



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN**

# THÈSE

Présentée à

FACULTÉ DES SCIENCES – DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention de grade de

**DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES**

*Spécialité : Statistiques et Probabilités Approfondies*

Par

**Mme Souad BOUKHIAR**

Sur le thème :

---

**Problèmes d'estimation dans les processus AR aléatoires**

---

Soutenue publiquement devant le jury composé de :

M. BOUKHARI Fakhreddine	Professeur	Université de Tlemcen	Président
M. MADANI Fethi	Professeur	Université de Saïda	Directeur de thèse
M. BOUCHENTOUF A. Amina	Professeur	Université de Sidi Bel Abbes	Examinatrice
M. BOUZEBDA Salim	Professeur	Université de Compiègne. France	Examinateur
M. DALI YUCEF Malika	MCA	Université de Tlemcen	Examinatrice
M. LABBAS Ahmed	MCA	Université de Tlemcen	Examinateur

*Laboratoire de Statistiques et Modélisations Aléatoires, UABB, 13000 Tlemcen- Algérie*

Whatever the progress of human knowledge,  
there will always be room for ignorance and consequently  
for chance and probability.

— Emile Borel

*In memory of the Professor Tahar Mourid.*

*When I learned of the death of Professor Tahar Mourid, emotion overwhelmed me, so many memories linked me to this venerable monument of mathematics teaching. He embodied in himself the simplicity of the great and the wisdom of the master. He had marked me like so many others, with his instructive and seductive teaching. Professor Mourid was and remains in the retina of our memory.*

*Death does not take you away,  
it multiplies your life in each of our arms. Rest in peace...*

*For you, Mom, because you left. I really wanted to keep you longer. I never left you, I held your hand. I just believe in the love that binds us very strongly and that beyond absence offers us a presence in a breath of wind, a ray of sunshine. I hold a picture of you close to my heart and your eyes also seem full of tears. But feeling you is essential to me, so whatever the reason. I miss you...*

## Remerciements

J'ai une pensée émue pour notre cher Professeur Tahar Mourid qui vient de nous quitter, sans lui je n'aurais pu commencer ce travail. Je dirai que le vrai tombeau des morts, c'est le cœur des vivants.

Je tiens à remercier très vivement mon directeur de thèse, Pr. Fethi Madani d'avoir accepté de m'aider à finaliser le reste du travail, j'exprime ma profonde gratitude pour son soutien durant cette période difficile. Il a endirigé et accompagné me laissant une certaine liberté. Je tiens à dire que la confiance qu'il m'a faite m'a permis de mener à bonne fin cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements au Pr. Fakhreddine Boukhari d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. J'exprime toute ma gratitude au Pr. Amina Angélika Bouchentouf, Dr. Malika Dali youcef, Pr. Salim Bouzebda et Dr. Ahmed Labbas qui ont également accepté de participer à mon jury en qualité d'examineurs, et je me permets de les remercier pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ce travail.

Un très grand remerciement pour mon mari pour son soutien moral favorisant l'aboutissement de ce travail. Je n'oublierais toutefois pas mes enfants Rachad, Sanaa et Anissou avec qui j'ai partagé de très bons moments et par fois trop difficile, à eux je dédie ce travail. Mes derniers remerciements s'adressent à mes parents, frères et sœurs et tous mes neveux et nièces.

Je termine par un petit clin d'œil à mes amies que j'ai eues le plaisir de côtoyer durant ces années, à savoir Nawel Belkhir, Fatéma Derrar, Safia Benmansour, Amina Cherifi et Atika Maatallah et à tous qui m'ont soutenu de près ou de loin...

*Souad BOUKHIAR*

LSMA-Université Abou Bekr Belkaïd. Octobre 2022

## Abstract

We consider the class of resolvent estimators of the correlation operator ruling the functional autoregressive processes introduced by Mas. Under mild conditions on smoothing parameter, we establish exponential bounds and almost sure convergence of the resolvent estimators as well as convergence rates improving the existing results. As a consequence we derive asymptotic results on the resolvent predictors.

Thereafter, we address the class of Hilbert space valued autoregressive process with random coefficients (RCARH). We derive limit theorems : strong law of great numbers, central limit theorem, compact law of the iterated logarithm and exponential inequalities and also we obtain rates of convergence. These results are crucial in the framework of Hilbert space autoregressive processes statistical analysis.

We deal with resolvent estimators of the mean of random operators ruling a functional autoregressive process equation. Under mild conditions on the decay rate of a regularizing parameter, we obtain convergence in probability, exponential bounds, almost sure convergence and limiting law of the estimators and as well as results on resolvent predictors. These estimators achieve parametric rate  $\sqrt{n}$  (up to a  $\log n$  factor). An estimator of the term variance of random operators is proposed and its convergence in probability is also shown. All these results extend and improve those of Mas in the framework of functional AR Processes with deterministic coefficients.

Numerical studies and real data simulation's are performed and adequately validate the efficiency of the resolvent predictors for Hilbertian deterministic autoregressive and random coefficient autoregressive

models. The performance of the statistical predictor is measured by the errors forecasting and is compared to other methods existing in the literature showing competitive results.

**Key words:** Hilbertian autoregressive process of order 1, random coefficient, covariance operator, cross covariance operator.

## Résumé

Dans cette thèse, nous considérons la classe d'estimateurs résolvents de l'opérateur de corrélation proposée par Mas décrivant l'équation des processus autorégressifs fonctionnels. Sous certaines conditions de régularisation, nous établissons des limites exponentielles et une convergence presque-sûre des estimateurs résolvents ainsi que des taux de convergence améliorant les résultats existants. En conséquence, nous dérivons des résultats asymptotiques sur les prédicteurs résolvents.

Nous abordons ensuite la classe des processus autorégressifs hilbertiens à coefficients de corrélation aléatoires, nous obtenons des théorèmes limites : une loi forte des grands nombres, théorème de la limite centrale, loi du logarithme itéré compact et inégalités exponentielles avec des taux de convergence.

le problème de prédiction d'un processus autorégressif fonctionnel à coefficients aléatoires est aussi traité dans ce travail. Nous étudions les estimateurs résolvents de la moyenne des opérateurs de corrélation aléatoires. Des résultats asymptotiques sont établis : une convergence en probabilité, des bornes exponentielles, une convergence presque sûre et la normalité asymptotique de ces estimateurs. Des théorèmes sur les prédicteurs relatifs sont aussi présentés. Enfin, nous proposons un estimateur de la variance des opérateurs de corrélation aléatoires en montrant sa convergence en probabilité.

Des études numériques et des simulations des données réelles sont réalisées et valident bien l'efficacité des prédicteurs résolvents pour les modèles Autorégressif hilbertien d'ordre 1 déterministe et à coefficients

aléatoires. La performance du prédicteur statistique est mesurée par les erreurs de prévisions et comparée aux autres méthodes qui existent dans la littérature montrant des résultats compétitifs.

**Mots clefs :** Processus AR Hilbertien d'ordre 1, Coefficients d'auto-corrélation aléatoires, Opérateur de covariance, Opérateur de covariance croisée.



# Table de matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Sur les modèles autorégressifs Hilbertiens</b>	<b>8</b>
1.1 Éléments de la théorie des opérateurs . . . . .	8
1.1.1 Opérateurs linéaires . . . . .	8
1.1.2 Opérateurs compacts . . . . .	10
1.1.3 Opérateurs nucléaires . . . . .	12
1.1.4 Opérateurs de Hilbert Schmidt . . . . .	13
1.1.5 Opérateurs non-bornés . . . . .	14
1.2 Modèle ARH(1) à coefficient de corrélation déterministe .	15
<b>2 Propriétés Asymptotiques des Pseudo-Inverses de l'opérateur de corrélation dans le modèle ARH(1) déterministe</b>	<b>22</b>
2.1 Classe des estimateurs de projection dans les modèle ARH(1) . . . . .	22
2.2 Présentation de l'estimateur résolvant dans le modèle ARH(1) déterministe . . . . .	26
2.3 Convergence presque-sûre de l'estimateur résolvant . . .	29
<b>3 Théorèmes limites pour les processus AR Hilbertien à coefficients aléatoires</b>	<b>35</b>
3.1 Introduction aux modèles ARH(1) à coefficients aléatoires	35

3.2	Resultats principaux . . . . .	38
3.2.1	Loi des grand nombres . . . . .	39
3.2.2	Théorème de la limite centrale . . . . .	40
3.2.3	Loi du Logarithme Itéré compacte . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Résultats asymptotiques de l'estimateur résolvant</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Principaux résultats . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Étude numérique et exemples</b>	<b>81</b>
5.1	Introduction . . . . .	81
5.1.1	Séries chronologiques: vocabulaire et exemples . . . . .	81
5.2	Simulation d'un processus ARH(1) à coefficient déterministe . . . . .	83
5.2.1	Simulation d'un bruit blanc . . . . .	84
5.2.2	Prédicteurs résolvants dans les modèles ARH(1) à coefficient déterministe . . . . .	86
5.3	Simulation d'un processus ARH(1) à coefficients aléatoires	91
5.3.1	Prédicteurs résolvants dans les modèles RCHA(1) . . . . .	92
5.4	Exemples réels . . . . .	98
5.4.1	Évolution de la concentration atmosphérique de CO <sub>2</sub> . . . . .	98
5.4.2	Température au château de Nottingham . . . . .	99
5.4.3	Série chronologique ENSO . . . . .	101
<b>A</b>	<b>Annexe</b>	<b>108</b>
<b>B</b>	<b>Annexe</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

## Liste des figures

5.1	Nombre mensuel de passagers (en milliers) entre 1949 et 1960 dans les lignes aériennes. . . . .	82
5.2	Nombre de lynx capturés au Canada entre les années 1821 à 1934. . . . .	83
5.3	Nombre de décès causés par les maladies pulmonaires. . . . .	83
5.4	Simulation d'un ARH(1) pour $(m=12, n=50)$ et $(m=40, n=200)$	85
5.5	Prédicteur résolvant: $n=50, m=20, p=2$ . . . . .	86
5.6	Prédicteur résolvant: $n=50, m=20, p=7$ . . . . .	87
5.7	Prédicteur résolvant: $n=50, m=30, p=2$ . . . . .	87
5.8	Prédicteur résolvant: $n=50, m=30, p=7$ . . . . .	87
5.9	Prédicteur résolvant: $n=100, m=20, p=2$ . . . . .	88
5.10	Prédicteur résolvant: $n=100, m=20, p=7$ . . . . .	88
5.11	Prédicteur résolvant: $n=100, m=30, p=2$ . . . . .	88
5.12	Prédicteur résolvant: $n=100, m=30, p=7$ . . . . .	89
5.13	Prédicteur résolvant: $n=150, m=20, p=2$ . . . . .	89
5.14	Prédicteur résolvant: $n=150, m=20, p=7$ . . . . .	89
5.15	Prédicteur résolvant: $n=150, m=30, p=2$ . . . . .	90
5.16	Prédicteur résolvant: $n=150, m=30, p=7$ . . . . .	90
5.17	Simulation d'un ARH(1) à coefficients aléatoires $(n=50, m=20)$	92
5.18	Simulation d'un ARH(1) à coefficients aléatoires $(n=80, m=30)$	92
5.19	Prédicteurs résolvants: $n=50, m=20, (p=2, p=7)$ . . . . .	95
5.20	Prédicteurs résolvants: $n=50, m=30, (p=2, p=7)$ . . . . .	95
5.21	Prédicteurs résolvants: $n=100, m=20, (p=2, p=7)$ . . . . .	96
5.22	Prédicteurs résolvants: $n=100, m=30, (p=2, p=7)$ . . . . .	96
5.23	Prédicteurs résolvants: $n=150, m=20, (p=2, p=7)$ . . . . .	97

5.24	Prédicteurs résolvents: $n=150, m=30, (p=2, p=7)$ . . . . .	97
5.25	Augmentation annuelle de la concentration en CO2 dans l'atmosphère . . . . .	99
5.26	Prédiction de la concentration en CO2 dans l'atmosphère pour les années 1975 et 2015 aux points de discrétisation $m = 12$ mois, les paramètres de lissage $p = 2$ , et $\alpha_n = \frac{10^{-2}}{\log n}$ .	100
5.27	Température au château de Nottingham durant la période: 1920 - 1939 . . . . .	100
5.28	Prédiction de la température de l'année 1939, MSE=9.65, RMAE=0.0707 . . . . .	101
5.29	Températures de la surface océanique EL Niño . . . . .	103
5.30	La température de la surface océanique d'El Niño et le pré- dicteur résolvant pour les années 1986 et 2006. Gauche: MSE=1.76, MARE=1.89%. Droit: MSE=1.42, RMAE=1.67%. .	104

## Liste des tableaux

- 5.1 Ensemble des données simulées: Les erreurs de prédiction MSE et MARE. Les tailles des échantillons sont  $n \in \{100, 150, 250, 350, 500\}$ , les paramètres de lissage  $p \in \{2, 7\}$ ,  $\alpha_n = 10^{-i} \frac{1}{\log n}$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . Chaque scénario est répété 100 fois. . . . . 94
- 5.2 L'erreur de prédiction MARE de la température au château de Nottingham durant l'année 1939 pour  $n = 19$  données observées. Le nombre de points de discrétisation pour chacun des deux échantillons est  $m = 12$  mois. Les paramètres de lissage sont  $p = 2$  et  $\alpha_n = \frac{10^{-2}}{\log n}$ . . . . . 101
- 5.3 Jeux de données El Niño: Les erreurs MARE pour les différentes méthodes de prévision associées aux années 1986 et 2006 calculées respectivement pour  $n = 36$  et  $n = 56$  données observées. Le nombre de points de discrétisation pour chacun des deux échantillons est  $m = 12$  mois. Les paramètres de lissage sont  $p = 2$  et  $\alpha_n = \frac{10^{-2}}{\log n}$ . . . . . 103

## Liste des travaux

1. Limit theorems for hilbertian autoregressive processes with random coefficients. Annales de l'Institut de Statistiques de l'Université de Paris (ISUP), volume 62-Fascicule 3-2018-Paris.
2. Almost sure convergence of the resolvent estimators for hilbertian autoregressive processes. Annales de l'ISUP, volume 63-Fasicule 2-3-2019-Paris.
3. Resolvent estimators for functional autoregressive processes with random coefficients. Journal of Multivariate Analysis, Spetial Issue On FDA-2021.

# Introduction

Une contribution importante à la théorie des séries temporelles fonctionnelles est celle de Bosq[20] où un traitement théorique des processus linéaires dans les espaces de Banach et Hilbert a été développé. Les séries temporelles sont présentes dans de nombreux domaines d'application. En démographie où on peut tracer l'évolution de la taille d'une population d'un certain pays dans le monde dans un laps de temps bien précis, en écologie où elle représente par exemple le nombre de tigres capturés en Inde, ou encore la concentration du dioxyde de carbone dans l'atmosphère (pour résoudre les problèmes de pollution), en finance pour étudier le cours d'une action qui est évidemment suivi avec intérêt, elles nous permettent en économie de modéliser le nombre de voyageurs annuel d'une certaine compagnie aérienne (on peut citer l'exemple des données de la série chronologique (AirPassengers) qui représente le nombre de passagers dans les lignes aériennes entre les années 1949 et 1960), en médecine tout autant que le tracé de l'ectrocardiogramme d'un patient [22] ou par exemple pour l'analyse de l'ensemble de données mensuelles sur le nombre de poliomyélites chez des malades. Ces généralisations conduisent de plus en plus à des méthodes statistiques développées qui sont réalisées par le biais de l'analyse des données fonctionnelles (FDA: Functional Data Analysis). Des résultats, exemples, et méthodes importants, pourront être retrouvés, de manière beaucoup plus détaillée dans les monographies de [59, 60], d'autres auteurs comme [20, 32, 39] sont venus pour enrichir ce domaine, voir aussi [24, 35, 58] pour les aperçus et les études récentes. En

particulier, de nombreuses méthodes d'estimation ont été développées pour les séries chronologiques, elles ont permis récemment d'étudier des processus indexés par des espaces fonctionnels autre que des espaces de dimensions finis.

Sont ces questions de statistiques en dimension infinie au centre d'une dynamique autour des statistiques fonctionnelles dont plusieurs auteurs se sont penchés, on peut citer [4, 20, 50, 52, 57] où la motivation principale est en particulier l'estimation et la prévision à temps continu. Ce qui amène à considérer la classe des processus autorégressifs AR Banachiques ou Hilbertiens.

Plus précisément, on considère un processus stochastique à temps continu  $Y = (Y(t), t \in \mathbb{R})$  observé sur un intervalle  $[0, T]$ . On s'intéresse à la prévision du processus  $Y$  sur l'intervalle  $[T, T + \delta], \delta > 0$ . En posant  $X_n(t) = Y(t + n\delta), t \in [0, \delta]$ , on génère une suite de v.a  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  à temps discret à valeurs dans un espace fonctionnel approprié dont l'évolution temporelle est supposée vérifier une équation du type autorégressive. Si le processus  $Y$  est à trajectoires continues, l'espace fonctionnel associé sera l'espace de Banach  $C_{[0, \delta]}$  des fonctions continues sur  $[0, \delta]$ . Deuxième type d'espace fonctionnel est celui de Hilbert  $L^2[0, \delta]$ . Bosq et Mourid (1990) ont introduit la classe de processus autorégressifs dans un Hilbert qu'on notera ARH défini par

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où toutes les variables aléatoires sont hilbertiennes, l'opérateur linéaire  $\rho$  représente le coefficient d'autocorrélation déterministe défini sur un espace de Hilbert séparable et  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  le bruit blanc fort. La généralisation au processus autorégressif d'ordre  $p$  a été étudiée par Mourid (1993).

Le but de ce travail est double, il s'agit de compléter l'étude du comportement asymptotique de l'estimateur du coefficient de corrélation définissant le modèle ARH(1), ensuite généraliser les résultats pour les modèles à coefficients aléatoires.



L'inférence statistique pour l'estimation de l'opérateur linéaire  $\rho$  dans le premier modèle consiste à utiliser la relation

$$R_{X_0, X_1} = \rho C_{X_0},$$

où  $C_{X_0}$  et  $R_{X_0, X_1}$  sont respectivement les opérateurs de covariance et covariance croisée, ainsi l'estimateur de  $\rho$  s'obtient alors à partir des estimateurs empiriques  $C_n$  et  $R_n$  de  $C_{X_0}$  et  $R_{X_0, X_1}$  respectivement.

La classe des processus AR Hilbertiens d'ordre un à coefficients aléatoires que nous étudierons est de la forme

$$X_n = \rho_n(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où  $(\rho_n, n \in \mathbb{Z})$  est une suite d'opérateurs aléatoires définis sur un espace de Hilbert séparable. Cependant, le coefficient fixé  $\rho$  dans le modèle déterministe peut changer avec le temps ou d'autres dans certains cas. Par exemple, si  $\rho X_{n-1}$  dans ce modèle indique le nombre d'espèces descendantes dans une petite zone isolée dans le temps  $(n-1)$  et  $\varepsilon_n$  désigne l'admission de nouvelles espèces dans le temps  $n$ , alors  $X_n$  représentera le nombre d'espèces dans le temps  $n$ , mais le modèle déterministe ne montre pas l'influence de certains facteurs environnementaux (température, humidité,...) qui peuvent affecter considérablement  $X_n$ . Par conséquent, il serait plus raisonnable d'exprimer le coefficient de corrélation fixé comme des variables aléatoires pour des prévisions plus efficaces, d'où l'intérêt des modèles aléatoires qui peuvent être adaptés aux données qui sont affectées par des facteurs externes tels que les données sur les maladies qui sont collectées sous l'influence du niveau médical, de la constitution du patient, etc.

Une partie de cette thèse consiste à contribuer aux modèles ARH(1) à coefficients aléatoires: Développer les propriétés probabilistes, en établissant quelques résultats limites, aussi appliquer une méthode d'estimation dans cette classe de modèles en étudiant le comportement asymptotique pour avoir les bonnes propriétés des estimateurs, no-

tamment la consistance et la normalité asymptotique.

Cette thèse se décompose en cinq parties.

Dans la première partie, nous rappelons quelques outils fondamentaux de la théorie des opérateurs compacts puisqu'ils seront au centre de cette thèse. Nous présentons aussi rapidement les caractéristiques de certains opérateurs linéaires non continus particuliers: inverses des opérateurs compacts injectifs autoadjoints. Nous introduisons ensuite, la classe des processus autorégressifs fonctionnels en suivant la monographie de Bosq [20]. Nous rappelons quelques propriétés principales et théorèmes limites traités dans [20].

Dans le deuxième chapitre, nous considérons le modèles autorégressif hilbertien à coefficient de corrélation déterministe (ARH(1)) définis plus haut. Mas [48] a proposé une classe d'estimateurs de l'opérateur de corrélation  $\rho$  appelée "estimateurs résolvants" et a établi des résultats asymptotiques. Contrairement à l'estimateur de projection proposés par Bosq, il ne serait plus nécessaire d'estimer les éléments propres de l'opérateur de covariance empirique, de plus la norme de ces estimateurs n'est plus aléatoire et vaut une quantité bien déterminée. La difficulté principale de cette méthode est d'approcher l'inverse de l'opérateur de covariance. À la différence de la dimension finie, l'inverse quand il existe, n'est pas un opérateur linéaire continu, cependant une étude des propriétés de ce dernier est nécessaire. Un autre problème crucial se situe dans l'estimation de cet inverse basée sur l'opérateur de covariance empirique qui est de rang fini (inférieur à  $n$ ), par conséquent non inversible. L'étude est donc amenée à construire des pseudo-inverses ayant un intérêt statistique.

On insiste en particulier sur des notions basiques de la théorie des

opérateurs qui sont néanmoins nécessaires dans le traitement des modèles fonctionnels (voir [30, 43]). Sous des conditions similaires à celles de Mas [48], on obtient la convergence presque sûre de l'estimateur résolvant en norme d'opérateurs pour le modèle ARH(1) à coefficient déterministe, on établit aussi des bornes exponentielles ainsi que des taux de convergence améliorant les résultats traités dans le travail de Mas, enfin des résultats asymptotiques sur les prédicteurs résolvants sont présentés [18].

Dans le troisième chapitre, nous focalisons l'étude sur la classe des modèles ARH(1) à coefficients aléatoires qui ont prouvé leur performance pour l'analyse de la volatilité des séries chronologiques financières. Sous certaines conditions, on obtient des théorèmes limites: une loi forte de grands nombres, théorème de la limite centrale, loi du logarithme itéré compact et inégalités exponentielles avec des taux de convergence. Ces résultats sont cruciaux dans l'analyse statistique des processus autorégressifs hilbertiens. Notre approche est fondée sur une décomposition appropriée des différences de martingales et de l'approximation des martingales à valeurs dans un espace de Hilbert [17].

Le quatrième chapitre est essentiellement consacré à l'estimation du paramètre  $\theta = \mathbb{E}(\rho_0)$ , la moyenne du coefficient de corrélation aléatoire du modèle autorégressif hilbertien défini plus haut en utilisant la classe des estimateurs résolvants. Similairement, l'estimation de la moyenne des opérateurs linéaires aléatoires  $\rho_n$  est basée cette fois-ci sur la relation

$$R_{X_0, X_1} = \theta C_{X_0}.$$

Tout d'abord, on établit la convergence en probabilité, des bornes exponentielles et convergence presque sûre, on applique ensuite des résul-

tats importants sur les différences de martingales hilbertiennes et des résultats sur les opérateurs de covariance empiriques dans [4, 20] pour déduire des inégalités exponentielles et un taux de convergence en fonction des paramètres de lissage définissant l'estimateur résolvant. On fournit une loi limite pour cette classe d'estimateurs reposant profondément sur une décomposition adéquate des différences de martingales hilbertiennes. Des résultats similaires sur les prédicteurs statistiques sont fournis. Enfin, nous proposons un estimateur de l'opérateur variance des coefficients de corrélation aléatoires en montrant sa convergence en probabilité. Ces résultats élargissent et améliorent ceux de Mas dans l'étude des processus ARH(1) et aussi permettent la distinction entre les modèles déterministes et aléatoires.

L'intérêt de cette étude couvre un large éventail de problèmes, à savoir la prévision des processus continus [20, 32, 60], l'analyse des données fonctionnelles telles que les tests des différences de moyennes fonctionnelles [40], analyse en composantes principales fonctionnelles [31]. Notons aussi que l'implémentation de ce modèle est adaptée à la palette des techniques non paramétriques modernes, on peut citer [29, 47] et pour la régression fonctionnelle semi-paramétrique, on peut voir [34]. Nos résultats seront donc utiles dans ce domaine puisqu'une estimation de la loi de distribution des coefficients aléatoires est nécessaire. Il convient de noter aussi que, dans l'inférence statistique, l'une des applications importantes des résultats précédents est la construction de bandes de confiance pour la prévision des tailles des échantillons représentant des ensembles de sélection de variables VSCS (Variable Selection Confidential Set: ensemble de modèles de régression linéaire qui contient le vrai modèle avec un niveau de confiance donné). Bien que la taille du VSCS reflète correctement l'incertitude de sélection du modèle, sans hypothèses spécifiques sur le vrai modèle, le VSCS est généralement assez grand (sauf si le nombre de prédicteurs est petit), cependant, d'autres conditions devraient être remplies.

Le chapitre 5 comporte une étude numérique du comportement des prédictors considérés. Des simulations sont effectuées pour le model ARH(1) déterministe, ensuite pour le ARH(1) à coefficients aléatoires. Divers applications aux données réelles sont présentes à la fin permettant de confirmer l'efficacité de notre prédictor statistique dont la performance est mesurée par les erreurs de prévisions et est comparées aux autres méthodes qui existent dans la littérature.

# 1 Sur les modèles autorégressifs Hilbertiens

## 1.1 Éléments de la théorie des opérateurs

le but principal de l'étude d'un processus autorégressif Hilbertien d'ordre un, noté ARH(1) est la prévision d'un processus à temps continu. Pour cela, on cherche à estimer l'opérateur de corrélation du modèle.

Dans un premier temps, nous allons donner quelques propriétés des opérateurs que nous rencontrerons dans cette étude. Nous nous en tiendrons à des notions basiques mais néanmoins élémentaires pour pouvoir résoudre les problèmes statistiques posés par le processus autorégressif hilbertien. Toutefois, pour plus de détails sur la théorie des opérateurs, on peut citer [30, 43].

### 1.1.1 Opérateurs linéaires

Dans le problème d'estimation non paramétrique, nous avons souvent affaire à des espaces fonctionnels (par exemple, dans le cas de l'estimation de la densité de l'opérateur de corrélation, la fonction de régression, etc.).

On considère l'espace de Hilbert séparable  $H$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dont dérive la norme  $\|\cdot\|$  dans  $H$ . On notera par  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H, H)$  l'espace séparable des opérateurs linéaires bornés définis de  $H$  dans  $H$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  la norme usuelle des opérateurs bornés ( $T$  est borné si  $D(T) = H$

où  $D(T)$  est le domaine de  $T$  avec

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Nous rappelons quelques notions élémentaires de la théorie des opérateurs.

### Définitions et Propriétés

Le graphe d'un opérateur  $T$  (dans le cas où  $T$  est à domaine dense, i.e  $D(T) \subset H$  et  $\overline{D(T)} = H$ ) est le sous-espace de  $H \oplus H$  donné par

$$\mathbf{G}(T) = \{(x, Tx), x \in D(T)\} \subset H \oplus H.$$

On dit que l'opérateur  $S$  est une extension de  $T$  si  $D(T) \subset D(S)$  et  $Tx = Sx$  pour tout  $x \in D(T)$ , dans ce cas  $\mathbf{G}(T) \subset \mathbf{G}(S)$ .

L'opérateur  $T$  est dit fermé si son graphe est fermé. Autrement dit, pour toute suite  $(x_n)_n$  de  $\mathbf{G}(T)$  telle que  $\lim_n x_n = x$  et  $\lim_n Tx_n = y$  alors on a  $x \in \mathbf{G}(T)$  et  $Tx = y$ .

L'adjoint d'un opérateur  $T$  à domaine dense est l'unique opérateur noté  $T^*$  ayant pour domaine

$$D(T^*) = \{x \in H, D(T) \ni y \mapsto \langle x, Ty \rangle \text{ est continue}\},$$

vérifiant

$$\forall x \in D(T^*), \forall y \in D(T), \langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Puisque  $D(T)$  est dense dans  $H$ , pour chaque  $x \in D(T^*)$ , la forme linéaire  $y \mapsto \langle x, Ty \rangle$  s'étend à l'unique élément  $\langle T^* x, y \rangle$  de  $H^*$ .

Un opérateur  $T$  à domaine dense dans  $H$  est dit symétrique si

$$D(T) \subset D(T^*),$$

et

$$Tx = T^*x, \forall x \in D(T).$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T), \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Enfin,  $T$  est dit auto-adjoint, si  $T^* = T$ , ou encore

$$D(T) = D(T^*),$$

et

$$Tx = T^*x, \forall x \in D(T).$$

Si  $T \in H$  ( $T$  linéaire borné) est tel que  $T = T^*$ , il sera dit auto-adjoint (hermitien).

On rappelle qu'un opérateur continu est dit normal si  $TT^* = T^*T$ .

On dit qu'un opérateur  $T$  est de rang fini si la dimension de son image  $ImT$  est finie.

### 1.1.2 Opérateurs compacts

Les opérateurs compacts constituent une classe importante d'applications linéaires continues. D'un côté, ils sont presque des opérateurs de rang fini (i.e. approchés par des opérateurs dont l'image est de dimension finie). D'un autre côté, la classe des opérateurs compacts est suffisamment large pour inclure les opérateurs à noyau continu ou dans  $L^2$ .

#### Définition d'un opérateur compact.

**Définition 1.** *Un opérateur  $T$  est compact si il transforme les ensembles faiblement compacts (c'est à dire bornés) en ensembles relativement compacts. De façon équivalente, l'image de la sphère unité par l'opérateur  $T$  est relativement compacte.*



**Définition 2.** *Un opérateur est compact si et seulement si il transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente.*

L'espace des opérateurs compacts sera noté  $C$ , muni de la norme uniforme est un espace de Banach séparable (si  $H$  séparable). C'est aussi la complétion de l'espace des opérateurs de rang fini pour la norme uniforme. Autrement dit, pour tout  $T \in C$ , il existe une suite  $T_n$  d'opérateurs de rang fini telle que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}} \rightarrow 0.$$

### Propriétés des opérateurs compacts.

- $T$  est un opérateur compact si et seulement si son adjoint  $T^*$  est compact.
- Si  $T$  est un opérateur compact alors  $T^*T$  est un opérateur compact auto-adjoint positif. La racine carrée de sa  $j^{\text{ème}}$  valeur propre est appelée  $j^{\text{ème}}$  valeur singulière de  $T$ , notée  $s_j(T)$ .
- Un opérateur compact sur un espace de Hilbert admet un nombre au plus dénombrable de valeurs propres distinctes.
- Toute valeur propre non nulle a un ordre de multiplicité fini. Le seul point d'accumulation possible des valeurs propres d'un opérateur compact est 0.
- Un opérateur  $T$  sur  $H$  est compact si il existe deux bases orthonormées  $u_j, v_j$  et une suite  $(s_j)_j$  pleine décroissante vers zéro, telle que,

pour tout  $x \in H$ , il admet la représentation de Schimidt suivante

$$T(x) = \sum_{j=1}^K s_j(T)(u_j \otimes v_j)(x) = \sum_{j=1}^K s_j(T)\langle u_j, x \rangle v_j. \quad (1.1)$$

La quantité  $K$  est finie si et seulement si  $T$  est de rang fini.

- Dans le cas où  $T$  est normal, la décomposition (1.1) sera réécrite sous la forme

$$T(x) = \sum_{j=1}^K s_j(T)(u_j \otimes u_j)(x).$$

On cherche un espace adapté à l'étude des opérateurs de covariance de variables aléatoires en dimension infinie. Il serait donc nécessaire de présenter quelques sous espaces d'opérateurs qui se révéleront utiles par la suite. Notons

$$S_p = \left\{ T \in C; N_p(T) = \left( \sum_{i \geq 1} [s_i(T)]^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

où pour tout  $p \geq 1$ , l'application  $N_p$  est une norme sur  $S_p$ , par suite  $(S_p, N_p)$  est un espace de Banach séparable. Pour tout  $1 \leq p < q < \infty$ , la topologie de  $N_p$  est plus fine que la topologie de  $N_q$ .

