

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bakr BELKAID – Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de Magister
Ecole Doctorale de Mécanique et de Construction
Option : *Dynamique des structures*

Thème

Etude du couplage fluide- structure

Application d'une structure plaque immergée

Présenté par

BELHADJ TAHAR ZINEB

Soutenu devant le jury :

Président :	Mr. SEBBANE. O	MCA	U.A.B.B Tlemcen
Encadreur :	Mr. HADJOUI. A	Pr	U.A.B .B Tlemcen
Co-encadreur:	Mr. MEFTAHA. K	MCA	U.A.B.B Tlemcen
Examineur:	Mr. BENACHOUR. M	MCA	U.A.B.B Tlemcen
Examineur:	Mr. BOUKHALFA. A	MCA	U.A.B.B Tlemcen

Juillet 2012

Résumé

L'étude présentée dans ce mémoire concerne l'étude du comportement dynamique d'une plaque mince immergée totalement ou partiellement dans un fluide. L'immersion de la plaque dans le fluide crée une interaction « fluide-structure » qui se traduit par une augmentation de la masse du système connue sous le nom de masse ajoutée.

Les lois de comportement ont été établies par la relation déplacements-contraintes pour la plaque, et les équations de conservation de la masse et de la quantité du mouvement pour le fluide et le couplage du à l'interaction fluide structure est pris en compte en considérant la condition de non glissement au niveau de l'interface.

La modélisation de la plaque est faite par la méthode des éléments finis et celle du fluide par la méthode des éléments aux frontières (BEM).

Les équations différentielles du mouvement de la structure dans l'air ont été établies. La détermination des équations de couplage nous ont permis de calculer la masse ajoutée générée par le fluide, et par conséquent aboutir à un système d'équations différentielles qui caractérise le comportement dynamique des deux milieux.

Les fréquences propres de la plaque immergée correspondant aux six premiers modes sont calculées à l'aide d'un programme élaboré sous Matlab.

Après avoir étudié la convergence et validé le programme avec plusieurs articles, plusieurs exemples ont été étudiés. L'étude de ces exemples nous ont permis de déterminer l'influence des paramètres physiques et géométriques de la plaque immergée.

Parmi ces paramètres nous citons la variation de la longueur d'immersion de la plaque dans le fluide, des rapports épaisseur sur la longueur, largeur sur la longueur, hauteur d'immersion sur longueur

Mots clés : éléments finis, équations intégrales, équation de Laplace, fonction de Green, méthode de singularités, couplage, masse ajoutée.

Summary

The study presented in this memory relates to the study of the dynamic behavior of a thin plate immersed completely or partially in a fluid. The immersion of the plate in the fluid creates an interaction “fluid-structure” which results in an increase in the mass of the system known under the name of added mass.

The laws of behavior were established by the relation displacement-constraints for the plate, and the conservation equations of the mass and the quantity of the movement for the fluid and the coupling of with the fluid interaction structure is taken into account by considering the condition of nonslip on the level of the interface.

The modeling of the plate is made by the finite element method and that of the fluid by the boundary elements method (BEM).

The differential equations of the movement of the structure in the air were established. The determination of the equations of coupling enabled us to calculate the added mass generated by the fluid, and consequently to lead to a system of differential equations which characterizes the dynamic behavior of the two mediums.

The Eigen frequencies of the immersed plate corresponding to the first six modes are calculated using a program worked out under Matlab.

After having studied convergence and having validated the program with several articles, several examples were studied. The study of these examples enabled us to determine the influence of the physical and geometrical parameters of the immersed plate. Among these parameters we quote the variation in the length of immersion of the plate in the fluid, of the thickness reports/ratios on the length, width over the length, height of immersion over length.

Key words: finite elements, integral equations, equation of Laplace, function of Green, method of singularities, coupling, and added-mass.

ملخص

الدراسة التي قدمت في هذه الرسالة تقوم بدراسة سلوك الحركي لوحة رقيقة مغمورة كلياً أو جزئياً في السوائل. وغمر اللوحة في السائل يخلق التفاعل "السائل هيكل" والذي ينتج عنه زيادة في الكتلة للنظام المعروف باسم كتلة المضافة.

وقد وضعت المعادلات التأسيسية بواسطة الضغط المتعلقة بالسفر لوحة، ويؤخذ في معادلات حفظ الكتلة وكمية الحركة للمائع واقتران والتفاعل هيكل السوائل في الاعتبار من خلال النظر في لا للانزلاق في حالة واجهة.

تم وضع نماذج طريقة العناصر المحددة للوحة وطريقة الأسلوب العناصر الحدود السوائل (BEM). تم تحديد المعادلات التفاضلية لحركة الهيكل في الهواء. اقتران سمح لنا تحديد معادلات لحساب كتلة المضافة الناتجة عن السوائل، ويؤدي بالتالي إلى نظام من المعادلات التفاضلية التي يتسم بها سلوك ديناميكي وسطين الاثنين.

ويتم حساب الترددات الطبيعية لصفحة مغمورة لأوضاع الستة الأولى باستخدام برنامج وضعت في .

Matlab

بعد دراسة التحقق من صحة البرنامج مع العديد من العناصر، وقد تم دراسة العديد من الأمثلة. وسمحت دراسة هذه الأمثلة لنا لتحديد تأثير العوامل الفيزيائية والهندسية للوحة مغمورة. من بين هذه المعايير نذكر تغيير معامل طول على العرض، غمر اللوحة في السائل على الطول، و خشونة على العرض.

كلمات مفاتيح:

العناصر المحددة، العناصر المحددة، معادلة لابلاس، دالة كرين، وأسلوب من المزايا الفردية، اقتران، الكتلة المضافة.

Nomenclature

W	: champ de déplacements respectivement selon l'axe X et l'axe Y
W_i	: déplacement selon l'axe Z correspondant au nœud i
$W_{i,x}$: première dérivée de déplacement transversal par rapport à l'axe X au nœud i
$W_{i,y}$: première dérivée de déplacement transversal par rapport à l'axe Y au nœud i
h	: épaisseur de la plaque
a	: longueur de la plaque
b	: largeur de la plaque
ω	: fréquence de vibration de la plaque en rad/sec
ρ_s	: densité de la structure
ρ_f	: densité du fluide
E	: module de Young
ν	: coefficient de Poisson
$[K]^e$: matrice de rigidité élémentaire
$[M]^e$: matrice masse élémentaire
$[M_a]$: matrice de masse-ajoutée
Φ	: fonction du potentielle de vitesse
G	: fonction de Green
Ψ	: Fonction de pondération
Γ_L	: la surface libre
Γ_L	: la surface libre
Γ_{SF}	: la surface de contact avec un solide (interface)
$\sigma(p)$: la densité surfacique de sources
$\mu(p)$: densité surfacique de doublets normaux

- Σ : la surface d'une sphère entourant entièrement le domaine
- n : la normale à une surface
- Ω_i : domaine intérieur du solide
- Ω_e : domaine extérieur du solide
- r : distance entre le point source et premier du segment (doublet normaux)
- $[S]$: matrice à coefficients d'influence de source
- $[D]$: matrice à coefficients d'influence de doublets normaux
- V_n : vitesse normale

Liste des figures

Figure 1-1 : schématisation générale du problème structure	12
Figure 1-2 : Description d'une plaque rectangulaire.....	13
Figure 1-3 : Représentation des efforts tranchants et moments pour un élément de plaque (dx, dy).....	16
Figure 1-4 : schémas des déplacements pour la théorie de Mindlin	17
Figure 1-5 : Schématisation générale du problème structure.....	24
Figure 1-6 : Schématisation générale du problème structure-fluide.....	25
Figure 2-1 : géométrie de l'élément fini et vecteur nodal de déplacement au repère X, Y, Z.....	27
Figure 3-1 : Schéma général pour l'établissement de la représentation de la fonction de Green.....	36
Figure 3-2 : Représentation d'un milieu intérieur et extérieur.....	38
Figure 3-3 : Représentation géométrique des coordonnées en fonction de x et ksi...	42
Figure 3-4 : Représentation d'un point de source et d'un élément linéaire à la Frontière.....	45
Figure 4-1 : Schéma de maillage et de numérotation de la structure	50
Figure 5-1 : Plaque partiellement immergée	55
Figure 5-2 : Représentation des six premières formes modales vibratoires d'une Plaque rectangulaire par éléments finis (sur matlab) : (a) mode 1, (b) Mode 2, (c) mode 3, (d) mode 4, (e) mode 5, (f) mode 6,.....	60
Figure 5-3 : Représentation des six premières formes modales vibratoires d'une plaque rectangulaire cantilever par éléments finis (cas dans le vide).....	61
Figure 5-4 : Représentation des six premières formes modales vibratoires d'une plaque rectangulaire cantilever par éléments finis (immergée dans un fluide).....	61

Figure 5-5 : Représentation de la variation de la fréquence en fonction du rapport hauteur d'immersion/longueur (d/a) pour les six modes, (a) mode 1, (b) mode 2, (c) mode 3, (d) mode 4, (e) mode 5, (f) mode **65**

Figure 5-6 : Variation de la fréquence pour les six premiers modes en fonction de la variation du rapport a/b et trois rapports h/b , pour $a/d=0.5$. — $h/b=0.02$; --- $h/b=0.06$; $h/b=0.12$ **69**

Liste des tableaux

Tableau 5-1: convergence des fréquences (HZ) en fonction du maillage.....	57
Tableau 5-2: valeurs des paramètres de fréquence.....	57
Tableau 5-3: valeurs des fréquences naturelles (Hz)	57
Tableau 5-4 : valeurs des fréquences (Hz) pour la plaque partiellement ou totalement Immergée	64
Tableau 5-5 : Fréquences pour les six premiers modes pour cinq valeurs de a/b $h/b=0.002, h/b=0.006, h/b=0.012$	67

Sommaire

Introduction générale	1
Revue bibliographique	4
Chapitre 1 : formulation mathématique	
A : Equations du solide	8
1-1 Equations mécaniques du solide.....	8
1.1.1. Equations locales :.....	8
1.1.2. Conditions aux limites	11
1-2 Théorie des plaques : modèles de plaques.....	13
1-2-1 Généralités:.....	13
1-2-2 Théorie des plaques mince : modèle de Love-kirchhoff...14	
1-2-2 Théorie des plaques épaisses :	
modèle de Reissner-Mindlin	17
B : Equations de fluide	19
1-3 Equations en mécanique des fluides	19
1-4 Conditions aux limites	22
I-4-1 Condition de surface libre sur Γ_L	22
I-4-2 conditions à l'infini	23
I-4-3 conditions de glissement sur les parois du solide.....	23
C : Couplage	24
Chapitre 2 : Mises en équations modélisation numérique	
2-1 Introduction.....	26
2-2 Discrétisation par la méthode des éléments finis	26
2-3 calcul du champ de déplacements :.....	27
2-4 Champ de déformations et de contraintes:....	29

2-5 Matrice masse et matrice de rigidité et de masse.....	30
2-6 Formulation discrète du problème aux valeurs propres.....	31
2-7 Fonctions de forme standards	32

Chapitre 3 : Equations intégrales et méthode de singularités

3-1 Introduction	34
3-2 Formulation intégrale	35
3-2-1 Intégrale de Stieltjes.....	38
3-2-2 Equation intégrale	38
3-1-2-1 Problème intérieur.....	39
3-1-2-2 Problème extérieur.....	39
3-3 Méthode des singularités et Solution de l'équation de Laplace.....	40
3-3-2 Distribution mixte de Green –domaine extérieur	41
3-3-4 Distribution mixte de green sur Γ_{SF}	42
3-4 Résolution et discrétisation.....	43
3-5 Méthodes de calculs des équations intégrales pour un problème à deux dimensions.	44
3-6 Couplage entre le solide et le fluide :.....	46
3-6-1 Définition du couplage :.....	46
3-6-2 mise en équation du couplage	47

Chapitre 4 : Organisation de la programmation

4-1 Introduction.....	49
4-2 Description du programme	49
4-3 Résolution.....	52
4-4 : Organigramme	54

Chapitre 5 : Résultats et interprétations

5-1 Introduction	55
5-2 Validation du programme	55

5-3 Tracé des formes propres.....	58
5-4Influences des paramètres géométriques.....	63
Conclusion.....	72
Annexes	73
Références bibliographique	

Introduction Générale

L'interaction structure-fluide est une branche de la mécanique caractérisant les propriétés physiques d'un solide interagissant avec un fluide environnant. Dans cette interaction aucun composant du système ne peut être négligé. Généralement, dans le domaine industriel, on focalise de plus en plus sur la conception de structures souples et légères, mais soumises à des chargements fluides fluctuants, parfois assez importants. Le comportement résonant des différentes structures planes ont été la préoccupation des constructeurs de navires pour de nombreuses années, dans ce but, des efforts considérables ont été déployés pour l'étude vibratoire des plaques et coques partiellement ou totalement immergées dans le fluide.

En mécanique des fluides, le solide environnant est souvent considéré comme une simple frontière du milieu fluide étudié, d'un autre côté, dans la mécanique des solides le fluide n'a que peu d'influence sur la dynamique du solide. Lorsque la dynamique d'un solide est couplée à la dynamique d'un fluide, quelques phénomènes physiques sont observés et mis en évidence, on cite entre autres les phénomènes de masse ajoutée, le couplage de modes, les instabilités dues aux flottements et aux flambage etc.... On retrouve ces phénomènes d'interaction dynamique dans de nombreux problèmes technologiques, tels que l'aéronautique, le génie civil (barrage etc...), maritime (bateaux, offshore Plateforme, etc.), électronucléaire et biomécanique, d'où la nécessité de tenir compte de la contribution du fluide et du solide (structure) ensemble afin d'être modélisés de façon correcte, on parle alors de couplage.

L'interaction structure-fluide apparait systématiquement dès qu'une structure se trouve en contact avec un fluide. Le mouvement des particules du fluide, au voisinage de la structure, génère une variation de pression, on parle alors de « couplage » entre les deux composants du système physique.

Il faut noter que la résolution de ce genre de problème de couplage dépend du milieu que l'on veut privilégier (le fluide ou bien la structure), le transfert d'informations se fera du milieu secondaire vers le milieu primaire en d'autres termes des échanges d'énergie mécanique se produisent dans les deux sens :

- Le fluide exerce des efforts sur la structure en mouvement, ce qui modifie la dynamique de la structure.
- La structure impose des déplacements sur le fluide et modifie ainsi les caractéristiques de l'écoulement du fluide.

Ce couplage s'opère au niveau de l'interface, il induit sur la structure une certaine force d'inertie et en utilisant le principe de la continuité des contraintes et des vitesses à l'interface fluide-structure, on montrera que l'effet du fluide sur le solide génère une masse que l'on appelle « masse ajoutée » qui est « liée » au système mécanique et se déplace solidairement avec lui. Autrement elle sera additionnée à la masse du solide.

Dans le présent travail la structure sera considérée comme milieu primaire, ainsi les variables relatives au fluide seront éliminées au profit des variables de la structure vibrante.

On s'intéresse à l'étude du comportement dynamique d'une plaque mince immergée dans un fluide parfait irrotationnel incompressible. Cette étude permettra de déterminer les fréquences de vibration d'une plaque mince placée dans l'air, puis immergée dans le fluide.

La résolution analytique du problème étant assez difficile et même parfois impossible vu l'inhomogénéité du milieu étudié, il est nécessaire d'établir une formulation adaptée pour la résolution des équations structure-fluide, en utilisant des méthodes numériques adéquates.

Dans ce présent travail, notre choix fut porté sur le couplage « *élément finis- éléments aux frontières* » : la méthode des éléments finis pour caractériser la structure et éléments aux frontières ou boundary element method (BEM) pour modéliser le fluide, cette méthode conviennent parfaitement pour des milieux illimités. Finalement on est ramené à résoudre un système d'équations différentielles aux valeurs et vecteurs propres. On remarque que la BEM couplée avec la méthode des éléments finis modélise correctement le couplage entre le solide et le fluide, cependant c'est une méthode numérique assez lourde et qui nécessite un outil mathématique et informatique assez large.

Notre travail se divise en cinq parties principales:

Dans le premier chapitre, seront exposées les équations physiques générales régissant la dynamique d'un corps solide, suivi d'un rappel sur la théorie des plaques, ainsi que les

lois de la mécanique des fluides. Par la suite nous poserons les hypothèses de petits mouvements et petites déformations.

Dans le second chapitre, nous procédons à La formulation du problème vibratoire d'une plaque rectangulaire en établissant le système des équations différentielles. Les matrices de masse et de rigidité sont calculées par intégration exacte en se basant sur la théorie classique des plaques et en utilisant la méthode des éléments finis.

Le chapitre trois sera consacré à l'élaboration de la méthode des équations intégrales pour le fluide incompressible parfait non visqueux en milieu extérieur. Les différentes étapes de la formulation par la BEM y sont reportées et on traitera la fonction de Green qui est la base mathématique des équations intégrales. Un paragraphe s'attache particulièrement à une discussion sur la problématique cruciale concernant la modélisation en deux dimensions (2D) et en trois dimensions (3D).

A partir de la Boundary Element Method, nous avons pu déterminer des matrices appelées matrices à coefficients d'influence, qui utilisent les fonctions de forme du solide, Ces dernières nous ont permis de calculer la masse ajoutée due au fluide. En additionnant cette grandeur à la masse du solide dans le système d'équations différentielles relatives à la plaque non immergée, nous obtenons un nouveau système d'équations différentielles permettant la caractérisation dynamique de la plaque immergée dans le fluide, aboutissant finalement à un problème vibratoire aux valeurs propres.

Dans le chapitre quatre, nous avons présenté une description du programme élément finis élaboré sous MATLAB. Nous avons validé notre programme en montrant que l'élément rectangulaire utilisé converge.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté plusieurs exemples à travers lesquels nous avons étudié l'influence des différents paramètres géométriques sur les caractéristiques dynamiques de la structure, tels que la hauteur de l'immersion et l'épaisseur de la plaque.

Nous terminons par une conclusion générale et des perspectives futures à ce travail.

Revue bibliographique

Le comportement résonant des différentes structures planes a été la préoccupation des constructeurs navals, aéronautiques, et les industries mécaniques pour de nombreuses années, dans ce but des efforts considérables ont été déployés pour la modélisation et l'étude vibratoires des plaques et coques partiellement ou totalement immergées dans le fluide.

Les premiers travaux dans le domaine d'interaction fluide-structure ont été développés au dix-neuvième siècle par Rayleigh [32] et Lamb [28]. Ces travaux constituent la théorie de base du comportement d'un fluide à l'intérieur d'une coque cylindrique ou sphérique. Dans les années soixante du siècle dernier, Berry et Reissner [5] ont étudié le comportement d'une coque cylindrique remplie de fluide sous pression. Les travaux de Lindholm et al [30] ont par ailleurs traité le cas des vibrations d'une coque cylindrique partiellement remplie de liquide. Les travaux de Coale et Nagano [11] ont par contre calculé les modes axisymétriques d'une coque cylindrique jointe à une coque hémisphérique toutes les deux remplies de liquide. Lakis et Paidoussis [27] ont développé un élément fini hybride circonférentiel basé sur la théorie classique des coques pour l'analyse du comportement dynamique d'un réservoir cylindrique vertical partiellement rempli de liquide. Lindholm et al (1965) [31] ont calculé expérimentalement les fréquences de résonance des plaques cantilever totalement ou partiellement immergées dans l'eau. Cette dernière étude a été confrontée aux résultats théoriques, ce qui a permis d'évaluer l'action du liquide sur la structure.

Nombreux sont les travaux qui ont contribué à la compréhension de l'interaction fluide-structure ces trente dernières années. On cite les travaux de :

Le Meyerhoff (1970) [37] a pu calculer la masse ajoutée aux structures minces immergées dans un fluide infini. Il a décrit l'écoulement potentiel autour des plaques rectangulaires au moyen d'une distribution de singularités. Liang et al (2001) [29] ont adopté une formulation empirique de la masse ajoutée afin de déterminer les fréquences et les modes propres des plaques en porte-à-faux submergées, leurs prévisions numériques ont été comparées aux données expérimentales.

Cheng et Zhou 2000 [9] ont calculé les fréquences naturelles d'une plaque formant la base d'un réservoir rectangulaire découvert rempli de liquide. L'effet de la surface libre du fluide n'a pas été considéré. La solution analytique a été basée sur la méthode de Ritz pour l'analyse du système fluide-structure. Le cas où la plaque est une partie intégrante du fond rigide de réservoir a été considéré, cela permet d'étudier le cas de plaques en contact avec un domaine infini.

Le cas de plaque circulaire composant la base d'un réservoir cylindrique rigide rempli de fluide a été étudiée par Cheng et Zhou 2002 [10]. L'effet de la surface libre a été considéré. Après avoir calculer la solution exacte de potentiel de vitesse, la méthode de Galerkin a été utilisé pour calculer les fréquences d'interaction fluide-structure.

Mitra et Sinhamahapatra [41] ont étudié le couplage de ballonnement linéaire de liquide dans un conteneur élastique. Ils ont calculé les fréquences de ballonnement de fluide en considérant le réservoir rigide et ensuite ils ont étudié la réponse forcée du système solide-fluide. Ils ont utilisé des éléments finis bidimensionnels pour le fluide et des éléments unidimensionnels pour le réservoir en employant l'approche de Galerkin avec des résidus pondérés.

Jeong et al (2004) [26] ont étudié le cas de deux plaques rectangulaires identiques, parallèles et couplées avec le mouvement du fluide, les deux plaques sont encastrées aux parois rigides d'un conteneur entourant le fluide idéal incompressible et supportant les deux plaques encastrées sur les quatre cotés. Les modes de vibration transversale en phase et en antiphase ont été étudiés. Les fréquences naturelles de couplage ont été obtenues en utilisant la méthode de Rayleigh [44].

