\begin{aligned}|\phi(x)u_\varepsilon(x)-\phi(y)u_\varepsilon(y)|^2 &= |\phi(x)u_\varepsilon(x)-\phi(x)u_\varepsilon(y)+\phi(x)u_\varepsilon(y)-\phi(y)u_\varepsilon(y)|^2\\ &= |\phi(x)(u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y))-u_\varepsilon(y)(\phi(y)-\phi(x))|^2\\ &\leqslant |u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2+|u_\varepsilon(y)|^2|\phi(x)-\phi(y)|^2\\ &\leqslant |u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2+C\varepsilon^{N-2s}|\phi(x)-\phi(y)|^2.\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi u_\varepsilon(x)-\phi u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &= \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\ &+ C\varepsilon^{N-2s}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.\end{aligned}$$

On remarque que $|\phi|\leqslant 1$ pour $|x-y|\leqslant\frac{r}{4}$, le développement de Taylor du premier ordre nous donne

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leqslant|x-y|.$$

Pour $|x-y|\geqslant\frac{r}{4}$ on a

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leqslant 1.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &= \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}\cap|x-y|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}\cap|x-y|>\frac{r}{4}}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}\cap|x-y|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{|x-y|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}\cap|x-y|>\frac{r}{4}}\frac{1}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &\leqslant \int_{B_r}\int_{|z|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s-2}}dzdy+\int_{B_r}\int_{|z|>\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s}}dzdy\\
&\leqslant \int_{B_r}dy\int_{|z|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s-2}}dz+\int_{B_r}dy\int_{|z|>\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s}}dz\\
&\leqslant \int_0^r t^{N-1}dt\int_0^{\frac{r}{4}}\tau^{1-2s}d\tau+\int_0^r t^{N-1}dt\int_{\frac{r}{4}}^{+\infty}\frac{1}{\tau^{2s+1}}d\tau\\
&\leqslant \frac{r^N}{N}\Big(\frac{r^{2-2s}}{(2-2s)4^{(2-2s)}}-\frac{4^{2s}}{(2s)r^{2s}}\Big)\\
&\leqslant (\frac{2^{4s}r^{N-2s}}{N})\Big(\frac{r^2}{(2-2s)2^4}-\frac{1}{2s}\Big)<+\infty.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&+ C\varepsilon^{N-2s}(\frac{2^{4s}r^{N-2s}}{N})\Big(\frac{r^2}{(2-2s)2^4}-\frac{1}{2s}\Big)\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+C'\varepsilon^{N-2s}\\
&= \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+O(\varepsilon^{N-2s}),
\end{aligned} \tag{5.67}$$

quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.

- Pour $x\in B_{\frac{r}{2}}$, $y\in\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}$, $\phi(x)=1$, $|\phi(y)|\leqslant 1$.

$$\begin{aligned}
|\phi(x)u_\varepsilon(x)-\phi(y)u_\varepsilon(y)|^2 &= |\phi(x)u_\varepsilon(x)-\phi(x)u_\varepsilon(y)+\phi(x)u_\varepsilon(y)-\phi(y)u_\varepsilon(y)|^2\\
&= |\phi(x)\big(u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)\big)-u_\varepsilon(y)\big(\phi(y)-\phi(x)\big)|^2\\
&\leqslant |u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2+|u_\varepsilon(y)|^2|\phi(x)-\phi(y)|^2\\
&+ 2|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)||u_\varepsilon(y)||\phi(x)-\phi(y)|,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi u_\varepsilon(x)-\phi u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(y)|^2|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)||u_\varepsilon^*(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède on trouve :

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(y)|^2|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \leqslant C\varepsilon^{N-2s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$
$$\leqslant C\varepsilon^{N-2s}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}\cap|x-y|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{|x-y|^2}{|x-y|^{N+2s}}dydx$$
$$+ C\varepsilon^{N-2s}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\frac{r}{2}\cap|x-y|>\frac{r}{4}}\frac{1}{|x-y|^{N+2s}}dydx$$
$$\leqslant C\varepsilon^{N-2s}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{|z|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s-2}}dzdx$$
$$+ C\varepsilon^{N-2s}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{|z|>\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s}}dzdx$$
$$\leqslant C\varepsilon^{N-2s}\int_{B_{\frac{r}{2}}}dx\int_{|z|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s-2}}dz$$
$$+ C\varepsilon^{N-2s}\int_{B_{\frac{r}{2}}}dx\int_{|z|>\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s}}dz.$$