### 1.1.3 Opérateurs nucléaires

Notons que la norme associée à l'espace d'opérateurs  $S_1$  que l'on note  $\|\cdot\|_1 = N_1(\cdot)$  est la plus fine des normes standards. Il ne sera pas nécessairement facile d'obtenir des résultats dans cette topologie. Toutefois l'espace  $S_1$  est d'une grande importance en probabilité et statistiques. En effet, dans un espace de Banach ou de Hilbert, l'opérateur de covariance d'une variable aléatoire de moment fort d'ordre 2 est toujours un opérateur nucléaire.

Si l'opérateur  $T$  est de la forme

$$T = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i,$$

où  $a_i, b_i$  sont des vecteurs de  $H$ , alors

$$N_1(T) = \sum_{i=1}^n \|a_i\| \|b_i\|.$$

Si  $T$  est symétrique et défini positif, pour n'importe quelle base  $e_i$ , on a

$$N_1(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle T e_i, e_i \rangle.$$

#### 1.1.4 Opérateurs de Hilbert Schmidt

Un opérateur compact admettant la représentation (1.1) est dit de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{j \geq 1} s_j^2(T) < \infty.$$

L'espace séparable  $S = S_2$  des opérateurs de Hilbert-Schmidt est équipé du produit scalaire défini, pour tous  $T_1, T_2 \in S$ , par:

$$\langle T_1, T_2 \rangle_S = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle T_1(f_i), f_j \rangle \langle T_2(f_i), f_j \rangle,$$

la norme associée  $\|\cdot\|_S = N_2(\cdot)$ . La suite  $(f_i)_i$  est une base orthonormée arbitraire. Dans ce cas

$$\|T\|_S = \left( \sum_{j \geq 1} s_j^2(T) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons aisément vérifier que  $\|T\|_{\mathcal{L}} \leq \|T\|_S \leq \|T\|_{S_1}$ .

Un opérateur est dit symétrique si

$$\forall x, y \in H, \langle T x, y \rangle = \langle x, T y \rangle,$$

et définit positive si

$$\forall x \in H, \langle Tx, x \rangle \geq 0.$$

Un opérateur de Hilbert-Schmidt symétrique définit positive admet la décomposition suivante

$$T(x) = \sum_{j \geq 1} s_j(T) \langle v_j, x \rangle v_j.$$

où  $T(v_j) = s_j(T)v_j$  ( $v_j$  fonctions propres associées aux valeurs singulières).

### 1.1.5 Opérateurs non-bornés

Dans la suite, nous nous intéressons à la classe des opérateurs dont le domaine est inclu dans un espace de Hilbert, il s'agit en fait de l'inverse des opérateurs compacts autoadjoints.

Sachant que si l'on dispose d'un opérateur compact autoadjoint  $T$ , alors il serait possible de donner sa décomposition spectrale

$$T = \sum_{i \geq 1} \langle Te_i, e_i \rangle, \quad (1.2)$$

où la suite  $(\lambda_i, e_i, i \geq 1)$  sont les éléments spectraux de  $T$ . L'opérateur  $T^{-1}$  est bien linéaire mais n'est défini que sur un sous espace de  $H$ , par conséquent, nous allons chercher à définir  $T^{-1}x$  pour  $x$  dans un sous espace de  $H$  au lieu de  $T^{-1}$ .

Nous avons les propriétés suivantes:

- Nous savons que

$$\sup_x \|T^{-1}(x)\| = +\infty.$$

- L'inverse d'un opérateur compact n'est défini que sur un domaine

ni ouvert ni fermé, mais dense dans  $H$  noté par  $D$  donné par

$$\begin{aligned} D(T^{-1}) &= \{x \in H, \|T^{-1}(x)\| < \infty\} \\ &= \left\{ x = \sum_{i \geq 1} x_i e_i, \sum_{i \geq 1} \left( \frac{x_i}{\lambda_i} \right)^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

- L'inverse d'un opérateur compact n'est pas borné, donc non continu (il n'est continu en aucun point de son domaine de définition).

- Nous avons

$$T T^{-1} = I_D,$$

où  $I_D$  est l'opérateur identité défini sur le domaine de  $T^{-1}$ .

- L'opérateur défini dans (1.2) est une application linéaire mesurable de  $D(T^{-1})$  muni de la tribu borélienne trace de  $H$  sur  $D(T^{-1})$  que l'on note  $\mathcal{F}_H(D(T^{-1}))$ .

- L'inverse d'un opérateur compact est à graphe fermé.

- Nous avons

$$D(T^{-1}) = \text{Im} T.$$

## 1.2 Modèle ARH(1) à coefficient de corrélation déterministe

L'étude du modèle autorégressif à valeurs dans un espace de Hilbert séparable ARH(1) a été menée par Bosq dans son ouvrage [20] et a fait l'objet de nombreux travaux statistiques. Cardot [25] l'a utilisé pour la prévision des données météorologiques El Niño en montrant notamment que ce modèle permet d'obtenir des erreurs de prévision assez faible en les comparant par celles des modèles ARMA classiques. Plusieurs applications ont été réalisées avec succès dans divers domaines, pour la prévision de la consommation d'électricité [23], du trafic routier [20], en médecine pour à l'analyse de courbes issues de données médicales (électrocardiogramme) [13], ainsi qu'en économie et finance pour prédire une vente aux enchères en cours [42, 44].

Les processus autorégressifs hilbertiens s'écrivent sous la forme

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

où les variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  sont définies sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans un espace de Hilbert réel et séparable  $H$  muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}_H$  et du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  associé à la norme  $\|\cdot\|$ . La suite de variables aléatoires centrées  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  sont indépendantes et de même loi vérifiant

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^2 < \infty.$$

Ces variables aléatoires sont appelées le  $H$ -bruit blanc. L'opérateur linéaire  $\rho$  à valeurs dans  $H$  est continu et vérifie

$$\mathbf{H}_0 : \exists k_0 \geq 1 : \|\rho^{k_0}\|_{\mathcal{L}} < \infty.$$

où  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  est la norme usuelle des opérateurs linéaires continus. On dira que  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  est un processus autorégressif hilbertien d'ordre 1 dont le coefficient de corrélation  $\rho$  est déterministe, il est noté ARH(1).

**Théorème.** [20] *Sous la condition  $\mathbf{H}_0$ , l'équation (1.3) admet une solution unique de la forme*

$$X_n = \sum_{j \geq 1} \rho^j(\varepsilon_{n-j}).$$

*De plus, la série converge presque-sûrement dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .*

Nous donnons le comportement asymptotique de la v.a  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  où la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie l'équation ARH(1).

**Théorème.** [20] *Sous la condition  $\mathbf{H}_0$ , pour tout  $h > 0$*

$$\mathbb{E}\langle X_0, X_h \rangle \leq \|\rho^h\|_{\mathcal{L}} \mathbb{E}\|X_0\|^2.$$

*On applique la loi forte de grands nombre à  $S_n$  pour avoir*

$$\mathbb{E}\left\|\frac{S_n}{n}\right\| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad p.s.$$

*Pour  $\beta > \frac{1}{2}$ ,*

$$\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(\log n)^\beta} \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

On donne le théorème de la limite centrale pour la v.a  $S_n$ .

**Théorème.** [20] *Sous la condition  $\mathbf{H}_0$ ,*

$$\sqrt{n} \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$

*où  $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}}$  représente la convergence en distribution et  $\Gamma$  est l'opérateur de covariance donné par*

$$\Gamma = (I - \rho)^{-1} C_\varepsilon (I - \rho^*)^{-1},$$

*avec  $C_\varepsilon(.) = \mathbb{E}\langle \varepsilon_0, . \rangle \varepsilon_0$ , l'opérateur de covariance de  $\varepsilon_0$ .*

Par analogie au cas de dimension finie, on fait appel aux opérateurs de covariance et de covariances croisées permettant l'estimation du coefficient de corrélation  $\rho$ .

L'opérateur de covariance de  $X_0$  est un opérateur symétrique positif de  $H$  dans  $H$  défini pour tout  $x \in H$ , par:

$$C_{X_0}(x) = \mathbb{E}\langle X_0, x \rangle X_0.$$

L'opérateur de covariance croisée entre  $X_0$  et  $X_1$  de  $H$  dans  $H$  défini pour tout  $x \in H$ , par:

$$R_{X_0, X_1}(x) = \mathbb{E}\langle X_0, x \rangle X_1.$$

Sous la condition  $\mathbb{E}\|X_0\|^2 < \infty$ , l'opérateur de covariance est borné et à trace. Les éléments propres associés seront notés par  $(\lambda_i, h_i, i \geq 1)$  où les valeurs propres  $\lambda_i$  sont positives et rangées par ordre décroissant. On note par  $P^{k_n}$  les projections orthogonales sur les  $k_n$  premiers vecteurs propres de  $C_{X_0}$ . Pour des raisons qu'on expliquera plus loin, l'opérateur de covariance doit être supposé injectif.

Pour un ARH(1), nous avons bien l'équation de l'autorégressif

$$R_{X_0, X_1} = \rho C_{X_0}.$$

**Proposition 1.2.1.** [20] *Pour le modèle ARH(1), on a*

$$\begin{aligned} C_{X_0} &= \rho C_{X_0} \rho^* + C_\varepsilon, \\ C_{X_0} &= \sum_{j \geq 1} \rho^j C_\varepsilon \rho^{*j}, \end{aligned}$$

*où la série converge en norme nucléaire.*

À partir des observations  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , on construit un estimateur naturel de  $C_{X_0}$ , appelé opérateur de covariance empirique, noté  $C_n$  donné,  $\forall x \in H$ , par

$$C_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_i.$$

Cet opérateur est de rang fini et donc de Hilbert-Schmidt. De façon analogue, l'estimateur de  $R_{X_0, X_1}$  que l'on note  $R_n$  est défini,  $\forall x \in H$ , par

$$R_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_{i+1}.$$



Il est appelé opérateur de la covariance croisée empirique de  $X_0$  et  $X_1$  qui est de Hilbert-Shmidt.

Les valeurs propres de  $C_n$  seront notées  $(\lambda_{i,n}, 1 \leq i \leq n)$  sont rangées par ordre décroissant (elle peuvent éventuellement être nulles) et associées aux vecteurs propres  $(h_{i,n}, i \leq n)$ .

L'opérateur  $C_n$  est un estimateur symétrique sans biais de  $C_{X_0}$ . La proposition suivante donne la convergence presque-sûre de  $C_n$  vers  $C_{X_0}$  et une vitesse de convergence de l'ordre  $\frac{1}{n}$  (respectivement de  $R_n$  vers  $R_{X_0, X_1}$ ), ainsi, la convergence en loi de l'opérateur  $C_n$  est présentée.

**Proposition 1.2.2.** [20] *Sous la condition  $\mathbb{E}\|X_0\|^4 < \infty$*

$$C_n \rightarrow C_{X_0} \text{ presque-sûrement et } \mathbb{E}\|C_n - C_{X_0}\|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$R_n^* \rightarrow R_{X_0, X_1}^* \text{ presque-sûrement et } \mathbb{E}\|R_n^* - R_{X_0, X_1}^*\|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\sqrt{n}(C_n - C_{X_0}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Gamma_{C_{X_0}}.$$

où  $\Gamma_{C_{X_0}}$  est une v.a gaussienne centrée sur  $S$ . Un résultat sur les éléments propres est le suivant (voir [20]):

$$\mathbb{E} \sup_{1 \leq i \leq n} \|\lambda_{i,n} - \lambda\|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Les résultats ci-dessous traités par Mas [48] montrent la normalité asymptotique des opérateurs de covariance empiriques croisées. Notons

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \otimes \varepsilon_{i+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i,$$

et

$$E_i = \langle \rho(X_{i-1}), \cdot \rangle \varepsilon_i + \langle \varepsilon_i, \cdot \rangle \rho(X_{i-1}) + \langle \varepsilon_i, \cdot \rangle \varepsilon_i - \mathbb{E}(\langle \varepsilon_i, \cdot \rangle \varepsilon_i).$$

Soit l'espace de Hilbert produit  $S \times S$  muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{S \times S} = \langle s_1, s_2 \rangle_S + \langle t_1, t_2 \rangle_S.$$

Considérons l'opérateur linéaire  $R$  de  $S$  dans  $S$  défini,  $\forall s \in S$ , par  $R = \rho s \rho^*$ .

**Lemme 1.2.1.** [48] *L'opérateur linéaire  $\sqrt{n} \begin{pmatrix} C_n - C_{X_0} \\ U_n \end{pmatrix}$  converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée ayant comme opérateur de covariance*

$$\begin{pmatrix} (I - R)^{-1} \Sigma_{E_1} (I - R^*)^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{T_1} \end{pmatrix},$$

*s'écrivant dans la base de  $S \times S$   $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), \dots, (0, t_1), \dots, (0, t_n), \dots\}$  où  $(e_i, \pi_i)$  sont les éléments propres de l'opérateur de covariance  $\Sigma_{E_1}$  et  $(t_i, \tau_i)$  sont ceux associés à l'opérateur de covariance  $\Sigma_{T_1}$  avec  $\Sigma_{E_1} = \text{diag}(\pi_i, i \geq 1)$  et  $\Sigma_{T_1} = \text{diag}(\tau_i, i \geq 1)$ .*

Soit l'opérateur linéaire  $\Delta$  défini sur  $S$  à valeurs dans  $S$  donné par  $\Delta(T) = T \rho^*$ , où  $\rho^*$  est l'opérateur adjoint de  $\rho$ . Grace à la définition des opérateurs de covariances croisées et du fait que  $C_{X_0}$  et  $C_n$  sont symétriques, on a

$$R_n^* - R_{X_0, X_1}^* = (C_n - C_{X_0}) \rho^* + U_n.$$

Ci-dessous le résultat de la convergence en loi de la covariance croisée.

**Théorème 1.2.1.** [48]  *$\sqrt{n}(R_n^* - R_{X_0, X_1}^*)$  converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée d'opérateur de covariance*

$$\Sigma_{R^*} = \Delta(I - R_{X_0, X_1})^{-1} \Sigma_{E_1} (I - R_{X_0, X_1}^*)^{-1} \Delta^* + \Sigma_{T_1}.$$

Pour obtenir éventuellement une forme explicite de l'opérateur de covariance  $\Sigma_{R^*}$ , il serait peut être nécessaire de fournir d'autres hypothèses supplémentaires. Si toutefois on suppose que  $e_i = t_i$  et que  $e_i$  soit le

vecteur propre de  $\Delta$  associé à la valeur propre complexe  $\alpha_i$ , il serait donc possible d'avoir une représentation diagonale de l'opérateur

$$\Sigma_{R^*} = \text{diag} \left( \tau_i + \frac{|\alpha_i|^2}{(1 - |\alpha_i|^2)^2} \pi_i \right).$$

## 2 Propriétés Asymptotiques des Pseudo-Inverses de l'opérateur de corrélation dans le modèle ARH(1) déterministe

### 2.1 Classe des estimateurs de projection dans les modèle ARH(1)

#### Introduction

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(H, \mathcal{H})$  l'espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dont dérive la norme  $\|\cdot\|$  dans  $H$ . On notera par  $\mathcal{L}(H)$  l'espace séparable des opérateurs linéaires bornés définis de  $H$  dans  $H$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  la norme usuelle des opérateurs bornés.

Le modèle ARH(1) s'écrit sous la forme

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

La suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est le bruit blanc fort vérifiant la condition

$$\mathbf{C0:} \quad \mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^4 < \infty.$$

L'opérateur  $\rho$  est continu de  $H$  vers  $H$  et vérifie la condition ci-dessous assurant la stationnarité stricte de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\mathbf{C1:} \quad \sum_{k \geq 0} \|\rho^k\|_{\mathcal{L}} < \infty.$$

Dans la suite, il sera impératif de supposer que l'opérateur  $C_{X_0}$  est injectif, ou de façon équivalente que

$$\mathbf{C2}: \quad \ker C_{X_0} = 0.$$

La condition **C2** nous permettra d'assurer l'identifiabilité de l'opérateur  $\rho$ , autrement dit, si cette condition n'est pas remplie alors il sera pas défini de manière unique par la relation

$$R_{X_0, X_1} = \rho C_{X_0}. \quad (2.2)$$

En effet, supposons qu'il existe  $u \in H$ , tel que  $C_{X_0} u = 0$ , en choisissant n'importe quel élément  $v$  de  $H$  et en posant

$$\rho_{u,v} = \rho + u \otimes v.$$

Nous aurons clairement

$$\rho C_{X_0} = \rho_{u,v} C_{X_0} = R_{X_0, X_1}.$$

D'autre part, la relation (2.2) ne permet d'écrire  $\rho = R_{X_0, X_1} C_{X_0}^{-1}$  dans la mesure où l'opérateur  $\rho$  est défini sur tout l'espace  $H$  alors que  $C_{X_0}^{-1}$  (inverse d'un opérateur compact non borné donc non continu et à graphe fermé) défini que sur un sous espace dense dans  $H$ .

D'une manière équivalente, on peut écrire

$$R_{X_0, X_1}^* = C_{X_0} \rho^*. \quad (2.3)$$

Cette relation permettra par contre de conclure par argument de graphe fermé et grâce au fait que  $\mathcal{R}(R_{X_0, X_1}^*) \subset \mathcal{D}(C_{X_0}^{-1})$

$$\rho^* = C_{X_0}^{-1} R_{X_0, X_1}^*, \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{R}(R_{X_0, X_1}^*)$  étant l'image de  $R_{X_0, X_1}^*$  et  $\mathcal{D}(C_{X_0}^{-1}) = \mathcal{R}(C_{X_0})$  le domaine de  $C_{X_0}^{-1}$  défini par

$$\mathcal{D}(C_{X_0}^{-1}) = \{x \in H : \|C_{X_0}^{-1}x\| < \infty\} = \left\{ x = \sum_{i \geq 1} x e_i \in H : \sum_{i \geq 1} \left( \frac{x_i}{\lambda_i} \right)^2 < \infty \right\}.$$

On aboutit donc par la relation (2.4) à une contradiction. Sachant que tout opérateur borné défini sur un sous espace dense dans  $H$  admet une extension à  $H$  (unique si elle préserve sa norme), cela donne

$$\rho = \text{ext}(R_{X_0, X_1} C_{X_0}^{-1}) = (C_{X_0}^{-1} R_{X_0, X_1}^*)^* = (R_{X_0, X_1} C_{X_0}^{-1})^{**},$$

où "ext" désigne l'extension à tout  $H$  d'un opérateur borné défini sur un sous espace dense dans  $H$  qui est en même temps dans notre cas son biadjoint. Pour toutes ses raisons, l'estimation de l'adjoint  $\rho^*$  est privilégiée. Tous les résultats seront applicables à  $\rho$ , il suffira juste de composer par l'opérateur involutif  $T \rightarrow T^*$  qui est continu.

Avant d'aller plus loin, nous allons rappeler quelques résultats établis par Mas [48, 49] qui seront utiles dans la suite. considérons l'estimateur par projection proposé par Bosq [20]. Cette classe d'estimateurs se construit de la manière suivante: soit  $P^{k_n}$  le projecteur sur le sous-espace vectoriel de dimension  $k_n$  engendré par les  $k_n$  premiers vecteurs propres de de l'opérateur de covariance empirique  $C_n$ .

Un estimateur de l'opérateur adjoint  $\rho^*$  sera écrit comme

$$\rho_n^* = (P^{k_n} C_n P^{k_n})^{-1} R_n^* P^{k_n}.$$

L'opérateur linéaire  $(P^{k_n} C_n P^{k_n})^{-1}$  est définie comme suit: la matrice  $(P^{k_n} C_n P^{k_n})^{-1}$  est inversée et complétée sur l'orthogonale de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(h_{i,1}, h_{i,2}, \dots, h_{i,k_n})$  par l'opérateur nul où  $h_{i,n}$  représente le  $i$ ème vecteur propres de  $C_n$ . Notons que, à partir d'un certain rang, si la matrice carrée  $(P^{k_n} C_n P^{k_n})$  est presque-sûrement inversible alors la matrice  $(P^{k_n} C_n P^{k_n})^{-1}$  est bien un pseudo-inverse de  $C_n$ . Par con-

séquent, une hypothèse supplémentaire doit être remplie pour établir les résultats asymptotiques. Supposons que l'évènement

$$A_n = \{\omega \in \Omega : (P^{k_n} C_n P^{k_n}) \text{ soit inversible}\},$$

est réalisé à partir d'un certain rang, soit

$$\mathbf{C}_3 : \mathbb{P}(\liminf_n A_n) = 1,$$

ou encore,  $A_n$  peut être réécrit comme

$$A_n = \{\omega \in \Omega : \dim \mathcal{R}(P^{k_n} C_n P^{k_n}) = k_n\}.$$

On donne les résultats de la normalité asymptotique de l'estimateur de projection ainsi que la convergence en probabilité.

**Théorème.** [48] *Sous les hypothèses  $\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_3$ , si de plus  $\mathbb{E}\|C_{X_0}^{-1} \varepsilon_0\|^2 < \infty$  et*

$$\mathbf{C}_4 : n\lambda_{k_n}^4 \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \text{si} \quad \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{k_n} \frac{a_m}{\lambda_m^2} \rightarrow 0,$$

où  $a_m = \max\{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{-1}, (\lambda_m - \lambda_{m+1})^{-1}\}$ , alors on a pour la norme de Hilbert-Schmidt

$$\sqrt{n}(\rho_{n,p}^* - P_{k_n} \rho^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Gamma_\rho$$

L'opérateur aléatoire  $\Gamma_\rho$  est centré, gaussien d'opérateur de covariance  $\Sigma_\rho$  à trace vérifiant pour  $t_{k,l} = h_k \otimes h_l$ , où  $h_k$  est la base de vecteurs propres de  $C_{X_0}$

$$\langle \Sigma_\rho t_{i,i'}, t_{j,j'} \rangle_S = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i \frac{\langle C_{\varepsilon_0}(h_i), h_{i'} \rangle}{\lambda_{i'} \lambda_{j'}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème.** [48] *Si les hypothèses du théorème précédents sont vérifiées, alors*

$$\|\rho_{n,p}^* - P^{k_n} \rho^*\|_S = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

soit encore pour tout  $x \in H$ ,

$$\|\rho_{n,p}^* x - \rho^* x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

## 2.2 Présentation de l'estimateur résolvant dans le modèle ARH(1) déterministe

Mas [48] a proposé une autre classe d'estimateurs de l'opérateur de corrélation appelés "estimateurs résolvants" dont la difficulté principale était d'approcher l'inverse de l'opérateur de covariance  $C_{X_0}$ . Comme nous l'avons mentionné plus haut, cela va faire appel à des résultats de la théorie des opérateurs.

Rappelons que l'idée qui a mené à l'élaboration des estimateurs de projection est de remplacer  $C_n$  opérateur non inversible par un pseudo-inverse que l'on note  $C'_n$  telque le comportement asymptotique de  $C'_n C_n$  est proche de l'opérateur identité. D'une manière générale, ce pseudo-inverse a les même vecteurs propres que  $C_n$  associés aux valeurs propres  $\lambda'_{n,p} = f_n(\lambda_{n,p})$  où  $f_n$  est une suite de fonctions de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  données par

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{\{x \geq \lambda_{k,n}\}}.$$

Une contrainte qu'on peut s'affranchir est que les fonctions  $f_n$  sont des fonctions aléatoires (fonctions des valeurs propres aléatoires), par ailleurs, on considère une autre suite de fonctions définies cette fois-ci par

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{\{x \geq \nu_n\}},$$

où  $\nu_n$  est suite positive strictement décroissante vers 0.

L'idée sera donc prolongée à une suite de fonctions indexées  $f_{n,p}$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  approchant la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , définie par

$$f_{n,p}(x) = \frac{x^p}{(x + \alpha_n)^{(p+1)}},$$



où la suite  $\alpha_n$  est positive strictement décroissante vers 0 convergente ponctuellement vers la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

### Construction de la classe des estimateurs résolvants

Comme il a été discuté dans de nombreuses monographies (Bosq [20], Dunford et Schwartz [30], Kato [43]...), les techniques classiques utilisées en théorie des problèmes inverses des opérateurs conduisent à la régularisation par décomposition spectrale pour définir un tel inverse continue. Le calcul fonctionnel pour les opérateurs bornés normaux permet de définir l'inverse régularisé  $f_{n,p}(C_n)$  ainsi que  $f_{n,p}(C_{X_0})$ . Il vient alors que

$$f_{n,p}(C_n) = (C_n + \alpha_n)^{-(p+1)} C_n^p,$$

d'où la construction d'un estimateur de l'opérateur  $\rho^*$

$$\rho_{n,p}^* = f_{n,p}(C_n) R_n^*. \quad (2.5)$$

La suite des estimateurs  $(\rho_{n,p}^*)_{p \geq 0}$  est appelée classe des "estimateurs résolvants" de l'adjoint  $\rho^*$ .

### Remarques

- *Contrairement à la classe des opérateurs de projection, La norme de l'opérateur  $f_{n,p}(C_n)$  n'est plus aléatoire et vaut presque sûrement  $\alpha_n^{-1}$ .*
- *Les opérateurs  $C_n$  et  $C_{X_0}$  étant positifs, les opérateurs  $(C_n + \alpha_n)^p$  et  $(C_{X_0} + \alpha_n)^p$  sont inversibles à inverses continus pour tout  $p \geq 1$ .*
- *pour tout  $p \geq 1$ ,  $f_{n,p}(C_n)$  est compact car  $f_{n,p}(0) = 0$ .*

- *Il est important de voir que plus  $p$  (paramètre de lissage) est élevé moins les vitesses de convergence sont bonnes. En effet, on peut facilement montrer que*

$$\|f_{n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n(p+1)} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-p}$$

*Donc pour un  $n$  fixé,  $\|f_{n,p}\|_{\mathcal{L}}$  va tendre vers 0 lorsque  $p$  tendra vers l'infini.*

- *Les estimateurs  $(\rho_{n,p}^*)_p$  disposent de certaines propriétés considérables. Contrairement aux estimateurs de projections proposés par Bosq [20], Mas [48] dans le cas déterministe, Allam et Mourid [1] dans le cas des modèles aléatoires, il ne serait plus nécessaire, pour construire les estimateurs, de calculer les valeurs et vecteurs propres de  $C_n$ . Par ailleurs, ces estimateurs peuvent être écrits à partir d'une base fixe et déterministe de  $H$ . On a seulement besoin de connaître les données  $X_k$ , par conséquent, il devient inutile de faire des hypothèses sur les valeurs propres de  $C_{X_0}$ .*

Posons  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i+1} \otimes X_i$ , On a le lemme suivant.

**Lemme.**[48] *Sous les hypothèses C0-C2, si de plus*

$$\mathbb{E}\|C_{X_0}^{-1}\varepsilon_0\|^2 < \infty$$

*Alors, pour tout  $p \geq 1$*

$$\sqrt{n}f_{n,p}(C_{X_0})U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Gamma_\rho.$$

Le résultat ci-dessous donne la normalité asymptotiques des estimateurs résolvants.

**Théorème.**[48] *Sous les conditions du lemme précédent, si de plus*

$\alpha_n^{p+2} \sqrt{n} \rightarrow \infty$ , on a pour la norme de Hilbert-Schmidt et la norme des opérateurs

$$\sqrt{n}(\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_n)C_n\rho^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Gamma_\rho,$$

où la v.a  $\Gamma_\rho$  a été définie plus haut.

Un résultat relatif au prédicteur statistique qui découle est le suivant.

**Corollaire.**[48] *Dans l'espace  $H$  et sous les hypothèses du théorème précédent*

$$\sqrt{n}(\rho_{n,p}(X_n) - \rho f_{n,p}(C_n)C_n(X_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Gamma_\rho(X_0)$$

La proposition suivante présente la convergence en probabilité de l'estimateur résolvant.

**Proposition.**[48] *Si  $\alpha_n^{p+2} \sqrt{n} \rightarrow \infty$ , sous les hypothèses du théorème précédent*

$$\|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^*\|_{\mathcal{L}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

*aussi pour tout  $x \in H$*

$$\|\rho_{n,p}^*(x) - \rho^*(x)\|_{\mathcal{L}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

### 2.3 Convergence presque-sûre de l'estimateur résolvant

Nous généralisons les résultats établis dans [48] en traitant la convergence presque-sûre pour cette classe d'estimateurs avec une vitesse de convergence en fonction des paramètres de lissage .

**Théorème 2.3.1.** [18] *Sous les conditions C0-C2, supposons de plus que C5: pour  $j \geq j_0$ ,  $\|\rho\|_{\mathcal{L}}^j < 1$ , si pour  $c > 0$ ,  $\|X_0\| \leq c$ , alors pour tout*

$\eta > 0$ ,

$$\mathbb{P}(\|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^*\|_{\mathcal{L}} > \eta) \leq 4 \exp\left(-\frac{n\alpha_n^{2(p+1)}\eta^2}{\mu_1 + \mu_2\alpha_n^{p+1}\eta}\right),$$

où  $\mu_1, \mu_2$  sont des constantes positives.

De plus,

$$\|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^*\|_{\mathcal{L}} = O\left(\left(\frac{\log n}{n\alpha_n^{2(p+1)}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \text{ presque-sûrement.}$$

Si  $\alpha_n^{p+1} \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , alors

$$\|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^*\|_{\mathcal{L}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ presque-sûrement.}$$

Pour le prédicteur résolvant  $\rho_{n,p}^*(x)$ , nous avons le résultat de convergence presque-sûre suivant.

**Proposition 2.3.1.** [18] *Sous les conditions du théorème précédent,*

*si  $\alpha_n^{p+1} \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , alors pour tout  $x \in H$ :*

$$\|\rho_{n,p}^*(x) - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^*(x)\|_{\mathcal{L}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ presque-sûrement.}$$

**Remarque.**

*les bornes exponentielles et la convergence presque-sûre des estimateurs résolvants sont obtenues à partir de la condition  $\alpha_n^{p+1} \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  qui est plus forte que la condition  $\sqrt{n}\alpha_n^{p+1} \rightarrow \infty$  utilisée dans la preuve des résultats traités par Mas [48] donnant la convergence faible.*

*Aussi, nos résultats sont basés sur la condition de bornitude  $\|X_0\| \leq c$  pour  $c > 0$  rendant les preuves plus faciles. D'autres conditions faibles sont possibles, mais cela nous conduit à des preuves plus techniques qui*

feront l'objet d'un travail à venir.

## Preuves

### Preuve du Théorème 2.3.1.

Nous introduisons les opérateurs aléatoires  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ , où  $T_i = \langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i$  avec  $T_i \in S$ . On peut écrire

$$\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^* = (f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0})\rho^* + f_{n,p}(C_n)U_n$$

Alors pour  $\eta > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^*\|_{\mathcal{L}} > \eta\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n T_i\right\|_S > \frac{n\eta}{2\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}}}\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(\|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{2\|\rho^*\|_{\mathcal{L}}}\right) \end{aligned}$$

Du fait que  $\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n}$  et que  $\rho$  est borné, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\rho^*\|_{\mathcal{L}} > \eta\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n T_i\right\|_S > \frac{n\alpha_n\eta}{2}\right) \tag{2.6} \\ &+ \mathbb{P}\left(\|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{2\|\rho^*\|_{\mathcal{L}}}\right) \end{aligned}$$

### Le premier terme de (2.6):

Les v.a  $T_i$  sont des différences de martingales par rapport à la filtration  $\mathcal{B}_i = \sigma(\varepsilon_j, j \leq i)$ , de plus

$$\|T_i\|_S \leq \|X_i\| \|\varepsilon_{i+1}\| \leq c^2(1 + \|\rho\|_{\mathcal{L}})$$

Donc  $\mathbb{E}\|T_i\|_S^2 \leq c^2\sigma^2$ . Par le Théorème 2.14 dans [20], nous avons

$$\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n T_i\right\|_S > \frac{n\alpha_n\eta}{2}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\alpha_n^2\eta^2}{8c^2\sigma^2 + \frac{4}{3}c^2(1 + \|\rho\|_{\mathcal{L}})\alpha_n\eta}\right)$$

**Le second terme dans (2.6):**

On a la décomposition

$$f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0} = A_{n,p} + B_{n,p},$$

où

$$A_{n,p} = (C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [C_n^{p+1} - C_{X_0}^{p+1}],$$

et

$$B_{n,p} = (C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1}] (C_{X_0} + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_{X_0}^{p+1}.$$

Nous pouvons aisément vérifier que

$$\|A_{n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n^{p+1}} K_{p,n} \|C_n - C_{X_0}\|_S$$

et

$$\|B_{n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n^{p+1}} K'_{p,n} \|C_n - C_{X_0}\|_S$$

où  $K_{p,n} := \sum_{i=0}^p \lambda_{0,n}^{p-i} \lambda_0^i$  et  $K'_{p,n} = \sum_{i=0}^p (\lambda_{0,n} + \alpha_n)^{p-i} (\lambda_0 + \alpha_n)^i$ . Par suite, pour tout  $\eta > 0$ , nous obtenons

$$\mathbb{P}\left(\|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{2\|\rho^*\|_{\mathcal{L}}}\right) \leq K_1.$$

où

$$K_1 = \mathbb{P} \left( (K_{p,n} + K'_{p,n}) \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{2 \|\rho^*\|_{\mathcal{L}}} \right).$$

Prenons l'évènement  $E_n = \left\{ \lambda_{0,n} > \frac{3\lambda_0}{2} \right\} = \left\{ \lambda_{0,n} - \lambda_0 > \frac{\lambda_0}{2} \right\}$  où  $\lambda_0 > 0$ .

