

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

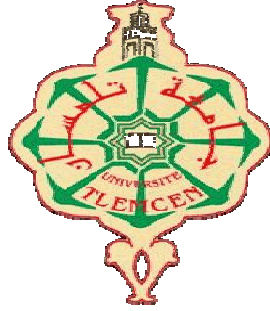
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd - Tlemcen -

Faculté de TECHNOLOGIE



## **MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

**En** : Génie Mécanique

**Spécialité** : Construction Mécanique

**Par** : HADJOUI Abdelillah

### **Sujet**

**Analyse du Comportement Vibratoire d'un Nano Rotor en FGM par la Méthode  
des Eléments Finis en Quadrature Différentielle - DQFEM**

Soutenu publiquement, le 04 / 07 / 2021, devant le jury composé de :

M. Guezzen Samir	MC B	Univ. Tlemcen	Président
M. Bensaid Ismail	MC B	Univ. Tlemcen	Directeur de mémoire
M. Saimi Ahmed	MC B	ENSH Blida	Co-directeur de mémoire
M. Belkaid Mohamed	MA A	Univ. Tlemcen	Examineur

## DEDICACES

Je remercie Dieu tout puissant qui m'a permit d'arriver à ce but.

Chaleureusement je dédie ce modeste travail

A ceux qui m'ont éclairé le chemin de la sagesse et m'ont offert tout ce qui est cher, et  
comblé le cœur dans la vie avec une immense générosité et une tendre affection.

A mes sœurs et mon frère, à ma belle sœur et mon neveu Abdelhamid, à mes nièces et mes  
oncles et tantes.

Un grand remerciement à mes très chers grands parents et mes chers parents en témoignage  
pour leur amour et leur sacrifice sans limite à qui je souhaite la bonne santé et que Dieu me  
les garde.

Et à tous mes amis

## REMERCIEMENTS

Mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à Mr Saimi Ahmed, Maître de Conférence Classe B à l'Ecole National Supérieur de l'Hydraulique de Blida, Mr Bensaid Ismail, Maître de Conférence Classe B de l'université Abou Bakr Belkaid de Tlemcen et Mr. Hadjoui Abdelhamid, professeur à l'université Abou Baker Bel Kaid Tlemcen, pour m'avoir encadré tout en m'accordant leur confiance et apporté des conseils précieux.

Mes remerciements aussi à Mr Guezzen Samir, Maître de Conférence Classe B de l'université Abou Bakr Belkaid de Tlemcen, pour avoir accepté d'être président du jury de soutenance.

Enfin, je suis très heureux que Mr Belkaid Mohamed, Maître de Conférence Classe B à l'Université à l'université Abou Bakr Belkaid -Tlemcen, me fasse l'honneur d'examiner ce travail.

## Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
ملخص	iii
Liste des symboles	iv
Liste de figures	vi
Liste de Tableaux	viii
INTRODUCTION GENERALE	1
1. Introduction	2
2. Objectif du projet de fin d'étude	4
3. Plan de la thèse :	4
CHAPITRE I REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	5
I.1. Nano rotor :	6
I.2. Matériaux FG :	7
I.3. La méthode des éléments finis :	12
I.4. La méthode différentielle quadratique des éléments finis :	12
CHAPITRE II MODELE DU FG NANO-ROTOR	15
II.1. Introduction :	16
II.2. La dynamique des rotors :	17
II.2.1. Les nano rotors :	17
II.2.2. Historique :	17
II.2.3. Premier nanomoteur :	18
II.2.4. Les matériaux fonctionnellement gradués :	18
II.3. Hypothèses de modélisation :	19
CHAPITRE III MODELISATION PAR LA METHODE DQFEM	23
III.1. Introduction :	24
III.1.1 MEF :	24
III.1.2 DQM :	24
III.1.3 DQFEM :	24
III.2 Application de la DQFEM	25

III.2.1	La règle quadrature de Gauss – Lobatto	26
III.2.2	Equation adimensionnelle du mouvement	30
CHAPITRE IV RESULTATS ET INTERPRETATION		32
IV.1	Introduction	33
IV.2	Convergence et validation des résultats :	34
IV.2.1	Convergence	34
IV.2.2	Validation des résultats	36
IV.3	Etude de cas	38
IV.3.1	Conditions aux limites :	39
IV.3.2	Diagramme de Campbell :	39
IV.3.3	Volume fraction et constante non locale	42
IV.3.4	Rapport L/D et constante non locale	43
IV.3.5	Différents matériaux	47
IV.4	Conclusion	51
CONCLUSION GENERALE		52
Références Bibliographiques		55

# Résumé :

Dans ce travail, on étudie la dynamique des nano-arbre en rotation, en matériaux FG (Les matériaux fonctionnellement gradués), en utilisant la méthode de la quadrature différentielle associée à la méthode des éléments finis (DQFEM). La théorie d'Euler Bernoulli est appliquée aux nano-poutres, pour déterminer les énergies de déformation et cinétique. L'effet d'échelle est pris en compte en se basant sur les relations constitutives non locales d'Eringen, et les équations du mouvement des nano - rotor sont déterminées en utilisant le principe de Hamilton.

Nous élaborons un programme de calcul des fréquences propres, des fréquences propres adimensionnelles et le traçage des diagrammes de Campbell. Après validation du programme, Plusieurs études de cas sont faites pour déterminer les influences des paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement vibratoire du nano-rotor. Parmi les paramètres étudiés nous citons les conditions aux limites, les types de matériaux FG, l'indice  $k$  de la fonction de puissance du FGM, les différents rapports de la longueur/largeur.

Mots clés : nano-rotor, DQM, FGM, fréquences propres, paramètres de fréquences, vitesses critiques, diagramme de Campbell.

# Abstract :

In this work, the dynamic behavior of rotating nano-shafts in FG (functionally graduated materials) materials is studied using the differential quadrature method associated with the finite element method (DQFEM). Euler Bernoulli's theory is applied to nano-beams, to determine the kinetics and shear energy. The scale effect is taken into account based on Eringen non-local constitutive relationship, and the equations of nano-rotor motion are determined using the Hamilton principle.

A program to determine the eigen frequencies, calculating clean frequencies, the non-dimensional frequencies and plot the Campbell's diagrams is developed. After validation of the program, several case studies are made to determine the influences of geometric and mechanical parameters on the vibratory behavior of the nano-rotor. Among the studied parameters, we quote the boundary conditions, the types of FG materials, the k index of the power function of the FGM, the different length / width ratios.

Keywords : Nano-rotor, DQM, FGM, critical speeds, Campbell diagram.

## ملخص:

في هذا العمل ، تمت دراسة السلوك الديناميكي لأعمدة من مواد FG (المواد المتدرجة وظيفياً) باستخدام طريقة التربيع التفاضلي المرتبطة بطريقة العناصر المحدودة (DQFEM). يتم تطبيق نظرية أويلر برنولي النانو أسطوانة لإيجاد الطاقة الحركية وطاقة التشوه. تأثير المقياس يؤخذ في الاعتبار على أساس العلاقة التأسيسية غير المحلية لإرينجين ، ويتم تحديد معادلات حركة النانو أسطوانة باستخدام مبدأ هاملتون.

تم إنشاء برنامج لتحديد ترددات والترددات بغير الأبعاد ورسم مخططات كامبل. بعد التحقق من صحة البرنامج ، تم إجراء العديد من دراسات لتحديد تأثيرات الخصائص الهندسية والميكانيكية على السلوك الاهتزازي للدوار النانوي. من بين الخصائص المدروسة ، نقتبس شروط الحدود ، أنواع مواد FG ، مؤشر  $k$  لفتون الدالة الأسية ، ونسب الطول / العرض المختلفة.



## Liste des symboles

$u$	Déplacement suivant la direction $x$ .
$v$	Déplacement suivant la direction $y$ .
$w$	Déplacement suivant la direction $z$ .
$X$	Axe de rotation
$Y, Z$	Axe de la section transversale perpendiculaires à $X$
$y, z$	Coordonnées mesurées à partir du plan médian du rotor.
$N$	Force normale.
$M_y$	Moment de flexion par rapport à l'axe $y$ .
$M_z$	Moment de flexion par rapport à l'axe $z$ .
$\delta$	Travail virtuel.
$U$	Energie de déformation.
$K$	Energie de cinétique.
$\varepsilon_{xx}$	Contrainte axiale.
$\sigma_{xx}$	Déformation normale.
$I_1$	Moment d'inertie par rapport à $x$
$I_2$	Moment d'inertie par rapport à $y$
$L_i$	Polynôme de Lagrange.
$u_i, v_i, w_i$	Déplacements des points de quadrature de Gauss Lobatto.
$A_{ij}^{(n)}$	Coefficient de pondération de dérivation de Gauss Lobato
$C_j$	Coefficient de pondération de l'intégration Gauss-Lobatto.
$l_e$	Longueur de l'élément de poutre.
$\lambda^2$	Paramètre de fréquence.
$\mu^2$	Paramètre de non local.
$\gamma$	Paramètre de vitesse.
$\Gamma$	Paramètre de longueur.
$E(z)$	Module de Young.
$\rho(z)$	Masse volumique.
$r_o$	Rayon externe du rotor.
$r_i$	Rayon interne du rotor.
$k$	Indice de la graduation Power Law du volume fraction.
$D$	Diamètre moyen de l'arbre
$\Omega$	Vitesse de rotation en rd/s

$[M]$	Matrice masse.
$[K]$	Matrice de rigidité.
$[G]$	Matrice de l'effet gyroscopique.
$\Sigma_{ij}$	Tenseur de contrainte.
$[ ]^T$	Transposée d'une matrice.
$( \dot{\ } )$	$\frac{d}{dt}$ première dérivée par rapport au temps
$( \ddot{\ } )$	$\frac{d^2}{d^2t}$ deuxième dérivée par rapport au temps

## Liste de figures

Figure 1.1	structure du matériau	Page 8
Figure 1.2	loi de puissance	Page 9
Figure 1.3	loi exponentielle	Page 10
Figure 1.4	Loi sigmoïde	Page 10
Figure 1.5	La composition du FGM	Page 11
Figure 2.1	le nano arbre FG étudié	Page 16
Figure 2.2	modèle de l'arbre	Page 16
Figure 4.1	Organigramme de calcul	Page 34
Figure 4.2	Convergence en fonction du nombre de points d'échantillonnage	Page 36
Figure 4.3	convergence (points d'échantillonnage, nombre des éléments finis)	Page 37
Figure 4.4	les premières fréquences pour les trois conditions aux limites	Page 40
Figure 4.5	paramètres de fréquences en fonction de paramètres de vitesse pour différents paramètres non locaux	Page 41
Figure 4.6	fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction pour différents paramètres non local	Page 43
Figure 4.7	Paramètre de fréquence en fonction de l'indice de volume fraction pour différents paramètres non local	Page 43
Figure 4.8	Fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local ( $k=0$ , S-S)	Page 45
Figure 4.9	Paramètre de fréquence en fonction de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local ( $k=0$ , S-S)	Page 46

Figure 4.10	fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local ( $k=0.5$ , S-S)	Page 47
Figure 4.11	Paramètre de fréquence en fonction de rapport longueur diamètre pour différents paramètre non locale ( $k=0.5$ , S-S)	Page 48
Figure 4.12	Paramètre de fréquence en fonction de paramètre non local pour différents types de mélange FG ( $k=0.5$ , S-S) avec une vitesse de rotation nul	Page 49
Figure 4.13	Fréquences naturelles en fonction de paramètre non locale pour différents types de mélange FG ( $k=0.5$ , S-S) avec une vitesse de rotation nul	Page 49
Figure 4.14	Paramètre de fréquence en fonction de paramètre non local pour différents types de mélange FG ( $k=0.5$ , S-S) avec un paramètre de vitesse égale à 100	Page 50
Figure 4.15	Fréquences naturelles en fonction de paramètre non local pour différents types de mélange FG ( $k=0.5$ , S-S) avec un paramètre de vitesse égale à 100	Page 50

## Liste de Tableaux

Tableau 1.1	Propriétés du FGM	Page 9
Tableau 4.1	Convergence en fonction du nombre de points d'échantillonnage	Page 35
Tableau 4.2	Convergence en fonction du nombre de points d'échantillonnage et des éléments finis	Page 36
Tableau 4.3	Paramètres physiques et géométriques du rotor	Page 38
Tableau 4.4	Validation 1	Page 38
Tableau 4.5	Validation 2	Page 38
Tableau 4.6	Paramètres physiques et géométriques du rotor	Page 40
Tableau 4.7	paramètres de fréquences en fonction de paramètres de vitesse pour différents paramètres non locaux	Page 41
Tableau 4.8	fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction pour différents paramètres non local	Page 42
Tableau 4.9	Fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local (k=0, S-S)	Page 44
Tableau 4.10	Paramètre de fréquences en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local (k=0, S-S)	Page 45
Tableau 4.11	Fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local (k=0.5, S-S)	Page 46
Tableau 4.12	Paramètre de fréquences en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local (k=0.5, S-S)	Page 47
Tableau 4.13	Paramètres physiques et géométriques du rotor	Page 48

# INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
1. Introduction :.....	2
2. Objectif du projet de fin d'étude.....	4
3. Plan de la thèse : .....	4

## 1. Introduction :

Les éléments structurels tels que les poutres, les rotors, en micro et nano échelle sont de plus en plus utilisés dans les industries automobile, aéronautique, spatiale, marine, civil, ferroviaire, médicale, nucléaire ou encore sportive. Les lois de comportement des nano structures sont régies par les théories non-locales, qui, contrairement aux théories classiques, contiennent un paramètre de longueur interne de matériau qui représente la dépendance de l'effet d'échelle. Il existe principalement deux différentes approches pour la modélisation théorique des matériaux nanostructures : les approches atomistiques et la mécanique des milieux continus.