En faisant le changement de variable suivant $|z|=\tau$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(y)|^2|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \leqslant C\varepsilon^{N-2s}\int_0^{\frac{r}{2}}t^{N-1}dt\int_0^{\frac{r}{4}}\tau^{1-2s}d\tau$$
$$+ C\varepsilon^{N-2s}\int_0^{\frac{r}{2}}t^{N-1}dt\int_{\frac{r}{4}}^{+\infty}\frac{1}{\tau^{2s+1}}d\tau$$
$$\leqslant C\varepsilon^{N-2s}\int_0^{\frac{r}{2}}t^{N-1}dt\Big(\int_0^{\frac{r}{4}}\tau^{1-2s}d\tau+\int_{\frac{r}{4}}^{+\infty}\frac{1}{\tau^{2s+1}}d\tau\Big)$$
$$\leqslant C\varepsilon^{N-2s}(\frac{2^{4s}r^{N-2s}}{N})\Big(\frac{r^2}{(2-2s)2^4}+\frac{1}{2s}\Big)$$
$$\leqslant C'\varepsilon^{N-2s}=O(\varepsilon^{N-2s}) \quad (5.68)$$

quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.
On a

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)||u_\varepsilon(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \leqslant$$
$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)||u_\varepsilon(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}_{I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(y)|^2|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}_{II}.$$

Commençons par estimer (II), le Lemme 5.5 et (5.68) nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(y)|^2|\overbrace{\phi(x)-\phi(y)}^{>0}|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &\leqslant C\varepsilon^{N-2s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&\leqslant C\varepsilon^{N-2s}\\
&= O(\varepsilon^{N-2s}), \qquad (5.69)
\end{aligned}$$

as $\varepsilon \longrightarrow 0$.
Estimation de (I). On sait que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\frac{r}{2}}}|u_\varepsilon(x)|dx \leqslant \int_{|x|\leqslant\frac{r}{2}}\frac{\varepsilon^{\frac{(N-2s)}{2}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2s}{2}}}dx &\leqslant \int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varepsilon^{\frac{(N-2s)}{2}}}{(2\varepsilon^2)^{\frac{N-2s}{2}}}dx+\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant\frac{r}{2}}\frac{\varepsilon^{\frac{(N-2s)}{2}}}{(2|x|^2)^{\frac{N-2s}{2}}}dx\\
&\leqslant \frac{\varepsilon^{-\frac{(N-2s)}{2}}}{2^{\frac{N-2s}{2}}}\int_0^\varepsilon t^{N-1}dt+\frac{\varepsilon^{\frac{(N-2s)}{2}}}{2^{\frac{N-2s}{2}}}\int_\varepsilon^{\frac{r}{2}}\tau^{2s-1}d\tau\\
&\leqslant \frac{\varepsilon^{\frac{(N+2s)}{2}}}{N2^{\frac{N-2s}{2}}}+\frac{\varepsilon^{\frac{(N-2s)}{2}}}{(2s)2^{\frac{N-2s}{2}}}\left[\frac{r^{2s}}{2^{2s}}-\varepsilon^{2s}\right]\\
&\leqslant \frac{-(N-2s)}{N(2s)2^{\frac{N-2s}{2}}}\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}+\frac{r^{2s}}{(2s)2^{\frac{N+2s}{2}}}\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\\
&\leqslant -C_1\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}+C_2\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}. \qquad (5.70)
\end{aligned}$$