En arrangeant les calculs, on trouve la majoration suivante

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \mathbb{P} \left( |\lambda_{0,n} - \lambda_0| > \frac{\lambda_0}{2} \right) \leq \mathbb{P} \left( \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\lambda_0}{2} \right)$$

Le Théorème 2.4 [20] implique que

$$\mathbb{P}(E_n) \leq 4 \exp \left( -\frac{n\lambda_0^2}{2(2\alpha_1 + \beta_1\lambda_0)} \right)$$

où  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont des constantes qui dépendent uniquement de  $\rho$  et  $\mathbb{P}_{\varepsilon_0}$ .

Remarquons que sur l'évènement contraire  $\bar{E}_n$ , on a presque-sûrement  $K_{p,n} + K'_{p,n} < 2(p+1)\lambda_0^p$ . Donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \left[ (K_{p,n} + K'_{p,n}) \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{2 \|\rho^*\|_{\mathcal{L}}} \right] \cap \bar{E}_n \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left( \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{4(p+1)\lambda_0^p \|\rho^*\|_{\mathcal{L}}} \right) \end{aligned}$$

Nous concluons par le Theoreme 2.4 [20] que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \left[ (K_{p,n} + K'_{p,n}) \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{2 \|\rho^*\|_{\mathcal{L}}} \right] \cap \bar{E}_n \right) \\ & \leq 4 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{4(p+1)\lambda_0^p \|\rho^*\|_{\mathcal{L}} [4\alpha_1(p+1)\lambda_0^p \|\rho^*\|_{\mathcal{L}} \alpha_1 + \beta_1 \alpha_n^{p+1} \eta]} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P} \left( \|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{2 \|\rho^*\|_{\mathcal{L}}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{P} \left( \left[ (K_{p,n} + K'_{p,n}) \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{2 \|\rho^*\|_{\mathcal{L}}} \right] \cap \bar{E}_n \right) + \mathbb{P}(E_n) \\
&\leq 4 \exp \left( - \frac{n \alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{4(p+1) \lambda_0^p \|\rho^*\|_{\mathcal{L}} [4\alpha_1(p+1) \lambda_0^p \|\rho^*\|_{\mathcal{L}} \alpha_1 + \beta_1 \alpha_n^{p+1} \eta]} \right) \\
&\quad + 4 \exp \left( - \frac{n \lambda_0^2}{2(2\alpha_1 + \beta_1 \lambda_0)} \right) \leq 4 \exp \left( - \frac{n \alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{\mu_1 + \mu_2 \alpha_n^{p+1} \eta} \right),
\end{aligned}$$

où  $\mu_1 = \max(16(p+1)^2 \lambda_0^{2p} \|\rho^*\|_{\mathcal{L}}^2, 2(2\alpha_1 + \beta_1 \lambda_0))$  et  $\mu_2 = 4(p+1) \lambda_0^p \|\rho^*\|_{\mathcal{L}} \beta_1$ .  
 Finalement, en regroupant les derniers résultats et en reprenant l'équation (2.6), nous arrivons à la conclusion suivante

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left( \|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0} \rho^*\|_{\mathcal{L}} > \eta \right) \leq 2 \exp \left( - \frac{n \alpha_n^2 \eta^2}{8c^2 \sigma^2 + \frac{4}{3}c(1 + \|\rho\|_{\mathcal{L}}) \alpha_n \eta} \right) \\
&+ 4 \exp \left( - \frac{n \alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{\mu_1 + \mu_2 \alpha_n^{p+1} \eta} \right) \leq 4 \exp \left( - \frac{n \alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{\mu_3 + \mu_4 \alpha_n^p \eta} \right), \text{ avec } \mu_3, \mu_4 \text{ sont des constantes} \\
&\text{positives.}
\end{aligned}$$

En choisissant  $\eta = A \left( \frac{\log n}{n \alpha_n^{2(p+1)}} \right)^{1/2}$ ,  $A > 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left( \left( \frac{n \alpha_n^{2(p+1)}}{\log n} \right)^{1/2} \|\rho_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0} \rho^*\|_{\mathcal{L}} \geq A \right) &\leq \gamma \exp \left( - \frac{A^2 \log n}{\mu_3 + \mu_4 A} \right) \\
&\leq \gamma_1 n^{-\frac{A^2}{\mu_3 + \mu_4 A}}.
\end{aligned}$$

Si  $A^2 > \mu_3 + \mu_4 A$ , la preuve sera achevée en concluant par le lemme de Borel-Cantelli.

### Preuve de la Proposition 2.3.1.

La preuve de la proposition est immédiate du théorème 2.3.1 (voir la section 4, Théorème 4.2.3 pour plus de détails).



## 3 Théorèmes limites pour les processus AR Hilbertien à coefficients aléatoires

### 3.1 Introduction aux modèles ARH(1) à coefficients aléatoires

La grande majorité des modèles de séries chronologiques fonctionnelles existants supposent une homogénéité temporelle dans le sens que la corrélation des v.a dans la série est constante et donc l'estimation peut être facilement effectuée sur la base d'informations historiques en négligeant l'instabilité de cette dépendance qui se produit dans le monde réel. Pour illustrer l'intérêt de cette approche, on cite l'exemple des températures en météorologie. Sachant qu'à l'heure actuelle, en prenant en compte le facteur du réchauffement climatique, on peut facilement remarquer que la corrélation des températures observées deviennent de plus en plus rebelles, par exemple, la température moyenne en Janvier est élevée par rapport à la normale et n'a aucun rapport avec celle de décembre en raison de facteurs environnementaux (les émissions du dioxyde de carbone dans l'atmosphère, les échanges océan-atmosphère, les éruptions volcaniques,...), par conséquent, les prévisions varient d'une situation à une autre, il est donc nécessaire de communiquer des informations qui sont appropriés à chaque situation et c'est le rôle du coefficient aléatoire.

Dans cette partie, on s'intéresse à la classe des processus autorégres-

### 3.1 Introduction aux modèles ARH(1) à coefficients aléatoires

sifs hilbertien à coefficients aléatoires (HRCA: Hilbert-valued Random Coefficients Autoregressive process), on établit des théorèmes limites: loi forte de grands nombres, théorème de la limite centrale, loi du logarithme itéré compact et inégalités exponentielles [17].

On considère l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  où toutes les v.a  $y$  sont définies. Soit  $(H, \|\cdot\|)$  l'espace de Hilbert réel séparable dont le produit scalaire associé est  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme induite  $\|\cdot\|$ . On note par  $\mathcal{L}(H)$  l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de  $H$  dans  $H$  équipé de la norme usuelle des opérateurs  $\|A\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$  si  $A \in \mathcal{L}(H)$ . Soit  $(\rho_n, n \in \mathbb{Z})$  une suite d'opérateurs aléatoires définis sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(H)$  avec la  $\sigma$ -algèbre Borélienne. La suite de v.a hilbertiennes  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  est dite bruit blanc fort si les v.a sont centrées, indépendantes et identiquement distribuées et  $\mathbb{E}\|\varepsilon_n\|^2 := \sigma_\varepsilon^2 > 0$ . La suite des v.a hilbertiennes  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  satisfaisant l'équation

$$X_n - \mu = \rho_n(X_{n-1} - \mu) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

est appelée processus Autorégressif Hilbertien à Coefficients Aléatoires noté RCARH.

Notons que le modèle décrit par la relation (3.1) pour n'importe quelle suite d'opérateurs aléatoires  $(\rho_n)_n$  est une généralisation de ceux étudiés par Guillas [36] et Cugliari [26], par suite, il serait intéressant d'étudier les propriétés de cette classe. Tout d'abord, nous regroupons les conditions dont nous avons besoin pour établir nos résultats.

A1: Les v.a  $(\rho_n, n \in \mathbb{Z})$  sont i.i.d.

A2: Les deux suites de v.a  $(\rho_n, n \in \mathbb{Z})$  et  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  sont mutuellement indépendantes.

A3: *i)*  $\Delta := \sup_n \|\rho_n\|_{\mathcal{L}} < 1$  presque-sûrement et *ii)*  $\mathbb{E}\|X_0\|^4 < \infty$ .

### 3.1 Introduction aux modèles ARH(1) à coefficients aléatoires

Sous les conditions A1–A3, il existe une unique solution stationnaire de (3.1) telle que  $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ . Elle est donnée par

$$X_n = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_{n,i} \varepsilon_{n-i}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{n,i} &= \prod_{j=n}^{n-i+1} \rho_j, \quad i \geq 1, \\ A_{n,0} &= I, \end{aligned}$$

De plus, la série converge p.s dans  $L^2_H$  (Allam et Mourid [4], Mourid [52]).

On considère par exemple, l'opérateur à noyau aléatoire  $\rho_n$  défini sur  $L^2([0, 1])$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in [0, 1]$  par:

$$(\rho_n f)(t) := \int_0^1 K_n(t-s) f(s) ds,$$

où  $(K_n)_n$  est une suite i.i.d. de noyaux aléatoires dans  $L^2([-1, 1])$  tels que  $\sup_n \|K_n\|_2 < 1$  presque-sûrement. Les conditions ci-dessus sont dans ce cas satisfaites. Comme exemple pris en théorie de traitement du signal, le noyau aléatoire est défini par

$K_n(t, \omega) = a_n(\omega) \cos(2\pi t - \phi)$  où les v.a  $a_n$  (les amplitudes aléatoires) sont i.i.d.,  $a_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$  et  $\phi$  représente la phase (déterministe).

Les conditions A1–A3 ci-dessus sont plus ou moins plus forte que celles qui existent dans la littérature. Cependant, elles sont posées pour rendre les preuves de nos résultats beaucoup plus traitables. Rappelons que dans les cas des processus multidimensionnels à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , quelques auteurs proposent des conditions générales suffisantes assurant l'existence d'un tel processus à coefficients aléatoires. On peut citer Brandt [22] dans le cas le cas réel et Bougerol et Picard [21] dans le cas multivarié (avec des conditions nécessaires et suffisantes). Dans le

cas d'un espace de Hilbert, Guillas [36] traite une classe spéciale des processus *HRC A* où les coefficients aléatoires  $\rho_n$  sont des opérateurs prenant deux valeurs  $\rho_0$  et  $\rho_1$  de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(q)$ . L'auteur montre sous la condition:  $c_m = (1 - q)\|\rho_0\|^{8m} + q\|\rho_1\|^{8m} < 1$ ,  $m \geq 1$ , que la l'équation (3.2) admet une solution stationnaire et la série converge dans  $L_H^2$ .

Rappelons que pour une v.a  $X$  Hilbertienne centrée et telle que  $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$ , l'opérateur de covariance  $C_X$  de  $X$  est défini par

$$C_X(x) = \mathbb{E}(\langle X, x \rangle X), \quad x \in H.$$

L'opérateur  $C_X$  est symétrique, positif et nucléaire.

On note par  $\tilde{H}$  l'espace de Hilbert des v.a Hilbertiennes  $U$  centrées ( $\mathbb{E}(U) = 0$ ) et  $\mathbb{E}\|U\|^2 < \infty$ , l'opérateur de covariance croisée entre les deux v.a  $X$  et  $Y$  de  $\tilde{H}$  est donné par

$$C_{X,Y}(x) = \mathbb{E}(\langle X, x \rangle Y), \quad x \in H, \quad \forall X, Y \in \tilde{H}.$$

L'opérateur  $C_{X,Y}$  est compact dont l'adjoint est de la forme  $C_{X,Y}^* = C_{Y,X}$  (Bosq [20] dans le cas des modèles autorégressifs hilbertiens à coefficient déterministe).

### 3.2 Resultats principaux

On présente quelques résultats pour les processus *RCHA* ( $X_n$ ) définis par la relation (3.1). Posons  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Proposition 3.2.1.** [17] *Si les conditions A1–A3 sont remplies, alors pour tout  $h \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$|\mathbb{E} \langle X_0, X_h \rangle| \leq \mathbb{E}\|X_0\|^2 (\mathbb{E}(\|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^h)). \quad (3.3)$$

### 3.2.1 Loi des grand nombres

Le résultat suivant présente la convergence en moyenne quadratique de la quantité  $S_n/n$  vers la quantité  $\mu$  définie plus haut et donne une vitesse de convergence.

**Théorème 3.2.1.** [17] *Sous les conditions A1–A3, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$\mathbb{E} \left\| \frac{S_n}{n} - \mu \right\|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

pour tout  $\beta > \frac{1}{2}$

$$\left\| \frac{S_n}{n} - \mu \right\| = O\left(\frac{(\log n)^\beta}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \text{ presque-sûrement.}$$

**Remarque 3.2.1.** *Le résultat du Théorème ci-dessus donne un taux de convergence d'ordre  $n^{1/2}$  à un facteur logarithmique. Il convient de souligner que, en statistique inférentielle pour les données fonctionnelles (analyse de régression et des composantes principales (ACP, AFC), etc.), les taux polynomiaux de convergence  $n^\gamma$ , où  $0 < \gamma \leq 1/2$  sont actuellement ajustés (voir [45, 46]).*

Le résultat suivant montre la convergence de l'opérateur de covariance  $C_{\frac{S_n}{n}}$  associé à la v.a  $(S_n/n)$  pour la norme nucléaire  $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ .

**Théorème 3.2.2.** [17] *Sous les conditions A1–A3, on aura*

$$\left\| nC_{\frac{S_n}{n}} - \sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{X_0, X_h} \right\|_{\mathcal{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et

$$n\mathbb{E} \left\| \frac{S_n}{n} - \mu \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \langle X_0, X_h \rangle.$$

Le taux de convergence dans Theorem 3.2.1 peut être amélioré et cela nécessite une hypothèse supplémentaire faite sur  $X_0$ .

**Théorème 3.2.3.** [17] *Sous les conditions A1–A3, si de plus  $\|X_0\| \leq b$*

presque-sûrement pour  $b > 0$ . Alors, pour tout  $\eta > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P} \left( \left\| \frac{S_n}{n} - \mu \right\| > \eta \right) \leq \gamma \exp \left( -\frac{n\eta^2}{\alpha + \beta\eta} \right), \quad (3.4)$$

où  $\gamma$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes positives qui dépendent de l'espérance  $\mathbb{E}(\rho_0)$ .

En outre, la borne dans (3.4) est le terme général d'une série convergente, alors

$$\left\| \frac{S_n}{n} - \mu \right\| = O \left( \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \text{ presque-sûrement.}$$

### 3.2.2 Théorème de la limite centrale

On donne le résultat de la limite centrale pour le processus *HRC*A défini par (3.1).

**Théorème 3.2.4.** [17] *Sous les conditions du Théorème 3.2.3, nous avons*

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} N_1, \quad (3.5)$$

où  $N_1$  est une v.a hilbertienne centrée d'opérateur de covariance  $C_{N_1}$  associé à la v.a

$$(I - \mathbb{E}(\rho_0))^{-1} (X_1 - \mathbb{E}(\rho_0) X_0).$$

### 3.2.3 Loi du Logarithme Itéré compacte

Les probabilistes cherchent toujours à bien élucider le comportement de la somme des variables aléatoires  $S_n$  qu'on a définie plus haut. Pour répondre à ce problème, des recherches ont fait appel à la Loi du Logarithme Itéré (LLI) qui mérite une bonne attention puisque c'est l'un des résultats limites important en probabilité à part la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale. Nous commençons par rappeler la version classique du résultat de la LLI.

On considère une suite de v.a réelles  $(X_n)_n$  i.i.d centrées et réduites,

et  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . La loi LLI donne un résultat pour la suite  $\frac{S_n}{\sqrt{n \log_2 n}}$  où  $\log_2 n = \log \log n$ , doù le nom du logarithme itéré. Notons que la suite considérée converge en probabilité vers 0 (Utiliser l'inégalité de B. Tchebychev) par contre la convergence presque-sûre n'est pas gagnée.

**Résultat de la LLI.**

Soit une suite de v.a réelles  $(X_n)_n$  i.i.d centrées et réduites, alors

$$\overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n \log_2 n}} = \sqrt{2} \text{ presque-sûrement.}$$

Ce résultat a été développé, après Hartman et Wintner pour des v.a de Bernoulli par Khinchine, puis par Kolomogorv pour de v.a suivant une loi Normale.

Dans cette partie, on est intéressé par la loi fonctionnelle du Logarithme itéré en particulier, pour la LLI compacte pour les processus autorégressif hilbertiens à coefficients aléatoires définis par (3.1) en faisant quelques hypothèses bien évidemment. Pour cela, on applique un résultat établi par Merlevede (Théorème 2 Merlevede [50]) sur la loi du logarithme itéré compacte pour un mélange fort de suite de v.a hilbertienne. Rappelons que pour une suite donnée  $(x_n)_n$  de  $H$  et  $K$  un sous ensemble de  $H$  ( $K \subset H$ ), on définit la métrique

$$d(x_n, K) = \inf\{\|x_n - y\|, y \in K\},$$

et  $C(x_n)$ , l'ensemble de tous les points limites possibles de la suite  $(x_n)$ . On présente ci-dessous le théorème de la LLI compacte pour le processus HRC A défini dans (3.1).

**Théorème 3.2.5.** [17] *Sous les conditions A1–A3, supposons que  $\|X_0\| \leq b$  presque-sûrement pour  $b > 0$ , et que les v.a hilbertienne  $(X_n)_n$  définies dans (3.1) soient fortement mélangeantes de coefficient de mélange  $\alpha =$*

$\alpha(k)$ <sup>1</sup> vérifiant

$$\sum_{k \geq 1} k^{2/\delta} \alpha(k) < \infty,$$

pour  $\delta > 0$ . Alors le processus  $(X_n)_n$  décrit par (3.1) satisfait La LLI compact

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}}, (I - \mathbb{E}(\rho_0))^{-1} K_0\right) = 0 \quad \text{presque-sûrement.} \quad (3.6)$$

et

$$C\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}}\right) = (I - \mathbb{E}(\rho_0))^{-1} K_0 \quad \text{presque-sûrement.} \quad (3.7)$$

où  $K_0$  est la boule unité de l'espace des noyaux reproduisants de  $H$  associé à l'opérateur de covariance de la v.a  $N_1 = (I - \mathbb{E}(\rho_0))(X_1 - \mathbb{E}(\rho_0)X_0)$ .

**Remarque 3.2.2.** • Il est bien connu dans la littérature des propriétés de mélange que la condition de mélange fort pour les processus linéaires réels n'est pas automatiquement assurée et cela nécessite des conditions supplémentaires. Allam et Mourid [1] ont donné des conditions suffisantes validant que le processus ARH(1) à coefficient déterministe satisfait bien la propriété du mélange fort utiles pour des résultats asymptotiques en statistique des processus. Cependant, dans le cas des processus ARH(1) à coefficients aléatoires, la question reste quand même ouverte pour trouver notamment des conditions suffisantes conduisant à la propriété du mélange fort.

- La condition  $\sum k^{2/\delta} \alpha(k) < \infty$  est suffisante pour valider l'hypothèse du Théorème 3.2.5 (Voir la Remarque 3 dans Merleved [50]). Notons aussi qu'un coefficient de mélange fort arithmétique  $\alpha(k) = O(k^{-(1+\varepsilon)(1+2/\delta)})$  nous permet d'avoir la LLI compacte pour  $0 < \varepsilon < 1$  et  $\delta > 0$ .

<sup>1</sup> $\alpha(n) = \sup\{|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| : A \in \mathcal{F}_1^k(Z), \text{ et } B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty(Z), k \in \mathbb{N}^*\}, \mathcal{F}_i^k(Z)$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\{Z_j, i \leq j \leq k\}$



### Preuves

Dans la suite, pour alléger les techniques de démonstrations, on peut supposer que  $\mu = 0$  sans perdre la généralisation. Rappelons que  $C_{X_0}$  et  $C_{\varepsilon_0}$  sont respectivement les opérateurs de covariance des v.a  $X_0$  et  $\varepsilon_0$ . Aussi, sous les conditions A1-A3 posées plus haut, on a [2]:

$$\begin{aligned} C_{X_0} &= C_{\rho_1 X_0} + C_{\varepsilon_0}, \\ C_{\rho_1 X_0} &= \mathbb{E}(\rho_1 C_{X_0} \rho_1^*), \\ C_{X_0 X_1} &= \mathbb{E}(\rho_0) C_{X_0}. \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned} C_{X_0} &= C_{X_1} = \mathbb{E}\langle X_1, \cdot \rangle X_1 \\ &= \mathbb{E}\langle \rho_1 X_0 + \varepsilon_1, \cdot \rangle \rho_1 X_0 + \varepsilon_1 \\ &= \mathbb{E}\langle \rho_1 X_0, \cdot \rangle \rho_1 X_0 + \mathbb{E}\langle \rho_1 X_0, \cdot \rangle \varepsilon_1 + \mathbb{E}\langle \varepsilon_1, \cdot \rangle \rho_1 X_0 + \mathbb{E}\langle \varepsilon_1, \cdot \rangle \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Puisque les v.a  $\rho_1 X_0$  et  $\varepsilon_1$  sont indépendantes, on obtient

$$\mathbb{E}\langle \rho_1 X_0, \cdot \rangle \varepsilon_1 = \mathbb{E}\langle \varepsilon_1, \cdot \rangle \rho_1 X_0 = 0.$$

Ce qui achève le premier point.

Pour le deuxième point, en utilisant le fait que la v.a  $\rho_1$  est indépendante de  $X_0$ , en considérant la base orthonormale  $(f_l, l \in \mathbb{N})$  de  $H$  et par suite

$$(s_{l,k} = \langle f_l, \cdot \rangle f_k, l, k \in \mathbb{N}),$$

une base orthormale de  $S$ , nous aurons

$$\begin{aligned}
 \langle C_{\rho_1 X_0}(\cdot), s_{l,k} \rangle_S &= \langle C_{\rho_1 X_0}(f_l), f_k \rangle \\
 &= \langle \mathbb{E}(\langle \rho_1 X_0, f_l \rangle \rho_1 X_0), f_k \rangle \\
 &= \mathbb{E}(\langle \rho_1 X_0, f_l \rangle \langle \rho_1 X_0, f_k \rangle) \\
 &= \mathbb{E} \left( \left\langle \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle X_0, f_m \rangle \rho_1(f_m), f_l \right\rangle \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle X_0, f_n \rangle \rho_1(f_n), f_k \right\rangle \right) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\langle X_0, f_m \rangle \langle X_0, f_n \rangle) \mathbb{E}(\langle \rho_1(f_m), f_l \rangle \langle \rho_1(f_n), f_k \rangle) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\langle C_{X_0}, f_m \rangle) \mathbb{E}(\langle \rho_1^*(f_l), f_m \rangle \rho_1(f_n), f_k).
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \langle \rho_1 C_{X_0} \rho_1^*, s_{l,k} \rangle_S &= \langle \rho_1 C_{X_0} \rho_1^*(f_l), f_k \rangle \\
 &= \left\langle \rho_1 C_{X_0} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle \rho_1^*(f_l), f_m \rangle f_m \right), f_k \right\rangle \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle \rho_1^*(f_l), f_m \rangle \langle \rho_1 C_{X_0}(f_m), f_k \rangle \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \rho_1^*(f_l), f_m \rangle \langle C_{X_0}(f_m), f_n \rangle \langle \rho_1(f_n), f_k \rangle.
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$\langle \mathbb{E}(\rho_1 C_{X_0} \rho_1^*), s_{l,k} \rangle_S = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle C_{X_0}(f_m), f_n \rangle \mathbb{E}(\langle \rho_1^*(f_l), f_m \rangle \langle \rho_1(f_n), f_k \rangle).$$

Ce qui nous permettra de conclure.

Le troisième point est omis facile à vérifier.

### Preuve de la proposition 3.2.1:

La relation (3.1) nous donne pour tout  $h \geq 1$ :

$$X_h = \sum_{k=0}^{h-1} A_{h,k} \varepsilon_{h-k} + A_{h,h} X_0. \tag{3.8}$$

Remplaçons la valeur de  $X_h$  dans le membre de gauche de la relation (3.8), on aura donc

$$\mathbb{E} \langle X_0, X_h \rangle = \mathbb{E} \langle X_0, A_{h,h} X_0 \rangle + \sum_{k=0}^{h-1} \mathbb{E} \langle X_0, A_{h,k} \varepsilon_{h-k} \rangle.$$

Sachant que les v.a ( $A_{h,k} \varepsilon_{h-k}$ ,  $k = 0, \dots, h-1$ ,  $h \geq 1$ ) sont indépendantes de  $X_0$ . Par suite

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E} \langle X_0, X_h \rangle\| &= \|\mathbb{E} \langle X_0, A_{h,h} X_0 \rangle\| \\ &\leq \mathbb{E} \|X_0\|^2 (\mathbb{E} \|\rho_0\|_{\mathcal{L}})^h. \end{aligned}$$

Remarquons que sous la conditions A3 i) et le fait que  $\mathbb{E} \|\varepsilon_n\|^2 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$ , implique que  $\mathbb{E} \|X_0\|^2 < \infty$ .

### Preuve du Théorème 3.2.1:

Pour  $n \geq 1$  et  $q \geq 1$ , on a bien

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_n + \dots + X_{n+q-1}\|^2 &= q \mathbb{E} \|X_n\|^2 + 2 \sum_{i,j=n}^{n+q-1} \mathbb{E} \langle X_i, X_j \rangle \\ &\leq q \mathbb{E} \|X_0\|^2 + 2(q-h) \sum_{h=1}^{q-1} \mathbb{E} \langle X_0, X_h \rangle \\ &\leq q \mathbb{E} \|X_0\|^2 + 2q \sum_{h=1}^{q-1} \mathbb{E} \|X_0\|^2 (\mathbb{E} \|\rho_0\|_{\mathcal{L}})^h \\ &\leq q \left( 1 + \frac{2}{1 - \mathbb{E} \|\rho_0\|_{\mathcal{L}}} \right) \mathbb{E} \|X_0\|^2 \\ &\leq q \left( 1 + \frac{2}{1 - \bar{\rho}} \right) \mathbb{E} \|X_0\|^2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec  $\bar{\rho} = \mathbb{E} \|\rho_0\|_{\mathcal{L}}$ . Cependant,

$$\mathbb{E} \left\| \frac{S_n}{n} \right\|^2 \leq \frac{K}{n},$$

où

$$K = \left(1 + \frac{2}{1 - \bar{\rho}}\right) \mathbb{E} \|X_0\|^2.$$

Ce qui nous permet de conclure le premier point du théorème .

Pour le seconde, en utilisant la relation (3.9) et le corollaire 2.3 dans Bosq [20], nous arriverons à montrer la deuxième relation du théorème pour tout  $\beta > \frac{1}{2}$ .

### Preuve du Théorème 3.2.2:

Notons que

$$C_{X_0, X_h} = C_{X_0, A_{h,h}(X_0)},$$

où les quantités  $A_{h,i}$ ,  $i \geq 1$ , ont été déjà définies dans l'équation (3.2).

Alors

$$\begin{aligned} \|C_{X_0, X_h}\|_{\mathcal{N}} &\leq \mathbb{E} \|X_0\|^2 \|A_{h,h}\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \mathbb{E} \|X_0\|^2 (\mathbb{E} \|\rho_0\|_{\mathcal{L}})^h < \infty. \end{aligned}$$

Cela implique la convergence de la série  $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{X_0, X_h}$  dans l'espace des opérateurs nucléaires  $\mathcal{N}$  dont la norme induite est  $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ .

Pour le premier point du théorème, nous avons

$$\begin{aligned} C_{\frac{S_n}{n}} &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq 1} \mathbb{E} \langle X_i, \cdot \rangle X_j \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq 1} C_{X_i, X_j}. \end{aligned}$$

Le résultat de la stationnarité du processus  $(X_n)_n$  nous permet d'écrire

$$nC_{\frac{S_n}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{|h| \leq n-1} (n - |h|) C_{X_0, X_h},$$

on obtient par conséquent la convergence ci-dessous, pour la norme

nucléaire

$$nC_{\frac{S_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{X_0, X_h},$$

Ce qui prouve le premier résultat.

Pour établir le seconde, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} n\mathbb{E}\left\|\frac{S_n}{n}\right\|^2 &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\|^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}\langle X_i, X_j \rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{|h| \leq n-1} (n - |h|)\mathbb{E}\langle X_0, X_h \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|C_{\frac{S_n}{n}}\|_{\mathcal{N}} = \mathbb{E}\left\|\frac{S_n}{n}\right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\langle X_0, X_h \rangle,$$

or

$$\left\|\sum_{h \in \mathbb{Z}} C_{X_0, X_h}\right\| = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\langle X_0, X_h \rangle.$$

Par conséquent, le deuxième résultat est déduit.

### Preuve du Théorème 3.2.3:

En utilisant la décomposition des v.a  $X_i$  de façons que la somme  $S_n$  admet la forme suivante

$$S_n = T_n + R_n,$$

où  $T_n$  est une martingale de carré intégrable et  $R_n$  est telle que  $E(R_n^2) = o(n)$ . Ce genre de résultat est appelé "approximation de martingales" nécessitant des conditions appropriées existant dans la littérature. On peut renvoyer le lecteur vers Zahoo and Woodroffe [65], Biao et Woodroof [16] et Davidson [28].

