



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques Appliquées

Par :

Mme BOUAYAD AGHA née SARI Zakya

Sur le thème

Sur un modèle épidémiologique structuré en âge Stabilité et Contrôle Optimal

Soutenue publiquement le 17 Juillet 2023 à Tlemcen devant le jury composé de :

M. ABDELLAOUI. B	Professeur	Université de Tlemcen	Président
M. TOUAOULA. M.T	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
M. AINSEBA. B	Professeur	Université de Bordeaux	Examineur
M. BENTOUT. S	MCA	Université de Ain Temouchent	Examineur
M. DUCROT. A	Professeur	Université du Havre	Examineur
M. MIRI. S.E-H	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur

*Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées (ANL)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

Dédicace

A mes très chers parents sans qui, rien ne serait possible. Ils m'ont constamment soutenue, un soutien sans limites mais surtout sans faille décisif pour que ce travail voit enfin le jour. Ils ont su donné un sens à la liberté pour que notre avenir soit prospère. Tout le mérite leur revient. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude et mon profond amour.

A toi mon père ; mon leader, mon mentor et mon ombre, je te souhaite une longue vie en pleine santé. A toi ma mère ; mon modèle, mon école et mon icône. Ce doctorat, je vous le dédie.

A mon mari et mes enfants.

A ma chère sœur.

A mes deux jeunes frères.

A tous ceux qui me sont chers.

"A la mémoire de ma mère"

*Les valeurs n'arrivent pas d'elles- mêmes,
Nos parents y sont pour beaucoup ;
Au symbole de l'affection inépuisable, à celle qui a suscité en moi la soif d'apprendre
et le goût à l'effort, je te dois ce que je suis.
Avec ta volonté et ta patience, l'impossible n'est pas....
Repose en paix.*

Remerciements

Tout d'abord, je remercie ALLAH de m'avoir assisté pour mener ce travail à terme.

En premier, j'adresse mes vifs et sincères remerciements à mon Directeur de thèse M. Tarik Mohammed Touaoula, pour avoir accepté de diriger mes travaux de recherche. D'un esprit de rigueur mathématique et aux idées perspicaces, il ne ménage aucun effort pour pousser la recherche vers l'avant : une disponibilité, une écoute et une confiance à la hauteur de ses compétences et de ses qualités humaines. Je remercie en lui le chercheur ambitieux, l'encadrant bienveillant au total engagement dont la modestie et la compréhension sont exemplaires.

Je prie M. Arnaud Ducrot, de trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail.

Mes remerciements vont également à M. Bedreddine Ainseba qui a accepté d'examiner ce travail mais aussi pour les quelques échanges et discussions fructueuses qu'il a bien voulu avoir avec moi, malgré son emploi du temps que je sais plus que chargé.

Je remercie M. Boumedienne Abdellaoui pour l'immense honneur qu'il me fait en présidant le jury qui examinera cette thèse.

J'exprime vivement ma reconnaissance et mes remerciements à M. Sofiane El-Hadi Miri pour ses lectures mais aussi pour avoir accepté de faire partie du jury. J'en suis honorée.

Mes remerciements s'adressent à M. Soufiane Bentout pour l'honneur qu'il me fait en examinant ce travail.

Je ne peux passer sans remercier humblement M. Mohammed Nor Frioui, docteur

à l'USTHB (Alger) pour son aide précieuse en matière de simulation numérique, moi qui suis théoricienne de formation.

J'aimerais remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à ce travail et particulièrement les membres du laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées de l'université de Tlemcen, pour la convivialité qu'ils ont su créer au sein du laboratoire.

Z. SARI

Table des matières

Motivation et état de l'art	1
0.1 Introduction	1
0.2 Premiers modèles mathématiques structurés en âge	2
0.3 Premiers modèles épidémiologiques à compartiments	4
0.3.1 Terminologie	4
0.3.2 Dynamiques de population ouverte, fermée	5
0.4 Application à l'épidémiologie : la TB	9
0.4.1 Qu'est ce que la tuberculose	9
0.4.2 Présence chez l'hôte	12
0.4.3 Transmission	13
0.4.4 Primo-infection	13
0.4.5 Tuberculose inactive	13
0.4.6 Tuberculose active	14
0.4.7 Pathogénie	14
0.4.8 Mesures préventives	15
0.4.9 Dépistage	15
0.4.10 Traitement	16
0.4.11 Rechute	17
0.4.12 Autour de certains modèles mathématiques	17
0.5 Présentation de la problématique	19
1 Outils mathématiques	20
1.1 Introduction	20
1.2 Stabilité des systèmes non linéaires sans contrôle	21
1.2.1 Théorème de Cauchy- Lipschitz	21
1.2.2 Concepts de base	22
1.2.3 Quelques résultats utiles	25
1.2.4 Stabilité par linéarisation	27

1.2.5	Stabilité au sens de Lyapunov	31
1.2.6	Persistence	33
1.3	Problème de contrôle optimal	35
1.3.1	Système d'état contrôlé	35
1.3.2	Formulation du Problème	36
1.3.3	Système adjoint- Principe du maximum de Pontryagin	37
2	Quelques modèles épidémiologiques structurés en âge.	40
2.1	Introduction	40
2.2	Stabilité d'un modèle du type SIR avec rechute	41
2.2.1	Modèle	41
2.2.2	Existence et unicité de la solution	42
2.2.3	Nombre de reproduction de base R_0	43
2.2.4	Semi-flot et attracteur global compact	45
2.2.5	Stabilité de l'équilibre sans maladie	46
2.2.6	Stabilité de l'équilibre endémique, persistance uniforme	46
2.3	Stabilité d'un modèle du type SIQ avec rechute	56
2.3.1	Modèle	56
2.3.2	Existence et unicité de la solution	57
2.3.3	Nombre de reproduction de base R_0	58
2.3.4	Attracteur global compact et trajectoires totales	58
2.3.5	Stabilité de l'équilibre sans maladie	61
2.3.6	Stabilité de l'équilibre endémique, persistance uniforme	62
2.4	Contrôle Optimal d'un modèle du type SIR avec dépistage et fonction réponse	69
2.4.1	Modèle	69
2.4.2	Intégration sur les lignes caractéristiques	70
2.4.3	Nombre de reproduction de base R_0	71
2.4.4	Problème de contrôle optimal	72
2.4.5	Existence du contrôle optimal	73
2.4.6	Conditions d'optimalité	73
2.4.7	Schéma numérique	75
3	Comportement asymptotique d'une classe de modèles épidémiologiques structurés en âge avec quarantaine.	76
3.1	Introduction	76
3.2	Modèle de base	77

3.2.1	Intégration sur les lignes caractéristiques	79
3.2.2	Existence et bornitude uniforme de la solution	80
3.2.3	Nombre de reproduction de base R_0	86
3.3	Semi-flot, attracteur compact, trajectoires totales	89
3.3.1	Semiflot et attracteur compact	89
3.3.2	Trajectoires totales	95
3.4	Stabilité globale de l'équilibre sans maladie	98
3.5	Stabilité globale de l'équilibre endémique et persistance uniforme	101
3.5.1	Existence et unicité	101
3.5.2	Persistance uniforme	102
3.5.3	Stabilité globale	107
3.6	Simulation numérique	111
3.6.1	Discussion	119

4 Dépistage optimal pour un modèle structuré en âge avec fonction

	réponse et rechute.	120
4.1	Introduction	120
4.2	Problème de contrôle optimal	121
4.3	Existence du contrôle optimal	124
4.4	Conditions d'optimalité	127
4.5	Schéma numérique	130
4.6	Conclusion	135

Notations

- X : espace de Banach.
- $p.p.$: presque partout.
- \mathbb{R} : corps des nombres réels.
- \mathbb{R}^+ : ensemble des réels positifs.
- $C(\mathbb{R}^+)$: espace de fonctions (réelles) continues définies sur \mathbb{R}^+ .
- $C(\mathbb{R}^+; X)$: espace de fonctions continues définies de \mathbb{R}^+ dans X .
- $C^k(\mathbb{R}^+)$: espace de fonctions (réelles) continûment dérivables jusqu'à l'ordre $k > 0$: la dérivée $k^{\text{ème}}$ existe et est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $C^k(\mathbb{R}^+; X)$: espace de fonctions définies de \mathbb{R}^+ dans X continûment dérivables jusqu'à l'ordre $k > 0$: la dérivée $k^{\text{ème}}$ existe et est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $C_c^\infty(\Omega)$: espace de fonctions continûment différentiables à support compact sur un ouvert Ω de X .
- $C_{BU}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$: espace de fonctions bornées uniformément continues de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ .
- $L^\infty(\mathbb{R}^+)$: espace de fonctions essentiellement bornées ou bornées p.p. sur \mathbb{R}^+ .
 $L^\infty(\mathbb{R}^+) = \{f \text{ mesurable et } \exists M > 0; |f| \leq M \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^+\}.$
- $L_+^\infty(\mathbb{R}^+)$: espace des fonctions $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ .
- $L^p(\mathbb{R}^+)$: espace de fonctions à puissance p intégrable sur \mathbb{R}^+ à valeur dans \mathbb{R} .
 $L^p(\mathbb{R}^+) = \{f \text{ mesurable; } \int_0^{+\infty} |f|^p < \infty\} (1 \leq p < \infty)$
- $L_+^p(\mathbb{R}^+)$: espace de fonctions $L^p(\mathbb{R}^+)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ .
- $W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega), \int_\Omega f' \phi = - \int_\Omega g \phi; \forall \phi \in C_c^1\}$
- $\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}, 1 \leq p \leq \infty.$

Motivation et état de l'art

0.1 Introduction

La modélisation mathématique ou la mise en équations (différentielles, aux dérivées partielles, intégro- différentielle ou à retard..) est une méthode de recherche mathématique qui vise à établir les interactions entre différents phénomènes représentés sous forme de variables en vue d'analyser un certain comportement dans un cadre fonctionnel précis. Bien que la connaissance de tous les phénomènes intervenants dans le même système est exigée, cette étape importante facilite la compréhension de différents mécanismes (physiques, chimiques, biologiques, médicaux...) permettant d'apporter des résultats complémentaires aux résultats relatifs à ces domaines.

Dès lors, les modèles mathématiques constituent un outil très puissant pour la recherche scientifique, faisant ses preuves dans des domaines variés, tout particulièrement, en épidémiologie. Cette discipline scientifique qui consiste à décrire et à comprendre les dynamiques d'une infection donnée dans une population humaine, sa vitesse de propagation, sa distribution temporelle et/ou différentes structures afin de la stabiliser autour d'un équilibre donné ; on parle donc de stabilité. Sinon, à prédire certaines stratégies permettant de régresser, de stopper ou de freiner au mieux possible sa propagation ; on parle donc de contrôle optimal.

Face aux défis et pour atteindre certains objectifs fixés, tenant compte de la complexité des facteurs de causalité, de la difficulté des questions soulevées et de la précision exigée, des résultats significatifs ont été apportés éclairant les décisions relatives aux politiques surtout quand le problème devient de santé publique. Sur la stabilité asymptotique, nous renvoyons à [118], [77] et [111] et sur le contrôle optimal, nous renvoyons à [47].

Revenons rapidement sur la jeunesse des modèles mathématiques en dynamique de population en soulignant l'intérêt de la structure en âge.

- En dynamique de populations, les premiers résultats remontent au 18^{ème} siècle, et sont dus à Fibonacci, lorsqu'il s'intéressait la croissance de la population des lapins : des résultats contemporains, sans précédent, connus sous les noms de la suite de Fibonacci et au nombre d'or.

Un modèle mathématique des plus simples qui prend en compte la variable temporelle remonte à 1798 avec Thomas Robert Malthus [81]. Un modèle applicable que dans un milieu à ressources illimitées, auquel cas le taux de croissance $\alpha_0 := \beta - \mu > 0$ (β et μ sont les taux de natalité et mortalité respectifs) donne lieu à une population à croissance exponentielle ; une catastrophe malthusienne.

C'est en 1838 que le biologiste belge Pierre François Verhulst a modifié le modèle de Malthus en faisant dépendre le taux de croissance, de manière linéaire, de la population totale pour donner un modèle logistique [51] qui tient en considération la limitation de ressource (due à la densité de la population).

Ces modèles négligent toute structure en âge, en taille...or les différentes classes d'âge ne contribuent pas à la reproduction de nouveaux nés de la même façon et la mortalité n'atteint pas ces classes de la même manière : des âges différents donnent lieu à des comportements différents.

0.2 Premiers modèles mathématiques structurés en âge

Retraçons, l'historique des modèles structurés en âge : un premier modèle qui prend en considération la structure en âge a été proposé par Lotka- McKendrick- Von Foerster [87].

$$\begin{cases} Du(t, a) = m(a)u(t, a), a \geq 0, t \geq 0 \\ u(t, 0) = \int_0^{+\infty} b(a)u(t, a)da, t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), a \geq 0. \end{cases}$$

Où $u_0(a)$ est la distribution initiale. $Du(t, a) := \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a}$ étant la différentielle totale, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial a}$ dénotent les dérivées partielles de u par rapport à t et a respectivement.

Un modèle linéaire d'un grand intérêt qui était à la base de bien d'autres modèles non linéaires [13] et [115].

Les modèles non linéaires structurés en âge ont fait leur apparition sous l'impulsion de Gurtin et McCamy [50] où les paramètres démographiques tiennent compte de la population totale P en plus de la variable âge. Le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} Du(t, a) = m(a, P(t)) u(t, a), a \geq 0, t \geq 0 \\ u(t, 0) = \int_0^{+\infty} b(a, P(t)) u(t, a) da, t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), a \geq 0. \end{cases}$$

avec $P(t) = \int_0^{+\infty} u(t, a) da.$

G. Di Blasio a proposé par la suite son modèle [34] où le taux de fécondité à l'instant t dépend des populations antérieures :

$$\begin{cases} Du(t, a) = m(a, P(t)) u(t, a), a \geq 0, t \geq 0 \\ u(t, 0) = \int_0^{+\infty} b(a, F(P_t)) u(t, a) da, t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), a \geq 0. \end{cases}$$

avec $F(P_t) = \int_{-r}^0 P(t+s) ds, (r > 0).$

L'auteur a tout de même proposé le modèle suivant :

$$\begin{cases} Du(t, a) = m(a) u(t, a), a \geq 0, t \geq 0 \\ u(t, 0) = \phi(N(t)).N(t), t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), a \geq 0. \end{cases}$$

Où $N(t) = \int_0^A b(a) u(t, a) da.$

Un exemple de cette situation est celui de la population de poissons. Si $N(t)$ désigne la densité de la production des œufs alors ϕ note le processus de contrôle permettant le passage de l'état œuf à l'état poisson : c'est la proportion des œufs survivants qui deviennent poisson. $u(t, 0) = u(t, 0 + da)$ est la densité de jeunes poissons.

Un modèle dont les taux démographiques b et m (de natalité et mortalité respectifs) dépendent de t, a et $u(t, a)$ a été proposé par E. Sinestrari dans [103].

$$\begin{cases} Du(t, a) = m(t, a, u(t, a)) u(t, a), a \geq 0, t \geq 0 \\ u(t, 0) = \int_0^A b(t, a, u(t, a)) u(t, a) da, t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), a \geq 0. \end{cases}$$

Ces modèles sont aussi connus comme des modèles à la condition non locale.

0.3 Premiers modèles épidémiologiques à compartiments

0.3.1 Terminologie

Un peu de terminologie est utile pour la suite :

- **Une endémie** est une infection qui reste présente géographiquement et de façon permanente comme le Paludisme par exemple.
- **Une pandémie** est une infection qui ne cesse de s'étendre de zone en zone partout dans le monde comme le VIH.
- **Une épidémie** est une infection qui vit sur une certaine zone pour une durée déterminée comme toute grippe.

- **Période d'incubation** est la période comprise entre le début de l'infection jusqu'à l'apparition des premiers signes cliniques.
- **Période latente** est la période comprise entre le début de l'infection jusqu'à sa transmission.

- **Fonction incidence** est le nombre de nouveaux cas infectés dans une population, générés pendant une certaine période. Si $S(t)$ désigne le nombre des susceptibles et $I(t)$ celui des infectés à l'instant t , la fonction bilinéaire

$$f(S(t), I(t)) = S(t)I(t)$$

connue par l'action de masse (nombre de cas infectés est proportionnel au nombre de susceptibles) sera utile par la suite.

Tous les modèles pré-cités dépendent que de la variable temps $t > 0$. Or, l'évolution des maladies infectieuses quelle que soit son origine : virales, bactériennes ou parasitaires, dépend généralement d'**un âge a de l'infection** : le temps écoulé depuis le début de

l'infection.

Cependant, un concept assez récent, utilisé spécialement en épidémiologie a été introduit en 2010 par Dieckmann [36] : un seuil qui prend le rôle du taux de croissance (noté plus haut par α_0) en dynamique de populations et qui joue un rôle très important dans la détermination de la stabilité d'un modèle mathématique est dit :

- **Nombre de reproduction de base** est le nombre moyen de cas secondaires infectés dus à l'introduction d'un individu infecté, pendant sa période d'infectiosité, dans une population entièrement saine mais susceptible. Ce nombre est noté R_0 , voir [36].

Un nombre qui dépend de la durée de la phase de transmission de l'infection, de la probabilité d'une éventuelle transmission de l'infection au cours de la phase de contamination et le nombre moyen de contacts qu'un individu infectieux peut avoir. Le lecteur peut se référer également à [35] et les références y afférentes.

La modélisation épidémiologique a vu le jour avec le médecin physicien mathématicien suisse Daniel Bernoulli (1700- 1782) qui consistait à représenter l'évolution de la dynamique de la variole assujetti à l'inoculation (une technique attestée depuis des siècles en Asie).

Un premier modèle mathématique représentant les dynamiques d'une infection transmissible est du à Ronald Ross en 1911, dans une population de moustiques. Des résultats mathématiques fort intéressants affirment que la régression de la transmission de l'infection passe par la réduction de la densité de moustiques infectieuses en dessous d'un certain seuil.

Ce résultat original fut le point de départ des travaux du médecin de la santé publique KERMACK et du biochimiste McKENDRICK (1927- 1932- 1933) qui s'intéressaient particulièrement à la dynamique de la transmission de l'infection chez les humains. Si S désigne le compartiment de la population des susceptibles, I celui des infectées et R celui des rétablis à chaque instant t , ce modèle est dit à compartiments du type SIR.

0.3.2 Dynamiques de population ouverte, fermée

- Les deux modèles suivants concernent une population fermée : considérée sur une période très courte (une quinzaine des jours, un mois) où les paramètres extérieurs (naissances, mortalités,...) sont négligés.

En effet, à tout instant $t > 0$, la probabilité qu'un individu susceptible devienne infecté



FIGURE 1 – A. G. McKendrick (1876- 1943)

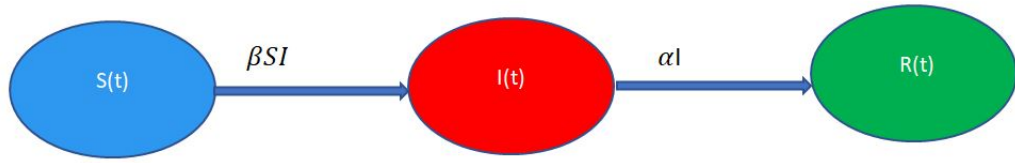


FIGURE 2 – Schéma de transmission du virus dans une population fermée à l'instant t .

est proportionnelle (par la loi de l'action de masse) au nombre d'individus actuellement infectés à un coefficient de proportionnalité $\beta > 0$. Ainsi lorsque la densité $I(t)$ est importante, le terme βSI sera effectivement considéré comme infectés et s'ajoute, à tout instant $t > 0$, au compartiment $I(t)$. Le terme αI désigne les individus rétablis, retirés du compartiment des infectés pour intégrer celui des réfractaires. Les paramètres β et α étant les taux de transmission et de guérison respectivement, (voir Figure (2)). Le modèle est le suivant

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t), \\ R'(t) = \alpha I(t), \end{cases} \quad (1)$$

Plus précisément, les auteurs ont mis au point le modèle le plus simple de l'épidémie de la peste. Il existe bien d'autres modèles du type SI, SIS, SIR, SIRS, etc... Ne citons ici que quelques uns des plus classiques :

$$(SI/SIS) : \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) + gI(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - gI(t), \end{cases} \quad (2)$$

Dans un bon nombre de cas, lorsque l'infection atteint son pique, les individus infectés peuvent guérir tout en restant de nouveaux susceptibles. Si un individu infecté à la probabilité g de guérir par unité de temps, alors gI est le nombre d'individus guéris par jour selon le modèle SIS. Lorsque $g = 0$, nous retrouvons le modèle SI.

Malheureusement, certaines épidémies sont mortelles à un taux de mortalité $\mu_1 > 0$ près : nombre de décès par unité de temps. Soit X un compartiment réservé aux décès. Ceux qui sont guéris, ont développé une certaine immunité à cette infection : une immunité permanente pour certains cas mais temporaire pour d'autres. Soient r le taux de guérison des individus ayant acquis actuellement l'immunité et s celui des individus ayant perdu actuellement leur immunité et redevenus, par suite, susceptibles, selon le

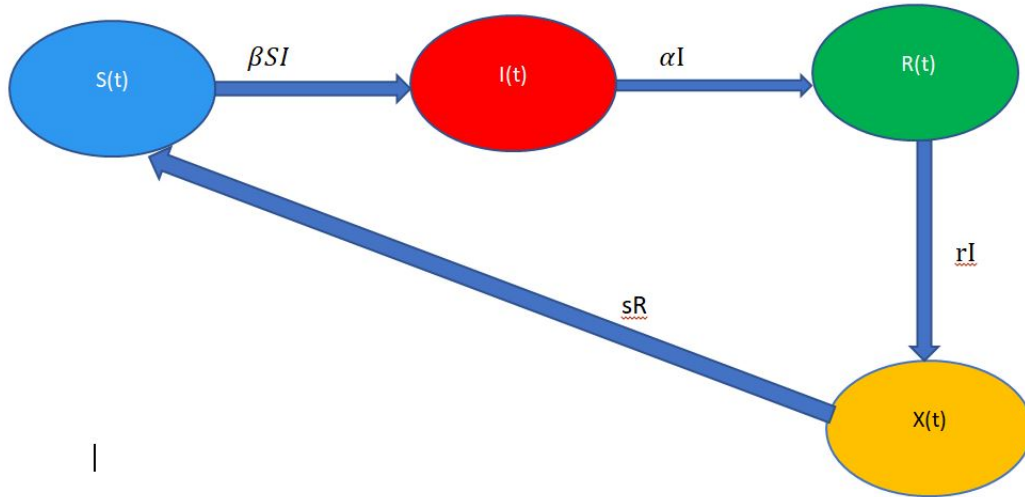


FIGURE 3 – Schéma de transmission du virus dans une population ouverte à l'instant t .

modèle SIRS.

- Les deux modèles suivants concernent une population ouverte (une période qui s'étale sur une année).

$$(SIR/SIRS) : \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) + sR(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) - \mu_1 I(t), \\ R'(t) = \alpha I(t) - sR(t), \\ X'(t) = rI(t) \end{cases} \quad (3)$$

voir (Figure [3](#)). Lorsque $s = 0$, on a le modèle SIR.

Contrairement au cas de maladies mortelles où le taux de mortalité naturelle μ est tel que $\mu_1 > \mu$, lorsque la maladie n'est pas mortelle on a $\mu_1 = \mu$ et le modèle du type SIR prend généralement la forme (de base) suivante

$$\begin{cases} S'(t) = A - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) - \mu_1 I(t), \\ R'(t) = \alpha I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (4)$$

La constante $A > 0$ étant le flux constant rentrant à la classe des susceptibles : une borne supérieur de la natalité.

Il existe une littérature abondante sur les modèles du type SI, SIS, SIR, SIRS, SEIR, SEIRS (E désigne la population des exposés) prenant en compte les différentes structures : âge, espace et/ou différents paramètres (sous forme de stratégies préventives ou de prise en charge).

0.4 Application à l'épidémiologie : la TB

La tuberculose (souvent notée TB ou TBC) est une maladie infectieuse très ancienne connue comme un problème de santé publique.

En général, les causes de cette infection sont liées aux conditions de précarité, son incidence et son développement vient du fait de l'éclosion mondiale de l'infection par le virus de l'immuno déficience humaine (VIH), l'immigration et la résistance aux antibacillaires.

- Un peu d'anatomie sur la TB fait l'objet de sous sections suivantes, le lecteur peut se référer à [101], [100] et [110]. Les photos suivantes, entre autres sont tirées des liens respectifs : [121], [122], [123], [124], [125].

0.4.1 Qu'est ce que la tuberculose

C'est une maladie d'origine bactérienne transmissible par voie aérienne provoquée par une micro bactérie atypique (ne répondant pas à un certain type) dit Mycobacterium tuberculosis (MBT) ou "bacille de Koch", attribué en 1882 par Robert Koch un médecin allemand [121] (dont les travaux lui valent un Prix Nobel en physiologie en 1905).

Ce bacille aérobic (milieu qui contient du dioxygène) est sous forme de bâtonnet stricte immobile droit ou légèrement incurvé, de 2 à 5 μ m sur 0.3 à 0.5 μ m. Un génome (un matériel génétique codé par son ADN) de chromosomes circulaires de 4411529 paires de bases et 3924 gènes, séquencé en 1998, [121], et dont le réservoir est malheureusement notre corps.

En effet, le MBT pénètre dans le corps humain par inhalation de goutelettes qui se trouvent dans l'air et finit dans les poumons. A partir de là, la diffusion se fait soit directement à d'autres organes ou indirectement passant par le système sanguin lymphatique ou par voies aériennes. On distingue deux formes de la TB, entre autres :

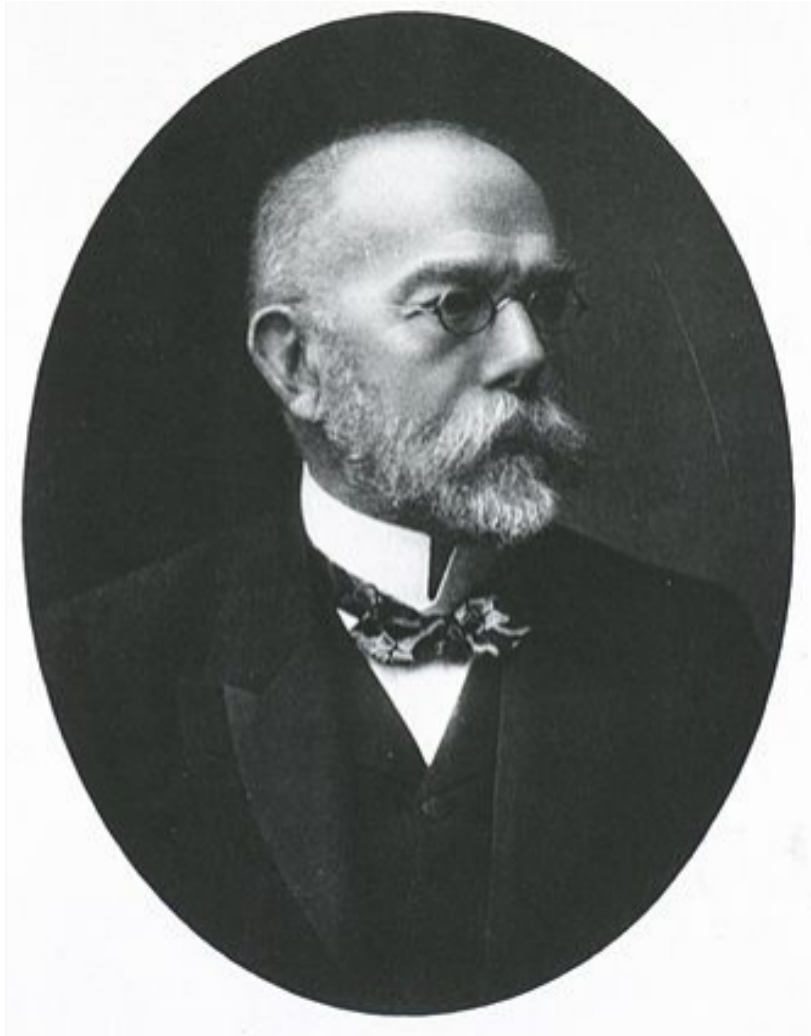


FIGURE 4 – (1843-1910) En 1882, Dr Robert Koch a mis en évidence le bacille tuberculeux

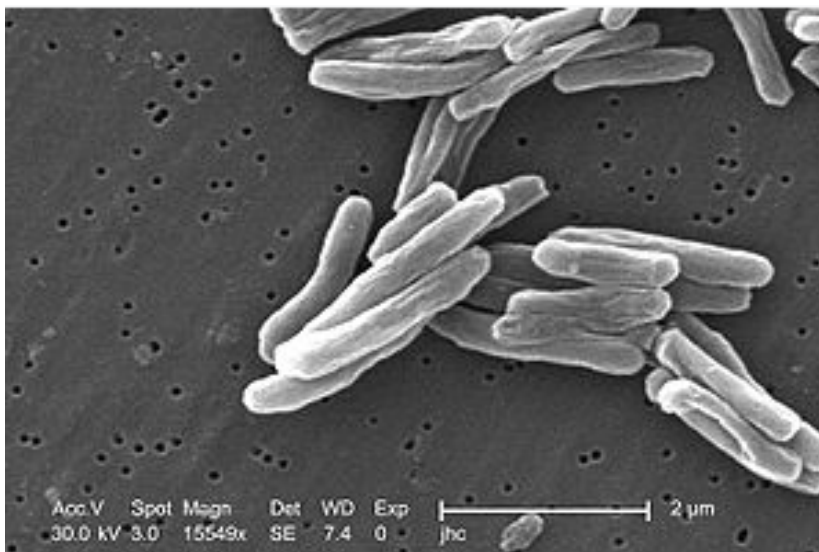


FIGURE 5 – Mycobacterium tuberculosis grossi 15549 fois

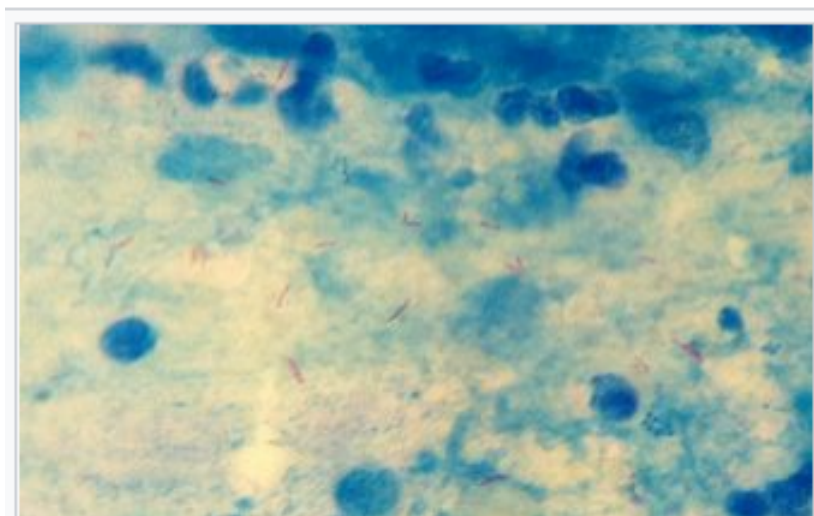


FIGURE 6 – Mycobacterium tuberculosis colorés en rouge dans les expectorations d'un patient infecté (coloration Ziehl-Nielsen)

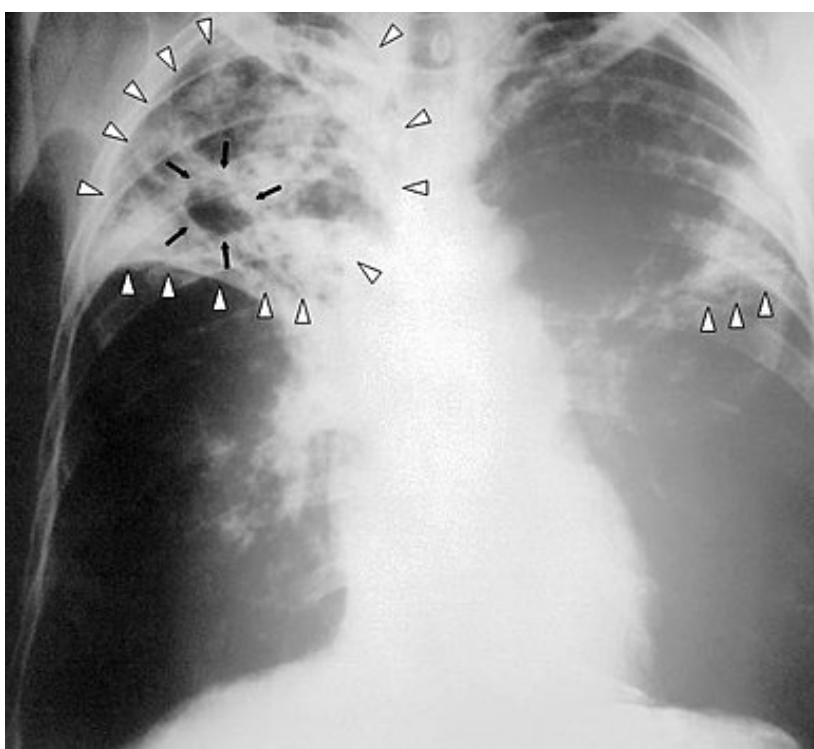


FIGURE 7 – Radiographie du thorax d'un patient avec une tuberculose pulmonaire avancée

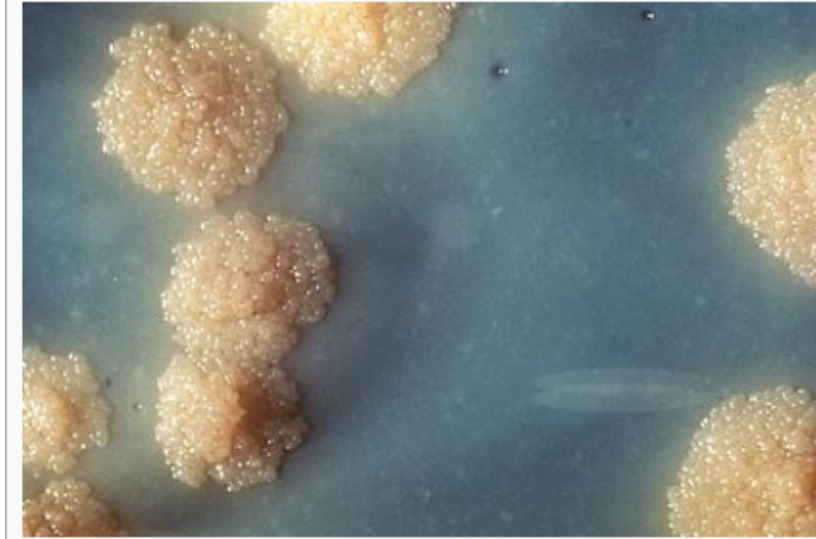


FIGURE 8 – Culture de Mycobacterium tuberculosis

1. La TB pulmonaire : assez fréquente et peut être contagieuse, concerne 80% des cas, dont les symptômes sont :
 - Une toux qui dure au moins deux semaines.
 - Des expectorations parfois striées de sang (hémoptysie), les difficultés respiratoires et les douleurs thoraciques.
 - Une perte d'appétit avec perte de poids, fatigue et malaise en général, fièvre et sueurs nocturnes.
2. La TB extra- pulmonaire atteint d'autres organes ; ganglions lymphatiques, colonne vertébrale, les os et les articulations, les voies génito-urinaires, le système nerveux et l'abdomen pour se répandre dans tout le corps. Cette forme n'est pas contagieuse, dont les symptômes varient en fonction des organes touchés. Des douleurs thoraciques, une inflammation ganglionnaire lymphatique et une déformation de la colonne vertébrale.

0.4.2 Présence chez l'hôte

Les bacilles tuberculeux peuvent être présents à l'intérieur et à l'extérieur des cellules, dans toutes les lésions tuberculeuses et même une fois éliminés, peuvent persister aussi longtemps dans les milieux extérieurs (crachats). Ces derniers peuvent persister des années à l'état latent (période qui s'étend entre le début de l'infection jusqu'à sa transmission).

En épidémiologie, on ne peut parler de porteur de germes : ces bacilles latents sont

enfermés dans des foyers profonds entourés d'une coque fibreuse ou calcifiée, seuls sont actifs et par suite contagieux les tuberculeux évolutifs, excréant leurs bacilles dans leurs expectorations [126].

0.4.3 Transmission

La transmission se fait essentiellement par voie aérienne, parfois, orale ou digestive. La bactérie provoque des lésions très riches en germes, ce qui permet une dissémination importante de l'agent infectieux par les voies respiratoires, surtout en présence de fortes toux.

- La tuberculose pulmonaire (voir la sous section plus haut) résulte de l'inhalation de particules (nuclei) suffisamment petites (autour de 8 microns) pour atteindre les alvéoles (petite cavité sphérique d'un sac alvéolaire situé à l'extrémité des bronchioles de l'arbre bronchique, où se déroulent les échanges gazeux avec le sang). *Mycobacterium tuberculosis* a la particularité d'être très résistant dans l'air et les poussières ce qui fait de la tuberculose une maladie très contagieuse [126].

0.4.4 Primo-infection

Cette phase correspond à la présence asymptomatique de bacilles tuberculeux dans le corps, elle peut durer de deux à douze semaines et elle n'est pas à déclaration obligatoire.

Le développement de la TB dans le corps se fait en deux étapes :

- La première étape : est une phase d'exposition aux bacilles d'un patient ayant rétracté une forme contagieuse de la TB.
- Dans la seconde étape l'individu infecté (par la TB) développe des signes cliniques et des symptômes relatifs à la TB active.