En utilisant ce résultat et le Lemme 5.5 on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)||u_\varepsilon(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
\leqslant\ & C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)||\overbrace{\phi(x)-\phi(y)}^{>0}|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
\leqslant\ & C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varsigma}\int_{B_\varsigma}\frac{|u^*_\varepsilon(x)||\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
\leqslant\ & C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}\cap|x-y|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{|u_\varepsilon(x)||x-y|^2}{|x-y|^{N+2s}}dydx\\
&+C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}\cap|x-y|\geqslant\frac{r}{4}}\frac{|u_\varepsilon(x)|}{|x-y|^{N+2s}}dydx
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)||u_\varepsilon(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
\leqslant\ & C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}|u_\varepsilon(x)|\int_{|z|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s-2}}dzdx+C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}|u_\varepsilon(x)|\int_{|z|\geqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s}}dzdx\\
\leqslant\ & C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}|u_\varepsilon(x)|dx\Big(\int_{|z|\leqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s-2}}dz+\int_{|z|\geqslant\frac{r}{4}}\frac{1}{|z|^{N+2s}}dz\Big)\\
\leqslant\ & C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}|u_\varepsilon(x)|dx\Big(\int_0^{\frac{r}{4}}\tau^{1-2s}d\tau+\int_{\frac{r}{4}}^{+\infty}\frac{1}{\tau^{2s+1}}d\tau\Big)\\
\leqslant\ & C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\big(-C_1\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}+C_2\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\big)\Big(\frac{r^{2-2s}}{(2-2s)4^{2-2s}}+\frac{4^{2s}}{(2s)r^{2s}}\Big)\\
\leqslant\ & -C_1'\varepsilon^N+C_2'\varepsilon^{N-2s}\\
=\ & O(\varepsilon^{N-2s}),
\end{aligned}\tag{5.71}$$

quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)||u_\varepsilon(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\leqslant\\
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)||u_\varepsilon(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(y)|^2|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
=\ & O(\varepsilon^{N-2s}).
\end{aligned}\tag{5.72}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|\phi u_\varepsilon(x)-\phi u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\ \leqslant\ & \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
+\ & O(\varepsilon^{N-2s}).
\end{aligned}\tag{5.73}$$

(3.50), (5.67) et (5.73) nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\phi u_\varepsilon(x)-\phi u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\ \leqslant\ & \int_{B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
+\ & \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+O(\varepsilon^{N-2s})\\
+\ & \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}}\int_{B_{\frac{r}{2}}}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+O(\varepsilon^{N-2s})\\
\leqslant\ & \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+O(\varepsilon^{N-2s})\\
\leqslant\ & S_s^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^{N-2s}),
\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

ii) Prouvons (3.63)

$$\begin{aligned}
\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \phi^2 \frac{\varepsilon^{N-2s}}{(|x|^2+\varepsilon^2)^{N-2s}}dx \\
&\geqslant \int_{\{|x|<\frac{r}{2}\}} \frac{\varepsilon^{N-2s}}{(|x|^2+\varepsilon^2)^{N-2s}}dx \\
&\geqslant \int_{\{|x|<\varepsilon\}} \frac{\varepsilon^{N-2s}}{(2\varepsilon^2)^{N-2s}}dx + \int_{\{\varepsilon<|x|<\frac{r}{2}\}} \frac{\varepsilon^{N-2s}}{(2|x|^2)^{N-2s}}dx \\
&\geqslant \frac{\varepsilon^{N-2s}}{(2\varepsilon^2)^{N-2s}} \int_{\{|x|<\varepsilon\}} dx + \frac{\varepsilon^{N-2s}}{2^{N-2s}} \int_{\{\varepsilon<|x|<\frac{r}{2}\}} |x|^{4s-2N}dx, \\
&\geqslant \frac{\varepsilon^{2s-N}}{2^{N-2s}} \int_0^\varepsilon t^{N-1}dt + \frac{\varepsilon^{N-2s}}{2^{N-2s}} \int_\varepsilon^{\frac{r}{2}} t^{4s-N-1}dt.
\end{aligned}$$