On considère, pour tout  $i \geq 1$ , la suite décroissante de  $\sigma$ -algèbres

$\mathcal{B}_i = \sigma((\varepsilon_j, \rho_j), j \leq i)$  et l'approximation des martingales de la suite  $(X_n)_n$  vérifiant la relation (3.1) réécrite sous la forme:

$$X_i = N_i + M_{i-1} - M_i,$$

où

$$\begin{aligned} M_i &= (I - \bar{\rho})^{-1} \bar{\rho} X_i, \\ N_i &= (I - \bar{\rho})^{-1} X_i - M_{i-1}, \end{aligned}$$

et  $\bar{\rho} = \mathbb{E}(\rho_0)$  satisfaisant  $\|\bar{\rho}\|_{\mathcal{L}} < 1$  par hypothèse. Par ailleurs, l'inverse de l'opérateur  $(I - \bar{\rho})$  existe et est continu sur  $H$ . D'autre part, sachant que les v.a  $\varepsilon_i$  sont indépendantes de  $\mathcal{B}_{i-1}$  et que  $X_{i-1}$  est  $\mathcal{B}_{i-1}$ -mesurable, alors, on obtient dans ce cas

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{i-1}}(X_i) = \bar{\rho} X_{i-1}.$$

Ce qui prouve que  $N_i$  est une différence de martingales respectivement à la filtration  $(\mathcal{B}_i)_i$ . Nous pouvons écrire

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i + \frac{1}{n} (M_0 - M_n). \quad (3.10)$$

Il vient alors que, pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\left\|\frac{S_n}{n}\right\| \geq \eta\right) \leq \mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n N_i\right\| > \frac{n\eta}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\|M_0 - M_n\| > \frac{n\eta}{2}\right). \quad (3.11)$$

Aussi, puisque

$$\|M_0 - M_n\| \leq \|M_0\| + \|M_n\| \leq 2b\|(I - \bar{\rho})^{-1}\|_{\mathcal{L}}.$$

Alors, le seconde terme dans (3.10) sera contrôlé comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|M_0 - M_n\| > \frac{n\eta}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(\exp \eta(\|M_0 - M_n\|) > \frac{n\eta^2}{2}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{n\eta^2}{2}\right) \mathbb{E}\left(\exp \eta(\|M_0 - M_n\|)\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{n\eta^2}{2}\right) \exp\left(2b\eta\|(I - \bar{\rho})^{-1}\|_{\mathcal{L}}\right) \\ &\leq K \exp\left(-\frac{n\eta^2}{2}\right), \end{aligned}$$

où

$$K = \exp\left(2b\eta\|(I - \bar{\rho})^{-1}\|_{\mathcal{L}}\right).$$

Travaillons le premier terme dans (3.10), on a

$$\|N_i\| \leq b(1 + \Delta^*)\|(I - \bar{\rho})^{-1}\|_{\mathcal{L}},$$

où  $\Delta^* = \|\bar{\rho}\|_{\mathcal{L}}$ . Ainsi, d'après le Théorème 2.14 dans Bosq [20], il apparaît alors clairement que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n N_i\right\| > \frac{n\eta}{2}\right) &\leq 2 \exp\left(-\frac{n\eta^2}{8b^2(1 + \Delta^*)^2\|(I - \bar{\rho})^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 + \frac{4}{3}b\eta(1 + \Delta^*)\|(I - \bar{\rho})^{-1}\|_{\mathcal{L}}}\right) \\ &\leq 2 \exp\left(\frac{n\eta^2}{8\alpha^2 + \frac{4}{3}\alpha\eta}\right), \end{aligned}$$

où

$$\alpha = b(1 + \Delta^*)\|(I - \bar{\rho})^{-1}\|_{\mathcal{L}}.$$

En regroupant tous les résultats trouvés plus haut, on obtient alors pour (3.11),

$$\mathbb{P}\left(\left\|\frac{S_n}{n}\right\| \geq \eta\right) \leq \gamma \exp\left(-\frac{n\eta^2}{\alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha\eta}\right),$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma &= \max(K, 2), \\ \alpha_1 &= \max(8\alpha^2, 2). \end{aligned}$$

En prenant  $\eta = \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \eta_1$ ,  $A > 0$ , on aura

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\|\frac{S_n}{n}\right\| \geq \eta\right) &\leq \gamma \exp\left(-\frac{\eta_1^2 \log n}{\alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha\eta_1 \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &\leq \gamma \exp\left(-\frac{\eta_1^2 \log n}{\alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha\eta_1}\right) \\ &\leq \gamma n^{-\frac{\eta_1^2}{\alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha\eta_1}}. \end{aligned}$$

si  $\eta_1^2 > \alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha\eta_1$  alors la dernier terme qui est borné est le terme général d'une série convergente et on conclut donc par le lemme de Borel-Cantelli.

#### Preuve du Théorème 3.2.4:

Reprenons la décomposition donnée dans (3.10), en arrangeant le calcul, on obtient

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n N_i + \frac{1}{\sqrt{n}}(M_0 - M_n). \quad (3.12)$$

Tout d'abords, essayons de vérifier la convergence en probabilité du deuxième terme dans (3.10) vers 0.

Posons  $\Delta_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(M_0 - M_n)$ . On peut montrer comme dans la preuve du Théorème 3.2.3 que, pour  $\eta > 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|\Delta_n\| > \frac{\eta}{2}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\|M_0\| + \|M_n\| > \sqrt{n}\frac{\eta}{2}\right) \\ &\leq \exp\left(-\sqrt{n}\frac{\eta}{2}\right) \mathbb{E}\left(\exp\eta(\|M_0\| + \|M_n\|)\right) \\ &\leq K \exp\left(-\sqrt{n}\frac{\eta}{2}\right), \end{aligned}$$

où  $K$  est la même constante définie dans la preuve du Théorème 3.2.3.



Par suite, on déduit la convergence en probabilité vers 0 de la quantité  $\Delta_n$ .

Il reste à déterminer maintenant, la loi limite du premier terme  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n N_i$  dans (3.12) où

$$N_i = (I - \bar{\rho})^{-1} X_i - (I - \bar{\rho})^{-1} \bar{\rho} X_{i-1}$$

est une différence de martingales, On aura affaire donc à vérifier la validité des trois conditions du Théorème 2.16 Bosq [20] pour conclure.

Les conditions sont les suivantes:

1.  $\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|N_i\|}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ ,
2. Pour  $\eta > 0$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n r_N^2 \left( \frac{N_i}{\sqrt{n}} \right) > \eta \right) = 0$ , où  $r_N^2(u) = \sum_{l=N}^{\infty} \langle u, e_l \rangle^2$ ,  $u \in H$ ,
3.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle N_i, e_l \rangle \langle N_i, e_m \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Psi_{l,m}$ , presque-sûrement,  $l, m \geq 1$ , où  $(\Psi_{l,m})$  est une suite de nombres réels et  $(f_j, j \geq 1)$  est une base orthonormale de  $H$ .

### Pour la première condition.

Pour  $\eta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_i \|N_i\| > \sqrt{n}\eta \right) &\leq \frac{1}{n\eta^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left( \|N_i\|^2 \mathbf{1}_{\|N_i\| > \sqrt{n}\eta} \right) \\ &\leq \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E} \left( \|N_1\|^2 \mathbf{1}_{\|N_1\| > \sqrt{n}\eta} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Sachant que  $\mathbb{E}\|N_1\|^2 < \infty$ , et que

$$\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|N_i\|^2}{n} \right) \leq \mathbb{E}\|N_1\|^2$$

Alors

$$\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|N_i\|}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

D'où la première condition.

**Pour la deuxième condition.**

Considérons les éléments propres,  $(\gamma_l, e_l)_{l \geq 1}$ , de l'opérateur de covariance  $C_{N_1}$  de la v.a

$N_1 = (I - \mathbb{E}(\rho_0))^{-1}(X_1 - \mathbb{E}(\rho_0)X_0)$ . De l'équation ci-dessus

$$r_N^2(u) = \sum_{l=N}^{\infty} \langle u, e_l \rangle^2, \quad u \in H,$$

on a, pour  $\eta > 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n r_N^2 \left( \frac{N_i}{\sqrt{n}} \right) > \eta \right) &\leq \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left( r_N^2 \left( \frac{N_i}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{n\eta} \sum_{i=1}^n \sum_{l=N}^{\infty} \mathbb{E} \langle N_i, e_l \rangle^2 \\ &\leq \frac{1}{\eta} \sum_{l=N}^{\infty} \mathbb{E} \langle N_1, e_l \rangle^2 \\ &\leq \frac{1}{\eta} \sum_{l=N}^{\infty} \gamma_l. \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E} \langle N_i, e_l \rangle^2 \leq \mathbb{E} \|N_i\|^2 \leq c$  où  $c > 0$ .

Finalement, sachant que l'opérateur de covariance  $C_{N_1}$  est à trace (en effet,  $\sum_{l \geq 1} \gamma_l < \infty$ ), on arrive à montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n r_N^2 \left( \frac{N_i}{\sqrt{n}} \right) > \eta \right) = 0.$$

Ce qui vérifie la seconde condition.

**Pour la troisième condition.**

La troisième, en revanche, est une conséquence du résultat de la loi forte des grands nombres pour les opérateurs de covariances empiriques associés à  $N_i$ . Effectivement, on a bien

$$\mathbb{E}(\langle N_i, e_l \rangle \langle N_i, e_m \rangle) = \langle C_{N_i} e_l, e_m \rangle = \gamma_l \delta_{l,m} = \Psi_{l,m}, \quad l, m \geq 1.$$

Puisque les différences de martingales  $N_i$  sont bornées, on peut arriver à la convergence presque-sûre de la quantité

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle N_i, e_l \rangle \langle N_i, e_m \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Psi_{l,m}, \quad l, m \geq 1.$$

Comme une conséquence, toutes les conditions du Théorème 2.16 [20] seront vérifiées, on conclut donc que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n N_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, C_{N_1}),$$

où l'opérateur de covariance  $C_{N_1}$  satisfait

$$\langle C_{N_1} e_l, e_m \rangle = \Psi_{l,m}, \quad l, m \geq 1$$

Par suite, on aura la convergence en loi désirée de  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ .

**Preuve du Théorème 3.2.5:**

On applique le Théorème 2 dans Merleved [50].

En supposant que le processus ARH(1) à coefficients aléatoires  $(X_n)_n$  défini par la relation (3.1) est fortement mélangeant, sous les conditions  $\sum k^{\frac{2}{\delta}} \alpha(k) < \infty$ , pour  $\delta > 0$ , et  $X_0$  borné. On applique donc la Remarque

3 dans Merleved [50] qui dit que la "queue supérieure" de la fonction quantile  $Q_X$  suivante:

$$Q_X(u) = \inf\{t \geq 0 / \mathbb{P}(X > t) \leq u\},$$

satisfait la condition (2.3) du Théorème 2 dans Merleved [50], donnée par:

$$\sum_{k \geq 1} \int_0^{\alpha_k} Q_{\|X_0\|_H}(u) du < \infty.$$

On aura par conséquent la LLI compact pour les v.a  $X_n$ .

Il reste à identifier l'opérateur de covariance  $\Lambda$  donné dans la relation (2.4) du Théorème 2 dans [50].

$$\Lambda(x, y) = E(\langle X_0, x \rangle \langle X_0, y \rangle) + \sum_{k \geq 1} E(\langle X_k, x \rangle \langle X_0, y \rangle) + \sum_{k \geq 1} E(\langle X_0, x \rangle \langle X_k, y \rangle).$$

Par le Théorème 3.2.4, l'opérateur de covariance  $\Lambda$  n'est autre que celui de la v.a

$$N_1 = (I - \mathbb{E}(\rho_0))^{-1}(X_1 - \mathbb{E}(\rho_0)X_0).$$

## 4 Résultats asymptotiques de l'estimateur résolvant

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une estimation de la moyenne des opérateurs de corrélation aléatoires définis par une équation fonctionnelle de processus autorégressif. Sous des conditions posées sur le paramètre de régularisation, nous obtenons une convergence en probabilité, des bornes exponentielles, une convergence presque sûre et une loi limite des estimateurs. Nous proposons à la fin un estimateur de la variance des opérateurs aléatoires et nous montrons sa convergence en probabilité. Ces résultats étendent et améliorent ceux de Mas dans le cas de processus AR fonctionnels à coefficients déterministes.

Comme cela a été annoncé plus haut, cette partie utilise des résultats de la théorie des opérateurs. Le problème crucial est celui d'approcher l'inverse de l'opérateur de covariance. Pour cela, nous sommes amenés à construire le pseudo-inverse basé sur l'opérateur de covariance empirique  $C_n$  (qui est de rang inférieur à  $n$  donc non inversible). Nous choisissons donc des pseudo-inverses de  $C_n$  qui s'écrivent pour un  $p \geq 1$  et une suite positive strictement décroissante  $\alpha_n$ , de la façon suivante :

$$(C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_n^p.$$

Le modèle ARH(1) à coefficient aléatoire, que nous allons étudier prend la forme suivante:

$$X_n = \rho_n(X_{n-1}) + \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

où les v.a  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  sont définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs dans un espace de Hilbert réel séparable  $(H, \mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ,  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite d'opérateurs aléatoires à valeurs dans  $H$  muni de la norme usuelle  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ , la suite de v.a  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  représente le bruit blanc fort Hilbertien et  $(\rho_n, \varepsilon_n)$  une suite stationnaire ergodique.

Pour l'existence et l'unicité de la solution

$$X_n = \sum_{j \geq 0} \left( \prod_{i=n-j}^{n-1} \rho_i \right) \varepsilon_{n-j-1}$$

du modèle (1), nous supposons la condition suivante:

Condition **(C1)**

- Les v.a  $(\rho_n)_n$  sont i.i.d, la suite  $(\rho_n)_n$  est indépendante de la suite  $(\varepsilon_n)_n$ ,
- $\sup_i \|\rho_i\|_{\mathcal{L}} < 1$ ,  $\mathbb{E}(\log \|\rho_0\|)_{\mathcal{L}} < 0$  et  $\mathbb{E}(\log \|\varepsilon_0\|)_{\mathcal{L}}^+ < \infty$ ,
- $\mathbb{E}\|X_0\|^4 < \infty$ .

On considère l'espace séparable  $S$  des opérateurs de Hilbert-Schmidt équipé du produit scalaire défini, pour tous  $T_1, T_2 \in S$ , par:  $\langle T_1, T_2 \rangle_S = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle T_1(f_i), f_j \rangle \langle T_2(f_i), f_j \rangle$  et la norme associée  $\|\cdot\|_S$ . Rappelons qu'un opérateur linéaire  $T$  sur un espace de Hilbert séparable  $(H, \|\cdot\|)$  est de Hilbert-Schmidt si:

$$\|T\|_S^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \|Tf_i\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle T(f_i), f_j \rangle_H^2 < \infty$$

où  $(f_i, i \in \mathbb{N})$  est une base Hilbertienne dans  $H$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire associé.

Similairement, on définit respectivement les opérateurs de covariance et de covariance croisées pour  $x \in H$ , par

$$C_{X_0}(x) = \mathbb{E}(\langle X_0, x \rangle X_0), \quad R_{X_0, X_1}(x) = \mathbb{E}(\langle X_0, x \rangle X_1).$$

Rappelons que  $C_{X_0}$  est positif, borné symétrique et nucléaire chaque fois que  $\mathbb{E}\|X_0\|^2 < \infty$ , ses valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \geq 0}$  sont positives et rangées dans l'ordre décroissant de vecteurs propres associés  $(h_i)_{i \geq 0}$ . À partir d'un échantillon  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de (4.1), l'opérateur de covariance empirique  $C_n$  de  $X_0$  sera défini, pour tout  $x \in H$ , par

$$C_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_i.$$

Notons que les valeurs propres  $(\lambda_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$  de l'opérateur  $C_n$  sont aléatoires (elles peuvent être éventuellement nulles). De la même façon, l'opérateur de covariance croisée empirique  $R_n$  entre  $X_0$  et  $X_1$  sera donné, pour tout  $x \in H$ , par

$$R_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_{i+1}.$$

On s'intéresse à l'estimation de la moyenne  $\theta = \mathbb{E}(\rho_0)$ . Son estimation repose essentiellement sur le problème inverse de l'équation du moment :  $R_{X_0, X_1} = \theta C_{X_0}$ . Comme nous l'avons discuté dans le chapitre 2, il serait indispensable de supposer que  $C_{X_0}$  soit injectif ou de façon équivalente que  $\ker C_{X_0} = 0$  (condition d'identifiabilité de  $\theta$ ). Autrement,  $\theta$  ne sera pas défini d'une manière unique par l'équation du moment  $R_{X_0, X_1} = \theta C_{X_0}$ . De plus, cette équation ne nous permet pas d'écrire  $\theta = R_{X_0, X_1} C_{X_0}^{-1}$  puisque l'opérateur  $C_{X_0}^{-1}$  bien que mesurable n'est pas borné, et est défini sur son domaine  $D \subsetneq H$  dense dans  $H$ , du coup  $\theta = R_{X_0, X_1} C_{X_0}^{-1}$  sera pas correcte puisque  $\theta$  est défini sur tout  $H$  tandis que  $C_{X_0}^{-1}$  ne l'est pas. Les techniques classiques effectuées pour ce genre

de problèmes conduisent à régulariser  $C_n$  (par décomposition spectrale) pour définir un tel opérateur inverse continu. On peut citer ([20, 30, 43]). Des calculs fonctionnels pour les opérateur bornés nous permettent d'écrire le pseudo-inverse sous la forme

$$f_{n,p}(C_n) = (C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_n^p,$$

(il en est de même pour  $f_{n,p}(C_{X_0})$ ). On définit, pour le paramètre  $\theta = \mathbb{E}(\rho_0)$ , l'estimateur résolvant de l'adjoint  $\theta^*$  par :

$$\theta_{n,p}^* = f_{n,p}(C_n) R_n^* = (C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_n^p R_n^*. \quad (4.2)$$

Si l'opérateur borné  $\theta = \theta^*$ , il sera donc symétrique et par conséquent, on aura à estimer tout simplement le paramètre  $\theta$ . Sinon, une estimation de son extension sera en question. Comme dans le cas des modèles ARH(1) à coefficient déterministe, pour  $p \geq 1$ , les opérateurs  $f_{n,p}$  sont compacts ayant contrairement aux opérateurs de projection (voir [20, 48]) une norme déterministe égale à  $\alpha_n^{-1}$ . Les opérateurs  $(C_n + \alpha_n I)^p$  et  $(C_{X_0} + \alpha_n I)^p$  restent inversibles d'inverses continus. Cette classe d'estimateurs sera appelée classe d'estimateurs résolvants et comprend celles définies dans [20] chap.8.

On peut facilement vérifier de l'équation (4.1) que:

$$C_{X_0} = C_{\rho_0 X_0} + C_{\varepsilon_0} \quad (4.3)$$

$$R_{X_0, X_1} = \mathbb{E}(\rho_0) C_{X_0} = \theta C_{X_0} \quad (4.4)$$

avec  $\theta = \mathbb{E}(\rho_0)$ , ou encore

$$R_{X_0, X_1}^* = R_{X_1 X_0} = C_{X_0} \theta^*$$

On rappelle que le meilleur prédicteur de  $X_{n+1}$  pour le modèle (4.1) est

$$\mathbb{E}(X_{n+1} / X_n, X_{n-1}, \dots) = \theta(X_n),$$



Un prédicteur satistique de  $X_{n+1}$  sera défini donc par  $\theta_{n,p}(X_n)$  où l'adjoint  $\theta_{n,p}^*$  est donné par (4.2). Dans ce cas  $\theta_{n,p}(X_n)$  est appelé prédicteur résolvant.

## 4.2 Principaux résultats

Il serait convenable de traiter d'abord les propriétés asymptotiques des estimateurs résolvants pour pouvoir établir les résultats relatifs aux prédicteurs statistiques. Nous commençons par la convergence en probabilité des estimateurs résolvants (4.2) pour la norme de Hilbert-Schmidt. Nous avons le résultat suivant:

**Théorème 4.2.1.** [19] *Sous les conditions A1 - A2 - A3*

$$\|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_S = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Si  $\alpha_n \downarrow 0$  et  $\alpha_n^{p+1}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \uparrow \infty$ , alors

$$\|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_S \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0,$$

et pour tout  $x \in H$ ,

$$\|\theta_{n,p}^*(x) - \theta^*(x)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

### Preuve du Théorème 4.2.1

On décompose la relation (4.2) comme suit:

$$\begin{aligned} \theta_{n,p}^* &= f_{n,p}(C_n) \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_{i+1}, \cdot \rangle X_i \right] \\ &= f_{n,p}(C_n) \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \rho_{i+1} X_i, \cdot \rangle X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \theta X_i, \cdot \rangle X_i \right] + f_{n,p}(C_n) U_n \\ &\quad + f_{n,p}(C_n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \theta X_i, \cdot \rangle X_i, \end{aligned}$$

où  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i$ . Alors

$$\theta_{n,p}^* = f_{n,p}(C_n) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i \right) + f_{n,p}(C_n) C_n \theta^* + f_{n,p}(C_n) U_n.$$

En posant  $W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i$ , on obtient

$$\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0} \theta^* = f_{n,p}(C_n) W_n + f_{n,p}(C_n) U_n + (f_{n,p}(C_n) C_n - f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0}) \theta^* \quad (4.5)$$

On traite séparément chaque terme dans (4.5).

**Le second terme dans (4.5).** Puisque  $\|C_n\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha_n$ , alors

$$\begin{aligned} \|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}} &< \|(C_n + \alpha_n I)^{-(p-1)} C_n^{p-1}\|_{\mathcal{L}} \|(C_n + \alpha_n I)^{-1}\|_{\mathcal{L}}^2 \|C_n\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \sup_n \sup_i \left( \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{i,n} + \alpha_n} \right)^{p-1} \frac{1}{\alpha_n} \leq \frac{1}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

où  $(\lambda_{i,n})$  sont les valeurs propres de  $C_n$ , par suite

$$\|f_{n,p}(C_n) U_n\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n} \|U_n\|_S.$$

D'un côté, on a pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\mathbb{P}(\|U_n\|_S > \eta) \leq \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E} \|U_n\|_S^2 \leq \frac{1}{n^2 \eta^2} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i \right\|_S^2.$$

Calculons l'espérance ci-dessous. La norme  $\|\cdot\|_S$  donne les termes

$$\mathbb{E} \langle \langle \varepsilon_{i+h+1}, \cdot \rangle X_{i+h}, \langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i \rangle_S = \sum_{j,l} \mathbb{E} \langle \varepsilon_{i+h+1}, f_j \rangle \langle X_{i+h}, f_l \rangle \langle \varepsilon_{i+1}, f_j \rangle \langle X_i, f_l \rangle,$$

où  $s_{j,l} = \langle f_j, \cdot \rangle f_l$  est une base orthonormale de  $S$ . De l'indépendance des v.a  $\varepsilon_{i+h+1}$  et  $(X_{i+h}, \varepsilon_{i+1}, X_i)$ , nous aurons

$$\mathbb{E} \langle \langle \varepsilon_{i+h+1}, \cdot \rangle X_{i+h}, \langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i \rangle_S = \sum_{j,l} \mathbb{E} \langle \varepsilon_{i+h+1}, f_j \rangle \mathbb{E} \langle X_{i+h}, f_l \rangle \langle \varepsilon_{i+1}, f_j \rangle \langle X_i, f_l \rangle = 0.$$

Finalement, nous obtenons

$$\mathbb{P}(\|U_n\|_S > \eta) \leq \frac{1}{n^2 \eta^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|\langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i\|_S^2 \leq \frac{1}{n \eta^2} \mathbb{E}(\|\varepsilon_0\|^2 \|X_0\|^2).$$

Puis,  $\|f_{n,p}(C_n)U_n\|_{\mathcal{L}} = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)$ .

**Le troisième terme dans (4.5).** On a bien

$$\begin{aligned} f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0} &= (C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_n^{p+1} - (C_{X_0} + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_{X_0}^{p+1} \\ &= \underbrace{(C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [C_n^{p+1} - C_{X_0}^{p+1}]}_{A_{n,p}} \\ &+ \underbrace{(C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1}]}_{B_{n,p}} (C_{X_0} + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_{X_0}^{p+1}. \end{aligned}$$

Traitons d'abord les termes  $A_{n,p}$ . On peut écrire

$$C_n^{p+1} - C_{X_0}^{p+1} = \sum_{i=0}^p S_{i,n,p},$$

où  $S_{i,n,p} = \underbrace{C_n \cdot C_n \dots C_n}_{(p-i) \text{ fois}} \cdot (C_n - C_{X_0}) \cdot \underbrace{C_{X_0} \cdot C_{X_0} \dots C_{X_0}}_{(i) \text{ fois}}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \|C_n^{p+1} - C_{X_0}^{p+1}\|_{\mathcal{L}} &\leq \sum_{i=0}^p \|S_{i,n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq \|C_n - C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} \sum_{i=0}^p \|C_n\|_{\mathcal{L}}^{p-i} \|C_{X_0}\|_{\mathcal{L}}^i \\ &\leq \|C_n - C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} \sum_{i=0}^p \lambda_{0,n}^{p-i} \lambda_0^i. \end{aligned}$$

d'où  $\|A_{n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \|C_n - C_{X_0}\|_S \sum_{i=0}^p \lambda_{0,n}^{p-i} \lambda_0^i$ . Or  $\lambda_{0,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \lambda_0$ , par conséquent [4]

$$K_{p,n} := \sum_{i=0}^p \lambda_{0,n}^{p-i} \lambda_0^i \rightarrow K_p = (\lambda_0)^p (p+1) \quad \text{presque-sûrement.}$$

En utilisant le résultat traité dans [4],

$$\|C_n - C_{X_0}\|_S = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right) \text{ presque-sûrement,}$$

on obtient donc

$$\|A_{n,p}\|_{\mathcal{L}} = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Similairement, pour le terme  $B_{n,p}$ , on a bien

$$(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1} = \sum_{i=0}^p \tilde{S}_{i,n,p},$$

où

$$\tilde{S}_{i,n,p} = \underbrace{(C_{X_0} + \alpha_n I) \dots (C_{X_0} + \alpha_n I)}_{(p-i) \text{ fois}} \cdot (C_n - C_{X_0}) \cdot \underbrace{(C_n + \alpha_n I) \dots (C_n + \alpha_n I)}_{(i) \text{ fois}}.$$

Les mêmes calculs à ceux effectués plus haut nous conduisent à conclure que

$$\|(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1}\|_{\mathcal{L}} \leq \|C_n - C_{X_0}\|_S \sum_{i=0}^p (\lambda_{0,n} + \alpha_n)^i (\lambda_0 + \alpha_n)^{p-i}.$$

En posant  $K'_{p,n} = \sum_{i=0}^p (\lambda_{0,n} + \alpha_n)^i (\lambda_0 + \alpha_n)^{p-i}$ , on aura

$$\begin{aligned} \|B_{n,p}\|_{\mathcal{L}} &\leq K'_{p,n} \|(C_n + \alpha_n I)^{-1}\|_{\mathcal{L}}^{p+1} \|C_n - C_{X_0}\|_S \|(C_{X_0} + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_{X_0}^p\|_{\mathcal{L}} \|C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \frac{K'_{p,n}}{\alpha_n^{p+1}} \|C_n - C_{X_0}\|_S. \end{aligned}$$

D'où

$$B_{n,p} = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right),$$

finalement

$$\|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

**Le premier terme dans (4.5).** Premièrement, on a  $\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n} \|W_n\|_S$  où

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i.$$

Pour  $\eta' > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|W_n\|_S > \eta') &= \mathbb{P}\left(\left\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i\right\|_S > \eta'\right) \\ &\leq \frac{1}{n^2 \eta'^2} \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^n \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i\right\|_S^2\right). \end{aligned}$$

En posant  $V_i = \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il suffira de borner le terme  $\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^n V_i\right\|_S^2\right)$ . Pour tout  $q \geq 1$ , on a

$$\mathbb{E}\|V_n + V_{n+1} + \dots + V_{n-q+1}\|_S^2 = q \sum_{h=1}^{q-1} \mathbb{E}\|V_h\|_S^2 + 2 \sum_{h=1}^{q-1} (q-h) \mathbb{E}\langle V_0, V_h \rangle_S.$$

Pour le premier terme de l'équation ci-dessus, les S-v.a  $V_i$ , telles que  $\mathbb{E}V_i = 0$  vérifient

$$\mathbb{E}\|V_i\|_S^2 = \sum_{l,m} \mathbb{E}\langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, f_l \rangle^2 \langle X_i, f_m \rangle^2 \leq \mathbb{E}\|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2 \mathbb{E}\|X_0\|^4.$$

D'autre part, on arrange les calculs en utilisant le fait que

$$X_h = A_{h,h} X_0 + \sum_{k=0}^{h-1} A_{h,k} \epsilon_{h-k},$$

$$A_{h,k} = \prod_{i=h}^{h-k+1} \rho_i, \quad A_{h,0} = I,$$

on aboutit à:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\langle V_0, V_h \rangle_S &= \sum_{l,m} \mathbb{E}\langle \rho_1 X_0, f_l \rangle \langle X_0, f_m \rangle \langle \rho_{h+1} A_{h,h} X_0, f_l \rangle \langle A_{h,h} X_0, f_m \rangle \\
 &\quad - \sum_{l,m} \mathbb{E}\langle \theta X_0, f_l \rangle \langle X_0, f_m \rangle \langle \rho_{h+1} A_{h,h} X_0, f_l \rangle \langle A_{h,h} X_0, f_m \rangle \\
 &\quad - \sum_{l,m} \mathbb{E}\langle \rho_1 X_0, f_l \rangle \langle X_0, f_m \rangle \langle \theta A_{h,h} X_0, f_l \rangle \langle A_{h,h} X_0, f_m \rangle \\
 &\quad + \sum_{l,m} \mathbb{E}\langle \theta X_0, f_l \rangle \langle X_0, f_m \rangle \langle \theta A_{h,h} X_0, f_l \rangle \langle A_{h,h} X_0, f_m \rangle.
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\langle V_0, V_h \rangle_S &= \mathbb{E}\langle \langle \rho_1 X_0, \cdot \rangle X_0, \langle \rho_{h+1} A_{h,h} X_0, \cdot \rangle A_{h,h} X_0 \rangle_S \\
 &\quad - \mathbb{E}\langle \langle \theta X_0, \cdot \rangle X_0, \langle \rho_{h+1} A_{h,h} X_0, \cdot \rangle A_{h,h} X_0 \rangle_S \\
 &\quad - \mathbb{E}\langle \langle \rho_1 X_0, \cdot \rangle X_0, \langle \theta A_{h,h} X_0, \cdot \rangle A_{h,h} X_0 \rangle_S \\
 &\quad + \mathbb{E}\langle \langle \theta X_0, \cdot \rangle X_0, \langle \theta A_{h,h} X_0, \cdot \rangle A_{h,h} X_0 \rangle_S.
 \end{aligned}$$

Posons  $T_1 = \langle \rho_1 X_0, \cdot \rangle X_0$ ,  $T_2 = \langle \rho_{h+1} A_{h,h} X_0, \cdot \rangle A_{h,h} X_0$ ,  $T_3 = \langle \theta X_0, \cdot \rangle X_0$  et  $T_4 = \langle \theta A_{h,h} X_0, \cdot \rangle A_{h,h} X_0$ , on aura presque-sûrement

$$\|T_1\|_S^2 \leq \|\rho_1\|_{\mathcal{L}}^2 \|X_0\|^4, \quad \|T_2\|_S^2 \leq \|\rho_{h+1}\|_{\mathcal{L}}^2 \|A_{h,h}\|_{\mathcal{L}}^4 \|X_0\|^4,$$

$$\|T_3\|_S^2 \leq \|\theta\|_{\mathcal{L}}^2 \|X_0\|^4, \quad \|T_4\|_S^2 \leq \|\theta\|_{\mathcal{L}}^2 \|A_{h,h}\|_{\mathcal{L}}^4 \|X_0\|^4,$$

par suite

$$\mathbb{E}\langle V_0, V_h \rangle_S \leq 4 (\mathbb{E}\|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2)^{h+1} (\mathbb{E}\|X_0\|^4)^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\|V_n + V_{n+1} + \dots + V_{n-q+1}\|_S^2 &\leq q \mathbb{E}\|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2 \mathbb{E}\|X_0\|^4 + 8 \sum_{h=1}^q (q-h) (\mathbb{E}\|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2)^{h+1} (\mathbb{E}\|X_0\|^4)^2 \\
 &\leq q \mathbb{E}\|X_0\|^4 \mathbb{E}\|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2 \left[ 1 + \frac{8(\mathbb{E}\|X_0\|^4)^2}{1 - \mathbb{E}\|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2} \right].
 \end{aligned}$$

En regroupant les résultats obtenus, on arrive à

$$\mathbb{P}(\|W_n\|_S > \eta) \leq \frac{1}{n^2 \eta^2} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n V_i \right\|_S^2 \leq \frac{1}{n \eta^2} \mathbb{E} \|X_0\|^4 \mathbb{E} \|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2 \left[ 1 + \frac{8(\mathbb{E} \|X_0\|^4)^2}{1 - \mathbb{E} \|\rho_0\|_{\mathcal{L}}^2} \right].$$

Alors

$$\|f_{n,p}(C_n)W_n\|_{\mathcal{L}} = O_{\mathbb{P}} \left( \frac{1}{\sqrt{n} \alpha_n} \right).$$

Finalement

$$\|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_S = O_{\mathbb{P}} \left( \frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{1/2} \right).$$

On obtient ainsi le premier résultat souhaité.