Les effets d'échelles sont importants dans le comportement mécanique des nanostructures dans lesquelles les dimensions sont faibles et comparables à des distances moléculaires. Ces effets peuvent être déterminés à l'aide de la mécanique des milieux continus qui dépend de la théorie de déformation, modifiant la théorie de la contrainte. Les théories de l'élasticité non locale contiennent des paramètres d'échelle qui peuvent capter des effets de taille à l'échelle nanométrique.

Dans ce travail, nous utilisons la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen est utilisé pour l'étude du comportement vibratoire d'un nano rotor en FGM (Functionally Graded Materials en anglais).

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM représentent une classe particulière des composites.

Les matériaux composites sont constitués de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances sont supérieures à celles des composants pris séparément. Ils ont nombreux avantages fonctionnels comme la légèreté, la résistance mécanique et thermique, etc... Ils permettent aussi d'augmenter la durée de vie des structures.

Les matériaux FG sont caractérisés par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle sur l'épaisseur du matériau conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés. Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels.

Un des principaux avantages des matériaux FG est la résistance aux délaminages qui représente une rupture inter-laminaire. Ce mécanisme de rupture se caractérise par un décollement ou une décohésion entre les plis du stratifié.

Le nano-rotor étudié est du type d'Euler Bernoulli et la modélisation est faite par la combinaison des méthodes de la différentielle quadratique et des éléments finis classique la DQFEM. La méthode des éléments finis permet de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles (ou EDP) qui représente un comportement mécanique d'un système, en discrétisant la structures. La méthode de la différentielle quadrature DQM est généralement utilisée pour résoudre des équations aux dérivées ordinaires et partielles. Elle peut être essentiellement caractérisée par les valeurs des dérivées à chaque point de grille sous forme de sommes linéaires pondérées approximativement des valeurs de fonction à tous les points de grille dans le domaine considéré.

Un programme, pour le calcul des fréquences propres, des fréquences propres adimensionnelles du nano-rotor et le traçage des diagrammes de Campbell pour la détermination des vitesses critique est élaboré sous Matlab. Après validation du programme, nous étudions les influences des conditions aux limites, les types de matériaux FG, l'indice  $k$  de la fonction de puissance du FGM, les différents rapports de la longueur/largeur sur le comportement vibratoire du nano-rotor.



## 2. Objectif du projet de fin d'étude

L'objectif de ce projet de fin est multiple. Le principal but est de déterminer les influences des paramètres géométriques et physiques sur le comportement vibratoire du nano-rotor.

Il permet :

- De déterminer le comportement des nanostructures en FGM.
- L'application des méthodes de modélisation des structures, ainsi que la combinaison de méthodes de modélisation.
- Savoir analyser et interpréter les résultats pour une optimisation dans la conception et l'exploitation de ces nanostructures.

A travers cette étude, nous envisageons aussi l'apprentissage d'une méthodologie de recherche.

## 3. Plan du mémoire :

Après une introduction générale, le premier chapitre est réservé à la recherche bibliographique qui donne un état de l'art sur la technologie des nanostructures, les structures en FGM et les méthodes de modélisation notamment les méthodes des éléments finis et de la quadrature différentielle. Le deuxième chapitre traite de la dynamique des rotors et des nano-rotors en tenant compte de l'effet d'échelle par la théorie non locale d'Eringen. Les énergies nécessaires à la détermination des équations du mouvement sont détaillées dans ce chapitre. Dans le troisième chapitre nous appliquons la DQFEM pour la détermination des équations du mouvement du nano-rotor, en utilisant le principe de Hamilton. Le quatrième chapitre est réservé aux résultats et interprétations ; après avoir validé le programme élaboré plusieurs études sont faites pour déterminer l'influence des paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement dynamique du nano-rotor.

Nous terminons par une conclusion et des perspectives.

# CHAPITRE I

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

<b>CHAPITRE I REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>5</b>
I.1. Nano rotor : .....	6
I.2. Matériaux FG : .....	7
I.3. La méthode des éléments finis :.....	12
I.4. La méthode différentielle quadratique des éléments finis :.....	12

## I.1. Nano rotor :

Les nano structures sont de plus en plus utilisées en ingénierie, sciences physiques, médecine, et leur technologie se développe très rapidement. Dans l'industrie des nano structures, il existe un grand nombre de mécanismes comme les nano actionneurs, les systèmes nano mécaniques. Les nano rotors sont des structures, dont les applications se répandent très rapidement dans les branches de l'ingénierie et de la science.

Les nano structures multicouches offrent des opportunités pour l'amélioration des propriétés mécanique, thermiques, optiques, magnétiques et autres propriétés fonctionnelles.

Le premier nano-moteur à nanotubes a été construit par une équipe de l'Université de Californie à Berkeley, dirigé par Zettl [1] .

Des études expérimentales et théoriques ont été réalisées par des chercheurs pour déterminer le comportement mécanique de ces nano structures. Les résultats expérimentaux qui donnent des résultats précis, sont assez coûteux et difficiles à réaliser, d'où l'importance d'élaborer des modèles mathématiques pour prendre en considération les effets d'échelle nanométrique.

Parmi les approches développées nous citons la théorie de l'élasticité non locale initiée par Eringen [2], [3] a été largement utilisée par les chercheurs.

Selon cette théorie, les contraintes en un point dépendent des contraintes dans tout le corps.

Les résultats de simulations expérimentales et atomistiques montrent que l'« effet de taille » joue un rôle important dans les propriétés mécaniques [4].

La théorie de l'élasticité non locale a été appliquée par Peddieson [5] pour étudier la poutre non locale d'Euler-Bernoulli. [6]A étudié la flexion des nano-poutres basée sur la théorie de l'élasticité non locale. [7]A reformulé diverses théories non locales pour la flexion, le flambage et la vibration des poutres et des solutions analytiques pour les nano-poutres simplement appuyées ont également été présentés. Xu [8]A appliqué une approche d'équation intégrale pour étudier l'effet non local sur la vibration transversale libre des nano et micro poutres. [9]ont obtenu des solutions analytiques pour la vibration d'une poutre en utilisant la théorie non locale des nano-poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. [10]

ont appliqué les polynômes de Chebyshev dans la méthode de Ritz pour étudier le comportement de flambage de nano-poutres de Timoshenko. Ensuite, les auteurs ont aussi utilisé la même procédure dans l'analyse des vibrations des nano-poutres de Timoshenko [11] pour trouver les paramètres de fréquence. [12] Ont étudié la vibration transversale libre d'Euler-Bernoulli fissuré des nano-poutres basées sur le modèle d'élasticité non locale. La vibration transversale non locale des systèmes à double nano-poutres a été analysée par [13]. Certaines des études ont été effectuées en utilisant la méthode des éléments finis [14] et [15] et aussi en utilisant la méthode de quadrature différentielle [16] et (T. Murmu a. S., 2010). [17] a utilisé la caractéristique limite des polynômes orthogonaux dans la méthode Rayleigh-Ritz pour étudier la vibration libre des nano-poutres.

La plupart des structures nanométriques sont en matériaux composites [4]

La modélisation de ces nanostructures est la FEM [18], et la DQM [19].

## I.2. Matériaux FG :

Les matériaux composites sont actuellement très utilisés dans l'industrie moderne. Ils possèdent des avantages fonctionnels comme la légèreté, la bonne résistance mécanique, la bonne résistance thermique etc...

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM (Functionally Graded Materials en anglais) représentent une classe particulière des composites, Ils sont caractérisés par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle sur l'épaisseur du matériau conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés [20]. Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels. Ils sont caractérisés par des propriétés qui varient sans interruption dues au changement continu de la composition, dans leur morphologie et leur structure cristalline. La figure 1.1 représente la variation des matériaux d'une structure FGM par rapport à une structure composite à couches.

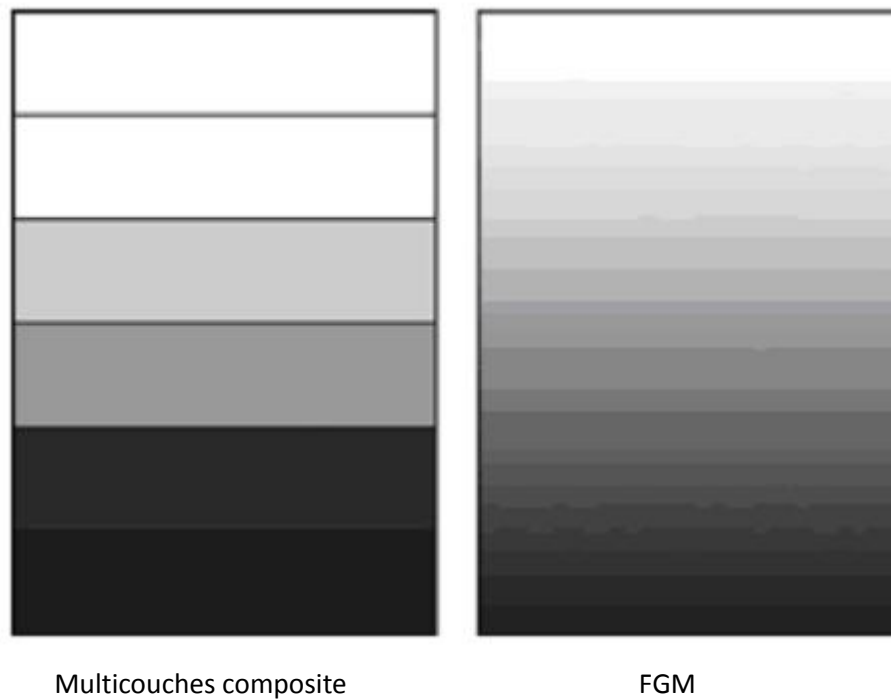


Figure 1.1 : structure du matériau

L'idée fut émise en 1984 par [21]Et al. (National Aerospace Laboratory of Japan) Il est présentée comme une tentative pour résoudre les problèmes posés par la préparation de matériaux de barrière thermique destinés aux structures spatiales et aux réacteurs de fusion. Cependant, l'aventure débute réellement autour de l'année 1985 lorsque d'autres pays (USA, Royaume-Uni) ressentent à leur tour la nécessité d'aborder l'ère spatiale en concevant chacun unilatéralement un avion ayant la possibilité de naviguer à la fois dans l'espace et transitoirement dans l'atmosphère terrestre [22].

Les principales propriétés des matériaux FGM sont :

Tableau 1.1: Propriétés du FGM

Céramique	Face à haute température	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bonne résistance thermique.</li> <li>• Bonne résistance à l'oxydation.</li> <li>• Faible conductivité thermique.</li> </ul>
Continuité du matériau	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Élimination des problèmes de l'interface.</li> <li>• Relaxation des contraintes thermiques.</li> </ul>
Métal	Face à basse température	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bonne résistance mécanique.</li> <li>• Conductivité thermique élevée.</li> <li>• Très bonne ténacité.</li> </ul>

Les matériaux FG qui représentent une classe particulière des composites ont des volumes de fraction qui varient continuellement dans une ou plusieurs directions.