On distingue trois cas

• Pour $N > 4s$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &\geqslant \frac{\varepsilon^{2s}}{N2^{N-2s}} - \frac{\varepsilon^{N-2s}}{2^{N-2s}(N-4s)}\left[\left(\frac{2}{r}\right)^{N-4s} - \frac{1}{\varepsilon^{N-4s}}\right] \\
&\geqslant \frac{\varepsilon^{2s}}{N2^{N-2s}} - \frac{1}{2^{N-2s}(N-4s)}\left[\varepsilon^{N-2s}\left(\frac{2}{r}\right)^{N-4s} - \varepsilon^{2s}\right] \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^{2s}}{N2^{N-2s}} + \frac{\varepsilon^{2s}}{(N-4s)2^{N-2s}} - \frac{\varepsilon^{N-2s}}{2^{2s}r^{N-4s}(N-4s)} \\
&\geqslant \underbrace{\left(\frac{2N-4s}{2^{N-2s}N(N-4s)}\right)}_{>0}\varepsilon^{2s} - \left(\frac{1}{2^{2s}r^{N-4s}(N-4s)}\right)\varepsilon^{N-2s} \\
&\geqslant C_1\varepsilon^{2s} - C_1'\varepsilon^{N-2s} \\
&\geqslant C\varepsilon^{2s} + O(\varepsilon^{N-2s}),
\end{aligned}$$

pour ε assez petit, C_1, C_1', C des constantes strictement positives.

• Pour $N = 4s$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &\geqslant \frac{\varepsilon^{2s}}{4s2^{2s}} + \frac{\varepsilon^{2s}}{2^{2s}}\left[\log(\frac{r}{2}) - \log(\varepsilon)\right] \\
&\geqslant C_2\varepsilon^{2s}|\log(\varepsilon)| + C_2'\varepsilon^{2s}, \\
&\geqslant C\varepsilon^{2s}|\log(\varepsilon)| + O(\varepsilon^{2s}),
\end{aligned}$$

pour ε assez petit, C_2, C_2', C des constantes strictement positives.

- Pour $N < 4s$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|\phi u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &\geqslant \frac{\varepsilon^{2s}}{N2^{N-2s}} + \frac{\varepsilon^{N-2s}}{2^{N-2s}(4s-N)}\left[\left(\frac{r}{2}\right)^{4s-N} - \varepsilon^{4s-N}\right] \\
&\geqslant \frac{\varepsilon^{2s}}{N2^{N-2s}} + \frac{1}{2^{N-2s}(4s-N)}\left[\varepsilon^{N-2s}\left(\frac{r}{2}\right)^{4s-N} - \varepsilon^{2s}\right] \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^{2s}}{N2^{N-2s}} - \frac{\varepsilon^{2s}}{(4s-N)2^{N-2s}} + \frac{r^{4s-N}\varepsilon^{N-2s}}{(4s-N)2^{2s}} \\
&\geqslant \underbrace{\left(\frac{4s-2N}{2^{N-2s}N(N-4s)}\right)}_{<0}\varepsilon^{2s} + \left(\frac{r^{N-2s}}{2^{2s}(4s-N)}\right)\varepsilon^{N-2s} \\
&\geqslant -C_3\varepsilon^{2s} + C_3'\varepsilon^{N-2s} \\
&\geqslant C\varepsilon^{N-2s} + O(\varepsilon^{2s}),
\end{aligned}$$

pour ε assez petit, C_3, C_3', C des constantes strictement positives.
iii) Pour démontrer (3.64), on utilise (3.50) on trouve