La méthode des éléments finis a été également appliquée pour résoudre les problèmes d'interaction de fluide-structure pour les plaques élastiques complètement immergés. D'autre part, Fu et Price(1987) [15] ont étudié le comportement dynamique des plaques en porte-à-faux vertical ou horizontal totalement ou partiellement immergé dans le fluide, dans leur analyse, ils ont calculé le chargement du liquide généré et évaluer les influences de la surface libre et de la longueur submergée sur les caractéristiques dynamiques.

Parmi les méthodes numériques les plus efficaces et les plus couramment utilisées pour traiter les problèmes fondamentaux concernant les matériaux, on notera celles basées sur les différences finies (FD), les éléments finis (FEM), les éléments finis de frontières (Boundary Element Method ou BEM). Il faut citer que la BEM est une technique numérique développée depuis le début des années soixante du vingtième siècle. Elle est fondée sur la théorie plus ancienne celle des équations intégrales de frontière (Boundary Integral Equation ou BIE). Les premiers travaux dans le domaine d'interaction fluide–structure exploitant la BEM furent réalisés en 1945 par Rayleigh [32] et Lamb [28].

Certaines des représentations intégrales peuvent être transformées en utilisant des identités mathématiques ainsi leur dimensionnalité est réduite d'une, impliquant les quantités inconnues seulement sur la frontière. Ce type spécial d'équations intégrales s'appellent les équations intégrales de frontière (BIE) et fournissent parfois une manière très commode de représenter un phénomène physique.

Les principes fondamentaux des équations intégrales de frontière ont été présentés dans la mécanique continue par Fredholm (1903) [14] et Muskhelishvili (1953) [39] et Kupradze (1965) [25] pour l'élasticité. Un intérêt pour les équations intégrales aux frontières a commencé à se développer, quelques tentatives de résolution sont apparues. La première est due à Kellogg (1953) [21], Hess et Smith (1967) [18] et Massonet (1965) [34].

Bien qu'au début l'utilité de la théorie de Fredholm [14] pour résoudre l'équation intégrale ait été limitée aux investigations théoriques, l'arrivée des ordinateurs à grande vitesse a transformé la solution numérique des BIE en réalité. Peu après, la méthode d'élément de frontière (BEM) ou la méthode d'équation intégrale de frontière (BIEM) est devenue une des manières préférentielle pour résoudre les équations intégrales.

Nous comptons utiliser la méthode des éléments finis (MEF) pour analyser la structure et la méthode des éléments finis aux frontière (BEM) qui nos permettra de déterminer la masse ajoutée, et de réaliser le couplage entre les deux milieux, cette méthode fut utilisée par Peseux [43].

Chapitre 1

Formulation mathématique

Chapitre 1 : Formulation mathématique

L'étude du mouvement d'un corps fait introduire divers paramètres qui le décrivent, d'où la nécessité d'examiner la conservation de certaines quantités pendant ce mouvement, comme la masse, la quantité de mouvement et le moment cinétique. Dans ce contexte, et face à un problème typique de la mécanique des solides, on s'intéresse au calcul des déplacements, des déformations et des contraintes. La contrainte est le paramètre qui caractérise l'interaction mécanique d'un corps avec son environnement. Cette contrainte est la cause du mouvement, d'où la nécessité d'une formulation mathématique. Plusieurs théories ont été développées et sont actuellement utilisées en ingénierie. Chacune de ces approches vise à modéliser certains aspects spécifiques du comportement des matériaux.

Nous donnons dans, la première section de ce chapitre une description mathématique des équations générales qui traduisent le comportement du solide, représenté par les deux modèles d'états de contraintes planes ou d'état de déformations planes, ces équations sont appliquées dans la théorie des plaques. La deuxième section est consacrée aux équations régissant le milieu fluide, suivit d'une troisième consacrée au couplage des deux milieux.

A : Equations du solide**1-1 Equations mécaniques du solide :****1-1-1 Equations locales :**

En prenant l'hypothèse des petites perturbations en élasticité linéaire [4]. On se place dans un repère galiléen ou absolu. A chaque instant t , pour toute partie Ω_s d'un système matériel S , le torseur dynamique de Ω_s est égal au torseur des forces extérieures s'exerçant sur Ω_s .

- les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}}_c + \vec{f} = \rho_s \vec{a} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (1-1)$$

Où :

- $\bar{\sigma}_c$ est le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy,
- \vec{f} est le vecteur des répartitions volumiques de forces,
- $\vec{a}(M) = \frac{d^2 \vec{U}}{dt^2}$ est l'accélération du point M, dont le champ des déplacements est

$$\vec{U}(M) = u(M)\vec{e}_1 + v(M)\vec{e}_2 + w(M)\vec{e}_3 \quad (1-2)$$

- Lois de comportement :

Le vecteur des déformations associé au tenseur des petites déformations est donné par [4] :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \vec{U}(M) + (\overline{\text{grad}})^t \vec{U}(M) \right) \quad (1-3)$$

Où le gradient du déplacement est un tenseur symétrique.

Les déformations de la structure induisent un champ de contraintes dans la structure, représentées par le tenseur des contraintes $\sigma_{ij}(\mathbf{U})$, l'hypothèse du comportement élastique de la structure permet d'écrire la relation entre les déformations et les contraintes dans la structure sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{U}) = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{U}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) \quad (1-4)$$

D'où les équations définissant la loi de comportement :

$$\sigma = \frac{-\lambda}{2\mu(2\lambda+2\mu)} \text{tr} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathbf{I} + \frac{\sigma}{2\mu} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathbf{I} + \frac{(1+\nu)}{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1-5a)$$

Ou son inverse :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \text{tr} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathbf{I} + \frac{E}{(1+\nu)} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1-5b)$$

\mathbf{I} : matrice unité

λ, μ : coefficients de Lamé

ν : coefficient de poisson

E : coefficient de Young

Le problème plan à deux dimensions est déduit du problème à trois dimensions, toutes les variables sont indépendantes du troisième axe et ne sont fonctions que des deux

autres coordonnées x, y ; on parle alors d'état de contraintes planes ou de déformations planes.

Dans les deux cas de figure, états de contraintes planes et de déformations planes, nous pouvons tirer profit des situations les caractérisant pour rendre les calculs plus faciles.

Etat de déformations planes :

Le modèle s'applique à un corps de section quelconque, constante, infiniment long, conventionnellement d'axe z , encastré à ses deux extrémités. Le corps est soumis à un chargement orthogonal à z uniforme sur toute sa longueur. Dans ces conditions, aucune dilatation suivant l'axe z n'est possible : chaque tranche ne se déforme que dans son plan.

Dans ce cas, le déplacement dans la direction z peut être considéré comme nul. Les dérivées des déplacements dans cette même direction sont nulles, c'est-à-dire que :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

Par contre il existe des contraintes σ_{zz} qui contrebalancent l'effet de Poisson c'est-à-dire la tendance à la dilatation suivant l'axe z . la contrainte qui retient chaque tranche dans le plan vaut :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Etat de contraintes planes:

Une structure plane et mince est en état de contraintes planes, quand les charges sont appliquées dans son plan. L'épaisseur de la structure est toujours très petite par rapport aux deux autres dimensions et est symétrique de part et d'autre du plan (x, y), appelée surface neutre.

Les composantes du vecteur contraintes $\{\sigma\}$ associé au tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}_c$ sont :

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\} \quad (1-6)$$

Ainsi les contraintes $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy}$ deviennent nulles. La déformation ε_{zz} n'est pas nulle par effet de poisson. Elle peut être calculée en utilisant l'hypothèse $\sigma_{zz} = 0$ i.e.

$$\varepsilon_{zz} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \quad (1-7)$$

La loi de Hooke reliant le vecteur de contraintes au vecteur de déformations est :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1-8)$$

Ces deux approches sont basées sur des hypothèses fondamentalement différentes et ne s'appliquent donc pas aux mêmes structures. Elles sont déterminées à partir des équations (1-5a) et (1-5b).

Au niveau du calcul, les deux approches des états de contraintes planes et de déformations planes se différencient uniquement par le choix de la loi de comportement [D].

Pour un état de contraintes planes la matrice d'élasticité est:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (1-9)$$

Pour un état de déformations planes la matrice d'élasticité est:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1+2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (1-10)$$

Nous pouvons écrire ces composantes sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

Composantes du vecteur contraintes

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

1-1-2 Conditions aux limites

La résolution des équations régissant le comportement d'une structure, nécessite l'introduction des conditions aux limites de la structure.

Pour un solide occupant un domaine Ω_S dans \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega_S$, ou on peut diviser la surface $\partial\Omega_S$ en deux parties $\partial\Omega_S = \partial\Omega_{S0} \cup \partial\Omega_{S\sigma}$. Figure (1-1).

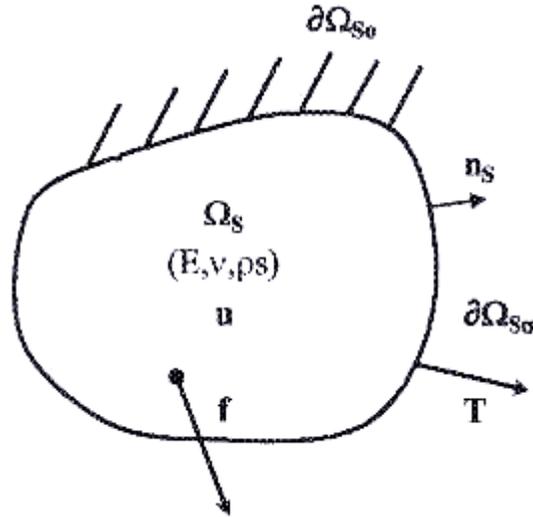


Figure1-1 Schématisation générale du problème structure

Le mouvement de la structure est ainsi décrit par un champ de déplacement $u = (u_i)$ défini en tout point x du domaine Ω_S , les déformations sont représentées par le tenseur des déformations $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$. Et le tenseur des contraintes $(u) = \{\sigma_{ij}(u)\}$.

Avec les hypothèses précédentes, la relation fondamentale de la dynamique pour le milieu continu structure s'écrit :

$$-\omega^2 \rho_S u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1-13)$$

Avec la relation liant déplacement/déformation et la loi de comportement déformation/contraintes données respectivement par (1-3) et (1-4) l'équation locale précédente est assortie des conditions aux limites suivantes :

$$\vec{u}_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{S0} \quad (1-14)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j^S = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{S\sigma} \quad (1-15)$$

Qui traduisent le fait que la structure est bloquée sur $\partial\Omega_{S0}$ et libre d'effort sur $\partial\Omega_{S\sigma}$.

1-2 Théorie des plaques : modèles de plaques

1-2-1 Généralités

Par définition une plaque est une structure tridimensionnelle plane, caractérisée par une surface de référence plane (plan x, y) et par une épaisseur notée $h(x, y)$ bien plus petite devant les autres dimensions, Le plan moyen de la plaque est défini comme étant le plan parallèle aux faces de la plaque et partageant l'épaisseur en deux. Figure (1-2)) [2].

Cette caractéristique particulière, est à la base des simplifications des équations de la mécanique des milieux continus tridimensionnels qui conduisent aux modèles classiques des milieux minces c.à.d. un problème bidimensionnel.

Dans ces deux modèles de plaques, on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire, ce qui correspond à supposer que les déformations et les déplacements sont petits.

Les axes de coordonnées sont choisis de telle manière que le plan xy coïncide avec le plan moyen et l'axe z sera perpendiculaire à ce dernier.

On dit qu'une plaque travaille à la flexion quand les charges auxquelles elle est soumise sont parallèles à l'axe z (perpendiculaire au plan moyen) et que les déplacements sont dans le plan transversal, appelée flèche « w » fonction des coordonnées x et y figure (1-2).

La vibration en flexion des plaques est modélisée essentiellement par deux théories (hors la théorie des milieux continus), celles des plaques minces et celle des plaques épaisses. Ces théories sont désignées respectivement sous le nom de théorie de plaque de Love -Kirchhoff et Reissner- Mindlin

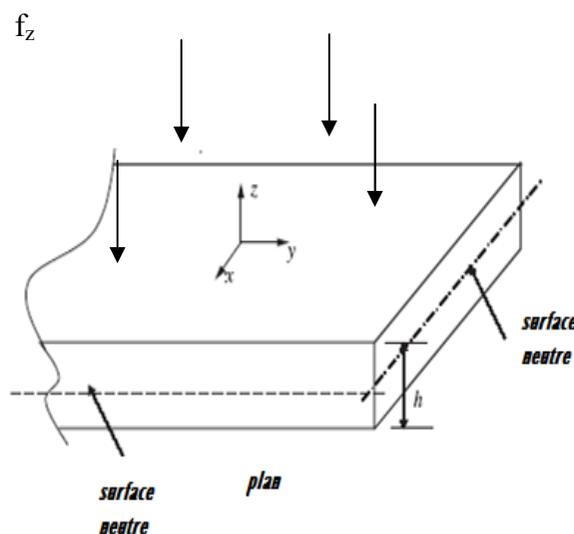


Figure 1-2 : Description d'une plaque rectangulaire

1-2-2 Théorie des plaques minces : modèle de Love - Kirchhoff

Hypothèses :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Love [33] sur les hypothèses de Kirchhoff s'inspirent de celles des poutres minces de Euler-Bernoulli. Ce modèle est parfois appelé dans la littérature le modèle « classique » de plaque. On peut faire les suppositions suivantes :

1. L'épaisseur de la plaque est petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur).
2. les plans perpendiculaires au plan moyen avant déformation restent perpendiculaires à ce plan après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
3. Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
4. La contrainte σ_z , dans la direction transversale est négligée sur tout élément parallèle au plan moyen (plan neutre). Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et du fait que la plaque est mince il est naturel que la contrainte soit nulle en tout point de l'axe z , on parle alors d'un état de contraintes planes.

Champs de déplacements et déformation

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques figure (1-3) s'expriment par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{1-16}$$

Où

x , y et z sont les coordonnées d'un point de la plaque dans un repère galiléen, t est variable temps.

(w) : la flèche du plan moyen de la plaque dans la direction de l'axe z .

La relation entre déplacements – déformation et la flèche est :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1-17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Ou en termes de matrice :

$$\varepsilon = -z \mathbf{L} w \quad (1-18)$$

Où ε est le vecteur déformation défini par l'équation (1-18) et \mathbf{L} est l'opérateur différentiel matriciel donné par :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial x^2 \\ \partial^2 / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

Lois de comportement

En appliquant la loi de Hooke pour une plaque donnée par l'équation (1-8):

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Où D pour un état de contraintes planes défini par l'équation (1-9). La contrainte σ_{zz} est nulle.

La plaque est soumise à des forces externes f_z et à des forces d'inertie $\rho_s h \ddot{w}$, où ρ est la masse volumique du matériaux. M_x , M_y , M_z et M_{zy} , les moments des forces et les efforts tranchants Q_x et Q_y . Les moments et les forces de cisaillement résultent de la distribution normale des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} figure (1-3). Les contraintes sont obtenues par l'équation :

$$\sigma = -z D \mathbf{L} w \quad (1-21)$$

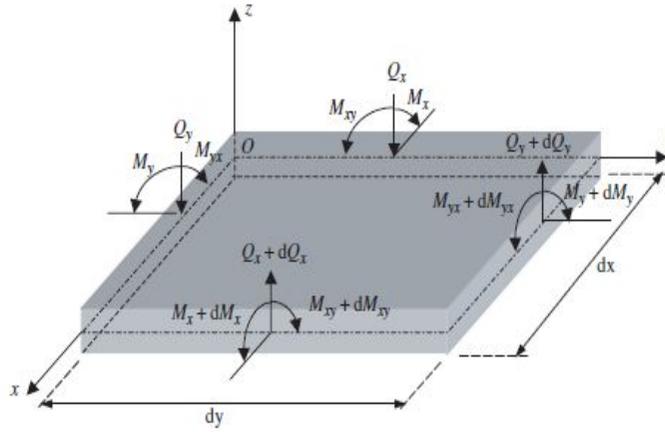


Figure 1-3: Représentation des efforts tranchants et moments pour un élément de plaque (dx, dy)

Le moment suivant la section droite est calculé comme suit :

$$M_p = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_A \sigma z dA = -D \left(\int_A z^2 dA \right) Lw = -\frac{h^3}{12} DL^3 w \quad (1-22)$$

L'équation d'équilibre nous donne :

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + (f_z - \rho_s h \ddot{w}) dx dy = 0 \quad (1-23)$$

Où :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f_z = \rho_s h \ddot{w} \quad (1-24)$$

En considérant l'équilibre des moments de l'élément suivant l'axe x, en négligeant les termes du second ordre la formule des efforts tranchant Q_x est :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (1-25)$$

Finalement en considérant l'équilibre des moments de l'élément suivant l'axe y, en négligeant les termes du second ordre :

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (1-26)$$

Avec $M_{xy} = M_{yx}$

Equations d'équilibre dynamique :

L'équation d'équilibre dynamique pour une plaque est obtenue en substituant l'équation (1-22) dans l'équation (1-25) et (1-26) après avoir remplacé Q_x et Q_y dans l'équation (1-24):

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \ddot{w} = f_z \quad (1-27)$$

Où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ coefficient de flexion d'une plaque.

1-2-3 Plaques épaisses : modèles de Reissner-Mindlin

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (i.e. elle n'est plus très petite devant les dimensions longueur et largeur), une théorie plus complète basée sur la prise en compte des effets 'inertie de rotation et de cisaillement est nécessaire.

Rayleigh [44] en 1877 puis Timoshenko [48, 49] en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner [46] en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand [50] en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin [39], publié trois ans plus tard qui fera date.

Hypothèses :

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff. Les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.

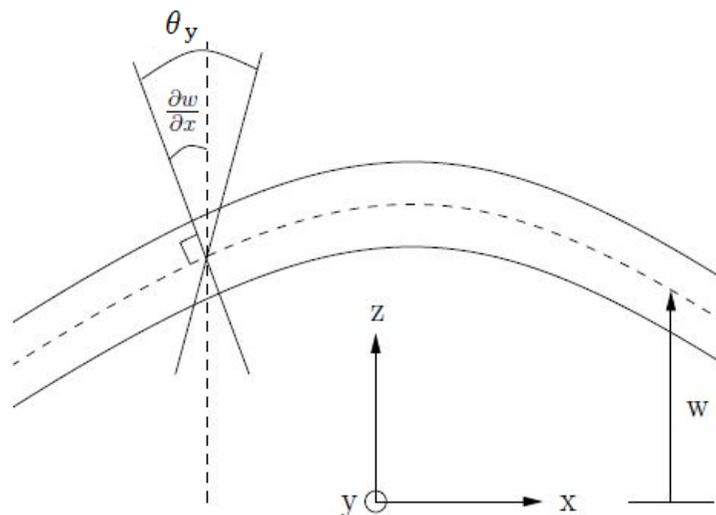


Figure 1-4 : schémas des déplacements pour la théorie de Mindlin

Champs de déplacements, et déformations et contraintes:

Dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin [39], les composantes des champs de déplacement sont définies comme suit :

$$u(x, y, z) = z\vartheta_y(x, y) \quad (1-29a)$$

$$v(x, y, z) = -z\vartheta_x(x, y) \quad (1-29b)$$

Où ϑ_y et ϑ_x sont respectivement, les rotations autour de l'axe x et y de la section normale au plan moyen avant déformation.

Le vecteur de déformation est donné par :

$$\varepsilon = -zL\vartheta \quad (1-30)$$

Où :

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

Vecteur rotation :

$$\vartheta = \begin{Bmatrix} \vartheta_y \\ \vartheta_x \end{Bmatrix} \quad (1-32)$$

En utilisant l'équation des déformations transversales ε_{xz} et ε_{yz} nous obtenons :

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vartheta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\vartheta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1-33)$$

Si on néglige les contraintes transversales, dans cette équations nous retrouvons aisément les équations des plaques minces:

$$\vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-34a)$$

$$\vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (1-34b)$$

B : Equations de fluide**I-3 Equations en mécanique des fluides**

Les équations de la quantité de mouvement traduisent les relations liant les forces agissant sur un volume de contrôle et le taux de variation total de la quantité de mouvement relative à la masse à l'intérieur de ce même volume. Pour exprimer ces relations en un point donné de l'écoulement, il est nécessaire d'employer la formulation différentielle des équations appelée également « équation d'Euler ». Dans ce contexte nous considérons d'abord l'énoncé général de la forme intégrale du théorème de la quantité de mouvement pour un fluide idéal :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f u) dV + \int_S (\rho_f u \cdot \vec{n}) u ds = \int_V \rho_f f dV + \int_S \vec{n} \cdot \vec{p} ds \quad (1-35)$$

Avec :

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{p} ds = - \int_S p \cdot n ds \quad (1-36)$$

L'équation (1-35) devient:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f u) dV + \int_S (\rho_f u \cdot \vec{n}) u ds = \int_V \rho_f f dV - \int_S n \cdot p ds \quad (1-37)$$

Dans le but d'obtenir les équations différentielles, les intégrales de surface doivent d'abord être transformées en intégrales de volume.

En utilisant le théorème de Gauss et en considérant l'équation (1-37) comme une équation vectorielle à trois composantes c.à.d: $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

Après transformation de l'équation (1-37), nous obtenons l'expression sous forme d'une intégrale de volume (nouvelle version de l'équation d'Euler) ; le volume de contrôle V est choisi de manière arbitraire :

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f u) + \nabla \cdot (\rho_f uu) + \nabla p - \rho_f f \right] dV = 0 \quad (1-38)$$

L'intégrant de l'équation (1-38) doit être égal à zéro :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f u) + \nabla \cdot (\rho_f uu) = -\nabla p + \rho_f f \quad (1-39)$$

Le fluide est analysé en variables eulériennes après transformations, et il est décrit par deux équations locales :

- ✓ Equation de continuité ou conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{div} \rho_f \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1-40)$$

Où ρ_f est la masse volumique du fluide et $\bar{\mathbf{u}}$ le vecteur vitesse des particules.