Pour la seconde partie du théorème, on écrit pour tout  $x \in H$ :

$$\|\theta_{n,p}^*(x) - \theta^*(x)\| \leq \|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_S \|x\| + \|f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*(x) - \theta^*(x)\|.$$

Sous la condition

$$\frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus converge en probabilité vers 0 pour la norme de Hilbert-Schmidt. Quant au deuxième terme déterministe, on écrit

$$\theta^*(x) = \sum_{i \geq 1} \langle \theta^*(x), h_i \rangle h_i = \sum_{i \geq 1} \theta_i^*(x) h_i.$$

Il en suit que

$$\|(f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0} - I)\theta^*(x)\|^2 = \sum_{i \geq 1} \left( \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha_n} \right)^{p+1} - 1 \right)^2 (\theta_i^*)^2(x).$$

On considère la mesure  $\mu_x$  sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  définie par:  $\mu_x = \sum_{i \geq 1} (\theta_i^*)^2(x) \delta_i$ .

Remarquons que  $\mu_x$  est finie puisque:

$$\mu_x(\mathbb{N}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\theta_i^*)^2(x) = \|\theta^*(x)\|^2 < \infty.$$

Soit  $\varphi_n$  la fonction réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par:

$$\varphi_n(i) = \left[ \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha_n} \right)^p - 1 \right]^2.$$

On a pour  $i \in \mathbb{N}$ ,  $|\varphi_n(i)| \leq 1$  et  $\varphi_n(i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*(x) - \theta^*(x)\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \geq 1} \left[ \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha_n} \right)^{p+1} - 1 \right]^2 (\theta_i^*)^2(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n(i) d\mu_x(i) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

On établit dans la suite, pour la norme des opérateurs  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ , la convergence presue-sûre des estimateurs résolvants avec un taux de convergence lorsque  $X_0$  est borné.

**Théorème 4.2.2.** [19] *Sous les conditions A1 - A2 - A3, si  $\|X_0\| \leq b$  où  $b > 0$ , alors, pour tout  $\eta > 0$*

*et  $p \geq 1$*

$$\mathbb{P} \left( \|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} > \eta \right) \leq \gamma \exp \left( - \frac{n\alpha_n^{2(p+1)}\eta^2}{\mu_1 + \mu_2\alpha_n^p} \right),$$

*où  $\gamma, \mu_1$  et  $\mu_2$  sont des constantes positives. Par ailleurs, on a*

$$\|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} = O \left( \frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \text{ presque-sûrement.}$$

*Si  $\alpha_n \downarrow 0$  and  $\alpha_n^{p+1} \left( \frac{n}{\log n} \right)^{\frac{1}{2}} \uparrow \infty$ , alors*

$$\|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$



**Preuve du Théorème 4.2.2:**

On introduit les opérateurs aléatoires suivants

$$T_{i+1} = \langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i, \quad V_{i+1} = \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i.$$

La relation (4.2) devient

$$\begin{aligned} \theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^* &= f_{n,p}(C_n) \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right] + f_{n,p}(C_n) \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \right] \\ &+ (f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0})\theta^*. \end{aligned}$$

Pour  $\eta > 0$ , on aura

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} > \eta \right) &\leq \mathbb{P} \left( \left\| \sum_{i=1}^n V_i \right\|_{\mathcal{L}} > \frac{n\eta}{3\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}}} \right) \\ &+ \mathbb{P} \left( \left\| \sum_{i=1}^n T_i \right\|_S > \frac{n\eta}{3\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}}} \right) \\ &+ \mathbb{P} \left( \|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{3\|\theta^*\|_{\mathcal{L}}} \right). \end{aligned}$$

Or  $\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\alpha_n}$  et  $\|\theta^*\|_{\mathcal{L}} \leq \Delta$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} > \eta \right) &\leq \mathbb{P} \left( \left\| \sum_{i=1}^n V_i \right\|_{\mathcal{L}} > \frac{n\alpha_n\eta}{3} \right) \tag{4.6} \\ &+ \mathbb{P} \left( \left\| \sum_{i=1}^n T_i \right\|_S > \frac{n\alpha_n\eta}{3} \right) \\ &+ \mathbb{P} \left( \|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{3\Delta} \right). \end{aligned}$$

**Le deuxième terme dans (4.6).**

Les v.a  $T_i \in S$  sont des différences de martingale par rapport à la filtration  $\mathcal{B}_i = \sigma((\varepsilon_j, \rho_j), j \leq i)$  et  $\|T_i\|_S^2 = \sum_j \|T_i f_j\|^2 = \|X_{i-1}\|^2 \|\varepsilon_i\|^2$ . Donc

$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{i-1}} (\|T_i\|_S^2) \leq b^2 \sigma^2$ . Par le Théorème 2.14 dans [20], on obtient

$$\mathbb{P} \left( \left\| \sum_{i=1}^n T_i \right\|_S > \frac{n\alpha_n \eta}{3} \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^2 \eta^2}{18b^2 \sigma^2 + 4b^2 \alpha_n \eta} \right).$$

**Le premier terme dans (4.6).**

On a

$$V_i = \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i = (\langle X_i, \cdot \rangle (\rho_{i+1} - \theta) X_i)^*.$$

Remarquons que  $\mathbb{E}(V_i^* / \mathcal{B}_{i-1}) = (\mathbb{E}(V_i / \mathcal{B}_{i-1}))^*$ , de l'indépendance des v.a  $(\rho_{i+1} - \theta)$  de la filtration  $\mathcal{B}_{i-1}$ , on déduit que la suite  $(V_i)_i$  est une différence de martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{B}_i, i \in \mathbb{Z})$ .

On peut vérifier facilement que

$$\|\rho_{i+1} - \theta\|_{\mathcal{L}} \leq 2\Delta \text{ presque-sûrement,}$$

par suite

$$\|V_i\|_S^2 \leq \|\rho_i - \theta\|_{\mathcal{L}}^2 \|X_{i-1}\|^4 \leq 4\Delta^2 b^2$$

et donc

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{i-1}} \|V_i\|_S^2 \leq 4\Delta^2 b^4.$$

Nous appliquons de nouveau le Théorème 2.14 dans [20] pour avoir

$$\mathbb{P} \left( \left\| \sum_{i=1}^n V_i \right\|_{\mathcal{L}} > \frac{n\alpha_n \eta}{3} \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^2 \eta^2}{72\Delta^2 b^4 + 4\alpha_n \Delta b^2 \eta} \right).$$

**Le troisième terme dans (4.6).**

On peut écrire

$$\begin{aligned} f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0} &= \underbrace{(C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [C_n^{p+1} - C_{X_0}^{p+1}]}_{A_{n,p}} \\ &+ \underbrace{(C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1}]}_{B_{n,p}} (C_{X_0} + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_{X_0}^{p+1}. \end{aligned}$$

Il découle de la preuve du Théorème 4.2.1 que

$$\alpha_n^{p+1} \|A_{n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq K_{p,n} \|C_n - C_{X_0}\|_S \text{ et } \alpha_n^{p+1} \|B_{n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq K'_{p,n} \|C_n - C_{X_0}\|_S,$$

où  $K_{p,n} = \sum_{i=0}^p \lambda_{0,n}^{p-i} \lambda_0^i$  et  $K'_{p,n} = \sum_{i=0}^p (\lambda_{0,n} + \alpha_n)^{p-i} (\lambda_0 + \alpha_n)^i$ . Dans ce cas

$$K_{p,n} + K'_{p,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2(p+1)\lambda_0^p \text{ presque-sûrement.}$$

Par conséquent, pour tout  $\eta > 0$ , on arrive à écrire

$$\mathbb{P}\left(\|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{3\Delta}\right) \leq \mathbb{P}\left((K_{p,n} + K'_{p,n})\|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta\alpha_n^{p+1}}{3\Delta}\right).$$

Reprenons les mêmes techniques utilisées dans la preuve du Théorème

2.3.1 (Chapitre 2). Considérons l'évènement  $E_n = \left\{\lambda_{0,n} > \frac{3\lambda_0}{2}\right\} = \left\{\lambda_{0,n} - \lambda_0 > \frac{\lambda_0}{2}\right\}$ ,  $\lambda_0 > 0$ , alors

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \mathbb{P}\left(|\lambda_{0,n} - \lambda_0| > \frac{\lambda_0}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\lambda_0}{2}\right).$$

Pour  $0 < \eta' < 1$ , on a [4],

$$\mathbb{P}\left(\|C_n - C_{X_0}\|_S > \eta'\right) \leq \gamma_1 \exp\left(-\frac{n\eta'^2}{\mu_1 + \beta_1\eta'}\right)$$

où

$$\gamma_1 = \max\left(2, \exp\left(2\Delta^2\|(I - \bar{R})^{-1}\|_{\mathcal{L}(S)}b^2\right)\right), \mu_1 = \max(2, 8c_2^2),$$

$$c_2 = 2\|(I - \bar{R})^{-1}\|_{\mathcal{L}(S)}b^2(1 + \Delta^2), \beta_1 = \frac{4}{3}c_2.$$

Par suite

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \gamma_1 \exp\left(-\frac{n\lambda_0^2}{2(2\mu_1 + \beta_1\lambda_0)}\right).$$

Notons que sur l'évènement  $\bar{E}_n$ , on a  $K_{p,n} + K'_{p,n} < 3(p+1)\lambda_0^p$  presque-sûrement. D'autre part, pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\left[\left(K_{p,n} + K'_{p,n}\right)\|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta\alpha_n^{p+1}}{3\Delta}\right] \cap \bar{E}_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta\alpha_n^{p+1}}{9(p+1)\lambda_0^p\Delta}\right).$$

En prenant  $\eta' = \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{3(p+1)\lambda_0^p \Delta}$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left[ (K_{p,n} + K'_{p,n}) \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{3\Delta} \right] \cap \bar{E}_n \right) &\leq \gamma_1 \exp \left( -\frac{n\eta'^2}{\mu_1 + \beta_1 \eta'} \right) \\ &\leq \gamma_1 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{3(p+1)\lambda_0^p \Delta [3(p+1)\lambda_0^p \Delta \mu_1 + \beta_1 \alpha_n^{p+1} \eta]} \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left( \|f_{n,p}(C_n)C_n - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\|_{\mathcal{L}} > \frac{\eta}{3\Delta} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \left[ (K_{p,n} + K'_{p,n}) \|C_n - C_{X_0}\|_S > \frac{\eta \alpha_n^{p+1}}{3\Delta} \right] \cap \bar{E}_n \right) + \mathbb{P}(E_n) \\ &\leq \gamma_2 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{3(p+1)\lambda_0^p \Delta [3(p+1)\lambda_0^p \Delta \mu_1 + \beta_1 \alpha_n^{p+1} \eta]} \right). \end{aligned}$$

Finalement, en regroupant ces résultats, on arrive à

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left( \|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} > \eta \right) \\ &\leq 2 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^2 \eta^2}{18b^2 \sigma^2 + 4\alpha_n b^2 \eta} \right) + 2 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^2 \eta^2}{72\Delta^2 b^4 + 4\alpha_n \Delta b^2 \eta} \right) \\ &\quad + \gamma_2 \exp \left( -\frac{n\alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{3(p+1)\lambda_0^p \Delta (3(p+1)\lambda_0^p \Delta \mu_1 + \beta_1 \alpha_n^{p+1} \eta)} \right) \\ &\leq \gamma \exp \left( -\frac{n\alpha_n^{2(p+1)} \eta^2}{\mu_2 + \mu_3 \alpha_n^p} \right), \end{aligned}$$

où  $\gamma, \mu_2, \mu_3$  sont positives. En choisissant  $\eta = A \left( \frac{\log n}{n\alpha_n^{2(p+1)}} \right)^{1/2}$ , on aura

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left( \frac{n\alpha_n^{2(p+1)}}{\log n} \right)^{1/2} \|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} \geq \eta \right) &\leq \gamma \exp \left( -\frac{A^2 \log n}{\mu_2 + \mu_3 A} \right) \\ &\leq \gamma_1 n^{-\frac{A^2}{\mu_2 + \mu_3 A}}. \end{aligned}$$

Pour  $A^2 > \mu_2 + \mu_3 A$ , le Lemme de Borel-Cantelli nous permettra de conclure le résultat.

Le résultat suivant fournit une borne exponentielle et une convergence presque-sûre uniforme sur les boules de  $H$  pour les prédicteurs résolvents.

**Théorème 4.2.3.** [19] *Sous les conditions A1- A2- A3, si  $\|X_0\| \leq b$  pour  $b > 0$  et l'opérateur  $\theta = E(\rho_0)$  est symétrique, alors pour tout  $\eta > 0$  et  $r > 0$ ,  $\exists n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0$ , on a*

$$\mathbb{P} \left( \sup_{\|x\| \leq r} \|\theta_{n,p}(x) - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta(x)\|_{\mathcal{L}} > \eta \right) \leq \gamma \exp \left( - \frac{n\alpha_n^{2(p+1)}\eta^2}{\mu'_1 + \mu'_2\alpha_n^p} \right),$$

avec  $\gamma$ ,  $\mu'_1$  et  $\mu'_2$  sont des constantes positives.

Si  $\alpha_n \downarrow 0$  et  $\alpha_n^{p+1} \left( \frac{n}{\log n} \right)^{\frac{1}{2}} \uparrow \infty$ , alors

$$\sup_{\|x\| \leq r} \|\theta_{n,p}(x) - \theta(x)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

### Preuve du Théorème 4.2.3

Pour  $r > 0$ , on a

$$\sup_{\|x\| \leq r} \|\theta_{n,p}^*(x) - \theta^*(x)\| \leq r \|\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*\|_{\mathcal{L}} + \sup_{\|x\| \leq r} \|f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\theta^*(x) - \theta^*(x)\|.$$

Pour le premier terme, le Théorème 4.2.2 assure la borne exponentielle en question, tandis que pour le seconde terme déterministe, on peut montrer comme dans la dernière partie de la preuve du Théorème 4.2.1 que le supremum sur la boule  $\{\|x\| \leq r\}$  converge vers 0.

Le théorème ci-dessous donne la loi limite pour les estimateurs résolvents définis par (4.2) pour la norme de Hilbert-Schmidt dans l'espace

$S(H)$ . La preuve de ce résultat fait intervenir des critères de convergences en loi pour des différences de martingales hilbertiennes.

**Théorème 4.2.4.** [19] *Sous les conditions A1- A2- A3(i), si  $\|X_0\| \leq b$ ,  $\ker C_{X_0} = 0$ ,  $\mathbb{E}\|C_{X_0}^{-1}(X_0)\|^2 < \infty$  et  $\sqrt{n}\alpha_n^{p+2} \rightarrow +\infty$ , alors*

$$\sqrt{n}(\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_n)C_n\theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Sigma.$$

où  $\Sigma$  est une  $S$ -variable aléatoire Gaussienne centrée d'opérateur de covariance  $C_\Sigma$  associé à l'opérateur aléatoire  $\varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1}X_0$ .

#### Preuve du Théorème 4.2.4

La preuve du théorème repose sur quatre lemmes. D'abord, on s'intéresse à la loi limite de l'opérateur  $\sqrt{n}(C_n - C_{X_0})$ . On introduit la suite de  $S$ -v.a suivante

$$X_i = \langle X_i, \cdot \rangle X_i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

On pose  $F_i = \langle X_{i-1}, \cdot \rangle \varepsilon_i$ ,  $G_i = \langle \varepsilon_i, \cdot \rangle \varepsilon_i$ . Notons que (voir Théorème 1 [4]), le processus  $(Z_i, i \in \mathbb{Z})$  à valeurs dans  $S$  satisfait l'équation AR(1)

$$Z_i = R_i(Z_{i-1}) + E_i$$

où l'opérateur aléatoire  $R_i$  est défini sur  $S$  par  $R_i = \rho_i s \rho_i^*$  pour tout  $s \in S$ ,  $E_i = F_i \rho_i^* + \rho_i F_i^* + \langle \varepsilon_i, \cdot \rangle \varepsilon_i + \rho_i C_{X_0} \rho_i^* - C_{X_0}$ ,  $E_i \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Puisque  $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{i-1}}(E_i) = 0$  alors,  $(E_i, i \in \mathbb{Z})$  est une  $S$ -différence de martingale par rapport à la filtration  $\mathcal{B}_i$ . Puisque  $\|R_i\|_S \leq \Delta^2 < 1$ , alors  $(I - \bar{R})$  est inversible sur l'espace  $S$  où  $\bar{R} = \mathbb{E}(R_i)$ . On propose la décomposition ci-dessous pour les variables aléatoires  $Z_i$

$$Z_i = K_{i-1} - K_i + L_i \tag{4.7}$$

avec  $K_i = (I - \bar{R})^{-1} \bar{R} Z_i$  et  $L_i = (I - \bar{R})^{-1} Z_i - (I - \bar{R})^{-1} \bar{R} Z_{i-1}$ . Puisque les

v.a  $R_i$  sont indépendantes de la filtration  $\mathcal{B}_{i-1}$  est  $Z_i$  est  $\mathcal{B}_i$ -mesurable, il serait alors simple de vérifier que  $L_i$  est une différence de martingale par rapport à  $(\mathcal{B}_i, i \in \mathbb{Z})$ . D'où

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{i-1}}(Z_i) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_{i-1}}(R_i(Z_{i-1}) + E_i) = \bar{R}Z_{i-1}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$C_n - C_{X_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{n}(K_0 + K_n) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i. \quad (4.8)$$

Nous proposons les lemmes suivants qui servent pour les développements de la preuve du théorème.

**Lemme 4.2.1.** [19] Sous A1, A2 et A3, on a

$$\sqrt{n}(C_n - C_{X_0}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Gamma,$$

où  $\Gamma$  est une v.a gaussienne à valeurs dans  $S$  ayant comme opérateur de covariance

$C_{L_1}$  où  $L_1 = (I - \bar{R})^{-1}Z_1 - (I - \bar{R})^{-1}\bar{R}Z_0$  et  $Z_0, Z_1$  sont définis par (4.7).

**Lemme 4.2.2.** [19] Sous les conditions A1, A2 et A3, on a

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} C_n - C_{X_0} \\ U_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Lambda,$$

où  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon_{i+1}, \cdot \rangle X_i$  et  $\Lambda$  est une v.a gaussienne à valeurs dans  $S \times S$  dont l'opérateur de covariance associé est donné par  $C_\Lambda = \begin{pmatrix} C_{L_1} & 0 \\ 0 & C_{T_1} \end{pmatrix}$ .

Soit le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel de dimension  $k_n$  engendré par les  $k_n$  premier vecteurs propres de l'opérateur de covariance empirique  $C_n$ , noté  $P^{k_n}$  et définit sur  $H$  par

$$P^{k_n}(x) = \sum_{i=1}^{k_n} \langle x, h_i \rangle h_i,$$

où  $(\lambda_i, h_i, i \in \mathbb{N})$  sont les éléments propres de  $C_{X_0}$  et  $k_n \uparrow \infty$ . Nous avons:

**Lemme 4.2.3.** [19] *Sous les conditions A1, A2 et A3, on a*

$$\sqrt{n}C_{X_0}^{-1}P^{k_n}U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Sigma,$$

où  $\Sigma$  est la v.a gaussienne à valeurs dans  $S$ , centrée d'opérateur de covariance  $C_\Sigma$  associé la v.a  $\varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1}X_0$ .

Nous donnons enfin le dernier lemme.

**Lemme 4.2.4.** [19] *Sous A1, A2 et A3, on a pour  $p \geq 1$*

$$\sqrt{n}f_{n,p}(C_{X_0})U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Sigma.$$

Retournons vers la preuve du Théorème 4.2.4. On développe la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\theta_{n,p}^* - f_{n,p}(C_n)C_n\theta^*) &= \sqrt{n}f_{n,p}(C_n) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i \right) \\ &+ \sqrt{n}(f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0}))U_n + \sqrt{n}f_{n,p}(C_{X_0})U_n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Occupons nous du deuxième terme dans (4.9). Nous pouvons aisément vérifier que,  $\sqrt{n}U_n$  est borné en probabilité pour la norme de Hilbert-Schmidt. D'autre part, montrons que la quantité ci-dessous est bornée par un un terme convergent vers 0. En effet, puisque

$$\begin{aligned} f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0}) &= (C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [C_n^p - C_{X_0}^p] \\ &+ (C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)} [(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1}] (C_{X_0} + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_{X_0}^p \\ &= F_{n,p} + G_{n,p}. \end{aligned}$$

Traitons séparément les termes  $F_{n,p}$  et  $G_{n,p}$ .

**Pour le terme  $F_{n,p}$ .** Il est facile de vérifier que

$$C_n^p - C_{X_0}^p = \sum_{i=0}^{p-1} T_{i,n,p},$$



où

$$T_{i,n,p} = \underbrace{C_n \cdot C_n \dots C_n}_{(p-i-1) \text{ fois}} \cdot (C_n - C_{X_0}) \cdot \underbrace{C_{X_0} \cdot C_{X_0} \dots C_{X_0}}_{(i) \text{ fois}}.$$

On a donc

$$\|C_n^p - C_{X_0}^p\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|T_{i,n,p}\|_{\mathcal{L}} \leq \|C_n - C_{X_0}\|_S \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_{0,n}^{p-i-1} \lambda_0^i.$$

En utilisant le résultat de Allam et Mourid [4], nous avons presque-sûrement

$$\lambda_{0,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0,$$

et

$$\|C_n - C_{X_0}\|_S = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Puis, on a presque sûrement

$$K_{p,n} := \sum_{i=0}^p \lambda_{0,n}^{p-i-1} \lambda_0^i \rightarrow K_p = p \lambda_0^{p-1}.$$

Par suite,

$$\|F_{n,p}\|_{\mathcal{L}} = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

**Pour le terme  $G_{n,p}$ :**

Des calculs similaires amènent à

$$(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1} = \sum_{i=1}^p \tilde{T}_{i,n,p},$$

où  $\tilde{T}_{i,n,p} = \underbrace{(C_n + \alpha_n) \dots (C_n + \alpha_n)}_{(p-i) \text{ fois}} \cdot (C_n - C_{X_0}) \cdot \underbrace{(C_{X_0} + \alpha_n) \dots (C_{X_0} + \alpha_n)}_{(i) \text{ fois}}$ . Nous

avons montré dans le Théorème 4.2.1 que

$$\|(C_{X_0} + \alpha_n I)^{p+1} - (C_n + \alpha_n I)^{p+1}\|_{\mathcal{L}} \leq \left( \sum_{i=0}^p (\lambda_{0,n} + \alpha_n)^{p-i} (\lambda_0 + \alpha_n)^i \right) \|C_n - C_{X_0}\|_S.$$

En posant  $K'_{p,n} = \sum_{i=0}^p (\lambda_{0,n} + \alpha_n)^{p-i} (\lambda_0 + \alpha_n)^i$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|G_{n,p}\|_{\mathcal{L}} &\leq K'_{p,n} \|(C_n + \alpha_n I)^{-(p+1)}\|_{\mathcal{L}} \|C_n - C_{X_0}\|_S \|(C_{X_0} + \alpha_n I)^{-(p+1)} C_{X_0}^p\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \frac{K'_{p,n}}{\alpha_n^{p+1}} \|C_n - C_{X_0}\|_S. \end{aligned}$$

D'où  $G_{n,p} = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+2}} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right)$  et finalement

$$\|f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0})\|_{\mathcal{L}} = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+2}} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Passons maintenant au premier terme dans (4.9). On pose  $W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\rho_{i+1} - \theta) X_i, \cdot \rangle X_i$ . Dans la preuve du Théorème 4.2.1, nous avons montré que

$$\|f_{n,p}(C_n) W_n\|_S = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n \sqrt{n}}\right),$$

ce qui donne la convergence en probabilité vers 0 du premier terme dans (4.9).

Finalement, le Lemme 4 nous permet de conclure la convergence en distribution du troisième terme dans (4.9) vers la v.a gaussienne  $\Sigma$ . Ce qui achève la démonstration du théorème.

Comme conséquence, nous donnons aussi un résultat relatif au prédicteur  $\theta_{n,p}^*(x)$ , la preuve est omise car elle est similaire à celle du Théorème 4.2.4.

**Corollaire 4.2.1.** [19] *Sous les conditions du Théorème 4.1.4, on a  $\forall x \in H$ ,*

$$\sqrt{n}(\theta_{n,p}^*(x) - f_{n,p}(C_n) C_n \theta^*(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Sigma(x),$$

où  $\Sigma$  est défini dans Théorème 3.1.4.

Nous nous intéressons dans la suite, par l'estimation du terme variance des opérateurs d'autocorrélation aléatoires  $(\rho_n)_n$ . Pour l'estimation de la variance des coefficients aléatoires dans les modèles AR à valeur réelle, on peut citer [10, 11, 33]. Pour présenter un estimateur de la variance, on écrit le modèle (4.1) sous une forme équivalente comme celui indiqué dans Nicholls and Quinn [54] pour le cas réel, les opérateurs de corrélation sont définis par  $\rho_n = \theta + \eta_n$  où le paramètre moyenne est  $\theta = E(\rho_n)$ ,  $(\eta_n)_n$  est une suite d'opérateurs aléatoires i.i.d. vérifiant  $E(\eta_n) = 0$ . Notons que les deux suites d'opérateurs aléatoires  $(\rho_n)_n$  et  $(\eta_n)_n$  ont le même opérateur de covariance. Le modèle autorégressif hilbertien s'écrira dans ce cas sous la forme

$$X_n = (\theta + \eta_n)X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où le processus de perturbation  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et le bruit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont mutuellement indépendants. Si les conditions A1, A2 et A3 sont remplies, alors d'après le Lemme 2.1 dans [4] :

$$C_{\eta_1 X_0} = \mathbb{E}(\eta_1 C_{X_0} \eta_1^*) = C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}.$$

De plus, on supposera que les opérateurs  $\eta_n$  sont symétriques et commutent avec  $C_{X_0}$ . Ainsi, on obtient

$$C_{X_0} \mathbb{E}(\eta_1^2) = C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}, \quad (4.10)$$

où  $\mathbb{E}(\eta_1^2)$  est l'opérateur variance de  $(\eta_n)_n$  et  $\eta_1^2$  est la composée de l'opérateur  $\eta_1$  avec lui même.

On rappelle que si  $\mathbb{E}(\eta_1^2) = 0$  alors l'opérateur aléatoire  $\eta_1$  sera dans ce cas déterministe.

L'équation (4.10) nous fournit un estimateur de la variance  $\mathbb{E}(\eta_1^2)$ . Deux cas seront distingués:

Lorsque  $C_{\varepsilon_0}$  est connu, on obtient l'estimateur résolvant de l'opérateur variance  $\mathbb{E}(\eta_1^2)$  donné par

$$\hat{T}_{n,p,1} := f_{n,p}(C_n)(C_n - C_{\varepsilon_0}).$$

Lorsque  $C_{\varepsilon_0}$  est inconnu, on définit d'abord les résidus  $\widehat{U}_n = X_n - \theta_{n,p} X_{n-1}$ . Un estimateur de  $C_{\varepsilon_0}$  sera écrit sous la forme

$$\widehat{G}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \widehat{U}_i, \cdot \rangle \widehat{U}_i.$$

Les estimateurs résolvant de  $\mathbb{E}(\eta_1^2)$  seront donnés par

$$\widehat{T}_{n,p,2} = f_{n,p}(C_n)(C_n - \widehat{G}_n).$$

Le résultat suivant fournit une convergence en probabilité des estimateurs résolvants de l'opérateur variance  $\mathbb{E}(\eta_1^2)$  avec un taux de convergence paramétrique.

**Proposition 4.2.1.** [19] *On suppose A1, A2 et A3 et que les opérateurs aléatoires  $(\eta_n)$  sont symétriques et comutent avec  $C_{X_0}$ , on a pour tout  $p \geq 1$ , pour  $i = 1, 2$*

$$\|\widehat{T}_{n,p,i} - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\mathbb{E}(\eta_1^2)\|_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

**Preuve 4.2.1.** *Nous avons la décomposition suivante*

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{n,p,1} &= f_{n,p}(C_n)(C_n - C_{X_0}) + (f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0}))(C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}) \\ &\quad + f_{n,p}(C_{X_0})(C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}). \end{aligned}$$

Alors

$$\widehat{T}_{n,p,1} - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\mathbb{E}(\eta_1^2) = f_{n,p}(C_n)(C_n - C_{X_0}) + (f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0}))(C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}_{n,p,1} - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\mathbb{E}(\eta_1^2)\|_{\mathcal{L}} &\leq \|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}}\|C_n - C_{X_0}\|_S \\ &\quad + \|f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0})\|_{\mathcal{L}}\|C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Des calculs effectués plus haut nous ramène à conclure que

$$\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}}\|C_n - C_{X_0}\|_S = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right),$$

et que le second terme est aussi  $O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\alpha_n^{p+1}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right)$ , par conséquent, le résultat est déduit.

Dans le cas où l'opérateur  $C_{\varepsilon_0}$  est inconnu, nous avons pour l'estimateur  $\widehat{G}_n$ :

$$\begin{aligned}\widehat{G}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \cdot \rangle X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \theta_{n,p} X_{i-1}, \cdot \rangle X_i \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \cdot \rangle \theta_{n,p} X_{i-1} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \theta_{n,p} X_{i-1}, \cdot \rangle \theta_{n,p} X_{i-1}.\end{aligned}$$

Des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Théorème 4.2.1 nous conduisent à

$$\widehat{G}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C_{X_0} - \theta C_{X_0} \theta^* = C_{\varepsilon_0}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\widehat{T}_{n,p,2} &= f_{n,p}(C_n)(C_n - C_{X_0}) + (f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0}))(C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}) \\ &\quad + f_{n,p}(C_{X_0})(C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}) + f_{n,p}(C_n)(\widehat{G}_n - C_{\varepsilon_0}).\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|\widehat{T}_{n,p,2} - f_{n,p}(C_{X_0})C_{X_0}\mathbb{E}(\eta_1^2)\|_{\mathcal{L}} &\leq \|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}}\|C_n - C_{X_0}\|_S \\ &\quad + \|f_{n,p}(C_n) - f_{n,p}(C_{X_0})\|_{\mathcal{L}}\|C_{X_0} - C_{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}} \\ &\quad + \|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}}\|\widehat{G}_n - C_{\varepsilon_0}\|_{\mathcal{L}}.\end{aligned}$$

Or, pour un  $n$  assez grand,  $\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda_0}$ , dans ce cas, le résultat est encore déduit.

**Remarque 4.2.1.** • *On peut déduire une méthode qui distingue les deux modèles:*

*Les processus ARH(1) à coefficients constants versus ceux à coefficients aléatoires, peuvent être traités via la construction d'un test statistique basé sur la nullité de la variance des opérateurs aléatoires, il s'agit notamment de tester, à un niveau  $\alpha$ , l'hypothèse indiquant que les coefficients de corrélation du modèle peuvent changer de façon continue dans le temps, cela revient donc à tester la constance des coefficients aléatoires dans un modèle autorégressif. Le problème qui se pose bien évidemment est celui de fournir une loi limite de la variable de décision (statistique du test).*

- *La condition que les opérateurs symétriques aléatoires  $(\eta_n)$  commutent avec l'opérateur de covariance  $C_{X_0}$  implique qu'ils partagent les mêmes fonctions propres. Cette condition existe dans l'estimation non paramétrique sous une forme plus forte: "les opérateurs sont presque parfaitement alignés" ce qui signifie que les opérateurs partagent un ensemble ordonné commun de fonctions propres et cela a un effet significatif sur le taux optimal de convergence [25].*

# 5 Étude numérique et exemples

## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Séries chronologiques: vocabulaire et exemples

Le but principal de l'étude d'une série temporelle est la prévision des réalisations futures, très souvent pour des raisons économiques, biologiques, épidémiologiques, météorologiques et d'autres.

Il est clair que, aucun modèle ne correspond exactement à la réalité, et il est impossible de prévoir parfaitement le devenir d'une série temporelle. Lorsque cela sera possible, nous donnerons des intervalles de prévisions, afin de pouvoir apporter une information quant à la précision de la prévision. Pour ce faire, il existe un large choix de modèles utilisables, on peut citer les modèles de régression, les lissages exponentiels, les modèles ARMA, GARCH,...

La prédiction de la série chronologique au temps  $t + h$  notée  $\widehat{X}_{T+h}$  est généralement différente de la valeur réelle  $X_{T+h}$  que prend la série au temps  $T+h$ . Pour mesurer cette différence, on définira l'erreur moyenne de prédiction avec l'idée que plus  $h$  est grand, plus l'erreur est grande (une prévision à court terme est toujours meilleure).

Notre objectif est donc de modéliser l'évolution dans le temps, dans notre cas supposé discret, d'un phénomène aléatoire. On parle ainsi de série temporelle, on donne quelques exemples d'application dans

différentes disciplines.