Les trois principales fonctions de variation des propriétés sont :

- La loi de puissance :

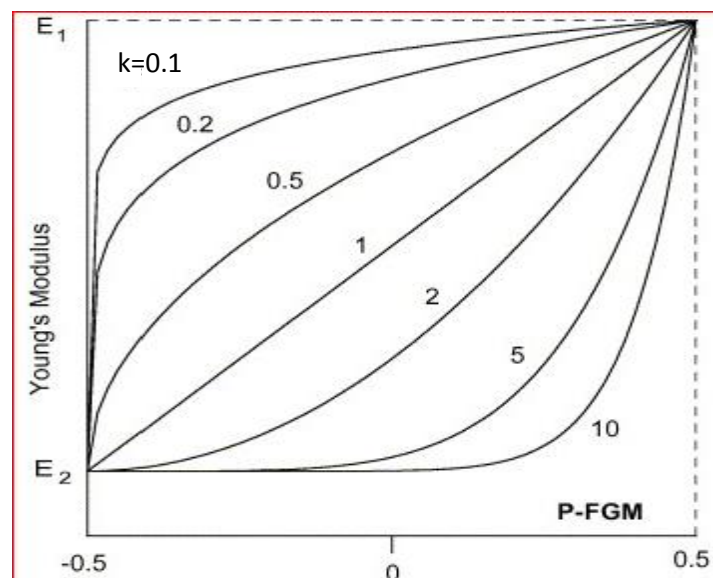


Figure 1.2 : loi de puissance

- La loi exponentielle

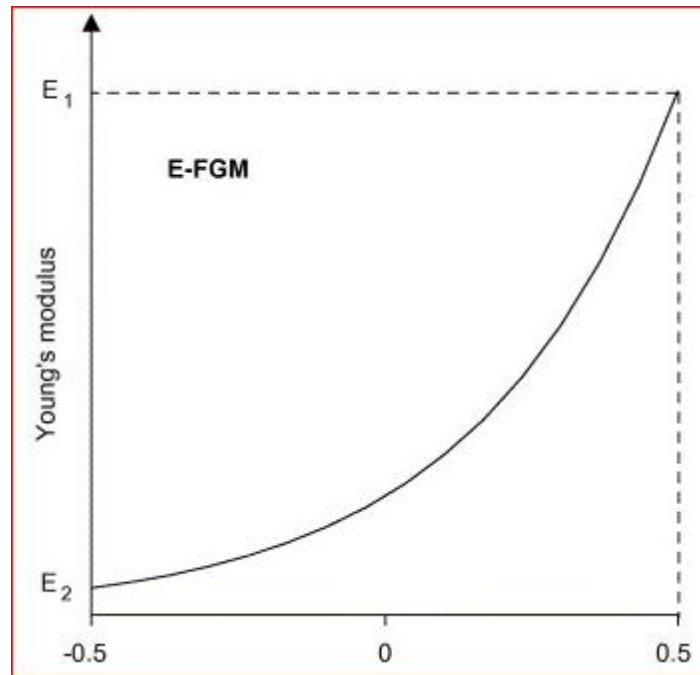


Figure 1.3 : Loi exponentielle

- La loi sigmoïde

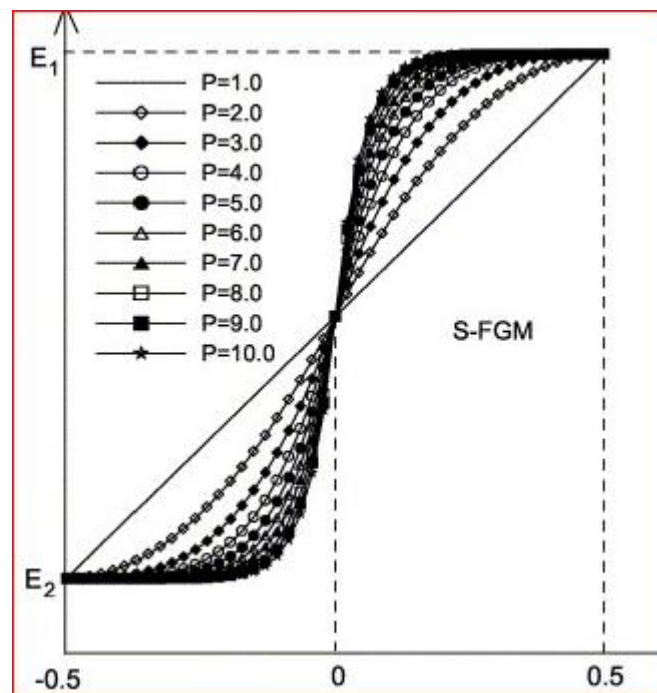


Figure 1.4 : Loi sigmoïde

Dans le nano rotor étudié, la fraction volumique variant suivant le rayon est donnée par la loi de puissance suivante :

$$V_f = \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^k \quad (1-1)$$

Les propriétés mécaniques de ce matériau sont définies par la relation :

$$P(z) = [P_o - P_i] \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^k + P_i \quad (1-2)$$

Avec :

$r_o$  Rayon de l'épaisseur externe.

$r_i$  Rayon de l'épaisseur interne.

$k$  Indice de la graduation Power Law du volume fraction.

$$E(z) = [E_o - E_i]V_f + E_i \quad (1-3)$$

$$\rho(z) = [\rho_o - \rho_i]V_f + \rho_i \quad (1-4)$$

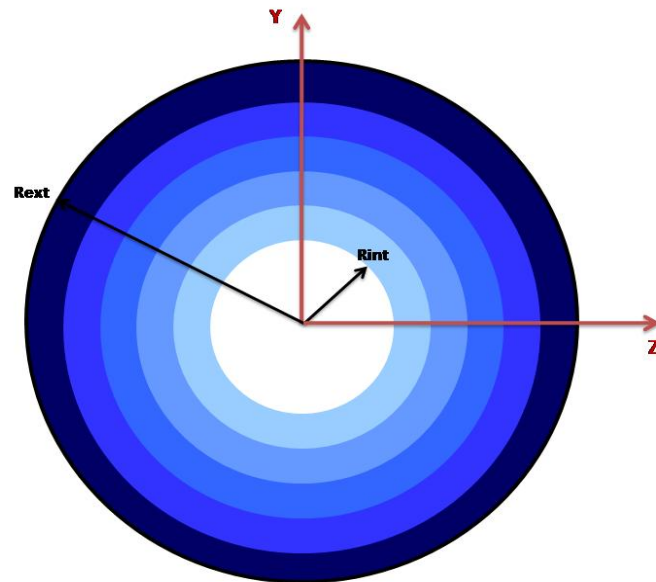


Figure 1.5 : Nano rotor en FGM



### I.3. La méthode des éléments finis :

La modélisation numérique est devenue incontournable dans le monde de la conception industrielle et de la recherche scientifique, car dans le calcul de la dynamique des structures, les problèmes sont, en général, très compliqués à résoudre par les méthodes analytiques usuelles. Les comportements des structures sont généralement représentés par des modèles mathématiques, qui le plus souvent sont modélisés par des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur ses frontières.

Parmi les méthodes d'analyse statique et dynamique des structures mécaniques, la méthode des éléments finis (MEF) est largement utilisée sous différentes formes. C'est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques des milieux continus ou fluides en se basant sur les équations différentielles ou aux dérivées partielles avec des conditions aux limites déterminées. C'est une méthode de discrétisation destinée à chercher une solution approchée à un problème physique mais sous une forme variationnelle, c'est-à-dire à chercher une solution approchée du problème.

Les versions de la méthode des éléments finis :

- la version h qui consiste à subdiviser le domaine étudié et qui atteint la précision en affinant le maillage tout en utilisant de faibles degrés p des éléments,
- La version p maintient le maillage fixe et la précision est obtenue en augmentant le degré du polynôme d'interpolation p.
- La version h-p combine les deux approches

### I.4. La méthode différentielle quadratique des éléments finis :

La méthode de quadrature différentielle est une technique de résolution numérique pour des problèmes aux limites ou de frontière. Elle a été développée par Richard Bellman et al au début des années 70 et, depuis lors, la technique a été employée avec succès dans une variété de problèmes en ingénierie et sciences physiques. La méthode a été présentée comme une alternative potentielle aux techniques de résolution numérique conventionnelles telles que les méthodes des différences finies et des éléments finis.

[23] ont présenté les concepts mathématiques de base de la méthode de quadrature différentielle (DQM), et la mise en œuvre de la méthode pour la solution de problèmes réels à travers quelques exemples.

En formulant la règle de quadrature pour une dérivée comme une extension analogue de la quadrature pour les intégrales, Bellman et Casti, ont proposé, dans leur article introductif de 1971, la méthode de quadrature différentielle comme nouvelle technique pour la solution numérique des problèmes de valeur initiale d'équations différentielles ordinaires et partielles. Le travail visait apparemment à proposer une technique de solution alternative compte tenu des problèmes de stabilité numérique et de temps de calcul importants impliqués dans l'intégration à long terme par des procédures de différences finies.

La première application extensive de la méthode de quadrature aux problèmes d'ingénierie a été entreprise par [24] pour une variété de modèles de type phénomène de transport. Leurs travaux ont énormément élargi la portée de la DQM en généralisant la méthode aux modèles décrits par les équations différentielles de la valeur limite initiale et de la valeur limite décrites dans les domaines spatiaux tridimensionnels. On peut voir, par exemple, la DQM appliquée pour la première fois à des problèmes de valeurs limites non linéaires unidimensionnels et linéaires bidimensionnels [24] et des idées connexes sur la mise en œuvre des conditions aux limites. L'application de la DQM aux problèmes tridimensionnels, de nature à la fois transitoire et stationnaire, n'a jusqu'à présent été envisagée que par [24] qui ont démontré que les coefficients de pondération pouvaient être obtenus directement à partir des opérateurs différentiels non homogènes. Ils ont ensuite appliqué cette idée à la solution de l'équation de Thomas-Fermi.

La méthode de quadrature différentielle est maintenant reconnue comme l'une des méthodes numériques de résolution des équations différentielles.

La précision et l'efficacité de la méthode, en tant que méthode numérique, lui ont procurées un succès remarquable au cours des deux dernières décennies [23]. Elle est basée sur l'approximation des dérivées partielles d'une variable d'un champ dans un point discret par une somme linéaire pondérée de la variable de ce champ le long de la ligne passant par ce

point. Le développement de la méthode est tellement important qu'il a suscité un intérêt particulier pour combiner la DQM avec des formulations variationnelles. A.G. Striz, avec son équipe ont pris l'initiative de mettre au point la méthode de l'élément de quadrature hybride (QEM) pour les problèmes de flexion et de déformation des plaques dans le plan bidimensionnel[25]. Chen et New ont utilisé la technique DQ pour discrétiser les dérivées des fonctions variables dans les fonctions intégrales pour les méthodes variationnelles, la méthode GALERKIN, etc..., en dérivant la formulation des éléments finis dans les problèmes d'élasticité et de flambement d'une plaque utilisant le principe de l'énergie potentielle minimale. Cette méthode est appelée méthode par éléments finis en quadrature différentielle (DQFEM). La même méthode DQFEM, est utilisée par Xing, en imposant des conditions limites dans le DQM, et des points de départ et des implémentations différents. [19]. Par rapport à [26] et [27], la DQFEM développée par Xing, [19] présente les nouveautés suivantes :

- Les règles DQ reformulées en liaison avec la règle intégrale Gauss-Lobatto, sont utilisées pour discrétiser la fonction énergétique permettant de dériver la formulation d'éléments finis d'une poutre Euler Bernoulli[28].
- Les fonctions d'interpolation de Lagrange sont utilisées comme fonctions de test, les fonctions de forme nodale comme dans la norme FEM ne sont pas nécessaires.
- Les matrices d'éléments DQFE sont symétriques, bien conditionnées et efficacement calculées par des opérations algébriques simples du coefficient de pondération.

# CHAPITRE II

## MODELE DU

### FG NANO-ROTOR

#### Sommaire

II.1. Introduction :.....	16
II.2. La dynamique des rotors : .....	17
II.2.1. Les nano rotors :.....	17
II.2.2. Historique : .....	17
II.2.3. Premier nanomoteur :.....	18
II.2.4. Les matériaux fonctionnellement gradués :.....	18
II.3. Hypothèses de modélisation :.....	19

## II.1. Introduction :

Dans le domaine de la dynamique des machines tournantes plusieurs travaux de recherche on était traité, et plus en plus ce domaine a été entrée dans les nanotechnologies.

Dans ce chapitre les énergies du nano-rotor FG (énergie de déformation et l'énergie cinétique) nécessaires à la détermination des équations du mouvement sont détaillé. Et l'application du principe d'Hamilton pour avoir les équations du mouvement du système.

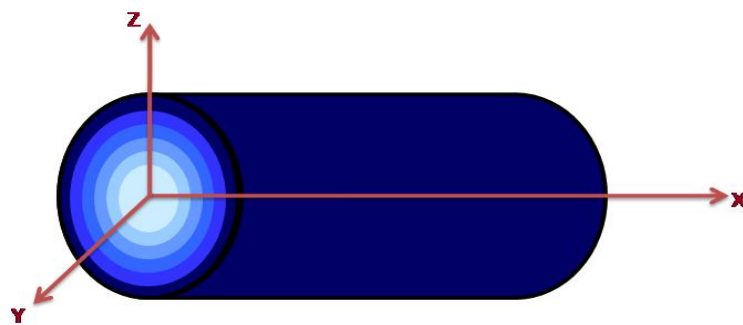


Figure 2.1: le nano arbre FG étudié

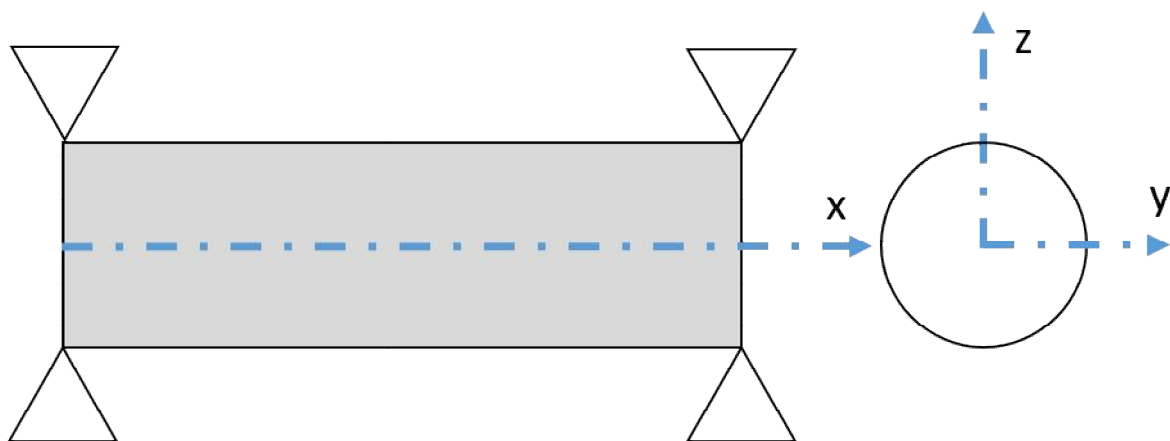


Figure 2.2: modèle de l'arbre

Avec  $\begin{cases} X : \text{axe de rotation} \\ Y \text{ et } Z : \text{axes de la section transversale perpendiculaires à } X \end{cases}$

## II.2. La dynamique des rotors :

La dynamique des rotors est l'étude de la dynamique et de la stabilité des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes. Les machines tournantes trouvent des applications très diverses dans la vie courante : machines-outils, centrales électriques, industrie automobiles, turbomachines, turbines d'avions, etc... De nos jours les vitesses de rotation augmentent de plus en plus, et au fur et à mesure que ces vitesses de rotation augmentent, le niveau de vibration du rotor traverse des seuils qui représentent les vitesses critiques. Cette évolution est souvent excitée par un déséquilibre de la structure tournante. Si l'ampleur de la vibration à ces vitesses critiques devient excessive, une défaillance catastrophique peut se produire. Une machine tournante peut également développer des instabilités liées à sa construction interne, entraînant également des défaillances catastrophiques.