✓ Equation d'Euler ou conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_f \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\mathbf{grad}} \bar{\mathbf{u}}^2 + \overrightarrow{\mathbf{rot}} \bar{\mathbf{u}} \wedge \bar{\mathbf{u}} \right) = \bar{\mathbf{f}} + \overrightarrow{\mathbf{div}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_c \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1-41)$$

Le tenseur des contraintes s'exprime en fonction de la pression p , de la viscosité μ et du tenseur gradient des taux de déformations

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_c = -p \bar{\mathbf{I}} + 2\mu \bar{\bar{\mathbf{T}}}_D \quad (1-42)$$

Dans le cadre de notre étude nous prenons les hypothèses simplificatrices : L'écoulement considéré est un fluide parfait, irrotationnel et incompressible

❖ *Fluide parfait,*

Dans un fluide parfait la viscosité est nulle, donc l'équation (1-42) devient :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_c = -p \bar{\mathbf{I}} \quad (1-43)$$

❖ *Mouvement irrotationnel,*

Le champ de vitesse de l'écoulement est irrotationnel quand :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}} \bar{\mathbf{u}} = 0$$

Cette équation donne la condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel de vitesse puisse exister : $\bar{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{grad}} \phi$, et par conséquent un écoulement irrotationnel est appelé écoulement potentiel.

Et dans ces conditions l'équation d'Euler devient :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\mathbf{grad}} \bar{\mathbf{u}}^2 \right) = \bar{\mathbf{f}} + \overrightarrow{\mathbf{div}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_c = \bar{\mathbf{f}} + \overrightarrow{\mathbf{grad}} p \quad (1-44)$$

❖ *Les forces volumiques dérivent d'un potentiel.*

L'action du champ de pesanteur conduit à : $\bar{\mathbf{f}} = -\rho_f g \bar{\mathbf{k}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\rho_f g z)$ et après intégration, l'équation d'Euler dans le domaine fluide donne l'équation de Bernoulli :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{u}^2 + gz + \frac{p}{\rho_f} = C(t) \quad (1-45)$$

❖ **les hypothèses de petits mouvements du fluide :**

Donc en négligeant \bar{u}^2 devant les autres termes, l'équation de Bernoulli conduit à l'équation de Lagrange linéaire qui en choisissant $C(t) = 0$ est :

$$\mathbf{p} = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1-46)$$

❖ **Hypothèse de compressibilité :**

- Si le fluide est incompressible, il implique une vitesse de propagation des perturbations de pression faibles dans l'écoulement (ondes acoustiques) d'où les équations de l'écoulement potentiel décrit par les variables \bar{u} , $\bar{\phi}$ et \bar{p} et l'équation de continuité se transforme en équation de Laplace :

$$= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1-47)$$

- Si le fluide est compressible, on supposera un comportement adiabatique et avec "c" célérité du son dans le fluide, on obtient l'équation de Helmholtz (équation des ondes) :

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1-48)$$

L'écoulement étudié dans ce travail est supposé évoluer de manière iso-volumique. Cela signifie que l'on peut négliger les effets de dilatation thermique dus aux variations de température, ainsi que les variations de volume liées à des compressions- détentes associées à des changements de pression. Pour simplifier, les champs de températures seront supposés uniformes et constants. L'échauffement résultant des frottements étant négligeable, cela impose à la température des frontières d'être uniforme et indépendante du temps. Par suite, puisque ces écoulements ne sont le siège d'aucun frottement ni échange de chaleur, ils sont isentropiques. Les effets de variations des pressions sur la masse volumique peuvent alors être négligés.

L'incompressibilité impose $\text{div} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ (1-49)

Avec la conservation de masse cela conduit à :

$$\frac{d\rho_f}{dt} = 0 \quad (1-50)$$

Qui signifie que la masse volumique d'une particule fluide suivie pendant une période de temps dt reste constante. Bien que cette contrainte n'interdise pas à ρ_f de varier d'une particule à une autre, on supposera que l'écoulement provient d'une région de l'espace constituant soit un réservoir, soit un domaine infini à l'amont, où la masse volumique est uniforme. Ainsi ρ_f aura la même valeur pour toutes les particules fluides, et donc sera donnée, uniforme et indépendante du temps.

Le principe fondamental de la dynamique est alors traduit par l'équation (1-51) dans laquelle on néglige les termes de frottement, et qui simplifie en l'équation d'EULER :

$$\rho_f \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho_f \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}p} \quad (1-51)$$

Elle correspond à une loi de comportement réduite à :

$$\sigma_{ij}(\vec{x}; t) = -p(\vec{x}, t) \delta_{ij} \quad (1-52)$$

Qui exprime la contrainte

$$T_i(\vec{x}, t, \vec{n}) = -p(\vec{x}, t) \delta_{ijn} \vec{e}_j = -p(\vec{x}, t) n_i \quad (1-53)$$

qui est normale à cet élément, par conséquent les efforts tangentiels de contact (frottements) sont exclus.

La masse volumique étant connue on dispose alors des équations suivantes :

$$\rho_f \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho_f \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}p} \quad (1-54)$$

C'est-à-dire d'un système de quatre équations indépendantes, pour les quatre inconnues que sont les trois composantes $\vec{u}(\vec{x}, t)$ du champ de vitesse et le champ de pression $p(\vec{x}, t)$. Pour exploiter ce système, il est a priori nécessaire de lui associer les conditions aux limites suivantes :

1-4 Conditions aux limites: [43]**I-4-1 Condition de surface libre sur Γ_L :**

Compte tenu des hypothèses retenues pour l'étude du fluide donnera:

- $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} = 0$ sur le plan $z=0$ (surface libre au repos), lorsque les mouvements de surface libre sont de faibles amplitudes, et que le fluide incompressible est étudié dans la gamme des basses fréquences des ondes de gravité telles que les fréquences de houle)
- $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ sur le plan $z=0$ dans le cas d'un fluide incompressible en hautes fréquences ou bien dans le cas d'un fluide compressible.
- $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ sur le plan $z=0$ dans le cas d'un fluide incompressible en très basses fréquences. Dans ce cas, la surface libre équivalente à une paroi rigide.

I-4-2 conditions à l'infini :

Dans le cas d'une étude en milieu non borné, la condition à l'infini affichée est la condition de Sommerfeld (non réflexion des ondes à l'infini) [4] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r^\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad \alpha = 0.5 \text{ en } 2D \text{ et } \alpha = 1 \text{ en } 3D \quad (1-55)$$

Et $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \phi_1$, ϕ_1 potentiel incident, dû à la houle par exemple ou nul dans le cas où il n'y a pas d'écoulement.

I-4-3 conditions de glissement sur les parois du solide

La condition de Dirichlet imposée, implique que les particules fluides, ne pénètrent pas les parois de solides, c'est-à-dire qu'il y'a continuité des vitesses normales des particules fluides et solides [38] :

$$\vec{v}_S \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \quad (1-56)$$

Et $\vec{v}_S \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n}$

Où \vec{n} est la normale extérieure au domaine structure, donc intérieure au domaine fluide, cette condition peut également être écrite en terme de pression :

$$-\rho_f \vec{a}_s \cdot \vec{n} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \quad (1-57)$$

C- Couplage :

L'interaction structure-fluide exprime le problème mécanique du contact d'un corps solide et d'un fluide. Cette étape essentielle de notre problème nécessite la caractérisation des conditions aux limites qui décrivent le dialogue entre le solide et le fluide au niveau de l'interface.

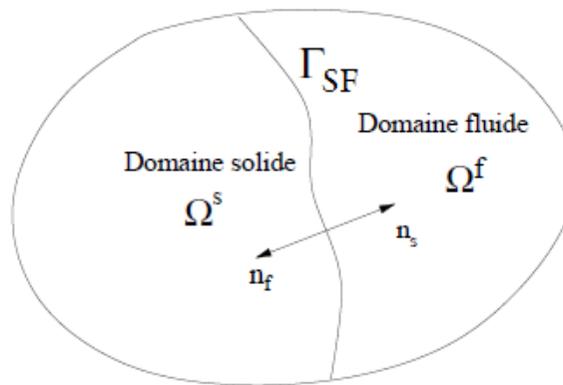


Figure1-5 Schématisation générale du problème structure

A l'interface, figure (1-5) le lien entre vecteurs normaux est défini de telle manière que

$$n = n_s = -n_f$$

On rappelle que le problème étudié est celui d'une structure élastique couplée avec un fluide incompressible, parfait et irrotationnel, la situation étant décrite par la figure (1-6).

La structure occupe le domaine Ω_s , de frontière $\partial\Omega_s$; le fluide occupe le domaine Ω_f , de frontière $\partial\Omega_f$. les deux domaines sont en contact sur $\Gamma_{SF} = \partial\Omega_s \cap \partial\Omega_f$. Les éléments de frontière $\partial\Omega_{S0}$, $\partial\Omega_{S\sigma}$, $\partial\Omega_{F0}$, et $\partial\Omega_F$ désignent respectivement, les portions de frontière du

domaine de la structure à déplacement imposé, à effort imposé, et les portions de frontière du domaine fluide à pression et gradient de pression imposé.

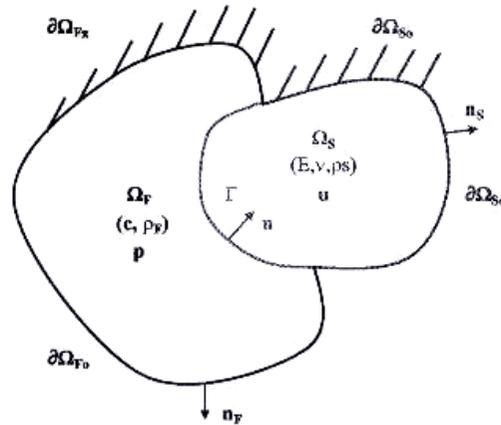


Figure 1-6 Schématisation générale du problème structure-fluide

Le couplage des deux milieux est modélisé par les équations qui expriment la continuité des composantes normales du tenseur des contraintes et du champ d'accélération à l'interface structure-fluide.

La condition équation (1-57), peut également être écrite en termes de pression :

$$\sigma_{ij}(u)n_j^s = pn_i \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \quad (1-58)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} n_j = \omega^2 \rho_f u_j n_j \quad \text{sur } \Gamma_{SF} \quad (1-59)$$

La relation (1-58) traduit le fait que le fluide exerce des efforts de pression sur la structure au milieu de l'interface structure-fluide, dans la direction normale sur l'interface.

La relation (1-59) traduit le fait que la structure impose une accélération au fluide au niveau de l'interface structure-fluide dans la direction normale à l'interface.

Le problème consiste à la recherche de fonctions scalaires satisfaisant l'équation de Laplace pour les hypothèses citées ci-dessus lorsque le fluide incompressible est limité par une surface libre déformable (onde de gravité).

Chapitre 2 : modélisation numérique

2-1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'implémentation du modèle numérique, la méthode des éléments finis pour une plaque rectangulaire mince en vibration.

Aujourd'hui la méthode des éléments finis (FEM) est considérée comme étant une technique numérique bien établie et commode pour la résolution des problèmes complexes dans différents domaines d'ingénierie: la construction mécanique, le génie civil, le génie atomique, la technologie biomédicale, l'hydrodynamique, la conduction de chaleur, etc. d'un autre côté, les éléments finis peuvent être examinés comme un outil puissant pour la recherche de solution approximative des équations décrivant différents processus physiques déduites de mécanique des milieux continus.

L'objectif de la méthode est de déterminer des fonctions inconnues telles que les fonctions de déplacements, contraintes ou déformations. On parle alors de « champs de déplacement, contraintes ou déformations pour indiquer qu'il y'a autant de fonctions inconnues que de points différents. Un champ de fonction regroupe donc une infinité de fonctions inconnues. Dans notre cas on se place à un certain intervalle de temps « dt » fixé. Alors la connaissance du champ est équivalente à celle d'une infinité de scalaires correspondant aux valeurs de la fonction en chaque point. Nous utilisons une méthode de discrétisation pour simplifier le problème. La méthode retenue consiste à rechercher une solution approchée aux fonctions inconnues sous forme d'une somme finie de fonctions pondérées par des coefficients inconnus à déterminer.

Le mouvement de la structure est décrit par un champ de déplacement $d = \{d_i\}$ défini en tout point de la structure Ω_s , les déformations sont représentées par le tenseur de déformations $\{\varepsilon(d)\} = \varepsilon_{ij}(d)$, ces déformations induisent un champ de contraintes $\{\sigma(d)\} = \sigma_{ij}(d)$. L'hypothèse de comportement linéaire élastique de la structure permet d'écrire la relation entre les déformations et les contraintes de la structure.

2-2 Discrétisation par la méthode des éléments finis

Le principe de la discrétisation est le suivant : sur chaque élément fini, le champ de déplacement est calculé à partir d'un nombre fini de valeur en des points (nœuds) donné sur l'élément fini par interpolation polynomiale.

Au repère local XYZ, l'élément finis solide utilisé dans ce travail est représenté sur la figure (2-1). C'est un élément rectangulaire à quatre nœuds i, j, k, l, chaque nœuds possède trois degrés de liberté représenté dans un vecteur $\{d_i\}$ appelé vecteur de déplacement nodal dont les composantes sont: le premier un déplacement

w_i suivant la direction de l'axe Z, le second une rotation autour de l'axe X noté $(\theta_x)_i$ et le troisième est une rotation autour de l'axe Y noté $(\theta_y)_i$.

Cet élément a douze degrés de liberté, est non conforme (w,n est discontinu) mais passe les patch- tests de Kirchhoff, le degré de la base polynomiale est de 3, [2].

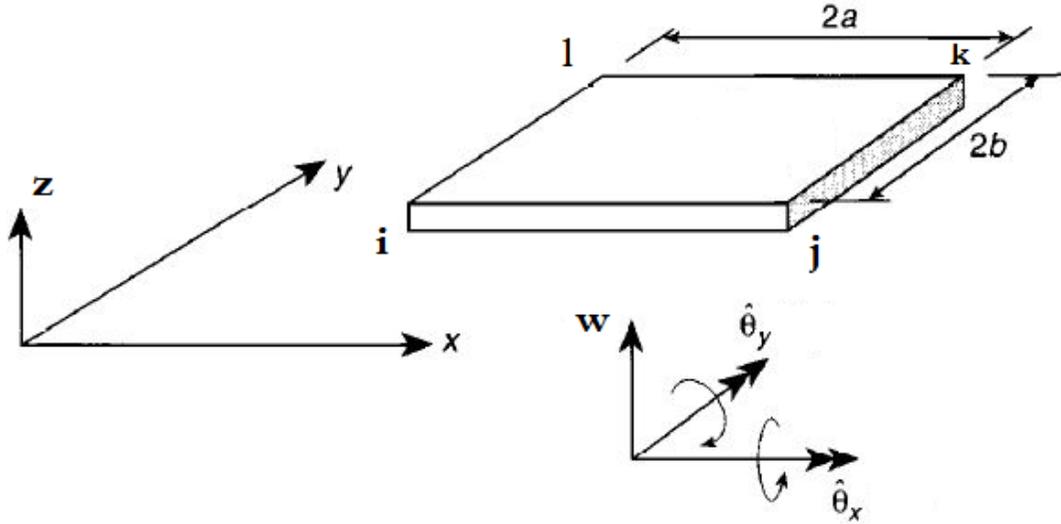


Figure 2-1: géométrie de l'élément fini et vecteur nodal de déplacement au repère X, Y, Z

Avec :

2a : est la longueur de la structure suivant l'axe X ;

2b : est la largeur de la structure suivant l'axe Y ;

2-3 Champ de déplacements :

w est le champ de déplacement transversal de la surface moyenne qui exprime l'équation de flexion de la plaque.

w est représenté par le polynôme d'interpolation à douze degrés de liberté pour une plaque en flexion est donné par l'expression suivante :

$$w(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 + C_7x^3 + C_8x^2y + C_9xy^2 + C_{10}y^3 + C_{11}x^3y + C_{12}xy^3 \quad (2-1a)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \theta_{yi} = C_2 + 2C_4x + C_5y + 3C_7x^2 + 2C_8xy^2 + C_9y^2 + 3C_{11}x^2y + C_{12}y^3 \quad (2-1b)$$

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \theta_{xi} = -C_3 - C_5x - 2C_6y - C_8x^2 - 2C_9xy - 3C_{10}y^2 - C_{11}x^3 - 3C_{12}xy^2 \quad (2-1c)$$

Où :

w_i est la déflexion correspondant au nœud i et $w_{i,x}$, $w_{i,y}$ les rotations suivant les axes X et Y.

C_i : sont les constantes inconnues ;

Chaque nœud (i) possède un vecteur de déplacement, exprimé par :

$$\{d_i\}^T = \left\{ w_i, \frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_i}{\partial y} \right\} \quad (2-2)$$

Le vecteur des déplacements élémentaire pour l'élément est :

$$\{d^e\}^T = \{ \{d_i\}, \{d_j\}, \{d_k\}, \{d_l\} \} \quad (2-3)$$

Où (i, j, k, l) sont les indices pour les nœuds de l'élément par ordre d'arrangement.

Sous forme matricielle le champ de déplacements pour un nœud est exprimé comme suit :

$$\{d_i\} = [R]\{C\} \quad (2-4)$$

Avec :

$[R]$: est une matrice (3x12) définie à l'annexe **A1**

$\{C\}$: est le vecteur de constantes du polynôme d'interpolation.

le vecteur de déplacement $\{d\}^e$ pour chaque élément s'écrit comme suit :

$$\{d\}^e = [A_s^e]\{C\} \quad (2-5)$$

$[A_s^e]$: Matrice 12x12 appelée matrice de localisation des degrés de liberté de l'élément fini, définie à l'annexe **A2**

On peut donc, exprimer le vecteur des constantes inconnues (C_1, \dots, C_{12}) en fonction des déplacements nodaux, en utilisant la relation suivante :

$$\{C\} = [A_s^e]^{-1}\{d\}^e \quad (2-6)$$

$[A_s^e]^{-1}$: Matrice 12x12 définie dans l'annexe **A3**

La substitution du vecteur des constantes dans le champ de déplacements (2-4) nous donne :

$$\left\{ \begin{matrix} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \end{matrix} \right\} = [R][A_s^e]^{-1}\{d\}^e \quad (2-7)$$

2-4 Champ de déformations et de contraintes:

Le champ de déformation est lié au champ de déplacement comme suit [37] :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = -hLw \quad (2-8)$$

Avec :

h : épaisseur de la plaque ;

L : matrice de l'opérateur différentiel :

$$L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

En substituant les déplacements de l'équation (2-7) dans le vecteur de déformations définis par l'équation (2-8) :

Nous obtenons le vecteur de déformation en fonction des déplacements nodaux :

$$\{\varepsilon\} = h[Q][A_s^e]^{-1}\{d\}^e \quad (2-10)$$

[Q] : Est une matrice (3x12) définie dans **A4**.

Le champ des contraintes est lié au champ déformations par la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2-11)$$

Où :

[D] représente la matrice des constantes élastiques ou matrice d'élasticité liant le vecteur de contrainte au vecteur de déformations

$$D = D \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (2-12)$$

Avec

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: Coefficient de rigidité courbure de flexion

E : module de Young ;

ν : Coefficient de Poisson ;

2-5 Matrice masse et matrice de rigidité :

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique pour le milieu continu (1-15) :

$$-\omega^2 \rho_S d_i - \frac{\partial \sigma_{ij}(d)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \Omega_S$$

Et en considérant le champ de déplacement $\delta d = (\delta d_i)$ appelé champ de déplacement virtuel, on multiplie l'expression précédente par δd et on intègre sur le domaine Ω_S de façon à écrire

$$-\omega^2 \int_{\Omega_S} d_i \rho_S \delta d_i dV - \int_{\Omega_S} \frac{\partial \sigma_{ij}(d)}{\partial x_j} \delta d_i dV = 0 \quad (2-13)$$

On utilise la formule d'intégration par partie généralisée, on a :

$$\int_{\Omega_S} \frac{\partial \sigma_{ij}(d)}{\partial x_j} \delta d_i dV = - \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(d) \varepsilon_{ij}(\delta d) dV + \int_{\partial \Omega_S} \sigma_{ij}(d) n_j^S \delta d_i dS \quad (2-14)$$

En utilisant la propriété de symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes. En tenant compte de cette relation, la formulation variationnelle du problème structure :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S d_i \delta d_i dV + \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(d) \varepsilon_{ij}(\delta d) dV = 0 \quad (2-15)$$

La matrice de raideur est représentée par l'équation de l'énergie de déformation, à laquelle est associé un état de contrainte plane.

$$\text{Matrice masse : } \int_{\Omega_S} \rho_S d_i \delta d_i dV \quad (2-16)$$

$$\text{Matrice raideur : } \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(d) \varepsilon_{ij}(\delta d) dV \quad (2-17)$$

En utilisant les équations (2-10) et (2-11) dans les équations (2-16) et (2-17), on obtient les expressions suivantes :

$$[m]^e = \rho_S h [A_S^e]^{-1T} \left[\iint_{00}^{2a2b} [R]^T [R] dx dy \right] [A_S^e]^{-1} \quad (2-18)$$

$$[k]^e = [A_S^e]^{-1T} \left[\iint_{00}^{2a2b} [Q]^T [D] [Q] dx dy \right] [A_S^e]^{-1} \quad (2-19)$$

On note par m_0 et k_0 les expressions:

$$m_0 = \iint_{00}^{2a2b} [R]^T [R] dx dy$$

$$k_0 = \iint_{00}^{2a2b} [Q]^T [D] [Q] dx dy$$

Après intégration, nous obtenons les matrices (12x12) de \mathbf{m}_0 et \mathbf{k}_0 qui sont définies respectivement dans les annexes **A5** et **A6**

ρ : La masse volumique de la structure du solide.