$$\begin{aligned}
\|\phi u_\varepsilon\|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} &= \int_\Omega |\phi u_\varepsilon(x)|^{2_s^*}dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\phi u_\varepsilon(x)|^{2_s^*}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{2_s^*}dx + \int_{\mathbb{R}^N} (|\phi(x)|^{2_s^*} - 1)|u_\varepsilon(x)|^{2_s^*}dx \\
&= S_s^{\frac{N}{2s}} + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}} (|\phi(x)|^{2_s^*} - 1)|u_\varepsilon(x)|^{2_s^*}dx \\
&= S_s^{\frac{N}{2s}} + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}} \Big(|\phi(x)|^{2_s^*} - 1\Big)\left|\frac{\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2s}{2}}}\right|^{2_s^*}dx \\
&= S_s^{\frac{N}{2s}} + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}} (|\phi(x)|^{2_s^*} - 1)\frac{\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}dx \\
&\cong S_s^{\frac{N}{2s}} + \varepsilon^N\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}} \frac{1}{|x|^{2N}}dx \\
&= S_s^{\frac{N}{2s}} + \varepsilon^N\int_{\frac{r}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{N+1}}dt \\
&\leqslant S_s^{\frac{N}{2s}} + \frac{2^N\varepsilon^N}{Nr^N} \\
&= S_s^{\frac{N}{2s}} + C\varepsilon^N = S_s^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^N),
\end{aligned}$$

avec $C > 0$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

iv) D'après (3.49) on a

$$
\begin{aligned}
\|\phi u_\varepsilon\|^{2_s^*-1}_{L^{2_s^*-1}(\Omega)} &= \int_\Omega \phi^{2_s^*-1}\frac{\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}{\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{N+2s}{2}}}dx \\
&\geqslant \int_{\{|x|<\frac{r}{2}\}} \frac{\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}{\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{N+2s}{2}}}dx \\
&\geqslant \int_{\{|x|<\varepsilon\}} \frac{\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}{\left(2\varepsilon^2\right)^{\frac{N+2s}{2}}}dx + \int_{\varepsilon<\{|x|<\frac{r}{2}\}} \frac{\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}{\left(2|x|^2\right)^{\frac{N+2s}{2}}}dx \\
&\geqslant \frac{1}{2^{\frac{N+2s}{2}}\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}\int_{\{|x|<\varepsilon\}} dx + \frac{\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}{2^{\frac{N+2s}{2}}}\int_{\{\varepsilon<|x|<\frac{r}{2}\}}\frac{1}{|x|^{N+2s}}dx \\
&\geqslant \frac{1}{2^{\frac{N+2s}{2}}\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}\int_0^\varepsilon t^{N-1}dt + \frac{\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}{2^{\frac{N+2s}{2}}}\int_\varepsilon^{\frac{r}{2}}\frac{1}{t^{2s+1}}dt.
\end{aligned}
$$

En intégrant, on obtient

$$
\begin{aligned}
\|\phi u_\varepsilon\|^{2_s^*-1}_{L^{2_s^*-1}(\Omega)} &\geqslant \frac{\varepsilon^N}{2^{\frac{N+2s}{2}}\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}(N)} - \frac{\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}}{2^{\frac{N+2s}{2}}(2s+1)}\left[\left(\frac{2}{r}\right)^{2s} - \frac{1}{\varepsilon^{2s}}\right] \\
&\geqslant \frac{\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}}{2^{\frac{N+2s}{2}}(N)} - \frac{1}{2^{\frac{N+2s}{2}}(2s+1)}\left[\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}\left(\frac{2}{r}\right)^{2s} - \varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}\right] \\
&\geqslant \underbrace{\left(\frac{N+2s+1}{2^{\frac{N+2s}{2}}N(2s+1)}\right)}_{>0}\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}} - \left(\frac{1}{2^{\frac{N-2s}{2}}r^{2s}(2s+1)}\right)\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}} \\
&\geqslant C_4\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}} - C_4'\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}, \\
&\geqslant C\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{N+2s}{2}}). \qquad (5.74)
\end{aligned}
$$

pour ε assez petit, C_4, C_4', C des constantes strictement positives.

$\square$

Bibliographie

[1] N. Abatangelo, *Large s-harmonic functions and boundary blow-up solutions for the fractional Laplacian.* an, Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 12 (2015), 5555-5.

[2] B. Abdellaoui, M. Medina, I, Peral, and A. Primo, *The effect of the Hardy potential in some Calderón-Zygmund properties for the fractional Laplacian*, J. Differ. Equ. 260 (2016), 8160-8206.

[3] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[4] R. A. Adams and J. J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Elsevier Science, 2003.

[5] A. Ambrosetti, *Critical points and nonlinear variational problems,* Mém. Soc. Math. France (N.S.) 49 (1992), 2009-2010.