La dynamique des rotors permet de connaître de façon très claire le comportement dynamique des machines tournantes, et par conséquent et à travers la connaissance de ce comportement dynamique, nous pouvons optimiser la construction et l'exploitation des machines tournantes.

### II.2.1. Les nano rotors :

Une classe particulière des machines tournantes est apparue ces dernières années, ce sont les nano structures de façon générale et les nano rotors de façon particulière.

### II.2.2. Historique :

Quinze ans seulement après avoir fabriqué le premier moteur de taille micrométrique au monde, Alex Zettl a dirigé son groupe de l'Université de Californie à Berkeley pour construire le premier nanomoteur à nanotubes en 2003. Quelques concepts et modèles ont été développés depuis, y compris le nanoactionneur entraîné par un gradient thermique ainsi que l'éolienne conceptuelle à électrons, tous deux révélés en 2008.

### II.2.3. Premier nanomoteur :

Le premier nanomoteur peut être considéré comme une version réduite d'un moteur de systèmes microélectromécaniques (MEMS) comparable. Le nanoactionneur est constitué d'un rotor en plaque d'or, tournant autour de l'axe d'un nanotube à parois multiples (MWNT). Les extrémités du MWNT reposent sur une couche de SiO<sub>2</sub> qui forme les deux électrodes aux points de contact. Trois électrodes statoriques fixes (deux stators «dans le plan» visibles et un stator «porte» enterré sous la surface) entourent l'ensemble rotor. Quatre signaux de tension indépendants (un au rotor et un à chaque stator) sont appliqués pour contrôler la position, la vitesse et le sens de rotation. Les vitesses angulaires empiriques enregistrées fournissent une limite inférieure de 17 Hz (bien que capable de fonctionner à des fréquences beaucoup plus élevées) pendant des rotations complètes.

### II.2.4. Les matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des nouveaux matériaux composites avancés. Leur spécificité c'est la variation continue de leurs propriétés matérielles d'une surface à une autre. Ces matériaux peuvent être fabriqués en variant le pourcentage des constituants de deux matériaux ou plus pour avoir une propriété graduée suivant la direction spatiale désirée. La gradation dans les propriétés des matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte trouvés dans les composites stratifiés. Les FGM ont acquis une application généralisée comme structures de barrière thermique, contre l'usure et comme revêtements résistant à la corrosion autres que le collage de matériaux différents. Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été proposé par le japonais (Niino) et ses collègues en les utilisant comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs nucléaires. Les plaques FGM sont largement utilisées dans diverses branches de l'ingénierie telles que la mécanique, l'aérospatiale, la chimie, l'électricité, etc.

Les avantages des structures FGM présentent une résistance thermique élevée et un changement graduel des caractéristiques du matériau le long du sens choisi. Pour une

conception des plaques FGM utilisées dans un environnement à haute température, les contraintes thermomécaniques et les déflexions sont des paramètres importants à prendre en compte.

### II.3. Hypothèses de modélisation :

Dans notre étude nous retenons les hypothèses suivantes :

- L'arbre de longueur L est déformable (flexible).
- La densité  $\rho$  et le module d'Young varient dans la direction radiale.
- L'effet secondaire de cisaillement n'est pas pris en considération (Poutre Euler-Bernoulli).
- L'arbre tourne à une vitesse constante  $\Omega$ .

La formulation est basée sur la théorie des nano-poutres d'Euler-Bernoulli en appliquant la théorie de l'élasticité non locale développée par [2] et [3] qui est basée sur l'hypothèse que la contrainte en un point est fonction des contraintes de tous les points du domaine.

Les fonctions de déplacement sont données par (C. M. Wang J. N., 2000)

$$V = \begin{cases} u - z \frac{dw}{dx} + y \frac{dv}{dx} \\ v \\ w \end{cases} \quad (2-1)$$

Où x est la coordonnée longitudinale mesurée à partir de l'extrémité gauche de la poutre, y et z sont les coordonnées mesurées à partir du plan médian du rotor, (u, v, w) les déplacements le long des coordonnées x, y et z respectivement  $w_0$  et  $v_0$  sont les déplacements dans les plans xy et xz respectivement (déflexions transversales du point (x, 0) sur le plan médian de l'arbre).

En utilisant la théorie d'Euler – Bernoulli, les équations du mouvement de l'arbre FG peuvent être obtenues en utilisant le principe d'Hamilton.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U - \delta W = 0 \quad (2-2)$$



$\delta U$  et  $\delta W$  représentent la variation de l'énergie de déformation et la variation du travail virtuel due aux forces extérieures, respectivement.

L'énergie de déformation  $U$  peut s'écrire [29]

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} r dr d\theta dx \quad (2-3)$$

Où  $A$  est la section transversale de l'arbre,  $L$  la longueur du rotor,  $\sigma_{xx}$  la contrainte axiale et  $\varepsilon_{xx}$  la déformation normale qui est donnée par la relation :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - z \frac{d}{dx} \frac{dw}{dx} - y \frac{d}{dx} \frac{dv}{dx} \quad (2-4)$$

Avec

$$\begin{cases} y = r \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2-5)$$

Sachant que  $N$  (force normale),  $M_y$  et  $M_z$  (moments de flexion) sont définis comme suit :

$$\begin{cases} N = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \sigma_{xx} r dr d\theta dx \\ M_y = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \sigma_{xx} r^2 dr d\theta dx \\ M_z = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \sigma_{xx} r^2 dr d\theta dx \end{cases} \quad (2-6)$$

La variation de l'équation du mouvement devient :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( N \frac{d}{dx} \delta u + M_y \frac{d^2}{dx^2} \delta w + M_z \frac{d^2}{dx^2} \delta v \right) dx \quad (2-7)$$

L'énergie cinétique  $K$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 K = & \frac{1}{2} I_1 \int_0^L [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx + \frac{1}{2} I_2 \int_0^L \left[ \left( \frac{d\dot{w}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\dot{v}}{dx} \right)^2 \right] dx + \Omega I_2 \int_0^L \left[ \frac{d\dot{w}}{dx} \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx} \frac{d\dot{v}}{dx} \right] dx \\
 & + \frac{1}{2} \Omega^2 I_2 \int_0^L \left[ \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx
 \end{aligned} \quad (2-8)$$

Avec

$$\begin{cases} I_1 = 2\pi \int_0^r \rho(r) r dr \\ I_2 = \pi \int_0^r \rho(r) r^3 dr \end{cases} \quad (2-9)$$

La variation de l'énergie cinétique est donc déterminée par :

$$\begin{aligned}
 \delta K = & \frac{1}{2} I_1 \int_0^L \left[ \dot{u} \frac{d}{dt} \delta u + \dot{w} \frac{d}{dt} \delta w + \dot{v} \frac{d}{dt} \delta v \right] dx + \Omega I_2 \int_0^L \left[ \frac{d\dot{w}}{dx} \frac{d}{dx} \delta v - \frac{d\dot{v}}{dx} \frac{d}{dx} \delta w \right] dx \\
 & + \frac{1}{2} \Omega^2 I_2 \int_0^L \left[ \frac{dw}{dx} \frac{d}{dx} \delta w + \frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \delta v \right] dx
 \end{aligned} \quad (2-10)$$

Tenant compte de l'équation (2-2) on obtient

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = I_1 [\ddot{u}] \\ \frac{d^2 M_z}{dx^2} = I_1 [\ddot{v}] + I_2 \left[ \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \ddot{v} \right] + \Omega^2 I_2 \left[ \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} v \right] \\ \frac{d^2 M_y}{dx^2} = I_1 [\ddot{w}] + I_2 \left[ \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \ddot{w} \right] + \Omega^2 I_2 \left[ \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} w \right] \end{cases} \quad (2-11)$$

Sachant que notre arbre est une nano structure et pour prendre l'effet d'échelle, nous utilisons la théorie de l'élasticité non locale initiée par [2] et [3] :

$$\sigma = \left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \sigma$$

Les équations (2-11) prennent la forme

$$\begin{aligned} \int_0^L I_1 \left(1 - (ea)^2 \frac{d}{dx} \frac{d}{dx}\right) [\ddot{u}] dx &= 2\pi \int_0^r E(r) r dr \int_0^L \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} u\right) dx \\ \int_0^L I_1 \left(1 - (ea)^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx}\right) [\ddot{v}]\right) dx &+ \int_0^L I_2 \left(\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \ddot{v}\right] - (ea)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} \ddot{v}\right]\right) dx \\ &- \int_0^L 2\Omega I_2 \left(\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dot{w}\right] - (ea)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} \dot{w}\right]\right) dx \\ &+ \int_0^L \Omega^2 I_2 \left(\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} v\right] - (ea)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} v\right]\right) dx \\ &= \pi \int_0^r E(r) r^3 dr \int_0^L \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} v\right) dx \end{aligned} \quad (2-12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L I_1 \left([\ddot{w}] - (ea)^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} [\ddot{w}]\right)\right) dx &+ \int_0^L I_2 \left(\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \ddot{w}\right] - (ea)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} \ddot{w}\right]\right) dx \\ &- \int_0^L 2\Omega I_2 \left(\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dot{v}\right] - (ea)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} \dot{v}\right]\right) dx \\ &+ \int_0^L \Omega^2 I_2 \left(\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} w\right] - (ea)^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} w\right]\right) dx \\ &= \pi \int_0^r E(r) r^3 dr \int_0^L \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} w\right) dx \end{aligned}$$

# CHAPITRE III

## MODELISATION PAR LA

### METHODE DQFEM

#### Sommaire

<b>III.1.</b>	<b>Introduction :</b> .....	24
III.1.1.	MEF : .....	24
III.1.2.	DQM : .....	24
III.1.3.	DQFEM : .....	24
<b>III.2.</b>	<b>Application de la DQFEM</b> .....	25
III.2.1.	La règle quadrature de Gauss – Lobatto .....	26
III.2.2.	Equation adimensionnelle du mouvement .....	30

### III.1. Introduction :

Dans cette partie nous appliquons une combinaison des deux méthodes la GDQM (méthode différentielle quadrature généralisée) et la MEF (méthode des éléments finis classique) qui donne naissance à la nouvelle méthode DQFEM (la méthode différentielle quadratique des éléments fini). Cette méthode est utilisée pour la formulation de l'équation différentielle du mouvement du nano-rotor étudié. Les matrices globales de l'équation du mouvement sont déterminées par le principe de Hamilton en tenant compte de l'effet de l'échelle. Nous transformerons les matrices en matrices adimensionnelles.

#### III.1.1. MEF :

Le principe fondamental de la MEF est de transformer un problème continu (modélisé mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites) en un problème discret qui est modélisé mathématiquement par un système d'équations linéaires. La solution d'un problème continu est un champ continu d'une grandeur physique (par exemple les déplacements en mécanique), alors que la solution d'un problème discret est un ensemble de valeurs prises par une grandeur physique en des points particuliers, appelés nœuds dans le cadre de la MEF.

La précision de la méthode est fonction du nombre des éléments choisis.

#### III.1.2. DQM :

Les règles DQ connues approchent la dérivée d'une fonction en un point par une somme linéaire pondérée de variables de champ le long d'une ligne passant par le point.

En plus des fonctions de Lagrange, toute autre base complète peut être utilisée comme base pour la formulation de règles DQ[19].

#### III.1.3. DQFEM :

La méthode des éléments finis en quadrature différentielle a été développée par[19], dont les règles de quadrature différentielle et la quadrature Gauss-Lobatto sont utilisées pour discrétiser les énergies du système.

Elle est utilisée sur le domaine de la dynamique des rotors par [30].