0.4.5 Tuberculose inactive

La tuberculose inactive ou non évolutive correspond à une image radiologique pulmonaire anormale, mais reste sans signes cliniques avec image radiologique stable et test bactériologique négatif depuis au moins six mois.

Cette phase n'est pas à déclaration obligatoire.

0.4.6 Tuberculose active

Le développement actif de la maladie parmi les individus infectés par le bacille de Koch est traduit par des symptômes cliniques, ce qui dépend de plusieurs facteurs ; génétique, immunologique, nutritionnel et social. Cette phase correspond à la phase latente et peut varier de plusieurs semaines à plusieurs années. Il est à noter qu'entre 5% et 15% des personnes infectés développent une tuberculose active.

Selon l'OMS, chaque année, une moyenne de dix millions de personnes développent une forme active de la TB. En 2019, plus d'un million de personnes en sont mortes dont 95% de décès concerne les pays en voie de développement, néanmoins, cette maladie reste un problème de santé publique même pour des pays industrialisés.

La tuberculose active est à déclaration et traitement obligatoires.

0.4.7 Pathogénie

Les symptômes cliniques sont essentiellement dus à la réponse immunitaire de l'hôte (le récepteur) La primo- infection peut évoluer en trois façons :

- Guérison complète après transpiration, sudation ou toute évacuation assez aiguë des sueurs par les pores avec présence d'un nombre conséquent de bacilles.
- Formation de tubercules (stade prolifératif), guérison lente par fibrose (après une destruction substantielle des tissus ou lorsqu'une inflammation à une zone dont les tissus ne se régénèrent pas) et finalement calcification (lésions paucibacillaires).
- Évolution par extension et confluence des tubercules ; la liquéfaction du caseum (terme de description microscopique médicale, qualifie la consistance anormale des tissus, pâteuse, de coloration blanchâtre ou jaune semblable à un fromage) crée une cavité ; si celle-ci s'ouvre dans une bronche : apportant de l'air riche en dioxygène depuis l'extérieur du corps dans les poumons, il y a apport d'oxygène nécessaire au bacille et la lésion devient pluribacillaire (1 million de bacilles dans une caverne de 2cm). Cette évolution défavorable se produit dans environ 5% des cas de TBs de ré-infection, surtout chez l'adulte, peuvent être endogènes (intoxication au monoxyde de carbone), [126].

Notons que chez l'enfant comme chez l'adulte, le poumon est plus souvent touché par les bacilles tuberculeux. Cependant, dans les régions les plus endémiques au monde, plus de 10% de nouveaux cas infectés sont des enfants. Malheureusement, la tuberculose de l'enfant n'est souvent pas diagnostiquée.

0.4.8 Mesures préventives

Afin de minimiser le risque de la transmission des bacilles, des mesures préventives sont à respecter :

- La vaccination par BCG.
- Des mesures environnementales : une ventilation naturelle est systématique afin d'assurer une protection respiratoire optimale. Pour de plus amples détails, voir [101].
- Des mesures règlementaires administratives : toute personne ayant une toux persistante doit être impérativement isolée, examinée en vue de recevoir un traitement anti-tuberculeux.

0.4.9 Dépistage

La tuberculose est une des dix premières causes de mortalités dans le monde. Une maladie qui touche des couches sociales de faible immunité, ça fait partie des priorités en termes de développement des nations Unies. Il est donc question d'identifier cette maladie infectieuse à travers des dépistages. Dans des populations ciblées, dans des groupes à haut risques, et même dans la population générale, cette procédure est généralement prise suite aux initiatives (tirées de [72]) suivantes :

- Identification améliorée des tuberculeux : campagnes de sensibilisation, d'éducation ou d'information sanitaire visant à informer sur le type approprié de comportement en présence de personnes qui ont des symptômes de tuberculose. Ce type d'identification des cas peut être associé à une amélioration de l'accès aux services de diagnostic. L'identification améliorée des cas peut être combinée au dépistage.
- Dépistage initial : premier dépistage (test, examen ou autre procédure) appliqué à la population éligible au dépistage.
- Nombre de sujets à dépister : nombre de personnes devant faire l'objet d'un dépistage pour réussir à diagnostiquer une personne atteinte de tuberculose.
- Détection passive des cas : parcours de diagnostic de la tuberculose initié par le patient, lorsque :
 - (1) Il y a des symptômes que la personne atteinte de tuberculose estime être graves ;
 - (2) cette personne a accès à des soins de santé, pouvant se rendre spontanément dans un centre de santé adéquat ;
 - (3) un agent de santé évalue correctement que la personne satisfait aux critères de présomption de tuberculose ;
 - (4) utilisation réussie d'un algorithme de diagnostic spécifique pour diagnostiquer la

tuberculose. - Second dépistage : nouveau dépistage d'une même population à un intervalle donné. - Groupe à risque : groupe d'individus dont la prévalence ou l'incidence de la tuberculose est beaucoup plus importante comparant à la population générale. - Test bactériologique, examen ou procédure de dépistage de la tuberculose pour distinguer les personnes qui ont une probabilité élevée d'être atteintes de tuberculose de celles qui sont très peu susceptibles de l'être. Un test de dépistage positif doit être suivi d'un test de diagnostic ultérieur, en fonction de l'algorithme de dépistage utilisé.

Afin de dépister l'infection tuberculeuse, l'OMS recommande d'utiliser soit le test cutané à la tuberculine, soit le test de détection de l'interféron gamma. Dans les années 40, aucune médication n'a permis de traiter cette maladie, ce n'est qu'avec une association d'antibiotique et un suivi serré sur une durée suffisante que cette maladie est devenue guérissable.

0.4.10 Traitement

Après qu'une personne suspectée d'être atteinte de la TB, ait été diagnostiquée, un examen bactériologique se fait systématiquement.

L'étape suivante consiste à instaurer un traitement anti-tuberculeux qui comprend deux phases :

- Une phase intensive (deux mois) basée sur l'association d'antibiotiques prescrits dans le guide [101]. Cette phase permet d'éliminer bien des bacilles et de réduire l'impact de quelques autres résistants aux anti-tuberculeux. L'objectif de cette phase est de réduire le plus possible le risque de l'échec de la thérapie.
- La phase de continuation garantit la guérison définitive de l'individu infecté. L'arrêt du traitement peut entraîner la rechute.

Cette phase est plus longue que la première (quatre mois) avec un traitement nettement moins lourd.

La médication à la TB est, en général, sous forme d'une association d'antibiotiques tels que ; l'isoniazide (H), la rifampicine (R), la pyrazinamide (Z) et l'éthambutol (E). Les anti-tuberculeux sont une association de deux, trois ou quatre de ces antibiotiques, voir [101], à savoir :

Rifampicine associée à l'isoniazide (RH).

Rifampicine associée à l'isoniazide et à la pyrazinamide (RHZ).

Rifampicine associée à l'isoniazide et à l'éthambutol (RHE).

Rifampicine associée à l'isoniazide et à la pyrazinamide et à l'éthambutol (RHZE).

0.4.11 Rechute

Si un traitement apporte une guérison il reste long et lourd ce qui entraîne certaines conséquences telles que : rechute, échec de thérapie, défaillance de thérapie (suite à une interruption du traitement) et résistance au traitement.

La rechute tuberculeuse est définie selon le programme national de lutte antituberculeuse comme tout cas de tuberculeuse antérieurement traité et déclaré "guéri" ou traitement achevé après une durée suffisante de thérapie et qui présente, récemment, une tuberculose active.

La rechute tuberculeuse est un problème de santé publique liée à plusieurs facteurs ; on peut citer le tabagisme [106], le diabète, le VIH etc...

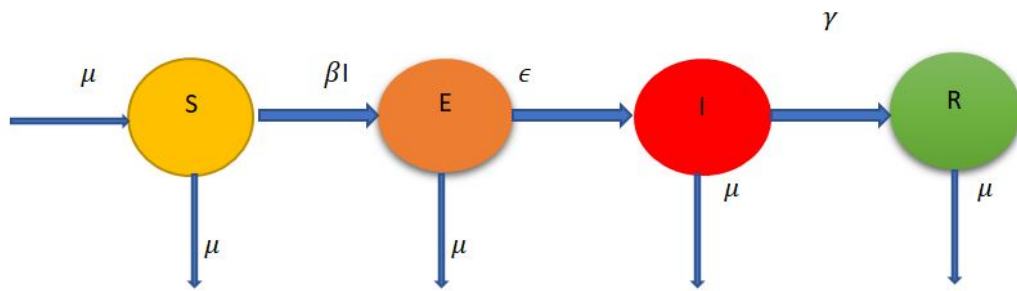
La prise en charge doit être efficace et codifiée selon le guide de la lutte antituberculeuse [12].

0.4.12 Autour de certains modèles mathématiques

- Il existe une littérature riche de modèles mathématiques sur la transmission de la tuberculose, voir [33] et [113]. Ce sont, généralement, des systèmes compartimentaux du type SEIR [67] (rappelons que S dénote les susceptibles, E pour les exposés ou les infectés qui sont en période latente i.e. les infectés qui ne sont pas encore prêts à transmettre l'infection, I pour les infectés pouvant transmettre l'infection et R désigne les individus retirés ou réfractaires). Un exemple de modèle représentant la transmission de la TB est le suivant [33]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \mu N(t) - \mu S - \frac{\beta SI}{N}, \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \epsilon)E, \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\mu + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \end{array} \right. \quad (5)$$

Avec $S(0) = S_0 > 0$, $E(0) = E_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$, $R(0) = R_0$ et $N = S + E + I + R$, où les taux de contacts, de transmission, de rétablissement, de naissance et de mortalité notés $\beta > 0$, $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$ et $\mu > 0$. Dans [33], le modèle (5) a été analysé pour sa

FIGURE 9 – Schéma de transmission de la tuberculose-maladie à l'instant t .

stabilité où il a été démontré que l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Dans [86], un modèle de transmission de la TB est analysé avec et sans facteur de l'immigration, auquel cas, il a été prouvé que sous certaines conditions l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Cette maladie étant non immunisante, des modèles qui prennent en considération la rechute de la maladie existent dans [113] et [67], voir également [1] pour les questions de stabilité et contrôle optimal.

Cependant, plusieurs mesures sanitaires de prévention et/ou d'intervention existent. Parmi les modèles mathématiques modélisant la transmission de la TB en vue de proposer un programme de contrôle on peut citer [112] qui est un système d'équations différentielles discret. Le lecteur peut se référer à [40] pour le diagnostique, à [111], [1] et [118] pour les traitements. Comme mesure préventive : il y a les vaccins antituberculeux, voir [88].

La plupart de ces modèles sont représentés par des équations différentielles ordinaires où l'âge de l'infection n'est pas pris en considération. Or, si on se propose d'appliquer des tests de dépistage [127], l'intégration de la structure d'âge d'infection est essentielle.

0.5 Présentation de la problématique

Plus modestement, nous avons développé un modèle mathématique du type SIR d'une infection transmissible, structurée en âge d'infection, dans une population humaine, avec l'introduction d'une classe de quarantaine. Nous pensons que le modèle proposé et étudié dans cette thèse, trouve son sens épidémiologique et peut modéliser la propagation de la tuberculose sous certaines mesures d'interventions.

Une première question abordée ici est la suivante ;

Sous quelles conditions, a-t-on la stabilité des solutions de notre modèle ?

Ensuite, notre modèle est assujéti à un contrôle qui est le dépistage moyennant une certaine fonction réponse de la population totale, et prenant en considération la rechute.

Devant une certaine stabilité (à préciser plus loin), une seconde question est également considérée dans ce travail ;

Peut-on déterminer un dépistage optimal qui minimise la propagation de la maladie tout en tenant compte de la réponse de la population totale et de la rechute.

Notre contribution mathématique concerne deux volets, à savoir :

- Le comportement asymptotique des trajectoires du modèle et la stabilité globale des états stationnaires.
- Le contrôle optimal qui consiste à maximiser les dépistés parmi la population totale afin de faire décroître le plus possible la densité des infectés sous réserve d'un coût social et médical.

Cette thèse est composée de quatre chapitres :

Le premier chapitre concerne les préliminaires mathématiques et contient deux parties : dans la première partie sont exhibées les notions de base relatives à la stabilité, dans la deuxième partie, la notion de contrôle optimal est détaillée.

Le second chapitre est dédié à quelques modèles épidémiologiques avec la structure d'âge d'infection : des modèles compartimentaux des plus récents, intégrant la structure d'âge d'infection.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons le modèle de base, en vue d'aborder l'analyse de stabilité asymptotique. Nous soulignons l'apport essentiel de la stabilité au sens de Lyapunov à notre système hautement non linéaire.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions un problème de contrôle optimal, où il est question de calculer le dépistage optimal au sens d'un critère d'optimisation. Nous terminons par une conclusion et des perspectives.

Chapitre 1

Outils mathématiques

1.1 Introduction

La modélisation mathématique est une description de divers phénomènes réels par un système d'équations différentielles souvent difficile à résoudre. Il serait donc plus judicieux de connaître le comportement asymptotique des solutions sans avoir à les calculer.

Par ailleurs, les problèmes réels sont souvent biaisés (perturbations, bruits, etc...), toutefois, vouloir transférer le système d'un état à un autre afin d'atteindre une certaine performance (une cible ou un objectif) c'est pouvoir agir par certaines actions sur ce système. Ce dernier est dit système contrôlé ou commandé et ces actions sont dites commandes, stratégies ou contrôles devant respecter, généralement, des obligations ou des situations désirées appelées contraintes.

Cependant, l'objectif à optimiser (à minimiser ou à maximiser) s'appelle critère d'optimisation ou fonction, cette dernière permet de déterminer le meilleur contrôle sous certaines contraintes, c'est l'objet de la théorie du contrôle optimal.

Cette théorie parue vers 1950, a connu une explosion avec le développement du principe du maximum de Pontryagin PMP [108]. Les applications sont nombreuses dans différents domaines (automatique, aéronautique, physique, mathématique, etc...), utilisant soit des méthodes directes (linéaires et non linéaires) soit le PMP comme méthode indirecte de résolution.

Pour un problème de contrôle optimal, on distingue deux types d'optimums : Un **optimum local** : consiste à rechercher localement un contrôle optimal (assez voisin de la solution du problème).

Un **optimum global** : consiste à rechercher le meilleur contrôle sur tout le domaine

des contraintes.

Si l'optimum attire les entreprises, son existence n'est pas une chose aisée à prouver mathématiquement. La raison pour laquelle des algorithmes de calcul numérique de la solution optimale (contrôle optimal et la trajectoire associée) sont mis en place.

Ce chapitre se veut un préambule de concepts et résultats essentiels, pour les deux parties suivantes :

- La première partie est réservée à la stabilité (des systèmes autonomes). Nous soulignons l'intérêt particulier qu'apporte la théorie de Lyapunov pour la stabilité des systèmes non linéaires.
- La seconde partie s'articule autour de la notion de contrôle optimal.

1.2 Stabilité des systèmes non linéaires sans contrôle

1.2.1 Théorème de Cauchy- Lipschitz

Théorème 1.1. Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, localement lipschitzienne sur Ω i.e. ;
 $\forall x \in \Omega, \exists r > 0$; si $B(x, r) \subset \Omega, \exists \alpha \in L^1_{loc}(I; \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\forall t \in I, \forall y, z \in B(x, r); \|f(t, y) - f(t, z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t) \|y - z\|_{\mathbb{R}^n}$$

Alors, il existe $\tau > 0$ tel que le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.1)$$

possède une unique solution $x \in C([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.1. — La paire (J, x) où $J :=]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$, est dite maximale, i.e. si x_1 est une autre solution de (1.1) définie sur un intervalle J_1 alors $J_1 \subset J$ et $x = x_1$ sur J_1 .

- Si f est lipschitzienne sur Ω alors la solution $x \in C(I; \mathbb{R}^n)$.

— x est donnée pour tout $t \in J$;

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

— La courbe $(t, x(t))$ est dite courbe intégrale.

1.2.2 Concepts de base

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on considère un système différentiel autonome

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.2)$$

Où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Les questions que l'on se pose sont les suivantes :

- Existe-t-il un point x^* indépendant du temps t tel que $x(t) = x^*$ solution de (1.2) ? Le point x^* est dit **point d'équilibre** pour (1.2) si $f(x^*) = 0$.
- Soit $\Phi(t)$ une solution de (1.2), supposons que $\phi(t)$ soit une autre solution avec $\phi(0)$ très voisine de $\Phi(0)$, est ce que $\phi(t)$ reste très voisine de $\Phi(t)$ pour $t > 0$?
- Soit $\Phi(t)$ une solution de (1.2), supposons que $\phi(t)$ soit une autre solution avec $\phi(0)$ très voisine de $\Phi(0)$, est ce que $\phi(t)$ tend vers $\Phi(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?

Rappelons qu'un voisinage V d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est une partie de \mathbb{R}^n contenant un disque défini par $\|x - x_0\|_n < r$, pour $r > 0$.

Définition 1.1. *Le point x^* est un équilibre*

- *uniformément stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0, \|x_0 - x^*\| < \alpha_\epsilon \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$.*
- *instable, s'il n'est pas uniformément stable.*
- *uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et s'il existe*

$$\rho > 0, \|x_0 - x^*\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

- uniformément globalement asymptotiquement stable s'il est uniformément asymptotiquement stable pour tout x_0 et s'il existe

$$\rho > 0, \|x_0 - x^*\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

Sur la stabilité d'un système différentiel autonome, voir par exemple [11].

A présent, on note $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.2), telle que $\Phi(t_0, x_0) = x_0$. Les définitions ainsi que les théorèmes qui suivent sont tirés de [104].

Définition 1.2. (flot associé à une edo)

On appelle flot l'application

$$\Phi(t, x_0) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à (t, x_0) associe la solution de (1.2) telle que : $\Phi_t(x_0) := \Phi(t, x_0)$ continue sur \mathbb{R}^n vérifiant :

- $\Phi_t = id_{\mathbb{R}^n}$
- $\Phi_t \Phi_s = \Phi_{t+s}$, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$

Définition 1.3. (Semi- flot associé à une edo)

On appelle semi-flot associé à l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ à l'instant t , l'application $\Phi(t, (t_0, x_0)) : (t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Phi_t(x_0) := \Phi(t, x_0)$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi_t(x_0) = f(\Phi_t(x_0)), \\ \Phi_{t_0}(x_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition 1.4. (Ensemble limite) Soit x un point dont la courbe intégrale maximale est définie sur \mathbb{R} . On définit l'ensemble ω -limite de x , que l'on note par $\omega(x)$ comme l'intersection de fermetures de toutes sections finissantes de l'image de la courbe intégrale maximale vérifiant la condition de Cauchy $\Phi(0, x) = x$.

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi(s, x) \mid s \geq t}.$$

Dans le cas où t est un petit paramètre, on définit l'ensemble α -limite par

$$\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\Phi(s, x) \mid s \geq t}.$$

Définition 1.5. (Bassin d'attraction d'un état d'équilibre)

Soit x^* un point d'équilibre du système

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.3}$$

- Un bassin d'attraction d'un point x^* est l'ensemble des états $x \in X$ tels que que quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(t, x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = x^*.$$

- Un bassin de répulsion d'un point x^* est l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(t, x)$ soit défini et que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = x^*.$$

Soit X l'espace de phases associé à $\Phi(t, x)$ tel que $\Phi(t, x) : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$,

Définition 1.6. (Trajectoire, orbite)

- La fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une trajectoire totale (de Φ), si $\phi(t+r) = \Phi(t, \phi(r))$, quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $r \in \mathbb{R}$.
- L'orbite associée à une trajectoire totale est donnée par $\{\Phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$.
- L'orbite d'un point x de K est périodique si x n'est pas un équilibre et il existe $T \in \mathbb{R}^+$ tel que $\Phi(t+T, x) = \Phi(t, x)$ pour tout $t \geq 0$. T est dite la période de l'orbite.
- Si Φ est engendrée par la solution de l'équation $x'(t) = f(x(t))$, la trajectoire totale est la solution x sur \mathbb{R} avec $x(t_0) = x_0$.
- Pour le système

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Le **plan de phase** est le plan (x, y) . La représentation des trajectoires dans le plan de phase s'appelle le **portrait de phase**.

Définition 1.7. (Ensemble absorbant)

On suppose que l'équation $x'(t) = f(x(t))$ admet des solutions de classe C^1 et que K est un ouvert de \mathbb{R} . Une partie D de K est dite absorbante si tout sous ensemble borné D_1 de K satisfait $\Phi(t, D_1) \subset D$ pour tout temps t assez grand. De même, le sous

ensemble D est dit absorbant lorsque pour toute condition initiale x_0 , il existe $T \geq 0$ tel que $\Phi_t(x_0) \in D$ quel que soit $t > T$.

Définition 1.8. (Ensemble invariant)

Un sous ensemble D de K est dit positivement (respectivement négativement) invariant pour $x'(t) = f(x(t))$ si $\Phi(t, D) \subset D$ pour tout $t > 0$ (respectivement $t < 0$). D est un ensemble invariant si et seulement si $\Phi(x, D) = D$ quel que soit t .

Remarque 1.2. L'ensemble $\omega(x)$ est invariant par le flot Φ ; c'est la région des limites de la trajectoire lorsque t devient suffisamment grand.

Définition 1.9. (Attracteur compact)

Soient (X, d) un espace métrique, $M \subset X$ et $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ le semi-flot associé au système $x'(t) = f(x(t))$. On dit que l'ensemble K est un attracteur de M , si K est invariant et attire M . L'ensemble K est de plus compact .

Définition 1.10. (Compacité)

Soient $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ une application, $M \subset X$. On dit que l'application Φ est asymptotiquement compacte sur M , si pour toutes les suites (t_i) de \mathbb{R}^+ , $(t_i) \rightarrow \infty$ quand $i \rightarrow \infty$, et (x_i) de M , $(\Phi(t_i, x_i))$ possède une sous suite convergente .

Définition 1.11. (Dissipatif, asymptotiquement régulier, éventuellement borné)

Un semi-flot continu $\Phi : J \times X \rightarrow X$ est dit :

- point dissipatif s'il existe une partie B de X qui attire tout point de X .
- asymptotiquement régulier si Φ est asymptotiquement compact sur chaque ensemble positivement invariant fermé borné.
- éventuellement borné sur un ensemble $M \subset X$ si $\Phi(J_r \times M)$, $J_r = J \cap [r, \infty)$, est borné pour tout $r \in J_r$.

Définition 1.12. (Application contractante)

Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application. f est dite une contraction ou k -contractante s'il existe une constante $k \in (0, 1)$ telle que,

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

1.2.3 Quelques résultats utiles

Théorème 1.2. (Théorème du point fixe)

Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application k -contractante.

Alors

1. f admet un point fixe unique a dans X .
2. Pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérations de x_0 par f définie par $x_n := f^n(x_0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers a .
3. La convergence est géométrique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, a)$$

Lemme 1.1. (Lemme de Gronwall)

Soient w, g deux fonctions positives et localement intégrables, vérifiant

$$w(t) \geq \int_0^t k(\sigma)w(t-\sigma)d\sigma + g(t).$$

On suppose que k est une fonction strictement positive, alors il existe une constante $b > 0$ (ne dépend que de k), telle que $w(t) > 0$ pour tout $t > b$ avec $\int_0^{t-b} g(s)ds$.

En particulier, si g est continue en 0 et $g(0) > 0$, alors $w(t) > 0$ pour tout $t > b$.

Théorème 1.3. (Méthode de fluctuation)

Soit $f : [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et différentiable. Alors il existe des suites $(t_k), (s_k)$ telles que

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) \rightarrow f_\infty, & \lim_{k \rightarrow \infty} f'(s_k) \rightarrow 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) \rightarrow f^\infty, & \lim_{k \rightarrow \infty} f'(s_k) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Théorème 1.4. (Théorème 2.33, [104])

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Il existe un attracteur compact des ensembles bornés.
- Φ est point dissipatif, asymptotiquement régulier et éventuellement borné sur chaque ensemble borné dans X .

Théorème 1.5. (Théorème 2.39, [104])

Soit Φ un semi-flot continu, et A un sous ensemble compact positivement invariant de X qui attire tous les sous ensembles compacts de voisinage de lui même (i.e. un attracteur local des ensembles compacts). Alors A est stable.

Théorème 1.6. (Théorème 2.46, [104])

Soient X un sous ensemble fermé de l'espace de Banach E , J un intervalle de temps et $\Phi : J \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu. Alors Φ est asymptotiquement régulier. S'il

existe deux applications $\Psi, \Theta : J \times X \rightarrow X$ telles que

$$\Phi(t, x) = \Theta(t, x) + \Psi(t, x),$$

alors pour tout ensemble C borné fermé, on a :

1. $\liminf_{t \rightarrow \infty} \text{diam} \Theta(t, C) = 0$,
2. il existe m_C tel que la fermeture de $\Psi(t, C)$ est compacte pour tout $t \in J, t \geq m_C$.

Théorème 1.7. (Critère de Fréchet-Kolmogorov)

Soit C un sous ensemble de $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$. Alors \bar{C} est compacte si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

- (i) $\sup_{f \in C} \int_0^\infty |f(a)|^p da < \infty$,
- (ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^\infty |f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément par rapport à $f \in C$,
- (iii) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty |f(a+h) - f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément par rapport à $f \in C$,
- (iv) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h |f(a)|^p da \rightarrow 0$ uniformément par rapport à $f \in C$.

Théorème 1.8. (Inégalité de Jensen)

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que

$$g(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega, \int_\Omega g(x) dx = 1, fg \text{ et } G(f)g \in L^1(\Omega), \text{ alors}$$

$$G\left(\int_\Omega f(x)g(x) dx\right) \leq \int_\Omega G(f(x))g(x) dx.$$

1.2.4 Stabilité par linéarisation

On considère le système non linéaire autonome (1.2), tel que $f(0) = 0$ (sans perte de généralité) et f de classe C^1 , dont $Df(0)$ note la différentielle de f en 0. Le système linéarisé du système (1.2) en 0 est

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Df(0)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Il s'agit donc de comparer le comportement des solutions de (1.2) et celles de (1.4) autour de 0 (localement).

Posons

$$A = Df(0)$$

Le système linéaire autonome suit

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Définition 1.13. Le système (1.5) est dit stable si 0 est stable et asymptotiquement stable si 0 est asymptotiquement stable. Alors la matrice A est dite stable ou asymptotiquement stable et le système (1.2) est dit localement stable ou localement asymptotiquement stable.

Remarque 1.3. — La solution de (1.5) est donnée par $t \rightarrow \exp(At)$.

— Si le système (1.5) est stable alors toute solution de (1.5) est bornée.

Proposition 1.1. Considérons le système (1.5) où A est de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinctes.

- 0 est un équilibre uniformément stable si et seulement si : pour tout $i = 1, \dots, r$, $Re(\lambda_i) \leq 0$ et $Re(\lambda_k) < 0$ pour toute valeur propre dont l'ordre de multiplicité est supérieur à 1.
- 0 est un équilibre uniformément asymptotiquement stable si : $\forall i = 1, \dots, r, Re(\lambda_i) \leq -\sigma < 0$ et on a :
 $\forall t, \|\Phi(t, x_0)\| \leq k\|x_0\|exp(-\sigma)$
- S'il existe λ tel que $Re(\lambda) > 0$ alors 0 est instable.

Théorème 1.9. (de linéarisation)

Considérons le système (1.2) et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(0)$. Si

- (i) $\forall i = 1, \dots, r, Re(\lambda_i) \leq -\sigma < 0$, 0 est un équilibre uniformément localement asymptotiquement stable.
- Il existe $Re(\lambda_{i_0}) > 0$ alors 0 est un équilibre localement instable.
- $\forall i, Re(\lambda_i) \leq 0$ et il existe $i_0, Re(\lambda_{i_0}) = 0$ alors on ne peut rien dire.

Cas particulier

Dans le cas où $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A , on distingue les cas suivants :

- Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et signes différents alors le point d'équilibre 0 est dit point selle, et est toujours instable.
- Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :
 - (i) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 0$, le point d'équilibre 0 est un noeud stable.
 - (ii) $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$, le point d'équilibre 0 est un noeud instable.
 - (iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point d'équilibre 0 est un noeud propre stable pour $\lambda \leq 0$ et instable pour $\lambda \geq 0$.
- Si λ_1 et λ_2 sont complexes et $Im\lambda_{1,2} \leq 0$ alors 0 est dit foyer, stable si $Re\lambda_{1,2} \leq 0$, instable si $Re\lambda_{1,2} \geq 0$.
- Si $Im\lambda_1$ et λ_2 sont imaginaires pures, alors 0 est un équilibre hyperbolique appelé centre, stable mais pas asymptotiquement stable.

Caractérisation de la stabilité asymptotique

Les valeurs propres de la matrice A sont généralement les racines du polynôme (caractéristique) de la forme

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1.6)$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des réels et $a_n \neq 0$.

Considérons la matrice RH dite d'Hurwitz de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

dont les mineurs diagonaux Δ_k sont donnés pour $k = 1, \dots, n$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix}$$

dans lesquels la constante $a_0 = 1$ et les coefficients d'indice supérieur à n ou inférieur

à 0 sont remplacés par 0.

Critère de Routh-Hurwitz, [39]

Toutes les racines du polynôme (1.6) sont à partie réelle strictement négative si et seulement si les mineurs diagonaux Δ_k , $k = 1, \dots, n$, de la matrice RH sont strictement positifs.

Définition 1.14. (Systèmes topologiquement équivalents)

Deux systèmes

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.7}$$

$$x'(t) = g(x(t)) \tag{1.8}$$

sont dits topologiquement équivalents ou qualitativement homéomorphes s'il existe un homéomorphisme (fonction continue à inverse continue) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall t, \forall x, T(\Phi(t, x)) = \Psi(t, x)$$

où $\Phi(t, x)$ est la solution de (1.7) telle que $\Phi(0, x) = x$ et $\Psi(t, x)$ est la solution de (1.8) telle que $\Psi(0, x) = x$.

Théorème 1.10. (*Hartman- Grobman, [53]*)

Le système

$$x' = f(x) \tag{1.9}$$

et son linéarisé

$$x' = Df(x^*).x \tag{1.10}$$

sont localement topologiquement équivalents, i.e.

- Si x^* est un équilibre hyperbolique pour (1.9), alors il existe un voisinage V de x^* tel que (1.9) et (1.10) sont qualitativement homéomorphes.

Exemple Dans \mathbb{R}^2 : si 0 est un point selle ou foyer ou noeud pour (1.10), alors le point d'équilibre x^* sera respectivement un point selle ou foyer ou noeud pour (1.9).

1.2.5 Stabilité au sens de Lyapunov

Si le principe de linéarisation permet d'obtenir les propriétés de stabilité des systèmes linéaires, celles-ci ne sont que locales pour les systèmes non linéaires. Toutefois, ces derniers peuvent avoir un domaine de stabilité asymptotique. Une méthode introduite au 19^{ème} siècle par Lyapunov s'applique directement à des systèmes non linéaires moyennant une fonctionnelle convenablement choisie dite de Lyapunov. Cette méthode consiste à chercher une fonction dépendant de l'état du système qui soit définie positive, qui décroît le long des trajectoires quand le système évolue. Une fonction de Lyapunov est généralement du type fonction d'énergie qui décroît pour établir la stabilité ; on en a pour exemple un système mécanique libre avec frottement.

Sans perte de généralité, l'équilibre peut être éventuellement 0.

Définition 1.15. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ,

1) V est dite définie positive si :

$$\begin{cases} V(0) = 0, \\ V(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$$

2) V est dite définie négative, si $(-V)$ est définie positive.

3) V est dite semi-définie positive si :

$$\begin{cases} V(0) = 0, \\ V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases}$$

4) V est dite semi-définie négative si $(-V)$ est semi-définie positive.

Théorème 1.11. (Lyapunov)

Si la fonction V est définie positive et V' est définie négative sur Ω , alors le point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable pour (1.2).

Théorème 1.12. (Principe d'invariance de LaSalle [69], [70], [99])

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n positivement invariant pour le système (1.2) en x_0 . Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour (1.2) en x_0 telle que :

1. $V' \leq 0$ sur Ω
2. Soient $E := \{x \in \Omega; V'(x) = 0\}$ et L le plus grand ensemble invariant par V et contenu dans E . Alors, pour toute solution bornée $\Phi(t, x)$ commençant dans E ;

$$\Phi(t, x) \rightarrow L, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Un théorème fort intéressant garantissant l'attractivité de toutes les solutions bornées venant de E vers le plus grand sous ensemble L invariant dans E . le résultat suivant est une alternative du théorème de LaSalle.

Théorème 1.13. (Théorème [2.53], [104])

Soient $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu, A un ensemble invariant compact dans X , et $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

- Pour toute trajectoire totale $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ telle que $V'(\phi(t))_+ \leq 0$ ou sur \mathbb{R} .
- Si en outre, on suppose que $\tilde{A} \subset A$, V est constante sur \tilde{A} et que $\phi(\mathbb{R}) \subset \tilde{A}$ pour toute $\tilde{\Phi}$ -trajectoire totale avec $V'(\phi(t)) \equiv 0$.

Alors $A = \tilde{A}$.

Les deux corollaires suivants donnent la propriété de stabilité de l'équilibre.

Corollaire 1.1. - Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe tel que $x_0 \in \Omega$. Soient $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie positive et de classe C^1 telle que $V' \leq 0$ sur U . Soit $E := \{x \in \Omega; V' = 0\}$. Supposons que le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E est réduit au point x_0 . Alors, le point x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1.2). - Si ces conditions sont satisfaites pour $U = \Omega$, si de plus V est propre sur Ω i.e. $\lim V(x) = +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Alors, toutes les trajectoires sont bornées pour tout $t \geq 0$ et x_0 est un point d'équilibre globalement stable pour (1.2).

Corollaire 1.2. *Sous les hypothèses du théorème d'invariance de LaSalle, si l'ensemble L est réduit au point $x_0 \in \Omega$ alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour (1.2) sur Ω .*

1.2.6 Persistance

Soient X un ensemble non vide, J un ensemble de temps. Considérons $\Phi : J \times X \rightarrow X$ et $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Définition 1.16. *Le semi-flot Φ est :*

— ρ -faiblement persistant, si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

— ρ -fortement persistant, si

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 1.17. *Le semi-flot Φ est :*

— ρ -uniformément faiblement persistant, s'il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon_1, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

— ρ -fortement uniformément persistant, s'il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon_2, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Définition 1.18. *Le semi-flot Φ est :*

— ρ -fortement dissipatif, s'il existe $c_1 > 0$ telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > c_1, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

— ρ -faiblement dissipatif, s'il existe $c_2 > 0$ telle que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > c_2, \quad \forall x \in X, \rho(x) > 0.$$

Théorème 1.14. (*Théorèmes [5.1] et [5.2], [104]*)

Soient X un espace métrique, $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ un semi-flot continu et $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$

une fonction continue non nulle. On suppose que

(H₁) Φ admet un attracteur compact A des ensembles bornés.

(H₂) Il n'y a pas de trajectoire totale $\phi : J \rightarrow A$ telle que $\rho(\phi(0)) = 0$ et $\rho(\phi(-r)) > 0$ et $\rho(\phi(t)) > 0$ pour $r, t \in J$.

Posons

$$X_0 := \{x \in X; \rho(\Phi(t, x)) = 0, \forall x, t \in J\},$$

- Si $X_0 = \emptyset$, alors $\rho(x) > 0 \forall x \in A$ et il existe $\eta > 0$ tel que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) \geq \eta$ pour tout $x \in X$.
- Si $X_0 \neq \emptyset$, et $\rho \circ \phi$ est continue et Φ est ρ -uniformément faiblement persistant, alors Φ est ρ -uniformément fortement persistant.

Théorème 1.15. (Théorème [5.7], [104])

On suppose que $X_0 \neq \emptyset$, $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ est ρ -uniformément fortement persistant, $\rho(\Phi)$ est continue, et

(H₁) Il n'y a pas de trajectoire totale $\phi : J \rightarrow A$ telle que $\rho(\phi(0)) = 0$ et $\rho(\phi(-r)) > 0$ et $\rho(\phi(t)) > 0$ pour $r, t \in J$.

Alors l'attracteur A est l'union disjointe de trois ensembles A_0 , C et A_1 ;

$$A = A_0 \cup C \cup A_1$$

Les deux ensembles A_0 et A_1 sont des compacts et l'on a :

1. $A_0 = A \cap X_0$ est l'attracteur compact des sous ensembles de X_0 , i.e. toute partie compacte K de X_0 admet un voisinage dans X_0 qui est attiré par A_0 .
2. A_1 est ρ -uniformément positif et A_1 est l'attracteur compact de voisinage des ensembles compacts dans $X \setminus X_0$ et ϕ est ρ -uniformément positif, en particulier A_1 est stable.
3. Si $x \in X \setminus A_1$ et ϕ est une trajectoire totale, alors $\phi(t) \rightarrow A_0$ pour $t \rightarrow -\infty$.
Si $x \in X \setminus A_0$ et ϕ est une trajectoire totale, alors $\phi(t) \rightarrow A_1$ pour $t \rightarrow +\infty$.