D'où la matrice de masse et la matrice de rigidité :

$$[m]^e = \rho_s h [A_s^{e-1}]^T m_0 [A_s^e]^{-1} \quad (2-20)$$

$$[k]^e = D [A_s^{e-1}]^T k_0 [A_s^e]^{-1} \quad (2-21)$$

2-6 Formulation discrète du problème aux valeurs propres

En sommant les expressions élémentaires (2-20) et (2-21) précédemment établies pour chaque élément on obtient alors, une forme discrète :

$$-\omega^2 \sum_1 \delta d_e^T m_s^e d_e + \delta d_e^T k_s^e d_e = 0 \quad (2-22)$$

En utilisant $d_e = A_s^e d$ et $\delta d_e = A_s^e \delta d$

$$-\omega^2 \delta d^T M_s d + \delta d^T K_s d = 0 \quad \forall \delta d \quad (2-23)$$

Où l'on définit les matrices globales et les vecteurs globaux de la forme suivante :

Matrice masse :

$$M_s = \sum_{e=1}^E A_s^{eT} m_s^e A_s^e \quad (2-24)$$

Matrice raideur :

$$K_s = \sum_{e=1}^E A_s^{eT} k_s^e A_s^e \quad (2-25)$$

Après l'opération d'assemblage des matrices élémentaires la matrice globale qui nous permet d'écrire les équations d'équilibre dynamique,

L'expression (2-23) étant valable pour tout δd (δU § chap1) nous permet de déterminer la relation matricielle :

$$-\omega^2 M_s U(\omega) + K_s U(\omega) = 0 \quad (2-26)$$

Appelée également équations différentielles pour le système global de tous les éléments élémentaires.

2-7 Fonctions de forme standards

Nous pouvons exprimer le polynôme d'interpolation $w(x, y)$ équation (2-1a) sous la forme standards [51] :

$$w = N\{d\}^e = P[A_s^e]^{-1}\{d\}^e \quad (2-27)$$

Avec

$$P = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3\} \quad (2-28)$$

P : représente la fonction polynomiale

Nous donnons les expressions des fonctions de forme en fonctions des coordonnées naturelles, pour la plaque en flexion, ces expressions nous sont nécessaires pour la suite de nos calculs qui vont nous permettre de réaliser le couplage avec le fluide.

Une forme explicite de la fonction de forme a été dérivée par Melosh [36] et peut être écrite simplement en termes de coordonnées normales [51]. Ainsi, nous pouvons écrire pour n'importe quel nœud en coordonnées normales exprimées par l'expression suivante :

$$N_i^T = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \left\{ \begin{array}{l} 2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2 \\ b\eta_i(1 - \eta^2) \\ -a\xi_i(1 - \xi^2) \end{array} \right\} \quad (2-29)$$

Les coordonnées normalisées sont définis comme suit:

$$\xi = \frac{x-x_c}{2a} , \eta = \frac{y-y_c}{2b} \quad (2-30)$$

Avec $\xi_0 = \xi\xi_i$ et $\eta_0 = \eta\eta_i$

En utilisant les expressions des fonctions de forme (2-29); nous obtenons pour un élément rectangulaire à quatre nœuds d'une plaque mince, la flèche et les rotations exprimées comme suit :

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i w_{i,x} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i w_{i,y} \quad (2-32)$$

Matrice des fonctions de formes :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

nœud 1
nœud 2
nœud 3
nœud 4

Chapitre 3

Formulation de la méthode des Equations
intégrales et couplage

Chapitre 3 : formulation de la méthode des Equations intégrales et couplage**3-1 Introduction**

La plupart des phénomènes physiques qui peuvent être décrits en termes d'équations différentielles partielles PDE peuvent être décrits en termes d'équations intégrales. La forme intégrale de PDE a été à l'origine développée par Fredholm (1903) [14] comme outil pour prouver l'unicité et l'existence des solutions des équations différentielles partielles relatives.

Certaines des représentations intégrales peuvent être transformées en utilisant des identités mathématiques ainsi leur dimensionnalité est réduite d'une, impliquant les quantités inconnues seulement sur la frontière du domaine. Ce type spécial d'équations intégrales s'appellent les équations intégrales de frontière (BIE) et fournissent parfois une manière très commode de représenter un phénomène physique.

La méthode des éléments finis, si elle se prête bien à l'analyse des problèmes en milieu borné est délicate à mettre en œuvre lorsque les domaines sont illimités et dans ce cas en lui préfère la méthode des éléments aux frontières. Cette méthode est d'utilisation courante pour traiter les problèmes de fluide, aussi bien en acoustique, en aérodynamique et en hydrodynamique. Cette méthode s'appuie sur la solution de l'équation Helmholtz ou de Laplace (pour un fluide compressible ou incompressible) [43] dans laquelle les fonctions inconnues sont la pression et la vitesse acoustique. La solution de cette équation est la fonction de Green, ainsi que ses dérivées premières et seconde par rapport à la normale. L'utilisation judicieuse de la fonction de Green permet en effet de prendre en compte un certain nombre de conditions aux limites et de restreindre ainsi le domaine d'intégration des formules intégrales qui interviennent.

La formulation utilisée est basée sur l'utilisation de la théorie des potentiels de couche. En guise d'illustration, nous présentons le cas d'une plaque mince immergée dans un milieu infini.

Dans cette analyse, la surface immergée est idéalisée au moyen des éléments de frontière appropriés, désignés sous le nom des panneaux hydrodynamiques. La matrice de

masse structurale globale est fusionnée avec la matrice globale de la masse-ajoutée, dans le but d'obtenir la matrice de masse totale et résoudre le problème aux valeurs propres. Pour évaluer l'influence du fluide environnant sur le comportement dynamique de la structure de la plaque immergée, les fréquences et les formes associées de mode sont calculées.

3-2 Formulation intégrale :

La méthode de BEM repose essentiellement sur l'utilisation de l'équation intégrale de Helmholtz, dans laquelle les fonctions inconnues sont la pression et la vitesse acoustiques (associé aux équations générales caractérisant le comportement du fluide). Nous rappelons dans ce qui suit les grandes lignes de l'établissement de cette formulation intégrale. Le champ acoustique vérifie l'équation de Helmholtz [6,8]:

$$\Delta\Phi(p) + k^2\Phi(p) = f(M) \quad \forall M \in \Omega \quad (3-1)$$

Où Φ représente le potentiel des vitesses, $f(M)$ distribution de source, k le nombre d'onde, Ω l'espace entourant un volume D de surface Σ dont la normale est orientée vers l'extérieur figure (3-1).

La fonction de Green pour une source ponctuelle en espace infini vérifie [8]:

$$(\Delta + k^2)G(M,P) = \delta_s(M) \quad \forall M \in \Omega \quad (3-2)$$

où δ est la mesure de Dirac

Cette équation doit vérifier la condition de Sommerfeld de rayonnement à l'infini.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow \infty} G = O(r^{(1-n)/2}) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} (\partial_r G - ikG) = o(r^{(1-n)/2}) \end{array} \right. \quad (3-3)$$

Où r est le vecteur position du point M et n la dimension de l'espace.

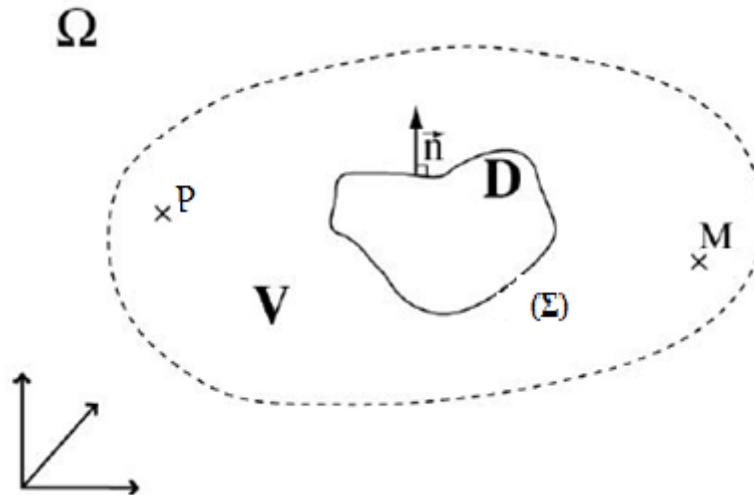


Figure 3-1 : Schéma général pour l'établissement de la représentation de la fonction de Green

La description Lagrangienne de la propagation acoustique qui consiste à suivre au cours du temps le déplacement d'une surface d'onde, on appelle alors rayon acoustique la trajectoire complète d'un point donné issu de l'origine (la source).

En intégrant la fonction équation (3-1) sur un volume V englobant un volume D et la source P, et en approximant cette fonction par une fonction de pondération Ψ alors il s'ensuit:

$$W(\Phi) = W(\Phi) + W(\Phi) \tag{3-4}$$

Avec

$$W(\Phi) = \int_{\Omega_f} \Psi \Delta \Phi dV \tag{3-5}$$

et

$$W(\Phi) = - \int_{\Omega_f} \Psi \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} dV \tag{3-6}$$

En appliquant la formule de Green (intégration par partie généralisée) à la forme intégrale $W_1(\Phi)$ (1-16) on obtient :

$$\int_{\Omega_f} \Psi \Delta \Phi dV + \int_{\Omega_f} \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \Phi dV = \int_{\partial \Omega_f} \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot \vec{n} d\Gamma \tag{3-7}$$

7)

Donc la forme intégrale $W(\varphi)$ s'écrit :

$$W(\Phi) = - \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \Psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} dV - \int_{\Omega_f} \overline{\text{grad} \Psi} \cdot \overline{\text{grad} \Phi} dV + \int_{\partial \Omega_f} \overline{\Psi \text{grad} \Phi} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3-8)$$

Avec \vec{n} normale extérieure au domaine fluide ; La forme intégrale $W(\varphi)$ devient une intégrale de Fredholm [6] de deuxième espèce.

La formulation faible du problème fluide se traduit par le fait de:

- ✓ Trouver le potentiel φ , donc le vecteur des potentiels nodaux $\{\varphi\}$, qui annule la forme intégrale $W(\varphi)$, quelque soit les fonctions de pondération Ψ cinématiquement admissible (nulles sur la partie de frontière $\partial \Omega$ où le potentiel φ est connu) et tel que sur la partie de frontière complémentaire $\partial \Omega$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ soit donnée.
- ✓ Selon les hypothèses et les conditions aux limites pour le fluide citées au chapitre 1, et suivant les gammes de fréquences étudiées et le type d'information cherchée les conditions qui caractérisent le fluide, la surface libre et l'interface sont données par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = 0 \quad (\text{équation de Laplace}) \text{ dans } \Omega_f \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (\text{onde de gravité en incompressible}) \text{ sur la surface libre } \Gamma_L \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\overline{Vs} \cdot \vec{n} \quad \text{sur les interfaces fluide - solide } \Gamma_{SF} \end{array} \right. \quad (3-9)$$

Conditions auxquelles il faut ajouter la condition à l'infini

Donc selon le type d'étude la condition de surface libre sera prise en compte par des conditions sur $\partial \Omega$ où bien par des conditions sur $\partial \Omega$.

Compte tenu de l'orientation de la normale choisie pour écrire la condition de glissement équation (1-56), il vient :

$$\overline{\text{grad} \Phi} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\overline{Vs} \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad \text{Sur } \Gamma_{SF} (\Gamma_{SF} \subset \partial \Omega)$$

Développer une formulation mixte *élément finis*- équations *intégrales* et comme pour la condition de surface libre, suivant le type d'approximation, les conditions à l'infini, seront prises en compte comme des conditions sur $\partial\Omega$ ou sur $\partial\Omega$.

On considère que le fluide est incompressible donc $W_2(\Phi)=0$, On applique à nouveau la formule de Green à $W_1(\Phi)$ équation (3-8), nous obtenons :

$$\int_{\partial f} \overline{\text{grad}\Psi} \cdot \overline{\text{grad}} \Phi dV + \int_{\partial f} \Phi \Delta \Psi dV = \int_{\partial f} \overline{\text{grad}} \Psi \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3-10)$$

Et on peut écrire la troisième formule de Green :

$$\int_{\Omega f} \{-\Psi \Delta \Phi + \Phi \Delta \Psi\} dV + \int_{\partial \Omega f} \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (3-11)$$

La frontière $\partial\Omega_f$ du domaine est constituée de trois parties : Γ_L la surface libre, Γ_{SF} la surface de contact avec un solide et la frontière à l'infini Σ .

Pour transformer cette forme intégrale nous utiliserons les résultats généraux découlant des propriétés de l'intégrale de STIELTJES et de la solution élémentaire de l'équation de Laplace appelée fonction de Green.

3-2-1 Intégrale de STIELTJES:

$$M \{v(M, P)\} = 0 \quad M \quad \Omega_i$$

En entourant un point M quelconque d'une sphère dont on fait tendre le rayon vers zéro, si la surface S admet partout un plan tangent, $u(p)$ étant une fonction scalaire alors on définit les identités suivantes :

$$\int_{\Omega_i} u(P) \{v(M, P)\} dV = \begin{cases} -4\pi\Phi(M) & \text{si } M \quad \Omega_i \\ -2\pi\Phi(M) & \text{si } M \quad S \\ 0 & \text{si } M \quad \Omega_i \end{cases} \quad (3-12)$$

3-2-2 Equation intégrale :

Problème intérieur

Problème extérieur

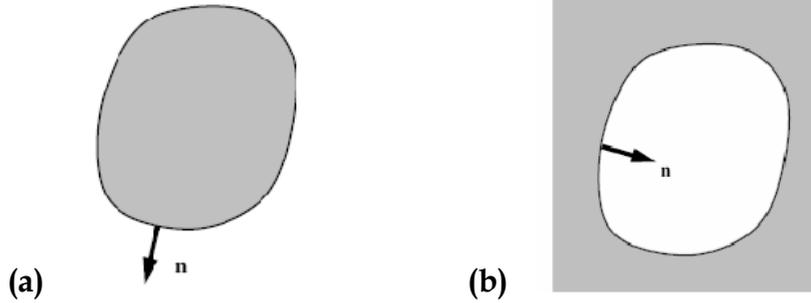


Figure 3-2 : Représentation d'un milieu intérieur et extérieur [3]

3-2-2-1 Problème intérieur :

Considérons le cas d'un problème intérieur figure (3-2a). Soit $G(M, P)$ une fonction satisfaisant l'équation de Laplace dans un domaine Ω_i . Dans l'équation (3-8), on substitue la fonction scalaire Ψ par la fonction $G(M, P)$, et si ϕ est le potentiel des vitesses exact, alors on obtient compte tenu de l'équation (3-12) :

$$\int_S \left\{ \Phi(M, P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_p} - G(M, P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_p} \right\} dS = \begin{cases} -4 & \text{si } M \text{ est à l'intérieur de } S \\ -2 & \text{si } M \text{ est sur } S \\ 0 & \text{si } M \text{ est à l'extérieur de } S \end{cases} \quad (3-13)$$

3-2-2-2 Problème extérieur :

Considérons le cas d'un problème extérieur figure (3-2b). Afin de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface il suffit d'appliquer le théorème de Green: lorsque l'on fait tendre le volume V vers l'infini, en utilisant la condition de Sommerfeld équation (3-3), on aboutit à une intégrale sur la surface Σ du domaine D . Dans l'équation (3-8), on substitue la fonction scalaire Ψ par la fonction $G(M, P)$, et si ϕ est le potentiel des vitesses exact, alors on obtient, compte tenu de l'équation (3-12):

$$\int_S \left\{ \Phi(M, P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_p} - G(M, P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_p} \right\} dS - \int_{\Sigma} \left\{ \Phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_p} - G(M, P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_p} \right\} dS = \begin{cases} -4\pi\Phi(M) & \text{si } M \text{ est à l'intérieur de } \Omega \\ -2\pi\Phi(M) & \text{si } M \text{ est sur } S \\ 0 & \text{si } M \text{ est à l'extérieur de } \Omega \end{cases} \quad (3-14)$$

Si $G(M, P)$ est fonction de Green du problème c'est-à-dire si $G(M, P)$ satisfait en plus les conditions de radiation à l'infini, alors dans l'expression précédente l'intégrale sur Σ est nulle et nous obtenons l'équation intégrale écrite sur la frontière S .

$$\int_S \left\{ \Phi(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_p} - G(M, P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_p} \right\} dS = \begin{cases} -4\pi\Phi(M) & \text{si } M \text{ est à l'intérieur de } \Omega \\ -2\pi\Phi(M) & \text{si } M \text{ est sur } S \\ 0 & \text{si } M \text{ est à l'extérieur de } \Omega \end{cases} \quad (3-15)$$

Fonction de Green en fluide incompressible illimité :

Pour le cas spécial où le nombre d'onde $k=0$ l'équation de Helmholtz (3-16a) est l'équation de Laplace (3-16b). On cherche dans ce cas la solution de l'équation de Laplace, en lui appliquant les conditions de Dirichlet et Neumann aux frontières :

$$\Phi(p) + k^2\Phi(p) = 0 \quad (3-16a)$$

$$\Phi(p) = 0 \quad (3-16b)$$

Dans ce cas particulier la fonction de Green satisfaisant les équations (3-16a) ou (3-16b) et la condition de Sommerfeld équation (3-3) est unique. De plus, la fonction de Green est symétrique ce qui traduit le principe de réciprocité, et présente une singularité lorsque le point récepteur M est confondu avec la source, la fonction de Green est donnée comme suit :

$$G_0(M, P) = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad \text{cas a deux dimensions} \quad (3-17)$$

$$G_k(M, P) = \frac{1}{4\pi r} \quad \text{cas a trois dimensions} \quad (3-18)$$

Si la fonction de Green satisfait la condition de surface libre quand elle existe, alors dans les équations (3-13) et (3-14) les intégrales sur Γ_L sont nulles, et il ne reste que les termes sur Γ_{SF} (Γ_{SF} : surface mouillée du solide immergé ou parois).

3-3 Méthode des singularités et Solution de l'équation de Laplace :

Un point délicat de la discrétisation de la géométrie et l'approximation des fonctions inconnues dans les méthodes d'élément finis de frontière est le problème de la définition de la normale, notamment au voisinage des singularités géométriques comme les angles, les coins... au voisinage de ces singularités géométriques, on observe ainsi une dégradation du taux de convergence des BEM [17]. L'auteur recommande de traiter les points au bord comme des nœuds plutôt que de les ignorer complètement

Les fonctions Φ qui satisfont l'équation locale de (3-16a) et (3-16b) c'est-à-dire l'équation de Helmholtz en fluide compressible ou l'équation de Laplace en fluide incompressible, sont déterminées en utilisant la méthode des singularités.

Pour construire la solution Φ harmonique solution du problème de Neumann extérieur, on remplace la frontière Γ_{SF} par une distribution de singularités. Ces distributions peuvent être de différents types et en particulier :

- Distribution de sources
- Distribution de doublets normaux
- Distribution mixte de Green

La méthode des équations intégrales que nous utiliserons consiste à remplacer la frontière Γ_{SF} par une distribution mixte de Green:

- distribution de sources (potentiels de simple couche)
- distribution de doublets normaux (potentiels de double couche).

Le potentiel de simple couche peut s'interpréter comme le rayonnement en un point M dû à un ensemble de monopôles d'amplitude égale à la densité μ du potentiel, le potentiel de double couche représentant, quant à lui, la réponse en un point M d'un ensemble d'amplitude égale à la densité μ de la double couche.

En s'appuyant sur la théorie des distributions. On peut trouver le comportement des potentiels de simple et double couche à la traversée de la surface Σ . Le potentiel de simple couche est continu à la traversée de la surface Σ , tandis que le potentiel de double couche subit une discontinuité égale à la densité de la couche.

En adoptant une formulation en potentiel de couche [43], la pression acoustique totale peut s'exprimer comme la somme de la pression incidente. Donc le potentiel en M , $\Phi(M)$ apparaît comme une superposition des potentiels créés par :

Une densité surfacique de sources :

$$\sigma(P) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_P \quad (3-19a)$$

Une densité surfacique de doublets normaux :

$$\mu(P) = \Phi(P) \quad (3-19b)$$

3-3-2 Distribution mixte de green-domaine extérieur:

Les théories précédentes, sont applicables à un champ scalaire harmonique $\Phi_e(M)$, défini dans un domaine extérieur Ω_e limité par Γ_{SF} et Σ la surface d'une sphère entourant entièrement le domaine Ω_i dont le rayon tend vers l'infini figure (3-3).

Les termes d'intégration sur cette frontière sont nuls, une fonction harmonique, régulière, tend vers zéro à l'infini comme 1/r.