[6] A. Ambrosetti, G.J. Azorero, I. Peral, *Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations*, J. Funct. Anal. 137 (1996), 219-242.

[7] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex non-linearities in some elliptic problems.* J. Funct. Anal. 122 (2) (1994), 519-543.

[8] V. Ambrosio - J. Mawhin - G. Molica Bisci, *(Super)critical nonlocal equations with periodic boundary conditions.* Sel. Math. New Ser. 24 (2018), 3723–3751.

[9] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus,* second ed. , Camb. Stud. Adv. Math., vol. 116, Cambridge University Press, Cam-bridge, 2009.

[10] B. Barrios, E. Colorado, A. De Pablo, U. Sánchez, *On some critical problems for the fractional Laplacian operator.* J. Differential Equations, 252 (11) (2012), 6133-6162.

[11] B. Barrios, E. Colorado, R. Servadei, F. Soria, *A critical fractional equation with concave-convex power nonlinearities.* Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Linéaire. 32 (4) (2015), 875-900.

[12] B. Barrios, M. Medina and I. Peral, *Some remarks on the solvability of non-local elliptic problems with the Hardy potential,* Commun. Contemp. Math. 16.04 (2014), 1350046.

[13] B. Barrios, I. Peral, S. Vita, *Some remarks about the summability of nonlocal non-linear problems.* Adv. Nonlinear Anal. 4 (2015), 91-107.

[14] J. Bertoin, *Lévy Processes,* Camb. TractsMath., vol.121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[15] M. Bhakta, D. Mukherjee, *Sign changing solutions of p-fractional equations with concave-convex nonlinearities*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 51 (2018), 511-544.

[16] U. Biccari, M. Warma, E. Zuazua, *Local elliptic regularity for the Dirichlet fractional Laplacian.* Adv. Nonlinear Stud., 17 (2017), 387-409.

[17] G.M. Bisci, G. Molica, V. D. Radulescu and R. Servadei, *Variational methods for nonlocal fractional problems.* Vol. 162. Cambridge University Press, 2016.

[18] Y.O. Boukarabila,Y. Nasri, A. Senhadji, *Critical problem for the fractional Laplacian operator with sign changing data*, Complex Var. Elliptic Equ. 67 (9) (2022), 2181-2197.

[19] J. Bourgain, H. Brezis and P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces,* in : Optimal Control and Partial Differential Equations, IOS, Amsterdam, 2001, 439-455.

[20] L. Brasco, S. Mosconi, M. Squassina, *Optimal decay of extremal functions for the fractional Sobolev inequality,* Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), 1-32 .

[21] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Am. Math. Soc. 88 (3) (1983), 486-490.

[22] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. 36 (4) (1983), 437-477.

[23] C. Bucur and E. Valdinoci. *Nonlocal diffusion and applications,* volume 20 of Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer International Publishing, 2016.

[24] N. P. Các, J. A. Gatica et Y. Li, *Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign,* Nonlin. Analy sis 37 (1999), 501-510.

[25] L. Caffarelli, *Non-local diffusions, drifts and games,* Nonlinear Partial Differential Equations, Abel Symposia 7 (2012), 37-52.

[26] L. Caffarelli, J. M. Roquejoffre et Y. Sire, *Variational problems with free boundaries for the fractional Laplacian,*J. Eur. Math. Soc. 12 (2010), 1151-1179.

[27] L. Caffarelli et L. Silvestre , *An extension problem related to the fractional Laplacian,* Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), 1245-1260.

[28] D.M. Cao, G.B. Li et H.S. Zhou, *Multiple solutions for nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent,* Proc.Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 124 (1994), 1177-1191.

[29] W. Chen, C. Li et B. Ou, *Classification of solutions for an integral equation,* Comm. Pure Appl. Math. 59 (2006), 330-343.

[30] D. Choudhuri, A. Soni, *Existence of multiple solutions to a partial differential equation involving the fractional p-Laplacian,* J. Analysis, 23 (2015), 33-46.