En particulier, l'ensemble C contient ces points $x \in A$ tel qu'il existe une trajectoire totale $\phi(t)$ avec $\phi(-t) \rightarrow A_0$ et $\phi(t) \rightarrow A_1$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

1.3 Problème de contrôle optimal

Mathématiquement, un problème de contrôle optimal est formulé par

- *Un système commandé : un système dynamique dépendant d'un paramètre fonctionnel $t \rightarrow u(t)$ dit contrôle respectant certaines contraintes.*
- *Un objectif ou fonctionnelle coût ou encore critère d'optimisation, à optimiser : une fonctionnelle du type énergie à minimiser ou un rendement à maximiser sur*
- *Un domaine de contrôles : un sous ensemble mesurable et généralement contraint.*

Il y a trois types de problèmes de contrôle optimal :

Problème de Bolza *Lorsqu'on se propose d'optimiser un objectif en atteignant une certaine cible (un état final) généralement difficile à atteindre alors on la pénalise dans notre objectif.*

Problème de Mayer *Lorsqu'il s'agit d'un problème en temps minimal, l'objectif ne prend que l'état final en considération.*

Problème de Lagrange *L'objectif ne prend que la fonctionnelle coût en considération.*

Pour tout ce qui suit, nous considérons le problème de Lagrange (dont l'état final $x(T)$ est libre).

Rappelons qu'en théorie de contrôle, les contrôles ne sont généralement pas continus mais souvent localement intégrables ($L^1_{loc}(I; \mathbb{R}^+)$). Par conséquent, le second membre

$$F(t, x(t)) := f(x(t), u(t))$$

du système (1.1) ne peut satisfaire les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz (1.1). Il va falloir affaiblir les hypothèses et redéfinir la solution d'un tel problème. Voir [108] pour plus de détails. "

1.3.1 Système d'état contrôlé

Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 et U un ouvert de \mathbb{R}^m . On considère le système d'état contrôlé sous sa forme générale :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Où $f : I \times \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

(H1) $f(t, a, b)$ est de Carathéodory i.e.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$; la fonction $t \rightarrow f(t, a, b)$ est mesurable.
- Pour presque tout $t \in I$; la fonction $(a, b) \rightarrow f(t, a, b)$ est continue.

(H2) $\exists c > 0, \forall t \in [t_0, T], \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall v \in U$;

$$|f(t, y, v)|_{\mathbb{R}^n} \leq c(1 + |y|_{\mathbb{R}^n} + |v|_{\mathbb{R}^m})$$

(H3) $\forall r > 0 \exists c_r > 0, \forall t \in [t_0, T], \forall y \in B(\bar{0}, r), \forall v \in U$;

$$\left| \frac{df}{dx}(t, y, v) \right| \leq c_r(1 + |v|_{\mathbb{R}^m})$$

On définit U_{ad} comme étant l'ensemble des contrôles admissibles i.e. un ensemble des contrôles u pour lesquels l'état x soit bien défini sur I .

$$U_{ad} := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mesurable} : u(t) \in U \text{ p.p.}\}$$

Définition 1.19. - On appelle solution du problème de Cauchy (1.11), la paire (J, ϕ) où $t_0 \in J \subset I$ et $\phi : J \rightarrow \Omega$ une fonction absolument continue sur J satisfaisant pour tout $u \in U_{ad}$:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s), u(s)) ds, \quad \forall t \in J$$

Dérivable sur I , p.p. ainsi ϕ est solution du système (1.11) que presque partout.

Théorème 1.16. On suppose satisfaites les hypothèses (H1)- (H3). Alors, pour tout contrôle $u \in U_{ad}$, il existe une paire maximale unique (J, x) solution du problème (1.11) donnée par :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), u(s)) ds, \quad \forall t \in J$$

1.3.2 Formulation du Problème

Soit $I := [0, T]$ où $T > 0$ fixé, rappelons le système de contrôle (1.11)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), & \text{p.p. } t \in I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Pour le problème de contrôle optimal :

$$\min_{u \in U_{ad}} F(u) \tag{1.13}$$

où pour $u \in L^1_{loc}(I; \mathbb{R}^+)$, le critère d'optimisation général est donné par

$$F(u) := \int_{t_0}^T l(t, x(t), u(t)) dt$$

et

$$l : I \times \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

tel que :

(H4) $l(t, a, b)$ est de Carathéodory.

(H5) $l(t, a, b)$ est localement intégrable.

D'après le théorème (1.16), pour tout $u \in U_{ad}$, les hypothèses (H1)- (H3) assurent l'existence et l'unicité d'une solution admissible $x \in AC(I; \mathbb{R}^n)$ pour le problème (1.12).

Pour les problèmes de contrôle optimal, lorsque la convexité fait défaut, les théorèmes d'existence (par faible compacité) sont inutilisables.

Cependant, pour le problème (1.12)- (1.13), les hypothèses (H1)- (H5) peuvent conduire à l'existence d'un contrôle optimal, en toute généralité, moyennant des suites minimisantes.

1.3.3 Système adjoint- Principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin (1956) a été développé pour les EDOs, un théorème qui consiste à caractériser le contrôle optimal u^* du problème (1.12) – (1.13). Pour le contrôle optimal et applications, voir [108] entre autres.

Pour la suite, les deux hypothèses (H1)'- (H4)' suivantes remplacent (H1)- (H4), à savoir ;

(H1)' $f(t, a, b)$ est C^1 Carathéodory i.e.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$, la fonction $t \rightarrow f(t, a, b)$ est mesurable.
- Pour presque tout $t \in I$, la fonction $(a, b) \rightarrow f(t, a, b)$ est de classe C^1 .

(H4)' $l(t, a, b)$ est C^1 Carathéodory.

1.3. PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

On appelle l'Hamiltonien associé au problème (1.12)- (1.13), la fonctionnelle H définie par :

$$H(t, a, b, c) : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Où

$$H(t, a, b, c) = l(t, a, b) + c \cdot f(t, a, b)$$

où $a \cdot b$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

Théorème 1.17. (Principe du maximum de Pontryagin)

Soit (u^*, x^*) la paire optimale solution du problème (1.12) – (1.13), alors il existe un état adjoint $p^* \in W^{1,1}(I; \mathbb{R}^n)$ tel que :

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t)) = \max_{b \in U_{ad}} H(t, x^*(t), b, p^*(t)), \text{ p.p. } t \text{ sur } I.$$

où p satisfait le système adjoint

$$\begin{cases} p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial a}(t, a, b, c) = -(l_a(t, a, b) + p(t) \cdot f_a(t, a, b)), \text{ p.p. } t \text{ sur } I, \\ p(T) = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Dans le système adjoint, la condition en temps final est dite de transversalité et g_y note la dérivée de la fonction g par rapport à la variable y .

Le principe de Pontryagin transfère le problème d'optimisation d'un objectif défini sur un sous ensemble de Banach pour un problème de Cauchy à un problème d'optimisation instantané de l'Hamiltonien sur un intervalle fermé borné $[0, T]$.

Remarque 1.4. Dans le cas d'un problème de contrôle optimal sans contraintes, soit :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} F(u) \quad (1.15)$$

pour le système (1.12), nous définissons le lagrangien par

$$L(t, a, b, c) : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$L(t, a, b, c) = L(t, a, b) + c \cdot (x'(t) - f(t, a, b))$$

- L'équation d'optimalité devient

$$\frac{\partial L}{\partial b}(t, a, b, c) = 0 \Rightarrow l_b(t, a, b) + c \cdot f_b(t, a, b) = 0, \text{ p.p. } t \text{ sur } I.$$

Chapitre 2

Quelques modèles épidémiologiques structurés en âge.

2.1 Introduction

Il existe des modèles classiques qui représentent les dynamiques de la transmission du virus, et d'autres qui tiennent compte des mesures sanitaires (préventives ou d'intervention) et éventuellement la rechute.

Dans ce chapitre, nous revenons sur quelques modèles de transmission du virus avec rechute (des plus récents), structurés en âge $a > 0$ d'infection (en plus de la variable temps $t > 0$) en vue d'étudier la stabilité. Nous invitons le lecteur à consulter [30] et [44].

Ce sont des systèmes représentés par des EDPs qui modélisent une situation épidémique, et c'est en fonction de sa propagation que les classes de la population sont prises en considération ; ce sont les variables caractérisant un tel système.

D'autres modèles tiennent compte de la prise en charge de l'infection passant par un dépistage dans [3], [4] en vue d'apporter le traitement adéquat, voir également [44] où la quarantaine est introduite.

Cependant, il existe des modèles qui prennent en considération la rechute soit après rétablissement [30] soit pendant la phase de la quarantaine [44].

Ce chapitre est organisé comme suit : la stabilité d'un modèle de type SIR [30] est analysée dans la section 2, un modèle où l'âge de l'infection concerne la classe des infectés et qui prend en considération la rechute après rétablissement. La section 3 est dédiée à la stabilité d'un modèle de type SIQ [44], un modèle où l'âge de l'infection intervient dans les classes des infectés et de la quarantaine, tenant compte de la rechute lors la phase de la quarantaine. Dans la section 4, un problème de contrôle optimal [3]

est étudié pour un modèle de type SIR où l'âge de l'infection concerne la classe des infectés et le contrôle est le dépistage, encore faut-il introduire la fonction réponse de la population totale pour un traitement efficace. Les auteurs proposent de déterminer le meilleur dépistage au sens d'un critère à optimiser.

2.2 Stabilité d'un modèle du type SIR avec rechute

2.2.1 Modèle

Considérons une population humaine où à tout instant $t > 0$, l'épidémie entraîne trois classes : $S(t)$ la densité des susceptibles, $i(t, a)$ la densité des infectés ayant l'âge $a > 0$ de l'infection (le temps écoulé depuis le début de l'infection) et $R(t)$ celle des réfractaires (retirés ou rétablis).

Les fonctions $\beta(a)$ et $\theta(a)$ désignent les taux de transmission de l'infection et celui de rétablissement naturel dû à l'évolution naturelle de la maladie (qui dépendent de l'âge de l'infection). Les paramètres μ , δ et k désignent les taux de mortalité naturelle, de rechute (un taux pour lequel une fraction des réfractaires devient de nouveau infectée) et celui de non guérison (un taux pour lequel une fraction des infectés ne se rétablit pas et reste dans la classe des infectés considérés comme nouveaux cas infectés). Le modèle suivant [30] est donné avec une structure d'âge de l'infection $a > 0$ à tout instant $t > 0$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a), \\ R'(t) = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da - (\mu + \delta) R(t). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

aux conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = S_0, R(0) = r_0, \\ i(0, a) = i_0(a), \quad i_0 \in L^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Pour $t > 0$,

$$i(0, t) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t)$$

où

$$J(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)i(t, a)da$$

est la force de l'infection qui est nombre de contacts par unité de temps) et f est la fonction incidence.

Exemple 2.1. *La fonction f peut être une fonction bilinéaire ; voir la définition dans Motivation et état de l'art p.4.*

Dans (2.1)-(2.2) les paramètres sont supposés

1. $\beta \in C_{BU}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.
2. A, μ sont positifs et $k \in [0, 1)$.

- La bornitude du taux de transmission β signifie que l'infectuosité a un maximum.
- L'uniforme continuité de β sera utile pour les estimations à priori. La fonction incidence f satisfait aux hypothèses suivantes

- (H0) La fonction $f(\cdot, J)$ est croissante pour $J > 0$ et $f(S, \cdot)$ est croissante pour $S > 0$ avec $f(0, J) = f(S, 0) = 0, \forall S, J \geq 0$.
- (H1) Pour tout $S > 0$, la fonction $f(S, \cdot)$ est concave.
- (H2) La fonction $\frac{\partial f(\cdot, 0)}{\partial J}$ est continue positive sur tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^+$.
- (H3) La fonction f est localement continue lipschitz en S et J i.e. pour tout $b > 0$, il existe $L := L_b > 0$,

$$|f(S_2, J_2) - f(S_1, J_1)| \leq L|S_2 - S_1| + |J_2 - J_1|$$

pour $0 \leq S_1, S_2, J_1, J_2 \leq b$.

2.2.2 Existence et unicité de la solution

On définit l'espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$ muni de sa norme

$$X := \mathbb{R} \times L^1(0, \infty; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

$$\|(S(t), i(t, \cdot), q(t, \cdot), R(t))\|_X = |S(t)| + \int_0^\infty |i(t, a)| da + |R(t)|.$$

Le cône positif associé est noté par

$$X^+ := \mathbb{R}^+ \times (L^1(0, \infty; \mathbb{R}^+)) \times \mathbb{R}^+.$$

On note par $N(t)$ la population totale

$$N(t) := S(t) + \int_0^\infty i(t, a) da + R(t),$$

En posant $\bar{N} := \frac{A}{\mu}$, on a le

Théorème 2.1. [30]

Pour (S_0, i_0, r_0) fixée dans X^+ , il existe une solution unique positive $(S, i, R) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^+)) \times C^1(\mathbb{R}^+)$ de (2.1)-(2.2). De plus ;

$$N(t) \leq \max(N(0), \bar{N}), \quad (2.3)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \bar{N}. \quad (2.4)$$

Remarque 2.1. Les preuves sont détaillées dans [30].

Posons

$$\pi(a) := \exp\left(-\int_0^a (\mu + \theta(s)) ds\right), \quad a \geq 0$$

la probabilité de quitter la classe des infectés.

2.2.3 Nombre de reproduction de base R_0

Le nombre de reproduction de base pour (2.1) est donné dans [30] par

$$R_0 = \frac{\partial f}{\partial J}\left(\frac{A}{\mu}, 0\right) \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a) da + \left(\frac{(1-k)\delta}{\mu + \delta} + k\right) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a) da$$

- En effet, posons $S(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $i(t, a) = c_2(a) e^{\lambda t}$ et $R(t) = c_3 e^{\lambda t}$ et linéarisons (2.1) et (2.2) autour de son équilibre trivial $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$, on a pour tout $t > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\mu S(t) - S(t) \frac{\partial f}{\partial S} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) - J(t) \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a), \quad a > 0, \\ i(t, 0) = S(t) \frac{\partial f}{\partial S} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) + J(t) \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da - (\mu + \delta)R(t). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

L'équation caractéristique associée au système (2.1) - (2.2) est donnée par

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda + \mu + \frac{\partial}{\partial S} f \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) & P(\lambda) & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial S} f \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) & Q(\lambda) & -\delta \\ 0 & G(\lambda) & \lambda + \mu + \delta \end{array} \right| = 0,$$

avec

$$P(\lambda) := \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da,$$

$$Q(\lambda) := 1 - \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da - k \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da,$$

et

$$G(\lambda) := -(1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da.$$

ou de manière équivalente

$$(\lambda + \mu)H(\lambda) = 0, \quad (2.6)$$

avec

$$H(\lambda) = (\lambda + \mu + \delta) \left(1 - \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da - k \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da \right) - \delta(1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)e^{-\lambda a} da.$$

- Les racines de (2.6) sont soit $\lambda = -\mu$ soit celles de l'équation $H(\lambda) = 0$.
- En considérant $H(0)$ nous obtenons l'équation $R_0 = 1$ où R_0 est l'expression donnée plus haut, voir p. 50 dans [45] également.
- Remarquons que R_0 est la somme de trois termes, à savoir : des individus infectés par nombre de contacts par unité de temps à un taux de transmission $\beta(a)$, des individus

qui ne se rétablissent pas avec l'évolution de l'infection à un taux k et restent donc infectés, et des individus qui rechutent à un taux δ : après rétablissement à un taux $(1 - k)$.

2.2.4 Semi-flot et attracteur global compact

On note par $B(t) = i(t, 0)$ pour tout $t > 0$, et on intègre l'EDP des infectés sur les caractéristiques

$$i(t, a) = \begin{cases} \pi(a)B(t - a), & a < t, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a - t)}i_0(a - t), & a \geq t. \end{cases} \quad (2.7)$$

Le semi-flot $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X^+ \rightarrow X^+$ est défini par

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), r_0)) = (S(t), i(t, \cdot), R(t)), \quad (S_0, i_0(\cdot), r_0) \in X^+. \quad (2.8)$$

Le semi-flot Φ défini par l'unique solution du système (2.1)- (2.2) est continu, grâce au théorème d'existence 2.1. Pour la définition du semi-flot, voir [104].

Théorème 2.2. [30]

Le semi-flot Φ admet un attracteur compact \mathbf{A} des sous-ensembles bornés dans X_+ .

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X^+$ une trajectoire totale telle que, $\phi(t) = (S(t), i(t, \cdot), R(t))$. On a par définition du semi-flot, $\phi(t + r) = \Phi(t, \phi(r))$, $t \geq 0, r \in \mathbb{R}$. Avec les mêmes arguments que dans [104], on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} S'(t) = A - \mu S - f(S(t), J(t)), \\ i(t, a) = \pi(a)B(t - a), \\ B(t) = f(S(t), J(t)) + k \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da + \delta R(t), \\ R'(t) = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a)i(t, a)da - (\mu + \delta)R(t), \\ J(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)B(t - a)da. \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux équilibres du système (2.1) et (2.2) qui sont par définition :

- Soit des états stationnaires où les dérivées s'annulent conduisant à un équilibre trivial E_0 (voir le chapitre 1). Cet équilibre existe toujours et est appelé en épidémiologie "équilibre sans maladie".

- Soit sous forme de point fixe du semi-flot associé définissant ainsi un équilibre positif E^* . Cet équilibre qui n'existe pas toujours est appelé en épidémiologie "équilibre endémique".

L'existence et la stabilité des états stationnaires E_0 et E^* font l'objet des théorèmes ci-dessous

2.2.5 Stabilité de l'équilibre sans maladie

Théorème 2.3. (Stabilité de E_0)

Si $R_0 < 1$ alors l'équilibre sans maladie $E_0 = (\bar{N}, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable, instable si $R_0 > 1$.

La preuve s'effectue en deux étapes : la première consiste en la locale stabilité moyennant la linéarisation du système (2.1)-(2.2) autour de E_0 . La seconde étape consiste en l'attractivité via le lemme de fluctuation [A.14] de [104], (voir le chapitre 1 également).

2.2.6 Stabilité de l'équilibre endémique, persistance uniforme

Lemme 2.1. (Existence de E^*)

Supposons que

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{A}{\mu}, J\right)}{f(S, J)} > 1, \quad \text{pour } S \in [0, \bar{N}).$$

Si $R_0 > 1$, alors le système (2.1)-(2.2) admet un équilibre endémique positif.

Démonstration. Si $E^* := (S^*, i^*(.), R^*)$ est un équilibre endémique positif du système (2.1)-(2.2) alors E^* est un point fixe du semi-flot Φ donné par (2.9) i.e.

$$\Phi(t, (S^*, i^*(.), R^*)) = (S^*, i^*(.), R^*), \quad \text{pour } t \geq 0.$$

D'après (2.8) et (2.30)

$$i^*(a) = \begin{cases} \pi(a)i^*(0), & 0 < a < t, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i^*(a-t), & a > t. \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = \int_0^{+\infty} \beta(a)i^*(a)da. \end{cases} \quad (2.11)$$

Remarquons que dans (2.10), la première expression de $i^*(a)$ satisfait la seconde sur des sous intervalles de longueur t . En effet, si $t < a < 2t$, on a

$$\begin{aligned} i^*(a-t) &= \pi(a-t)i^*(0), \\ &= \frac{\pi(a-t)}{\pi(a)}i^*(a). \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} i^*(a) &= \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}i^*(a-t), \\ &= \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}\pi(a-t)i^*(0), \\ &= \pi(a)i^*(0). \end{aligned}$$

Ainsi par itérations successives, on obtient

$$i^*(a) = \pi(a)i^*(0), \quad \forall a \geq 0. \quad (2.12)$$

Des expressions (2.9) et (2.12), il découle que

$$i^*(0) = \frac{1}{D}f(S^*, J^*),$$

$$D := 1 - \left(k + \frac{\delta(1-k)}{\mu + \delta} \right) \int_0^{+\infty} \theta(a)\pi(a)da. \quad (2.13)$$

Par conséquent,

$$i^*(a) = \frac{1}{D}f(S^*, J^*)\pi(a). \quad \forall a \geq 0. \quad (2.14)$$

De plus, des expressions (2.10) et (2.14), on a

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = \frac{M}{D}f(S^*, J^*). \end{cases} \quad (2.15)$$

où $M := \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)da$. De la même manière que dans [63] et [64], on montre l'existence d'un équilibre endémique positif.

Persistence uniforme

A présent, on définit :

- La fonction de persistance $\rho : X^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\rho(S_0, i_0(\cdot), r_0) := f(S_0, J_0) + \int_0^{+\infty} \theta(a) i_0(a) da + r_0,$$

i.e

$$\rho(\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), r_0))) = B(t).$$

- Et l'ensemble de persistance

$$X_0 := \left\{ (S_0, i_0(\cdot), r_0) \in X^+; r_0 + \int_0^\infty i_0(a) \bar{\theta}(a) da + \int_0^\infty i_0(a) \bar{\beta}(a) da > 0 \right\},$$

$$\begin{cases} \bar{\theta}(a) := \int_0^\infty \theta(a+t) \frac{\pi(a+t)}{\pi(a)} dt, & \text{pour } a > 0, \\ \bar{\beta}(a) := \int_0^\infty \beta(a+t) \frac{\pi(a+t)}{\pi(a)} dt, & \text{pour } a > 0. \end{cases}$$

Lemme 2.2. [30] *On Suppose que pour tout $S > 0$, la fonction $f(S, \cdot)$ est croissante et concave. Les propriétés suivantes ont lieu*

(H4)

$$\frac{f(\cdot, J)}{J} \text{ est une fonction décroissante par rapport à } J. \quad (2.16)$$

(H5)

$$\begin{cases} \frac{x}{J^*} < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < 1, & \text{pour } 0 < x < J^*, \\ 1 < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < \frac{x}{J^*}, & \text{pour } x > J^*. \end{cases} \quad (2.17)$$

Lemme 2.3. [30] *(Persistence uniforme faible)*

On suppose satisfaite l'hypothèse (H4) et que $R_0 > 1$. Alors il existe $\epsilon > 0$;

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon$$

où x est toute solution de (2.1)-(2.2) pourvu que $x \in X_0$.

Théorème 2.4. [30] *(Persistence uniforme forte)*

Supposons que $R_0 > 1$. Alors, toutes les solutions du système (2.1)-(2.2) sont uniformément fortement ρ -persistantes quand les conditions initiales balayent X_0 , i.e. Il

existe une certaine fonction $\bar{\epsilon} > 0$;

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t)x_0) > \bar{\epsilon}, \quad \text{pourvu que } x_0 \in X_0.$$

Etant donnée la persistance faible, le théorème [5.2] de [90] permet de conclure quand à la persistance forte. Par conséquent, Φ est uniformément fortement ρ -persistant. Le résultat suivant est un corollaire du théorème [5.7] de [104].

Théorème 2.5. [30]

Il existe un attracteur global compact $\tilde{\mathbf{A}}$ pour le système (2.1)-(2.2). De plus, $\tilde{\mathbf{A}}$ est uniformément ρ -positif, i.e. il existe une constante positive Γ_0 ;

$$\rho(\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), r_0))) \geq \Gamma_0, \quad \forall (S_0, i_0(\cdot), r_0) \in \tilde{\mathbf{A}}. \quad (2.18)$$

Théorème 2.6. [30] Si $R_0 > 1$ alors l'équilibre endémique E^* est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration. Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$ une trajectoire totale telle que $\Psi(t) := (S(t), i(t, \cdot), R(t))$, $S(0) = S_0$, $i(0, \cdot) = i_0(\cdot)$, et $R(0) = r_0$ où $(S(t), i(t, a), R(t))$ est une solution du problème (2.9).

On propose, pour $y > 0$, la fonction

$$H(y) = y - \ln(y) - 1. \quad (2.19)$$

pour $a \geq 0$, la fonction test

$$\phi(a) = \int_a^{+\infty} \left[\left(\frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} + k \right) \theta(\sigma) + \frac{\beta(\sigma)}{J^*} f(S^*, J^*) \right] i^*(\sigma) d\sigma, \quad (2.20)$$

et pour $x = (S_0, i_0(\cdot), r_0) \in \tilde{\mathbf{A}}$, la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x)$$

$$V_1(x) = S_0 - S^* - \int_{S^*}^{S_0} \frac{f(S^*, J^*)}{f(\eta, J^*)} d\eta,$$

$$V_2(x) = \int_0^{+\infty} H\left(\frac{i_0(a)}{i^*(a)}\right) \phi(a) da,$$

$$V_3(x) = \Omega H\left(\frac{r_0}{R^*}\right), \quad \text{avec } \Omega := \frac{\delta R^{*2}}{(1-k) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}.$$

On commence par substituer l'équation S de (2.9) dans la dérivée suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_1(\Psi(t)) &= \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) (A - f(S(t), J(t)) - \mu S(t)), \\ &= \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) (f(S^*, J^*) - f(S(t), J(t))). \end{aligned}$$

De la même manière que dans la preuve du lemme [9.18] de [104], on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(\Psi(t)) &= H\left(\frac{i(t, 0)}{i^*(0)}\right) \phi(0) + \int_0^{+\infty} H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(0)}\right) \phi'(a) da, \\ &= H\left(\Delta_1 \frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} + \Delta_2 \frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} + \Delta_3 \frac{R(t)}{R^*}\right) \phi(0) \\ &\quad + \int_0^{+\infty} H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da, \end{aligned}$$

$$\Delta_1 := \frac{f(S^*, J^*)}{i^*(0)}, \quad \Delta_2 := \frac{k \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}{i^*(0)} \quad \text{et} \quad \Delta_3 := \frac{\delta R^*}{i^*(0)}.$$

En substituant dans la troisième équation de (2.9), on obtient

$$i^*(0) = f(S^*, J^*) + k \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da + \delta R^*$$

En remarquant que $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1$ et grâce à la convexité de H , il s'en suit que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(\Psi(t)) &\leq \left[\Delta_1 H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right) + \Delta_2 H\left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) + \Delta_3 H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \right] \phi(0) \\ &\quad + \int_0^{+\infty} H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da, \end{aligned}$$

En additionnant les expressions des deux dérivées V_1' et V_2' ci dessus, et en faisant

apparaître celle de H , il s'en suit que

$$\begin{aligned}
 (V_1 + V_2)'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) - f(S, J) + f(S^*, J^*) \frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + f(S^*, J^*) \left(\frac{f(S, J)}{f(S^*, J^*)} - \ln \frac{f(S, J)}{f(S^*, J^*)} - 1\right) \\
 &+ \Delta_2 i^*(0) H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) + \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\
 &+ \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da.
 \end{aligned}$$

Le terme suivant s'écrit sous forme

$$\ln \frac{f(S, J)}{f(S^*, J^*)} = \ln \frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} + \ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 &(V_1 + V_2)'(\Psi(t)) \\
 &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) + f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1\right) \\
 &+ f(S^*, J^*) H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)}\right) + \Delta_2 i^*(0) H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) \\
 &+ \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) + \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da.
 \end{aligned}$$

En dérivant la fonction V_3 , il vient que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V_3(\Psi(t)) &= \frac{\Omega}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left((1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da - (\mu + \delta) R(t)\right) \\
 &= \frac{\Omega(\mu + \delta)}{R^*} \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) (R^* - R) \\
 &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da - \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da\right).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

En ajoutant le terme suivant à chaque membre de [\(2.21\)](#),

$$\frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da \frac{R(t)}{R^*}$$

il en résulte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_3(\Psi(t)) &= \frac{\Omega(\mu + \delta)}{R^*} \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) (R^* - R) \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*}\right) da \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\frac{R(t)}{R^*} - 1\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da. \end{aligned}$$

La sommation des dérivées V_1' , V_2' et V_3' donne

$$\begin{aligned} V'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) + f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1\right) \\ &+ f(S^*, J^*) H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)}\right) + \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) \phi'(a) da \\ &+ \Delta_2 i^*(0) H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) + \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*}\right) da \\ &+ \frac{\Omega(\mu + \delta)}{R^*} \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) (R^* - R) \\ &+ \frac{\Omega(1 - k)}{R^*} H' \left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\frac{R(t)}{R^*} - 1\right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da. \end{aligned}$$

D'un côté, les deux termes de la dernière ligne de l'inégalité ci-dessus se simplifient puisque $(\mu + \delta)R^* = (1 - k) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da$. D'un autre côté, grâce à l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned} H \left(\frac{\int_0^{+\infty} \theta(a) i(t, a) da}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}\right) &= H \left(\int_0^{+\infty} \frac{\theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} \frac{i(t, a)}{i^*(a)} da\right), \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) da. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\Omega(1 - k)}{R^*} = \frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 V'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1 \right) \\
 &+ f(S^*, J^*) H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} \right) + \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) \phi'(a) da \\
 &+ \Delta_2 i^*(0) \int_0^{+\infty} \frac{\theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) da + \Delta_3 i^*(0) H \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \\
 &+ \frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H' \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*} \right) da.
 \end{aligned}$$

Quitte à choisir t tel que $J(t) < J^*$, le lemme (2.2) et l'inégalité de Jensen entraînent que

$$\begin{aligned}
 H \left(\frac{f(S, J)}{f(S, J^*)} \right) &< H \left(\frac{J(t)}{J^*} \right), \\
 &= H \left(\int_0^{+\infty} \frac{\beta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \beta(a) i^*(a) da} \frac{i(t, a)}{i^*(a)} da \right), \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\beta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \beta(a) i^*(a) da} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) da, \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\beta(a) i^*(a)}{J^*} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) da.
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 V'(\Psi(t)) &\leq \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)} \right) \\
 &+ f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1 \right) \\
 &+ \int_0^{+\infty} H \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \right) \left[\phi'(a) + \frac{f(S^*, J^*)}{J^*} \beta(a) i^*(a) + k\theta(a) i^*(a) \right] da \\
 &+ \delta R^* H \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \\
 &+ \frac{\delta R^*}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} H' \left(\frac{R(t)}{R^*} \right) \int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*} \right) da.
 \end{aligned}$$

L'expression de ϕ' (provenant de (2.20)) permet de conclure que

$$\begin{aligned}
 & V'(\Psi(t)) \\
 \leq & \mu(S^* - S(t)) \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S(t), J^*)}\right) \\
 + & f(S^*, J^*) \left(-\ln \frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)} - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)} + 1\right) \\
 + & \int_0^{+\infty} \left[H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) - H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right) + H'\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)} - \frac{R(t)}{R^*}\right) \right] \frac{\delta R^* \theta(a) i^*(a)}{\int_0^{+\infty} \theta(a) i^*(a) da} da.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Sachant que

$$-\ln(1/x) - x + 1 \leq 0$$

et que

$$H(b) - H(a) + (a - b)H'(b) \leq 0$$

il en est de même pour le signe du second et troisième termes de l'inégalité (2.22). Il en découle que,

$$V'(\Psi(t)) \leq 0.$$

Des itérations successives effectuées sur tous les t tels que $J(t) > J^*$ donnent

$$V'(\Psi(t)) \leq 0$$

Comme V est bornée sur Ψ , les ensembles α -limite et ω -limite de Ψ doivent être contenus dans le plus grand sous-ensemble invariant M .

Remarquons que $V'(\Psi(t)) = 0$, implique que $S(t) = S^*$, et $\frac{i(t, a)}{i^*(a)} = \frac{R(t)}{R^*}$

D'autre part, le système (2.9) et l'égalité $i^*(a) = \pi(a)i^*(0)$ donnent

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} = \frac{B(t - a)}{i^*(0)} = \frac{R(t)}{R^*}, \quad \forall a \geq 0, \tag{2.23}$$

ce qui entraîne que pour tout $a \geq 0$, $B(t - a) = B(t)$ et $i(t, a) = i(t, 0)$.

De l'équation S de (2.9) et avec $S(t) = S^*$, on a

$$A - \mu S^* = f(S^*, J(t)).$$

Par ailleurs, l'équilibre doit satisfaire l'équation suivante

$$A - \mu S^* = f(S^*, J^*),$$

d'où $f(S^*, J^*) = f(S^*, J(t))$. La monotonie de la fonction f et le système (2.9) impliquent que

$$i(t, 0) \int_0^\infty \beta(a)\pi(a)da = i^*(0) \int_0^\infty \beta(a)\pi(a)da$$

i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$B(t) = i(t, 0) = i^*(0)$$

Et par (2.23),

$$R(t) = R^*$$

et

$$i(t, \cdot) = i^*(\cdot).$$

Par conséquent, l'ensemble M ne contient que l'équilibre endémique positif E^* .

Par suite, comme $\tilde{\mathbf{A}}$ est compact, alors les ensembles α -limite et ω -limite ne sont pas vides (voir l'annexe pour la définition des ensembles ω limites), sont compacts et attirent, $\Psi(t)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, grâce au principe d'invariance de LaSalle.

D'un côté la fonction $V(\Psi(t))$ étant décroissante par rapport à $\Psi(t)$, constante sur les ensembles α -limite et ω -limite. Sachant que ces deux ensembles sont réduits à l'équilibre endémique positif, alors $\Psi(t) \rightarrow (S^*, i^*(\cdot), R^*)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, par conséquent

$$V(\Psi(t)) \rightarrow V(S^*, i^*(\cdot), R^*), \quad \text{quand } t \rightarrow \pm\infty.$$

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'encadrement suivant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\Psi(t)) \leq V(\Psi(t)) \leq \lim_{t \rightarrow -\infty} V(\Psi(t)),$$

i.e

$$V(\Psi(t)) = V(S^*, i^*(\cdot), R^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

auquel cas

$$\Psi(t) = (S^*, i^*(\cdot), R^*), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L'attracteur compact $\tilde{\mathbf{A}}$ étant réduit à l'équilibre endémique positif E^* , le théorème [2.39] de [104] permet de conclure que la stabilité globale de E^* . \square

2.3 Stabilité d'un modèle du type SIQ avec rechute

2.3.1 Modèle

On considère une population composée de classes des susceptibles $S(t)$, des infectés $i(t, a)$ et celle de la quarantaine $q(t, a)$ ayant l'âge a d'infection à l'instant t .

Avec le temps, les individus atteints par une certaine infection deviennent capables de la transmettre (période de latence : temps écoulé depuis la contraction de l'infection jusqu'au début de sa transmission). Cependant, la quarantaine consiste à isoler ces agents infectieux, une fois identifiés comme tels. Dans le but de freiner la transmission de l'infection, le modèle [44] vise à analyser les effets et l'apport de la quarantaine. Les fonctions $\beta(a)$, $\theta(a)$ et $\delta(a)$ représentent respectivement les taux de transmission, de rétablissement et de rechute à l'âge a de l'infection. Les paramètres A et μ représentent respectivement le flux entrant à la classe des susceptibles et la mortalité naturelle.

Le modèle [44] est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), \\ \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial a} = -(\mu + \theta(a))i(t, a) + \delta(a)q(t, a), \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial a} = \theta(a)i(t, a) - (\mu + \delta(a))q(t, a), \\ i(0, t) = f(S(t), J(t)), \\ q(0, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = S_0, R(0) = r_0, \\ i(0, a) = i_0(a), \quad i_0 \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ q(0, a) = q_0(a), \quad i_0 \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

La force de l'infection est donnée, à tout instant t , par

$$J(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)i(t, a)da$$

et la fonction incidence f satisfait aux hypothèses suivantes

(Q1) $f(\cdot, J)$ est croissante pour $J > 0$ et $f(S, 0) = f(0, J) = 0, \forall S, J > 0$.

- (Q2) La fonction f est localement lipschitzienne en S, J :
 $\forall c > 0, \exists L = L_c > 0$;

$$|f(S_2, J_2) - f(S_1, J_1)| \leq L(|S_2 - S_1| + |J_2 - J_1|),$$

$$0 \leq S_1, S_2, J_1, J_2 \leq c.$$

- (Q3) La fonction $\frac{\partial f(\cdot, 0)}{\partial J}$ est continue positive sur tout compact C .
(Q4) La fonction f est concave par rapport à J .

La probabilité de quitter la classe des infectés est donnée par

$$\pi_1(a) := \exp\left(-\int_0^a (\mu + \theta(s) - \delta(s)) ds\right)$$

2.3.2 Existence et unicité de la solution

Considérons l'espace de Banach muni de sa norme

$$X := \mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

$$\|(S(t), i(t, a), q(t, a))\|_X = |S(t)| + \int_0^{+\infty} |i(t, a)| da + \int_0^{+\infty} |q(t, a)| da, \quad S \in \mathbb{R} \text{ et } i, q \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

le cône positif correspondant est donné par ;

$$X_+ = \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+) \times \mathbb{R}^+$$

La fonction population totale et sa dérivée par rapport au temps sont données par

$$N(t) := S(t) + \int_0^\infty i(t, a) da + \int_0^\infty q(t, a) da,$$

$$N'(t) = A - \mu N(t), \quad t > 0.$$

Théorème 2.7. [44]

On suppose satisfaites les hypothèses (Q1)- (Q3). Alors le système (2.24)-(2.25) admet une unique solution bornée $(S, i, q) \in C^1(\mathbb{R}^+) \times [C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^+))]^2$, positive dès que $S_0 \geq 0, i_0(\cdot) \geq 0, q_0(\cdot) \geq 0$. De plus,

$$N(t) \leq \max\left(N(0), \frac{A}{\mu}\right), \quad (2.26)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{A}{\mu}. \quad (2.27)$$

Pour les preuves de cette section, nous invitons le lecteur à consulter [44].

2.3.3 Nombre de reproduction de base R_0

Le nombre de reproduction de base pour (2.24) est donné dans [44] par

$$R_0 = \frac{\partial f}{\partial J} \left(\frac{A}{\mu}, 0 \right) \int_0^{+\infty} \beta(a) \pi_1(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{\exp(-\mu s)}{\pi_1(s)} ds \right) da$$

Observons, dans ce cas, que R_0 n'est autre que la somme des deux termes, à savoir, le premier est dû à la force de l'infection et le second est dû à la rechute.