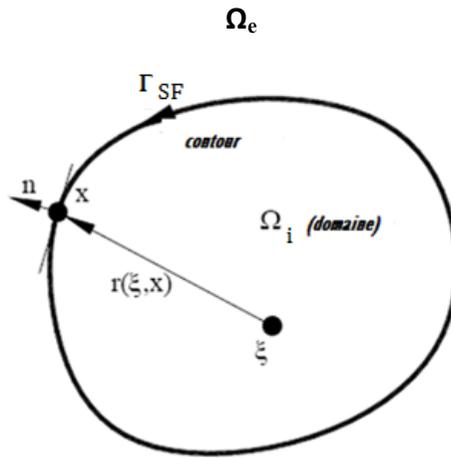


Figure 3-3: Représentation géométrique de « r » en fonction de x et xi

En choisissant comme normale à Γ_{SF} la normale extérieure au domaine intérieur Ω_i figure (3-4) on obtient :

$$-\int_{\Gamma_{SF}} \left\{ \Phi_e(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{P})}{\partial n_p} \right\} dS = \begin{cases} 0 & \text{si } M \in \Omega_i \\ -2\pi \Phi_e(M) & \text{si } M \in \Gamma_{SF} \\ -4\pi \Phi_e(M) & \text{si } M \in \Omega_e \end{cases} \quad (3-20)$$

3-3-4 Distribution mixte de green sur Γ_{SF} :

En ajoutant les représentations dans Ω_i et Ω_e , on obtient :

$$\int_{\Gamma_{SF}} \left\{ -(\Phi_e(\mathbf{P}) - \Phi_i(\mathbf{P})) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi_e(\mathbf{P})}{\partial n_p} - \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{P})}{\partial n_p} \right) \right\} dS =$$

$$-4\pi \Phi_i M \text{ si } M \in \Omega_i - 2\pi \Phi_e M \text{ si } M \in \Gamma_{SF} - 4\pi \Phi_e M \text{ si } M \in \Omega_e$$

(3-21)

Donc les densités surfaciques de singularité sur Γ_{SF} :

$$\begin{cases} \sigma(\mathbf{P}) = \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right) \\ \mu(\mathbf{P}) = -(\Phi_e - \Phi_i) \end{cases} \quad (3-22)$$

Induisent les potentiels Φ_e et Φ_i dans le domaine extérieur et intérieur et l'équation intégrale (3-21) devient :

$$\int_{\Gamma_{SF}} \left\{ \mu(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) \sigma(\mathbf{P}) \right\} d\mathbf{S} = \begin{cases} -4\pi \Phi_i(\mathbf{M}) & \text{si } \mathbf{M} \in \Omega_i \\ -2\pi(\Phi_i(\mathbf{M}) + \Phi_e(\mathbf{M})) & \text{si } \mathbf{M} \in \Gamma_{SF} \\ -4\pi \Phi_e(\mathbf{M}) & \text{si } \mathbf{M} \in \Omega_e \end{cases} \quad (3-23)$$

3-4 Discrétisation et résolution:

Notre cas concerne une plaque à deux dimensions immergée dans un fluide considéré comme milieu extérieur.

La distribution mixte de Green est obtenue en choisissant, comme potentiel intérieur Φ_i nul dans Ω_i et dans ces conditions la distribution surfacique de sources est définie sur Γ_{SF} par les équations (3-19a) et (3-19b):

$$\mu(\mathbf{P}) = -\Phi_e(\mathbf{P}) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{p}) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_{SF}$$

En dérivant l'équation (3-23) pour un point \mathbf{M} appartenant à la frontière Γ_{SF} il vient :

$$\frac{\mu(\mathbf{P})}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{SF}} \left\{ \mu(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{SF}} \left\{ \sigma(\mathbf{p}) \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\mathbf{S} \quad (3-24)$$

Pour résoudre cette équation intégrale, la méthode de discrétisation adoptée est une méthode de collocation par sous domaines qui consiste alors à subdiviser le contour de la surface en N intervalles Γ_i . On prendra par commodité le milieu des intervalles de discrétisation Γ_i , supportant des densités surfaciques de singularités constantes. Donc sur chaque élément j , $\mu(\mathbf{P})$ et $\sigma(\mathbf{p})$ restent égales à leur valeur moyennes μ_j et σ_j [43]. On approche alors la densité μ du potentiel de double couche par une fonction constante par morceaux sur chacun de ces intervalles. On a donc N inconnues : μ_j pour i variant de 1 à N

Dans ces conditions l'équation intégrale sur la facette complète est transformée en une somme d'intégrales calculées sur la surface de chaque facette i qui s'écrit :

Et après discrétisation en facettes planes, il vient :

$$\frac{\mu_i}{2} - \sum_{j=1}^N \mu_j \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\mathbf{S} \right) = \sum_{j=1}^N \sigma_j \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r} d\mathbf{S} \right) \quad (3-25)$$

Avec $r = |\mathbf{MP}|$, et M_i centre de l'élément i .

Ainsi le problème fluide discrétisé se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires :

$$[\mathbf{D}_e]\{\boldsymbol{\mu}\} = [\mathbf{S}_e]\{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (3-26)$$

$(\mathbf{d}_{ij})_i$: Représente la matrice des coefficients d'influence de doublets normaux, telle que :

$$(\mathbf{d}_{ij})_e = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_i^j - \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3-27)$$

$(\mathbf{S}_{ij})_i$: Représente la matrice des coefficients d'influence de source, telle que :

$$(\mathbf{S}_{ij})_i = \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{1}{r} dS \quad (3-28)$$

Sur Γ_{SF} :

$\sigma(p)$ s'identifie à la vitesse normale de la paroi $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \bar{V} \cdot \vec{n}$ et $\mu(P)$ au potentiel des vitesses. la connaissance de l'un ou l'autre de ces grandeurs ou une combinaison linéaire des deux, suffit pour résoudre complètement le problème.

Dans l'équation intégrale précédente, la fonction $1/r$ est remplacée par la fonction de Green du problème correspondant. Dans notre étude nous nous sommes limités au cas à deux dimensions, la fonction de Green « G » est égale à :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (3-29)$$

Pour le cas à deux dimensions. la discrétisation en « n » facettes ou éléments de la structure est remplacée par une discrétisation à segments.

3-5 Méthodes de calculs des équations intégrales pour un problème à deux dimensions.

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} \quad (3-30)$$

Les équations aux dérivées partielles sont : [6, 8, 35]

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r_1}{r} = \frac{x^i - x^k}{|r|} \quad (3-31a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r_2}{r} = \frac{y^i - y^k}{|r|} \quad (3-31b)$$

$$r = \sqrt{(x_M + x_p)^2 + (y_M + y_p)^2} \quad (3-32)$$

Avec :

$$x_M = \frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{\xi(x_2 - x_1)}{2} = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2 \quad (3-33a)$$

$$y_M = \frac{y_1 - y_2}{2} + \frac{\xi(y_2 - y_1)}{2} = \frac{1}{2}(1 - \xi)y_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)y_2 \quad (3-33b)$$

Où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont respectivement les coordonnées des extrémités du segment considéré figure (3-4).

La dérivée normale de $\ln r$ est exprimée comme suite :

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln r = \frac{r_{,x}}{|r|} n_x + \frac{r_{,y}}{|r|} n_y \quad (3-34)$$

En remplaçant chaque composante dans l'expression (3-30), on obtient la forme générale de l'équation intégrale en fonction de la distance entre la source au point P et le doublet normal sur la frontière au point M en fonction des coordonnées des nœuds du segment équation (3-35).

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \ln r = -\frac{1}{2\pi r^2} [(x_M - x_P)n_x + (y_M - y_P)n_y] \quad (3-35)$$

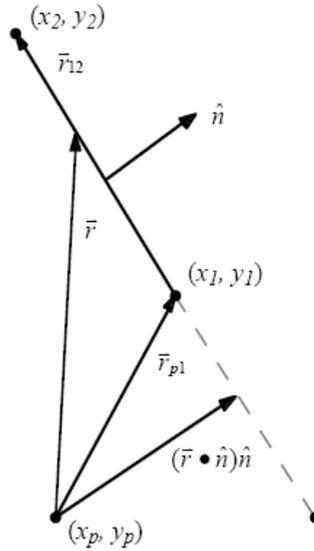


Figure 3-4: Représentation d'un point de source et d'un élément linéaire à la frontière

Après calcul des différents paramètres géométriques, nous pouvons calculer les matrices à coefficients d'influences $(D_{ij})_i, (S_{ij})_e$:

$$(D_{ij})_i = \frac{1}{2} \delta_i^j - \frac{1}{2\pi} \frac{(x_2 - x_1)n_x + (y_2 - y_1)n_y}{A + B\xi + C\xi^2} d\xi \quad (3-36)$$

$$(S_{ij})_e = \frac{1}{2\pi} s_j \ln \frac{1}{r} d\Gamma \quad (3-37)$$

Où

$$(S_{ij})_e = -\frac{1}{2\pi} s_j \ln r d\Gamma$$

$$(S_{ij})_e = -\frac{1}{2\pi} s_j \ln (A + B\xi + C\xi^2) d\xi \quad (3-38)$$

Avec :

$$A = r_{p1} \cdot r_{p1} \quad (3-39)$$

\bar{r}_{p1} : Distance entre le point source et premier point du segment

$$B = 2\bar{r}_{p1} \cdot r_{12} \quad (3-40)$$

$$C = r_{12} \cdot r_{12} \quad (3-41)$$

Nous constatons que les coefficients A, B, C dépendent uniquement de la géométrie de l'élément considéré ; et prennent des valeurs différentes selon l'élément et point source.

En remplaçant A, B, C par leurs expressions dans (3-36) et (3-37) nous obtenons l'expression de l'équation intégrale qui nous permet de calculer les éléments de la matrice $(D_{ij})_i$ et $(S_{ij})_i$.

Nous disposons donc des deux systèmes d'équations aux dérivées partielles caractérisant le comportement des solides d'une part, des fluides parfaits d'autres part.

3-6 Couplage entre le solide et le fluide :

3-6-1 Définition du couplage :

Les équations du fluide et celles de la structure sont couplées par deux types de conditions aux limites à l'interface :

- Continuité de vitesses : le fluide adhère aux parois ou d'une manière équivalente les vitesses du fluide et de la structure sont égales à l'interface.
- Continuité de forces de surface : les forces agissent à l'interface sur la structure sont égales et de sens contraire aux celles qui agissent sur le fluide

3-6-2 mise en équation du couplage :

L'analyse du fluide, par la méthode des Equations Intégrales permet d'exprimer le potentiel des vitesses aux centres des segments de la discrétisation de l'interface Γ_{SF} supportant des densités de singularités constantes par la relation :

$$\{\Phi\} = -[D]^{-1}[S]\{V_n\} \quad (3-42)$$

$\{V_n\}$: étant le vecteur des vitesses normales des centres des segments. En reprenant l'interpolation élément finis de la structure, et connaissant les coordonnées des centres des segments, on construit une matrice de couplage $[FS]$ qui permet d'exprimer la vitesse normale au centre de chaque segment en fonction des déplacements nodaux de la structure.

La vitesse normale en un point G_f (centre de l'élément) s'exprime en fonction des degrés de liberté de l'élément finis par :

$$(V_e)_{Gf} = \langle n_{Gf} \rangle [N_s]_{Gf} \{a\}_e \quad (3-43)$$

Cette relation fournit la fième ligne de la relation générale :

$$\{\mathbf{V}_n\} = [\mathbf{FS}]\{\dot{\mathbf{a}}\} \quad (3-44)$$

Et les potentiels des vitesses aux centre des facettes sont donnés par :

$$\{ \ } = -[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{S}][\mathbf{FS}]\{\dot{\mathbf{a}}\} \quad (3-45)$$

La formule de Lagrange permet d'exprimer les pressions dynamiques aux centres des éléments en fonction des déplacements nodaux :

$$\{ \ } = \rho_f[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{S}][\mathbf{FS}]\{\ddot{\mathbf{a}}\} \quad (3-46)$$

[S], [D] définies dans l'annexe [A7], [A8].

La force résultante des pressions dynamiques sur un segment i de normale $\vec{\mathbf{n}}_i$ et d'aire S_i est donc à $-\rho_f S_i \vec{\mathbf{n}}_i$. en considérons que cette force est appliquée au centre du segment, son travail virtuel s'écrit :

$$(\delta T_h)_i = \delta \vec{\mathbf{u}}_i \cdot (-\rho_f S_i \vec{\mathbf{n}}_i) \quad (3-47)$$

En regroupant sous forme matricielle le travail virtuel de toutes les forces qui s'exercent sur les « N » segments et en notant [A] la matrice diagonale des longueurs des segments, on obtient alors la force généralisée totale équivalente à la répartition de pression à l'interface :

$$\{ \ } = -\rho_f [\mathbf{FS}]^e [\mathbf{A}] [\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{S}] [\mathbf{FS}] \{\ddot{\mathbf{a}}\} \quad (3-48)$$

Soit

$$\{ \mathbf{h} \} = \rho_f [\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{a}}\} \quad (3-49)$$

La pression appliquée par le fluide au repos sur la structure lors du contact peut être exprimée en fonction de l'accélération du système. La présence de fluide augmente l'inertie du système en ajoutant à la masse du solide une masse additionnelle « Ma » induite par le fluide, déterminée par la relation (3-50) :

$$[\mathbf{M}_a] = \rho_f [\mathbf{FS}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{D}]^{-1} [\mathbf{S}] [\mathbf{FS}] \quad (3-50)$$

Le système couplé est donc régit par l'équation (3-51):

$$([\mathbf{M}_s] + [\mathbf{M}_a])\{\ddot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{K}_s]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3-51)$$

Pour un système structurel avec NDDL, la matrice de raideur et la matrice masse de l'équation (3-51) à dimension NxN. En utilisant les équations citées au chapitre2 le système discrétisée devient :

$$([\mathbf{M}_s] + [\mathbf{M}_a])\{\dot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{K}_s]\{\mathbf{d}\} = \mathbf{0} \quad (3-52)$$

La solution pour un problème de vibration libre est :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \exp(i\omega t) \quad (3-53)$$

Où d est l'amplitude de déplacement nodal, ω est la fréquence de vibration libre. En remplaçant (3-53) dans (3-52) on obtient :

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3-54)$$

Les pulsations propres sont déterminées par la résolution de l'équation (3-54).

Chapitre 4

Organisation de la programmation

Chapitre 4 : Organisation de la programmation

4-1 Introduction

Il existe une diversité de méthodes numériques, depuis ces dernières décennies, les sciences des matériaux ont connu une renaissance grâce aux développements des outils de simulation. La simulation numérique est devenue une troisième voie de recherche entre la théorie et l'expérience. A l'heure actuelle, les simulations numériques permettent de traiter la majeure partie des problèmes physiques ouverts et les modèles utilisés ne cessent d'évoluer. La possibilité de simuler des phénomènes toujours plus complexes entraîne toutefois une augmentation du nombre de grandeurs physiques nécessaires à la caractérisation des matériaux en utilisant des modèles numériques. Les résultats numériques peuvent ainsi contribuer à l'acceptation ou bien au rejet des théories analytiques et peuvent également indiquer les directions dans lesquelles de nouvelles approches doivent être développées.

La résolution du problème de vibration d'un système couplé solide en interaction avec un fluide, est ramené à résoudre un système d'équations différentielles qui nécessite l'utilisation de ces méthodes numériques d'où la nécessité d'élaborer un programme de calcul.

La machine utilisée pour la réalisation du programme de calcul et l'exécution des exemples choisis est un PC HP Pentium dual-core, 2 Giga de ram sous Windows Vista.

Le langage de programmation utilisé est le Matlab version 7.0.6.324 (R2008a)

Le calcul est réalisé sur le logiciel wolfram Mathematica version 7.0

On a utilisé le logiciel FEMLAB Multiphysics qui nous a permis de valider les résultats obtenus par notre programme.

4-2 Description du programme

Le programme élaboré suivant l'organigramme ci-dessous, permet de calculer des matrices élémentaires de raideur $[K_S]$, de masse $[M_S]$ du solide pour chaque

élément, la matrice masse ajoutée $[M_a]$ du fluide, et les matrices d'assemblage, suivant le maillage figure (4-1) application des conditions aux limites, ainsi que la résolution du système des équations différentielles du problème couplé aux valeurs propres avec l'instruction « eig » c.à.d. eigenvalues.

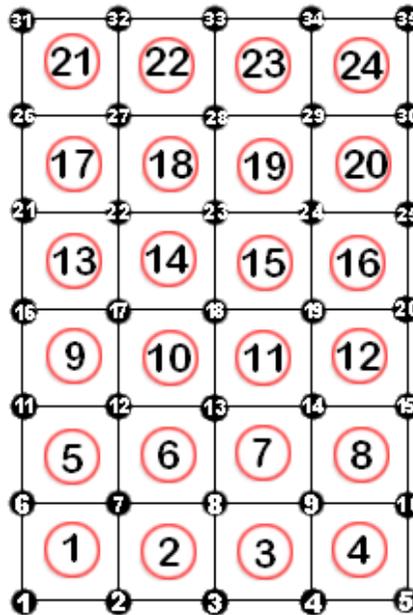


Figure 4-1 : Schéma de maillage et de numérotation de la structure

Le programme est constitué d'un programme principal qui fait appel à un ensemble de sous programmes (subroutines) :

- ✚ felp2dr4m
- ✚ felp2dr4
- ✚ belfluid
- ✚ feasmb1k
- ✚ feasmb1m
- ✚ feasmb1ma
- ✚ feeldof
- ✚ feaplybc

Le programme principal :

Il est destiné à faire la lecture des données physiques et géométriques de la plaque et du fluide, l'exécution des différentes étapes de calculs et donner les résultats qui représentent les fréquences de vibration du système, il comprend :

Data input

- Numérotation des nœuds et des éléments :
 - nel : nombre d'éléments
 - nnel : nombre de nœuds par élément
 - ndof : nombre de degrés de liberté par nœud
 - nnode : nombre de nœuds total
 - edof : nombre de degrés de degrés de libertés par élément
 - sdof : nombre de degrés de libertés total
- Coordonnées et connectivités
 - gcoor : les coordonnées de chaque nœud
 - nodes(i,j) : connectivité entre les éléments
 - ie : numéros de l'élément
 - nd(i) : numéros de nœud
- Conditions aux limites
 - bcdof(i) : numéros des nœuds auxquels sont imposés les conditions aux limites
 - bcval(i) : valeur de la condition aux limites imposées
- Paramètres géométriques et physiques
 - xleng : longueur de l'élément suivant l'axe x
 - yleng : longueur de l'élément suivant l'axe y
 - Nu : coefficient de poisson
 - emod : module de Young
 - rho : masse volumique de la plaque
 - rhof : masse volumique du fluide

Sous programmes (subroutines):**felp2dr4 :**

Calcul de la matrice de raideur élémentaire pour chaque élément $[K_S]^e$

felp2dr4m :

Calcul de la matrice masse élémentaire pour chaque élément $[M_S]^e$

belfluid :

Calcul de la matrice masse-ajoutée élémentaire $[m_a]^e$

feeldof :

Extraction des indices de degrés de liberté pour chaque élément

feasmb11k :

Calcul de matrice d'assemblage raideur $[K_s]$

feasmb11m :

Calcul de la matrice d'assemblage de la masse du solide, $[M_s]$,

feasmb11ma :

Calcul de la matrice d'assemblage de la masse ajoutée, $[M_a]$

feaplybc :

Application des conditions aux limites par élimination des degrés de libertés nuls. Dans notre cas déplacements nuls pour les nœuds du bord encastré de la plaque ce qui implique valeur nulle pour les trois degrés de liberté du nœud $(w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})$.

[V, D]= eig(m,k) : Cette instruction permet de résoudre et donner les valeurs des fréquences propres de vibration dans un ordre croissant.

4-3 Résolution

En Suivant l'ordre de calcul des différents éléments qui composent l'expression des équations différentielles (3-52) données au chapitre 3 :

$$([M_s] + [M_a])\{\ddot{d}\} + [K_s]\{d\} = 0$$

On est ramené à résoudre le système d'équations différentielles (3-54) données au chapitre 3 :

$$[K - \omega^2 M]d = 0$$

Avec $M=M_s + M_a$ et ω^2 fréquences su système

Cette résolution se fait aux valeurs propres par Matlab en utilisant une des méthodes numériques qui sont intégrées au logiciel.

Les matrices K et M sont deux matrices symétriques de taille $n \times n$ (n = nombre de degrés de liberté total non nul), on procède à un changement de variable $\omega^2 = \lambda$ nous obtenons :

$$[K - \lambda M]d = 0 \tag{4-1}$$

On écrit cette équation sous la forme :

$$Kd = \lambda Md \tag{4-2}$$

La méthode utilisée est « la méthode des itérations inverses »

Le problème est transformé en forme standard avant d'être résolu par la méthode Jacobi.