### III.2. Application de la DQFEM

L'application de la méthode DQFEM sera organisée comme suit :

Nous discrétisons notre nano rotor en  $n$  éléments, et nous modélisons nos éléments en supposant que la fonction de dérivation est de la forme:

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{i=1}^N L_i(x)u_i \\ v(x) = \sum_{i=1}^N L_i(x)v_i \\ w(x) = \sum_{i=1}^N L_i(x)w_i \end{cases} \quad (3-1)$$

où  $L_i$  est le polynôme de Lagrange, et  $u_i = u(x_i)$ ,  $v_i = v(x_i)$  et  $w_i = w(x_i)$  sont les déplacements des points de quadrature de Gauss Lobatto où les déplacements nodaux DQ de l'élément fini considéré.

Ainsi, pour une variable de champ  $f(x)$  la dérivée d'ordre  $n$  en un point discret  $x_i$  peut être exprimée comme suit :

$$\left. \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(n)} f(x_j, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (3-2)$$

Où  $A_{ij}^{(n)}$  sont les coefficients de pondération, ils sont liés à la dérivée d'ordre  $n$ . Ils sont obtenus comme suit :

- Pour  $n = 1$ , donc

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(1)} &= \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N \\ A_{ii}^{(1)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3-3)$$

Où

$$M(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (3-4)$$

$$M(x_j) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_j - x_k)$$

- Pour  $n > 1$ , dérivées secondaires et d'ordre supérieur, les coefficients de pondération sont déterminés à l'aide de la relation de récurrence simple suivante :

$$A_{ij}^{(n)} = n \left( A_{ij}^{(1)} * A_{ii}^{(n-1)} - \frac{A_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_j)} \right) \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N, n > 1$$

$$A_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}^{(n)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-5)$$

### III.2.1. La règle quadrature de Gauss – Lobatto

La théorie des règles de quadrature de Gauss-Lobatto peut être trouvée dans la littérature mathématique; La règle de quadrature de Gauss - Lobatto avec un degré de précision  $(2n-3)$  pour la fonction  $f(x)$  définie dans l'intervalle  $[-1, 1]$  est donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^N C_j f(x_j) \quad (3-6)$$

Où le coefficient de pondération  $C_j$  de l'intégration Gauss-Lobatto est donnée par:

$$C_1 = C_N = \frac{2}{N(N-1)}, \quad C_j = \frac{2}{N(N-1)[P_{N-1}(x_j)]^2} \quad (j \neq 1, N) \quad (3-7)$$

$x_j$  est le zéro ( $j-1$ ) de la dérivée du premier ordre de  $P_{N-1}(x)$ . Pour déterminer les racines des polynômes de Legendre, nous utiliserons la formule de récurrence comme les équations (3-8) et (3-9) ; il est facile, alors d'obtenir des milliers de racines

$$P_{N+1}(x) = \frac{2N+1}{N+1}x \cdot P_N(x) - \frac{N}{N+1}P_{N-1}(x) \quad (3-8)$$

Avec  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ . La dérivation d'ordre  $n$  des polynômes de Legendre peut être déterminée par la formule de récurrence suivante:

$$P_{N+1}^{(n)}(x) = xP_N^{(n)}(x) + (N+n)P_N^{(n)}(x) \quad (3-9)$$

Afin d'obtenir une population plus dense près des limites, les points d'échantillonnage sont sélectionnés en fonction de la distribution de grille des nœuds de Gauss - Lobatto.

$$x_j = -\cos\left(\frac{j-1}{N-1}\pi\right) \quad (3-10)$$

Les nœuds de Gauss -Lobatto sont résolus avec la méthode d'itération Newton-Raphson.

$$x^{iT+1} = x^{iT} - F'(x^{iT})^{-1}F(x^{iT}), \quad iT = 0,1, \dots \quad (3-11)$$

Comprenant

$$x = [x_2, x_3, \dots, x_{N-1}]^T \quad (3-12)$$

$$F(x) = [f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{N-1})]^T \quad (3-13)$$

$$F'(x) = \left[ \frac{\partial f(x_j)}{\partial x_i} \right]_{(N-2) \times (N-2)} \quad (3-14)$$

$$f(x_j) = \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{x_j - x_k} \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \quad (3-15)$$



$$\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_i} = \begin{cases} - \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{(x_j - x_k)^2}, & (i = j) \\ \frac{1}{(x_j - x_i)^2}, & (i \neq j) \end{cases} \quad (3-16)$$

Où  $k$  est la valeur de  $x$  à la  $i^{\text{ème}}$  étape d'itération. Cette méthode est moins sensible à la valeur initiale. Les valeurs données par l'équation (3-10) sont utilisées comme valeurs initiales.

La relation entre  $u$  et  $\bar{u}$ ,  $v$  et  $\bar{v}$ ,  $w$  et  $\bar{w}$  est définie à l'aide de la règle DQ:

$$u = Q\bar{u}, \quad v = Q\bar{v}, \quad w = Q\bar{w} \quad (3-17)$$

Où

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{1,1}^{(1)} & A_{1,2}^{(1)} & A_{1,3}^{(1)} & \cdots & A_{1,N-1}^{(1)} & A_{1,N}^{(1)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ A_{N,1}^{(1)} & A_{N,2}^{(1)} & A_{N,3}^{(1)} & \cdots & A_{N,N-1}^{(1)} & A_{N,N}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

En appliquant les étapes de calcul de la DQFEM, mentionnées ci-dessus sur le système d'équations différentielles (2-12) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 I_1([Q^{-T}CQ^{-1}] - (ea)^2[Q^{-T}A^TCAQ^{-1}])\ddot{u} &= 2\pi \int_0^r E(r)rdr [Q^{-T}A^TCAQ^{-1}]u \\
 I_1([Q^{-T}CQ^{-1}] - (ea)^2[Q^{-T}A^TCAQ^{-1}])\dot{v} & \\
 - 2\Omega I_2([Q^{-T}A^TCAQ^{-1}] - (ea)^2[Q^{-T}A^{(2)T}CA^{(2)}Q^{-1}])\dot{w} & \\
 + \Omega^2 I_2([Q^{-T}A^TCAQ^{-1}] - (ea)^2[Q^{-T}A^{(2)T}CA^{(2)}Q^{-1}])v & \\
 = \pi \int_0^r E(r)r^3dr [Q^{-T}A^{(2)T}CA^{(2)}Q^{-1}]v & \quad (3-19) \\
 I_1([Q^{-T}CQ^{-1}] - (ea)^2[Q^{-T}A^TCAQ^{-1}])\ddot{w} & \\
 - 2\Omega I_2([Q^{-T}A^TCAQ^{-1}] - (ea)^2[Q^{-T}A^{(2)T}CA^{(2)}Q^{-1}])\dot{v} & \\
 + \Omega^2 I_2([Q^{-T}A^TCAQ^{-1}] - (ea)^2[Q^{-T}A^{(2)T}CA^{(2)}Q^{-1}])w & \\
 = \pi \int_0^r E(r)r^3dr [Q^{-T}A^{(2)T}CA^{(2)}Q^{-1}]w &
 \end{aligned}$$

Toutes les formes de distribution de nœuds pour la différenciation et la quadrature sont dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . Par conséquent, pour les appliquer en pratique, les modifications suivantes doivent être apportées aux matrices différentielles et en quadrature,

$$\bar{C} = \frac{l_e}{2}C, \quad \bar{A}^{(1)} = \frac{2}{l_e}A^{(1)}, \quad \bar{A}^{(2)} = \frac{4}{l_e^2}A^{(2)} \quad (3-20)$$

Où  $l_e$  est la longueur de l'élément de poutre.

Les matrices pour l'ensemble du système sont obtenues selon les règles d'assemblage des matrices élémentaires de la MEF, et l'équation différentielle du mouvement est de la forme suivante :

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}(t) \\ \ddot{v}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{Bmatrix} + [G] \begin{Bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix} = [0] \quad (3-21)$$

Les matrices globales masse, gyroscopique et de rigidité sont données par les relations suivantes :

$$[M] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \begin{pmatrix} [Q^{-T} C Q^{-1}] \\ -(ea)^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \end{pmatrix} \\ [0] \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} I_1 \begin{pmatrix} [Q^{-T} C Q^{-1}] \\ -(ea)^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \end{pmatrix} \\ +I_2 \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -(ea)^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} I_1 \begin{pmatrix} [Q^{-T} C Q^{-1}] \\ -(ea)^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \end{pmatrix} \\ +I_2 \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -(ea)^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} -2\Omega I_2 \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -(ea)^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ [0] & \begin{bmatrix} 2\Omega I_2 \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -(ea)^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\pi \int_0^r E(r) r dr [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ [0] \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} \pi \int_0^r E(r) r^3 dr \\ [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} \pi \int_0^r E(r) r^3 dr \\ [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

### III.2.2. Equation adimensionnelle du mouvement

Soit le paramètre de fréquence :

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 L_e^4 2\pi \int_0^r \rho(r) r dr}{\pi \int_0^r E(r) r^3 dr} \quad (3-23)$$

Pour former les équations adimensionnelles, on remplace le paramètre de fréquence (3-23) dans le système d'équation (3-19). Ne déduit les paramètres adimensionnel suivant:

Paramètre de longueur

$$\mu^2 = \frac{(ea)^2}{L_e^2}$$

Paramètre de surface

$$\Gamma = \frac{\pi \int_0^r r^3 dr}{L_e^2 2\pi \int_0^r r dr}$$

(3-24)

Paramètre de vitesse

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi \int_0^r \rho(r) r^3 dr}{2\pi \int_0^r E(r) r dr}}$$

Donc on obtient le système d'équation adimensionnel suivante :

$$\begin{aligned} & -\lambda^2 \Gamma ([Q^{-T} C Q^{-1}] - \mu^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}]) u = [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] u \\ & -\lambda^2 ([Q^{-T} C Q^{-1}] - \mu^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}]) v \\ & \quad - \lambda^2 \Gamma ([Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] - \mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}]) v \\ & \quad + 2j\Omega\lambda\gamma ([Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] - \mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}]) v \\ & \quad = [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] v \tag{3-25} \\ & -\lambda^2 ([Q^{-T} C Q^{-1}] - \mu^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}]) w \\ & \quad - \lambda^2 \Gamma ([Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] - \mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}]) w \\ & \quad - 2j\Omega\lambda\gamma ([Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] - \mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}]) w \\ & \quad = [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] w \end{aligned}$$

Alors les matrices deviennent de la forme :

[M]

$$= \begin{bmatrix} \left[ \Gamma \begin{pmatrix} [Q^{-T} C Q^{-1}] \\ -\mu^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \end{pmatrix} \right] & [0] & [0] \\ [0] & \left[ \begin{pmatrix} [Q^{-T} C Q^{-1}] \\ -\mu^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \Gamma \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -\mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \right] & [0] \\ [0] & [0] & \left[ \begin{pmatrix} [Q^{-T} C Q^{-1}] \\ -\mu^2 [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ + \Gamma \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -\mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right] \end{bmatrix}$$

(3-27)

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & \left[ -2j\Omega\gamma \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -\mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \right] \\ [0] & \left[ 2j\Omega\gamma \begin{pmatrix} [Q^{-T} A^T C A Q^{-1}] \\ -\mu^2 [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{pmatrix} \right] & [0] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [[Q^{-T} A^T C A Q^{-1}]] & [0] & [0] \\ [0] & [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] & [0] \\ [0] & [0] & [Q^{-T} A^{(2)T} C A^{(2)} Q^{-1}] \end{bmatrix}$$

# Chapitre IV:

# RESULTATS ET

# INTERPRETATION

## Sommaire

Chapitre IV:	RESULTATS ET INTERPRETATION.....	33
IV.1	Introduction.....	34
IV.2	Convergence et validation des résultats : .....	35
IV.2.1	Convergence.....	35
IV.2.2	Validation des résultats.....	37
IV.3	Etude de cas.....	39
IV.3.1	Conditions aux limites : .....	40
IV.3.2	Diagramme de Campbell : .....	40
IV.3.3	Volume fraction et constante non locale .....	42
IV.3.4	Rapport L/D et constante non locale .....	44
IV.3.5	Différents matériaux .....	48
IV.4	Conclusion .....	51

## IV.1 Introduction

Plusieurs études ont été faites pour permettre la détermination de l'influence des paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement vibratoire du nano-rotor en FGM.

Les méthodes numériques et algorithmes exposés dans les chapitres précédents pour l'analyse du comportement dynamique d'un nano rotor est appliqués dans ce chapitre. Un programme, sous langage Matlab, est élaboré. Il nous permet de déterminer les fréquences propres et de tracer les diagrammes de Campbell du nano-rotor.