2.3.4 Attracteur global compact et trajectoires totales

En posant $d(t, a) = i(t, a) + q(t, a)$, le système (2.24)-(2.25) devient

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), & t > 0, \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu + \theta(a) + \delta(a))i(t, a) + \delta(a)d(t, a), & t > 0, \quad a > 0 \\ \frac{\partial d(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial d(t, a)}{\partial a} = -\mu d(t, a), & t > 0, \quad a > 0 \\ i(t, 0) = d(t, 0) = f(S(t), J(t)), & t > 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

aux conditions initiales

$$\begin{cases} S(0) = S_0 \in \mathbb{R}^+, \\ i(0, \cdot) = i_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ d(0, \cdot) = (i_0 + q_0)(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+). \end{cases} \quad (2.29)$$

Outre l'équation des susceptibles, une intégration sur les lignes caractéristiques des EDPs du système (2.28)-(2.29) donne

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - f(S(t), J(t)), & t > 0, \\ S(0) = S_0. \end{cases} \quad (2.30)$$

$$i(t, a) = \begin{cases} \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds\right) \pi(a) f(S(t-a), J(t-a)), & t > a, \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} i_0(a-t) + \int_0^t \delta(s+a-t) e^{-\mu s} \frac{\pi(a)}{\pi(s+a-t)} ds (i_0 + q_0)(a-t), & t < a. \end{cases} \quad (2.31)$$

$$d(t, a) = \begin{cases} e^{-\mu a} f(S(t-a), J(t-a)), & t > a, \\ e^{-\mu t} (i_0 + q_0)(a-t), & t < a. \end{cases} \quad (2.32)$$

On définit le semi-flot $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ par

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = (S(t), i(t, \cdot), d(t, \cdot)), \quad t \geq 0, \quad (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X. \quad (2.33)$$

avec (S, i, d) est l'unique solution du système (2.28)-(2.29).

Le théorème suivant garantit l'existence d'un attracteur compact des sous-ensembles bornés de X (voir [80], [104], [105] pour le concept d'un attracteur global).

Théorème 2.8. [44]

Le semi-flot Φ admet un attracteur compact des sous-ensembles bornés de X .

Démonstration. On définit Φ comme

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = \Psi_1(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) + \Psi_2(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))).$$

avec

$$\Psi_1(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = (0, u_1(t, \cdot), v_1(\cdot)),$$

$$\Psi_2(t, (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))) = (S(t), u_2(t, \cdot), v_2(\cdot)).$$

et

$$u_1(t, a) = \begin{cases} 0, & a < t \\ \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} i_0(a-t) + \int_0^t \delta(s+a-t) e^{-\mu s} \frac{\pi(a)}{\pi(s+a-t)} ds (i_0 + q_0)(a-t), & a > t. \end{cases}$$

$$u_2(t, a) = \begin{cases} \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds\right) \pi(a) f(S(t-a), J(t-a)), & a < t \\ 0 & a > t. \end{cases}$$

$$v_1(t, a) = \begin{cases} 0, & a < t \\ e^{-\mu t} (i_0 + q_0)(a-t), & a > t, \end{cases}$$

$$v_2(t, a) = \begin{cases} e^{-\mu a} f(S(t-a), J(t-a)), & a < t \\ 0 & a > t. \end{cases}$$

Le semi-flot Φ défini par $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X_+ \rightarrow X_+$

$$\Phi(t, (S_0, i_0(\cdot), q_0(\cdot))) = (S(t), i(t, \cdot), q(t, \cdot)) \quad (2.34)$$

est une solution unique du problème (2.24)-(2.25). De plus, le semi-flot Φ est continu (la continuité du semi-flot Φ découle du théorème (2.7)).

Soit $\bar{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow X$ une trajectoire totale associée à Φ , telle que $\bar{\phi}(t) = (S(t), i(t, \cdot), d(t, \cdot))$.

On obtient le système d'équations suivant, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} S'(t) = A - \mu S - f(S(t), J(t)), \\ i(t, a) = \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds\right) f(S(t-a), J(t-a)), \\ d(t, a) = e^{-\mu a} f(S(t-a), J(t-a)), \\ d(t, 0) = i(t, 0) = f(S(t), J(t)), \\ J(t) = \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da, \end{cases} \quad (2.35)$$

Théorème 2.9. [44]

Pour le semi-flot Φ , il existe un attracteur compact \mathbf{A}_0 des sous-ensembles bornés de X_+ .

Lemme 2.4. [44] Pour $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}_0$, nous avons les estimations à priori

$$\begin{aligned} S_0 + \int_0^\infty d_0(a)da &\leq \frac{A}{\mu}, \\ S_0 + \int_0^\infty i_0(a)da &\leq C_0 := \frac{A(\mu + \|\delta\|_\infty)}{\mu^2}, \\ i_0(a) &\leq L\|\beta\|_\infty C_0 \|\delta\|_\infty a e^{-\mu a}, \quad d_0(a) \leq L\|\beta\|_\infty C_0 e^{-\mu a}, \\ S_0 &\geq \frac{A}{\mu + L} \end{aligned}$$

avec L est la constante de Lipschitz de f .

Dans la suite on s'intéresse à la stabilité des états stationnaires.

2.3.5 Stabilité de l'équilibre sans maladie

Théorème 2.10. [44] (Stabilité de E_0)

On suppose satisfaite l'hypothèse (Q4). Si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre trivial $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Idée de preuve : En première étape, définissons, les deux fonctions tests suivantes

$$\begin{cases} \phi(a) = \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \frac{1}{\pi(a)} \int_a^\infty \beta(s)\pi(s)ds. \\ \psi(a) = \frac{\partial f(\frac{A}{\mu}, 0)}{\partial J} \int_a^\infty \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} \int_s^\infty \beta(\sigma)\pi(\sigma)d\sigma ds. \end{cases}$$

Pour $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}_0$, on considère la fonction de Lyapunov suivante

$$V(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = V_1(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) + V_2(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) + V_3(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))$$

avec

$$V_1(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = S_0 - \int_{\frac{A}{\mu}}^{S_0} \lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(\eta, J)} d\eta - \frac{A}{\mu},$$

$$V_2(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = \int_0^\infty \phi(a)i_0(a)da,$$

et

$$V_3(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = \int_0^\infty \psi(a)d_0(a)da.$$

Soient $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_0$ avec $\Psi(t) = (S(t), i(t, \cdot), d(t, \cdot))$ et $(S(0), i(0, \cdot), d(0, \cdot)) = (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))$

solution du problème (2.35). La preuve est détaillée dans [44], où on montre que la dérivée $V'(\Psi(t)) \leq 0$, s'annulant au point d'équilibre sans maladie E_0 . Comme le plus grand ensemble invariant vérifie la propriété : $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ est réduit à $\{(\frac{A}{\mu}, 0, 0)\}$, attirant toutes les trajectoires totales (2.35), grâce au principe d'invariance de LaSalle. Cet ensemble étant réduit à E_0 , ce qui entraîne que l'attracteur $\mathbf{A}_0 = E_0$. (on peut voir également le théorème [4.1] de [16]). Le théorème [2.39] de [104] permet de conclure que E_0 est globalement asymptotiquement stable. CQFD

2.3.6 Stabilité de l'équilibre endémique, persistance uniforme

A présent, on s'intéresse à l'existence d'un équilibre $E^* := (S^*, i^*(\cdot), d^*(\cdot))$, sa stabilité globale avec persistance des solutions du système (2.35) dès que $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_0$, nous renvoyons à [44] pour de plus amples détails.

Lemme 2.5. [44] (Stabilité de E^*)

Soit $\lim_{J \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{A}{\mu}, J)}{f(S, J)} > 1$ pour $S \in [0, \frac{A}{\mu})$. Alors, si $R_0 > 1$, il existe un équilibre endémique positif E^* pour le système (2.24)-(2.25).

Démonstration. Un état stationnaire endémique E^* est, par définition, un point fixe du semi-flot Φ i.e.

$$\Phi(t, (S^*, i^*, d^*)) = (S^*, i^*, d^*), \quad \text{avec } i^* \neq 0, d^* \neq 0, \text{ et } t \geq 0.$$

D'après (2.30)-(2.31) et (2.33), on obtient

$$i^*(a) = \begin{cases} \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi_1(s)} ds\right) \pi_1(a) f(S^*, J^*), & t > a, \\ \frac{\pi_1(a)}{\pi_1(a-t)} i^*(a-t) + \int_0^t \delta(s+a-t) e^{-\mu s} \frac{\pi_1(a)}{\pi_1(s+a-t)} ds d^*(a-t), & t < a. \end{cases} \quad (2.36)$$

$$d^*(a) = \begin{cases} e^{-\mu a} f(S^*, J^*), & t > a, \\ e^{-\mu t} d^*(a-t), & t < a. \end{cases} \quad (2.37)$$

On a également,

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = \int_0^\infty \beta(a) i^*(a) da, \end{cases} \quad (2.38)$$

Dans (2.37), observons que si $d^*(a)$ satisfait la première expression alors elle satisfera

aussi la deuxième expression. De plus, pour $t \leq a \leq 2t$, l'expression

$$d^*(a-t) = e^{-\mu(a-t)} f(S^*, J^*).$$

entraîne

$$\begin{aligned} d^*(a) &= e^{-\mu t} d^*(a-t), \\ &= e^{-\mu t} e^{-\mu(a-t)} f(S^*, J^*), \\ &= e^{-\mu a} f(S^*, J^*). \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, en réitérant successivement ce procédé, on obtient

$$d^*(a) = e^{-\mu a} f(S^*, J^*), \quad \forall a > 0. \quad (2.39)$$

De manière similaire, on procède avec i^* , on a pour tout $a > 0$

$$i^*(a) = \pi(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds \right) f(S^*, J^*) \quad (2.40)$$

Les expressions (2.38) et (2.40) combinées donnent

$$\begin{cases} A = \mu S^* + f(S^*, J^*), \\ J^* = D f(S^*, J^*), \end{cases} \quad (2.41)$$

$$D = \int_0^\infty \beta(a) \pi_1(a) \left(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi_1(s)} ds \right) da.$$

La preuve de l'existence de l'équilibre endémique positif E^* est similaire que celle établie dans [63], [64]. □

Afin d'appliquer le théorème [5.2] de [104] relatif à la persistance uniforme (voir [78], [80], [90]), nous faisons les hypothèses suivantes :

(Q5) Il existe un équilibre endémique positif E^* vérifiant (2.41) et pour tout $S > 0$;

$$\begin{cases} \frac{x}{J^*} < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < 1 & \text{si } 0 < x < J^*, \\ 1 < \frac{f(S, x)}{f(S, J^*)} < \frac{x}{J^*} & \text{si } x > J^*. \end{cases} \quad (2.42)$$

(Q6) Il existe $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $S \in [\frac{A}{\mu} - \epsilon, \frac{A}{\mu} + \epsilon]$

$$\frac{f(S, J_1)}{J_1} \geq \frac{f(S, J_2)}{J_2}, \quad (2.43)$$

pour $0 < J_1 \leq J_2 \leq \eta$.

Posons

$$k := \inf \left\{ a : \int_a^\infty \beta(\sigma) d\sigma = 0 \right\},$$

Soit X_0 le sous ensemble de X défini par

$$X_0 := \left\{ (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_+; \int_0^k (i_0 + q_0)(a) da > 0 \right\}.$$

le lecteur peut consulter [16], [45], [31], [78] par exemple.

Lemme 2.6. [44] Si $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_0$, alors la fonction $J(t)$ est positive pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On définit la fonction dite de persistance par $\rho : X_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\rho(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) = \int_0^\infty \beta(a) i_0(a) da,$$

Pour $x_0 = (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))$, on a

$$\rho(\Phi(t, x_0)) = \int_0^\infty \beta(a) i(t, a) da,$$

Du lemme 2.6, on déduit que :

$$\rho > 0, \forall t \geq 0 \iff x \in X_0.$$

Lemme 2.7. [44] Supposons que $R_0 > 1$. Sous les hypothèses (Q5)- (Q6), il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t, x)) > \epsilon$$

pour toute solution x de (2.28)-(2.29) pourvu que $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in X_0$.

- Le théorème [5.2] de [104] et le lemme (2.6) permettent de conclure quand à la persistance uniformément forte de la solution du problème (2.28)-(2.29).

- A présent, en se basant sur le théorème [5.7] de [104] on a les estimations suivantes

Théorème 2.11. [44]

Pour toute trajectoire à conditions initiales dans X_0 , il existe un attracteur compact \mathbf{A}_1 . De plus, \mathbf{A}_1 est ρ -persistant i.e. il existe une constante positive \bar{c} , telle que

$$\int_0^\infty \beta(a)i_0(a)da \geq \bar{c}, \quad (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}_1.$$

Lemme 2.8. [44] Il existe $c > 0$ telle que, pour tout $(S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot)) \in \mathbf{A}_1$,

$$i_0(a) \geq c\tilde{\pi}(a), \quad a \geq 0,$$

$$d_0(a) \geq ce^{-\mu a}, \quad a \geq 0.$$

Idee de preuve : Avec (2.30), (2.31), le théorème (2.11) et le lemme (2.8) on peut écrire

$$i(t, a) \geq c\tilde{\pi}(a),$$

avec $c = f(\frac{A}{\mu+L}, \bar{c})$ et $L := L_c$.

Les lemmes (2.7) et (2.8) conduisent au lemme suivant

Lemme 2.9. [44] Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \geq \frac{\bar{c}}{f(S^*, J^*)}$$

$$\int_0^\infty \frac{i(t, a)}{i^*(a)} \frac{\beta(a)\tilde{\pi}(a)}{K} da \geq \frac{\bar{c}}{f(S^*, J^*)}.$$

$$f(S(t), J(t)) \geq f(\frac{A}{\mu+L}, \bar{c}).$$

Théorème 2.12. [44]

On suppose satisfaites les hypothèses du lemme (2.7). Alors, l'équilibre positif E^* de (2.35) est globalement asymptotiquement stable dans X_0 .

Démonstration. Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$ telle que $\Psi(t) := (S(t), i(t, \cdot), d(t, \cdot))$, solution du système (2.35), avec $(S(0), i(0, \cdot), d(0, \cdot)) = (S_0, i_0(\cdot), d_0(\cdot))$. Comme dans (2.19) (section ci-dessus), on introduit la fonction $H(y) = y - 1 - \ln(y)$ et les fonctions tests suivantes

$$\begin{cases} \phi(a) = f(S^*, J^*) D \int_a^\infty \beta(s)\pi(s)ds, \\ \psi(a) = f(S^*, J^*) D \int_a^\infty \beta(a)\pi(a) \int_0^a \delta(\sigma) \frac{e^{-\mu\sigma}}{\pi(\sigma)} d\sigma ds. \end{cases} \quad (2.44)$$

$$D = \frac{1}{\int_0^\infty \beta(a)\pi(a)(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds)da}. \quad (2.45)$$

Soit $x_0 = (s_0, d_0, i_0) \in \mathbf{A}_1$, on considère la fonction de Lyapunov suivante

$$\begin{aligned} V(x_0) &= V_1(x_0) + V_2(x_0) + V_3(x_0) \\ V_1(x_0) &= S_0 - S^* - \int_{S^*}^{S_0} \frac{f(S^*, J^*)}{f(\eta, J^*)}d\eta, \\ V_2(x_0) &= \int_0^\infty H\left(\frac{i_0(a)}{i^*(a)}\right)\phi(a)da, \\ V_3(x_0) &= \int_0^\infty H\left(\frac{d_0(a)}{d^*(a)}\right)\psi(a)da. \end{aligned}$$

En première étape, on substitut S' par son expression (2.35)

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(\Psi(t))}{dt} &= \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right)(A - \mu S - f(S, J)) \\ &= \mu(S^* - S)\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right)(f(S^*, J^*) - f(S, J)). \end{aligned} \quad (2.46)$$

En seconde étape,

$$V_2(\Psi(t)) = \int_0^\infty H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right)\phi(a)da,$$

Les expressions de i et i^* entraînent

$$V_2(\Psi(t)) = \int_0^\infty \phi(a)\xi(t - a)da,$$

avec $\xi(t) = H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right)$.

Grâce au lemme [9.18] de [104], on montre assez aisément que V_2 est absolument continue et

$$\frac{dV_2(\Psi(t))}{dt} = \phi(0)\xi(t) + \int_0^\infty \phi'(a)\xi(t - a)da$$

ou encore

$$\frac{dV_2(\Psi(t))}{dt} = \phi(0)H\left(\frac{i(t, 0)}{i^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right)\phi'(a)da. \quad (2.47)$$

De même pour V_3 , avec les mêmes arguments ci-dessus

$$\frac{dV_3(\Psi(t))}{dt} = \psi(0)H\left(\frac{d(t, 0)}{d^*(0)}\right) + \int_0^\infty H\left(\frac{d(t, a)}{d^*(a)}\right)\psi'(a)da. \quad (2.48)$$

En sommant les équations (2.46), (2.47) et (2.48), avec le système (2.35) et l'expression (2.40), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV(\Psi(t))}{dt} &= \mu(S^* - S)\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right)(f(S^*, J^*) - f(S, J)) \\ &\quad + (\phi(0) + \psi(0))H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right) \\ &\quad + \int_0^\infty H\left(\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}\right)(\phi'(a) + \psi'(a))da. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction H peut s'exprimer comme suit ;

$$\begin{aligned} H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right) &= \frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} - 1 - \ln\left(H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)}\right)\right) \\ &= \frac{f(S(t), J(t))}{f(S^*, J^*)} - 1 - \ln\left(H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S, J^*)}\right)\right) - \ln\left(H\left(\frac{f(S(t), J^*)}{f(S^*, J^*)}\right)\right). \end{aligned}$$

Sachant que

$$\left(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right) \leq 0,$$

et remarquons que

$$\phi(0) + \psi(0) = f(S^*, J^*).$$

En substituant par ϕ et ψ (2.44) dans la dérivée suivante, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV(\Psi(t))}{dt} &= \mu(S^* - S(t))\left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) + \left(1 - \frac{f(S^*, J^*)}{f(S, J^*)}\right) \\ &\quad - \ln\left(\frac{f(S, J^*)}{f(S^*, J^*)}\right)f(S^*, J^*) + f(S^*, J^*)H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) \\ &\quad - f(S^*, J^*)D \int_0^\infty \left(\beta(a)\pi(a)\left(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds\right)\right) H\left(\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}\right)da. \end{aligned}$$

Quitte à vérifier le signe du troisième terme, le premier et le deuxième terme du membre de droite de cette dernière équation sont négatifs. Soit

$$I = H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - D \int_0^\infty \left(\beta(a)\pi(a)\left(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds\right)\right) da.$$

D'après (2.35), (2.41) et par un calcul direct, on vérifie que

$$H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) = H\left(\int_0^\infty \beta(a)\pi(a)\left(1 + \int_0^a \delta(s)\frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)}ds\right)\frac{f(S(t-a), J(t-a))}{f(S^*, J^*)}da\right)$$

En utilisant l'expression de D (2.45) et l'inégalité de Jensen, on conclut que

$$I \leq H\left(\frac{f(S(t), J(t))}{f(S(t), J^*)}\right) - H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right).$$

Avec des arguments similaires que ceux donnés dans la preuve du théorème 2.10, on montre que

$$\frac{\partial V(\Psi(t))}{\partial t} \leq 0.$$

Le cas

$$\frac{dV(\Psi(t))}{dt} = 0$$

entraîne $S(t) = S^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$H\left(\frac{f(S^*, J)}{f(S^*, J^*)}\right) = \int_0^\infty \frac{f(S^*, J(t-a))}{f(S^*, J^*)} dm(a) \quad (2.49)$$

$$m(a) := \frac{\beta(a)\pi(a)(1 + \int_0^a \delta(s) \frac{e^{-\mu s}}{\pi(s)} ds)}{D}$$

Du système (2.35), on a

$$A - \mu S^* = f(S^*, J(t)),$$

d'après l'expression (2.41), on obtient

$$f(S^*, J(t)) = f(S^*, J^*)$$

que l'on substitue dans (2.49) pour trouver

$$\int_0^\infty \frac{f(S^*, J(t-a))}{f(S^*, J^*)} dm(a) = 0,$$

cela conduit à $i(t, \cdot) = i^*(\cdot)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme dans la preuve du théorème 2.10 : Le plus grand ensemble invariant est réduit à E^* et attire toute trajectoire provenant de X_0 par le principe de laSalle. D'autre part, l'existence d'un attracteur compact \mathbf{A}_1 pour toute trajectoire dont les conditions initiales sont dans X_0 est assurée, ce qui signifie que $E^* = \mathbf{A}_1$.

On conclut que l'équilibre positif endémique E^* est globalement asymptotiquement stable. \square

2.4 Contrôle Optimal d'un modèle du type SIR avec dépistage et fonction réponse

2.4.1 Modèle

Soit $T > 0$ fini et fixé, pour $t \in I := (0, T)$ on considère une population humaine de densité $N(t)$ divisée en trois classes : $S(t)$ est la densité des susceptibles, $i(\theta, t)$ celle des infectés ayant l'âge θ d'infection et $R(t)$ celle des réfractaires. Notons que $a \in (0, \theta_m)$ où θ_m représente l'âge maximal de l'infection.

- Une fois que l'infection soit contractée, soit que l'individu devient par la suite, contagieux (période de latence), décède ou devient réfractaire.
- Grâce à la mesure de dépistage, les individus sont identifiés comme infectés, et ce dès l'apparition des premiers signes cliniques (période d'incubation).
- Comme mentionné ci-dessus et afin de mieux contrôler la propagation de l'infection, le suivant modèle [3] est contrôlé par l'action de dépistage $v(t)$ via une certaine réponse de la population totale ; $(0, T)$ désigne la période sur laquelle s'étend la campagne de dépistage

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \Lambda - \lambda S(t) - \mu S(t) \\ \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial \theta} + [\mu + \nu(\theta) + \gamma(\theta) + v(t)\Psi(N(t))\phi(\theta)]i(\theta, t) = 0 \\ R'(t) = \int_0^{\theta_m} [\gamma(\theta) + v(t)\Psi(N(t))\phi(\theta)]i(\theta, t) d\theta - \mu R(t) \\ N(t) = S(t) + \int_0^{\theta_m} i(\theta, t) d\theta + R(t) \end{array} \right. \quad (2.50)$$

et les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = S_0, \\ i(0, \theta) = i_0(\theta), \quad i_0 \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ R(0) = r_0. \end{array} \right. \quad (2.51)$$

avec la fonction incidence

$$i(0, t) = \lambda(t)S(t)$$

Où $\lambda(t)$ est la force d'infection donnée à l'instant t par

$$\lambda(t) = \frac{c}{N(t)} \int_0^{\theta_m} \omega(\theta) i(\theta, t) d\theta$$

Les données Λ , μ sont respectivement le flux entrant dans la classe des susceptibles (taux de recrutement) et celui de mortalité naturelle dans la population totale (supposés constants). La description des paramètres du modèle (2.50) se trouve dans [3], que nous rappelons ici

$\gamma(\theta)$: taux de rétablissement dépend de l'âge de l'infection dû à la progression naturelle de l'infection.

$\nu(\theta)$: taux de rétablissement dépend de l'âge de l'infection du à l'isolation des individus infectés.

$\phi(\theta)$: fonction traitement dépend de l'âge de l'infection.

$\Psi(N)$: fonction réponse (à la campagne de dépistage) dépend de la population totale i.e. la fraction de la population totale qui accepte de se faire dépister à tout instant t .

$\omega(\theta)$: taux de transmission dépend de l'âge de l'infection.

Sous les hypothèses suivantes

(A1)

$$\int_0^{\theta_m} \gamma(\theta) d\theta = +\infty$$

(A2) La fonction $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est décroissante, dérivable, dont la forme est

$$\Psi(x) = \frac{1}{1+x}.$$

L'hypothèse (A1) signifie que tous les individus infectés se rétablissent avant θ_m .

2.4.2 Intégration sur les lignes caractéristiques

En considérant les variables $S(t)$, $u(\theta, t)$ et $N(t)$, où

$$u(\theta, t) = \frac{i(\theta, t)}{\Gamma(\theta)}$$

et

$$\Gamma(\theta) = \exp\left(-\int_0^{\theta} \gamma(r) dr\right)$$

A un changement de variables près, le modèle (2.50)-(2.51) s'exprime par

$$\begin{cases} S'(t) = 1 - \lambda S(t) - S(t) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \theta} + [1 + \nu(\theta) + \gamma(\theta) + v(t)\Psi(N(t))\phi(\theta)]u(\theta, t) = 0 \\ N'(t) = 1 - N(t) - \int_0^{\theta_m} [\nu(\theta)\Gamma(\theta)u(\theta, t)] d\theta. \end{cases} \quad (2.52)$$

aux conditions initiales

$$\begin{cases} S(0) = S_0, \\ u(\theta, 0) = \frac{i_0(\theta)}{\Gamma(\theta)} \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ N(0) = S_0 + \int_0^{\theta_m} i(\theta, t) d\theta + r_0. \end{cases} \quad (2.53)$$

L'intégration le long des caractéristiques donne

$$u(\theta, t) = \begin{cases} u_0(\theta - t) \text{ si } \theta > t \\ \lambda(t - \theta)S(t - \theta) \text{ si } \theta \leq t \end{cases} \times \epsilon(\theta, t; v, N),$$

où

$$\epsilon(\theta, t; v, N) = \exp\left(-\int_0^{\theta t} [1 + \nu(\theta - r) + v(t - r)\Psi(N(t - r))\phi(\theta - r)] dr\right)$$

2.4.3 Nombre de reproduction de base R_0

Dans (2.52), l'équilibre sans maladie est donné par $(S_0, u_0(\theta), N_0) = (1, 0, 1)$. Un équilibre endémique existe et est unique si et seulement si le nombre de reproduction de base est supérieur à 1, soit

$$R_0(v) = ck(v\Psi(1)) > 1$$

avec

$$k(\xi) = \int_0^{\theta_m} \omega(\theta)\Gamma(\theta)\Pi(\theta, \xi) d\theta$$

et

$$\Pi(\theta, \xi) = \exp\left\{-\theta - \int_0^\theta [\nu(\tau) + \xi\phi(\tau)] d\tau\right\}$$

Dans ce cas l'équilibre endémique est donné par

$$N^* = 1, S^* = \frac{1}{ck(v\Psi(N))}, u^*(\theta) = \left(1 - \frac{1}{ck(v\Psi(N))}\right)\Pi(\theta, v\Psi(N))$$

Auquel cas, l'équilibre trivial devient instable (stable si $R_0(v) < 1$).

Cependant, $R_0(v)$ est décroissante par rapport à v , i.e.

$$\lim_{v \rightarrow \infty} R_0(v) = c \int_0^{\theta_0} \omega(\theta)\Gamma(\theta)\Pi(\theta, 0) d\theta$$

avec

$$\theta_0 = \inf \{\theta; \phi(\theta) > 0\}$$

D'après [3], une stratégie de dépistage effectuée à un nombre trop important de personnes peut être efficace (pour faire régresser l'infection). Ce qui n'est pas toujours réalisable à la limite de la disponibilité des ressources médicales.

Il s'agit donc de prendre différentes valeurs de v dans son domaine admissible, et dépister au maximum la population. Il est donc, question de trouver un contrôle v qui assure le meilleur coût économique et social ce qui définit un meilleur dépistage via un critère d'optimisation.

2.4.4 Problème de contrôle optimal

On cherche un contrôle optimal v^* dans le domaine convexe

$$V = \{v \in L^\infty(0, T); 0 \leq v(t) \leq v_m \text{ p.p. } t\}$$

tel que

$$F(v^*) = \min_{v \in V} F(v) \tag{2.54}$$

Où

$$\begin{aligned} F(v) = & \alpha \int_0^T \int_0^{\theta_m} i(\theta, t)\psi(N(t))i(\theta, t)d\theta dt + \beta \int_0^T v^2(t)dt \\ & + \eta \int_0^T v(t)\Psi(N(t))N(t) dt + \delta \int_0^T \int_0^{\theta_m} c(\theta)v(t)\Psi(N(t))i(\theta, t) d\theta dt \end{aligned} \tag{2.55}$$

Les différents termes de la fonctionnelle coût sont pondérés par les constantes positives α , β , η et δ . Par ailleurs, v_m désigne l'effort maximal proposé pour le dépistage.

2.4.5 Existence du contrôle optimal

On appelle solution du système (2.52)-(2.53), le triplet $(S, u, N) \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}) \times L^\infty(0, T; L^1(0, \theta_m)) \times W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R})$, satisfaisant le système suivant

$$\begin{cases} S'(t) = 1 - \lambda S(t) - S(t), \text{ p.p.t} \\ \int_0^T \int_0^{\theta_m} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \theta} + [1 + \nu(\theta) + \gamma(\theta) + v(t)\Psi(N(t))\phi(\theta)]u(\theta, t) \right] \bar{\phi}(\theta, t) d\theta dt = 0, \\ N'(t) = 1 - N(t) - \int_0^{\theta_m} [\nu(\theta)\Gamma(\theta)u(\theta, t)] d\theta, \text{ p.p.t.} \end{cases} \quad (2.56)$$

$\bar{\phi} \in C_c^\infty([0, T] \times [0, \theta_m]; \mathbb{R})$.

Théorème 2.13. [3]

Le problème (2.54) admet un contrôle optimal v^* pour lequel la trajectoire optimale est (S^*, u^*, N^*) .

Pour les preuves de cette section, le lecteur est invité à consulter [3].

2.4.6 Conditions d'optimalité

Afin d'écrire les conditions d'optimalité pour le système (2.54)-(2.52)-(2.53), on introduit le Lagrangien par

$$\begin{aligned} L(v; S, u, N; p, q, r, z) &= F(v) \\ &+ \int_0^T [S'(t) - A + \mu S(t) + S(t)J(t)] p(t) dt \\ &+ \int_0^T \int_0^{\theta_m} \left[\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right. \\ &+ \left. (\mu + v(t)\psi(N(t)))u(\theta, t) \right] q(\theta, t) d\theta dt \end{aligned}$$

(2.58)

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T [u(\theta, 0) - \lambda(t)S(t)] z(t) dt \\
 & + \int_0^T [N'(t) - A + \mu N(t)] r(t) dt
 \end{aligned}$$

Où p, q, r, z sont les variables adjointes aux variables d'état $S, u, N, u(\theta, 0)$ respectivement. Le système adjoint s'obtient en annulant les dérivées du lagrangien par rapport aux variables d'état S, u, N et au contrôle v .

Le système adjoint au système d'état (2.52)-(2.53) est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} -p'(t) = \lambda(t)(p(t) + q(0, t)) + p(t), \\ -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial \theta} + \left(1 + \nu(\theta) + v(t)\Psi(N(t))\phi(\theta)\right)q(\theta, t) = -\alpha - \delta c(\theta)v(t)\Psi(N(t)) - \nu(\theta)r(t) \\ + \frac{c(\theta)}{N(t)}\omega(\theta)S(t)(p(t) + q(0, t)), \\ r'(t) = r(t) + \frac{\lambda(t)}{N(t)}S(t)\left(p(t) + q(0, t)\right) \\ + \eta v(t)(\Psi'(N(t))N(t) + \Psi(N)) \\ + \left(\delta \int_0^{\theta_m} c(\theta)u(\theta, t)d\theta\right. \\ + \left. \int_0^{\theta_m} \phi(\theta)u(\theta, t)q(\theta, t)d\theta\right) \\ \times \Psi'(N(t))v(t). \end{array} \right. \quad (2.59)$$

aux conditions de transversalité.

$$\left\{ \begin{array}{l} p(T) = 0, \\ q(\theta, T) = q(\theta_m, T) = 0, \\ r(T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Quitte à vérifier son admissibilité, le contrôle optimal v^* s'obtient en annulant la dérivée du lagrangien par rapport à v , à ;

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dv}(v; S, u, N; p, q, r, z) & = 2\beta v + \eta\Psi(N(t))N(t) \\
 & + \left(\delta \int_0^{\theta_m} c(\theta)\Gamma u(\theta, t)d\theta + \int_0^{\theta_m} \phi(\theta)u(\theta, t)q(\theta, t)d\theta\right)\Psi(N(t)).
 \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.4.7 Schéma numérique

Afin de calculer numériquement v^* , un schéma de calcul est proposé dans [3] avec la méthode de descente de gradient.

Algorithme :

Etape 0 : Choisir $v_0 \in V$ et fixons une tolérance $tol > 0$

Etape 1 : résoudre (2.52)-(2.53)

Etape 2 : résoudre (2.59) – (2.60).

Etape 3 : calculer $\frac{dL}{dv}$ comme dans (4.17)

Etape 4 : si $\frac{dL}{dv} \geq tol$

Etape 5 : pour $k = 0, 1, 2, \dots$ calculer un nouveau contrôle par le schéma suivant

$$v_{k+1} = v_k + \rho \frac{dL}{dv}(v_k)$$

Etape 6 : si $\|v_{k+1} - v_k\| < tol$, stop, sinon, $v_0 = v_{k+1}$ aller à l'étape 0.

La constante positive ρ est choisie telle que v_{k+1} reste dans le même voisinage que v_k dans la direction de $\frac{dL}{dv}(v_k)$.

Pour la simulation, les données sont $A, \mu, \delta, \beta(a), \phi(a), \psi(x)$.

Chapitre 3

Comportement asymptotique d'une classe de modèles épidémiologiques structurés en âge avec quarantaine.

La stabilité globale [102] fait l'objet du présent chapitre.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle mathématique qui, de prime abord, se veut un peu plus général que [31], [44] et [5] présentés au chapitre précédent.

Inspiré de ces modèles, et loin d'être guidé par le souci d'une pure généralisation mathématique, cette extension tente de repousser les limites de la modélisation à des fins épidémiologiques à travers un modèle mathématique qui tente de considérer l'ensemble des conditions sanitaires pré-citées au chapitre 2.

Comme c'est mentionné dans l'introduction générale, ce chapitre sera consacré à l'étude de la stabilité asymptotique du modèle, passant par ses deux états stationnaires : sans maladie et endémique. Nous mettons l'accent sur l'existence de trajectoires totales, d'un attracteur compact assujetti à une persistance uniforme.

Nous concluons par la stabilité globale des solutions, illustrée par des résultats numériques.

3.2 Modèle de base

Une des maladies infectieuses assez fréquente depuis le siècle dernier partout dans le monde est la tuberculose. Le modèle que nous proposons ici représente l'évolution de certaines maladies ayant les mêmes caractéristiques, à savoir :

Les individus atteints par une telle infection passent par deux phases ; la première représente **la phase d'incubation** ce temps varie d'un individu à un autre et peut être assez long. Cependant, ces individus peuvent participer à une campagne de dépistage pour déceler précocement l'infection avant l'apparition des premiers signes cliniques. La multiplication bactérienne (virale, microbienne, parasitaire...) chez l'individu entraîne généralement la transmission ce qui définit la seconde **phase de latence**.

Les individus identifiés infectés sont donc mis en quarantaine afin de recevoir le traitement spécifique jusqu'à ce que la transmission devienne inactive. Une fois que le programme de la quarantaine fut achevé, ces derniers sont mis en classe des réfractaires. Or, une fraction des réfractaires peut négliger voire interrompre la thérapie soit à cause de la longueur ou de la lourdeur du traitement, soit à cause des effets indésirables du traitement (chute de cheveux entre autres) ou à une éventuelle résistance au traitement. Par conséquent, ces porteurs saints finissent par regagner la classe des infectés de nouveau.

Nous considérons une population composée de quatre sous-populations à savoir ; les susceptibles, les infectés et la quarantainés ayant un âge d'infection $a \in (0, a+)$ et les réfractaires à l'instant $t > 0$.

Les densités sont notées respectivement $S(t)$, $i(t, a)$, $q(t, a)$ et $R(t)$. Notons que $a+ > 0$ est l'âge maximum de l'infection (pouvant être assez grand mais fini). La population totale a pour densité $N(t)$ telle que

$$N(t) = S(t) + \int_0^{a+} i(t, a) da + \int_0^{a+} q(t, a) da + R(t). \quad (3.1)$$

La propagation de l'infection chez ces quatre classes évolue selon le temps écoulé depuis le début de l'infection connue par l'âge de l'infection a à tout instant t , (voir Figure (3.1)). Nous proposons le modèle de base suivant [102] : un système d'équations hybride (EDOs et EDPs) dans lequel nous supposons que le taux de mortalité naturelle est le même dans chaque classe de la population.

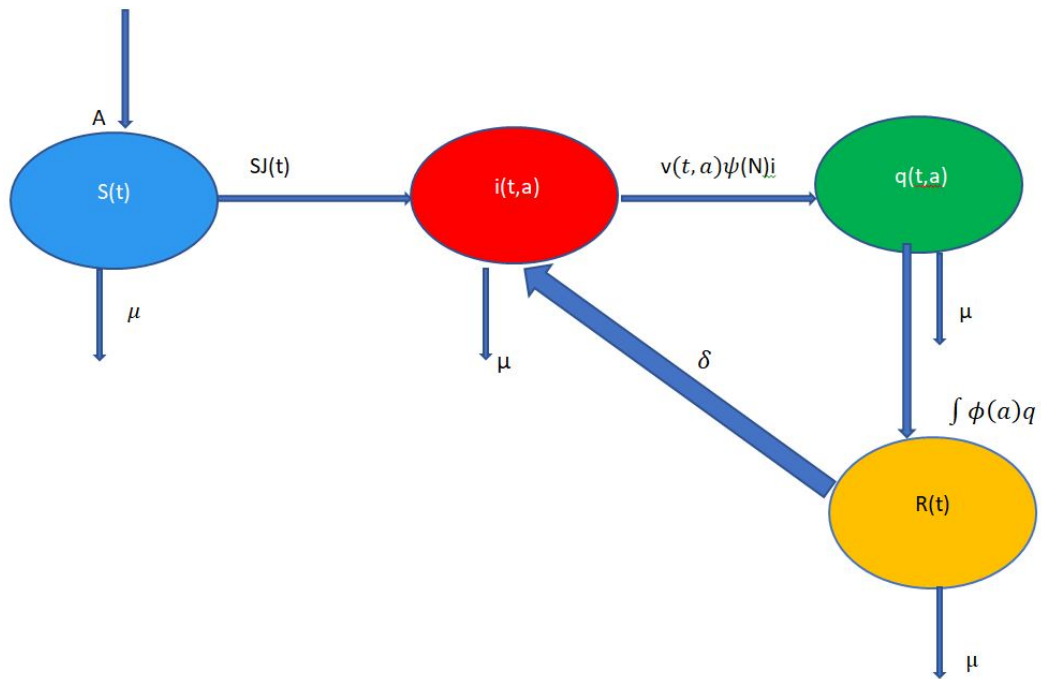


FIGURE 3.1 – Schéma d'évolution du modèle avec $\psi(N(t))$ fonction réponse de la population $N(t)$ au temps t .