M est défini positive et symétrique une décomposition de Cholesky est appliquée :

$$M = LL^T \quad (4-3)$$

Où L est une matrice triangulaire

On introduit la transformation suivante :

$$d = (L^{-1})^T z \quad (4-4)$$

En substituant dans l'équation (4-2) on a :

$$K(L^{-1})^T z = \lambda LL^T (L^{-1})^T z \quad (4-5)$$

En multipliant cette équation par L^{-1} nous obtenons :

$$L^{-1}K(L^{-1})^T z = \lambda L^{-1}LL^T (L^{-1})^T z \quad (4-6)$$

$$\text{On note que } L^{-1}L = L^T(L^{-1})^T = I \quad (4-7)$$

L'équation (4-6) est exprimée sous la forme standard :

$$Hz = \lambda d \quad (4-8)$$

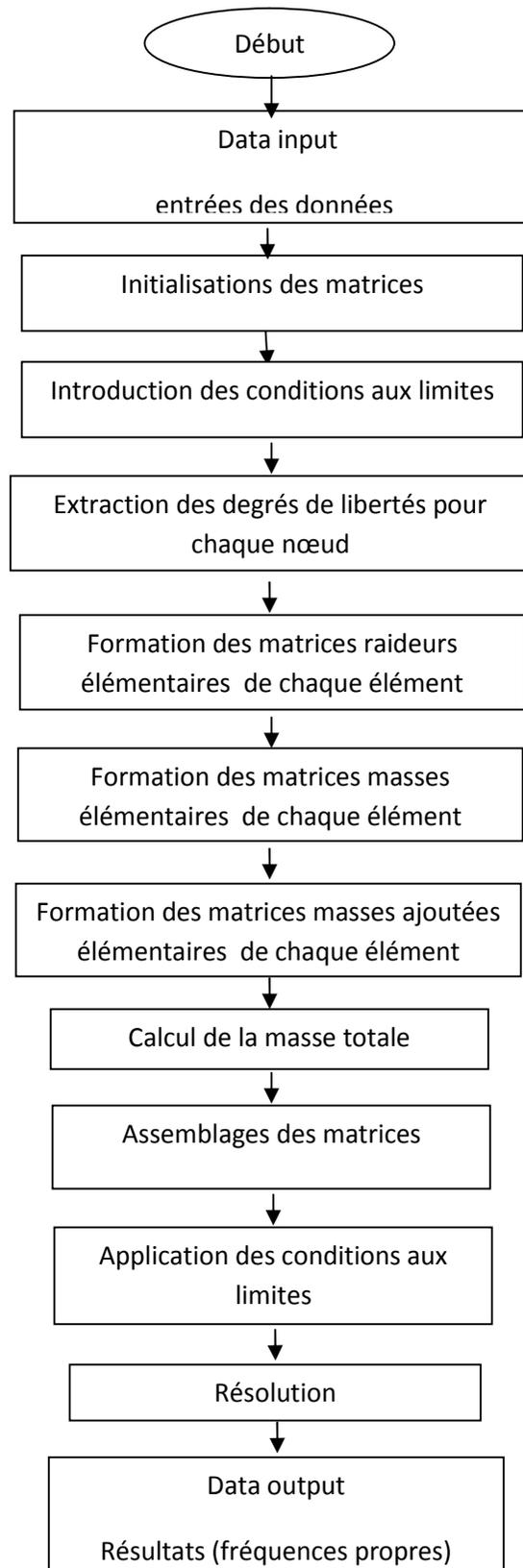
Où :

$$H = L^{-1}K(L^{-1})^T \quad (4-9)$$

L'algorithme de résolution est comme suit :

1. Décomposition de cholesky $M=LL^T$
2. Calcul de L^{-1} (matrice triangulaire inverse)
3. Calcul de H de l'équation (4-9)
4. Résolution du problème standard aux valeurs propres $Hx=\lambda x$ (en utilisant la méthode du Jacobi)
5. Retrouver les vecteurs propres du problème original par l'équation (4-4)
 $X = (L^{-1})^T Z$

4-4 : Organigramme



Chapitre 5

Résultats et Interprétations

5-1 Introduction

Plusieurs paramètres peuvent influencer la vibration d'une plaque. Nous allons axer notre étude sur la variation des paramètres géométriques a/b , d/a et h/b grandeurs illustrées sur la figure (5-1) et observer leurs influences sur les caractéristiques dynamiques de la plaque, mais il faut en premier temps procéder à la validation du programme élaboré sous Matlab, par une étude de la convergence et une comparaison avec les résultats de la littérature.

5-2 Validation du programme

Afin de s'assurer que le programme est valide, une étude de convergence est établie. Les résultats que nous avons obtenus par la programmation sont comparés avec les résultats donnés par les références.

Pour cela nous considérons une plaque rectangulaire cantilever figure (5-1) : nous calculons les paramètres de fréquences ainsi que les fréquences de vibration pour les six premiers modes.

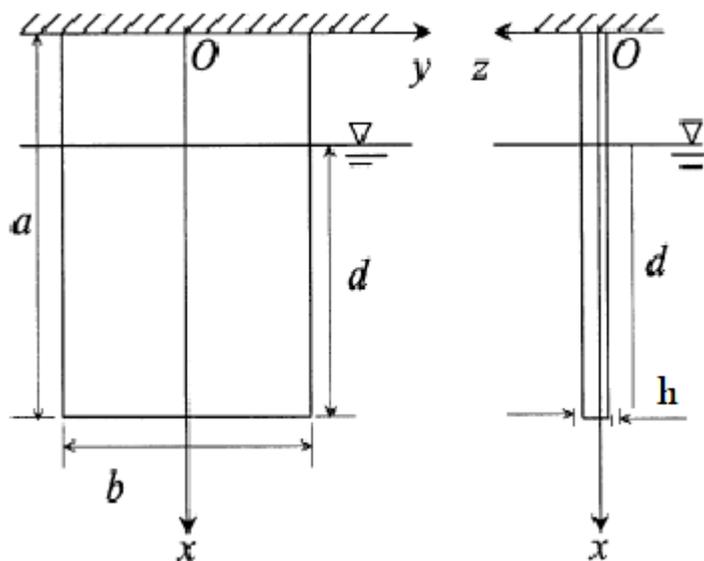


Figure 5-1 : plaque partiellement immergée

Les caractéristiques géométriques et matérielles de la plaque étudiée sont définies comme suit :

- a : longueur de la plaque
- b : largeur de plaque
- h : épaisseur de la plaque
- d : hauteur immergée
- Coefficient de poisson $\nu = 0.3$
- Module de Young $E = 206 \text{ GPA}$
- $\rho = 7830 \text{ Kg/m}^3$: masse volumique du solide
- $\rho_f = 10^3 \text{ Kg/m}^3$: masse volumique du fluide
- Rapport de la longueur sur la largeur a/b : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5
- Rapport de l'épaisseur sur la largeur h/b : 0.002 ; 0.006 ; 0.012
- Rapport de la longueur sur la hauteur immergée d/a : 0.25 ; 0.5 ; 0.75 ; 1.
- Paramètre de fréquence B : $B = \omega \cdot a^2 (\rho h / D)^{1/2}$ avec $\omega (\text{rad.s}^{-1})$ la pulsation.

5-2 Validation du programme

On donne sur le tableau (5-1) la variation des valeurs des fréquences des six premiers modes en fonction du nombre d'éléments :

mode	Nombre d'éléments			
	21 éléments	35 éléments	114 éléments	144 éléments
1	8.36	4.92	4.04	3.94
2	14.01	20.21	24.71	24.7
3	48.8	51.04	38.93	38.85
4	57.7	65.53	69.7	69.41
5	74.05	129.69	120.14	120.17
6	130.06	133.22	136.36	136.67

Tableau 5-1 : convergence des fréquences (Hz) en fonction du maillage

Nous constatons sur le tableau (5-1), plus le maillage est raffiné (nombre d'élément plus grand et la taille de l'élément est plus petite) plus les valeurs des fréquences convergent vers une valeur constante ; ces valeurs que nous pouvons comparer aux valeurs références tableau (5-3).

On donne sur les tableaux (5-2) et (5-3) les différents résultats numériques. Cette comparaison est faite avec les résultats numériques donnés par technique de l'ingénieur [46], les résultats obtenus par A.Ergin [12] ainsi que les résultats expérimentaux de Lindholm [31]. Nous avons également validé les résultats sur le logiciel FEMLAB.

Afin de valider nos résultats, on procède à la variation des rapports longueur/largeur (a/b) comme indiqués sur le tableau (5-2) dans un premier temps, puis nous avons calculé les fréquences propres pour un rapport longueur/largeur (a/b=5)

Paramètres de fréquence B pour les six premiers modes							
	Résultats obtenus			Réf [47]			
	Rapport a/b			Rapport a/b			$\varepsilon\%$
Mode	1	2	5	1	2	5	
1	1.03	1.02	1.01	1.01	1	1	.9
2	2.52	4.38	6.36	2.47	4.31	6.21	2.3
3	6.34	6.4	9.99	6.19	6.24	10.02	.3
4	8.15	14.31	17.9	7.83	14.06	20.57	1.7
5	9.21	18.09	30.85	9	27.28	30.85	2.2
6	16.19	27.82	35.11	/	/	/	/

Tableau 5-2: valeurs des paramètres de fréquence

Fréquences naturelles (Hz) pour a/b =5						
Mode	Type mode	résultats obtenus	Résultats obtenus par FEMLAB	Réf [12]	Réf [31] Exp	$\varepsilon\%$
1	S	3.94	3.94	3.94	3.85	0
2	S	24.7	26.3	24.66	32.42	.16
3	A	38.85	39.33	39.24	39.1	1
4	S	69.41	69.52	69.24	68.1	.24
5	A	120.17	119.9	119.47	121	.58
6	S	136.67	136.68	136.35	/	.23

Tableau 5-3: valeurs des fréquences naturelles (Hz)

Où $\varepsilon\%$: est l'écart relative (précision) entre les résultats que nous avons obtenu à l'aide du programme réalisé et ceux des références.

En analysant les résultats obtenus par notre programme donnés dans le tableau (5-2) où nous avons présenté les paramètres de fréquences pour différents rapports longueur sur largeur ($a/b = 1, 2$ et 3) de la plaque, nous remarquons que les paramètres de fréquence pour les six premiers modes sont en concordance avec ceux données dans la référence [47].

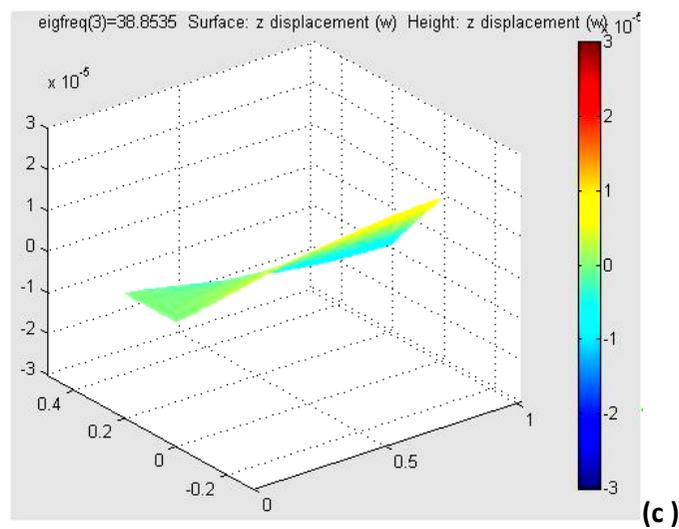
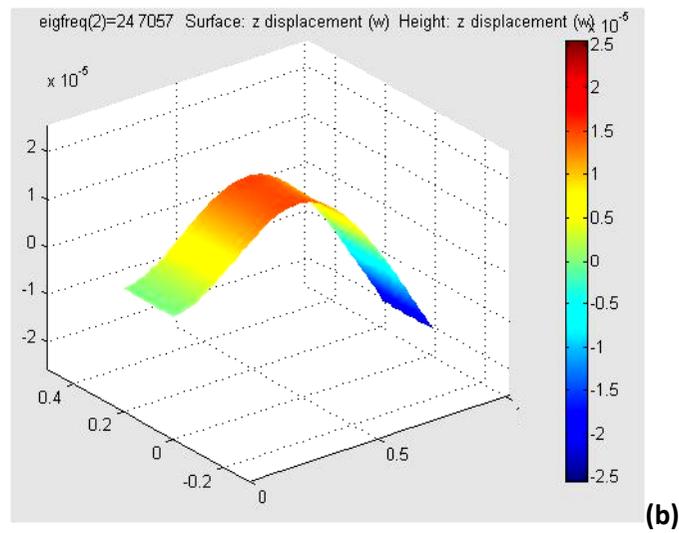
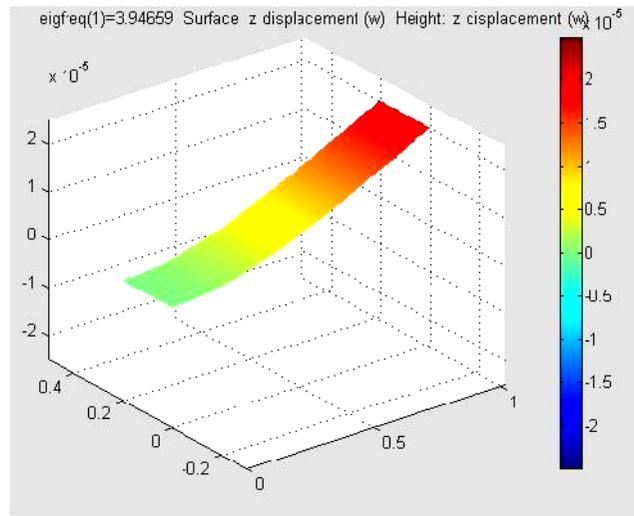
Le tableau (5-3) représente les fréquences naturelles pour un rapport longueur/largeur ($a/b=5$), nous remarquons que les valeurs des six premières fréquences se rapprochent des valeurs de référence [12], avec une précision variant de 0.% à 3%, ce qui montre que ces résultats numériques sont en bonne concordance avec les valeurs expérimentales [31], nous concluons que notre programme est validé.

5-3 Tracé des formes propres

En exploitant l'interface Matlab, nous pouvons tracer la cartographie de la flèche (notée w) de la plaque pour chaque mode vibratoire, et dissocier le mode vibratoire flexionnel (noté S) et le mode torsionnel (noté A) figure (5-2).

La représentation donnée par les figures (5-3) et (5-4), des formes des six premiers modes de vibrations de la plaque par les éléments finis, est obtenue par simulation par éléments finis sur le logiciel ANSYS (1994) [1,12].

Ainsi nous avons pu procéder à une comparaison du tracé des formes des modes obtenus avec ceux des références figures (5-3).



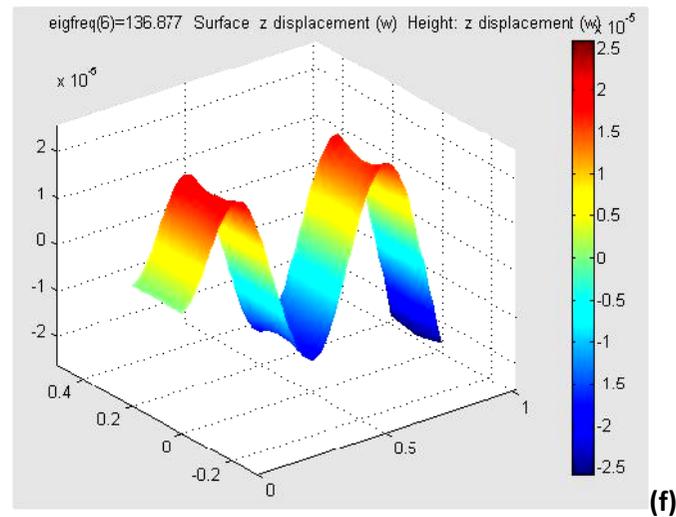
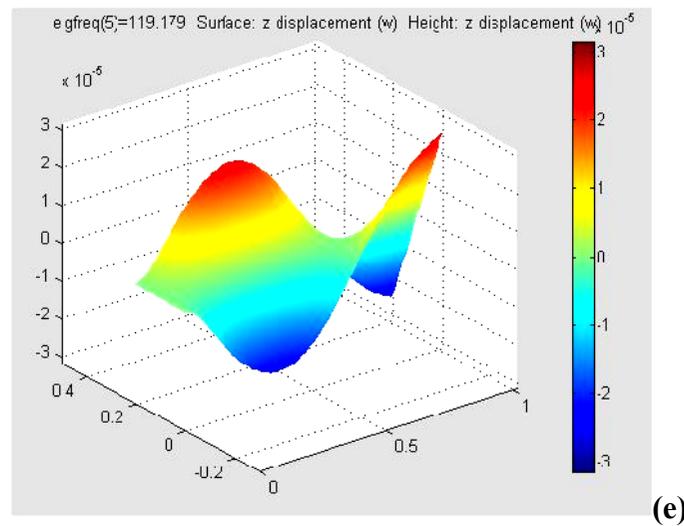
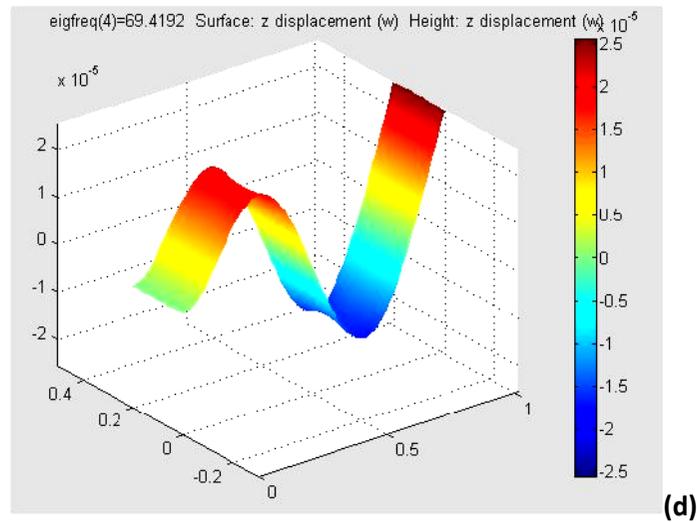


Figure 5-2 : Représentation des six premières formes modales vibratoires d'une plaque rectangulaire cantilever par éléments finis (sous Matlab). (a) mode 1 (S), (b) mode 2 (S), (c) mode 3 (A), (d) mode 4 (S), (e) mode 5 (A), (f) mode 6 (S).

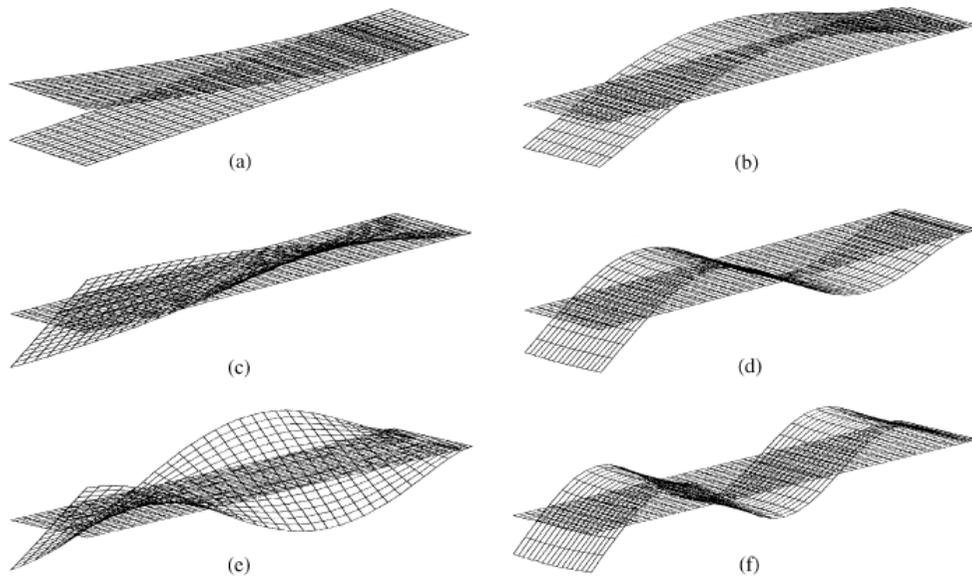


Figure 5-3 : Représentation des six premières formes modales vibratoires d'une plaque rectangulaire cantilever par éléments finis (cas dans le vide). (a) mode 1, (b) mode 2, (c) mode 3, (d) mode 4, (e) mode 5, (f) mode 6, [1][12]

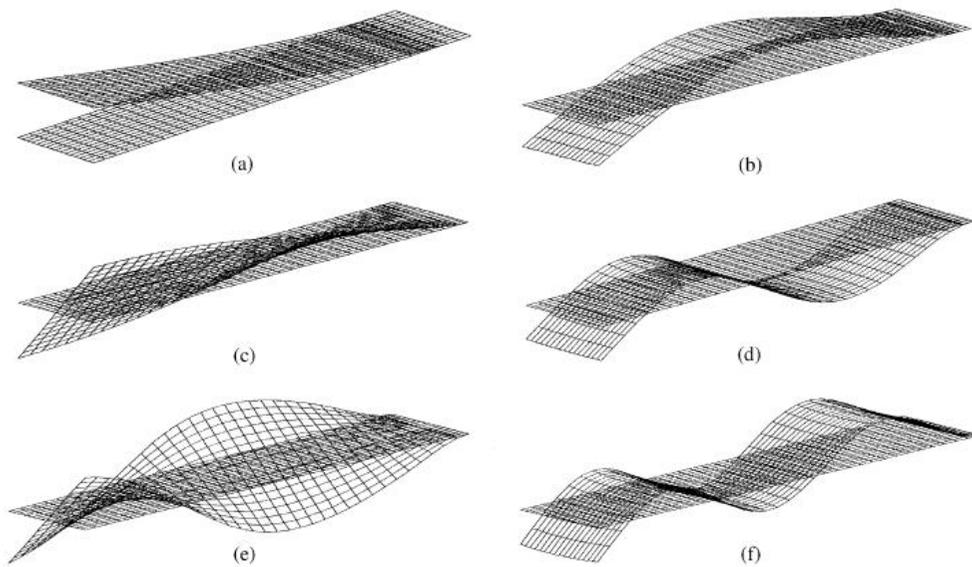


Figure 5-4 : Représentation des six premières formes modales vibratoires d'une plaque rectangulaire cantilever par éléments finis (immergée dans un fluide). (a) mode 1, (b) mode 2, (c) mode 3, (d) mode 4, (e) mode 5, (f) mode 6.

Nous remarquons également que les tracés des six premiers modes que nous avons calculés et réalisés sous l'interface de Matlab présentent les mêmes allures que ceux de la référence [1] et [12].

Nous constatons sur la figure (5-3) et (5-4), présentent les mêmes formes avec l'existence d'une légère variation entre le cas d'une plaque immergée et plaque dans le vide.

5-4 Influence des paramètres géométriques

Etudions l'influence des différents paramètres géométriques sur les fréquences des six premiers modes.