En économie, pour prévoir par exemple l'évolution de la vente d'un produit pour ajuster au mieux les moyens de production, prévoir l'évolution d'un marché financier. On propose dans la figure 5.1 un exemple de la série "AirPassengers" qui représente le nombre de passagers transportés par une compagnie aérienne. (les données sont disponibles sur le logiciel R).

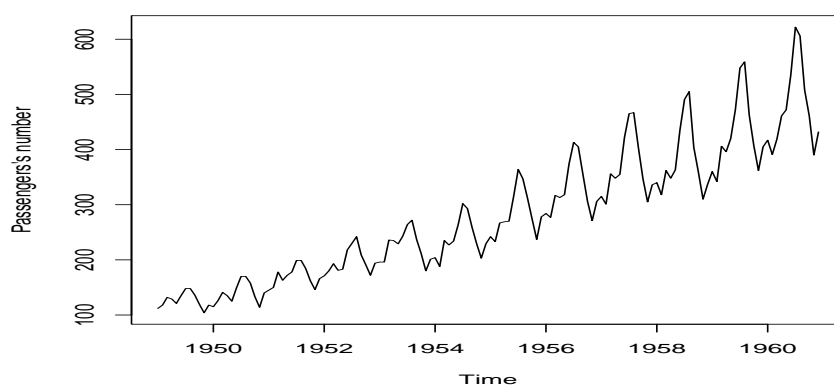


Figure 5.1: Nombre mensuel de passagers (en milliers) entre 1949 et 1960 dans les lignes aériennes.

En écologie, on pourrait s'intéresser par exemple, à l'évolution de la température moyenne mensuelle d'un pays durant une période donnée, ou bien à la concentration en dioxyde de carbone dans l'atmosphère (voir 5.25), ou encore la série souvent citée en exemple qui représente le nombre de lynx capturés au Canada et dont la représentation est donnée par la figure 5.2.

Enfin, nous proposons dans la figure 5.3, la série chronologique des décès mensuels dus à des maladies pulmonaires (la bronchite, l'emphysème et à l'asthme) au Royaume-Uni, de la population des hommes et des femmes.



## 5.2 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficient déterministe

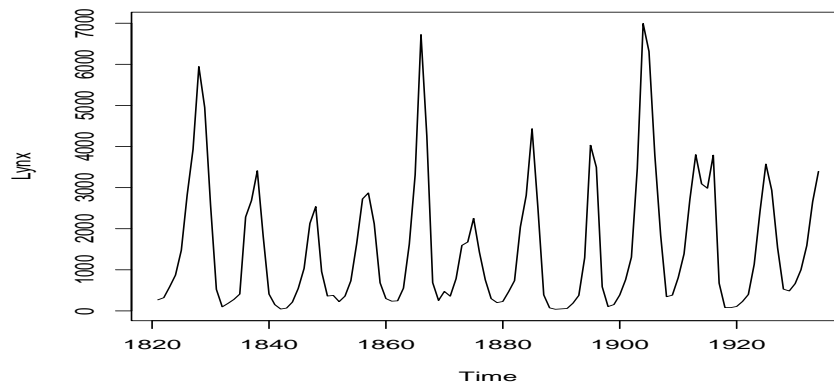


Figure 5.2: Nombre de lynx capturés au Canada entre les années 1821 à 1934.

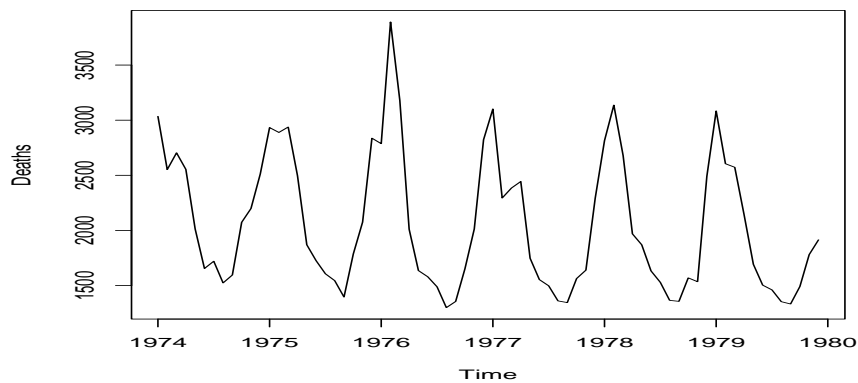


Figure 5.3: Nombre de décès causés par les maladies pulmonaires.

## 5.2 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficient déterministe

Nous allons dans un premier temps simuler la trajectoire d'un AR(1) à valeurs dans un espace de Hilbert  $H = L^2[0, 1]$  où le coefficient de corrélation associé est déterministe, en utilisant la bibliothèque "far" développée par Damons et Guillas [27]. Nous rappelons l'équation autrégressive

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

### 5.2.1 Simulation d'un bruit blanc

Pour simuler un bruit blanc dans un espace de Hilbert  $H$ , nous définissons les fonctions propres, ci-dessous, de l'opérateur de covariance du mouvement brownien

$$v_j(t) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{j-1}{2}\pi t\right), \quad j \geq 1.$$

Plus précisément, les accroissements du mouvement Brownien sont donnés par la décomposition de Karhunen-Loève et par conséquent, génèrent un bruit blanc fort. Pumo dans [?] a utilisé cette décomposition pour simuler la trajectoire du mouvement brownien sur  $C[0, 1]$ .

Un bruit blanc  $(\varepsilon_n(s), n \geq 0, s \in [0, \delta])$  est défini comme suit

$$\varepsilon_t(s) = W_{t+s} - W(t),$$

où

$$W_u = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{2(n+1)} Y_j^* \frac{\sin\left[\left(j - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi u}{n+1}\right]}{\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)}, \quad u \in [0, n+1]$$

Les v.a  $Y_j^*$  sont i.i.d suivant la loi de Gauss  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour la simulation, les sommes infinies sont approximées par des sommes finies.

Sous le logiciel R, le code `simul.far.wiener(m, n, d.rho, cst1, m2 = NULL)` est utilisée pour la simulation d'un processus FAR d'ordre 1 (Functional Autoregressive Processes) avec le bruit de Wiener. Les paramètres sont les suivants:  $m$  est un entier représentant le nombre de discrétisation,  $n$  est le nombre d'observation,  $d.rho$  est une matrice d'ordre  $k$  qui exprime le premier bloc de l'opérateur de corrélation linéaire  $\rho$  dans la base de Karhunen-Loève,  $cst1$  est le coefficient de perturbation sur l'opérateur linéaire et l'entier  $m2$  désigne la longueur du développement de Karhunen-Loève (par défaut égale à  $2 * m$ ). Le processus FAR(1), défini par son opérateur linéaire (voir "far" pour plus de détails), est calculé dans la base de Karhunen-Loève puis projeté dans la base canonique. Les paramètres donnés ( $d.rho$  et  $cst1$ ) sont exprimés dans la base de Karhunen-Loève et définissent l'opérateur

linéaire qui est de la forme :

$$\begin{pmatrix} d.rho & 0 \\ 0 & eps.rho \end{pmatrix},$$

où  $d.rho$  est la matrice fournie dans cet appel, les deux 0 sont en fait deux blocs de 0, et  $eps.rho$  est une matrice diagonale ayant sur sa diagonale les termes :

$$(\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots, \varepsilon_{m_2}),$$

où

$$\varepsilon_i = \frac{cst1}{i^2} + \frac{1 - cst1}{e^i},$$

avec  $i = k + 1, \dots, m_2$  et  $k$  est la dimension de la matrice diagonale  $d.rho$ . La matrice  $d.rho$  peut être considérée comme l'information et la matrice  $eps.rho$  comme une perturbation. Notons que la norme de  $eps.rho$  doit être plus petite que celle de  $d.rho$  pour assurer la condition de stationnarité pour les modèles FAR à coefficient de corrélation déterministe.

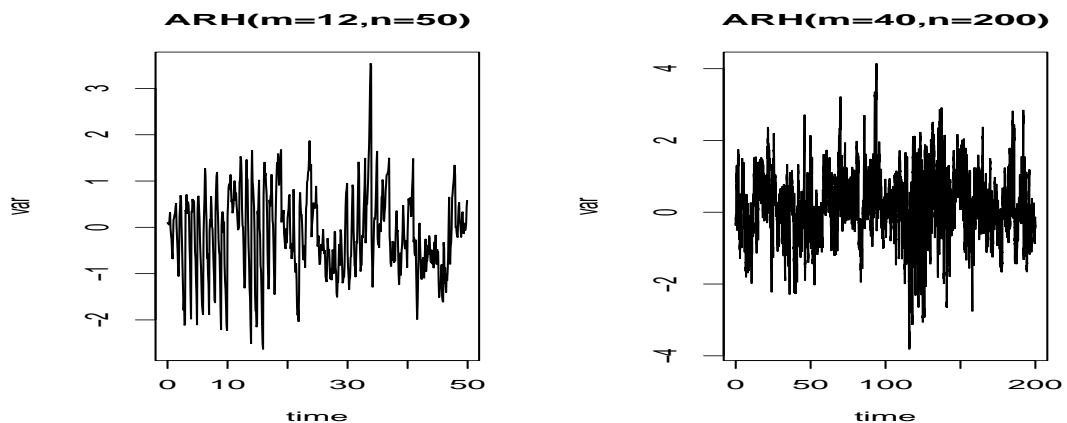


Figure 5.4: Simulation d'un ARH(1) pour (m=12, n=50) et (m=40, n=200)

5.2.2 Prédicteurs résolvants dans les modèles ARH(1) à coefficient déterministe

Pour prédire la trajectoire de la  $(n + 1)$  ième observation  $X_{n+1}$ , on utilise un échantillon des observations  $X_1, \dots, X_n$  de (5.1). Le prédicteur résolvant  $\hat{X}_{n+1}$ , dans le cas symétrique, est calculé au points de discrétisations  $(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $t \in [0, T]$  par:

$$\hat{X}_{n+1}(t_j) = \rho(X_n(t_j))$$

où l'adjoint de  $\rho_{n,p}$  est défini par (2.5), on prend  $\alpha_n = \frac{1}{100 \cdot \log n}$ . Pour mesurer la performance de notre prédicteur, on doit contrôler la qualité de la prédiction qui est mesurée par deux critères : l'erreur quadratique moyenne (MSE: Mean Square Errors) et l'erreur moyenne-absolue relative (MARE: Mean Absolute Relative Errors) définies respectivement par (pour  $m_1 = 20$  répliques):

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\hat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|^2, \quad MARE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(|\hat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|)}{|X_{n+1}(t_i)|}.$$

Les figures 5.5–5.16 représentent les prédicteurs résolvants  $\hat{X}_{n+1}$  (en rouge) de la  $n$  ième observation  $X_{n+1}$  (en noir) pour les valeurs de  $p$  et  $m$  choisies, chaque scénario est répété pour les différentes valeurs du nombre d'observations  $n$ :  $n = 50, 100, 150$ , ( $p = 2, p = 7$  et  $m = 20, m = 30$  (points de discrétisations)). À chaque fois, les erreurs MSE et MARE sont calculées.

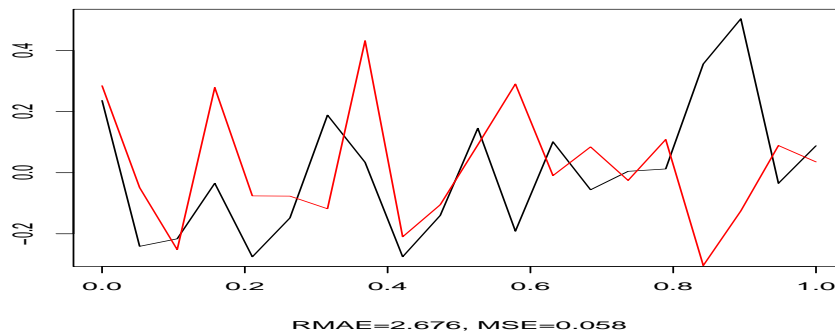


Figure 5.5: Prédicteur résolvant:  $n=50, m=20, p=2$

## 5.2 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficient déterministe

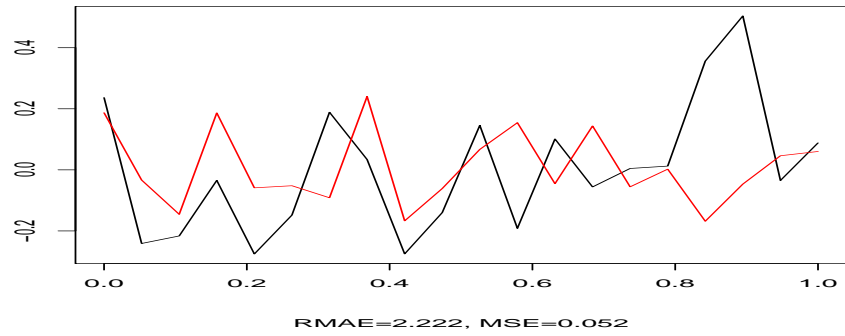


Figure 5.6: Prédicteur résolvant:  $n=50, m=20, p=7$

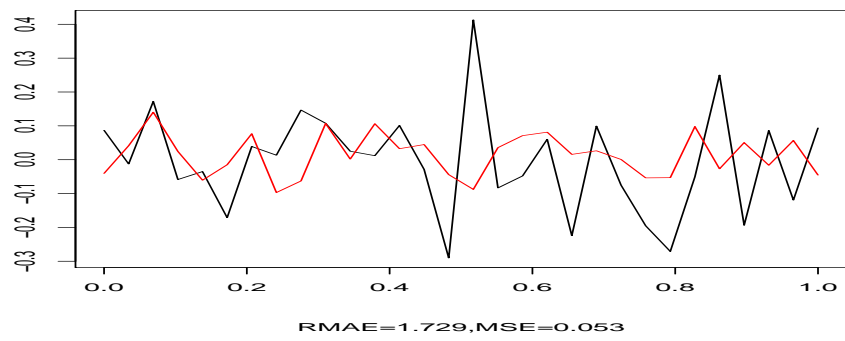


Figure 5.7: Prédicteur résolvant:  $n=50, m=30, p=2$

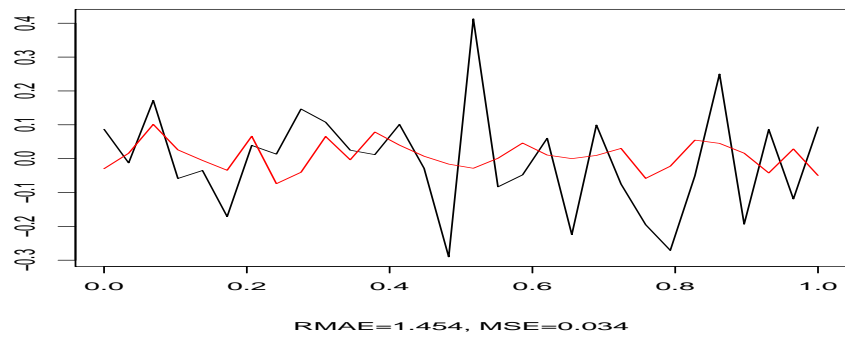


Figure 5.8: Prédicteur résolvant:  $n=50, m=30, p=7$

## 5.2 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficient déterministe

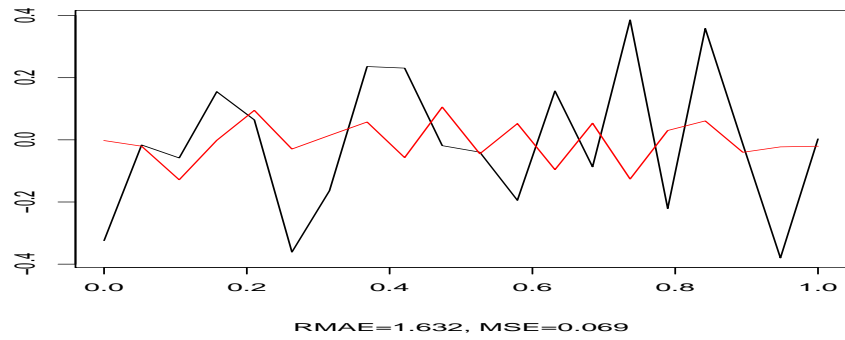


Figure 5.9: Prédicteur résolvant:  $n=100, m=20, p=2$

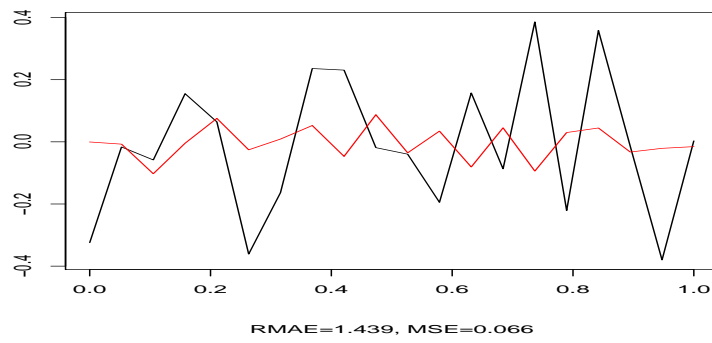


Figure 5.10: Prédicteur résolvant:  $n=100, m=20, p=7$

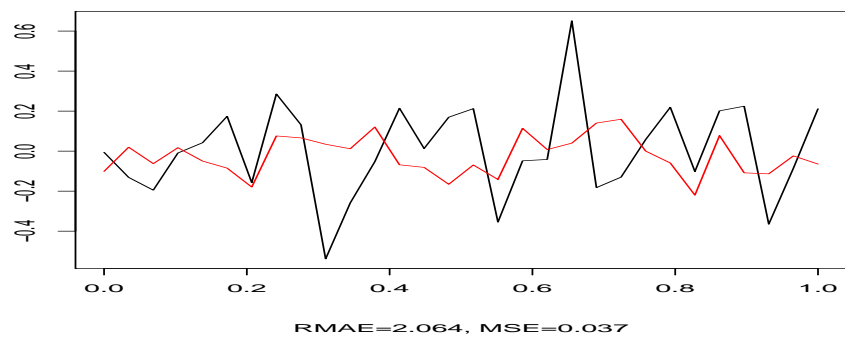


Figure 5.11: Prédicteur résolvant:  $n=100, m=30, p=2$

## 5.2 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficient déterministe

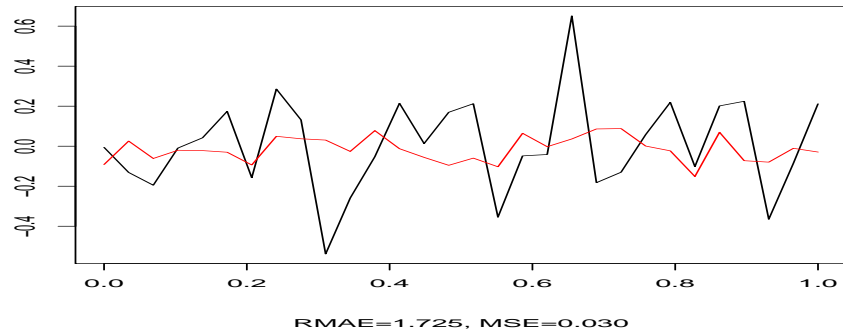


Figure 5.12: Prédicteur résolvant:  $n=100, m=30, p=7$

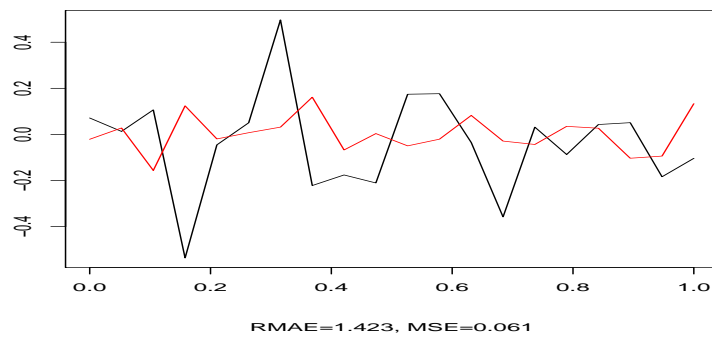


Figure 5.13: Prédicteur résolvant:  $n=150, m=20, p=2$

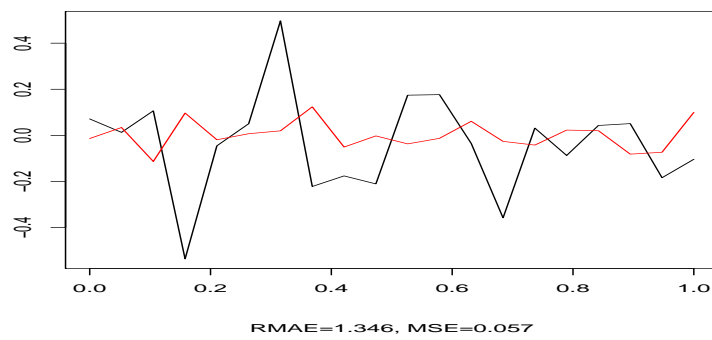


Figure 5.14: Prédicteur résolvant:  $n=150, m=20, p=7$

## 5.2 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficient déterministe

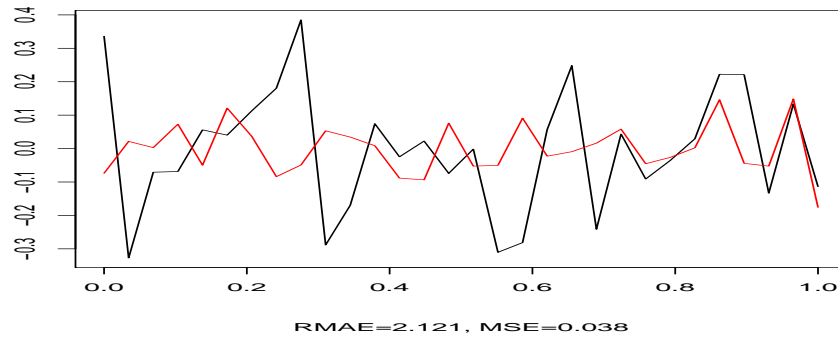


Figure 5.15: Prédicteur résolvant:  $n=150, m=30, p=2$

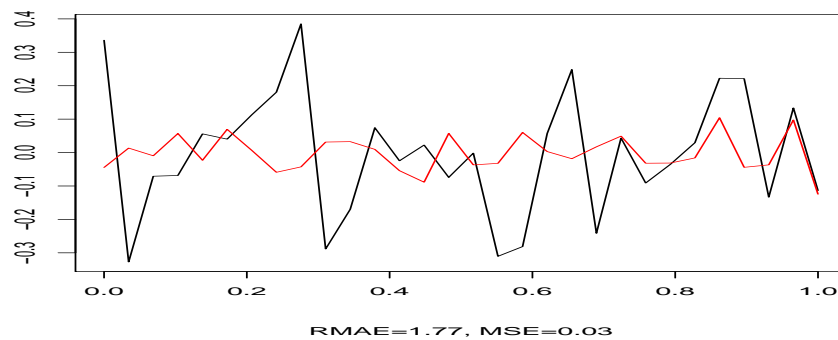


Figure 5.16: Prédicteur résolvant:  $n=150, m=30, p=7$

### Conclusion

Les simulations numériques montrent la stabilisation des erreurs de prédiction, ( $MSE$ ) et ( $MARE$ ) pour  $n = 50$  et valident les résultats théoriques des prédicteurs statistiques. De plus, le choix des valeurs du paramètre de lissage ont effectivement un effet sur la performance des estimateurs à savoir prédicteurs résolvants. En pratique, le prédicteur devient moins efficace dès que  $p > 7$ . En effet, théoriquement, les vitesses de convergences sont moins bonnes puisque l'on a

$$\|f_{n,p}(C_n)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{(p+1)\alpha_n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-p},$$

où, pour  $n$  fixé, la norme supremum du pseudo-inverse tend vers 0 pour un  $p$  assez grand. Cependant, cette étude conduit qu'à tirer quelques



conclusions partielles et il est difficile d'indiquer les valeurs optimales pour les paramètres de lissage  $p$  et  $\alpha_n$ . Aussi, notons que le nombre de points de discrétisation  $m$  n'a aucun effet significatif sur les erreurs de prédiction.

### 5.3 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficients aléatoires

On reprend les mêmes techniques de la section précédente. La même fonction citée pour simuler les trajectoires des modèles ARH(1) à coefficient de corrélation déterministe est utilisée encore une fois pour traiter les modèles à coefficients aléatoires sauf qu'elle est un petit peu modifiée.

On rappelle que l'équation autorégressive hilbertien d'ordre 1 à coefficient aléatoire est donnée par

$$X_n = \rho_n(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

Le code, *simule.far.wiener(m,n,d.rho,cst1,m2)*, utilise  $m$  points de discrétisations et  $n$  observations pour simuler la trajectoire d'un processus FAR(1) défini dans (5.2), à coefficients aléatoires  $\rho_n$  avec le bruit blanc utilisant le développement de Karhunen-Loève (l'espace de Hilbert considéré reste toujours  $H = L^2[0, 1]$ ). Le processus aléatoire FAR(1), défini par son opérateur linéaire aléatoire est calculé dans la base de Karhunen-Loève et est projeté dans la base canonique. L'opérateur aléatoire sera réécrit cette fois, sous la forme:

$$\begin{pmatrix} d.rho & 0 \\ 0 & eps.rho \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, la matrice aléatoires *d.rho* de dimension  $k$  est diagonale d'éléments aléatoires obéissant à une loi uniforme, *eps.rho* est aussi une matrice diagonale d'entrées  $(\varepsilon_i)_{k+1 \leq i \leq m_2}$ , données par  $\varepsilon_i = \frac{cst1}{i^2} + \frac{1-cst1}{e^i}$ , où les v.a *cst1* sont issues d'une loi uniforme,  $m_2$  représente la taille du développement de Karhunen-Loève qui est égale à

$2 * m$  par défaut.

Les figures 5.17–5.18 représentent la trajectoire d'un processus ARH pour  $n = 50, n = 80$  observations sur des intervalles unitaires successifs calculés respectivement à  $m = 20$ , et  $m = 30$  points de discrétisations.

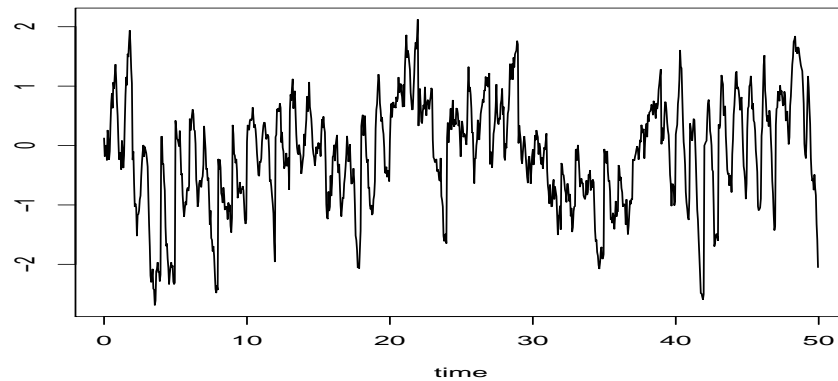


Figure 5.17: Simulation d'un ARH(1) à coefficients aléatoires ( $n=50, m=20$ )

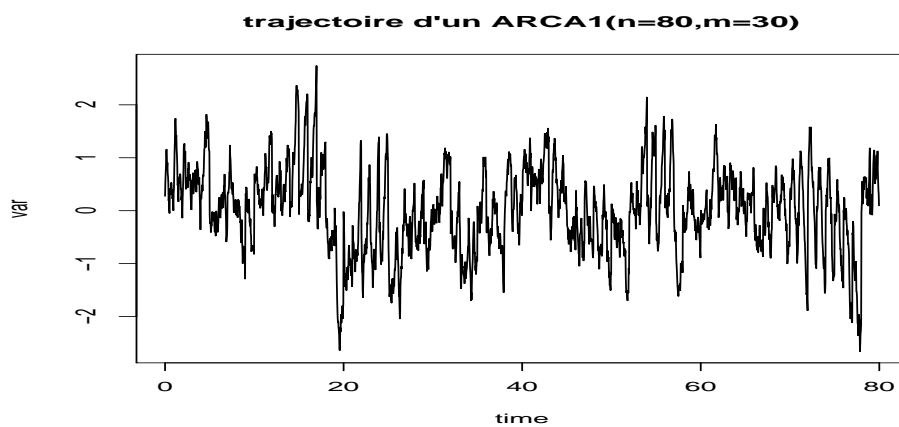


Figure 5.18: Simulation d'un ARH(1) à coefficients aléatoires ( $n=80, m=30$ )

### 5.3.1 Prédicteurs résolvants dans les modèles RCHA(1)

Pour prédire  $X_{n+1}$ , nous observons un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  de (1.1). Le prédicteur résolvant  $\hat{X}_{n+1}$  ( dans le cas symétrique) est calculé aux

points de discrétisations  $(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  par:

$$\widehat{X}_{n+1}(t_j) = \theta_{n,p}^*(X_n(t_j))$$

où  $\theta_{n,p}^*$  est défini par (4.2).

Pour évaluer la performance des prédicteurs, nous calculons l'erreur quadratique moyenne  $MSE$  ainsi que l'erreur relative absolue moyenne  $MARE$  définies respectivement par ( pour  $m_1$  réplifications):

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\widehat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|^2, \quad MARE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(|\widehat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|)}{|X_{n+1}(t_i)|}.$$

La Table 5.1 comporte les erreurs MSE et MARE des prévisions pour les différentes valeurs de  $n$ ,  $p$  et  $\alpha_n$  en  $m = 30$  points de dicrétisations (chaque scénario est répété 100 fois).

### 5.3 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficients aléatoires

Table 5.1: Ensemble des données simulées: Les erreurs de prédiction MSE et MARE. Les tailles des échantillons sont  $n \in \{100, 150, 250, 350, 500\}$ , les paramètres de lissage  $p \in \{2, 7\}$ ,  $\alpha_n = 10^{-i} \frac{1}{\log n}$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . Chaque scénario est répété 100 fois.

Sample size n	Errors	$\alpha_n$					
		$10^{-5} \frac{1}{\log n}$	$10^{-4} \frac{1}{\log n}$	$10^{-3} \frac{1}{\log n}$	$10^{-2} \frac{1}{\log n}$	$10^{-1} \frac{1}{\log n}$	
100	p=2	MSE	.068	.077	.049	.051	.0456
		RMAE	2.35	1.39	1.41	1.45	1.56
	p=7	MSE	.0688	.075	.049	.0459	.0453
		RMAE	1.89	1.29	1.31	1.38	1.49
150	p=2	MSE	.0378	.0504	.0501	.0584	.0399
		RMAE	1.42	1.31	1.37	1.44	1.46
	p=7	MSE	.0378	.049	.0472	.0592	.0398
		RMAE	1.37	1.21	1.25	1.31	1.39
250	p=2	MSE	.041	.041	.029	.0502	.0537
		RMAE	1.34	1.29	1.32	1.36	1.41
	p=7	MSE	.041	.040	.028	.059	.0535
		RMAE	1.32	1.24	1.29	1.33	1.36
350	p=2	MSE	.0537	.0411	.0365	.0323	.0574
		RMAE	1.43	1.44	1.37	1.41	1.59
	p=7	MSE	.0537	.0409	.0361	.0318	.0576
		RMAE	1.39	1.45	1.38	1.44	1.57
500	p=2	MSE	.031	.0243	.0319	.0356	.0384
		RMAE	1.36	1.32	1.35	1.41	1.55
	p=7	MSE	.0314	.0242	.0312	.0352	.0385
		RMAE	1.34	1.33	1.29	1.38	1.46

Nous remarquons que les erreurs MSE et MARE sont stabilisées à partir de  $n = 250$  pour  $\alpha_n = 10^{-3} * \frac{1}{\log n}$  et  $10^{-4} * \frac{1}{\log n}$ . Les simulations numériques montrent que les prédicteurs résolvants fonctionnent bien et donnent des erreurs assez faibles tout en validant la performance de cette méthode de prédiction.

Les figures 5.19–5.24 représentent le prédicteur résolvant  $\hat{X}_{n+1}$  (en rouge) et la trajectoire observée  $X_{n+1}$  (en noir) pour des différentes valeurs de  $n$  et  $p$ :  $n = 50, 100, 150$ ,  $p = 2, p = 7$  et  $m = 20, m = 30$  (points de discrétisations).