L'organigramme du programme de calcul est représenté sur le tableau suivant :

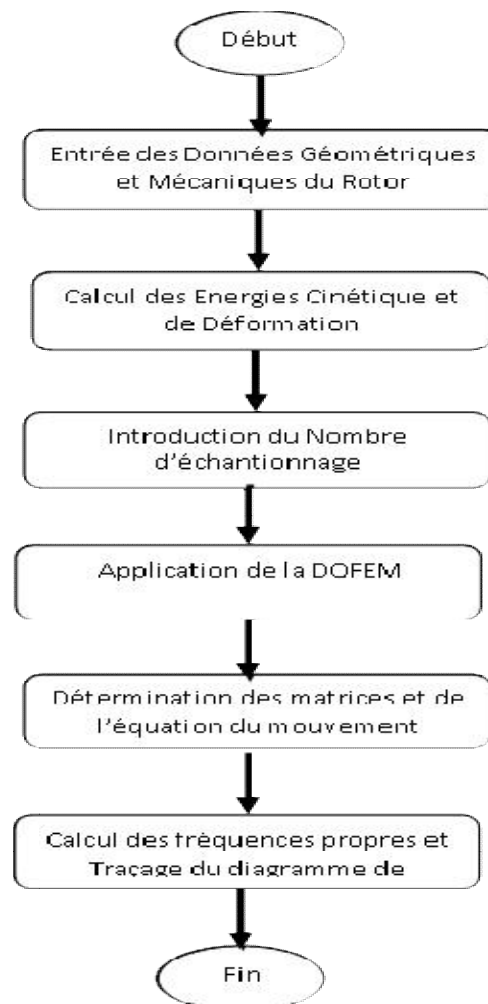


Figure 4.1 : Organigramme de calcul

## IV.2 Convergence et validation des résultats :

### IV.2.1 Convergence

Dans l'étude de convergence, nous déterminons les fréquences propres d'un nano rotor en faisant varier le nombre de points d'échantillonnage  $N$  par rapport à la DQM, dans un premier temps et le nombre des éléments finis (raffinement- $h$ ) par rapport à la MEF. Elle est aussi faite avec la variation du nombre de points d'échantillonnage, et la variation du nombre des éléments finis simultanément.

Les résultats sont illustrés sur les tableaux et les figures suivants :

**Tableau 4.1 : Convergence en fonction du nombre de points d'échantillonnage**

N=5	h=1	3.1415	7.0852	10.3759
6	h=1	3.1421	6.2850	11.4810
7	h=1	3.1416	6.2965	9.4497
8	h=1	3.1416	6.2832	9.5046
9	h=1	3.1416	6.2832	9.4250
10	h=1	3.1416	6.2832	9.4259
11	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
12	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
13	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
14	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
15	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
16	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
17	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
18	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
19	h=1	3.1416	6.2832	9.4248
20	h=1	3.1416	6.2832	9.4248



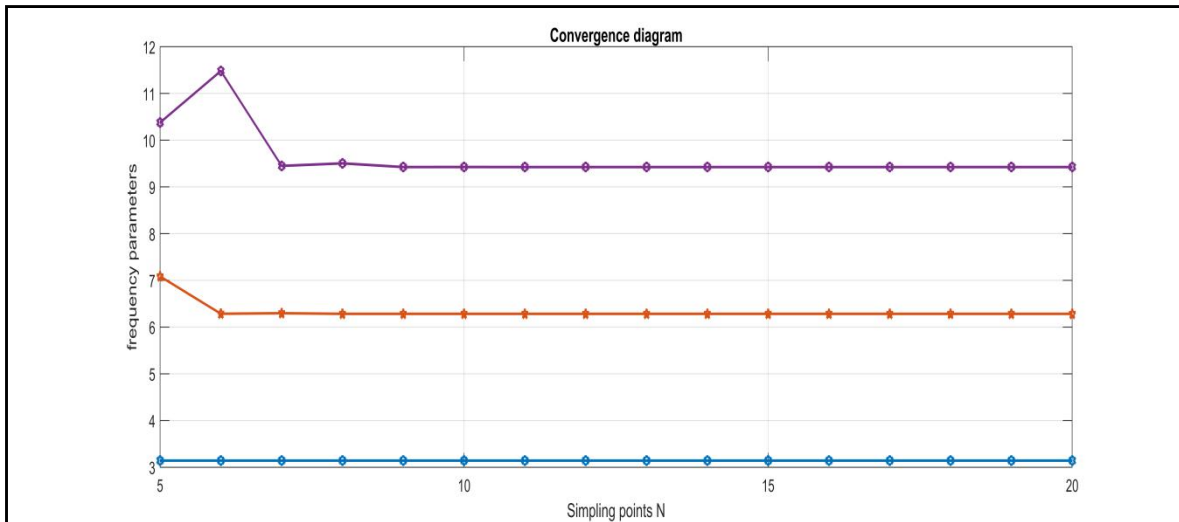


Figure 4.2 : Convergence en fonction du nombre de points d'échantillonnage

Tableau 4.2 : Convergence en fonction du nombre de points d'échantillonnage et des éléments finis

h=1	N=5	3.1415	7.0852	10.3759
2	6	3.1421	6.2850	11.4810
4	7	3.1416	6.2965	9.4497
8	8	3.1416	6.2832	9.5046
10	9	3.1416	6.2832	9.4250
12	10	3.1416	6.2832	9.4259
14	11	3.1416	6.2832	9.4248
16	12	3.1416	6.2832	9.4248
18	13	3.1416	6.2832	9.4248
20	14	3.1416	6.2832	9.4248
22	15	3.1416	6.2832	9.4248
24	16	3.1416	6.2832	9.4248
26	17	3.1416	6.2832	9.4248
28	18	3.1416	6.2832	9.4248
30	19	3.1416	6.2832	9.4248
32	20	3.1416	6.2832	9.4248

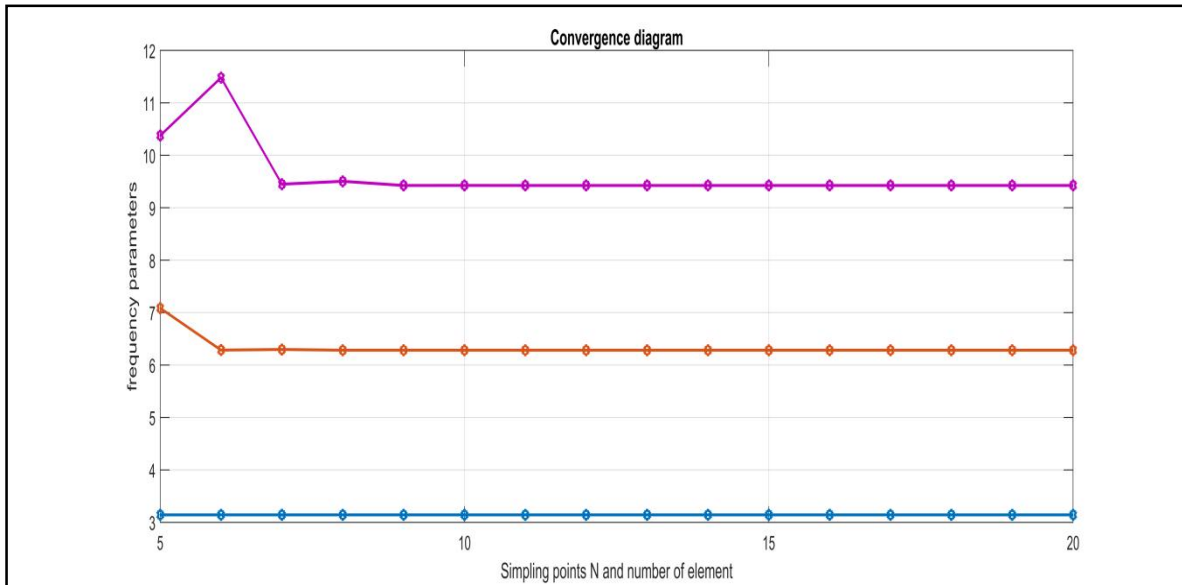


Figure 4.3 convergence (points d'échantillonnage, nombre des éléments finis)

D'après la figure 4.2, l'étude de convergence est faite en variant le nombre d'échantillonnage avec un seul élément, on constate que la convergence de la première fréquence est atteinte à partir de  $N=7$  pour, et la deuxième fréquence à partir de  $N=8$ , par contre la troisième fréquence converge à partir de  $N=11$ .

Dans le cas où on fait varier le nombre d'échantillonnage et le nombre de maillage  $h$  simultanément, on remarque dans la figure 4.3, que la convergence est atteinte rapidement.

En tenant comptes des résultats de convergence, on a pris pour les calcule suivant un nombre d'échantillonnage  $N=14$ , et un nombre d'élément  $h=11$ .

#### IV.2.2 Validation des résultats

Après l'étude de la convergence, nous comparons les résultats de notre étude avec ceux des auteurs [31] qui détermine les fréquences propres d'un arbre isotrope, et avec [9] et [32] qui donnent des résultats adimensionnels d'un nano arbre isotrope.

- **Validation 1 : René-Jean GIBERT**

Les paramètres physiques et géométriques de ce rotor sont représentés dans le tableau 4.2.

Tableau 4.3 : Paramètres physiques et géométriques du rotor isotrope

Longueur L [m]	Diamètre d [m]	Module d'élasticité E [Pa]	Masse Volumique P [kg/m]
0,9	0,05	$2.10^{11}$	7800

Les fréquences propres du rotor simplement supporté aux deux appuis sont représentées sur le tableau 4.

Tableau 4.4 : Validation 1.

$\Omega = 0$ Conditions aux limites S-S			$\Omega = 10^4 \text{ rd/s}$ Conditions aux limites S-S		
Present	[31]	$\varepsilon \%$	present	[31]	$\varepsilon \%$
125.6591	125,8150	$1,23 \cdot 10^{-3}$	125.3431	119,7448	0.04
501.2100	503,2598	$4,07 \cdot 10^{-3}$	499.9521	479,0191	0.04
1122.4331	1132,3346	$8.75 \cdot 10^{-3}$	1119.6290	1077,3971	0.03

- **Validation 2 : Chakraverty et Wang**

Nous comparons aussi les paramètres de fréquences d'un nano rotor à de appuis simple dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont : rapport longueur diamètre  $L/D=10$ , avec un diamètre  $D = 0.678 \cdot 10^{-9}$  et le module d Young  $E=5.5 \cdot 10^{12}$  Pa.(Chakraverty, 2013) , (Wang, 2007).

Tableau 4.5 : Validation 2.

$\mu = 0$			
Present	[9]	[32]	$\varepsilon \%$
3.1416	3.1416	3.1416	0
6.2832	6.2832	6.2832	0
9.4248	9.4248	9.4248	0
15.7088	15.7088	15.5665	0

$\mu = 0.3$			
Present	[9]	[32]	$\varepsilon \%$
2.6838	2.6800	2.6800	$1.41 \cdot 10^{-3}$
4.3203	4.3013	4.3013	$4.39 \cdot 10^{-3}$
5.4262	5.4422	5.4422	$2.93 \cdot 10^{-3}$
6.3474	6.3630	6.3633	$2.45 \cdot 10^{-3}$

$\mu = 0.5$			
Present	[9]	[32]	$\varepsilon \%$
2.3144	2.3022	2.3022	$5.27 \cdot 10^{-3}$
3.4880	3.4604	3.4604	$6.14 \cdot 10^{-3}$
4.2810	4.2941	4.2941	$3.05 \cdot 10^{-3}$
4.9961	4.9820	4.9820	$2.82 \cdot 10^{-3}$

### IV.3 Etude paramétrique

Dans ce paragraphe nous étudions plusieurs cas pour déterminer les influences des différents paramètres mécaniques et géométriques tels que les conditions aux limites, les volumes fractions de la loi du mélange du FGM, le rapport longueur diamètre, différents matériaux, etc.... nous allons aussi introduire, les paramètres adimensionnels.

### IV.3.1 Conditions aux limites :

Tableau 4.6 : Paramètres physiques et géométriques du rotor

Longueur L [m]	Diamètre d [m]	Module d'élasticité E [Pa]	Masse Volumique P [kg/m]	Constante non locale $\mu$	Volume fraction K
$10 * d$	$0.678 * 10^{-9}$	Métal $E_m = 3 * 10^{11}$ Céramique $E_c = 5.5 * 10^{12}$	Métal $\rho_m = 8600$ Céramique $\rho_c = 2250$	0	10

### Résultats :

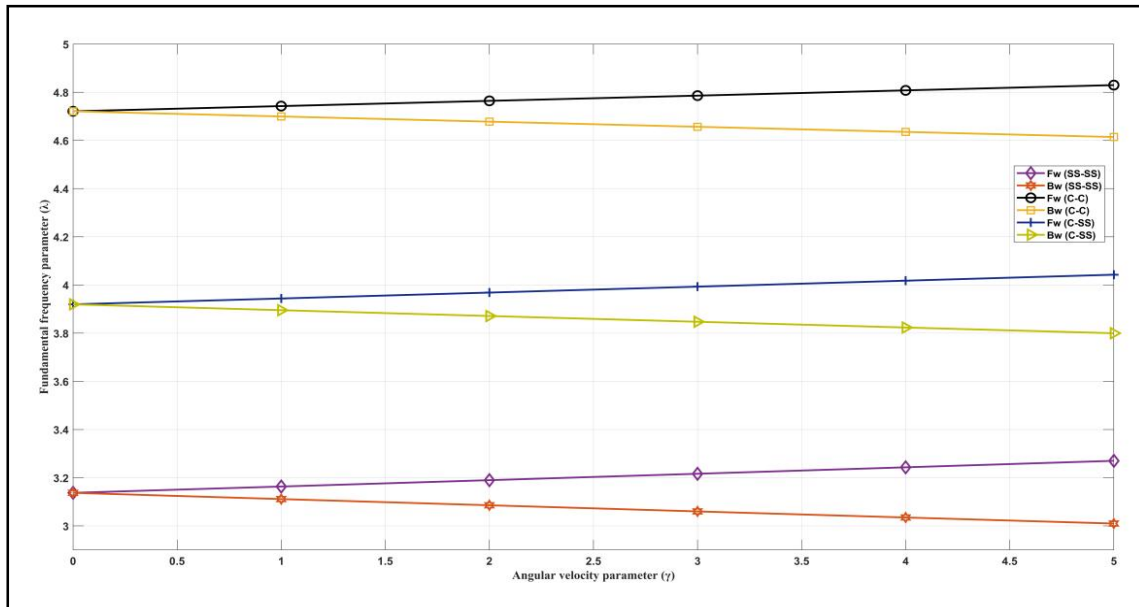


Figure 4.4 : les premières fréquences pour les trois conditions aux limites

### IV.3.2 Diagramme de Campbell :

#### Données :

On prend les mêmes paramètres géométriques et physiques que l'exemple précédent, et on fait varier la constante non locale et l'indice de volume fraction.