[31]] R. Cont et P. Tankov, *Financial modelling with jump processes,* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004

[32] D.G. Costa et O.H. Miyagaki, *Nontrivial solutions for perturbations of the pLaplacian on unbounded domains,* J. Math. Anal. and Appl., 193 (1995), 737-755.

[33] A. Cotsiolis, N. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J.Math.Anal.Appl. 295 (2004), 225-236.

[34] M. Cozzi, *Qualitative Properties of Solutions of Nonlinear Anisotropic PDEs in Local and Nonlocal Settings.* PhD thesis, 2015.

[35] Q. Dai, Y. Gu, *Positive solutions for non-homogeneous semilinear elliptic equations with data that changes sign.* Proc. R. Soc. Edinb. A 133 (2) (2003), 297-306.

[36] Q.Y. Dai, L.H. Peng, *Necessary and sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of inhomogeneous p-Laplace equation,* Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 27 (2007), 34-56.

[37] F. Demengel, G. Demengel, R. Erné, *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations.* Universitext. Springer, London ; EDP Sciences, Les Ulis (2012).

[38] E. Di Nezza, G. Palatucci and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces.* Bull. Sci. Math. 136 (2012), 521-573.

[39] A. Fiscella , G. Molica Bisci , R. Servadei, *Bifurcation and multiplicity results for critical nonlocal fractional problems.* Bull. Sci. Math. 140 (2016), 14-35.

[40] A. Fiscella, G. Molica Bisci, R. Servadei, *Multiplicity results for fractional Laplace problems with critical growth.* Manuscripta Math. 155 (2018), 369-388.

[41] A. Fiscella, R. Servadei and E. Valdinoci, *Asymptotically linear problems driven by fractional Laplacian operators.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 38 (2015), 3551-3563.

[42] R. Frank, E. Lieb and R. Seiringer, *Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators.* Journal of the American Mathematical Society, 21 (2008), 925-950.

[43] G. Franzina et G. Palatucci, *Fractional p-eigenvalues.* Riv. Math. Univ. Parma (N.S.), 2 (5) (2014), 373-386.

[44] S. Gao, S. Huang, Q. Tian and Z.P. Ma, *The Solvability of Fractional Elliptic Equation with the Hardy Potential.* Complexity 2020 (2020), 1-8.

[45] J. Garcia Azorero, I. Peral, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with non-symmetric term,* Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 877-895.

[46] N. Ghoussoub, D. Preiss, *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 6, 198 (1989), 321-30.

[47] S. Goyal. *On the eigenvalues and Fučik spectrum of p-fractional Hardy-Sobolev operator with weight function.* Appl. Anal. 97.4 (2018), 633-658.

[48] S. Goyal, K. Sreenadh, *Existence of multiple solutions of p-fractional Laplace operator with sign-changing weight function,* Adv. Nonlinear Anal. 4 (2015), 37-58.

[49] A. Iannizzotto,S. Mosconi, M. Squassina, *Global Holder regularity for the fractional p-Laplacian*, Rev. Mat. Iberoam. 32 (2016), 1353-1392.

[50] A. Iannizzotto, S. Liu, K. Perera, M. Squassina, *Existence results for fractional p-Laplacian problems via Morse theory,* Adv. Calc. Var. 9 (2016), 101-125.

[51] H. Hajaiej, G. Molica Bisci, L. Vilasi, *Existence results for a critical fractional equation*, Asymptot. Anal. 100 (2016), 209–225..

[52] O. Kavian, *Introduction á la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques.* Mathématiques & Applications 13, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[53] E. Lindgren, P. Lindqvist, *Fractional eigenvalues,* Calc. Var. Partial Differential Equations 49 (2014), 795-826.

[54] C. Louis-Rose and J. Velin, *On a non-existence result involving the fractional p-Laplacian.* Rivista di Matematica della Università di Parma 6.2 (2015), 345-355.

[55] M. Lucia, *On the uniqueness and simplicity of the principal eigenvalue.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9), Mat. Appl. 16 (2005), 133-142.