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S'(t) = A - \mu S(t) - S(t)J(t) \\
 \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\mu i(t, a) - v(t, a)\psi(N(t))i(t, a) \\
 \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = v(t, a)\psi(N(t))i(t, a) - (\mu + \phi(a))q(t, a) \\
 R'(t) = \int_0^{\infty} \phi(a)q(t, a)da - (\mu + \delta)R(t) \\
 i(t, 0) = S(t)J(t) + \delta R(t) \\
 q(t, 0) = 0 \\
 J(t) = \int_0^{\infty} \beta(a)i(t, a)da
 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

aux données initiales

$$\begin{cases} S(0) = S_0, & R(0) = r_0 \\ i(0, a) = i_0(a), & i_0 \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \\ q(0, a) = q_0(a), & q_0 \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+). \end{cases} \quad (3.3)$$

Les données A, μ , sont respectivement le flux entrant dans la classe des susceptibles, le taux de mortalité naturelle dans la population totale. Les paramètres dans (3.2)-(3.3) sont supposés tous positifs, voir [102], que nous rappelons ici

δ : taux de rechute.

$v(t, a)$: taux de dépistage des infectés d'âge d'infection a à l'instant t .

$\phi(a)$: fonction traitement qui dépend de l'âge de l'infection.

$\psi(N)$: fonction réponse à la campagne de dépistage qui dépend de la population totale.

$\beta(a)$: taux de transmission qui dépend de l'âge de l'infection.

$J(t)$: la force de de l'infection à l'instant t .

On suppose que

(H0) $\beta \in C_{BU}(0, \infty; \mathbb{R}^+)$.

(H1) ψ est continue de \mathbb{R}_*^+ dans lui même.

(H2) $\phi \in L^\infty(0, \infty; \mathbb{R}^+)$.

(H3) $v \in L^\infty((0, \infty) \times (0, \infty); \mathbb{R}^+)$.

3.2.1 Intégration sur les lignes caractéristiques

Une intégration le long des lignes caractéristiques du système (3.2)-(3.3) donne

$$i(t, a) = \begin{cases} i(t - a, 0)\pi_1(t, a), & \text{si } t > a \\ i_0(a - t)\frac{\pi_1(t, a)}{\pi_1(t, a - t)}, & \text{si } t < a \end{cases} \quad (3.4)$$

$$q(t, a) = \begin{cases} i(t-a, 0)\pi_2(a) \int_0^a v(s+t-a, s)\psi(N(s+t-a)) \frac{\pi_1(t, s)}{\pi_2(s)} ds, & \text{si } t > a \\ \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(a-t)} \left[q_0(a-t) + i_0(a-t) \frac{\pi_2(a-t)}{\pi_1(t, a-t)} \right. \\ \left. \times \int_0^t v(s, s+t-a)\psi(N(t)) \frac{\pi_1(t, s+a-t)}{\pi_2(s+a-t)} ds \right], & \text{si } t < a \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\begin{cases} \pi_1(t, a) = \exp\left(-\int_0^a (\mu + v(s, a)\psi(N(t+s))) ds\right) \\ \pi_2(a) = \exp\left(-\int_0^a (\mu + \phi(s)) ds\right) \end{cases}$$

désignent respectivement les probabilités de rester dans la classe des infectés et de se rétablir jusqu'à l'âge a .

3.2.2 Existence et bornitude uniforme de la solution

- Soit $T > 0$ une période arbitrairement fixée (à préciser par la suite), et

$$X^+ := C_+(0, T) \times [C(0, T; L^1_+(0, \infty))]^2 \times C_+(0, T)$$

le cône positif associé à l'espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$

$$X := C(0, T) \times [C(0, T; L^1(0, \infty))]^2 \times C(0, T)$$

muni de la norme

$$\|(S, i, q, R)\|_X = \|S\|_{C(0, T)} + \|i\|_{C(0, T; L^1(0, \infty))} + \|q\|_{C(0, T; L^1(0, \infty))} + \|R\|_{C(0, T)}$$

où

$$\|u\|_{C(0, T; Y)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_Y$$

$$\|v\|_{L^1(0, \infty)} = \int_0^\infty |v(a)| da.$$

- Soit $C > 0$ une constante fixée et considérons la fonction dite de troncature définie

3.2. MODÈLE DE BASE

sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^+ par $\bar{H}(x) = \min\{x^+, C\}$ i.e.

$$\bar{H}(x) := \begin{cases} x^+, & \text{si } x^+ < C, \\ C, & \text{si } x^+ \geq C. \end{cases} \quad (3.6)$$

où $x^+ = \max\{x, 0\}$.

Lemme 3.1. La fonction \bar{H} définie par (3.6) est globalement lipschitzienne.

Sans perte de généralité, supposons que $x, y \in \mathbb{R}^+$. on envisage quatre cas,

- Si $x < C$ et $y < C$ alors

$$|\bar{H}(x) - \bar{H}(y)| = |x - y|.$$

- Si $x < C$ et $y > C$ alors

$$|\bar{H}(x) - \bar{H}(y)| = |x - C| = C - x \leq |x - y|.$$

- Si $x > C$ et $y < C$ alors

$$|\bar{H}(x) - \bar{H}(y)| = |C - y| = C - y \leq |x - y|.$$

- Si $x > C$ et $y > C$ alors

$$|\bar{H}(x) - \bar{H}(y)| = |C - C| = 0 \leq |x - y|.$$

Théorème 3.1. Pour toute condition initiale (S_0, i_0, q_0, r_0) dans $\mathbb{R}^+ \times [L_+^1(0, \infty)]^2 \times \mathbb{R}^+$, il existe une solution unique de (3.2)-(3.3) dans $C_+(0, \infty) \times [C(0, \infty; L_+^1(0, \infty))]^2 \times C_+(0, \infty)$. De plus, on a

$$N(t) \leq \max\left(N(0), \frac{A}{\mu}\right).$$

Démonstration. Première étape

Posons

$$C := \max\{c_0, \|\beta\|_\infty c_0, \psi^*\}$$

où ψ^* est la borne supérieure de la fonction ψ sur $[0, c_0]$ et $c_0 := \max\{N(0), \frac{A}{\mu}\}$.

Considérons le problème auxiliaire suivant ;

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = A - \mu S(t) - \bar{H}(S(t))\bar{H}(J(t)) \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\mu i(t, a) - v(t, a)\bar{H}(\psi(N(t)))i(t, a) \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = v(t, a)\bar{H}(\psi(N(t)))i(t, a) - (\mu + \phi(a))q(t, a) \\ R'(t) = \int_0^\infty \phi(a)q(t, a)da - (\mu + \delta)R(t) \\ i(t, 0) = \bar{H}(S(t))\bar{H}(J(t)) + \delta\bar{H}(R(t)) \\ q(t, 0) = 0 \\ J(t) = \bar{H}\left(\int_0^\infty \beta(a)i(t, a)da\right) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

aux données initiales (3.3), \bar{H} étant définie par (3.6). L'existence et l'unicité de la solution de (3.7) découle du théorème du point fixe de Picard-Banach, voir chapitre 1 et [96] par exemple.

On définit l'opérateur solution de (3.7) sur X^+ par

$$\tilde{F}(S^{n-1}, i^{n-1}, q^{n-1}, R^{n-1}) := (S^n, i^n, q^n, R^n)$$

tel que

$$S^n(t) = e^{-\mu t}S_0 + \int_0^t e^{-\mu(t-\sigma)} [A - \bar{H}(S^{n-1}(\sigma))\bar{H}(J^{n-1}(\sigma))]d\sigma \quad (3.8)$$

Pour simplifier, notons $\tilde{H}(i^{n-1}(t, 0)) = \bar{H}(S^{n-1}(t))\bar{H}(J^{n-1}(t)) + \delta\bar{H}(R^{n-1}(t))$.

$$i^n(t, a) = \begin{cases} \tilde{H}(i^{n-1}(t-a, 0))\pi_1^{n-1}(t, a), & \text{si } t > a \\ i_0(a-t)\frac{\pi_1^{n-1}(t, a)}{\pi_1^{n-1}(t, a-t)}, & \text{si } t < a \end{cases} \quad (3.9)$$

$$q^n(t, a) = \begin{cases} \tilde{H}(i^{n-1}(t-a, 0))\pi_2(a) \int_0^a v(s+t-a, s) \bar{H}(\psi(N^{n-1}(s+t-a))) \frac{\pi_1^{n-1}(t, s)}{\pi_2(s)} ds, \\ \text{si } t > a \\ \\ \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(a-t)} \left[q_0(a-t) + i_0(a-t) \frac{\pi_2(a-t)}{\pi_1^{n-1}(t, a-t)} \right. \\ \times \left. \int_0^t v(s, s+t-a) \bar{H}(\psi(N^{n-1}(t))) \frac{\pi_1^{n-1}(t, s+a-t)}{\pi_2(s+a-t)} ds \right], \\ \text{si } t < a \end{cases} \quad (3.10)$$

$$R^n(t) = e^{-(\mu+\delta)t} r_0 + \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(t-\sigma)} \int_0^\infty \phi(a) q^{n-1}(\sigma, a) da d\sigma \quad (3.11)$$

avec $S^0 = S_0$, $i^0 = i_0$, $q^0 = q_0$ et $R^0 = r_0$. Sauf précision, les normes sont prises dans leurs espaces correspondants.

Dans un premier temps, notons que \tilde{F} renvoie l'espace $C_+(0, T) \times [C(0, T; L_+^1(0, \infty))]^2 \times C_+(0, T)$ vers lui même. Ensuite montrons que l'opérateur \tilde{F} est contractant, pour cela nous utilisons le fait que \bar{H} est une fonction globalement lipschitzienne (voir le lemme précédent), que $\bar{H}(x) \leq C$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, que les paramètres sont bornés, et l'on a

- Pour S ,

$$|S^{n+1}(t) - S^n(t)| \leq \int_0^t |\bar{H}(S^n(\sigma))\bar{H}(J^n(\sigma)) - \bar{H}(S^{n-1}(\sigma))\bar{H}(J^{n-1}(\sigma))| d\sigma,$$

Ajoutons et retranchons le terme $\bar{H}(S^n)\bar{H}(J^{n-1})$ au membre de droite de la dernière inégalité, il s'ensuit que

$$\|S^{n+1} - S^n\| \leq CT\|\beta\|_\infty \left[\|i^n - i^{n-1}\| + \|S^n - S^{n-1}\| \right].$$

- Pour R ,

$$|R^{n+1}(t) - R^n(t)| \leq \|\phi\|_\infty \int_0^t \int_0^\infty |q^n(\sigma, a) - q^{n-1}(\sigma, a)| d\sigma$$

Soit

$$\|R^{n+1} - R^n\| \leq \|\phi\|_\infty T \|q^n - q^{n-1}\|$$

- Pour $i(t, a)$, ajoutons et retranchons le terme $i^n(t - a, 0)\pi_1^{n-1}(t, a)$ au membre de droite à l' égalité suivante, on obtient

$$\int_0^\infty |i^{n+1}(t, a) - i^n(t, a)| da = \int_0^t |i^{n+1}(t, a) - i^n(t, a)| da + \int_t^\infty |i^{n+1}(t, a) - i^n(t, a)| da.$$

De manière similaire que pour S^n , en ajoutant et en retranchant le terme $\bar{H}(S^{n-1})\bar{H}(J^{n-1})$, on obtient

$$\begin{aligned} \|i^{n+1} - i^n\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} &\leq C\|\beta\|_\infty T \left[\|S^n - S^{n-1}\| + \|i^n - i^{n-1}\| \right] + \delta T \|R^n - R^{n-1}\| \\ &\quad + M\|i_0\| T \sup_{t \in [0,T]} |N^n(t) - N^{n-1}(t)|. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \|i^{n+1} - i^n\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} &\leq (C\|\beta\|_\infty T + M\|i_0\|T) \|S^n - S^{n-1}\|_{C(0,T)} \\ &\quad + (C\|\beta\|_\infty T + M\|i_0\|T) \|i^n - i^{n-1}\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} \\ &\quad + M\|i_0\|T \|q^n - q^{n-1}\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} \\ &\quad + (\delta T + M\|i_0\|T) \|R^n - R^{n-1}\|_{C(0,T)} \end{aligned}$$

Si $k_i = \max(c\|\beta\|_\infty + M\|i_0\|, \delta + M\|i_0\|)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|i^{n+1} - i^n\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} &\leq k_i T \left[\|S^n - S^{n-1}\|_{C(0,T)} + \|i^n - i^{n-1}\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} \right. \\ &\quad \left. + \|q^n - q^{n-1}\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} + \|R^n - R^{n-1}\|_{C(0,T)} \right] \end{aligned}$$

- Pour q , avec les mêmes arguments que précédemment, on montre qu'il existe une constante positive k_q telle que

$$\begin{aligned} \|q^{n+1} - q^n\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} &\leq k_q T \left[\|S^n - S^{n-1}\|_{C(0,T)} + \|i^n - i^{n-1}\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} \right. \\ &\quad \left. + \|q^n - q^{n-1}\|_{C(0,T;L^1(0,\infty))} + \|R^n - R^{n-1}\|_{C(0,T)} \right] \end{aligned}$$

En somme si

$$\left\{ \begin{array}{l} C\|\beta\|_\infty T < 1, \\ k_i T < 1, \\ k_q T < 1, \\ \|\phi\|_\infty T < 1. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

i.e. $T < \min\{\frac{1}{C\|\beta\|_\infty}, \frac{1}{k_i}, \frac{1}{k_q}, \frac{1}{\|\phi\|_\infty}\}$ alors l'opérateur \tilde{F} est une contraction.

Seconde étape A présent, il suffit de remarquer, que

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t) < C, \\ J(t) < C, \\ \psi(N(t)) < C, \\ R(t) < C. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

et le problème auxiliaire (3.7) coïncide avec notre problème initial (3.2). En effet, en sommant (membre à membre) nos équations (3.2) combinées à (3.1) puis en intégrant, on trouve

$$N(t) \leq (N(0) - \frac{A}{\mu})e^{-t} + \frac{A}{\mu}; \quad (3.14)$$

où

$$N(0) = S_0 + \int_0^\infty i_0(a)da + \int_0^\infty q_0(a)da + r_0.$$

Ainsi

$$N(t) \leq \max\{N(0), \frac{A}{\mu}\} = c_0. \quad (3.15)$$

Il s'ensuit que

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t) < c_0, \\ J(t) < \|\beta\|_\infty c_0, \\ R(t) < c_0, \\ \psi(N(t)) < \psi^*. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

D'après (3.6), on conclut que $\bar{H}(S, i, q, R) = (S, i, q, R)$, ainsi notre solution est globale. □

Remarque 3.1. Remarquons que par (3.14), nous obtenons également que $N(t) \rightarrow \frac{A}{\mu}$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

3.2.3 Nombre de reproduction de base R_0

Dans la suite de ce chapitre, on suppose que $v(t, a) = v(a)$.

Calculons le nombre de reproduction de base R_0 via les valeurs propres de la matrice jacobienne associée au modèle (3.2). Pour cela linéarisons ce dernier au voisinage du point d'équilibre $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\mu S(t) - \frac{A}{\mu} J(t), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -(\mu - v(a)\psi(N(t)))i(t, a), \quad a > 0, \\ i(t, 0) = \frac{A}{\mu} J(t) + \delta R(t), \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = v(a)\psi(N(t))i(t, a) - (\mu + \phi(a))q(t, a) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \int_0^{+\infty} \phi(a)q(t, a)da - (\mu + \delta)R(t). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Posons $S(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $i(t, a) = c_2(a) e^{\lambda t}$, $q(t, a) = c_3(a) e^{\lambda t}$ et $R(t) = c_4 e^{\lambda t}$. Le système

linéarisé (3.17) se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(\lambda + \mu) + \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta c_2(a) da = 0, \\ c_2'(a) + (\lambda + \mu + v(a)\psi(N(t)))c_2(a) = 0, \quad a > 0, \\ c_2(0) - \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta c_2(a) da - \delta c_4 = 0, \\ c_3'(a) + (\lambda + \mu + \phi(a))c_3(a) = -v(a)\psi(N(t))c_2(a), \\ c_3(0) = 0, \\ - \int_0^{+\infty} \phi(a) c_3(a) da + (\lambda + \mu + \delta)c_4 = 0. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Dont la résolution aboutit à

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(\lambda + \mu) + \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta c_2(a) da = 0, \\ c_2(a) = c_2(0)e^{-\lambda a}\pi_1(t, a), \quad a > 0, \\ c_2(0) = \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta c_2(a) da + \delta c_4, \\ c_3(a) = c_2(0)e^{-\lambda a} \int_0^a v(s) \frac{\pi_1(t, s)\pi_2(a)}{\pi_2(s)} ds, \\ c_3(0) = 0, \\ - \int_0^{+\infty} \phi(a) c_3(a) da + (\lambda + \mu + \delta)c_4 = 0. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

3.2. MODÈLE DE BASE

Les paramètres c_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) ne sont pas forcément pas nuls, alors

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & P_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & P_2(\lambda) & 0 & -\delta \\ 0 & P_3(\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & P_3(\lambda) & 0 & -(\lambda + \mu + \delta) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.20)$$

$$P_1(\lambda) := \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\lambda a} \pi_1(t, a) da,$$

$$P_2(\lambda) := 1 - \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\lambda a} \pi_1(t, a) da,$$

$$P_3(\lambda) := -e^{-\lambda a} \int_0^a v(s) \psi(N(t)) \frac{\pi_1(t, s) \pi_2(a)}{\pi_2(s)} ds,$$

et

$$P_4(\lambda) := \int_0^\infty \phi(a) e^{-\lambda a} \int_0^a v(s) \psi(N(t)) \frac{\pi_1(t, s) \pi_2(a)}{\pi_2(s)} ds da.$$

Tout calcul fait sur (3.20) conduit à l'équation caractéristique associée au système (3.2)

$$(\lambda + \mu) [-(\lambda + \mu + \delta) P_2(\lambda) + \delta P_4(\lambda)] = 0$$

La première racine de l'équation caractéristique est $\lambda = -\mu$ et l'on a une première valeur propre négative, les autres valeurs propres sont racines de l'équation

$$H(\lambda) := (\lambda + \mu + \delta) P_2(\lambda) - \delta P_4(\lambda) = 0. \quad (3.21)$$

Ce qui s'exprime aussi comme

$$|\lambda + \mu + \delta| = \delta \left| \frac{P_4(\lambda)}{P_2(\lambda)} \right|. \quad (3.22)$$

ou de manière équivalente

$$1 = \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\lambda a} \pi_1(t, a) da + \frac{\delta}{\lambda + \mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a) e^{-\lambda a} \int_0^a v(s) \frac{\pi_1(t, s) \pi_2(a)}{\pi_2(s)} ds da.$$

Par ailleurs, la fonction H est décroissante sur \mathbb{R} avec

$$H(0) = |\mu + \delta| \left(1 - R_0 \right)$$

où

$$R_0 := \frac{A}{\mu} \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi_1(t, a)da + \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^{+\infty} \phi(a) \int_0^a v(s) \frac{\pi_1(t, s)\pi_2(a)}{\pi_2(s)} dsda$$

est le nombre de reproduction de base.

Cependant, lorsque $R_0 < 1$, on peut montrer par l'absurde que les racines de l'équation (3.21) sont toutes à partie réelle négative. Si par contre $R_0 > 1$, nous tombons sur la contradiction suivante

$$H(0) = (\mu + \delta)(1 - R_0) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} H(\lambda) = +\infty,$$

ce qui signifie qu'il ya des valeurs propres à partie réelle positive et donc E_0 devient instable. Une preuve similaire est établie dans [37] par exemple. Nous avons donc le théorème de stabilité locale suivant

Théorème 3.2. Si $R_0 < 1$, alors l'équilibre sans maladie $E_0 = (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable. Par contre, si $R_0 > 1$, E_0 devient instable.

Remarque 3.2. - Dans l'expression du nombre de reproduction de base, remarquons que le premier terme est lié à la transmission de l'infection et le second est lié à la rechute.

- Nous montrons plus loin que la stabilité des états stationnaires du système (3.2) est en fait globale.

3.3 Semi-flot, attracteur compact, trajectoires totales

3.3.1 Semiflot et attracteur compact

On définit le semi-flot

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times X^+ \rightarrow X^+$$

$$\Phi(t, (S_0, i_0, q_0, r_0)) = (S(t), i(t, \cdot), q(t, \cdot), R(t))$$

Où $(S(t), i(t, \cdot), q(t, \cdot), R(t))$ est la solution de (3.2) - (3.3) .

Théorème 3.3. Le semi-flot Φ possède un attracteur compact \mathbf{A} de chaque sous ensemble borné de X^+ .

Démonstration. En vertu du théorème [2.33] dans [104], il s'agit de vérifier les pro-

priétés suivantes pour Φ : (i) la dissipativité. (ii) l'éventuelle bornitude sur des ensembles bornés de X (iii) la régularité asymptotique. Les conditions (i) et (ii) sont satisfaits par le théorème 1. Pour (iii), on utilise le théorème [2.46] dans [104], à savoir

$$\Phi(t, (S_0, i_0, q_0, r_0)) = \Phi_1(t, (S_0, i_0, q_0, r_0)) + \Phi_2(t, (S_0, i_0, q_0, r_0))$$

$$\Phi_1(t, (S_0, i_0, q_0, r_0)) = (0, i_1(t, \cdot), q_1(t, \cdot), 0)$$

$$\Phi_2(t, (S_0, i_0, q_0, r_0)) = (S(t), i_2(t, \cdot), q_2(t, \cdot), R(t))$$

$$i_1(t, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > a, \\ i_0(a-t) \frac{\pi_1(t-a, a)}{\pi_1(t-a, a-t)} & \text{si } t < a, \end{cases}$$

$$i_2(t, a) = \begin{cases} i(t-a, 0) \pi_1(t-a, a) & \text{si } t > a, \\ 0 & \text{si } t < a, \end{cases}$$

$$q_1(t, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > a, \\ \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(a-t)} q_0(a-t) \\ + i_0(a-t) \frac{\pi_2(a)}{\pi_1(t-a, a-t)} \int_{a-t}^a v(s) \psi(N(s+t-a)) \frac{\pi_1(t-a, s)}{\pi_2(s)} ds & \text{si } t < a, \end{cases}$$

$$q_2(t, a) = \begin{cases} i(t-a, 0) \int_0^a v(s) \psi(N(s+t-a)) \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(s)} \pi_1(t-a, s) ds & \text{si } t > a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

Soit \mathbf{C} un sous ensemble non vide fermé borné de conditions initiales dans X . Par le théorème (3.1) nous avons les estimations suivantes

$$N(t) \leq \max(S_0 + \|i_0\|_1 + \|q_0\|_1 + r_0, \bar{N}).$$

Posons

$$c_1 := \sup \{S_0 + \|i_0\|_1 + \|q_0\|_1 + r_0, (S_0, i_0, q_0, r_0) \in \mathbf{C}\},$$

$$c_2 := \max\{c_1, \bar{N}\}.$$

Nous affirmons que (1) $\|\Phi_1\|_1$ tend vers 0 quand h tend vers 0 uniformément sur \mathbf{C} .

En fait,

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1\|_1 &= \int_0^\infty |i_1(t, a)| da + \int_0^\infty |q_1(t, a)| da \\
&= \int_0^\infty \frac{\pi_1(-a, a+t)}{\pi_1(-a, a)} i_0(a) da + \int_0^\infty \frac{\pi_2(a+t)}{\pi_2(a)} q_0(a) da \\
&+ \int_0^\infty \frac{\pi_2(a+t)}{\pi_1(-a, a)} i_0(a) \int_0^t (v(s+a)\psi(N(s)) \frac{\pi_1(-a, a+s)}{\pi_2(a+s)} ds da \\
&= \int_0^\infty \exp\left\{-\int_a^{a+t} (\mu + v(s)\psi(N(s-a))) ds\right\} i_0(a) da \\
&+ \int_0^\infty \exp\left\{-\int_a^{a+t} (\mu + \phi(s)) ds\right\} q_0(a) da \\
&+ \int_0^\infty i_0(a) \int_0^t v(s+a)\psi(N(s)) \frac{\pi_2(a+t)}{\pi_2(a+s)} \times \frac{\pi_1(-a, a+s)}{\pi_1(-a, a)} ds da \\
&= \exp(-\mu t) \left[\int_0^\infty \exp\left(-\int_a^{a+t} v(s)\psi(N(s-a))\right) i_0(a) da \right. \\
&+ \int_0^\infty \exp\left(-\int_a^{a+t} \phi(s) ds\right) q_0(a) da + \int_0^\infty \int_0^t v(s+a)\psi(N(s)) \exp\left(-\int_{a+s}^{a+t} \phi(r) dr\right) \\
&\times \exp\left(-\int_a^{a+s} v(r)\psi(N(r-a)) dr\right) ds i_0(a) da \left. \right] \\
&\leq \exp(-\mu t) \{2\|i_0\| + \|q_0\|\} \\
&\leq 3 c_2 \exp(-\mu t)
\end{aligned}$$

(2) $\overline{\Phi_2(t, \mathbf{C})}$ est compact. Pour cela, nous aurons besoin de vérifier la condition (iii) du

théorème [B.2.] de [104]

$$\begin{aligned}
 I(h) &:= \int_0^{t-h} (i_2(t, a+h) - i_2(t, a)) da + \int_{t-h}^t (i_2(t, a+h) - i_2(t, a)) da \\
 &= \int_0^{t-h} \pi_1(t-a-h, a+h) \left(S(t-a-h)J(t-a-h) + \delta R(t-a-h) \right) \\
 &\quad - \pi_1(t-a, a) [S(t-a)J(t-a) + \delta R(t-a)] da \\
 &\quad - \int_{t-h}^t \pi_1(a) [S(t-a)J(t-a) + \delta R(t-a)] da.
 \end{aligned}$$

Le dernier terme tendant vers 0 quand h tend vers 0, nous considérons la première intégrale.

$$\begin{aligned}
 I_1(h) &:= \int_0^{t-h} \pi_1(t-a-h, a+h) [S(t-a-h)J(t-a-h) + \delta R(t-a-h)] \\
 &\quad - \pi_1(t-a, a) [S(t-a)J(t-a) + \delta R(t-a)] da \\
 &= \int_0^{t-h} \pi_1(t-a, a) [S(t-a-h)J(t-a-h) \\
 &\quad + \delta R(t-a-h) - S(t-a)J(t-a) - \delta R(t-a)] da \\
 &\quad + \int_0^{t-h} [S(t-a)J(t-a) + \delta R(t-a)] [\pi_1(t-a-h, a+h) - \pi_1(t-a, a)] da \\
 &= \int_0^{t-h} \pi_1(t-a, a) [S(t-a-h)J(t-a-h) - S(t-a)J(t-a)] da \\
 &\quad + \delta \int_0^{t-h} \pi_1(t-a, a) [R(t-a-h) - R(t-a)] da + \int_0^{t-h} [S(t-a)J(t-a) + \delta R(t-a)] \\
 &\quad \times [\pi_1(t-a-h, a+h) - \pi_1(t-a, a)] da
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t-h} \pi_1(t-a, a) [S(t-a-h) - S(t-a)] J(t-a-h) da \\
&+ \int_0^{t-h} \pi_1(t-a, a) [J(t-a-h) - J(t-a)] S(t-a) da \\
&+ \delta \int_0^{t-h} \pi_1(t-a, a) [R(t-a-h) - R(t-a)] da \\
&+ (\|\beta\|_\infty c_2^2 + \delta c_2) \int_0^{t-h} [\pi_1(t-a-h, a+h) - \pi_1(t-a, a)] da.
\end{aligned}$$

Du à la continuité de π_1 par rapport à t et a et grâce au théorème de la moyenne, le premier, le troisième, et le dernier terme tendent vers 0 lorsque h tend vers 0. D'un autre côté, nous avons les estimations suivantes sur S and R ,

$$|S'(t)| \leq A + \mu c_2 + \|\beta\|_\infty c_2^2,$$

$$|R'(t)| \leq \|\phi\|_\infty c_2.$$

ce qui implique que

$$I_1(h) \leq I_2(h) := \bar{N} \int_0^{t-h} J(t-a-h) - J(t-a) da,$$

Posons

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t),$$

avec

$$\begin{aligned}
J_1(t) &:= \int_0^t \beta(a) \pi_1(t-a, a) [S(t-a)J(t-a) + \delta R(t-a)] da \\
&= \int_0^t \beta(t-\sigma) \pi_1(\sigma, t-\sigma) [S(\sigma)J(\sigma) + \delta R(\sigma)] d\sigma
\end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$\begin{aligned}
J_2(t) &:= \int_t^\infty \beta(a) \frac{\pi_1(a)}{\pi_1(a-t)} i_0(a-t) da \\
&= \int_0^\infty \beta(a+t) \frac{\pi_1(a+t)}{\pi_1(a)} i_0(a) da.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $r, h > 0$, nous avons

$$|J(r+h) - J(r)| \leq |J_1(r+h) - J_1(r)| + |J_2(r+h) - J_2(r)|$$

Nous nous focalisons sur chaque terme séparément,

$$\begin{aligned} |J_1(r+h) - J_1(r)| &\leq \int_r^{r+h} \beta(r+h-s)\pi_1(s, r+h-s)[S(s)J(s) + \delta R(s)] ds, \\ &+ \int_0^r \left| \beta(r+h-s)\pi_1(s, r+h-s) - \beta(r-s)\pi_1(s, r-s) \right| \\ &\quad \times [S(s)J(s) + \delta R(s)] ds \\ &\leq h [\|\beta\|_\infty^2 c_2^2 + \delta \|\beta\|_\infty c_2] + [\|\beta\|_\infty c_2^2 + \delta c_2] \\ &\quad \times \left\{ \int_0^r \beta(r+h-s) \left| \pi_1(s, r+h-s) - \pi_1(s, r-s) \right| ds \right\} \\ &\quad + \int_0^r \pi_1(s, r-s) \left| \beta(r+h-s) - \beta(r-s) \right| ds \end{aligned}$$

le second membre de la dernière inégalité tend vers 0 lorsque h tend vers zero, uniformément sur \mathbf{C} , puisque β and π_1 sont continues uniformément bornées.

$$\begin{aligned} |J_2(r+h) - J_2(r)| &= \left| \int_0^\infty \beta(a+r+h) \frac{\pi_1(-a, a+r+h)}{\pi_1(-a, a)} i_0(a) da \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \beta(a+r) \frac{\pi_1(-a, a+r)}{\pi_1(-a, a)} i_0(a) da \right| \\ &\leq \int_0^\infty \beta(a+r+h) i_0(a) \left| \frac{\pi_1(-a, a+r+h)}{\pi_1(-a, a)} - \frac{\pi_1(-a, a+r)}{\pi_1(-a, a)} \right| da \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{\pi_1(-a, a+r)}{\pi_1(-a, a)} \left| \beta(a+r+h) - \beta(a+r) \right| da \end{aligned}$$

Sous les mêmes arguments que précédemment, cette différence tend vers 0 lorsque h tend vers 0, uniformément sur \mathbf{C} . Ce qu'il fallait démontrer. \square

3.3.2 Trajectoires totales

Soient $\mathcal{U} = (S(t), i(t, \cdot), q(t, \cdot), R(t))$ et $\mathcal{U}(t+r) = \Phi(t, \mathcal{U}(r))$.

Posons $(S_r(t), i_r(t, a), q_r(t, a), R_r(t)) = (S(t+r), i(t+r, a), q(t+r, a), R(t+r))$ et $J_r(t) = J(t+r)$.

En vue de (3.4), (3.5) et la définition du semi-flot, nous avons

$$S'_r(t) = A - S_r(t)J_r(t) - \mu S_r(t), \quad S_r(0) = S(r),$$

$$i_r(t, a) = \begin{cases} (S_r(t-a)J_r(t-a) + \delta R_r(t-a))\pi_1(t-a, a) & \text{si } t > a \\ i(r, a-t) \frac{\pi_1(t-a, a)}{\pi_1(t-a, a-t)} & \text{si } t < a \end{cases}$$

$$q_r(t, a) = \begin{cases} i_r(t-a, 0) \int_0^a v(s)\psi(N_r(s+t-a)) \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(s)} \pi_1(s+t-a, s) ds & \text{si } t > a \\ \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(a-t)} q(r, a-t) \\ + i(r, a-t) \frac{\pi_2(a)}{\pi_1(t-a, a-t)} \int_{a-t}^a v(s)\psi(N_r(s+t-a)) \frac{\pi_1(t-a, s)}{\pi_2(s)} ds & \text{si } t < a, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} R'_r(t) = \int_0^\infty \phi(a)q_r(t, a)da - (\mu + \delta)R_r(t), \\ N'_r(t) = A - \mu N_r(t). \end{cases}$$

Posons $t = s - r$ avec $s \geq r$ alors

$$S'(s) = A - S(s)J(s) - \mu S(s),$$

$$i(s, a) = \begin{cases} (S(s-a)J(s-a) + \delta R(s-a))\pi_1(s-r-a, a) & \text{si } s-r > a \\ i(r, a-s+r) \frac{\pi_1(s-r-a, a)}{\pi_1(s-r-a, a-s+r)} & \text{si } s-r < a \end{cases}$$

$$q(s, a) = \begin{cases} i(s-a, 0) \int_0^a v(\sigma) \psi(N(\sigma+s-r-a)) \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(\sigma)} \pi_1(s-r-a, \sigma) d\sigma & \text{si } s-r > a \\ \frac{\pi_2(a)}{\pi_2(a-s+r)} q(r, a-s+r) \\ + i(r, a-s+r) \frac{\pi_2(a)}{\pi_1(s-r-a, a-s+r)} \\ \times \int_{a-s+r}^a v(s) \psi(N(\sigma+s-r-a)) \frac{\pi_1(s-r-a, \sigma)}{\pi_2(\sigma)} d\sigma & \text{si } s-r < a. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} R'(s) = \int_0^\infty \phi(a) q(s, a) da - (\mu + \delta) R(s), \\ N'(s) = A - \mu N(s). \end{cases}$$

Un calcul direct donne

$$N(s) = N(r) e^{\mu(r-s)} + \frac{A}{\mu} (1 - e^{\mu(r-s)}) \quad \text{pour } s \geq r,$$

A présent, faisons $r \rightarrow -\infty$ dans la dernière égalité

$$N(s) = \bar{N} := \frac{A}{\mu}, \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Ce qui (lorsque $r \rightarrow -\infty$) donne les trajectoires totales, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} S'(t) = A - S(t)J(t) - \mu S(t), \\ i(t, a) = i(t-a, 0) \bar{\pi}_1(a), \\ q(t, a) = i(t-a, 0) \pi_2(a) \int_0^a v(\sigma) \psi(\bar{N}) \frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)} d\sigma, \\ R'(t) = \int_0^\infty \phi(a) q(t, a) da - (\mu + \delta) R(t), \\ i(t, 0) = S(t)J(t) + \delta R(t), \end{cases} \quad (3.24)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\pi}_1(a) := \exp\left(-\int_0^a (\mu + v(s) \psi(\bar{N})) ds\right), \\ \pi_2(a) := \exp\left(-\int_0^a (\mu + \phi(s)) ds\right). \end{cases} \quad (3.25)$$

Dans ce cas, le nombre de reproduction de base pour (3.2) est donc

$$R_0 = \int_0^\infty \bar{N}\beta(s)\bar{\pi}_1(s)ds + \frac{\delta}{\delta + \mu}\psi(\bar{N}) \int_0^\infty v(s)\frac{\bar{\pi}_1(s)}{\pi_2(s)} \int_s^\infty \phi(\sigma)\pi_2(\sigma)d\sigma ds.$$

Par le théorème de Fubini, nous avons

$$R_0 = \int_0^\infty \bar{N}\beta(s)\bar{\pi}_1(s)ds + \frac{\delta}{\delta + \mu}\psi(\bar{N}) \int_0^\infty \phi(\sigma)\pi_2(\sigma) \int_0^\sigma v(s)\frac{\bar{\pi}_1(s)}{\pi_2(s)} dsd\sigma. \quad (3.26)$$

Lemme 3.2. Pour tout $(S_0, i_0, q_0, r_0) \in \mathbf{A}$ on a

$$S(t) + \int_0^\infty i(t, a)da + \int_0^\infty q(t, a)da + R(t) = \bar{N}, \quad (3.27)$$

et

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + \|\beta\|\bar{N}},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Posons $I(t) = \int_0^\infty i(t, a)da$ et $Q(t) = \int_0^\infty q(t, a)da$. En utilisant les expressions de i et q de (3.24) et après changement de variables, on obtient

$$I(t) = \int_{-\infty}^t i(s, 0)\bar{\pi}_1(t - s)ds$$

et

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t i(s, 0)\pi_2(t - s) \int_0^{t-s} v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma ds.$$

Les fonctions I et Q vérifient les équations suivantes

$$I'(t) = i(t, 0) - \mu I(t) - \int_{-\infty}^t i(s, 0)v(t - s)\psi(\bar{N})\bar{\pi}_1(t - s)ds,$$

$$\begin{aligned} Q'(t) &= -\mu Q(t) - \int_{-\infty}^t i(s, 0)\phi(t - s)\pi_2(t - s) \int_0^{t-s} v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma ds \\ &+ \int_{-\infty}^t i(s, 0)\bar{\pi}_1(t - s)v(t - s)\psi(\bar{N})ds. \end{aligned}$$

En substituant q par son expression et après changement de variables nous obtenons

$$R'(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t - s)i(s, 0)\pi_2(t - s) \int_0^{t-s} v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma ds - (\mu + \delta)R(t).$$

D'un autre côté, l'équation $N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ impliquant que

$$N'(t) = A - \mu N(t).$$

donne avec les mêmes calculs que pour la trajectoire totale ci-dessus $N(t) = \bar{N}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il est facile d'observer que

$$S'(t) \geq A - (\mu + \|\beta\|_\infty \bar{N})S(t)$$

Ainsi, par un calcul direct, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$S(t) \geq \frac{A}{\mu + \|\beta\|_\infty \bar{N}},$$

□

3.4 Stabilité globale de l'équilibre sans maladie

Théorème 3.4. *Si $R_0 \leq 1$, alors $E_0 = (\bar{N}, 0, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

Démonstration. En premier lieu, posons $u_0 = (S_0, i_0(\cdot), q_0(\cdot), r_0) \in \mathbf{A}$. puisque \mathbf{A} est invariant, alors il existe, une trajectoire totale $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}$ telle que $\Psi(t) = (S(t), i(t, \cdot), q(t, \cdot), R(t))$ est solution de (3.24) avec $(S(0), i(0, \cdot), q(0, \cdot), R(0)) = u_0$.