Résultats :

Tableau 4.7 : paramètres de fréquences en fonction de paramètres de vitesse pour différents paramètres non locaux

$\mu$	0		0.3		0.5	
$\gamma$	BW	FW	BW	FW	BW	FW
0	3.1368	3.1368	2.6508	2.6508	2.2272	2.2272
1	2.9775	3.3045	2.6508	2.6508	2.2272	2.2272
2	2.8279	3.4794	2.6508	2.6508	2.1975	2.2000
3	2.6887	3.6595	2.3136	2.3159	1.7889	1.7899
4	2.5601	3.8434	2.0001	2.0015	1.5476	1.5482
5	2.4419	4.0293	1.7875	1.7885	1.3836	1.3840

$\mu$	0.7		1		10	
$\gamma$	BW	FW	BW	FW	BW	FW
0	2.0119	2.0119	1.8176	1.8176	0.9977	0.9977
1	2.0119	2.0119	1.8176	1.8176	0.6917	0.6919
2	1.8542	1.8557	1.5494	1.5503	0.4887	0.4888
3	1.5107	1.5114	1.2632	1.2636	0.3990	0.3990
4	1.3074	1.3077	1.0934	1.0937	0.3455	0.3455
5	1.1689	1.1692	0.9778	0.9779	0.3090	0.3090

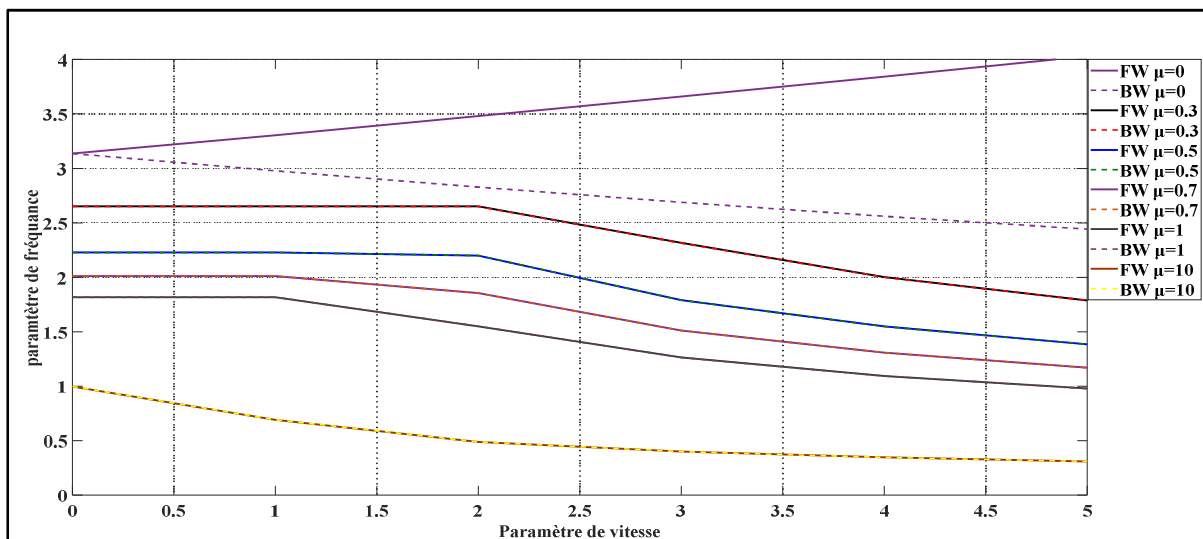


Figure 4.5 : paramètres de fréquences en fonction de paramètres de vitesse pour différents paramètres non locaux

*Interprétation :*

D'après les figure 4.4 et 4.5 on remarque que la vitesse de rotation a une influence importante sur les fréquences de nano rotor, selon les résultats obtenus dans le domaine non local, les fréquences diminuent en augmentant la valeur de la vitesse de rotation, avec un effet gyroscopique faible comparé au domaine local.

### IV.3.3 Volume fraction et constante non locale

*Données :*

On prend les mêmes paramètres géométriques et physiques que l'exemple précédent, et on fait varier la constante non locale et l'indice de volume fraction.

Tableau 4.8: fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction pour différents paramètres non local

	$\mu=0$	0.3	0.5	0.7
K=0	3.1368	2.6508	2.2272	2.0119
K=0.2	2.9292	2.4753	2.0798	1.8788
K=0.5	2.7287	2.3059	1.9374	1.7501
K=5	2.5227	2.1318	1.7911	1.6180
K=10	1.9763	1.6701	1.4032	1.2676
K=30	1.7502	1.4790	1.2427	1.1226
K= $\infty$	1.4486	1.2241	1.0285	0.9291

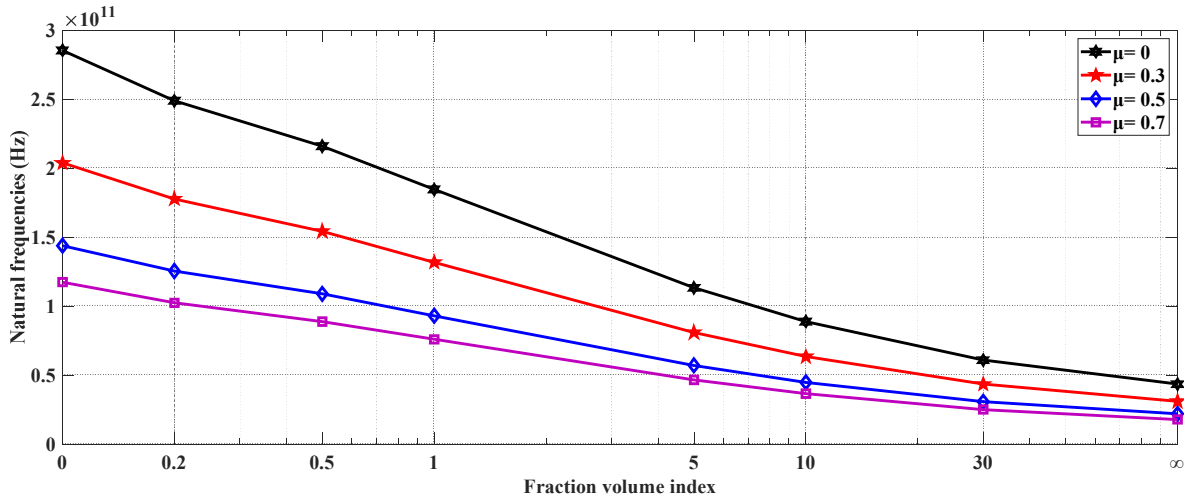


Figure 4.6 : fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction pour différents paramètres non local

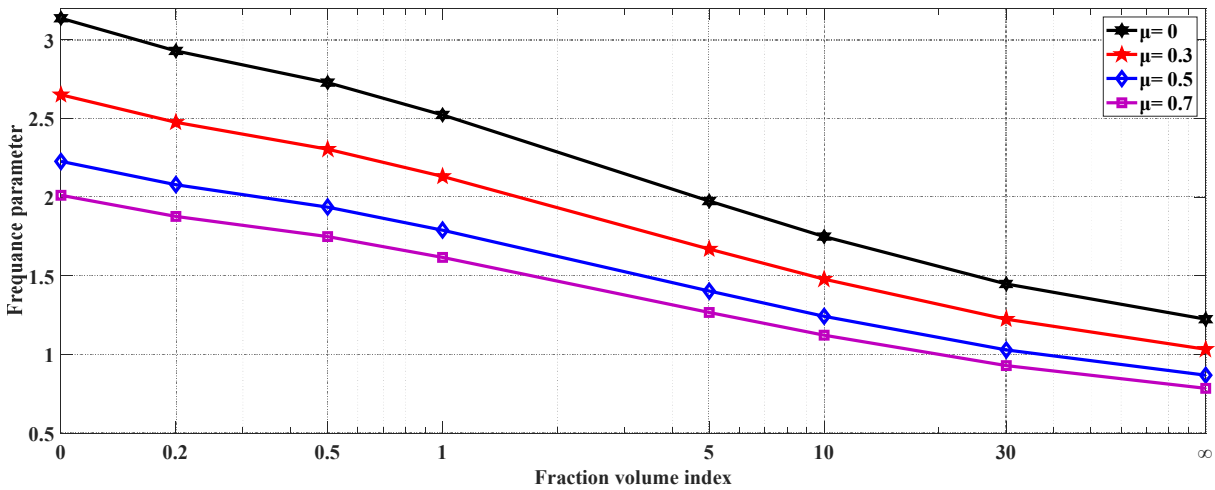


Figure 4.7 : Paramètre de fréquence en fonction de l'indice de volume fraction pour différents paramètres non local

*Interprétation :*

L'indice de volume fraction  $k=0$  veut dire que la composition du matériau FG est 100% matériau externe. Et quand  $k$  tend vers l'infini veut dire que la composition est infiniment proche du matériau interne.



On remarque d'après les résultats montrés dans les figures 4.5 et 4.6 qui illustrent le tableau 4.8 que les fréquences diminuent quand le paramètre non local augmente, quel que soit le pourcentage de la composition du matériau FG, c-à-dire l'indice de volume fraction.

En variant l'indice de volume fraction, les paramètres de fréquences sont compris entre la fréquence de composition 100% métal externe et la fréquence de composition 100% métal interne. La rigidité du nano-rotor est comprise entre les deux rigidités des matériaux qui le composent.

#### IV.3.4 Rapport L/D et constante non locale

Dans cette partie on fait varier le rapport longueur diamètre L/D avec différentes valeurs de paramètre non local.

##### Résultats :

Tableau 4.9 : Fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non locaux ( $k=0$ , S-S)

Natural fréquence Hz $10^{11}$				
L/D	$\mu=0$	0.3	0.5	0.7
10	2.8549	2.0387	1.4392	1.1745
20	0.7154	0.5109	0.3606	0.2943
30	0.3181	0.2271	0.1603	0.1309
40	0.1789	0.1278	0.0902	0.0736
50	0.1145	0.0818	0.0577	0.0471
60	0.0795	0.0568	0.0401	0.0327
70	0.0584	0.0417	0.0295	0.0240
80	0.0447	0.0320	0.0226	0.0184
90	0.0354	0.0252	0.0178	0.0145
100	0.0286	0.0204	0.0144	0.0118
110	0.0237	0.0169	0.0119	0.0097
120	0.0199	0.0142	0.0100	0.0082

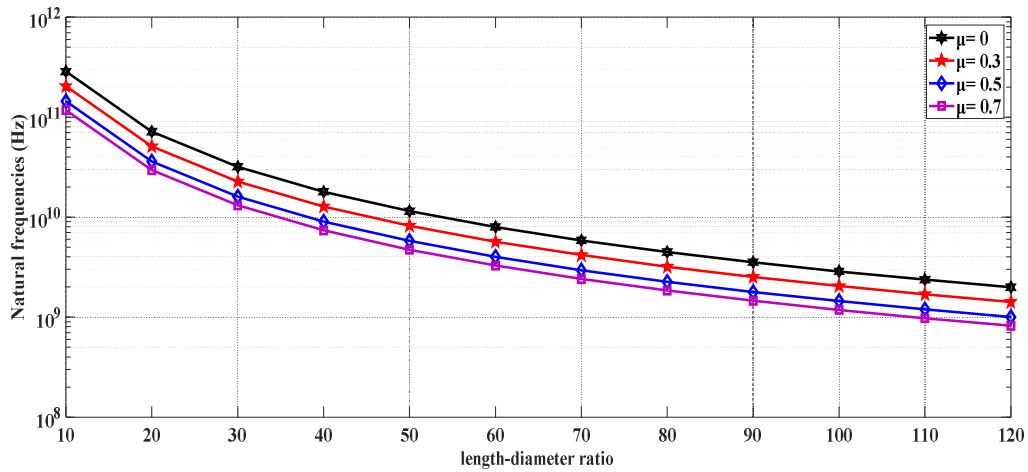


Figure 4.8 : Fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local (k=0, S-S)