### 5.3 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficients aléatoires

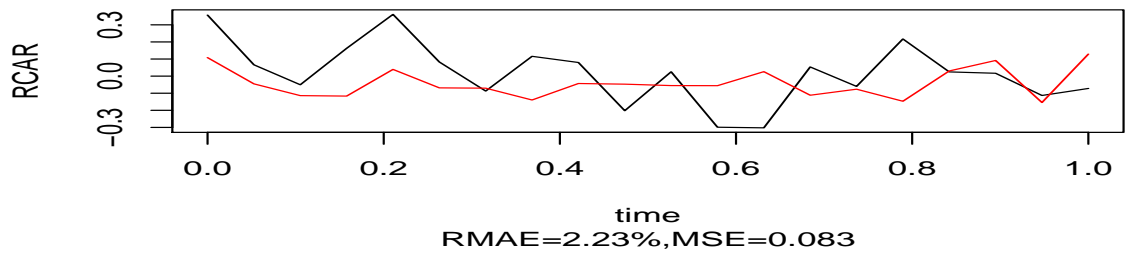
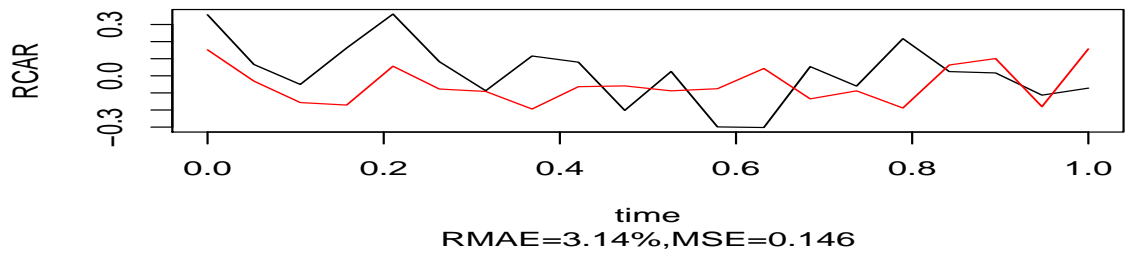


Figure 5.19: Prédicteurs résolvants:  $n=50, m=20, (p=2, p=7)$

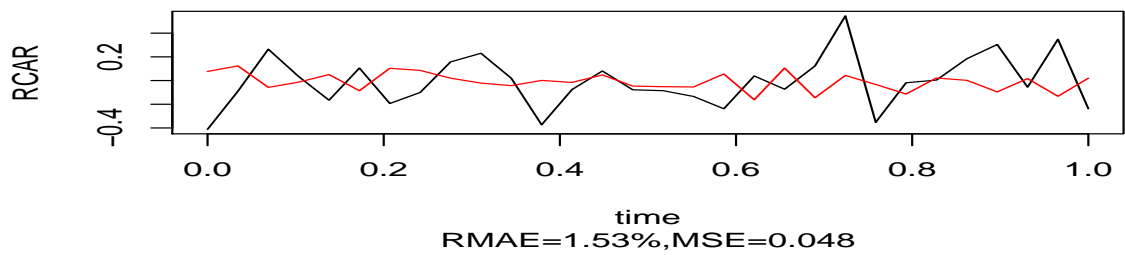
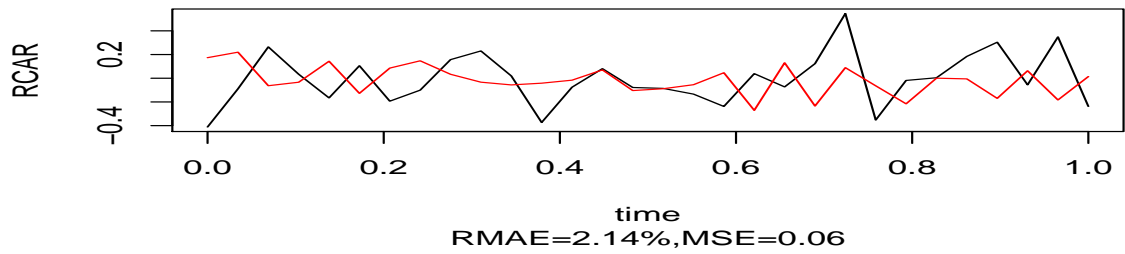


Figure 5.20: Prédicteurs résolvants:  $n=50, m=30, (p=2, p=7)$

### 5.3 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficients aléatoires

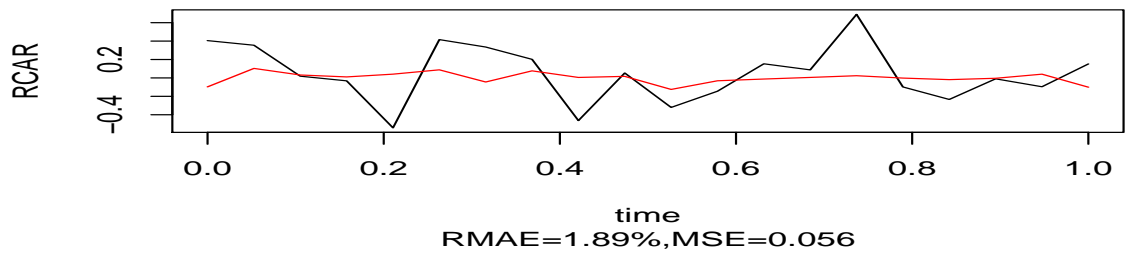
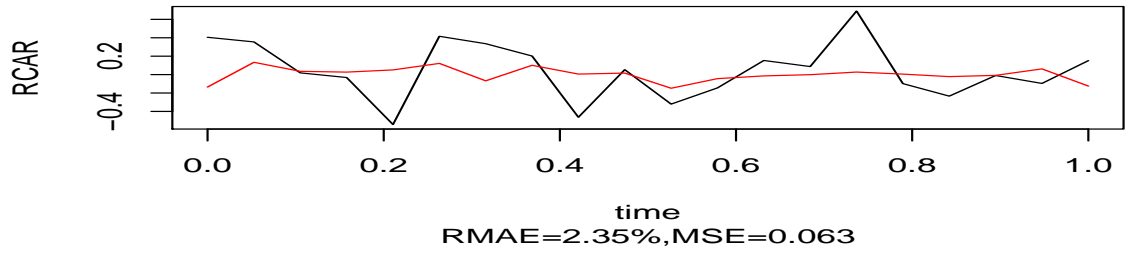


Figure 5.21: Prédicteurs résolvents:  $n=100, m=20, (p=2, p=7)$

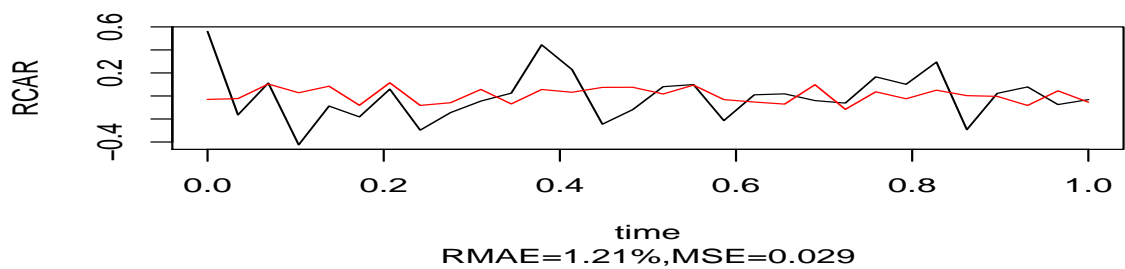
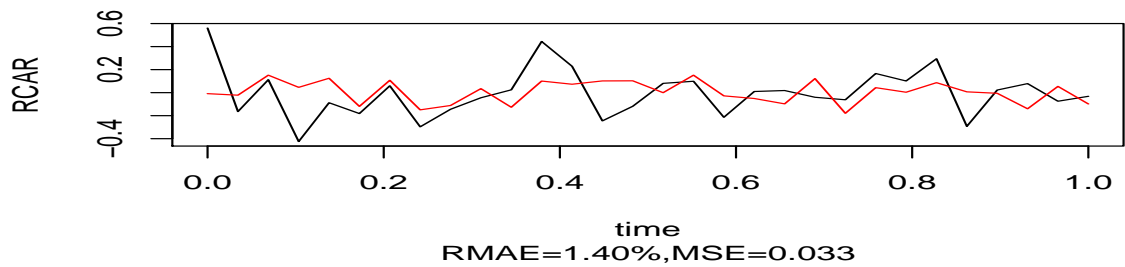


Figure 5.22: Prédicteurs résolvents:  $n=100, m=30, (p=2, p=7)$

### 5.3 Simulation d'un processus ARH(1) à coefficients aléatoires

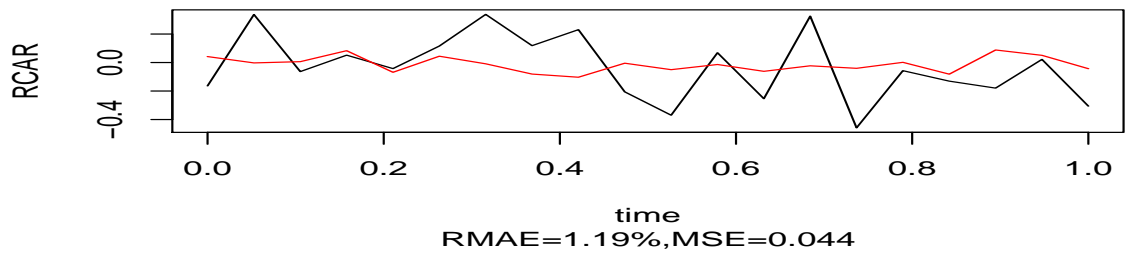
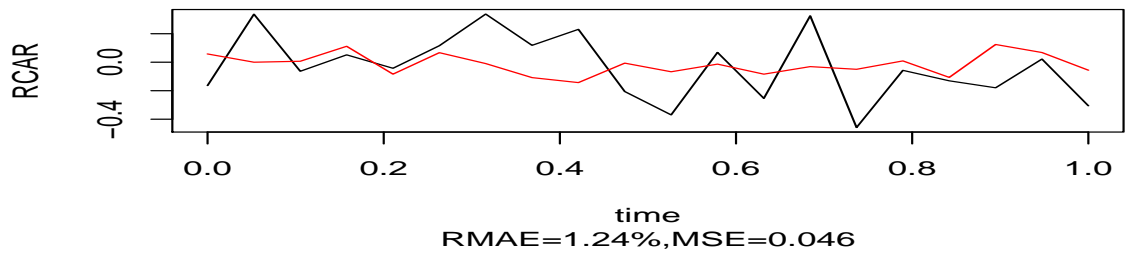


Figure 5.23: Prédicteurs résolvents:  $n=150, m=20, (p=2, p=7)$

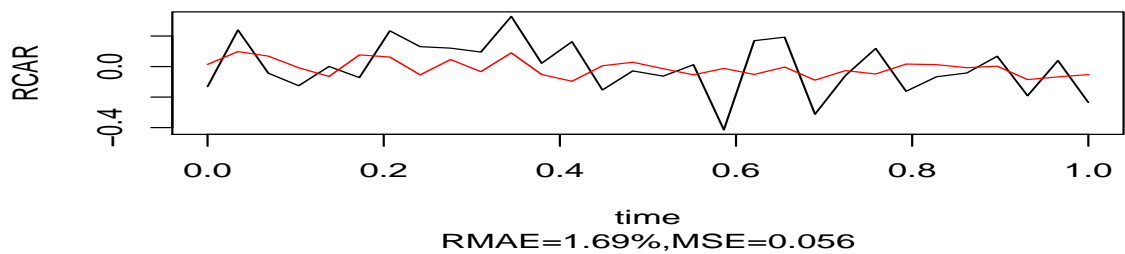
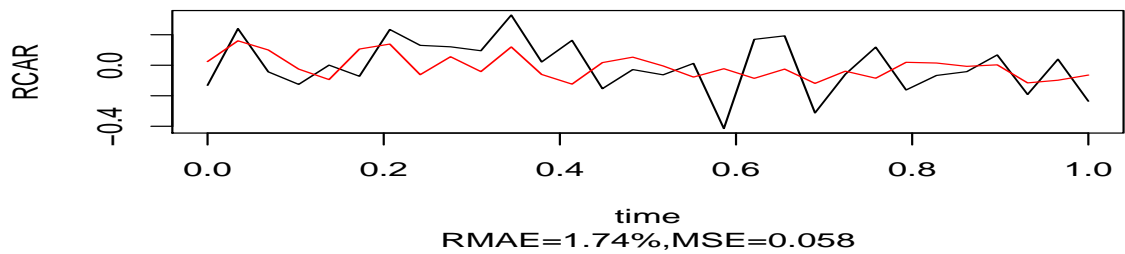


Figure 5.24: Prédicteurs résolvents:  $n=150, m=30, (p=2, p=7)$

## 5.4 Exemples réels

La santé de la population animale (en particulier humaine) est un des défis majeurs liés à l'adaptation aux changements climatiques. L'effet des vagues de chaleur est notamment déjà visible alors que ces événements devraient se multiplier dans les années à venir. Les maladies pulmonaires, cardiovasculaires,... représentent une des classes majeures des maladies les plus répandues à l'heure actuelle, tout en étant déjà un problème sérieux de santé publique. Des études en épidémiologie environnementale visent à identifier l'influence de la météorologie sur la santé, afin d'anticiper les changements climatiques et mettre en place des alertes appropriées.

### 5.4.1 Évolution de la concentration atmosphérique de CO<sub>2</sub>

L'un des facteurs principal provoquant le réchauffement des températures est lié à l'enrichissement atmosphérique en CO<sub>2</sub> d'origine anthropique, génère des catastrophe naturelles: modifie le biotope marin, explique la sécheresses, tempêtes, inondations et incendies. Il modifie la biodiversité, les bio-invasions notamment par les maladies vectorielles. L'enrichissement de l'atmosphère en particules a de profondes incidences sur les cancers, des divers maladies, les allergies etc.

Considérons le jeu de données de la concentration en CO<sub>2</sub> (unité: ppm = particules par million) dans l'atmosphère entre les années 1959 et 2015 disponibles sur

<http://cdiac.esd.ornl.gov/pub/maunaloa-co2/maunaloa.co2>.

La figure 5.25 représente l'évolution des émissions de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère qui montre un signe évident de réchauffement climatique.

La figure 5.26 représente la prévision par la méthode du prédicteur résolvant (en rouge) de la concentration en CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère (en noir) des années 1975 et 2015.



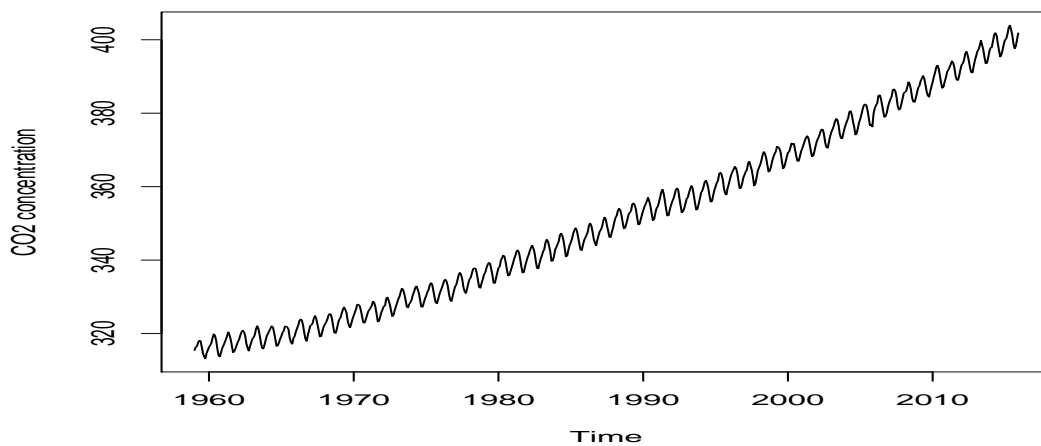


Figure 5.25: Augmentation annuelle de la concentration en CO2 dans l'atmosphère

Les erreurs de prévision sont considérablement assez faibles et sont égales à 1,67% et 2,32% respectivement pour les deux années et cela confirme bien la fiabilité de notre prédicteur statistique.

#### 5.4.2 Température au château de Nottingham

Un objet de série temporelle contenant les températures mesuelles moyennes de l'air au château de Nottingham en degrés Fahrenheit pendant 20 ans disponibles sur le logiciel R (voir la figure 5.27. [5] (Température moyenne mensuelle au château de Nottingham entre Janvier 1920 et Décembre 1939), on compare notre méthode de prévision avec d'autres qui existent dans la littérature, On pourra citer [7, 8, 27, 51, 53]. La Table 5.2 résume les erreurs MARE pour les différentes méthodes de prévision citées plus haut.

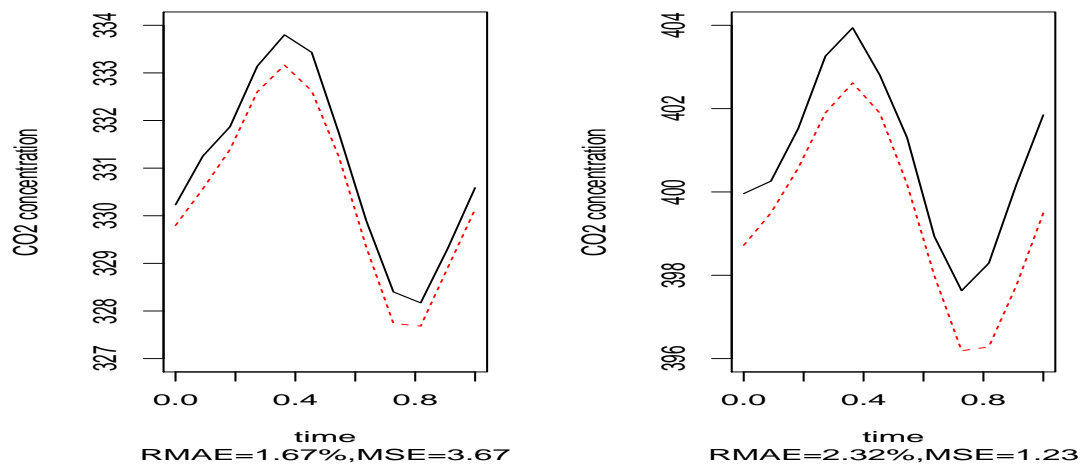


Figure 5.26: Prédiction de la concentration en CO2 dans l'atmosphère pour les années 1975 et 2015 aux points de discrétisation  $m = 12$  mois, les paramètres de lissage  $p = 2$ , et  $\alpha_n = \frac{10^{-2}}{\log n}$

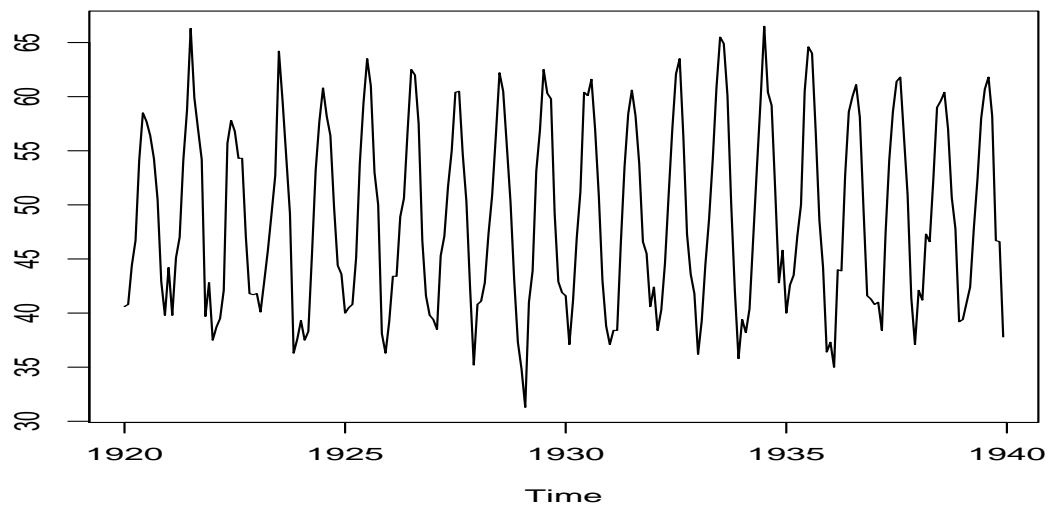


Figure 5.27: Température au château de Nottingham durant la période: 1920 - 1939

La figure 5.28 représente la prédiction de la température de l'année 1939 (en noir) ainsi que sa prévision (en rouge).

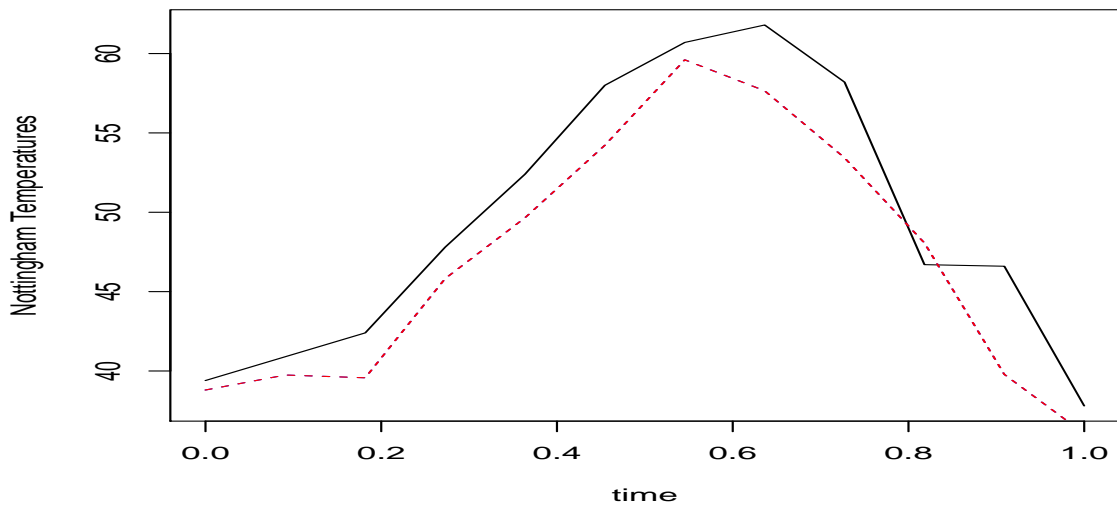


Figure 5.28: Prédiction de la température de l'année 1939, MSE=9.65, RMAE=0.0707

Table 5.2: L'erreur de prédiction MARE de la température au château de Nottingham durant l'année 1939 pour  $n = 19$  données observées. Le nombre de points de discrétisation pour chacun des deux échantillons est  $m = 12$  mois. Les paramètres de lissage sont  $p = 2$  et  $\alpha_n = \frac{10^{-2}}{\log n}$ .

Prediction methods	MARE errors
Wavelet-Kernel	3%
Spline Smoothing	2.8%
SARIMA	3.1%
Sieves Predictor	2.95%
Continuous BLUP	2.96%
Resolvent Predictor	7.07%

### 5.4.3 Série chronologique ENSO

Les variations de la température de surface de la mer (SST: Sea Surface Temperatures) dans le Pacifique tropical et les modifications de la circulation atmosphérique globale qui en découlent dominent la variabilité du climat mondial sur des échelles de temps interannuelles. Des études récentes sont établies et distinguent les événements canoniques **El Niño** et **La Niña**. Le phénomène climatique et océanographique **El Niño oscillation australe (ENSO: El Niño Southern Oscillation)** reliant le phénomène El Niño et l'oscillation australe de la pression at-

mosphérique rythme les conditions météorologiques dans le monde entier avec des phases chaudes, appelées El Niño, et des froides baptisées La Niña, qui se succèdent régulièrement. El Niño et La Niña sont des phénomènes qui ont pour origine une anomalie de températures importantes des eaux de surface de l’océan Pacifique sud. Lorsque celles-ci deviennent particulièrement marquées et positives, on assiste à un épisode El Niño, dans le cas contraire, il s’agit du phénomène La Niña. Notons que l’augmentation de la concentrations en CO<sub>2</sub> affaiblira l’intensité du cycle ENSO et bascule du côté négatif lorsque le climat se réchauffe en empêchant les événements El Niño et La Niña de se développer dans toute leur amplitude.

Des variations irrégulière de températures moyennes mensuelles de la surface de l’eau (SST) dans le domaine EL Niño-3 (5oS-5oN,150oW-90oW) sont enregistrées depuis Janvier 1950 à Avril 2021 par le centre national de la prévision envirennementale aux USA (NOAA).

Pour pouvoir comparer notre prédicteur avec les autres méthodes [7, 8, 20, 51, 53], nous considérons des observations mensuelles durant la période 1950-1985 (respectivement durant la période 1950-2005) pour prédire la température de la surface océanique des années respectives 1986 et 2006. La qualité du prédicteur résolvant est mesuré toujours par l’erreur MARE .

La figure 5.29 représente la température mensuelle de la surface océanique entre Janvier 1950 et Décembre 2015.

On présente dans la figure 5.30 les températures réelles observées de la 37 ième année (températures de surface en 1986), respectivement de la 57 ième (températures de surface en 2006) et du prédicteur résolvant associé où la taille de la grille de discrétisation pour chaque échantillon est égale à  $m = 12$  mois (intervalle d’unité d’une année), les valeurs des paramètres de lissage sont:  $\alpha_n = 10^{-2}(\log(n))^{-1}$  et  $p = 2$ , pour l’échantillon associé aux 36 années de 1950 à 1985 et pour les 56 années de 1950 à 2005.

Nous comparons dans la Table 5.3, la performance du prédicteur ré-

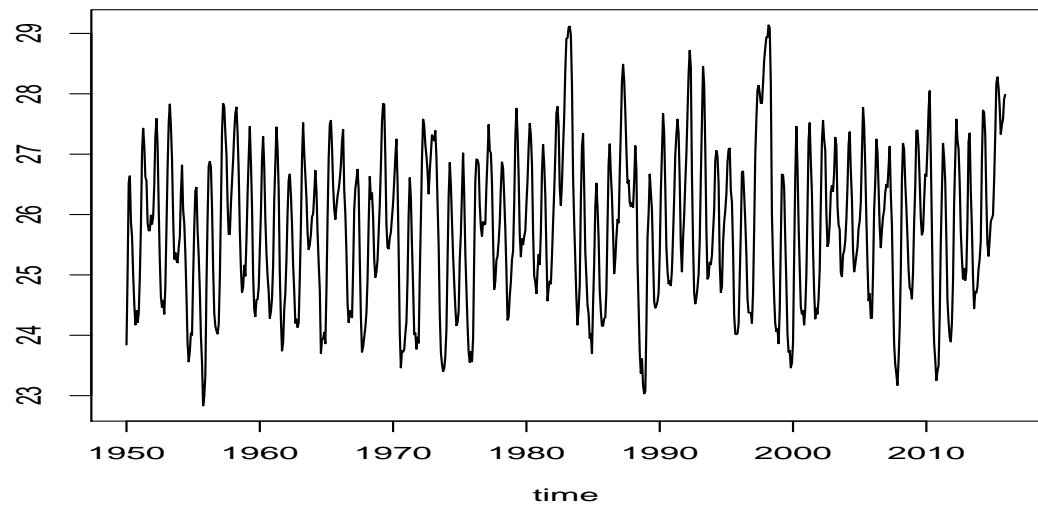


Figure 5.29: Températures de la surface océanique EL Niño

solvant avec les autres méthodes [7, 14, 15, 20, 49, 51, 53] sur la base de l'erreur MRAE respectivement pour les années de référence 1986 et 2006.

Table 5.3: Jeux de données El Niño: Les erreurs MARE pour les différentes méthodes de prévision associées aux années 1986 et 2006 calculées respectivement pour  $n = 36$  et  $n = 56$  données observées. Le nombre de points de discrétisation pour chacun des deux échantillons est  $m = 12$  mois. Les paramètres de lissage sont  $p = 2$  et  $\alpha_n = \frac{10^{-2}}{\log n}$ .

Prediction methods	MARE errors	Prediction methods	MARE errors
Wavelet II	0.89%	Climatologie	2.5%
Wavelet III	1.20%	SARIMA	3.7%
ARHD $\alpha=0.4, \beta=0.8$	1.33%	Kernel	2.3%
ARHD $\alpha=0.1, \beta=0.4$	1.25%	Functional kernel	2.2%
SARIMA	3.72%	Smooth FAR(1)	2.3%
FAR	0.89%	Smooth FAR(1), $p=q=1$	2.4%
Discrete BLUP	1.25%	Local FAR(1)	2.2%
Continuous BLUP	1.31%	Discrete BLUP	1.4%
Sieves Predictor	1.31%	Sieves Predictor	2.46%
Resolvent Predictor	1.89%	Resolvent Predictor	1.67%

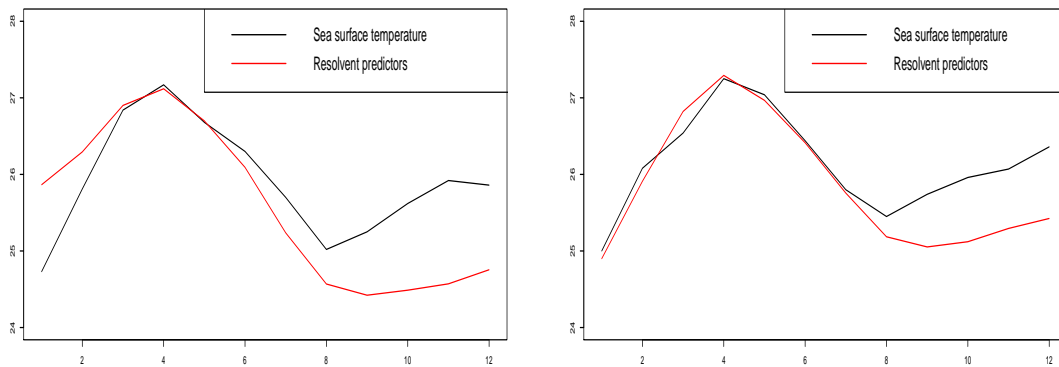


Figure 5.30: La température de la surface océanique d'El Niño et le prédicteur résolvant pour les années 1986 et 2006. Gauche: MSE=1.76, MARE=1.89%. Droit: MSE=1.42, RMAE=1.67%.

**Conclusion.** Après comparaison de la méthode de prédiction basée sur l'estimateur résolvant avec les différentes méthodes de prévision citées plus haut, on conclut que les résultats numériques obtenus corroborent avec ceux théoriques dont la qualité de prédiction est mesurée par les erreurs MSE et MARE qui sont assez faibles. La performance de notre méthode donne de nouveaux aperçus sur les perspectives de prédiction par rapport à d'autres techniques paramétriques et non paramétriques bien connues existant dans la littérature. Rappelons que les paramètres de régularisation sont généralement gérés par les données et qu'ils sont calculés via la minimisation du risque de prédiction. Aussi, notons que le choix de la loi uniforme des coefficients d'autocorrélation aléatoires  $\rho_n$  dans la section simulation est justifié pour respecter la règle de la stationnarité du processus, en outre, un choix spécifique de la loi de distribution pour ces coefficients aléatoires auxquels on s'attend à une optimalité doit être fait et une estimation efficace est donc nécessaire pour des résultats plus fiables. Cela nous ramène vers les problèmes d'estimation semi-paramétriques vu que le paramètre moyenne des coefficients est déjà estimée. Ces questions feront l'objet des études à l'avenir.

## Conclusion Générale et perspectives

Les formulations classiques ne sont pas toujours appropriées pour modéliser toutes les données temporelles car les modèles considérés sont généralement linéaires à coefficients constants. Dans la plupart des situations, on ne s'attend pas à ce que ces modèles soient meilleurs pour s'adapter à un ensemble de données réelles, même si on fait l'hypothèse que le modèle linéaire de l'étude est une bonne approximation de la réalité physique.

Il serait préférable de trouver une méthode permettant la prise en considération de cette corrélation aléatoire des données, qui peut indiquer les facteurs environnementaux perturbant par exemple, la corrélation des températures, l'évolution de la population des punaises où une extinction est espérée, ou l'hétéroscédasticité en finance, etc. Ce qui exige l'émergence d'autres formes de modèles tels que les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires.