Posons

$$k(a) = \frac{\delta}{\delta + \mu} \int_a^\infty \phi(\sigma) \frac{\pi_2(\sigma)}{\pi_2(a)} d\sigma$$

et

$$h(a) = \frac{1}{\bar{\pi}_1(a)} \left(1 - \int_0^a \left(\bar{N} \beta(\sigma) \bar{\pi}_1(\sigma) + \frac{\delta}{\delta + \mu} \psi(\bar{N}) v(\sigma) \frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)} \int_\sigma^\infty \phi(\xi) \pi_2(\xi) d\xi \right) d\sigma \right).$$

Remarque 3.3. *Remarquons que $h(a) \geq 0$ si $R_0 \leq 1$.*

Nous considérons la fonctionnelle suivante

$$V(\Psi(t)) = F(S) + \int_0^\infty h(a) i(t, a) da + \int_0^\infty k(a) q(t, a) da + \frac{\delta}{\delta + \mu} R(t). \quad (3.28)$$

où $F(S) = S - \bar{N} \ln \frac{S}{\bar{N}} - \bar{N}$ et $\bar{N} = \frac{A}{\mu}$. Posons

$$I_1(t) = \int_0^\infty h(a)i(t, a)da,$$

$$Q_1(t) = \int_0^\infty k(a)q(t, a)da.$$

Dérivons F le long de la solution de (3.24)

$$\frac{d}{dt}F(S(t)) = \mu\left(1 - \frac{\bar{N}}{S}\right)(\bar{N} - S) - S(t)J(t) + \bar{N}J(t).$$

En second lieu, des expressions de i dans (3.24) nous avons

$$I_1(t) = \int_0^\infty P_1(a)B(t - a)da,$$

avec $B(t) = i(t, 0)$ et $P_1(a) = \bar{\pi}_1(a)h(a)$. Suivant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme [9.18] de [104] on peut montrer que I_1 est absolument continue et

$$I_1'(t) = P_1(0)B(t) + \int_0^\infty P_1'(a)B(t - a)da.$$

En exploitant l'expression de P_1' nous obtenons

$$I_1'(t) = B(t) - \int_0^\infty \left(\bar{N}\beta(a) + v(a)\psi(\bar{N})k(a) \right) \bar{\pi}_1(a)B(t - a)da.$$

De manière similaire, on pose $P_2(a) = k(a)\pi_2(a) \int_0^a v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma$, et l'on a

$$Q_1(t) = \int_0^\infty P_2(a)B(t - a)da,$$

Q_1 est donc absolument continue et

$$Q_1'(t) = \int_0^\infty P_2'(a)B(t - a)da.$$

En exploitant l'expression de P_2' nous obtenons

$$Q_1'(t) = \int_0^\infty \left(-\frac{\delta}{\delta + \mu}\phi(a)\pi_2(a) \int_0^a v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma + k(a)\bar{\pi}_1(a)v(a)\psi(\bar{N}) \right) B(t - a)da.$$

A présent, calculons la dérivée de V donnée par (3.28) le long de la trajectoire totale (3.24)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(\Psi(t)) &= \mu\left(1 - \frac{\bar{N}}{S}\right)(\bar{N} - S) - S(t)J(t) + \bar{N} \int_0^\infty \beta(a)\bar{\pi}_1(a)B(t-a)da \\
 &+ S(t)J(t) + \delta R(t) - \int_0^\infty \left(\bar{N}\beta(a) + v(a)\psi(\bar{N})k(a) \right) \bar{\pi}_1(a)B(t-a)da \\
 &+ \int_0^\infty \left(-\frac{\delta}{\delta + \mu}\phi(a)\pi_2(a) \int_0^a v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma + k(a)\bar{\pi}_1(a)v(a)\psi(\bar{N}) \right) \\
 &\times B(t-a)da + \frac{\delta}{\mu + \delta} \left(\int_0^\infty \phi(a)B(t-a)\pi_2(a) \int_0^a v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma da - (\mu + \delta)R(t) \right)
 \end{aligned}$$

Après simplifications il s'en suit que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(\Psi(t)) &= \mu\left(1 - \frac{\bar{N}}{S}\right)(\bar{N} - S) \\
 &- \int_0^\infty \frac{\delta}{\delta + \mu}\phi(a)\pi_2(a) \int_0^a v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma B(t-a)da \\
 &+ \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a)\pi_2(a) \int_0^a v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma B(t-a)da, \\
 &= \mu\left(1 - \frac{\bar{N}}{S}\right)(\bar{N} - S) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Notons que $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ implique que $S = \bar{N}$. Du à (3.27) nous obtenons $i = q = R = 0$. Ce qui signifie que le plus grand ensemble invariant vérifiant la propriété $\frac{d}{dt}V(\Psi(t)) = 0$ est $\{(\bar{N}, 0, 0, 0)\}$. D'un côté, \mathbf{A} étant compact alors le $\omega(u_0)$ et $\alpha(u_0)$ (les ensembles omega et alpha limites respectivement) sont non vides, compacts, invariants et attirent, par principe d'invariance de LaSalle, $\Psi(t)$ as $t \rightarrow \pm\infty$ respectivement. D'un autre côté, $V(\Psi(t))$ est une fonction décroissante en t , V est donc constante sur $\omega(u_0)$ et $\alpha(u_0)$, ainsi $\omega(u_0) = \alpha(u_0) = \{(\bar{N}, 0, 0, 0)\}$. Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Psi(t) = \{(\bar{N}, 0, 0, 0)\}$ et

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} V(\Psi(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\Psi(t)) = \{(\bar{N}, 0, 0, 0)\}.$$

Finalement, nous obtenons $V(\Psi(t)) = V(\bar{N}, 0, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\alpha(u_0) = \{(\bar{N}, 0, 0, 0)\}$ alors $V(\Psi(t)) \leq V(\bar{N}, 0, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque V atteint son minimum en $(\bar{N}, 0, 0, 0)$ on conclut que $\Psi(t) = (\bar{N}, 0, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, en particulier en $u_0 = (\bar{N}, 0, 0, 0)$. Par conséquent, l'attracteur \mathbf{A} est le singleton formé par l'équilibre sans maladie $(\bar{N}, 0, 0, 0)$. En vertu du théorème [2.39] de [104] l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable. \square

3.5 Stabilité globale de l'équilibre endémique et persistance uniforme

3.5.1 Existence et unicité

Commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un équilibre endémique positif lorsque $R_0 > 1$.

Lemme 3.3. *Supposons que $R_0 > 1$ alors il existe un équilibre positif unique de (3.24).*

Démonstration. Un point d'équilibre est tel que

$$\begin{cases} A = S^* J^* + \mu S^*, \\ i^*(a) = i^*(0) \bar{\pi}_1(a), \\ q^*(a) = i^*(0) \pi_2(a) \int_0^a v(\sigma) \psi(\bar{N}) \frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)} d\sigma, \\ R^* = \frac{1}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a) q^*(a) da, \\ i^*(0) = S^* J^* + \delta R^* \text{ and } J^* = i^*(0) \int_0^\infty \beta(a) \bar{\pi}_1(a) da. \end{cases} \quad (3.29)$$

Posons

$$F(a) = \pi_2(a) \int_0^a v(\sigma) \psi(\bar{N}) \frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)} d\sigma.$$

Alors, en combinant la cinquième et dernière équation du système (3.29), nous obtenons

$$i^*(0) = S^* i^*(0) \int_0^\infty \beta(a) \bar{\pi}_1(a) da + i^*(0) \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a) F(a) da,$$

D'où pour $i^*(0) \neq 0$, il s'en suit que

$$S^* \int_0^\infty \beta(a) \bar{\pi}_1(a) da + \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a) F(a) da = 1. \quad (3.30)$$

Par ailleurs, considérons la première équation de (3.29) combinée avec (3.30), nous aurons

$$A \int_0^\infty \beta(a) \bar{\pi}_1(a) da + (\mu + J^*) \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a) F(a) da = \mu + J^*.$$

Ainsi,

$$J^* \left(1 - \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a)F(a)da \right) = A \int_0^\infty \beta(a)\bar{\pi}_1(a)da + \mu \left(\frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a)F(a)da - 1 \right)$$

D'où

$$\begin{aligned} J^* \left(1 - \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a)F(a)da \right) &= \mu \left(\bar{N} \int_0^\infty \beta(a)\bar{\pi}_1(a)da + \frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a)F(a)da - 1 \right), \\ &= \mu(R_0 - 1). \end{aligned}$$

Dès que $\frac{\delta}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a)F(a)da < 1$ et $R_0 > 1$ on a $J^* > 0$ existe et par suite $i^*(0)$ existe.

Finalement, par le système (3.29) nous concluons quand à l'existence et l'unicité d'un équilibre positif $(S^*, i^*(\cdot), q^*(\cdot), R^*)$ pourvu que $R_0 > 1$. ce qui prouve le lemme. \square

3.5.2 Persistance uniforme

Soient $u_0 = (S_0, i_0(\cdot), q_0(\cdot), r_0)$ et $\rho : X^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$\rho(\Phi(t)u_0) := i(t, 0) = B(t), \quad t \geq 0, \quad u_0 \in X^+$$

et

$$\Omega_0 = \left\{ u_0 \in X^+; \quad \rho(u_0) > 0 \right\}.$$

où

$$X^+ := \mathbb{R}^+ \times (L^1(0, \infty; \mathbb{R}^+))^2 \times \mathbb{R}^+$$

Commençons par établir les deux lemmes suivants

Lemme 3.4. Si $\rho(\mathcal{U}(t)) = 0$ pour tout $t \leq 0$, alors $\rho(\mathcal{U}(t)) = 0$ pour tout $t > 0$.

Démonstration. Supposons que $\rho(\mathcal{U}(t)) = 0$ pour tout $t \leq 0$, alors $J(t) = 0$ et $R(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$. Le système (3.24) implique

$$B(t) = S(t) \int_0^t \beta(a)\bar{\pi}_1(a)B(t-a)da + \delta R(t). \quad (3.31)$$

En résolvant (3.24) en R , il s'en suit

$$R(t) = r_0 e^{-(\mu+\delta)t} + \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(t-\sigma)} \int_0^\sigma \phi(a)B(\sigma-a)F(a)dad\sigma$$

avec $F(a) = \pi_2(a) \int_0^a v(\sigma) \psi(\bar{N}) \frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)} d\sigma$.

En substituant cette expression de R dans (3.31) et en utilisant le fait que $R(0) = 0$ il s'en suit

$$B(t) = S(t) \int_0^t \beta(a) \bar{\pi}_1(a) B(t-a) da + \delta \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(t-\sigma)} \int_0^\sigma \phi(a) B(\sigma-a) F(a) dad\sigma$$

Sachant que F est une fonction bornée, le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \bar{N} \|\beta\|_\infty \int_0^t B(a) da + \delta \int_0^t B(a) \int_a^t e^{-(\mu+\delta)(t-\sigma)} \phi(\sigma-a) F(\sigma-a) d\sigma da, \\ &\leq (\bar{N} \|\beta\|_\infty + \frac{\delta \|\phi F\|_\infty}{\mu + \delta}) \int_0^t B(a) da \end{aligned}$$

Par suite, l'inégalité de Gronwall entraîne que $B(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

□

Lemme 3.5. *Supposons que soit β soit ϕ est non nulle presque partout. Alors, soit $\rho(\mathcal{U}(\cdot))$ est identiquement nulle sur \mathbb{R} soit $\rho(\mathcal{U}(\cdot))$ est positive partout sur \mathbb{R} .*

Démonstration. D'après le lemme précédent, et par un shift pour chaque $r \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(\mathcal{U}(t)) = 0$ pour tout $t \leq r$ cela implique que $\rho(\mathcal{U}(t)) = 0$ pour tout $t \geq r$. Ainsi, soit $\rho(\mathcal{U}(\cdot))$ est identiquement nulle soit il existe une suite $t_j \rightarrow -\infty$ quand $j \rightarrow +\infty$ telle que $\rho(\mathcal{U}(t_j)) > 0$. Supposons le second cas. Soit $B_j(t) = B(t + t_j)$. Par le lemme (3.2), nous avons

$$\begin{aligned} B_j(t) &\geq \frac{A}{\mu + \|\beta\| \bar{N}} \int_0^t \beta(a) \bar{\pi}_1(a) B_j(t-a) da \\ &\quad + \delta \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(t-\sigma)} \int_0^\sigma \phi(a) B_j(\sigma-a) F(a) dad\sigma + \hat{B}_j(t), \end{aligned}$$

avec $\hat{B}_j(0) = B(t_j) > 0$. Par le théorème de Fubini, nous avons

$$\begin{aligned} B_j(t) &\geq \frac{A}{\mu + \|\beta\| \bar{N}} \int_0^t \beta(a) \bar{\pi}_1(a) B_j(t-a) da \\ &\quad + \delta \int_0^t B_j(a) \int_a^t e^{-(\mu+\delta)(t-\sigma)} \phi(\sigma-a) F(\sigma-a) d\sigma da + \hat{B}_j(t), \\ &\geq \int_0^t \left(\frac{A}{\mu + \|\beta\| \bar{N}} \beta(t-a) \pi_1(t-a) + \delta \xi(t-a) \right) B_j(a) da + \hat{B}_j(t), \end{aligned}$$

où $\xi(t) = \int_0^t e^{-(\mu+\delta)(t-\sigma)} \phi(\sigma) F(\sigma) d\sigma$. Notons que \hat{B}_j est continu en zero et que $\hat{B}_j(0) > 0$.

Par conséquent, le corollaire [B.6] de [104] permet d'assurer l'existence d'un $b > 0$ tel que $\rho(\mathcal{U}_j(t)) > 0$ pour tout $t > b$. Ainsi, $\rho(\mathcal{U}(t)) > 0$ pour tout $t > b + t_j$. Par passage à la limite lorsque $j \rightarrow \infty$ nous prouvons que $\rho(\mathcal{U}(t)) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui achève la preuve. \square

L'uniforme persistance du semi-flot fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.6. *Supposons que $R_0 > 1$. Alors, (3.2) est uniformément fortement persistant pour toute donnée initiale non triviale i.e il existe $\epsilon > 0$ tel que $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t)u_0) \geq \epsilon$ pour tout $u_0 \in \Omega_0$.*

Démonstration. D'abord, par les lemmes (3.4), (3.5) on peut appliquer le théorème [5.2] de [104] pour conclure que la persistance uniforme faible implique la persistance uniforme forte.

A présent supposons, par l'absurde, que le semi-flot Φ n'est pas faiblement persistant i.e $\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(\Phi(t)u_0) = 0$. Ce qui, avec (3.4)-(3.5), impliquent que $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t, \cdot) = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t, \cdot) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = 0$. Ainsi, il existe $T > 0$ tel que $J(t) \leq \epsilon$ pour tout $t \geq T$.

D'une part, l'équation S dans (3.2) nous donne $S(t) \geq \bar{N} - \epsilon$ pour tout $t \geq T$.

D'autre part, $N(t) \rightarrow \bar{N}$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et Ψ est une fonction continue, il existe $T > 0$ tel que $\Psi(\bar{N}) - \epsilon \leq \Psi(N(t)) \leq \Psi(\bar{N}) + \epsilon$ pour tout $t \geq T$.

Introduisons, le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{i}(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{i}(t, a)}{\partial a} = -(\mu + v(a)(\psi(\bar{N}) + \epsilon))\tilde{i}(t, a), \\ \frac{\partial \tilde{q}(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{q}(t, a)}{\partial a} = v(a)(\psi(\bar{N}) - \epsilon)\tilde{i}(t, a) - (\mu + \phi(a))\tilde{q}(t, a), \\ \tilde{R}'(t) = \int_0^\infty \phi(a)\tilde{q}(t, a)da - (\mu + \delta)\tilde{R}(t), \\ \tilde{i}(t, 0) = (\bar{N} - \epsilon)\tilde{J}(t) + \delta\tilde{R}(t), \\ \tilde{q}(t, 0) = 0, \\ \tilde{J}(t) = \int_0^\infty \beta(a)\tilde{i}(t, a)da, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

aux données initiales (3.3). Par le principe de comparaison on peut voir qu'il existe $T > 0$ tel que $\tilde{i}(t, \cdot) \leq i(t, \cdot)$, $\tilde{q}(t, \cdot) \leq q(t, \cdot)$ et $\tilde{R}(t) \leq R(t)$ pour tout $t \geq T$.

3.5. STABILITÉ GLOBALE DE L'ÉQUILIBRE ENDEMIQUE ET PERSISTANCE UNIFORME

Maintenant, si $R_0 > 1$ alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tel que

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[(\bar{N} - \varepsilon)\beta(s) \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\mu + \delta + \varepsilon} v(s)(\psi(\bar{N}) - \varepsilon) \int_s^\infty \phi(\sigma) \frac{\pi_2(\sigma)}{\pi_2(s)} e^{-\varepsilon(\sigma-s)} d\sigma \right] \bar{\pi}_1(s) e^{-\int_0^s (\lambda_\varepsilon + \varepsilon v(\xi)) d\xi} ds = 1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Posons,

$$k_\varepsilon(a) = \frac{\delta}{\mu + \delta + \varepsilon} \int_a^\infty \phi(s) \frac{\pi_2(s)}{\pi_2(a)} e^{-\varepsilon(s-a)} ds, \quad (3.34)$$

et

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(a) &= \int_a^\infty \left[(\bar{N} - \varepsilon)\beta(s) \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\mu + \delta + \varepsilon} v(s)(\psi(\bar{N}) - \varepsilon) \int_s^\infty \phi(\sigma) \frac{\pi_2(\sigma)}{\pi_2(s)} e^{-\varepsilon(\sigma-s)} d\sigma \right] \frac{\bar{\pi}_1(s)}{\bar{\pi}_1(a)} e^{-\int_a^s (\lambda_\varepsilon + \varepsilon v(\xi)) d\xi} ds \\ &= \int_a^\infty \left[(\bar{N} - \varepsilon)\beta(s) + v(s)(\psi(\bar{N}) - \varepsilon)k_\varepsilon(s) \right] \frac{\bar{\pi}_1(s)}{\bar{\pi}_1(a)} e^{-\int_a^s (\lambda_\varepsilon + \varepsilon v(\xi)) d\xi} ds, \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec $\bar{\pi}_1$ et π_2 sont définies dans (3.25). Les fonctions données en (3.34)-(3.35) vérifient

$$k'_\varepsilon(a) - (\mu + \phi(a) + \varepsilon)k_\varepsilon(a) = -\frac{\delta}{\mu + \delta + \varepsilon} \phi(a), \quad (3.36)$$

et

$$h'_\varepsilon(a) - (\lambda_\varepsilon + \mu + v(a)(\psi(\bar{N}) + \varepsilon))h_\varepsilon(a) = -(\bar{N} - \varepsilon)\beta(a) - v(a)(\psi(\bar{N}) - \varepsilon)k_\varepsilon(a). \quad (3.37)$$

Dès lors, par un simple calcul nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty h_\varepsilon(a) \tilde{i}(t, a) da = \int_0^\infty \left(h'_\varepsilon(a) - (\mu + v(a)(\psi(\bar{N}) + \varepsilon))h_\varepsilon(a) + \beta(a) \right) \tilde{i}(t, a) da,$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^\infty k_\varepsilon(a) \tilde{q}(t, a) da = \int_0^\infty \left(k'_\varepsilon(a) - (\mu + \phi(a))k_\varepsilon(a) \right) \tilde{q}(t, a) da \\ & + \int_0^\infty v(a)(\psi(\bar{N}) - \varepsilon)k_\varepsilon(a) \tilde{i}(t, a) da. \end{aligned}$$

Posons $I_\varepsilon(t) = \int_0^\infty h_\varepsilon(a) \tilde{i}(t, a) da + \int_0^\infty k_\varepsilon(a) \tilde{q}(t, a) da + \frac{\delta}{\mu + \delta + \varepsilon} \tilde{R}(t)$, en utilisant

(3.36), (3.37) nous obtenons

$$\begin{aligned} I'_\varepsilon(t) &= \lambda_\varepsilon \int_0^\infty h_\varepsilon(a) \tilde{i}(t, a) da + \varepsilon \int_0^\infty k_\varepsilon(a) \tilde{q}(t, a) da + \varepsilon \frac{\delta}{\mu + \delta + \varepsilon} \tilde{R}(t) \\ &\geq \max\{\lambda_\varepsilon, \varepsilon\} I_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Ceci implique que $I_\varepsilon(t) \geq e^{\max\{\lambda_\varepsilon, \varepsilon\}t} I_\varepsilon(0)$. Par conséquent, la bornitude de h_ε et k_ε conduit à $\limsup_{t \rightarrow \infty} B(t) = \infty$ dans Ω_0 , qui est une contradiction. Le lemme est prouvé. \square

Du Théorème [5.7] de [104] nous avons

Proposition 3.1. *Il existe un attracteur compact \mathbf{A}_1 qui attire toutes les solutions à données initiales dans Ω_0 . De plus, \mathbf{A}_1 est ρ -uniformément persistant i.e il existe $C > 0$;*

$$B(t) := i(t, 0) \geq C \text{ pour tout } (S_0, i_0(\cdot), q_0(\cdot), r_0) \in \mathbf{A}_1. \quad (3.38)$$

Nous donnons, maintenant, quelques estimations des solutions de (3.24).

Lemme 3.7. *Pour tout $(S_0, i_0(\cdot), q_0(\cdot), R_0) \in \mathbf{A}_1$ les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} \geq \frac{C}{i^*(0)}, \quad \frac{J(t)}{J^*} \geq \frac{C}{i^*(0)}, \quad \frac{R(t)}{R^*} \geq \frac{C}{i^*(0)}.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$ et C définis dans la proposition (3.1).

Démonstration. Par (3.24), (3.29) et la proposition (3.1) nous vérifions facilement que

$$\frac{i(t, a)}{i^*(a)} = \frac{B(t-a)}{i^*(0)} \geq \frac{C}{i^*(0)},$$

$$\frac{J(t)}{J^*} \geq \frac{C}{i^*(0)},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, et par (3.24), (3.29) et la Proposition (3.1) également,

$$\begin{aligned} q(t, a) = B(t-a)F(a) &\geq CF(a), \\ &\geq \frac{C}{i^*(0)} q^*(a), \end{aligned}$$

avec $F(a) = \pi_2(a) \int_0^a v(\sigma) \psi(\bar{N}) \frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)} d\sigma$.

Ceci, avec l'équation en R de (3.24), donne

$$R'(t) \geq \frac{C}{i^*(0)} \int_0^\infty \phi(a) q^*(a) da - (\mu + \delta) R(t).$$

Utilisons l'expression de R^* donnée par (3.29), nous obtenons

$$R'(t) \geq \frac{C}{i^*(0)}(\mu + \delta)R^* - (\mu + \delta)R(t).$$

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $t \geq r$, alors en intégrant cette dernière inégalité en (r, t) on trouve

$$R(t) \geq (R(r) - \frac{CR^*}{i^*(0)})e^{(\mu+\delta)(r-t)} + \frac{CR^*}{i^*(0)},$$

en passant à la limite lorsque $r \rightarrow -\infty$ nous concluons que

$$\frac{R(t)}{R^*} \geq \frac{C}{i^*(0)},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le lemme est prouvé. □

3.5.3 Stabilité globale

A présent, nous retournons à la stabilité globale de l'équilibre positif.

Théorème 3.5. *Supposons que $R_0 > 1$. Alors l'équilibre positif est globalement asymptotiquement stable sur Ω_0 .*

Démonstration. On pose

$$k(a) = \frac{i^*(0)}{S^*} - i^*(0) \int_0^a \beta(\sigma)\bar{\pi}_1(\sigma)d\sigma - \frac{\delta R^*}{S^*} \int_0^a \frac{\phi(\sigma)F(\sigma)}{\int_0^\infty \phi(\xi)F(\xi)d\xi}d\sigma,$$

avec $F(a) = \pi_2(a) \int_0^a v(\sigma)\psi(\bar{N})\frac{\bar{\pi}_1(\sigma)}{\pi_2(\sigma)}d\sigma$.

Remarque 3.4.

1) $k(a) \geq 0$ pour tout $a \geq 0$. En effet, de la dernière équation du système (3.29), la fonction k peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} k(a) &= J^* - i^*(0) \int_0^a \beta(\sigma)\bar{\pi}_1(\sigma)d\sigma + \frac{\delta R^*}{S^*} \left(1 - \int_0^a \frac{\phi(\sigma)F(\sigma)}{\int_0^\infty \phi(\xi)F(\xi)d\xi}d\sigma \right), \\ &= i^*(0) \int_a^\infty \beta(\sigma)\bar{\pi}_1(\sigma)d\sigma + \frac{\delta R^*}{S^*} \int_a^\infty \frac{\phi(\sigma)F(\sigma)}{\int_0^\infty \phi(\xi)F(\xi)d\xi}d\sigma. \end{aligned}$$

2) $k, k' \in L^1(\mathbb{R}^+)$. En fait, le théorème de Fubini donne

$$\int_0^\infty k(a)da = i^*(0) \int_0^\infty \sigma\beta(\sigma)\bar{\pi}_1(\sigma)d\sigma + \frac{\delta R^*}{S^*} \int_0^\infty \frac{\sigma\phi(\sigma)F(\sigma)}{\int_0^\infty \phi(\xi)F(\xi)d\xi}d\sigma.$$

3.5. STABILITÉ GLOBALE DE L'ÉQUILIBRE ENDEMIQUE ET PERSISTANCE UNIFORME

Remarquons que ces dernières intégrales sont finies. Finalement, $k' \in L^1$ peut être aisément démontré.

Maintenant, comme \mathbf{A}_1 est invariant, alors il existe une trajectoire totale $\Psi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{A}_1$, telle que $\Psi_1(t) = (S(t), i(t, \cdot), q(t, \cdot), R(t))$ soit solution de (3.24) avec $(S(0), i(0, \cdot), q(0, \cdot), R(0)) = (S_0, i_0(\cdot), q_0(\cdot), r_0)$.

Soit $H(x) = x - \ln(x) - 1$. Introduisons la fonctionnelle de Lyapunov suivante

$$V(\Psi_1(t)) = H\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + \int_0^\infty k(a)H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right)da + \frac{\delta R^*}{S^*(\mu + \delta)}H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right).$$

En dérivant le premier terme de V nous avons

$$\frac{d}{dt}H\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) = \frac{1}{S^*}\left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right)(A - \mu S(t) - S(t)J(t)),$$

En utilisant le fait que $A = \mu S^* + S^* J^*$ on a

$$I_1'(t) := \frac{d}{dt}H\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) = \mu\left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right)\left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) - \frac{S(t)}{S^*}J(t) + J(t) + \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right)J^*. \quad (3.39)$$

Concernant le second terme de V , utilisons la seconde équation de (3.24) et les mêmes arguments que ceux de la preuve du lemme [9.18] de [104] pour obtenir

$$\begin{aligned} I_2'(t) &:= \frac{d}{dt} \int_0^\infty k(a)H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right)da = k(0)H\left(\frac{i(t, 0)}{i^*(0)}\right) + \int_0^\infty k'(a)H\left(\frac{i(t, a)}{i^*(a)}\right)da, \\ &= \frac{i^*(0)}{S^*}H\left(\frac{S(t)J(t) + \delta R(t)}{i^*(0)}\right) + \int_0^\infty k'(a)H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right)da \end{aligned} \quad (3.40)$$

où $B(t) = i(t, 0)$.

De la dernière équation de (3.29), découle $\frac{S^* J^*}{i^*(0)} + \frac{\delta R^*}{i^*(0)} = 1$. Ceci, avec la convexité de H , conduit à

$$\begin{aligned} H\left(\frac{S(t)J(t) + \delta R(t)}{i^*(0)}\right) &= H\left(\frac{S^* J^*}{i^*(0)} \frac{S(t)J(t)}{S^* J^*} + \frac{\delta R^*}{i^*(0)} \frac{R(t)}{R^*}\right) \\ &\leq \frac{S^* J^*}{i^*(0)} H\left(\frac{S(t)J(t)}{S^* J^*}\right) + \frac{\delta R^*}{i^*(0)} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\ &\leq \frac{S^* J^*}{i^*(0)} \left(\frac{S(t)J(t)}{S^* J^*} - \ln\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) - 1 \right) + \frac{\delta R^*}{i^*(0)} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right). \end{aligned}$$

Substituons cette dernière inégalité dans (3.40), il en résulte que

$$I_2'(t) \leq J^* \left(\frac{S(t)J(t)}{S^*J^*} - \ln\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) - \ln\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) - 1 \right) + \frac{\delta R^*}{S^*} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) + \int_0^\infty k'(a) H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) da.$$

En sommant I_1' and I_2' il s'en suit que

$$I_1'(t) + I_2'(t) \leq \mu \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) - J^* H\left(\frac{S^*}{S(t)}\right) + J^* H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) + \frac{\delta R^*}{S^*} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) + \int_0^\infty k'(a) H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) da.$$

Grâce à l'inégalité de Jensen (voir annexe) nous avons

$$\begin{aligned} J^* H\left(\frac{J(t)}{J^*}\right) &= J^* H\left(\frac{\int_0^\infty \beta(a) \bar{\pi}_1(a) B(t-a)}{i^*(0) \int_0^\infty \beta(\xi) \bar{\pi}_1(\xi) d\xi}\right) \\ &\leq \frac{J^*}{\int_0^\infty \beta(\xi) \bar{\pi}_1(\xi) d\xi} \int_0^\infty H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) \beta(a) \bar{\pi}_1(a) da \\ &\leq i^*(0) \int_0^\infty H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) \beta(a) \bar{\pi}_1(a) da. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_1'(t) + I_2'(t) \leq \mu \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) - J^* H\left(\frac{S^*}{S(t)}\right) + \frac{\delta R^*}{S^*} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) + \int_0^\infty (k'(a) + \beta(a) \bar{\pi}_1(a) i^*(0)) H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) da.$$

Comme

$$k'(a) = -i^*(0) \beta(a) \bar{\pi}_1(a) - \frac{\delta R^*}{S^*} \frac{\phi(a) F(a)}{\int_0^\infty \phi(\xi) F(\xi) d\xi}$$

alors

$$\begin{aligned} I_1'(t) + I_2'(t) &\leq \mu \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) - J^* H\left(\frac{S^*}{S(t)}\right) + \frac{\delta R^*}{S^*} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\ &\quad - \frac{\delta R^*}{S^*} \int_0^\infty H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) \frac{\phi(a) F(a)}{\int_0^\infty \phi(\xi) F(\xi) d\xi} da. \end{aligned}$$

A présent, nous considérons le troisième terme de V

$$\begin{aligned} I'_3(t) &:= \frac{\delta R^*}{S^*(\mu + \delta)} \frac{d}{dt} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\ &= \frac{\delta R^*}{S^*(\mu + \delta)} H'\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\frac{i^*(0)}{R^*} \int_0^\infty \phi(a) F(a) \frac{B(t-a)}{i^*(0)} da - (\mu + \delta) \frac{R(t)}{R^*} \right). \end{aligned}$$

Sachant que

$$R^* = \frac{i^*(0)}{\mu + \delta} \int_0^\infty \phi(a) F(a) da,$$

Dès lors

$$I'_3(t) = \frac{\delta R^*}{S^*} H'\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^\infty \frac{\phi(a) F(a)}{\int_0^\infty \phi(\xi) F(\xi) d\xi} \frac{B(t-a)}{i^*(0)} da - \frac{\delta R(t)}{S^*} H'\left(\frac{R(t)}{R^*}\right).$$

Pour $I(t) := V(\Psi_1(t)) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} I'(t) &\leq \mu \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) - J^* H\left(\frac{S^*}{S(t)}\right) + \frac{\delta R^*}{S^*} H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \\ &\quad - \frac{\delta R^*}{S^*} \int_0^\infty H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) \frac{\phi(a) F(a)}{\int_0^\infty \phi(\xi) F(\xi) d\xi} da \\ &\quad + \frac{\delta R^*}{S^*} H'\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \int_0^\infty \frac{\phi(a) F(a)}{\int_0^\infty \phi(\xi) F(\xi) d\xi} \frac{B(t-a)}{i^*(0)} da - \frac{\delta R(t)}{S^*} H'\left(\frac{R(t)}{R^*}\right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} I'(t) &\leq \mu \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \left(1 - \frac{S(t)}{S^*}\right) - J^* H\left(\frac{S^*}{S(t)}\right) \\ &\quad + \frac{\delta R^*}{S^*} \int_0^\infty \left[H\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) - H\left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)}\right) + H'\left(\frac{R(t)}{R^*}\right) \left(\frac{B(t-a)}{i^*(0)} - \frac{R(t)}{R^*} \right) \right] \\ &\quad \times \frac{\phi(a) F(a)}{\int_0^\infty \phi(\xi) F(\xi) d\xi} da. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Comme $H(x) - H(y) + H'(x)(y - x) \leq 0$ alors le troisième terme de (3.41) est négatif et par suite $I \leq 0$.

De plus, notons que $\frac{d}{dt} V(\Psi_1(t)) = 0$ implique que $S(t) = S^*$ et $\frac{B(t-a)}{i^*(0)} = \frac{R(t)}{R^*}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$. L'équation des susceptibles S du système (3.24) implique que

$J(t) = J^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} J^* &= \int_0^\infty \beta(a)\bar{\pi}_1(a)B(t-a)da, \\ &= \frac{R(t)}{R^*}i^*(0) \int_0^\infty \beta(a)\bar{\pi}_1(a)da, \\ &= J^* \frac{R(t)}{R^*}, \end{aligned}$$

et ainsi $R(t) = R^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il vient que $B(t-a) = i^*(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$. Par conséquent, $i(t,a) = i^*(a)$ et $q(t,a) = q^*(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$. Enfin, avec des arguments similaires que ceux utilisés en fin de preuve du théorème (3.4), nous prouvons la stabilité asymptotique globale de l'équilibre endémique. \square

3.6 Simulation numérique

Les résultats théoriques obtenus dans les sections précédentes sont illustrés par des simulations numériques. Nous considérons différentes valeurs pour les paramètres de notre modèle et l'on a les cas suivants, chacun comporte les deux sous cas :

Premier cas

$$A = 0.01, \quad \mu = 0.02 \quad v(a) \equiv 0.1 \quad \text{et} \quad \psi(z) = \frac{1}{1 + 0.5z}.$$

avec les conditions initiales

$$S_0 = 0.9, \quad i_0(a) = 10^{-2}e^{-0.1a}, \quad q_0(a) = 0, \quad \text{et} \quad r_0 = 0.$$

Les fonctions β et ϕ sont choisies telles que

$$\beta(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq 5, \\ 8.10^{-3}(a-5)^2e^{-0.1(a-5)}, & \text{si } a > 5, \end{cases}$$

et

$$\phi(a) = \begin{cases} 0, & \text{if } a \leq 10, \\ 8.10^{-3}(a-10)^2e^{(-0.1(a-10))}, & \text{if } a > 10. \end{cases}$$

1er sous cas : Dans un premier temps, nous fixons $\delta = 0$ alors $R_0 < 1$, grâce au théorème (3.4), l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable voir Figures (3.2) et (3.3).

3.6. SIMULATION NUMÉRIQUE

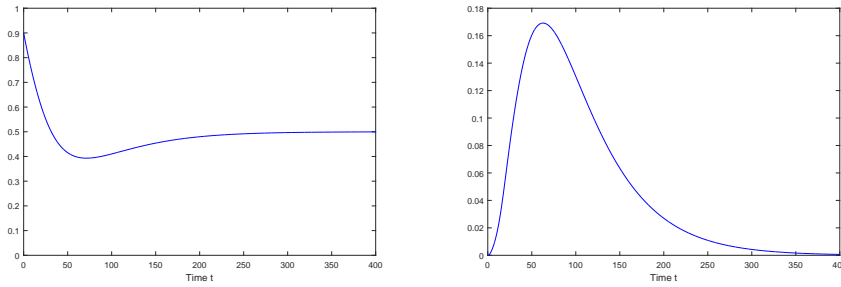


FIGURE 3.2 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à droite) à l'instant t .