Pour cela nous considérons une plaque encastrée-libre (cantilever), nous faisons varier les paramètres géométriques suivants :

Cas 1 : Variation du rapport de la hauteur d'immersion/la longueur de la plaque (d/a)

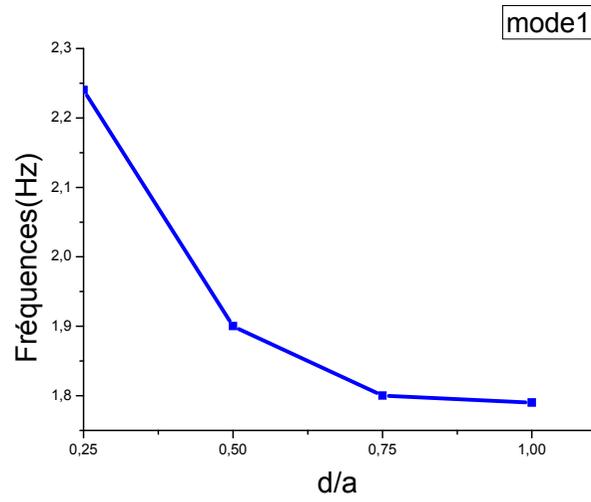
Le tableau (5-4) nous donne les valeurs des fréquences pour les six premiers modes de vibration en fonction de la variation des rapports hauteur d'immersion sur la longueur de la plaque ($d/a= 0.25, 0.5, 0.75, \text{ et } 1$).

Le tableau nous montre également une comparaison des fréquences entre les résultats obtenus et les résultats expérimentaux de Lindlhom [31], nous remarquons que nos valeurs sont en concordance.

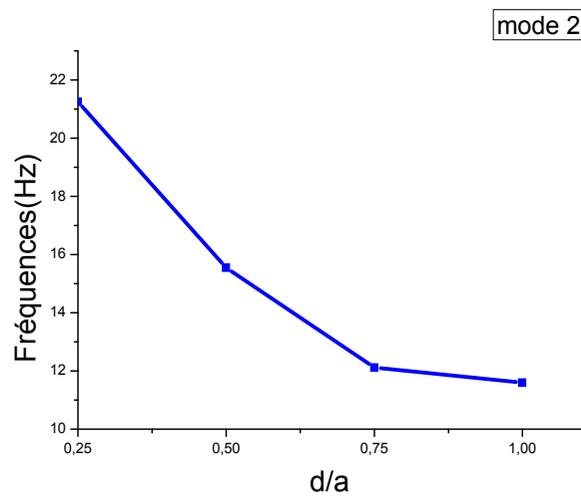
On constate sur la figure (5-5) que les fréquences diminuent au fur et à mesure que le rapport d/a augmente c.à.d. que la hauteur d'immersion augmente. Ceci est dû au fait que la surface exposée au fluide devient plus grande, d'où un effet d'inertie plus grand qui induit une masse ajoutée plus grande.

Modes	Nos résultats Rapport d/a					Résultats expérimentaux [31] Rapport d/a				
	air	0.25	0.5	0.75	1	air	0.25	0.5	0.75	1
1	3.94	2.24	1.9	1.8	1.79	3.84	2.179	1.82	1.79	1.78
2	24.7	21.25	15.55	12.12	11.6	24.2	21.01	15.5	11.99	11.5
3	38.85	29.21	25.22	23.99	23.8	39.1	29.75	25.5	24.2	24.2
4	69.41	59.98	52.15	38.55	34.3	68.1	57.36	51.6	38.27	33.5
5	120.17	104.5	93.1	76.73	73.42	121	106.35	95.79	79	75.26
6	136.67	116	98.88	84.49	71.5	/	/	/	/	/

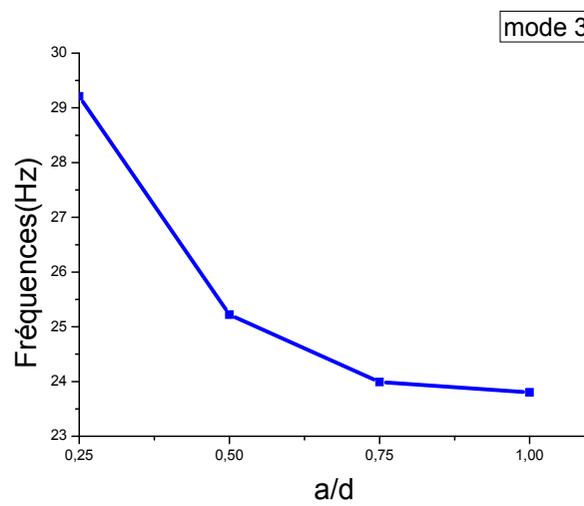
Tableau 5-4: valeurs des fréquences (Hz) pour la plaque partiellement ou totalement immergée



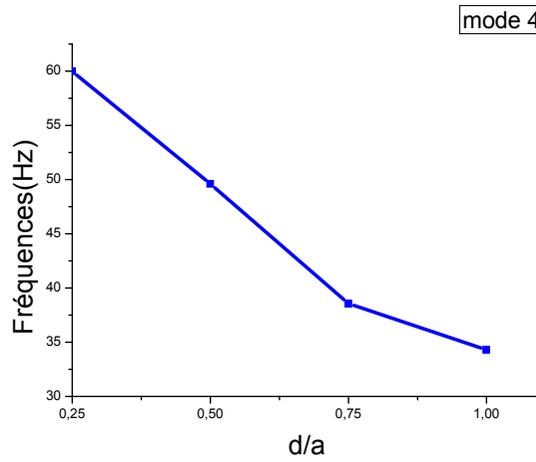
(a)



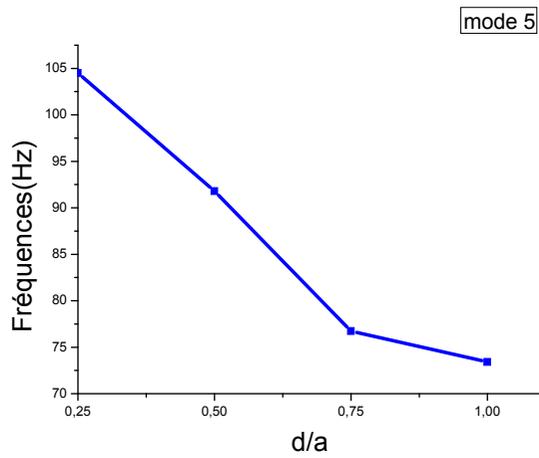
(b)



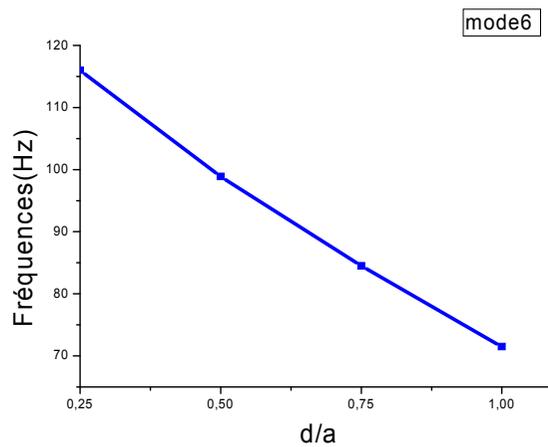
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 5-5 : Représentation de la variation de la fréquence en fonction du rapport hauteur d’immersion/longueur (d/a) pour les six modes, (a) mode 1, (b) mode 2, (c) mode 3, (d) mode 4, (e) mode 5, (f) mode 6.

Cas 2 : Variation du rapport de l'épaisseur/largeur (h/b)

Nous calculons les fréquences en fonction du rapport de la longueur/largeur (a/b) pour le rapport de hauteur d'immersion /longueur de la plaque ($d/a=0.5$). Les résultats sont donnés sur le tableau (5-5) et présentés sur les graphes (5-6).

		$(h/b) = 0.002$				
a/b		1	2	3	4	5
mode						
1		66.6	10.1	5.03	2.1	1.01
2		150.01	75.11	50.03	47.1	45.8
3		533.34	133.4	66.7	65.5	60.02
4		622.23	311.12	155.56	77.78	75.01
5		800.4	400.1	200.04	133.4	88.9
6		1906.12	500.01	300.31	200.12	100.03

		$(h/b) = 0.006$				
a/b		1	2	3	4	5
mode						
1		200.1	44.5	22	10	2
2		500.31	200.07	125.1	75.22	50.02
3		1466.7	333.4	200.1	150.3	120.03
4		1866.67	777.78	388.89	272.23	155.56
5		2133.34	889.01	355.56	266.67	177.78
6		2700.3	1002.02	500.2	400.19	300.3

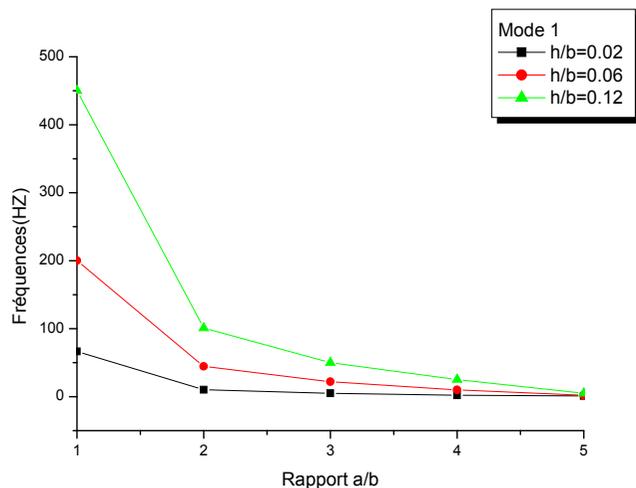
		$(h/b) = 0.012$				
a/b		1	2	3	4	5
mode						
1		450.2	101.01	50.001	25.2	5.02
2		1050.51	450.1	300.08	175.11	100.03
3		2666.68	733.34	333.51	200.02	133.4
4		2800.4	777.78	466.67	233.34	194.45
5		3688.89	1688.9	889.01	533.34	355.56
6		4200.3	2100.5	1000.21	801.12	600.11

Tableau 5-5 : Fréquences des six premiers modes pour cinq valeurs de a/b

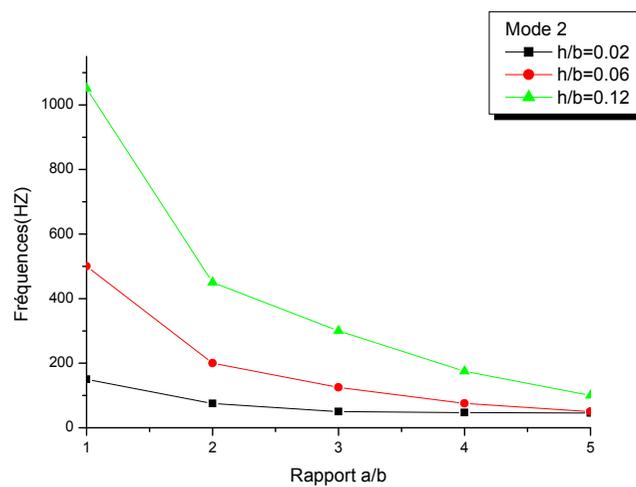
$h/b=0.002$, $h/b=0.006$, $h/b=0.012$.

Les tableaux (5-5) expriment les valeurs des fréquences en fonction des rapports longueur/largeur pour trois rapports d'épaisseur/largeur différents. Ces tableaux nous permettent de tracer les graphes représentés sur la figure (5-6) pour une plaque partiellement immergée dans le fluide pour un rapport de $d/a = 0.5$.

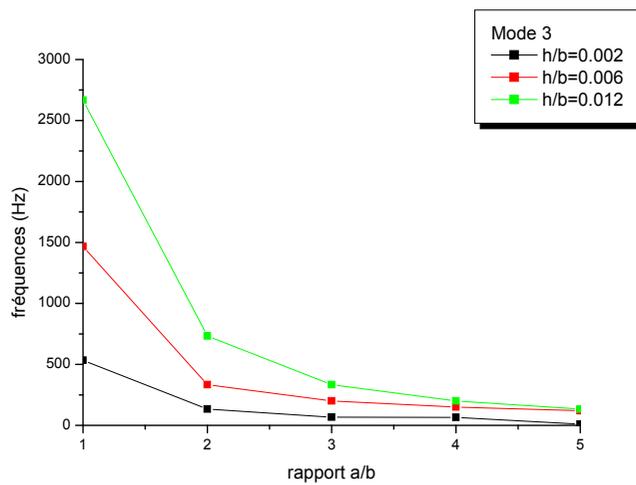
Nous remarquons sur le tracé des courbes figure (5-6), que les fréquences augmentent quand le rapport épaisseur/largeur augmente par effet de rigidité, et diminuent quand le rapport longueur/largeur augmente par effet d-inertie.



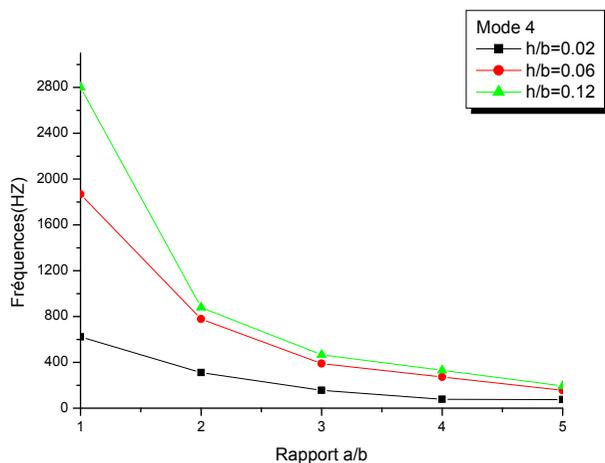
(a)



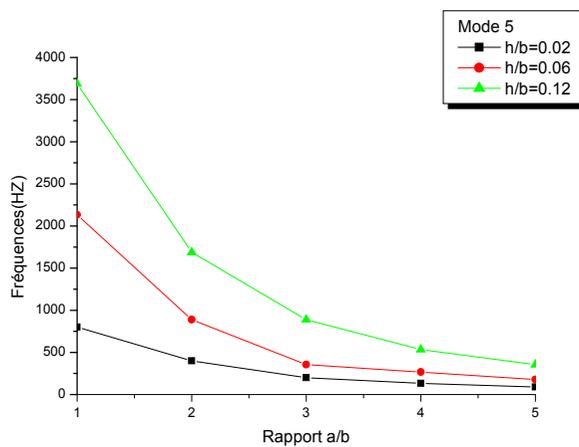
(b)



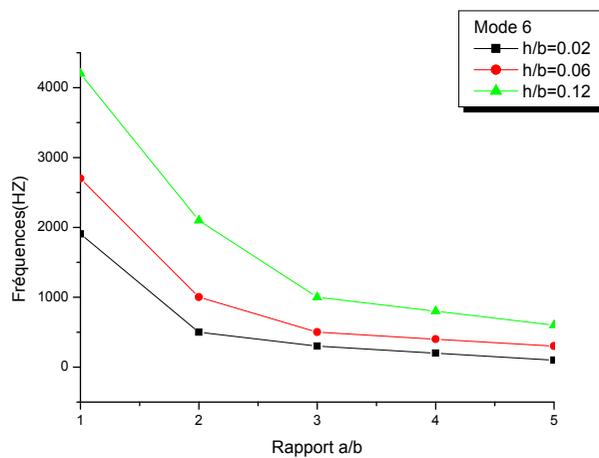
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 5-6 : Variation de la fréquence des six premiers modes en fonction de la variation du rapport a/b pour trois rapports h/b, et avec a/d=0.5.

Dans cette investigation, nous avons fait varier les rapports géométriques de la plaque à savoir a/b , d/a , h/b , et observer leur influence sur les caractéristiques dynamiques de la plaque partiellement immergée à savoir les fréquences de vibration. Les calculs ont été réalisés pour un rapport de $d/a=0.5$, cinq différents rapports a/b égal à 1, 2, 3, 4 et 5, et pour un rapport de h/b égal à 0.02, 0.06, 0.12.

D'après les valeurs du tableau (5-4), en comparant les valeurs calculées des fréquences de vibration de la plaque dans l'air avec les valeurs des fréquences de la plaque immergée, on note que ces dernières sont plus faibles. Nous remarquons sur les graphes figure (5-5) qu'elles diminuent lorsque la surface immergée est plus grande c.à.d. quand le rapport d/a augmente. Ceci est dû à l'augmentation de la masse ajoutée dans le cas où le volume du fluide entourant la plaque augmente.

Ce que nous constatons également sur les graphes figure (5-6 a, b, c, d, e, f), que la fréquence décroît quand le rapport a/b croît ; cependant l'augmentation du rapport h/b provoque une augmentation en valeur des fréquences. L'épaisseur augmente implique augmentation de la fréquence et une augmentation de la rigidité.

Comme conclusion, l'effet d'inertie provoque la diminution de la fréquence, et l'effet de rigidité induit une augmentation de la fréquence.

Conclusion

Ce travail nous a permis d'étudier les vibrations libres d'une plaque cantilever partiellement et totalement immergée dans un fluide, où les fréquences naturelles associées aux modes propres ont été déterminées.

Le mouvement des particules du fluide, au voisinage de la structure, génère une variation de pression, on parle alors de " couplage " entre la structure et le fluide.

Il est nécessaire d'établir une formulation adaptée pour la résolution des équations structure-fluide, en utilisant des méthodes numériques, notre choix fut porté sur le couplage « *élément finis- éléments aux frontières* » :

La modélisation du solide est réalisée par la méthode des éléments finis, celle du fluide, par la méthode des éléments aux frontières (ou BEM) fondées sur les équations intégrales.

Parmi les méthodes qui définissent l'interaction des deux milieux et prennent en compte la force d'inertie du fluide agissant sur la structure, nous utilisons l'hypothèse de la masse ajoutée. Celle-ci est déterminée et additionnée à celle du solide. Le système d'équations différentielles défini régit le comportement vibratoire de l'ensemble solide-fluide.

Après avoir validé le programme élaboré, sur Matlab, nous avons étudié plusieurs cas qui nous ont permis de déterminer l'influence des paramètres géométriques de la plaque sur les caractéristiques dynamiques, que nous pouvons résumer comme suit :

- L'augmentation du rapport longueur/largeur, engendre une augmentation de la fréquence d'où une augmentation de la rigidité de la structure.
- L'augmentation du rapport hauteur d'immersion/ longueur, engendre une diminution des fréquences c.à.d. une masse ajoutée plus importante.
- L'augmentation du rapport épaisseur/largeur donne des valeurs de fréquences plus grandes, augmentation de la rigidité.
- L'augmentation du rapport longueur/largeur engendre une diminution de ces mêmes fréquences.

Dans un travail futur nous proposons d'étudier un fluide compressible, ou l'endommagement de structure sous l'influence de l'interaction solide-fluide.

Références bibliographiques

1. ANSYS. 1994. User's Manual. ANSYS, Inc., Houston.
2. JEAN LOUIS BATOZ, GOURI DHATTV1. **Modélisation des structures par élément finis solides élastiques.** Edition HERMES
3. GERRNOT BEER, IAN SMITH, CHRISTIAN DUE DUENSER. **The Boundary Element Method with programming For Engineers and Scientists.**
4. JOHN BOTSIS, MICHEL DEVILLE. **MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS : UNE INTRODUCTION.** PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES.
5. BERRY ET REISSNER 1958. **The effect of an internal compressible fluid column on the breathing vibration of a thin pressured cylindrical shell.** Journal of aerospace Science N 25, P288-294.
6. BONNET G, SEGHIR A, CORFDIR A, **Coupling BEM with FEM by a direct computation of the boundary stiffness matrix, Compute Methods Appl Mesh Eng** 2009; 198:2439-45.
7. ALAIN BOUVIER ET MICHEL GEORGE. **dictionnaire des mathématiques.** sous la direction de François le Léonais presses universitaires de FRANCE
8. C.A BREBBIA AND J.DOMINGUEZ. **Boundary Elements.** An Introductory Course. Second edition
9. Y.K CHENG et ZHOU. 2000 **coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate.** Journal of fluids and structures V14, P339-357.
10. Y.K CHENG et ZHOU. 2002 **hydroelastic vibration of circular container bottom plate using the Galerkin method.** Journal of fluids and structures V16 (4), P561-580.
11. C.W.COALE ET M.NAGANO 1965. **Axisymmetric modes of an elastic cylindrical-hemispherical tank partially filled with liquid AIAA.** Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity
12. A.ERGIN, B. UGURLU. **Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid.** Journal of fluid and structures 17 (2003) 927-939.

13. EVERSTINE GC, HENDERSON FM. **Coupled finite element/boundary element approach for fluid structure interaction.** J Acoust Soc Am 1990, 87: 1938-47.
14. FREDHOLM, I. (1903) **sur une classe d'équations fonctionnelles.** Acta Math. 27, 365-90
15. FU ET Y. PRICE.W.G .1987 **interaction between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid.** Journal of Sound and Vibration 118, 495-513
16. JEAN- NOEL GENCE. Professeur des Universités, Lyon 1. **MÉCANIQUE DES FLUIDES. Les écoulements des fluides newtoniens. Principaux mécanismes associés aux mouvements des fluides.** Edition ellipse.
17. PEDRO J.HERRERA FRANCO. A.A Becker. **The Boundary Element Method in Engineering.** A complete course. Department of Mechanical Engineering. University of Nottingham. McGraw-HILL BOOK COMPANY
18. HESS, J.L., SMITH, A.M.O., 1967. **Calculation of potential flow about arbitrary bodies.** Kuchemann, D., et al., (Eds), Progress in Aeronautical Sciences. Vol., 8, pp.1-138
19. PETER HUNTER. FEM/BEM NOTES. Associate professor Andrew Pullon. Department of engineering Science. The University of Auckland New Zealand. February 21, 2001.
20. P. JUHL (1998). **A note on convergence of the Direct collocation Boundary Element Method,** *journal of Sound of Sound Vibration*, 212(4), 703-719.
21. KELLOG, O.D (1953) *Foundations of Potential Theory* Dover, New York.
22. Y.KERBOUA, A.A.LAKIS, M.THOMAS ET MARCOUILLER. **Analyse dynamique des systèmes de plaques en interaction avec un fluide et applications.** Département de génie mécanique Ecole polytechnique de Montréal. Mars 2006
23. STEPHEN KIRKUP 1998/2007. **The Boundary Element Method in Acoustics. A development in FORTRAN**
24. DEAN A.KONTINOS. **Steady-State and Transient Boundary Element Methods for Coupled Heat Conduction.** January 1997.NASA Technical Memorandum 110427.
25. KUPRADZE, V.D (1965). *Potential Methods in the Theory of Elasticity.* Daniel Davey & Co., New York.