Dans cette thèse nous avons traité cette classe en étudiant certaines propriétés probabilistes des modèles RCA(1) hilbertien sous des conditions imposées sur les coefficients de corrélation. Ainsi, nous avons étudié dans un premier temps la classe des estimateurs résolvants des coefficients de corrélation des modèles ARH(1) déterministes proposée par Mas [48], sous certaines conditions, nous avons obtenu des bonnes propriétés de ces estimateurs, à savoir les bornes exponentielles et la convergence presque-sûre avec des taux de convergence améliorant les résultats existants dans [48]. Des résultats asymptotiques sur les prédicteurs résolvants associés ont été établis.

Ensuite, nous avons considéré les processus autorégressifs hilbertien ARH(1) à coefficients aléatoires. Plusieurs questions ont été développées: loi forte des grands nombres, théorème de la limite centrale, loi du logarithme itéré compact et des inégalités exponentielles avec des vitesses de convergence intéressantes, notre approche est considérablement basée sur la décomposition des différences de martingales hilbertiennes.

Dans la troisième partie de cette thèse, qui est d'ailleurs un chapitre principal de ce travail, nous avons traité la classe des estimateurs résolvants de la moyenne des opérateurs de corrélation aléatoires pour les processus ARH(1) qui peuvent être largement utilisés dans la prévision en différents domaines d'applications. Des conditions améliorées sont exigées pour établir le comportement asymptotique de ces estimateurs à savoir la convergence en probabilité, bornes exponentielles, convergence presque-sûre et une loi limite des estimateurs ainsi que des résultats sur les prédicteurs résolvants. Enfin, nous avons proposé un estimateur de la variance des opérateurs aléatoires et avons montré sa convergence en probabilité.

Nous avons ainsi pu confirmer la performance de nos estimateurs résolvants et leur efficacité par rapport à des méthodes existantes à travers une étude numérique tout en illustrant notre théorie dont les comparaisons étaient basées sur le calcul des erreurs de prévisions.

L'intérêt de cette étude couvre un large éventail de problèmes, y compris par exemple la prédiction des processus continus dans le temps, les procédures de test pour les courbes de classification et l'analyse des composantes principales fonctionnelles (FPCA) qui joue un rôle majeur dans l'analyse de régression, pour la modélisation non paramétrique et semi-paramétrique. Nos résultats seront donc utiles dans ce domaine puisque la loi de distribution des coefficients aléatoires doit être convenablement estimée.

En inférence statistique, l'une des applications importantes de nos résultats est la construction d'ensembles de confiance pour la prévision



de tailles des échantillons: ensemble de modèles de régression linéaire qui contient le vrai modèle, cet étude demande d'autres conditions qui doivent être remplies.

Notons aussi que le travail réalisé dans cette thèse ouvre la voie à d'autres perspectives à savoir:

- Le choix des valeurs optimales des paramètres de lissage pour la construction d'un prédicteur le plus efficace.
- L'estimation de la loi de distribution des coefficients de corrélation aléatoires de notre modèle ARH(1) ce qui nous ramènera vers les problèmes d'estimation non paramétriques.
- La construction des tests statistiques validant la nullité de la variance des opérateurs de corrélation aléatoires, autrement dit, tester la constance des coefficients aléatoires dans un modèle autorégressif. Cela demandera bien évidemment de fournir une loi limite de la statistique de test de rang.

# A Annexe

**Preuve du Lemme 4.2.1:** Montrons d'abord que

$$\|\Delta_n\|_S := \left\| \frac{1}{\sqrt{n}}(K_0 - K_n) \right\|_S \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{0}.$$

Pour  $\eta > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\|K_0 - K_n\|_S > \sqrt{n} \frac{\eta}{2}\right) \leq \exp\left(-\sqrt{n} \frac{\eta^2}{2}\right) \mathbb{E}\left(\exp \eta (\|K_0\|_S + \|K_n\|_S)\right).$$

Or

$$\|K_0\|_S + \|K_n\|_S \leq \|(I - \bar{R})^{-1}\|_{\mathcal{L}(S)} (\|Z_0\|_S + \|Z_n\|_S),$$

et

$$\|Z_i\|_S^2 = \|\langle X_i, \cdot \rangle X_i - C_{X_0}\|_S^2 \leq 2 \left( \|\langle X_i, \cdot \rangle X_i\|_S^2 - \|C_{X_0}\|_S^2 \right) \leq 4b^4.$$

Par conséquent,

$$\exp\left(\eta (\|K_0\|_S + \|K_n\|_S)\right) \leq \exp\left(4b^2 \eta \|(I - \bar{R})^{-1}\|_{\mathcal{L}(S)}\right),$$

et

$$\mathbb{P}\left(\|K_0 - K_n\|_S > \sqrt{n} \frac{\eta}{2}\right) \leq K \exp\left(-\sqrt{n} \frac{\eta^2}{2}\right),$$

où  $K = \exp\left(4\eta b^2 \|(I - \bar{R})^{-1}\|_{\mathcal{L}(S)}\right)$ . Il suit que

$$\|\Delta_n\|_S \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{0}.$$

Utilisons le Théorème 2.16 dans [20] pour étudier la loi limite de  $\sqrt{n}\bar{L}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n L_i$ . Montrons au préalable que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|_S \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Nous avons

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|_S > \sqrt{n}\eta \right) \leq \frac{1}{n\eta^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left( \|L_i\|_S^2 \mathbf{1}_{\|L_i\|_S > \sqrt{n}\eta} \right).$$

Puisque  $\|\bar{R}\|_{\mathcal{L}(S)} < 1$ , alors  $\|L_i\|_S^2 \leq 16b^4 \|(I - \bar{R})^{-1}\|_{\mathcal{L}(S)}^2$  et

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|_S > \sqrt{n}\eta \right) \leq \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E} \left( \|L_1\|_S^2 \mathbf{1}_{\|L_1\|_S > \sqrt{n}\eta} \right).$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|_S > \sqrt{n}\eta \right) = 0.$$

Par ailleurs, on obtient

$$\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{L_i}{\sqrt{n}} \right\|_S^2 \right) \leq \mathbb{E} \|L_1\|_S^2 < \infty.$$

En conséquence, la suite  $\left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{L_i}{\sqrt{n}} \right\|_S, n \geq 1 \right)$  sera uniformément intégrable. Par suite

$$\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{L_i}{\sqrt{n}} \right\|_S \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Soient  $(\tau_l, s_l, l \geq 1)$  les éléments propres de l'opérateur de covariance  $C_{L_1}$ . Posons, pour tout  $u \in S$  :

$$r_N^2(u) = \sum_{l=N}^{\infty} \langle u, s_l \rangle_S^2. \quad (\text{A.1})$$

On obtient alors

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n r_N^2 \left( \frac{L_i}{\sqrt{n}} \right) > \eta \right) \leq \frac{1}{\eta} \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \left( r_N^2 \left( \frac{L_i}{\sqrt{n}} \right) \right) \leq \frac{1}{\eta} \sum_{l=N}^{\infty} \tau_l.$$

Finalement

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n r_N^2 \left( \frac{L_i}{\sqrt{n}} \right) \right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta} \sum_{l=N}^{\infty} \tau_l = 0.$$

La loi faible des grands nombres appliquée à la suite des différences de martingales  $(L_i)_i$  nous permet de conclure que

$$\frac{1}{n} \sum_i \langle L_i, s_l \rangle \langle L_i, s_m \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \tau_l \delta_{l,m},$$

sachant que  $\mathbb{E}(\langle L_i, s_l \rangle \langle L_i, s_m \rangle) = \tau_l \delta_{l,m} = \psi_{l,m}$ ,  $l, m \geq 1$ . Dans ce cas, les conditions du Théorème 2.16 [20] sont satisfaites et donc, on déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n L_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Gamma,$$

où  $C_\Gamma = C_{L_1}$  est l'opérateur de covariance vérifiant  $\langle C_{L_1}(s_l), s_m \rangle = \psi_{l,m}$ ,  $l, m \geq 1$ .  $\square$

**Preuve du Lemme 4.2.2:** Pour la preuve de ce lemme, nous allons appliquer un critère de convergence faible pour les tableaux de différences de martingales hilbertienne. [48]. Il suffit de montrer la convergence en loi de  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} L_i \\ T_i \end{pmatrix}$  où  $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{i-1}} \begin{pmatrix} L_i \\ T_i \end{pmatrix} = 0$ . De nouveau, on applique le Théorème 2.16 [20], on aura, presque-sûrement

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} (\|L_i\|_S + \|T_i\|_S) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \|L_i\|_S + \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \|T_i\|_S.$$

Alors

$$\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} (\|L_i\|_S + \|T_i\|_S) \right) \leq \mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \|L_i\|_S \right) + \mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \|T_i\|_S \right).$$

Pour  $\eta > 0$ , sachant que

$$\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \|T_i\|_S^2 \right) \leq \mathbb{E}(\|T_1\|_S^2) < \infty,$$

on obtient

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|T_i\|_S > \eta\sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\|T_i\|_S^2 \mathbf{1}_{\|T_i\|_S > \eta\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \|T_i\|_S\right) \rightarrow 0.$$

Aussi, d'après le Lemme 1,

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \|L_i\|_S\right) \rightarrow 0.$$

On considère la base  $\{(s_l, 0), (t_l, 0), l \geq 1\}$  de  $S \times S$  générée respectivement par les vecteurs propres des opérateurs de covariance  $L_1$  et  $T_1$ . Pour la quantité  $r_N^2(V) := \sum_{l=N}^{\infty} (\langle V_1, s_l \rangle_S^2 + \langle V_2, t_l \rangle_S^2)$ ,  $(V_1, V_2) \in S \times S$ , on aboutit à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_N^2\left(\begin{matrix} L_i \\ T_i \end{matrix}\right) > \eta\right) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{l=N}^{\infty} \langle L_i, s_l \rangle_S^2 > \frac{\eta}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{l=N}^{\infty} \langle T_i, t_l \rangle_S^2 > \frac{\eta}{2}\right) \\ &\leq \frac{2}{\eta} \sum_{l=N}^{\infty} (\tau_l + \pi_l) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

où  $(\tau_l, \pi_l)$  sont les valeurs propres de  $L_1$  et  $T_1$ .

D'autre part, on a pour  $i, l, m$  :

$$E[\langle L_i, s_l \rangle_S \langle L_i, s_m \rangle_S] = \tau_l \delta_{lm}, \quad \text{et} \quad E[\langle T_i, t_l \rangle_S \langle T_i, t_m \rangle_S] = \pi_l \delta_{lm},$$

De plus, du fait que les v.a  $L_i$  et  $T_i$  sont non corrélées et que  $C_n - C_{X_0}$  et  $U_n$  sont asymptotiquement indépendantes, cela nous mène à conclure que  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} L_i \\ T_i \end{pmatrix}$  converge en loi vers une v.a gaussienne centrée sur

$S \times S$  ayant comme opérateur de covariance  $C_{\Lambda} = \begin{pmatrix} C_{L_1} & 0 \\ 0 & C_{T_1} \end{pmatrix}$ , où  $C_{L_1}$  et  $C_{T_1}$  sont des matrices infinies diagonales  $(diag(\tau_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $(diag(\pi_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ . De l'égalité  $\sqrt{n}(C_n - C_{X_0}) = \sqrt{n}\bar{L}_n\theta^* + \sqrt{n}\Delta_n$  et puisue,  $\Delta_n$  converge vers 0 en probabilité (voir preuve Lemme 1), on en déduit que  $\sqrt{n} \begin{pmatrix} C_n - C_{X_0} \\ U_n \end{pmatrix}$

converge en loi vers une v.a ganssienne centrée  $\Lambda$  d'opérateur de covariance  $C_\Lambda$ .  $\square$

**Preuve du Lemme 4.2.3:** On pose

$$Z_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_{k+1} \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_k.$$

Nous appliquons le Théorème de la limite centrale pour la suite de différences de martingales hilbertiennes  $(\varepsilon_{k+1} \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_k)$  [41]. Pour  $\eta > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \|\varepsilon_{k+1} \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_k\|_S > \sqrt{n\eta} \right) \leq \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E} \left( \|\varepsilon_1\|^2 \|C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_0\|^2 \mathbf{1}_{\|\varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_0\|_S > \sqrt{n\eta}} \right)$$

donc

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \|\varepsilon_{k+1} \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_k\|_S > \sqrt{n\eta} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En revanche,

$$\mathbb{E} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|\varepsilon_{k+1} \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_k\|_S^2}{n} \right) \leq \mathbb{E} \|\varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_0\|_S^2 < \infty.$$

On obtient donc

$$\left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n} \|\varepsilon_{k+1} \otimes C_{X_0}^{-1} P^{k_n} X_k\|_S \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce qui valide la première condition (relation (3.47)) du résultat de [41]. La seconde condition (relation (3.48) [41]) résulte de la loi des grands nombres pour les différences de martingales. En effet, nous avons

$$\mathbb{E} \langle \langle Z_{n,k}, f_l \rangle Z_{n,k}, f_m \rangle = \beta_l \delta_{l,m} = \psi'_{l,m},$$

pour  $l, m \geq 1$ , ce qui entraîne

$$\sum_{k=1}^n \langle \langle Z_{n,k}, f_l \rangle Z_{n,k}, f_m \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \psi'_{l,m}.$$

Quant à la troisième condition (relation (3.49) [41]), notons  $(\nu_l)_{l \in \mathbb{N}}$ , la

base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur de covariance de  $\Sigma$  (qui est en fait le même opérateur de covariance de la v.a  $\varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1} X_0$ ) défini sur  $S$  par :

$$s \rightarrow C_\Sigma(s) = \mathbb{E}\langle \varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1} X_0, s \rangle \varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1} X_0. \quad (\text{A.2})$$

Sous l'hypothèse  $\mathbb{E} \left\| \varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1} X_0 \right\|_S^2 < \infty$  (l'opérateur est à trace). Posons  $(\beta_l)_{l \in \mathbb{N}}$  les valeurs propres associées aux vecteurs propres  $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ . Pour  $r_N$  défini par la relation (A.1), nous aurons, pour tout  $\eta > 0$

$$\mathbb{P} \left( \sum_{k=1}^n r_N^2(Z_{n,k}) > \eta \right) \leq \frac{1}{\eta} \mathbb{E} \left( r_N^2(\varepsilon_1 \otimes C_{X_0}^{-1} X_0) \right) = \frac{1}{\eta} \sum_{l=N}^{\infty} \beta_l \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Par conséquent  $\sum_{k=1}^n Z_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, C_\Sigma)$  où  $C_\Sigma$  est défini par (A.2).  $\square$

**Preuve du Lemme 4.2.4:** On peut écrire

$$\sqrt{n} f_{n,p}(C_{X_0}) U_n = \sqrt{n} f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0} C_{X_0}^{-1} U_n. \quad (\text{A.3})$$

Nous avons montré dans la première partie, pour la topologie forte des opérateurs sur  $H$  que,

$$\forall x \in H, f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

D'où, pour tout  $s \in S$

$$f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0} s \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} s, \quad (\text{A.4})$$

qui découle du fait que  $\|f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0} s - s\|_S \leq \|f_{n,p}(C_{X_0}) C_{X_0} - I\|_{\mathcal{L}} \|s\|_S$ . Par le Lemme 2, la loi limite des v.a  $\sqrt{n} U_n$  est gaussienne et donc nous devons montrer que

$$\sqrt{n} C_{X_0}^{-1} U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \Sigma. \quad (\text{A.5})$$

En effet, Soit la suite des applications mesurables  $\Phi_n$  définie sur  $S$  par:  $\Phi_n(s) = C_{X_0}^{-1} P^{k_n} s$ . Leur limite est une application linéaire mesurable

---

qu'on notera  $\Phi$  est définie sur son domaine

$$D(\Phi) = \{s \in S : C_{X_0}^{-1}s \in S\},$$

dense dans  $S$ , et pour tout  $s \in S$ , on a

$$\begin{aligned} \|\Phi_n(s) - \Phi(s)\|_S &= \|(C_{X_0}^{-1}P^{k_n}s - C_{X_0}^{-1}s)\|_S \\ &= \sum_{i>k_n} \|C_{X_0}^{-1}s(h_i)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Un résultat de Vakhania [63] montre que si  $\sqrt{n}U_n$  converge vers une v.a gaussienne  $\Lambda_2$  (par le Lemme 2, on aura  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$  et  $\Lambda_2$  est aussi une v.a gaussienne d'opérateur de covariance  $C_{T_1}$ ), alors

$$\Phi(\Lambda_2) = C_{X_0}^{-1}\Lambda_2 = \Sigma,$$

sera aussi gaussine (bien que  $\Phi$  n'est pas continue) à condition que  $\mathbb{P}(\Lambda_2 \in \mathcal{D}(\Phi)) = 1$  est vérifiée, cela reste vrai dès que la condition  $\mathbb{E}\|C_{X_0}^{-1}X_0\|^2 < \infty$  est respectée. Par les relations (A.3) et (A.4), on conclut le résultat.  $\square$



## B Annexe

### Le théorème central limite pour des tableaux de différences de martingales hilbertiennes.

A. Jakubowski

**Théorème B.0.1.** *Soit  $X_{nk}$  une différence de martingale hilbertienne et soit  $\{e_l, l \in \mathbb{N}\}$  une base orthonormée de  $H$ . Si les trois conditions suivantes sont remplies*

$$\mathbb{E}(\sup_{1 \leq j \leq n} \|X_{nj}\|) \rightarrow 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \langle X_{nj}, e_l \rangle \langle X_{nj}, e_m \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \psi_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.2})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} r_N^2(X_{nj}) > \varepsilon \right), \quad \varepsilon > 0, \quad (\text{B.3})$$

où  $r_N^2(X_{nj}) = \sum_{l \geq n} \langle X_{nj}, e_l \rangle^2$ .

Alors il existe une v.a symétrique gaussienne centrée  $G$  d'opérateur de covariance  $C_G$  vérifiant  $\langle C_G e_l, e_m \rangle = \psi_{lm}$  et telle que  $S_n = \sum_{1 \leq j \leq n} X_{nj} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} G$  sur  $H$ .

**Preuve.** Voir [41].

**Taux de convergences pour des suites de v.a dépendantes.**

---

**Corollaire B.0.1.** Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de v.a centrées dans un espace de Banach telles que

$$\mathbb{E}\|X_n + \dots + X_{n+p-1}\| \leq cp^\gamma, \quad p \geq 1, \quad n \geq 1,$$

où  $c > 0$  et  $\gamma \in ]0, 2[$  sont des constantes. Alors, pour tout  $\beta > 0$ ,

$$\frac{n^{\frac{(2-\gamma)}{4}}}{(\log n)^\beta} \left\| \frac{S_n}{n} \right\| \xrightarrow[p.s.]{} 0.$$

**Preuve.** Voir corollaire 2.3 [20].

### Vitesse de convergences des suites de différences de martingales.

**Théorème B.0.2.** Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de différence de martingale hilbertienne telle que  $\|X_i\| \leq b$  p.s pour une constante  $b > 0$  et

$$E^{\mathcal{A}_i - \infty}(\|X_i\|)^2 \leq d_i, \quad i \geq 1,$$

où  $d_1, d_2, \dots$  sont des constantes et  $\mathcal{A}_i$  une filtration de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}$ . Alors, pour tout  $t > 0$  et  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(\|S_n\| \geq t) \leq \left( -\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n d_i} + (2/3)bt \right),$$

et

$$\left\| \frac{S_n}{n} \right\| = O\left( \left( \frac{\log n}{n} \right)^{1/2} \right) \quad p.s.$$

**Preuve.** Voir Théorème 2.14 [20].

## Bibliography

- [1] Allam, A. and Mourid, T. Geometric Absolute regularity of Banach space autoregressive processes. *Statistics and Probability Letters* 60 (2002) 241-252.
- [2] A. Allam. Propriétés de mélange des processus linéaires généraux et estimation d'un ARHA (1). Thèse de Doctorat. Université Abou Bekr Belkaïd, Tlemcen, 2007.
- [3] A. Allam, T. Mourid, T. Covariance Operators estimation of of a functional autoregressive process with random coefficients. *Statist. Probab. Lett.* Vol 84, (2014) pp. 1-8.
- [4] A. Allam, T. Mourid, Optimal rate for covariance operator estimators of functional autoregressive processes with random coefficients, *Journal of Multivariate Analysis.* 169 (2019) 130-137.
- [5] O. D. Anderson, *Analyse et prévision des séries chronologiques : l'approche Box-Jenkins.* Butterworth. Série R. 1976.
- [6] G. Aneiros, R. Cao, R. Fraiman, C. Genest, P. Vieu. Recent advances in functional data analysis and high-dimensional statistics, *Journal of Multivariate Analysis.* 170 (2019) 3-9.
- [7] A. Antoniadis, T. Sapatinas. Wavelets methods for continuous time prediction using Hilbert-valued autoregressive processes. *J. Multivariate Anal.* 87 (2003) 133-158.

- 
- [8] A. Antoniadis. A functional Wavelet-Kernel approach for continuous time prediction. ccsd-00004891, version 1-10, 2005.
- [9] A. Antoniadis, E. Paparoditis, T. Sapatinas, T. A functional Wavelet-kernel approach for continuous time Prediction. *J. R. Statist. Soc. B*, 68, Part 5 (2006) pp. 837-857.
- [10] A. Aue, Testing for parameter stability in RCA(1) time series, *Journal of Statistical Planning and Inference*. 136 (2006) 3070-3089.
- [11] A. Aue, L. Horvath, J. Steinebach, Estimation in nonstationary random coefficient autoregressive models, *Journal of Time Series Analysis*. 30 (2006) 395-416.
- [12] K. Berhoune, N. Bensmain, Sieves estimator of functional autoregressive process, *Statistics and Probability Letters*. 135 (2018) 60-69.
- [13] P. Bernard, *Analyse de Signaux Physiologiques*, Memoire Univ. Cathol., Angers, 1997.
- [14] P. Besse, H. Cardot, Approximation spline de la prévision d'un processus fonctionnel autorégressif d'ordre 1, *Canadian Journal of Statistics*. 24 (1996) 467-487.
- [15] P. Besse, H. Cardot, D. Stephenson, Autoregressive Forecasting of Some Functional Clamatic Variations, *Scandinavian Journal of Statistics*. 27 (4) (2003) 673-687.
- [16] W. Biao, M. Woodroffe. Martingale Aproximations for sums of stationnary processes. *The Annals of Probability*, Vol. 32(No)2004 1674–1690.
- [17] S. Boukhiar, T. Mourid, Limit Theorems for Hilbertian Autoregressive Processes with Random Coefficients, *Les Annales de l'ISUP*, vol. 62 (2018) 129–142.

- 
- [18] S. Boukhiar, T. Mourid, Almost sure Convergence of the Resolvent Estimators for Hilbertian Autoregressive Processes, *Les Annales de l'ISUP*, vol. 63 (2019) 129–142.
- [19] S. Boukhiar, T. Mourid, Resolvent estimators for functional autoregressive processes with random coefficients, *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 189 (2021) 129–142.
- [20] D. Bosq, *Linear processes in function Spaces*, Springer-Verleg New York, Inc, 2000.
- [21] P. Bougerol, N. Picard, Strict stationarity of Generalized Autoregressive Processes, *The Annals of Probability*. 20 (4) (1992) 1714-1730.
- [22] A. Brandt, The stochastic equation  $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$  with stationary coefficients, *Adv.Appl. Probab.* 18 (1986) 211-220.
- [23] A. Cavallini, et al., Nonparametric prediction of harmonic levels in electrical networks. in: *Proceedings of IEEE ICHPS VI Bologna*, (1994) 165-171.
- [24] A. Cuevas, A partial overview of the theory of statistics with functional data, *Journal of Statistical Planning and Inference*. 147 (2014) 1-23.
- [25] H. Cardot, Nonparametric estimation of smoothed principal components analysis of sampled noisy functions, *Journal of Nonparametric Statistics*. 12 (4) (2000) 503-538.
- [26] J. Cugliari, *Conditional autoregressive Hilbertian processes*, 2013. arxiv:1302.3488.
- [27] J. Damons, S, Guillas, *Modelization for Functionnal AutoRegressive processes*. the far Package Version 0.6-2 License: LGPL-2.1, 2005.
- [28] J. Davidson. *Stochastic Limit Theory*, *Advanced Texts in Econometrics* Oxford University Press, New York, 2002.

- 
- [29] K. Djerfi, F. Madani, I. Ouassou, Admissibility results under some balanced loss functions for a functional regression model, *Comptes Rendus Mathématique*. 375 (2019) 912-916.
- [30] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators. I*, Wiley Interscience, 1958.
- [31] M. Febrero-Bande, P. Galeano, W. Gonzalez-Manteiga, Functional principal component regression and functional partial least-squares regression: An overview and a comparative study, *Int. Stat. Rev.* 85 (2017) 61-83
- [32] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric Modelling for Functional Data*, Springer-Verlag, New-York, 2006.
- [33] T. Fink, J.P. Kreiss, Bootstrap for random coefficient autoregressive models, *J. Time Ser. Anal.* 34 (2013) 646-667.
- [34] A. Goia, P. Vieu, Some advances on semi-parametric functional data modelling, In: E.G. Bongiorno, E. Salinelli, A. Goia, P. Vieu (Eds.), *Contributions in Infinite-Dimensional Statistics and Related Topics*, Societa Editrice Esculapio, Bologna. (2014) 135-140.
- [35] A. Goia, P. Vieu, An introduction to recent advances in high infinite dimensional statistics, *JMVA*. 146 (2016) 1-6.
- [36] S. Guillas, Doubly stochastic Hilbertian processes, *Journal of Applied Probability*. 39 (3) (2002) 566-580.
- [37] U. Holst, G. Lindgren, J. Holst, M. Thuvellsholmen, Recursive estimation in switching autoregressions with a Markov Regime, *J. of Time Series Analysis*. 15 (5) (2008) 489-505.
- [38] S. Hörmann, L. Horváth, L. Reeder, R., A functional version of the ARCH model, *Econometric Theory*. 29 (2013) 267-288.
- [39] L. Horváth, P. Kokoszka, *Inference for functional data with Application*, Springer, New York, NY, USA, 2012.

- 
- [40] L. Horváth, G. Rice, An introduction to functional data analysis and a principal component approach for testing the equality of mean curves, *Rev. Mat. Complut.* 28 (2018) 505-548.
- [41] A. Jakubowski, Tightness Criteria for Random Measures with Application to the Principle of Conditioning in Hilbert Space, *Probab.Math.Stat.*, volume 9,(1988) 95–114.
- [42] V. Kargin, A. Onatski, Curve forecasting by functional autoregression, *Journal of Multivariate Analysis.* 99 (2008) 2508-2526.
- [43] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* 132, Springer-Verlag, 1976.
- [44] A. Laukaitis, Functional data analysis for cash flow and transactions intensity continuous-time prediction using Hilbert-valued autoregressive processes, *Eur J Oper Res.* 185 (2008) 1607-1614.
- [45] H. Lian, G. R. Li, Series expansion for functional sufficient dimension reduction, *Journal of Multivariate Analysis* 124, 150-165.
- [46] Y. Li, L. X. Zhu, Asymptotic for sliced average variance estimation, *Annals of Statistics* 42 (6),699-709.
- [47] N. Ling, P. Vieu, Nonparametric modelling for functional data: selected survey and tracks for future, *Statistics.* 52:4 (2018) 934-949.
- [48] A. Mas, Normalité asymptotique de l'estimateur empirique de l'opérateur d'autocorrélation d'un processus ARH(1). *C.R. Acad.Sci.* 329 (I) (1999) 899-902.
- [49] A. Mas, B. Pumo, The ARHD model. *Journal of Statistical Planning and Inference.* 137 (2) (2007) 538-553.
- [50] F. Merlevede. On a maximal inequality for strongly mixing random variables in Hilbert spaces. Application to the compact law of the iterated logarithm. *Annales de l'ISUP* 52 (1-2)(2008), 47-60.

- [51] F. Mokhtari, T. Mourid, Prévision des processus ARC(1) via le prédicteur de Parzan.Exemples et simulations. Les Annales de l'ISUP. 52 (2) (2008) 81-90.
- [52] T. Mourid, Processus autorégressif hilbertien   coefficients aléatoires, Les Annales de l'ISUP. 48 (3) (2004) 79-85.
- [53] T. Mourid, N. Bensmain, Sieves estimator of the operator of a functional autoregressive process, Statistics and Probability Letters. 76 (1) (2006) 93-108.
- [54] D.N. Nicholls, B.G. Quin, Random Coefficient Autoregressive models: An Introduction, Lecture Notes in Statistics 11, Springer, New York, 1982.
- [55] S. Omatu, H. Nagamine, T. Soeda. (1979). Optimal Filter for a discret-time distributed parameter system and its application to environmental data processing. In Application of Information and Control Systems, Vol.III.2nd International. Conf. Inform.Sci. Systems, Patras, Greece, 1979.
- [56] B. Pumo. Prévision d'un processus autorégressif   temps continu. Thèse de doctorat. Université Paris 6, 1993.
- [57] B. Pumo. Prediction of continuous time processes by  $C(0,1)$ -valued autoregressive process. Statist.Inf.Sthoc.Proc.I. (1998) 139-153.
- [58] M. Rachdi, A. Laksasi, J. Demongeot, A. Abdali, F. Madani, Theoretical and practical aspects of the quadratic error in the local linear estimation of the conditional density for functional data, Computational Statistics & Data Analysis. (73) (2014) 53-68.
- [59] J. Ramsay, B.W. Silverman, Applied functional data analysis: Methods and case studies, Springer-Verlag, New-York, 2002.
- [60] J. Ramsay, B. Silverman, Functional Data Analysis, second ed., Springer, New York, 2005.



- [61] D. Tjøstheim, Non-linear time series: a selective review, *Scandinavian Journal of Statistics*. (21) (1994) 97-130.
- [62] P. Vanecek. Rate of convergence for a class of RCA estimators, *Kybernetika* 42 (6)(2006)699-709.
- [63] N. Vakhania, Canonical Factorization of Gaussian Covariance Operators and Some of Its Applications, *Theory. Probab. Appl.* 38 (3) (1991) 498-505.
- [64] S. Wang, W. Jank, G. Shmueli. Explaining and Forecasting Online Auction Prices and Their Dynamics Using Functional Data Analysis. *Journal of Business and Economic Statistics*. 26(3) (2008) 144-160.
- [65] O. Zhao, M. Woodroffe. On Martingale approximations, *The Annals of Applied Probability*, Vol. 18(5)(2008) 1831–1847.

**Résumé** : dans cette thèse, nous considérons la classe d'estimateurs résolvants des coefficients décrivant l'équation des processus autorégressifs fonctionnels. Sous certaines conditions de régularisation, nous obtenons des résultats limites : convergence en probabilité, bornes exponentielles, convergence presque-sûre, ainsi que la normalité asymptotique des estimateurs.

Des études numériques et des simulations des données réelles sont réalisées et valident bien l'efficacité des prédicteurs statistiques.

**Mots clefs** : Processus autorégressif fonctionnel- Coefficient de corrélation aléatoire- Opérateur de covariance- Opérateur de covariance croisée.

**Abstract**: in this work, we consider the class of resolvent estimators of the correlation operator ruling the functional autoregressive process. Under mild conditions, we establish the convergence in probability, exponential bounds, almost sure convergence and limiting law of the estimators.

Numerical studies and real data simulations are made and adequately validate the efficiency of the resolvent predictors.

**Keywords**: Functional autoregressive process- Random coefficients- Covariance operator- Cross covariance operator.

**ملخص**. في هذه الأطروحة نعتبر فئة تقدير الحل لمعامل الارتباط المعرف لمعادلة العمليات الوظيفية. على أساس شروط التسوية نتحصل على نتائج نهايات التقارب المحتمل، التفاوت الاسي، التقارب الأكيد إضافة إلى التقارب الطبيعي. نجسد نظريات التنبؤ عن طريق محاكاة رقمية ذاتية وأخرى لبيانات حقيقية مثبتة فعالية التنبؤ الإحصائي.

**الكلمات المفتاحية**. انحذار ذاتي في فضاء الدوال المستمرة-معامل الارتباط العشوائي-مشغل التباين-مشغل التباين المتبادل.