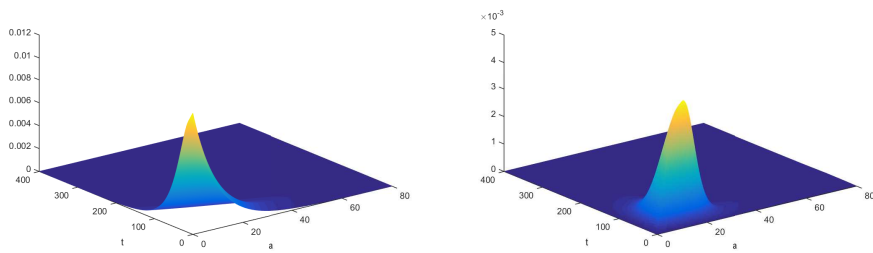


FIGURE 3.3 – L'évolution des solutions i (à gauche) et q (à droite) à l'âge a à l'instant t .

2ème sous cas : Dans un second temps, nous fixons $\delta = 0.4$ alors $R_0 > 1$, grâce au théorème (3.5), l'équilibre positif est globalement asymptotiquement stable voir Figures (3.4) et (3.5).

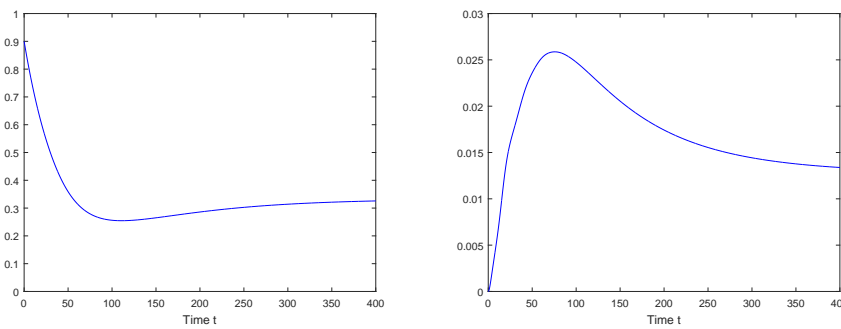


FIGURE 3.4 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à droite) à l'instant t .

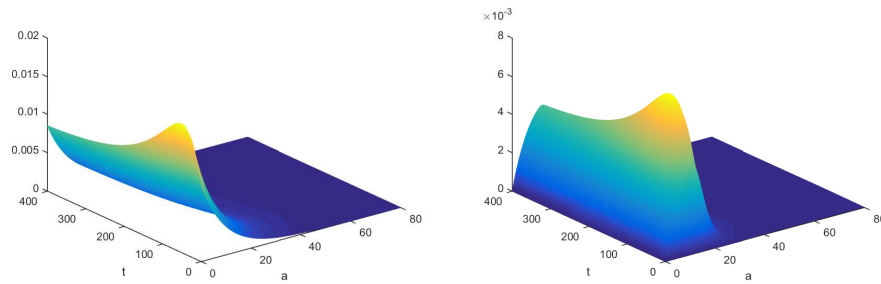


FIGURE 3.5 – L'évolution des solutions i (à gauche) et q (à droite) ayant l'âge a à l'instant t .

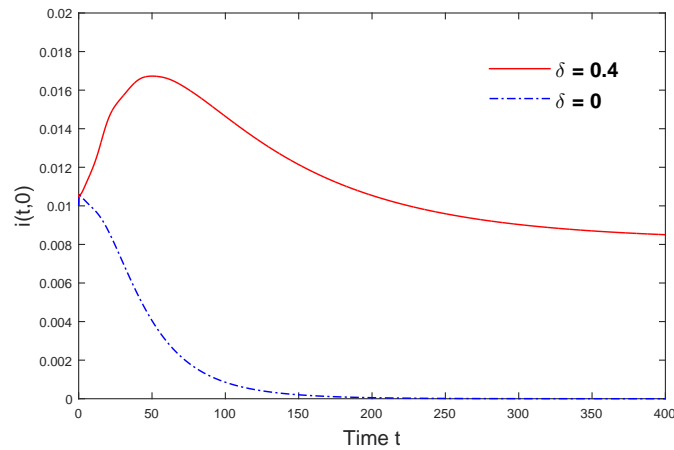


FIGURE 3.6 – L'évolution de $i(t, 0)$ à l'instant t .

Deuxième cas

Maintenant, nous allons prendre de nouveaux paramètres pour voir l'influence du re-chute δ sur l'incidence.

1er sous cas : On choisit $v(a) \equiv 0.2$ et

$$\phi(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq 10, \\ 4 \cdot 10^{-3} (a - 10)^2 e^{(-0.1(a-10))}, & \text{si } a > 10. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient un $R_0 < 1$ pour $\delta \in \{0, 0.1, 0.5\}$

3.6. SIMULATION NUMÉRIQUE

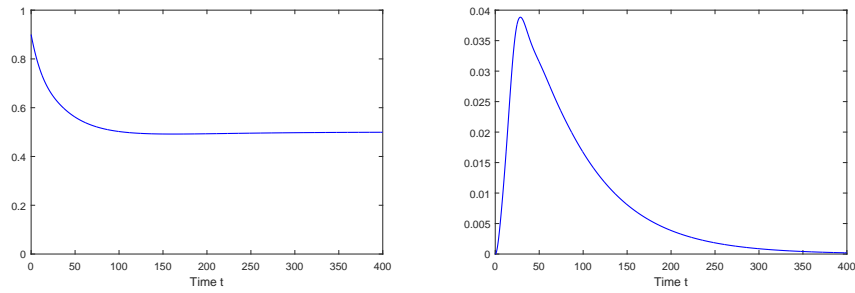


FIGURE 3.7 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à gauche) à l'instant t .

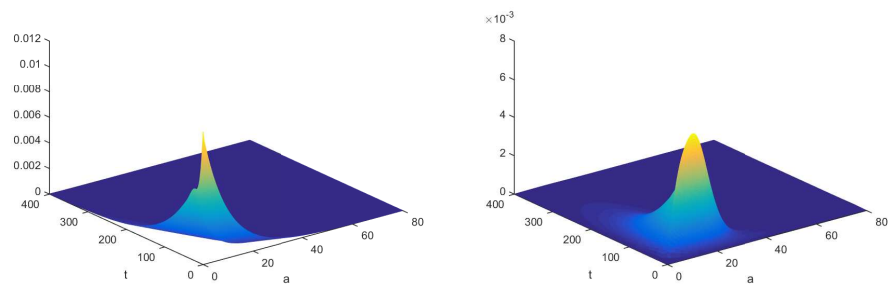


FIGURE 3.8 – L'évolution des solutions i (à gauche) et q (à droite) ayant l'âge a à l'instant t .

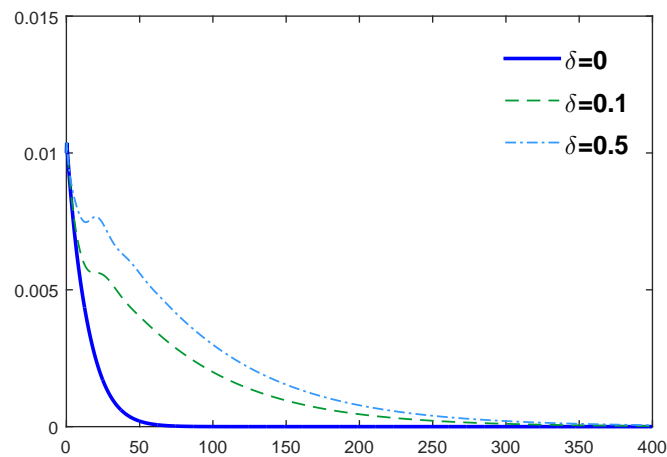


FIGURE 3.9 – L'évolution de $i(t, 0)$ au temps t .

2ème sous cas : Ensuite, nous allons prendre d'autres paramètres tels que $R_0 > 1$ pour tout $\delta \geq 0$. On choisit $A = 0.015$, $\mu = 0.01$, $v(a) \equiv 0.1$ et

$$\beta(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq 5, \\ 9 \cdot 10^{-3} (a - 5)^2 e^{-0,1(a-5)}, & \text{si } a > 5, \end{cases}$$

3.6. SIMULATION NUMÉRIQUE

et

$$\phi(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq 10, \\ 8.10^{-3}(a - 10)^2 e^{(-0.1(a-10))}, & \text{si } a > 10. \end{cases}$$

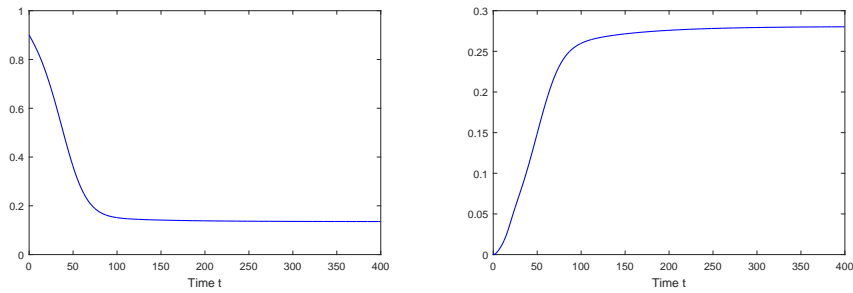


FIGURE 3.10 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à droite) à l'instant t .

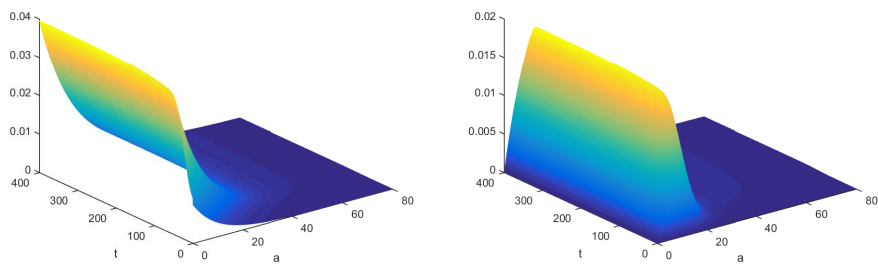


FIGURE 3.11 – L'évolution des solutions i (à gauche) et q (à droite) ayant l'âge a à l'instant t .

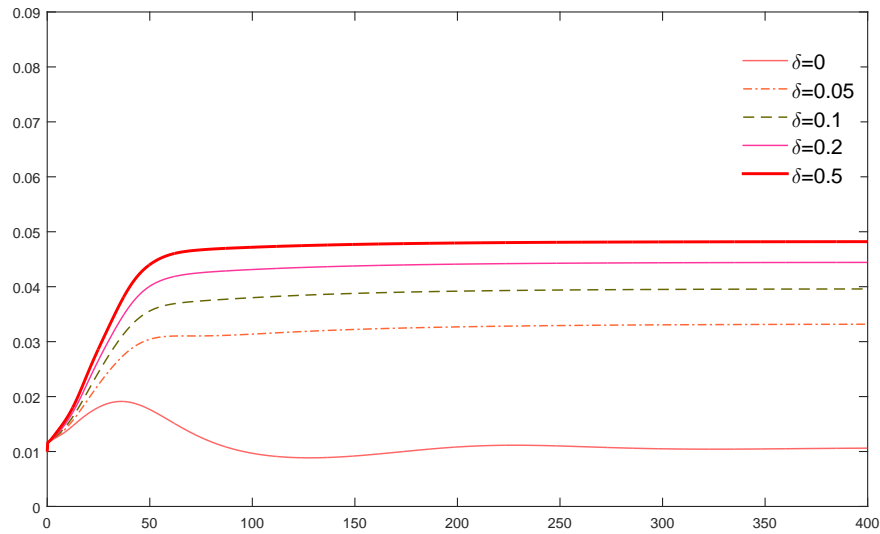


FIGURE 3.12 – L'évolution de $i(t, 0)$ à l'instant t .

Troisième cas

1er sous cas : Maintenant, nous allons prendre de nouveaux paramètres pour voir l'influence du taux de la rechute δ sur l'incidence. On choisit $v(a) \equiv 0.2$ et

$$\phi(a) = \begin{cases} 0, & \text{if } a \leq 10, \\ 4 \cdot 10^{-3} (a - 10)^2 e^{(-0.1(a-10))}, & \text{if } a > 10. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient un $R_0 < 1$ pour $\delta \in \{0, 0.1, 0.5\}$

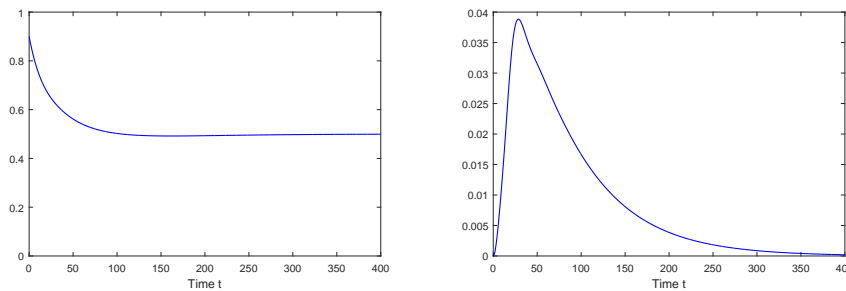


FIGURE 3.13 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à droite) à l'instant t .

3.6. SIMULATION NUMÉRIQUE

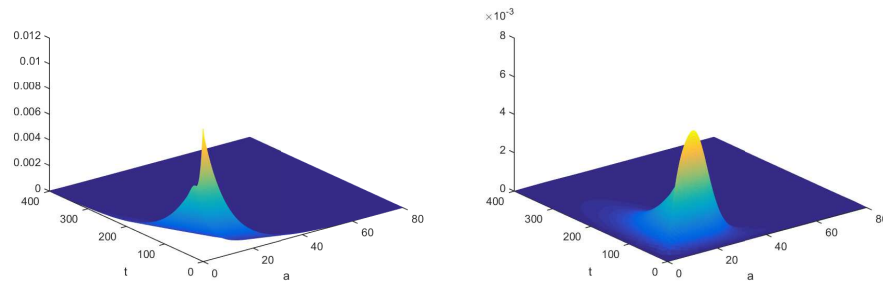


FIGURE 3.14 – L'évolution des solutions i (à gauche) et q (à droite) ayant l'âge a à l'instant t .

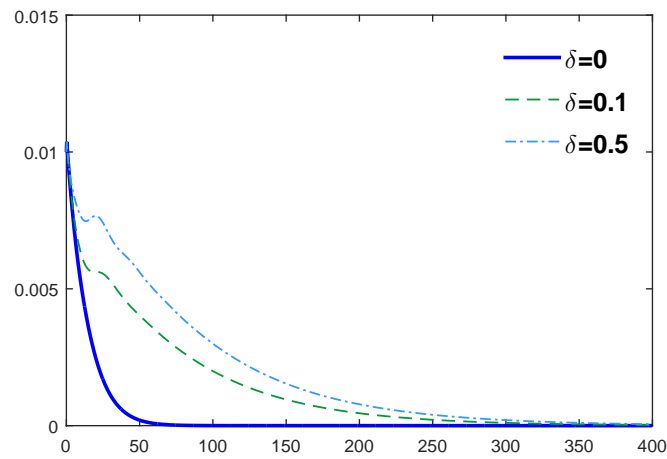


FIGURE 3.15 – L'évolution de $i(t, 0)$ à l'instant t .

2ème sous cas : Ensuite, nous allons prendre d'autres paramètres telle que $R_0 > 1$ pour tout $\delta \geq 0$. On choisit $A = 0.015$, $\mu = 0.01$, $v(a) \equiv 0.1$ et

$$\beta(a) = \begin{cases} 0, & \text{if } a \leq 5, \\ 9 \cdot 10^{-3}(a - 5)^2 e^{-0.1(a-5)}, & \text{if } a > 5, \end{cases}$$

et

$$\phi(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq 10, \\ 8 \cdot 10^{-3}(a - 10)^2 e^{(-0.1(a-10))}; & \text{si } a > 10. \end{cases}$$

3.6. SIMULATION NUMÉRIQUE

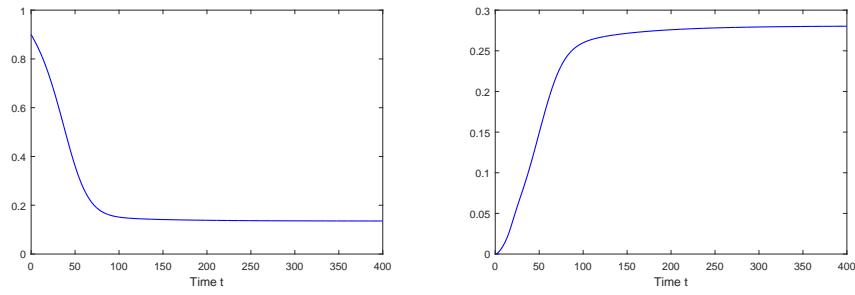


FIGURE 3.16 – L'évolution des solutions S (à gauche) et R (à droite) à l'instant t .

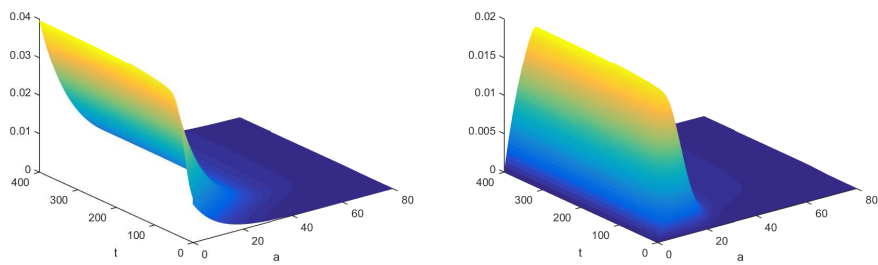


FIGURE 3.17 – L'évolution des solutions i (à gauche) et q (à droite) ayant l'âge a à l'instant t .

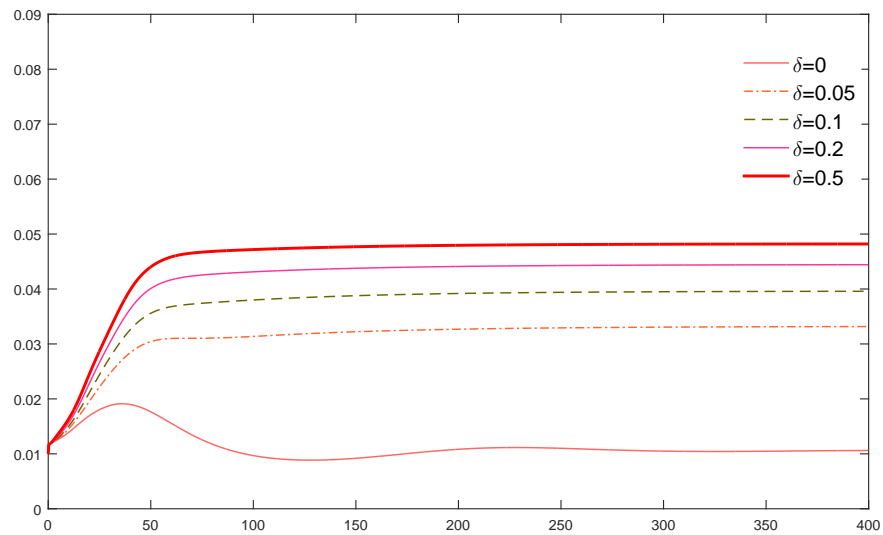


FIGURE 3.18 – L'évolution de $i(t, 0)$ à l'instant t .

3.6.1 Discussion

Dans ce chapitre, des résultats de stabilité globale sont obtenus pour un modèle du type SIQRI avec structure d'âge incorporant le dépistage en fonction de la réponse de la population en vue de passer à la quarantaine. Pour souligner l'impact de ces mesures combinées, nos simulations sont basées sur chaque paramètre séparément : Pour les mêmes paramètres, avec un taux de dépistage fixé à 0.1 par exemple, faisons varier le paramètre du taux de rechute sur une période fixée :

- Pour $\delta = 0$, nous obtenons $R_0 < 1$. La fonction incidence $i(t, 0)$ est décroissante à 0 (voir Figure (3.6)), ce qui conduit à la convergence des trajectoires vers l'équilibre trivial.
- Dès que $\delta = 0.4$, nous obtenons $R_0 > 1$. La fonction incidence $i(t, 0)$ est plus importante (voir Figure (3.6)), dans ce cas on remarque qu'il y a convergence vers l'équilibre endémique.

Chapitre 4

Dépistage optimal pour un modèle structuré en âge avec fonction réponse et rechute.

4.1 Introduction

En théorie du contrôle, un aspect d'un apport considérable particulièrement en science et technologie, est le contrôle optimal [108] : une question extrêmement importante qui se prête aux différents domaines de dynamique de population, pour ne citer que [5], [13], [7] et [6], [8], [73], [43], [49], voir aussi [62], pour les problèmes de diffusion et/ou différentes structures d'âge. On peut voir par exemple [48] pour d'autres processus non linéaires .

Un intérêt tout particulier est accordé à l'épidémiologie comme dans [3], [4], où des problèmes de contrôle optimal sont formulés pour des systèmes d'EDPs. Pour les problèmes de contrôle optimal gouvernés par des EDPs, nous nous référençons à [76].

Dans ce chapitre nous revenons sur le modèle de base proposé dans le chapitre 3, voir également [102] en vue de considérer un problème de contrôle optimal. Rappelons que ce modèle est à quatre classes ; les susceptibles, les infectés, la quarantaine et les réfractaires. Cependant et pour une prise en charge efficace, le passage de la classe des infectés à la classe de la quarantaine nécessite un dépistage, encore faut il que la population accepte de se faire dépister. Une fois que le dépistage est effectué, et avec une bonne coopération des individus au programme de la quarantaine, une certaine immunité est acquise permettant le passage à la classe des réfractaires (classe non vulnérable où il n'y a plus de transmission de l'infection). Or, pour quelques réfractaires, cette

immunité n'est que temporaire et une rechute est envisageable .

Le modèle de base est ainsi soumis à une action de dépistage $v(t, a)$ (contrôle dépendant de l'âge d'infection a à l'instant t) via une certaine réponse de la population, et qui prend en considération l'aspect de la rechute à un taux δ (supposé constant).

Le problème de contrôle optimal consiste à maximiser le nombre des individus ayant accepté de se faire dépister tout en minimisant à la fois les individus infectés et le coût médical.

Le choix de la linéarité du contrôle dans notre objectif, est justifié (voir motivation) par la lenteur de la période latente ainsi que la longue période de prise en charge pour le cas de certaines maladies. Nous pensons à la tuberculose entre autres.

Dans [3], un problème de contrôle optimal a été proposé et analysé pour un modèle de type SIR avec l'âge de l'infection, sous une stratégie de dépistage $v(t)$ dépendante du temps seulement, via la fonction réponse de la population totale.

Dans [4], la propagation de l'infection TB a été étudiée en présence du phénomène de l'immigration (considérée comme une nouvelle variable) quand la stratégie de dépistage est appliquée en deux procédures : la première consiste à dépister la population entière, la seconde concerne les immigrants seulement. Deux problèmes de contrôle optimal sont utilisés comparativement.

L'outil utilisé pour la caractérisation du contrôle optimal est généralement le principe du maximum de Pontryagin. Pour les systèmes d'EDOs, on peut voir [7] et [26] pour les applications et pour les systèmes d'EDPs, on peut voir [3] et [4].

Le présent chapitre, est organisé comme suit : dans la section 2, le problème est formulé mathématiquement suivi de quelques résultats préliminaires. La section 3 concerne le théorème d'existence de solutions. Les conditions d'optimalité font l'objet de la section 4. Grâce à la méthode de descente de gradient, un algorithme de calcul du meilleur contrôle est proposé en section 5. Finalement, la section 6 est laissée pour la conclusion.

4.2 Problème de contrôle optimal

Rappelons que $S(t)$, $i(t, a)$, $q(t, a)$, $R(t)$ sont les densités respectives des susceptibles, infectés, quarantaine et réfractaires où $(t, a) \in D := (0, T) \times (0, a_+)$, $(0, a_+)$ est la période d'infection et a_+ désigne l'âge maximum de l'infection (représente la guérison ou le décès), supposé fini mais pouvant être suffisamment grand et $(0, T)$ est une période de dépistage ($T > 0$ fixée et finie).

4.2. PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

A présent, considérons le dépistage $v = v(t, a)$ comme contrôle de la population totale. Le système contrôlé est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = A - \mu S(t) - S(t)J(t), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\mu i(t, a) - v(t, a)\psi(N(t))i(t, a), \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = v(t, a)\psi(N(t))i(t, a) - (\mu + \phi(a))q(t, a), \\ R'(t) = \int_0^{a_+} \phi(a)q(t, a)da - (\mu + \delta) R(t), \\ i(t, 0) = S(t)J(t) + \delta R(t), \\ q(t, 0) = 0, \\ J(t) = \int_0^{a_+} \beta(a)i(t, a)da. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = S_0 \in \mathbb{R}^+, \quad R(0) = r_0 \in \mathbb{R}^+, \\ i(0, a) = i_0(a), \quad i_0 \in L^\infty(0, a_+; \mathbb{R}^+), \\ q(0, a) = q_0(a), \quad q_0 \in L^\infty(0, a_+; \mathbb{R}^+). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

On cherche un v_* pour le problème P^0 suivant

$$F^0(v_*) = \max_{v \in V} F^0(v) \quad (4.3)$$

$$F^0(v) = \gamma \int_0^T \int_0^{a_+} v(t, a)\psi(N(t))i(t, a)dadt - \eta \int_0^T \int_0^{a_+} i(t, a)dadt - \theta \int_0^T \int_0^{a_+} v(t, a)dadt. \quad (4.4)$$

où le domaine des contrôles

$$V = \{v \in L^\infty(D); 0 \leq v_{min} \leq v(t, a) \leq v_{max} p \cdot p\}$$

et $v(t, a)$ est le dépistage de l'individu d'âge a d'infection à l'instant t . γ, η, θ sont des constantes de pondération.

Dans (4.4), le premier terme désigne le nombre d'individus acceptant de se faire dépister

identifiés infectés, le second terme représente le nombre d'individus infectés et le terme de dépistage apparaît linéairement dans le dernier terme.

- La description biologique des paramètres du (4.1) est la même que dans le chapitre 3 (voir [102] également). En plus des hypothèses du chapitre 3 nous faisons l'hypothèse suivante

(H2)' ψ est positive, continûment différentiable de \mathbb{R}_*^+ .

Remarquons que notre système peut être remplacé par

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = A - \mu S(t) - S(t)J(t), \\ \frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} = -\mu i(t, a) - v(t, a)\psi(N(t))i(t, a), \\ \frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} = v(t, a)\psi(N(t))i(t, a) - (\mu + \phi(a))q(t, a), \\ N'(t) = A - \mu N(t), \\ i(t, 0) = S(t)J(t) + \delta (N(t) - S(t) - I(t) - Q(t)), \\ q(t, 0) = 0, \\ J(t) = \int_0^{a+} \beta(a)i(t, a)da, \\ I(t) = \int_0^{a+} i(t, a) da, \\ Q(t) = \int_0^{a+} q(t, a) da. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = S_0 \in \mathbb{R}^+, \quad N(0) = N_0 \in \mathbb{R}^+, \\ i(0, a) = i_0(a), \quad q(0, a) = q_0(a). \end{array} \right.$$

4.3 Existence du contrôle optimal

Proposition 4.1. *Pour chaque $v \in V$, le système (4.1) - (4.2) admet une solution globale $u^v = (S, i, q, R)^v$ dans $C_+(0, T) \times [L_+^1(D)]^2 \times C_+(0, T)$ pour chaque $(S_0, i_0, q_0, R_0) \in X^+$. De plus, $u^{v \in V} \in W_+^{1,\infty}(0, T) \times [L_+^\infty(D)]^2 \times W_+^{1,\infty}(0, T)$.*

L'existence relève du théorème (3.1). Rappelons qu'avec (3.14), (3.1) et la continuité de ψ , nous avons les estimations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t) \leq c_0, \quad R(t) \leq c_0, \\ \int_0^{a_+} i(t, a) da \leq c_0, \\ \int_0^{a_+} q(t, a) da \leq c_0, \\ \psi_* \leq \psi(N(t)) \leq \psi^*. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Où ψ_* et ψ^* désignent les bornes inférieures et supérieures respectives de ψ sur $[0, \frac{A}{\mu}]$. D'autre part, par le système (3.2), (3.1), (3.15) et avec la bornitude de β , il existe des constantes positives telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} J(t) \leq c_0 \|\beta\|_\infty := c_J, \\ i(t, 0) \leq c_0^2 \|\beta\|_\infty + \delta c_0 := c_i \end{array} \right. \quad (4.7)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} |S'(t)| \leq c_{Sd}, \\ |N'(t)| \leq A. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Supposons, sans perte de généralité, que $T > a^+$. Dès lors, pour tout v fixé dans V et pour presque tout $(t, a) \in D$, les formules (3.4) - (3.5) (voir chapitre précédent) assurent l'existence de deux constantes c_1 et c_2 positives telles que

$$i(t, a) \leq c_1$$

et

$$q(t, a) \leq c_2.$$

Théorème 4.1. *Le problème (4.3) - (3.2) - (4.2) admet un contrôle optimal v_* .*

4.3. EXISTENCE DU CONTRÔLE OPTIMAL

Démonstration. La fonctionnelle F^0 est uniformément bornée sur V , alors

$$-\infty < d := \sup_{v \in V} F^0(v) < +\infty.$$

Il existe une suite maximisante $(v_n)_n \subset V$ et une trajectoire associée $u^{v_n} := (S_n, i_n, q_n, N_n)_{n \in \mathbb{N}}$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^0(v_n) = d \quad (4.9)$$

Le domaine V étant non vide convexe fermé borné, faiblement compact dans $L^2(D)$ (puisque D est borné). Alors, on peut extraire des sous suites successives

$$\begin{cases} v_n \rightarrow v_* \text{ faiblement dans } L^2(D), \\ S_n \rightarrow S_* \text{ uniformément dans } C[0, T], \\ R_n \rightarrow R_* \text{ uniformément dans } C[0, T], \\ N_n \rightarrow N_* \text{ uniformément dans } C[0, T], \\ i_n \rightarrow i_* \text{ faiblement dans } L^2(D), \\ q_n \rightarrow q_* \text{ faiblement dans } L^2(D). \end{cases}$$

Par le lemme de Mazur, il existe $\lambda_l \geq 0$, $\sum_{l>n}^{k_n} \lambda_l = 1$;

$$\tilde{i}_n(t, a) = \sum_{l>n}^{k_n} \lambda_l i_l(t, a) \rightarrow i_*(t, a) \text{ fortement dans } L^2(D)$$

pour laquelle

$$\tilde{v}_n(t, a) = \begin{cases} \frac{\sum_{l>n}^{k_n} \lambda_l v_l(t, a) \psi(N_l(t)) i_l(t, a)}{\psi(\tilde{N}_n(t)) \sum_{l>n}^{k_n} \lambda_l i_l(t, a)}, & \text{if } \sum_{l>n}^{k_n} \lambda_l i_l(t, a) \neq 0 \\ v_{\max}, & \text{if } \sum_{l>n}^{k_n} \lambda_l i_l(t, a) = 0. \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que $\tilde{v}_n \in V$. Notons $\tilde{N}_n(t) := N^{\tilde{v}_n}(t)$, alors il existe une sous-suite aussi notée $(\tilde{v}_n)_n$ telle que

4.3. EXISTENCE DU CONTRÔLE OPTIMAL

$$\tilde{v}_n \rightarrow v_* \text{ faiblement dans } L^2(D)$$

Comme $F^0(\tilde{v}_n) = \sum_{l>n}^{k_n} \lambda_l F^0(v_l)$ et grâce à (4.9), il s'en suit que

$$F^0(\tilde{v}_n) \rightarrow d \quad (4.10)$$

i.e. la suite $(\tilde{v}_n)_n$ est aussi maximisante dont la trajectoire correspondante est telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_n \rightarrow S_* \text{ uniformément dans } C[0, T], \\ \tilde{R}_n \rightarrow R_* \text{ uniformément dans } C[0, T], \\ \tilde{N}_n \rightarrow N_* \text{ uniformément dans } C[0, T], \\ \tilde{i}_n \rightarrow i_* \text{ fortement dans } L^2(D), \\ \tilde{q}_n \rightarrow q_* \text{ fortement dans } L^2(D). \end{array} \right.$$

Montrons enfin que, $u^{v*} := (S_*, N_*, i_*, q_*)$ est solution de (4.1).

En effet, le passage à la limite sur $n \in \mathbb{N}$ dans (4.1), donne

$$\left\{ \begin{array}{l} S_*'(t) = A - \mu S_*(t) - S_*(t) J_*(t) \\ N_*'(t) = A - \mu N_*(t), \\ J_*(t) = \int_0^{a+} \beta(a) i_*(t, a) da \\ - \int_D i_*(t, a) \left[\frac{\partial \phi_0(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_0(t, a)}{\partial a} \right] da dt \\ = \int_D -(\mu + v_*(t, a) \psi(N_*(t))) i_*(t, a) \phi_0(t, a) da dt \\ - \int_D q_*(t, a) \left[\frac{\partial \phi_0(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_0(t, a)}{\partial a} \right] da dt \\ = \int_D [v_*(t, a) \psi(N_*(t)) i_*(t, a) - (\mu + \phi(a)) q_*(t, a)] \phi_0(t, a) dadt \end{array} \right. \quad (4.11)$$

pour $\phi_0 \in C_c^1(D)$ avec $\phi_0(T, a) = 0$.

Enfin, en passant à la limite dans (4.4), nous obtenons

$$F^0(\tilde{v}_n) \rightarrow F^0(v_*) \quad (4.12)$$

puisque,

$$\int_0^T \int_0^{a_+} v_n(t, a) \psi(N_n(t)) i_n(t, a) da dt \rightarrow \int_0^T \int_0^{a_+} v_*(t, a) \psi(N_*(t)) i_*(t, a) da dt$$

$$\int_0^T \int_0^{a_+} i_n(t, a) da dt \rightarrow \int_0^T \int_0^{a_+} i_*(t, a) da dt$$

et

$$\int_0^T \int_0^{a_+} v_n(t, a) da dt \rightarrow \int_0^T \int_0^{a_+} v_*(t, a) da dt$$

Avec (4.10), (4.12) et par unicité de la limite, le suprémum est atteint en v_* .

□

4.4 Conditions d'optimalité

Soit $0 < \epsilon < 1$, considérons la famille de problèmes de contrôle optimal (P^ϵ)

$$\begin{cases} \max F^\epsilon(v) \\ v \in V \end{cases} \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{aligned} F^\epsilon(v) = & \gamma \int_0^T \int_0^{a_+} v(t, a) \psi(N(t)) i(t, a) da dt - \eta \int_0^T \int_0^{a_+} i(t, a) da dt \\ & - \theta \int_0^T \int_0^{a_+} v(t, a) da dt - \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_0^{a_+} v^2(t, a) da dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sous les hypothèses ci dessus, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, (4.13)-(4.5) admet un contrôle optimal v_*^ϵ . On peut montrer aisément que v_* la solution de (P^0) est la limite (faible) de v_*^ϵ solution de (P^ϵ) lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ (on peut considérer $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et les sous suites successives).

Pour le problème (4.13)-(4.5) on définit la famille de lagrangiens par

$$\begin{aligned}
L^\epsilon(v; S, i, q, R; \lambda_S, \lambda_i, \lambda_q, \lambda_R) &= F^\epsilon(v) \\
&+ \int_0^T [S'(t) - A + \mu S(t) + S(t)J(t)] \lambda_S(t) dt \\
&+ \int_0^T \int_0^{a+} \left[\frac{\partial i(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial i(t, a)}{\partial a} \right] \lambda_i(t, a) da dt \\
&+ \int_0^T \int_0^{a+} \left(\mu + v \psi(N(t)) \right) i(t, a) \lambda_i(t, a) da dt \\
&+ \int_0^T \left[i(t, 0) - S(t) \int_0^{a+} \beta(a) i(t, a) da - \delta R(t) \right] \lambda_i(t, 0) dt \\
&+ \int_0^T \int_0^{a+} \left[\frac{\partial q(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, a)}{\partial a} \right] \lambda_q(t, a) da dt \\
&+ \int_0^T \int_0^{a+} [-v \psi(N(t)) i(t, a) + (\mu + \phi(a) q(t, a))] \lambda_q(t, a) da dt \\
&+ \int_0^T \left[R'(t) - \int_0^{a+} \phi(a) q(t, a) da + (\mu + \delta) R(t) \right] \lambda_R(t) dt.
\end{aligned}$$

Les dérivées de L^ϵ par rapport aux variables d'état et de contrôle doivent s'annuler en v_*^ϵ . Alors, il existe $\lambda_S, \lambda_i, \lambda_q, \lambda_R$ (ϵ est omit) des variables adjointes satisfaisant le

systeme adjoint

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\lambda'_S(t) + \left(\mu + J(t) \right) \lambda_S(t) \\
 = J(t) \lambda_i(t, 0) - \int_0^{a+} v i(t, a) (\gamma + \lambda_i - \lambda_q) \psi'(N) da, \\
 \\
 -\frac{\partial \lambda_i(t, a)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_i(t, a)}{\partial a} + \left(\mu + v \psi(N(t)) + v i \psi'(N) \right) \lambda_i(t, a) \\
 = \eta - \gamma v \psi(N) - \gamma v i \psi'(N) + S(t) \beta(a) \lambda_i(t, 0) - S(t) \beta(a) \lambda_S(t) \\
 + \left(v i \psi'(N) + v \psi(N) \right) \lambda_q(t, a), \\
 \\
 -\frac{\partial \lambda_q(t, a)}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_q(t, a)}{\partial a} + \left(\mu + \phi(a) - v i \psi'(N) \right) \lambda_q(t, a) \\
 = \phi(a) \lambda_R(t) - v i \psi'(N) \left(\gamma + \lambda_i \right), \\
 \\
 -\lambda'_R(t) + (\mu + \delta) \lambda_R(t) \\
 = \delta \lambda_i(t, 0) - \int_0^{a+} v i(t, a) (\gamma + \lambda_i - \lambda_q) \psi'(N) da
 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \lambda_S(T) = 0, \\
 \lambda_i(T, a) = \lambda_i(t, a_+) = 0, \\
 \lambda_q(T, a) = 0, \\
 \lambda_q(t, a_+) = g(t), \\
 \lambda_R(T) = 0.
 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Où g est une fonction connue et v désigne $v(t, a)$.