26. KYEONG_HOON JEONG, YE-HYOUNG YOO ET SEONG-CHEOL LEE.2004 **Hydroelastic vibration of two identical rectangular plates.** Journal of sound and Vibration, V272,N3-5.
27. A.A.LAKIS et M.P.PAIDOUSSIS, 1971. **Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid.** Journal of Sound and Vibration, V19, N1, P175-205.
28. H.LAMB 1945 **Hydrodynamics.** New York Dover Publications sixth edition.
29. LIANG, C. -C., Liao, C,-C, Tai, Y,-S., Lai, W.-H., 2001. **The free vibration analysis of submerged cantilever plates.** Ocean engineering 28, 1225-1245.
30. U.S.LINDHOLM et D.D.KAMA et H.N.ABRAMSON 1962. **Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid.** Journal of aerospace Science N 29, P1052-1059
31. LINDHOLM, U.S, KANA, D.D, CHU, W, H., ABRAMSON, H.N, 1965.**Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water.** Journal of Ship Research 9, 11-22.
32. J.W.S.LORD RAYLEIGH, 1945. **Theory of Sound,** New York, Dover, second edition (first edition,1877) .
33. Love A. E. H. **On the small free vibrations and deformations of elastic shells.** Philosophical trans. Of the Royal Society (London), 1888, Vol. serie A, N°17 p. 491-549.
34. MASSONET, C.E. (1965) **Numerical use of integral procedures in Zienkiewicz, O.C. and Holister, G. S. (eds) stress Analysis.** Chapter 10. Wiley , London
35. MEKKIOUI ZAHERA .**Contribution à l'analyse d'antenne diélectrique micro ruban à ondes de fuite unidimensionnelle et bidimensionnelle à motif métallique quelconque** .Thèse d'état 2004
36. MELOSH R.J. **structural analysis of solids.** A.S.C.E *Structural journal*, 4, 205-23, August 1963
37. MEYERHOFF, W.K., 1970. **Added mass of thin rectangular plates calculated from potential theory.** Journal of Ship Research 14, 100-111.
38. MHAMEDSOULI, JEAN-FRANÇOIS SIGRIST. **Interaction fluide-structure, modélisation et simulation numérique.** Edition Hermes Lavoisier.

39. MINDLIN R.D. **influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.** Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18 p. 31-38.
40. J.C. MIRANDA-VALENZUELA, K.H. MUCI –KÜCHLER. **Adaptative meshing with Boundary Elements.** Yopics in Engineering, Vol 41 edition WITpress
41. SANTANA MITRA et KP. SINHAMAHAPATRA 2005. **Coupled slosh dynamics of liquid filed containers using pressure based finite element method.** Exploring innovation in education and research Taisan, 1-5 Mars 2005.
42. MUSKHELISHVILI, N. I. (1953) **Some Basic problems of the Mathematical Theory of Elasticity,** Noordhoff, Leyden.
43. B.PESEUX AND V. MARTIN. **Numerical procedure for fluid structure interaction: interface element.** JM Crolet and R Ohayon editors
44. RAYLEIGH I. **theory of sound,** Vol. I et Vol. II. Dover Pub. 1945.
45. REDDY J. N. **Energy and variational method in applied mechanics.** John Willy and Sons 1984.
46. REISSNER E. **The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates.** J. of Appl. Mech., 1945; Vol. 12 p. A69-A77.
47. Technique de l'Ingénieur A410
48. TIMOSHENKO S. **on the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars.** Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6) p. 744-746.
49. TIMOSHENKO S. **on the transverse vibrations of uniform cross-section.** Philosophical Magazine, 1922, Vol. 43 (series 6) p. 125-131.
50. UFLYAND Y. S. **the propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates.** Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mesh., 1948, Vol. 12 p. 287-300.
51. O.C. Zienckewicz, CBE, FRS, FEng. **The finite Element Method Solid mechanic FEM.** 5th edition vol 2.

A.1. matrice R (3x12)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2y & 0 & -x^2 & -2xy & -3y^2 & -x^3 & -3xy^2 \end{bmatrix}$$

A.2. matrice $[A_s^e]$ (12x12)

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 8a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4a & 0 & 0 & 12a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & -4a^2 & 0 & 0 & -8a^3 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 2b & 4a^2 & 4ab & 4b^2 & 8a^3 & 8a^2b & 8ab^2 & 8b^3 & 16a^3b & 16ab^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4a & 2b & 0 & 12a^2 & 8ab & 4b^2 & 0 & 24a^2b & 8b^3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2a & -4b & 0 & -4a^2 & -8ab & -12b^2 & -8a^3 & -24ab^2 & 0 \\ 1 & 0 & 2b & 0 & 0 & 4b^2 & 0 & 0 & 0 & 8b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 4b^2 & 0 & 0 & 8b^3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4b & 0 & 0 & 0 & -12b^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A.3. matrice $[A_s^e]^{-1}$ (12x12)

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4a^2} & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{3}{4a^2} & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4ab} & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{4ab} & 0 & -\frac{1}{2a} & -\frac{1}{4ab} & 0 & 0 & \frac{1}{4ab} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4b^2} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4b^2} & 0 & \frac{1}{2b} & 0 \\ \frac{1}{4a^3} & \frac{1}{4a^2} & 0 & -\frac{1}{4a^3} & \frac{1}{4a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8a^2b} & \frac{1}{2ab} & 0 & -\frac{3}{8a^2b} & \frac{1}{4ab} & 0 & \frac{3}{8a^2b} & -\frac{1}{4ab} & 0 & -\frac{3}{8a^2b} & -\frac{1}{2ab} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8ab^2} & 0 & -\frac{1}{2ab} & -\frac{3}{8ab^2} & 0 & \frac{1}{2ab} & \frac{3}{8ab^2} & 0 & \frac{1}{4ab} & -\frac{3}{8ab^2} & 0 & -\frac{1}{4ab} & 0 \\ \frac{1}{4b^3} & 0 & -\frac{1}{4b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4b^3} & 0 & -\frac{1}{4b^2} & 0 \\ -\frac{1}{8a^3b} & -\frac{1}{8a^2b} & 0 & \frac{1}{8a^3b} & -\frac{1}{8a^2b} & 0 & -\frac{1}{8a^3b} & \frac{1}{8a^2b} & 0 & \frac{1}{8a^3b} & \frac{1}{8a^2b} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8ab^3} & 0 & \frac{1}{8ab^2} & \frac{1}{8ab^3} & 0 & -\frac{1}{8ab^2} & -\frac{1}{8ab^3} & 0 & -\frac{1}{8ab^2} & \frac{1}{8ab^3} & 0 & \frac{1}{8ab^2} & \frac{1}{8ab^3} \end{bmatrix}$$

A.4. matrice Q (3x12)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{pmatrix}$$

A.7. matrice a coefficients d'influence de doublet normaux [D]

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{a}{b}\right]}{ab} & -\frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{a}{b}\right]}{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{b}{a}\right]}{ab} & -\frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{b}{a}\right]}{ab} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{a}{b}\right]}{ab} & -\frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{a}{b}\right]}{ab} \\ -\frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{a}{b}\right]}{ab} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{2\text{ArcTan}\left[\frac{a}{b}\right]}{ab} \end{bmatrix}$$

A.5 : MATRICE mo

Colonne de 1-7

$$= \begin{pmatrix} 4ab & 4a^2b & 4ab^2 & \frac{16a^3b}{3} & 4a^2b^2 & \frac{16ab^3}{3} & \frac{a^4b}{4} \\ 4a^2b & 2\left(\frac{8a^3}{3} + 2a\right)b & 4a^2b^2 & 2(4a^4 + 4a^2)b & \frac{16a^3b^2}{3} + 4ab^2 & \frac{16a^2b^3}{3} & 2\left(\frac{32a^5}{5} + 8a^3\right)b \\ 4ab^2 & 4a^2b^2 & \frac{16ab^3}{3} + 4ab & \frac{16a^3b^2}{3} & \frac{16a^2b^3}{3} + 4a^2b & 8ab^4 + 8ab^2 & 8a^4b^2 \\ \frac{16a^3b}{3} & 2(4a^4 + 4a^2)b & \frac{16a^3b^2}{3} & 2\left(\frac{32a^5}{5} + \frac{32a^3}{3}\right)b & 8a^4b^2 + 8a^2b^2 & \frac{64a^3b^3}{9} & 2\left(\frac{32a^6}{3} + 24a^4\right)b \\ 4a^2b^2 & \frac{16a^3b^2}{3} + 4ab^2 & \frac{16a^2b^3}{3} + 4a^2b & 8a^4b^2 + 8a^2b^2 & \frac{64a^3b^3}{9} + \frac{16a^3b}{3} + \frac{16ab^3}{3} & 8a^2b^4 + 8a^2b^2 & \frac{64a^5b^2}{5} + 16a^3b^2 \\ \frac{16ab^3}{3} & \frac{16a^2b^3}{3} & 8ab^4 + 8ab^2 & \frac{64a^3b^3}{9} & 8a^2b^4 + 8a^2b^2 & \frac{64ab^5}{5} + \frac{64ab^3}{3} & \frac{32a^4b^3}{3} \\ \frac{a^4b}{4} & 2\left(\frac{32a^5}{5} + 8a^3\right)b & 8a^4b^2 & 2\left(\frac{32a^6}{3} + 24a^4\right)b & \frac{64a^5b^2}{5} + 16a^3b^2 & \frac{32a^4b^3}{3} & 2\left(\frac{128a^7}{7} + \frac{288a^5}{5}\right)b \\ \frac{16a^3b^2}{3} & 8a^4b^2 + 8a^2b^2 & \frac{64a^3b^3}{9} + \frac{16a^3b}{3} & \frac{64a^5b^2}{5} + \frac{64a^3b^2}{3} & \frac{32a^4b^3}{3} + 8a^4b + \frac{32a^2b^3}{3} & \frac{32a^3b^4}{3} + \frac{32a^3b^2}{3} & \frac{64a^6b^2}{3} + 48a^4b^2 \\ \frac{16a^2b^3}{3} & \frac{64a^3b^3}{9} + \frac{16ab^3}{3} & 8a^2b^4 + 8a^2b^2 & \frac{32a^4b^3}{3} + \frac{32a^2b^3}{3} & \frac{32a^3b^4}{3} + \frac{32a^3b^2}{3} + 8ab^4 & \frac{64a^2b^5}{5} + \frac{64a^2b^3}{3} & \frac{256a^5b^3}{15} + \frac{64a^3b^3}{3} \\ 8ab^4 & 8a^2b^4 & \frac{64ab^5}{5} + 16ab^3 & \frac{32a^3b^4}{3} & \frac{64a^2b^5}{5} + 16a^2b^3 & \frac{64ab^6}{3} + 48ab^4 & 16a^4b^4 \\ 8a^4b^2 & \frac{64a^5b^2}{5} + 16a^3b^2 & \frac{32a^4b^3}{3} + 8a^4b & \frac{64a^6b^2}{3} + 48a^4b^2 & \frac{256a^5b^3}{15} + \frac{64a^5b}{5} + \frac{64a^3b^3}{3} & 16a^4b^4 + 16a^4b^2 & \frac{256a^7b^2}{7} + \frac{576a^5b^2}{5} \\ 8a^2b^4 & \frac{32a^3b^4}{3} + 8ab^4 & \frac{64a^2b^5}{5} + 16a^2b^3 & 16a^4b^4 + 16a^2b^4 & \frac{256a^3b^5}{15} + \frac{64a^3b^3}{3} + \frac{64ab^5}{5} & \frac{64a^2b^6}{3} + 48a^2b^4 & \frac{128a^5b^4}{5} + 32a^3b^4 \end{pmatrix}$$

Colonne 8-12

$\frac{16 a^3 b^2}{3}$	$\frac{16 a^2 b^3}{3}$	$8 a b^4$	$8 a^4 b^2$	$8 a^2 b^4$
$8 a^4 b^2 + 8 a^2 b^2$	$\frac{64 a^3 b^3}{9} + \frac{16 a b^3}{3}$	$8 a^2 b^4$	$\frac{64 a^5 b^2}{5} + 16 a^3 b^2$	$\frac{32 a^3 b^4}{3} + 8 a b^4$
$\frac{64 a^3 b^3}{9} + \frac{16 a^3 b}{3}$	$8 a^2 b^4 + 8 a^2 b^2$	$\frac{64 a b^5}{5} + 16 a b^3$	$\frac{32 a^4 b^3}{3} + 8 a^4 b$	$\frac{64 a^2 b^5}{5} + 16 a^2 b^3$
$\frac{64 a^5 b^2}{5} + \frac{64 a^3 b^2}{3}$	$\frac{32 a^4 b^3}{3} + \frac{32 a^2 b^3}{3}$	$\frac{32 a^3 b^4}{3}$	$\frac{64 a^6 b^2}{3} + 48 a^4 b^2$	$16 a^4 b^4 + 16 a^2 b^4$
$\frac{32 a^4 b^3}{3} + 8 a^4 b + \frac{32 a^2 b^3}{3}$	$\frac{32 a^3 b^4}{3} + \frac{32 a^3 b^2}{3} + 8 a b^4$	$\frac{64 a^2 b^5}{5} + 16 a^2 b^3$	$\frac{256 a^5 b^3}{15} + \frac{64 a^5 b}{5} + \frac{64 a^3 b^3}{3}$	$\frac{256 a^3 b^5}{15} + \frac{64 a^3 b^3}{3} + \frac{64 a b^5}{5}$
$\frac{32 a^3 b^4}{3} + \frac{32 a^3 b^2}{3}$	$\frac{64 a^2 b^5}{5} + \frac{64 a^2 b^3}{3}$	$\frac{64 a b^6}{3} + 48 a b^4$	$16 a^4 b^4 + 16 a^4 b^2$	$\frac{64 a^2 b^6}{3} + 48 a^2 b^4$
$\frac{64 a^6 b^2}{3} + 48 a^4 b^2$	$\frac{256 a^5 b^3}{15} + \frac{64 a^3 b^3}{3}$	$16 a^4 b^4$	$\frac{256 a^7 b^2}{7} + \frac{576 a^5 b^2}{5}$	$\frac{128 a^5 b^4}{5} + 32 a^3 b^4$
$\frac{256 a^5 b^3}{15} + \frac{64 a^5 b}{5} + \frac{256 a^3 b^3}{9}$	$16 a^4 b^4 + 16 a^4 b^2 + 16 a^2 b^4$	$\frac{256 a^3 b^5}{15} + \frac{64 a^3 b^3}{3}$	$\frac{256 a^6 b^3}{9} + \frac{64 a^6 b}{3} + 64 a^4 b^3$	$\frac{128 a^4 b^5}{5} + 32 a^4 b^3 + \frac{128 a^2 b^5}{5}$
$16 a^4 b^4 + 16 a^4 b^2 + 16 a^2 b^4$	$\frac{256 a^3 b^5}{15} + \frac{256 a^3 b^3}{9} + \frac{64 a b^5}{5}$	$\frac{64 a^2 b^6}{3} + 48 a^2 b^4$	$\frac{128 a^5 b^4}{5} + \frac{128 a^5 b^2}{5} + 32 a^3 b^4$	$\frac{256 a^3 b^6}{9} + 64 a^3 b^4 + \frac{64 a b^6}{3}$
$\frac{256 a^3 b^5}{15} + \frac{64 a^3 b^3}{3}$	$\frac{64 a^2 b^6}{3} + 48 a^2 b^4$	$\frac{256 a b^7}{7} + \frac{576 a b^5}{5}$	$\frac{128 a^4 b^5}{5} + 32 a^4 b^3$	$\frac{256 a^2 b^7}{7} + \frac{576 a^2 b^5}{5}$
$\frac{256 a^6 b^3}{9} + \frac{64 a^6 b}{3} + 64 a^4 b^3$	$\frac{128 a^5 b^4}{5} + \frac{128 a^5 b^2}{5} + 32 a^3 b^4$	$\frac{128 a^4 b^5}{5} + 32 a^4 b^3$	$\frac{1024 a^7 b^3}{21} + \frac{256 a^7 b}{7} + \frac{768 a^5 b^3}{5}$	$\frac{1024 a^5 b^5}{25} + \frac{256 a^5 b^3}{5} + \frac{192 a^2 b^5}{5}$
$\frac{128 a^4 b^5}{5} + 32 a^4 b^3 + \frac{128 a^2 b^5}{5}$	$\frac{256 a^3 b^6}{9} + 64 a^3 b^4 + \frac{64 a b^6}{3}$	$\frac{256 a^2 b^7}{7} + \frac{576 a^2 b^5}{5}$	$\frac{1024 a^5 b^5}{25} + \frac{256 a^5 b^3}{5} + \frac{192 a^2 b^5}{5}$	$\frac{1024 a^3 b^7}{21} + \frac{768 a^3 b^5}{5} + \frac{256 a b^7}{7}$

A.6 : MATRICE ko

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 16ab & 0 & 16abv & 48a^2b & 16ab^2 & 16a^2bv & 48ab^2v & 48a^2b^2 & 48a^2b^2v & 48a^2b^2v \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 8ab(1-v) & 0 & 0 & 2b(8a^2-8a^2v) & 16ab^2-16ab^2v & 0 & 2b(16a^3-16a^3v) & 32ab^3-32ab^3v & 32ab^3-32ab^3v \\
 0 & 0 & 0 & 16abv & 0 & 16ab & 48a^2bv & 16ab^2v & 16a^2b & 48ab^2 & 48a^2b^2v & 48a^2b^2 & 48a^2b^2 \\
 0 & 0 & 0 & 48a^2b & 0 & 48a^2bv & 192a^3b & 48a^2b^2 & 64a^3bv & 144a^2b^2v & 192a^3b^2 & 192a^3b^2v & 192a^3b^2v \\
 0 & 0 & 0 & 16ab^2 & 2b(8a^2-8a^2v) & 16ab^2v & 48a^2b^2 & -\frac{128}{3}a^3bv + \frac{128a^3b}{3} + \frac{64ab^3}{3} & 32a^2b^2-16a^2b^2v & 64ab^3v & -96a^4bv+96a^4b+64a^2b^3 & 64a^2b^3 & 64a^2b^3 \\
 0 & 0 & 0 & 16a^2bv & 16ab^2-16ab^2v & 16a^2b & 64a^3bv & 32a^2b^2-16a^2b^2v & \frac{64a^3b}{3} - \frac{128}{3}ab^3v + \frac{128ab^3}{3} & 48a^2b^2 & 64a^3b^2 & 64a^3b^2-96ab^4v+96ab^4 & 64a^3b^2-96ab^4v+96ab^4 \\
 0 & 0 & 0 & 48ab^2v & 0 & 48ab^2 & 144a^2b^2v & 64ab^3v & 48a^2b^2 & 192ab^3 & 192a^2b^3v & 192a^2b^3 & 192a^2b^3 \\
 0 & 0 & 0 & 48a^2b^2 & 2b(16a^3-16a^3v) & 48a^2b^2v & 192a^3b^2 & -96a^4bv+96a^4b+64a^2b^3 & 64a^3b^2 & 192a^2b^3v & -\frac{1152}{5}a^5bv + \frac{1152a^5b}{5} + 256a^3b^3 & 128a^3b^3v+128a^3b^3 & 128a^3b^3v+128a^3b^3 \\
 0 & 0 & 0 & 48a^2b^2v & 32ab^3-32ab^3v & 48a^2b^2 & 192a^3b^2v & 64a^2b^3 & 64a^3b^2-96ab^4v+96ab^4 & 192a^2b^3 & 128a^3b^3v+128a^3b^3 & 256a^3b^3-\frac{1152}{5}ab^5v + \frac{1152ab^5}{5} & 256a^3b^3-\frac{1152}{5}ab^5v + \frac{1152ab^5}{5}
 \end{pmatrix}$$

A.8 : MATRICE [S]

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \begin{vmatrix}
 +4 - \frac{4b \operatorname{Arctan}\left[\frac{a}{b}\right]}{a} - 2 \operatorname{Log} [a^2 + b^2] & +4 - \frac{4b \operatorname{Arctan}\left[\frac{a}{b}\right]}{a} - 2 \operatorname{Log} [a^2 + b^2] & 0 & 0 \\
 0 & +4 - \frac{4a \operatorname{Arctan}\left[\frac{b}{a}\right]}{b} - 2 \operatorname{Log} [a^2 + b^2] & +4 - \frac{4a \operatorname{Arctan}\left[\frac{b}{a}\right]}{b} - 2 \operatorname{Log} [a^2 + b^2] & 0 \\
 0 & 0 & 2 - \operatorname{Log} [a^2 + b^2] & 2 - \operatorname{Log} [a^2 + b^2] \\
 +4 - \frac{4a \operatorname{Arctan}\left[\frac{b}{a}\right]}{b} - 2 \operatorname{Log} [a^2 + b^2] & 0 & 0 & +4 - \frac{4a \operatorname{Arctan}\left[\frac{b}{a}\right]}{b} - 2 \operatorname{Log} [a^2 + b^2]
 \end{vmatrix}$$