[56] S. Mosconi, K. Perera,M. Squassina,Y. Yang, *The Brezis-Nirenberg problem for the fractional p-Laplacian.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 55 (2016), 55-105.

[57] Y. Naito, T. Sato, *Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent.* Ann. Mat. Pura Appl. 191 (1) (2012), 25-51.

[58] Y. Nasri et A. Senhadji, *Multiplicity results for critical fractional p-Laplacian problem.* Submitted.

[59] Y. Nasri et A. Senhadji, *Existence of solution for an asymptotically elliptic problems involving the Hardy potential.* Submitted.

[60] K. Perera, M. Squassina, Y. Yang, *Bifurcation results for critical growth fractional p-Laplacian problems*, Math. Nachr. 289 (2016), 332-342.

[61] R. Servadei, E. Valdinoci, *Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators,* J. Math. Anal. Appl. 389 (2012), 887-898.

[62] R. Servadei, E. Valdinoci,*The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian,* Trans. Amer. Math. Soc. 367(1), (2015), 67-102.

[63] X. Shang, J. Zhang and R. Yin, *Existence of positive solutions to fractional elliptic problems with hardy potential and critical growth,* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42 (2019), 115-136.

[64] L.Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator,*Commun.Pure Appl.Math. 60 (1) (2007), 67-112.

[65] M. Struwe, *Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Ergeb. Math. IhrerGren-zgeb. , vol.3, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[66] X. Ros-Oton, *Nonlocal elliptic equations in bounded domains : a survey.* Publ. Mat. 60, (2016), 3-26.

[67] X. Ros-Oton, J. Serra, *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian : regularity up to the boundary.* J. Math. Pures Appl. 101 (3) (2014), 275-302.

[68] X. Ros-Oton, J. Serra. *The Pohozaev identity for the fractional Laplacian.* Archive for Rational Mechanics and Analysis 213 (2) (2014), 587-628.

[69] Y. Wei and X. Su, *On a class of non-local elliptic equations with asymptotically linear term, Discrete Contin. Dyn. Syst.* 38 (2018), 6287-6304.

[70] H.S. Zhou, *An application of a mountain pass theorem,* Acta Math. Sin. (English Ser.), 18.1 (2002), 27-36.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude d'une classe de problèmes non locaux avec perte de compacité faisant intervenir essentiellement le laplacien fractionnaire ou le p-laplacien fractionnaire. Plus précisément on s'intéresse à l'existence et la multiplicité des solutions de la classe de problèmes suivants

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

où $f(x,u)$ est une fonction qui sera définie ultérieurement, selon les différents cas considérés dans ce manuscrit.

Mots-clés: Laplacien fractionnaire ; p-laplacien fractionnaire ; exposant critique ; méthode variationnelle ; méthode de sous et sur solution ; potentiel de Hardy ; terme asymptotiquement linéaire.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of a class of non-local with loss of compactness essentially involving the fractional laplacian or the fractional p-laplacian. More precisely we are interested in the existence and the multiplicity of the solutions of the following class of problems

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

where $f(x,u)$ is a function that will be defined later, depending on the different cases considered in this manuscript.

Keywords: Fractional laplacian; fractional p-laplacian; critical exponent; variational method; sub-super solution method; Hardy potential; asymptotically linear term.

ملخص

في هذه الأطروحة ، نحن مهتمون بدراسة فئة غير محلية مع فقدان الانضغاط التي تنطوي أساساً على لابلاسيان الكسري أو ص-لابلاسيان الكسري. بتعبير أدق نحن مهتمون بوجود وتعدد حلول فئة المشاكل التالية

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x,u) & in\ \Omega, \\ u = 0 & in\ \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

حيث $f(x,u)$ هي وظيفة سيتم تعريفها لاحقاً ، وفقاً للحالات المختلفة التي تم تناولها في هذه المخطوطة.

الكلمات المفتاحية: ،ص-لابلاسيان الكسري ،لابلاسيان ، الأس الحرج ، الطريقة المتغيرة ، طريقة تحت وفوق الحل ، جهد هاردي ، مصطلح خطي مقارب.