Calculons, à présent, la dérivée de L^ϵ par rapport au contrôle.

$$\begin{aligned}
 \frac{dL^\epsilon}{dv}(v; S, i, q, R; \lambda_S, \lambda_i, \lambda_q, \lambda_R) &= \int_0^T \int_0^{a+} \left(\gamma + \lambda_i(t, a) - \lambda_q(t, a) \right) \psi(N(t)) i(t, a) \\
 &\quad - \theta - \epsilon v(t, a) da dt.
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si ϵ est différent de zéro, le contrôle optimal v_* satisfait à

$$\frac{dL^\epsilon}{dv}(v; S, i, q, R; \lambda_S, \lambda_i, \lambda_q, \lambda_R) = 0$$

ce qui donne

$$v_*^\epsilon(t, a) = \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\gamma + \lambda_i(t, a) - \lambda_q(t, a) \right) \psi(N_*^\epsilon(t)) i_*^\epsilon(t, a) - \theta \right] \text{ p.p. } (t, a) \in D \quad (4.18)$$

Si ϵ est égal à zéro, on obtient

$$v_*(t, a) = \begin{cases} v_{\max} & \text{si } \left(\gamma + \lambda_i(t, a) - \lambda_q(t, a) \right) \psi(N_*(t)) i_*(t, a) - \theta > 0, \\ [v_{\min}, v_{\max}] & \text{si } \left(\gamma + \lambda_i(t, a) - \lambda_q(t, a) \right) \psi(N_*(t)) i_*(t, a) - \theta = 0, \\ v_{\min} & \text{si } \left(\gamma + \lambda_i(t, a) - \lambda_q(t, a) \right) \psi(N_*(t)) i_*(t, a) - \theta < 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

4.5 Schéma numérique

Dans le but de calculer numériquement v_* , nous commençons par discrétiser (3.2), utilisant le schéma explicite d'Euler pour les dérivées et la formule des rectangles pour les intégrales..

Soient $h > 0$ et $k > 0$ les pas de discrétisation selon les axes en temps et en âge respectivement. Posons $n_0 := \frac{T}{h}$ et $l_0 := \frac{a_+}{k}$, où $T > 0$ et $a_+ > 0$ sont définis plus haut, et pour $0 \leq n \leq n_0$ et $0 \leq l \leq l_0$; $t_n := t_0 + nh$ et $a_l := a_0 + lk$.

Soient S^n , i_l^n , q_l^n , N^n les approximations respectives de $S(nh)$, $i(nh, lk)$, $q(nh, lk)$, $N(nh)$ et les paramètres μ_l , β_l , v_l^n , ϕ_l , J^n ceux de $\mu_1(lk)$, $\beta(lk)$, $v(nh, lk)$, $\phi(lk)$, $J(nh)$ respectivement. Le système (3.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{S^{n+1} - S^n}{h} = A - \mu S^n - J^n S^n, \\
 J^n = k \sum_{l=1}^{l_0} \beta_l i_l^n, \\
 \frac{i_l^{n+1} - i_l^n}{h} + \frac{i_l^n - i_{l-1}^n}{k} = -(\mu + v_l^n \psi(N^n)) i_l^n, \\
 \frac{q_l^{n+1} - q_l^n}{h} + \frac{q_l^n - q_{l-1}^n}{k} = -(\mu + \phi_l) q_l^n + v_l^n \psi(N^n) i_l^n, \\
 \frac{R^{n+1} - R^n}{h} = Q_1^n - (\mu + \delta) R^n.
 \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S^0 = S_0, \\
 I^n = k \sum_{l=1}^{l_0} i_l^n, \\
 Q^n = k \sum_{l=1}^{l_0} q_l^n, \\
 Q_1^n = k \sum_{l=1}^{l_0} \phi_l q_l^n, \\
 N^n = S^n + I^n + Q^n + R^n, \\
 i_0^n = S^n J^n + \delta R^n, \\
 i_l^0 = i_{l,0}, \\
 q_0^n = 0, \\
 q_l^0 = q_{l,0}.
 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

ou de manière équivalente,

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{n+1} = \left(1 - h(\mu + J^n)\right) S^n + hA, \\ J^n = k \sum_{l=1}^{l_0} \beta_l i_l^n, \\ i_l^{n+1} = \left(1 - \frac{h}{k} - h(\mu + v_l^n \psi(N^n))\right) i_l^n + \frac{h}{k} i_{l-1}^n, \\ q_l^{n+1} = \left(1 - \frac{h}{k} - h(\mu + \phi_l)\right) q_l^n + \frac{h}{k} q_{l-1}^n + h v_l^n \psi(N^n) i_l^n, \\ R^{n+1} = \left(1 - (h + \delta)\right) R^n + h Q_1^n. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

A présent, nous discrétisons 4.15 ;

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\lambda_S^{n+1} - \lambda_S^n}{h} + (\mu + J^n) \lambda_S^n = (J^n - \delta) \lambda_{i_0}^n, \\ -\frac{\lambda_{i_l}^{n+1} - \lambda_{i_l}^n}{h} - \frac{(\lambda_{i_l})_l^n - (\lambda_{i_l})_{l-1}^n}{k} + (\mu + v_l^n \psi(N^n)) (\lambda_{i_l})_l^n, \\ = \eta - \gamma v_l^n \psi(N^n) + (S^n \beta_l - \delta) (\lambda_{i_l})_0^n - S^n \beta_l \lambda_S^n + v_l^n \psi(N^n) (\lambda_{q_l})_l^n, \\ -\frac{(\lambda_{q_l})_l^{n+1} - (\lambda_{q_l})_l^n}{h} - \frac{\lambda_{q_l}^n - \lambda_{q_{l-1}}^n}{k} + (\mu + \phi_l) \lambda_{q_l}^n = -\delta \lambda_{i_0}^n, \\ -\frac{\lambda_N^{n+1} - \lambda_N^n}{h} + \mu \lambda_N^n = \delta \lambda_{i_0}^n - v_l^n \psi'(N^n) i_l^n (\gamma + \lambda_{i_l}^n - \lambda_{q_l}^n). \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_S^{n_0} = 0, \\ \lambda_{i_l}^{n_0} = \lambda_{i_l}^{n_0} = 0, \\ \lambda_{q_l}^{n_0} = 0, \\ \lambda_{q_{l_0}}^n = g^n, \\ \lambda_N^{n_0} = 0. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

où g^n est l'approximation de $g(t_n)$.

Le système adjoint (4.23) discrétisé s'exprime par

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_S^{n+1} = \left(1 + h(\mu + J^n)\right) \lambda_S^n - h(J^n - \delta) \lambda_{i_0}^n, \\ \lambda_{i_l}^{n+1} = \left(1 - \frac{h}{k} + h(\mu + v_l^n \psi(N^n))\right) \lambda_{i_l}^n + \frac{h}{k} \lambda_{i_{l-1}}^n \\ + h S^n \beta_l \lambda_S^n - h v_l^n \psi(N^n) \lambda_{q_l}^n - h(S^n \beta_l - \delta) \lambda_{i_0}^n - h \eta + h \gamma v_l^n \psi(N^n), \\ \lambda_{q_l}^{n+1} = \left(1 - \frac{h}{k} + h(\mu + \phi_l)\right) \lambda_{q_l}^n + \frac{h}{k} \lambda_{q_{l-1}}^n + h \delta \lambda_{i_0}^n, \\ \lambda_N^{n+1} = \left(1 + h \mu\right) \lambda_N^n + h v_l^n \psi'(N^n) i_l^n (\gamma + \lambda_{i_l}^n - \lambda_{q_l}^n) - h \delta \lambda_{i_0}^n. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Dans le cas particulier où $h = k$ et $\psi(N) = \frac{1}{1+N}$;
- Le système d'état discrétisé (4.20) est réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{n+1} = \left(1 - h(\mu + J^n)\right) S^n + hA, \\ J^n = h \sum_{l=1}^{l_0} \beta_l i_l^n, \\ i_l^{n+1} = -h \left(\mu + \frac{v_l^n}{1 + N^n} \right) i_l^n + i_{l-1}^n, \\ q_l^{n+1} = -h \left(\mu + \phi_l \right) q_l^n + q_{l-1}^n + h \frac{v_l^n}{1 + N^n} i_l^n, \\ R^{n+1} = \left(1 - (h + \delta)\right) R^n + hQ_1^n. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

En plus des conditions initiales données par (4.21).

- Le système d'état adjoint discrétisé (4.25) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_S^{n+1} = \left(1 + h(\mu + J^n)\right) \lambda_S^n - h(J^n - \delta) \lambda_{i_0}^n, \\ \lambda_{i_l}^{n+1} = h \left(\mu + \frac{v_l^n}{1 + N^n} \right) \lambda_{i_l}^n + \lambda_{i_{l-1}}^n \\ + h S^n \beta_l \lambda_S^n - h \frac{v_l^n}{1 + N^n} \lambda_{q_l}^n - h(S^n \beta_l - \delta) \lambda_{i_0}^n - h\eta + h\gamma v_l^n \psi(N^n), \\ \lambda_{q_l}^{n+1} = h(\mu + \phi_l) \lambda_{q_l}^n + \lambda_{q_{l-1}}^n + h\delta \lambda_{i_0}^n, \\ \lambda_N^{n+1} = (1 + h\mu) \lambda_N^n - h \frac{v_l^n}{(1 + N^n)^2} i_l^n (\gamma + \lambda_{i_l}^n - \lambda_{q_l}^n) - h\delta \lambda_{i_0}^n. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

En plus des conditions de transversalité données en (4.24).

- L'expression de la dérivée discrétisée du lagrangien (4.17) est donnée par

$$\left(\frac{dL^\epsilon}{dv}\right)_l^n = h k \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{l=1}^{l_0} \left[\left(\gamma + (\lambda_i)_l^n - \lambda_{q_l}^n \right) \psi(N^n) i_l^n - \theta - \epsilon v_l^n \right] \quad (4.28)$$

Algorithme : Méthode de descente du gradient.

Etape 0 : Choisir aléatoirement $v_0 \in V$ et fixer un seuil de tolérance $tol > 0$.

Etape 1 : résoudre (4.22) - (4.21).

Etape 2 : résoudre (4.25) - (4.24).

Etape 3 : calculer $\frac{dL^\epsilon}{dv}(v_r)$ comme dans (4.28)

Etape 4 : si $\frac{dL^\epsilon}{dv}(v_r) \geq tol$

Etape 5 : pour $r = 0, 1, 2, \dots$ calculer un nouveau contrôle par le schéma suivant

$$v_{r+1} = v_r + \rho \frac{dL^\epsilon}{dv}(v_r)$$

Etape 6 : Projeter sur le domaine des contraintes V .

Etape 7 : si $\|v_{r+1} - v_r\|_\infty < tol$, stop, sinon, $v_0 = v_{r+1}$ aller à Etape 0.

où

$$\|v_{r+1} - v_r\|_\infty = \text{essSup}_{(t,a) \in D} |v_{r+1}(t, a) - v_r(t, a)|$$

La constante positive ρ est choisie de sorte que v_{r+1} reste dans le même voisinage que v_r dans la direction $\frac{dL^\epsilon}{dv}(v_r)$.

Pour la simulation, les données sont $A, \mu, \delta, \beta(a), \phi(a), \psi(x)$.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un problème de contrôle optimal a été analysé pour un modèle épidémiologique structuré en âge sous le contrôle du dépistage via la réponse de la population, et soumis à la rechute. Sous ces conditions, l'existence d'un dépistage optimal maximisant le nombre de dépistés et minimisant le nombre d'infectés mais aussi le coût économique, est possible. Cependant,

— Le calcul du contrôle optimal nécessite d'évaluer à chaque âge de l'infection

a à l'instant *t*, la quantité

$$\gamma\psi(N_*(t))i_*(t, a) - \theta$$

ce qui montre que la fonction réponse de la population a une influence significative pour le calcul du contrôle optimal. D'où l'intérêt de la sensibilisation soit dans les établissements scolaires soit par médiatisation.

- *A cause de la décroissance de la fonction réponse, nous pensons que dépister une population de petite taille est plus efficace que dépister une population de taille très importante.*

- *L'une des perspectives consiste en le calcul numérique d'un dépistage optimal et de ses trajectoires correspondantes aux différentes valeurs de la fonction réponse de la population totale au dépistage puis pour différentes valeurs de rechute.*

- *Prendre*

$$V = \{v \in L^\infty(D); 0 \leq v_{min} \leq \int_0^T \int_0^{a+} v(t, a) da dt \leq v_{max} p.p\}$$

comme domaine des contrôles est également envisageable.

Bibliographie

- [1] *S.F. Ambibade, S. Olaniyi, O. A. Ajala, M.O. Ibrahim.* Optimal control analysis of a tuberculosis model with exogenoms re-infection and incomplete treatment. *Optimal control Applications and Methods* 41(6), 2020, 2349- 2368.
- [2] *F.B. Augusto, J. Cook, P.D. Shelton and M.G. Wickers.* Mathematical Model of MDR and XDR tb with isolation and lost of follow- up. *vol. 2015.*
- [3] *B. Ainseba, M. Iannelli,* Optimal Screening in Structured SIR Epidemics. *Math. Model. Nat. Phenom., vol.7, n.3, 2012, 12-27.*
- [4] *B. Ainseba, Z. Feng, M. Iannelli and F.A. Milner,* Control strategies for TB Epidemics, *SIAM J. APPL. MATH. vol. 77 n.1, 2017, 82-107.*
- [5] *B. Ainseba, S. Anita and M. Langlais,* On the optimal control for a nonlinear age- structured population Dynamics model. *Electronic Journal of Differential Equations, vol.2002, n.28, 2002, 1-9.*
- [6] *S. Anita, M. Iannelli, M.-Y. Kim and E.-J. Park,* Optimal harvesting for periodic age- dependent population dynamics. *SIAM J. APPL. MATH., vol.58, n.5, 1998, 1648-1666.*
- [7] *S. Anita, V. Arnautu, V. Capasso,* An introduction to optimal control problems in life sciences and economics. *From Mathematical Models to Numerical Simulation with Matlab. Basel, Switzerland : Birkauser, 2011.*
- [8] *S. Anita and A- M. Mossneagu,* Optimal harvesting for age structured population dynamics with size dependent control. *Mathematical control and related Fields,*

2019, vol. 9, n. 4, p. 607.

- [9] V. Arnauld, Equations différentielles ordinaires. *Editions Mir, Moscou.*
- [10] T. T. Ashezua, N. I. Akinwande, S. Abdulrahman, R. O. Dayiwola, F. Kuta, Local stability analysis of an infection age Mathematical Model for tuberculosis Disease Dynamics. *J. Appl. Sci. Environ. Manage*, vol. 19, n.4, 2015, 665- 669.
- [11] P. Auger, C. Lett, J. C. Poggiale. Modélisation Mathématique en écologie. *Edition Dunod, Paris, 2010. ISBN 978-2-10-054829-3.*
- [12] A. Bahlaoui, H. Afif, K. Bennani, GH. Iraqui. Guide de lutte antituberculeuse. *Troisième édition.*
- [13] V. Barbu, M. Iannelli, Optimal control of population dynamics. *J. Optimal Theory Appl.*, 1999, vol. 102, n.1, 1-14.
- [14] S. Bentout, S.Djilali, T.M. Touaoula, A. Zeb, A. Atangana. Bifurcation analysis for a double age dependence epidemic model with two delays. *Nonlinear dynamics*, 2022, 1-15.
- [15] S. Bentout, S.Djilali, S. Kumar, T.M. Touaoula, Treshold dynamics of difference equations for SEIR model with nonlinear incidence function and infinite delay, *Europ. Phys. J. Plus*, vol. 136, n.5, 2021, 587.
- [16] S. Bentout and T.M. Touaoula, Global analysis of an infection age model with a class of nonlinear incidence rates. *J. Math. Anal. Appl.*, 434, 2016, 1211-1239.
- [17] S. Bentout and T.M. Touaoula, Mathématiques Appliquées à quelques modèles épidémiologiques. *Thèse de Doctorat, université de Tlemcen, 2016.*
- [18] S. Bentout, A. Tridane, S. Djilali, T.M. Touaoula, Age structured Modeling of COVID-19 epidemic in the USA, UAE and Algeria. *Alexandria Engineering Journal*, 60, 2021, 401- 411.

- [19] *D. Bernouilli*, Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite variole et des avantages de l'inoculation pour la prévention. *Mém. Math. Phys. Acad. Roy. Sci., Paris*, 1766, 1- 45.
- [20] *D. Bernouilli*, Reflexions sur les avantages de l'inoculation. *Mercue de France* 1760, 173- 190.
- [21] *N. Bessonov, G.Bocharov, T.M. Touaoula, S.Trofimchuk, V.Volpert*, Delay reaction-diffusion equation for infection dynamics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, vol. 24, n.5, 2019.
- [22] *L. Bolzoni, E. Bonacini, C. Soresina, M. Groppi*, Time- optimal control strategies in SIR epidemic models. *Mathematical Biosciences*, vol. 292, 2017, 86-96.
- [23] *L. Bolzoni, E. Bonacini, R. D. Marca, M. Groppi*, Time- optimal control of epidemic size and duration with limited Ressources. *Math. Biosc.* vol. 315, 2019, p. 108232.
- [24] *I.Boudjema, T.M.Touaoula*, Global Stability of an infection and vaccination age- structured model with general nonlinear incidence. *J. Nonlinear Functional Analysis*, 2018, 1-21.
- [25] *F. Brauer*, Age infection in Epidemiology models. *Electronic Journal Differential Equations, Conference 12*, 2005, 29- 37.
- [26] *M. Brokate*, Pontryaguin's principle for control problems in age dependent population dynamics. *J. Math. Biology*, vol. 23, n.1, 1985, 75-101.
- [27] *C. Castillo, J. A. Gondim, M. Marchesin and M. Sabeti*, Assessing the efficiency of different control strategies for the coronavirus (COVID 19) epidemic. *arXiv : 2004. 03539*, 2020.
- [28] *C. Castillo-Chavez, Z. Feng.*, Mathematical models for the disease dynamics of the tuberculosis, 1996.

- [29] C. Castillo-Chavez, B. Song. Dynamical models of TB and their applications. *Math. Biosci. Eng.* 1, n.2, 2004, 361-404.
- [30] A. Chekroun, M. N. Frioui, T. Kuniya and T. M. Touaoula, Global stability of an age structured epidemic model with general Lyapunov functional, *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 16, n.3, 2019, 1525- 1553.
- [31] A. Chekroun, M. N. Frioui, T. Kuniya and T. M. Touaoula, Mathematical Analysis of an age structured heroin-cocaine epidemic model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems- B*.
- [32] Y. Chen, J. Yang and F. Zhang, The global stability for an SIRS model with infection age. *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 11, n.3, 2014, 449-469.
- [33] K. Das, B.S.N. Murthy, S.A. Samad, MHA. Biswas. Mathematical transmission Analysis of SEIR tuberculosis disease model. *Ke Ai Sensors International vol.2*, 100120, 2021.
- [34] G. Di Blasio. Nonlinear age- dependant population growth with history dependent birth rate. *Math. Biosci.* 10, 1979, 279- 291.
- [35] O. Diekmann, H. Heesterbeek et T. Britton. Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics. *Princeton Series in Teoretical and computational Biology Series Editor, Simon A. Levin. Princeton University, Princeton and Oxford, 2013*.
- [36] O.Diekmann; J.A.P. Heesterbeek and J.A.J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *J.Math. Biol.* 1990, 28, 365- 382.
- [37] S.Djilali, S. Bentout, S. Kumar, T.M. Touaoula, Approximating the asymptotic infectious cases of the COVID -19 disease in Algeria and India using a mathematical model. *International journal of Modeling, Simulation and scientific*

Computing, 2022.

- [38] S.Djilali, T.M. Touaoula, S.E. Miri, An Heroin Epidemic Model, very general Nonlinear Incidence, Treat Age, and Global Stability. *Acta Appl. Math.*, 152, 2017, 171-194.
- [39] X. Edmundo, De Jesus, C. Kaufman. Routh- Hurwitz criterion in the examination of eigenvalues of a system of non linear ordinary differential equations. *Phys. Rev. A*35, 5288. *American Physical Society, 1987.*
- [40] A.O. Egonmwan, D. Okuonghae. Analysis of a mathematical model for tuberculosis with diagnosis. *J. Appl. Math. Comput.*, 59 (1-2), 2019, 129-162.
- [41] M. Erdem, M. Safan, C. Castillo-Chavez, Mathematical Analysis of an SIQR influenza model with imperfect quarantine. *Bulletin of Math. Biology* vol. 79, n.1, 2017.
- [42] Z. Feng, M. Iannelli, et F. A. Milner, A two-strain tuberculosis model with age of infection. *SIAM journal on applied mathematics*, 2002, vol. 62, n.5, 1634-1656.
- [43] G. Feichtinger, G. Tragler, VM Velio, Optimality conditions for age structured control systems. *J. Math. Appl.*, vol. 288, n.1, 2003, 47-68.
- [44] M. N. Frioui, T. M. Touaoula and B. Ainseba, Global dynamics of an age structured model with relapse. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2020.
- [45] M. N. Frioui, Etude mathématique de quelques modèles épidémiologiques structurés en âge, *thèse de doctorat 2020.*
- [46] M.N. Frioui, S.E. Miri, T.M. Touaoula, Unified Lyapunov functional for an age-structured virus model with very general nonlinear infection response. *J. Appl. Math. Comput.* 58, 2018, 47-73.
- [47] D. P. Gao, and N. J. Huang. Optimal control analysis of a tb model. *Appl. Model*, 58 : 2018, 47-64.

- [48] D. Grass, J. P. Caulkins, G. Feichtinger, G. Tragler, D. A. Behraus, Optimal control of nonlinear Processes. *Berlino Springer, 2008.*
- [49] D. Greenhalgh, "Age-structured models and optimal control in mathematical equidemiology : a survey.", 2010, 174-206.
- [50] M. E. Gurtin and R. C. Mc Camy. Nonlinear age-dependent population dynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 54, 1974, 281- 300.
- [51] T. G. Hallam, S.A.Levin (EDS). Mathematical Ecology. An introduction. In *Biomathematics, vol. 17, Springer- Verlag, 1986.*
- [52] E. Hansen, T. Day, *Optimal control of epidemics with limited ressources. Journal of Mathematical Biology, vol. 62 n.3, 2011, 423-451.*
- [53] P. Hartman. Ordinary Differential Equations, *Wiley- Interscience, New- York, 1970.*
- [54] F.Z. Hathout, T. M. Touaoula and S. Djilali, Mathematical analysis of a triple age dependence epidemiological model with including a protection strategy. *Discrete Continuous Dynamical systems-B, 2022.*
- [55] S. Hota, F. Agosto, H.R. Joshi and S. Lenhart, optimal control and stability analysis of an epidemic model with education campaign and treatment. *In conference publications, American Institut of Mathematical Sciences, 2015, p. 621.*
- [56] M. Iannelli, *Mathematical Theory of Age- Structured Population Dynamics. Giardini Editori E Stampatori In Pisa, 1994.*
- [57] M. Iannelli, F. Milner, *The basic Approach to age structured population Dynamics : Models, Methods and Numerics. Lecture Notes on Mathematical Modelling in the life science 2017.*

- [58] *W. O. Kermack and A. G. McKendrick*, A contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1927, 115, 700- 721.
- [59] *W. O. Kermack and A. G. McKendrick*, A contribution to the Mathematical Theory of Epidemics 2. The problem of endemicity. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1932, 138, 55-83.
- [60] *W. O. Kermack and A. G. McKendrick*, A contribution to the Mathematical Theory of Epidemics 3. Further studies of the problem of endemicity. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1933, 141, 94-122.
- [61] *W.O.Kermack and A.G.McKendrick*, Contributions to the mathematical theory of epidemics 1, *Proc. R. Soc.*, 115, 1927, 700- 721.
- [62] *A. Khan, G. Zaman, R. Ullah and al.* Correction : Optimal control strategies for a heroin epidemic model with age- dependent susceptibility and recovery- age. *Aims Mathematics*, vol. 6 n.7, 2021, 7318-7319.
- [63] *A. Korobeinikov*, Lyapunov functions and global stability for SIR and SIRS epidemiological models with non-linear transmission. *Bull. Math. Biol.*, 68, 2006, 615-626.
- [64] *A. Korobeinikov*, A. Global Properties of Infectious Disease Models with Nonlinear Incidence. *Bull. Math. Biol.*, 69, 2007, 1871-1886.
- [65] *A. Kumar, P. K. Srivastava*, Role of Optimal screening and treatment on infectious diseases dynamics in presence of self protection of susceptible. *Differential equations and Dynamical systems*, 2019, 1-29.
- [66] *T. Kuniya*, Stability Analysis of an Age structured SIR model with a reduction method to EDOs, *Mathematics* 2018, vol. 6, n.9, 147.
- [67] *Sumni Lee, Hae Young Park, Hohyung Ryu and Jin Won Kwon.* Age Specific Mathematical Model for tb transmission Dynamics in South Korea. *Mathematics*,

vol.9 n.8, 804, 2021.

- [68] V. Lakshmikantham, S. Leela, and Martynyuk. Stability Analysis of Nonlinear Systems. Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1989.
- [69] J.P. LaSalle. The stability of Dynamical Systems, SIAM, Philadelphia, 1976. With an appendix : "Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations" by Z. Arstein, *Regonal Conference Series in Applied Mathematics*.
- [70] J.P. LaSalle. Stability of nonautonomous systems. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, A(1),, 1976, 83-91.
- [71] S. Lenhart and J. Workman. Optimal Control Applied to Biological Models. Boca Raton chapmal Hall/ CRC, 2007.
- [72] Lignes directrices unifiées de l’OMS sur la tuberculose. *Module 2 : Dépistage systématique de la tuberculose. Organisation Mondiale de la Santé 2022.*
- [73] l. l. Lin, C. P. Ferreira, B. Ainseba. Optimal Control of an age structured problem modelling mosquito plasticity. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 2019, vol. 45, 2019, 157-169.
- [74] Li Jiang , Lianwen Wang. Global analysis of tuberculosis dynamical model and optimal control strategies based on case data in the United states. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 422, 2022.
- [75] X.Li and J. Yong. Optimal control theory for Infinite Dimensional systems Birkhauser, Boston, 1995.
- [76] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer Verlag, 1971.*

- [77] J.Liu, T. Zhang. Global stability for a tuberculosis model, *math. comp. Model.*, 54, 2011, 836- 845.
- [78] P. Magal, C.C. McCluskey, G.F. Webb, Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infection-age model. *Applicable Anal*, vol. 89, n.7, 2010, 1109-1140.
- [79] P. Magal, S. Ruan, Theory and Applications of Abstract semilinear Cauchy problems, *Applied Mathematical sciences*, Springer, 2018.
- [80] P. Magal, X.-Q. Zhao, Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 37, 2005, 251-275.
- [81] P. H. Malthus. An Essay on the principle of population, (*First edit.*), London, 1987.
- [82] C. C. McCluskey Complete global stability for a SIR epidemic model with delay-distributed or discrete, *Nonlinear Anal*, 11,2010,55-59.
- [83] C. C. McCluskey Global stability for a SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay. *Math. Biosci. Eng.* 6, 2009, 603-610.
- [84] C.C. McCluskey, Global stability for a SEI epidemiological model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes. *Math. Biosci. Eng.* 9, 2012, 819-841.
- [85] C. C. McCluskey Global stability for a SIR epidemic model with delay and general nonlinear incidence, *Math. Biosci. Eng.*, 7, 2010, 837-850.
- [86] C.C.McCluskey, P.V. Driessche. Global analysis of two tuberculosis models. *J. Dyn. Diff. Equ.*, 16, 2004, 139-166.
- [87] A. G. Mc Kendrick. Applications of Mathematics to medical problems. *Pro. Edin- burgh Math. Soc.* 44, 1926, 98- 130.

- [88] A. Mengistu, P. Witbooi, Mathematical Analysis of TB model with vaccination and saturated incidence rate. *Hindawi Abstract and Applied Analysis volume 2020. Article ID 6669997, 10 pages, 2020.*
- [89] B. Miller, Preventive therapy for tuberculosis. *Med. Clin. N. Amer.*, vol. 77, n.6, 1993, 1263-1275.
- [90] K. Mischaikow, H. Smith and H. Thieme, Asymptotically autonomous semi-flows : chain recurrence and Lyapunov functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347, 1995, 1669- 1685.
- [91] D. Okuonghae and V.U. AIHIE. Optimal Control Measures for Tuberculosis Mathematical Models Including immigration and isolation of infective. *Journal of Biological systems*, vol.18 n.1, 2010, 17-54.
- [92] D. Okuonghae, S.E. Omosigho. Analysis of a mathematical model for TB : what could be done to increase case detection. *J. Theor. Biol.* 269, n.2011, 2010, 31-45.
- [93] S. Oluwaseun, and M. Tufail. "Optimal control in epidemiology." *Annals of Operations Research*, vol. 251, n.1-2, 2017, 55-71.
- [94] V. Pata. Fixed point Theorem and Applications. *Springer, UNITEXT*, vol. 116, 2019.
- [95] A. Perasso, Global stability and uniform persistence for an infection Load structured SI model with Exponential growth velocity. *Communication on pure and Applied Analysis*, vol. 18, n.1, 2019, 15- 32.
- [96] B. Perthame. Transport Equations in Biology. *Birkhauser Verlag, Basel Boston, Berlin*, 2007.
- [97] H. I. Smith, H. R. Thieme, Dynamical Systems and population persistence, *Graduate studies in Mathematics vol.118, AMS, 2011.*

- [98] *L. S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, R. V. Gankrelize and E. F. Mishchenko.* The mathematical Theory of optimal processes, *Wiley, New York, 1967.*
- [99] *H. Reinhardt,* Equations différentielles. Fondement et applications. *Bordas, 1982.*
- [100] *Hans L. Rieder.* Bases épidémiologiques de lutte antituberculeuse. *Union internationale contre la tuberculose et les maladies respiratoires. Première édition 1999.*
- [101] *A. Riitta, Dlod lo, Graine Brigden et Einar Heldal.* Prise en charge de la tuberculose : guide des éléments essentiels pour une bonne pratique. *Septième édition. Union internationale contre la TB et les maladies respiratoires. 2019.*
- [102] *Z. Sari, T. M. Touaoula, B. Ainseba,* Mathematical Analysis of an age structured epidemic model with a quarantine class. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena, vol. 16, 2021, p. 57.*
- [103] *E. Sinestrari.* Nonlinear age dependent population growth. *J. Math. Biol. 9, 1980, 331- 345.*
- [104] *H. l. Smith, H. R. Thieme,* Dynamical Systems and population persistence, *Graduate studies in Mathematics vol.118, AMS, 2011.*
- [105] *H.R. Thieme and C.Castillo-Chavez,* How may infection age dependent infectivity affects the dynamics of HIV/AIDS, *SIAM J. APPL. Math., 53, 1993, 1447-1479.*
- [106] *Tabagisme et observance du traitement antituberculeux. Revue des maladies respiratoires, vol. 33, n.2, 2016, 128- 144.*
- [107] *H. Tahir, A. Khan, A. Din, A. Khan, G. Zaman.* Optimal Control strategy for an age- structured SIR Endemic Model. *Discrete and continuous dynamical systems SERIES S, vol.14, n.7, 2021, 2535-2555.*
- [108] *E. Trélat,* Contrôle optimal : Theorie et applications. *Version électronique 2020.*

- [109] F. Wati, U. D. P. wati, F. Riyudha and H. Tasman, Optimal Control of a discrete age structured model for tuberculosis transmission. *Heliyon*, vol. 6, n.1, 2020, e03030.
- [110] B. Tsanu. Etude de quelques modèles épidémiologiques de métapopulations. Application au Paludisme et à la Tuberculose. *Mathématiques générales [math. GM]. Université de Lorraine, 2012. Français NNT : 2012LORR0055.*
- [111] I. Ullah, S.Ahmad, O. Al- Mdallal, Z.A. Khan, H. Khan, A. Khan. Stability analysis of a dynamical model of tuberculosis with incomplete treatment. *Adv. Diff. Equs.* 2020, n. 1, 2020, 1-14.
- [112] H. Waaler, A. Geser, S. Anderson. The use of the mathematical models in the study of the epidemiology of tuberculosis. *Am. J. Public Health Nations Health*, 52, 1962, 1002-1013.
- [113] S.R. Wallis, D. Okuongghae. Mathematical models of tuberculosis reactivation and relapse. *Front. Microbiol.*, 7, 2016, 1-7.
- [114] S. Whang, S. Choi, E. Jung. A dynamic model for TB transmission and optimal treatment strategies in South Korea. *J. Theor. Biol.* 279, n. 1, 2011, 120- 131.
- [115] G. Webb. Theory of Nonlinear Age Dependent Population Dynamics. *New York : Marcel Dekker, 1985.*
- [116] R. XU, X. Tian and F. Zhang, Global dynamics of tuberculosis transmission model with age of infection and incomplete treatment. *Advances in difference Equations* n. 242, 2017.
- [117] Y. Yang, et al. "Global stability and optimal control for a tuberculosis model with vaccination and treatment". *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, vol. 21 n. 3, 2016, p. 1009.

- [118] Y. Yang, J. Li, Z. Ma, L. Liu, Global stability of two models with incomplete treatment for tuberculosis, *Chaos, Solitons Fractals* 43, 2010, 79- 85.
- [119] Y. Yang, S. Ruan, D. Xia, Global stability of an age structured virus Dynamics Model with Beddington- Deangelis infection function, *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol.12, n.4, 2015.
- [120] Z. Yui, Y. Youguang and Z. Lu, Stability Analysis of an age structured SEIRS Model with time delay, 2020, article in open access.
- [121] https://fr.wikipedia.org/wiki/Robert_Koch#/media/Fichier:Robert_Koch.jpg
- [122] https://fr.wikipedia.org/wiki/Mycobacterium_tuberculosis#/media/Fichier:TB_Culture.jpg
- [123] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Mycobacterium_tuberculosis#/media/Fichier:Mycobacterium_tuberculosis_dans_expectorations_d'un_patient_infect%C3%A9_\(coloration_Ziehl-Nielsen\).jpg](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mycobacterium_tuberculosis#/media/Fichier:Mycobacterium_tuberculosis_dans_expectorations_d'un_patient_infect%C3%A9_(coloration_Ziehl-Nielsen).jpg)
- [124] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Tuberculose#/media/Fichier:Tuberculosis-x-ray-1.jpg>
- [125] https://fr.wikipedia.org/wiki/Mycobacterium_tuberculosis#/media/Fichier:Mycobacterium_tuberculosis_8438_lores.jpg
- [126] https://fr.wikipedia.org/wiki/Mycobacterium_tuberculosis
- [127] <http://www.who.int/tb/tbscreening>.

ملخص

العدوى SIRQ في هذه الاطروحة نهتم بدراسة نموذج رياضي لحالة وباء متطورة وفق الزمن ووفق عمر . الدراسة تتضمن مرحلتين في شكل جملة حركية بأربع متغيرات

المرحلة الأولى

الجملة الذي R_0 تتضمن تحليل سلوك تقاربي من خلال دراسة نظرية مرفقة ببرمجة حول استقرار مسار ومقارنته مع الوحدة. يتطلب حساب العدد

المرحلة الثانية

هي مرحلة المراقبة الحدية في حين تخضع الجملة الى مراقبة من نوع الكشف المبكر اخذا بعين الاعتبار استجابة كل المجتمع للمراقبة وعلما ان الجملة الحركية معرضة للانتكاس.

كلمات مفتاحية

حساب العدد المراقبة الحدية- R_0 --دراسة نموذج رياضي لحالة وباء متطورة وفق الزمن ووفق عمر العدوى-الاستقرار-

Résumé.

Un modèle épidémiologique du type SIR avec quarantaine et structure en âge d'infection est considéré dans cette thèse. L'analyse mathématique concerne : - La stabilité globale des trajectoires du modèle moyennant l'existence d'un attracteur compact. La construction de fonctions de Lyapunov appropriées suivie de simulations numériques ont montré que l'équilibre trivial est globalement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$, instable si $R_0 > 1$ au quel cas l'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable. – Le contrôle optimal consiste à maximiser le nombre de dépistés en minimisant le coût de dépistage avec le nombre d'infectés.

Mots clés.

Modèle épidémiologique structuré en âge d'infection, Stabilité, nombre de reproduction de base R_0 , fonction de Lyapunov, contrôle optimal.

Abstract.

A class of SIR epidemiological models with quarantine and the infection age structure is considered in this thesis. The mathematical analysis is concerned by : - The global stability of the trajectoires is proved by showing the existence of a compact attractor. The construction of an appropriate Lyapunov functions and some numerical simulations show that the free equilibrium is globally asymptotically stable if $R_0 < 1$, instable si $R_0 > 1$ whenever the endemic equilibrium is asymptotically stable. – The optimal control problem consists on maximazing the screened individuals and minimizing the cost of screening strategy with the density of the infected individuals.

Key words.

An infection age structured model, stabilité, basic reproduction number R_0 , Lyapunov functional, optimal control.