Tableau 4.10 : Paramètre de fréquences en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local (k=0, S-S)

Paramètre de fréquence				
L/D	$\mu=0$	0.3	0.5	0.7
10	3.1368	2.6508	2.2272	2.0119
20	3.1404	2.6538	2.2297	2.0142
30	3.1411	2.6544	2.2302	2.0147
40	3.1413	2.6546	2.2304	2.0148
50	3.1414	2.6547	2.2304	2.0149
60	3.1415	2.6547	2.2305	2.0149
70	3.1415	2.6547	2.2305	2.0149
80	3.1415	2.6548	2.2305	2.0150
90	3.1415	2.6548	2.2305	2.0150
100	3.1415	2.6548	2.2306	2.0150
110	3.1416	2.6548	2.2306	2.0150
120	3.1416	2.6548	2.2306	2.0150

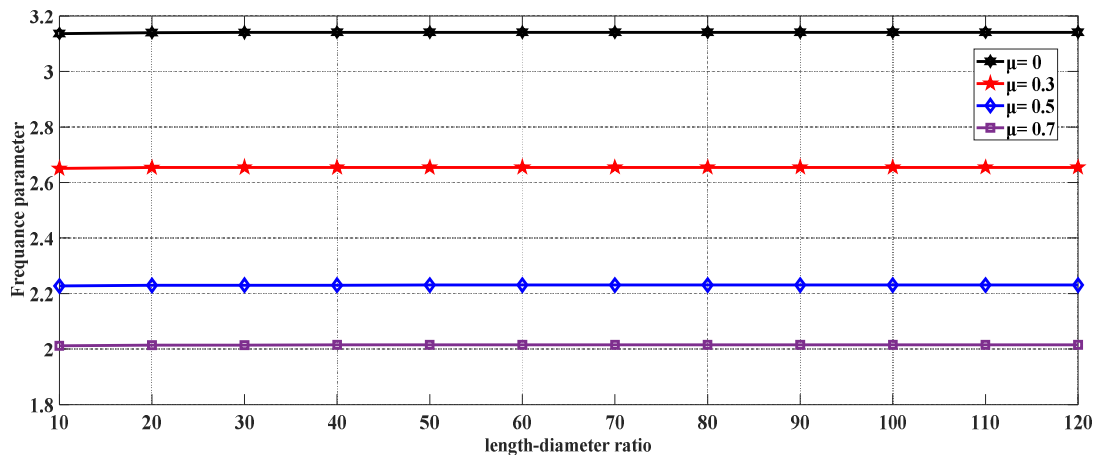


Figure 4.9 : Paramètre de fréquence en fonction de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local ( $k=0$ , S-S)

Tableau 4.11 : Fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local ( $k=0.5$ , S-S)

Fréquence Naturelle $10^{11}$				
L/D	$\mu=0$	0.3	0.5	0.7
10	2.1603	1.5427	1.0891	0.88873
20	0.5411	0.3864	0.2728	0.22261
30	0.2406	0.1718	0.1213	0.09897
40	0.1353	0.0967	0.0682	0.05568
50	0.0866	0.0619	0.0437	0.03564
60	0.0602	0.0430	0.0303	0.02475
70	0.0442	0.0316	0.0223	0.01818
80	0.0338	0.0242	0.0171	0.01392
90	0.0267	0.0191	0.0135	0.01100
100	0.0217	0.0155	0.0109	0.00891
110	0.0179	0.0128	0.0090	0.00736
120	0.0150	0.0107	0.0076	0.00619

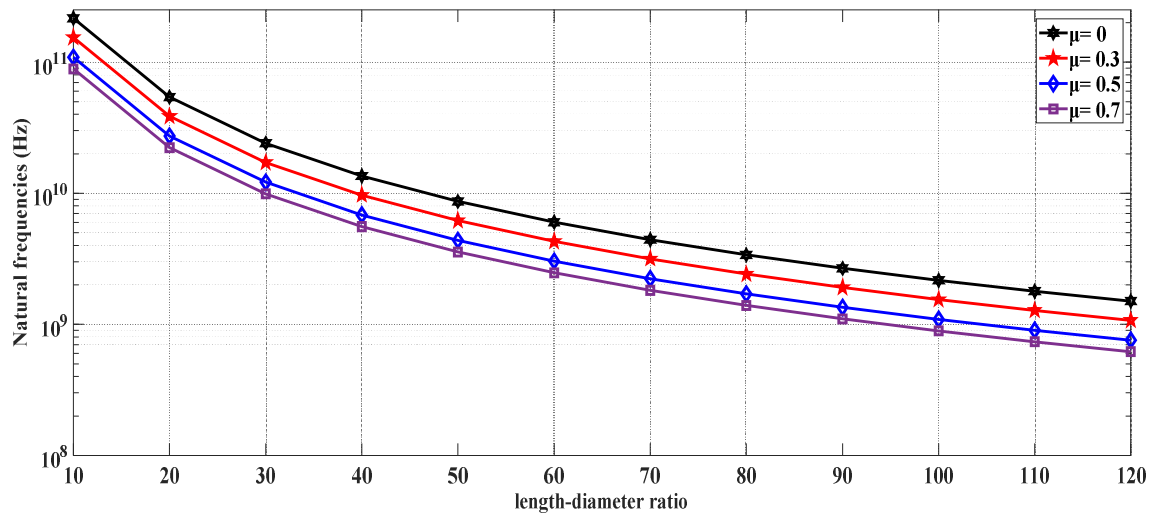


Figure 4.10: fréquences naturelles en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local ( $k=0.5$ , S-S)

Tableau 4.12 : Paramètre de fréquences en fonction de l'indice de rapport longueur diamètre pour différents paramètres non local ( $k=0.5$ , S-S)

Paramètre de fréquence				
L/D	$\mu=0$	0.3	0.5	0.7
10	2.7287	2.3059	1.9374	1.7501
20	2.7313	2.3081	1.9393	1.7518
30	2.7318	2.3085	1.9396	1.7522
40	2.7320	2.3087	1.9397	1.7523
50	2.7320	2.3087	1.9398	1.7523
60	2.7321	2.3088	1.9398	1.7523
70	2.7321	2.3088	1.9398	1.7524
80	2.7321	2.3088	1.9399	1.7524
90	2.7321	2.3088	1.9399	1.7524
100	2.7321	2.3088	1.9399	1.7524
110	2.7322	2.3088	1.9399	1.7524
120	2.7322	2.3088	1.9399	1.7524

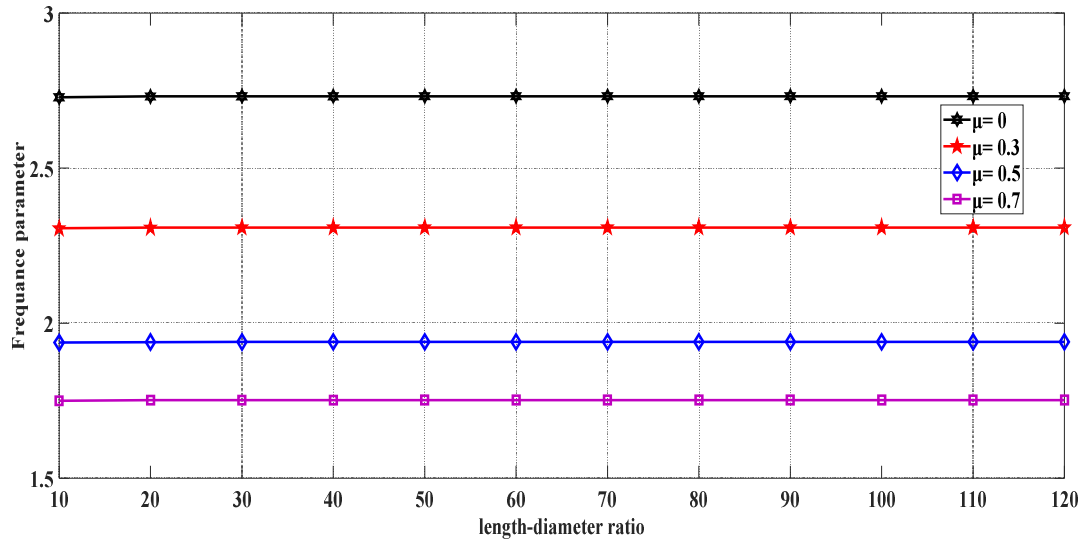


Figure 4.11 : Paramètre de fréquence en fonction de rapport longueur diamètre pour différents paramètre non locale ( $k=0.5$ , S-S)

*Interprétation :*

D’après les figures (4.7/.../4.10) et tableaux (4.9/.../4.11), on constate que les fréquences diminuent en augmentant le rapport longueur diamètre, ce qu’est physiquement est logique. Dans ce cas la valeur de diamètre est constante, seule la longueur augmente.

IV.3.5 Différents matériaux

*Données :*

Tableau 4.13 : Paramètres physiques et géométriques du rotor

Longueur L [m]	Diamètre d [m]	Aluminium	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Nickel	Or
10 * d	0.678 * 10 <sup>-9</sup>	E = 7*1010 $\rho$ = 2700	E= 3.8*1010 $\rho$ = 3800	E= 2.07*1011 $\rho$ = 8900	E= 7.8*1010 $\rho$ = 18900

Résultats :

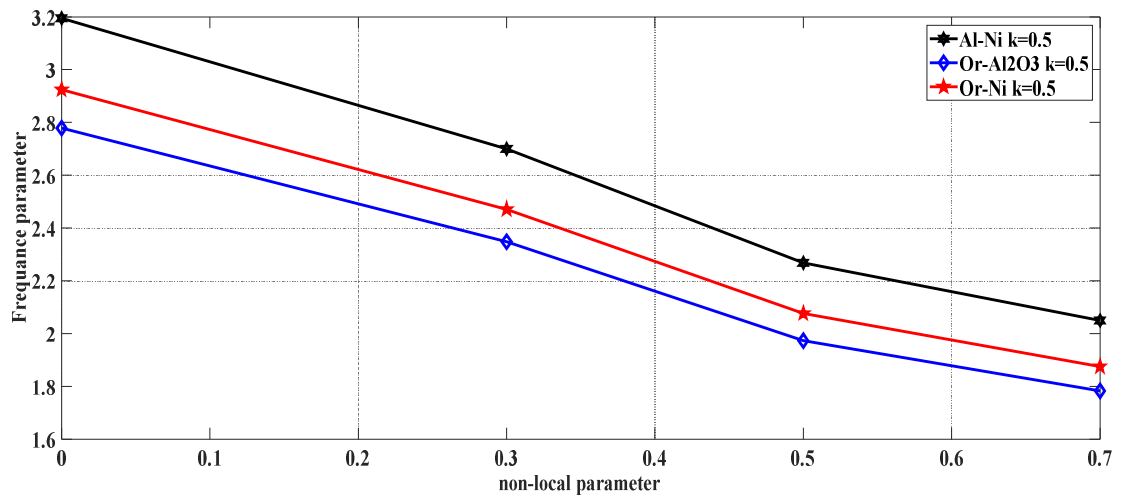


Figure 4.12: Paramètre de fréquence en fonction de paramètre non local pour différents types de mélange FG (k=0.5, S-S) avec une vitesse de rotation nul

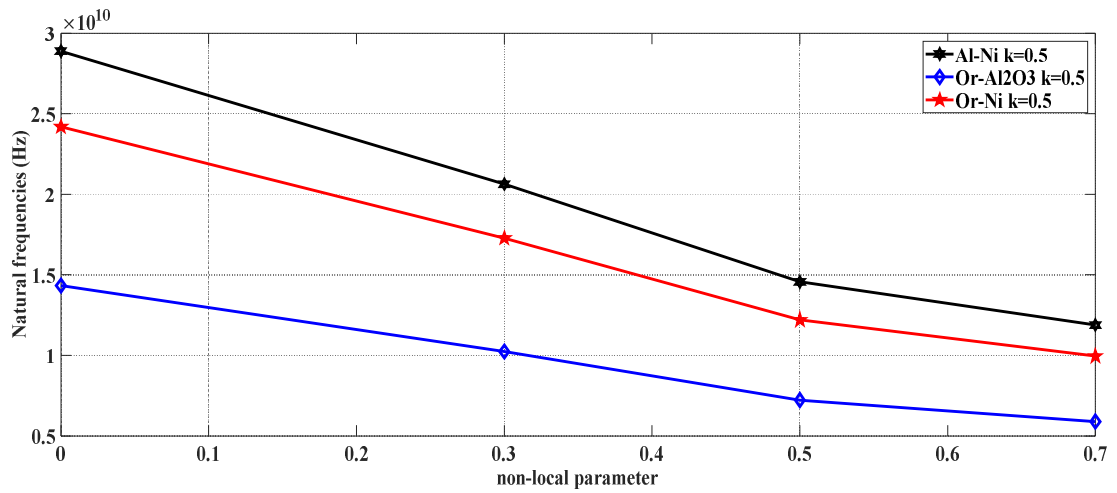


Figure 4.13 : Fréquences naturelles en fonction de paramètre non locale pour différents types de mélange FG (k=0.5, S-S) avec une vitesse de rotation nul

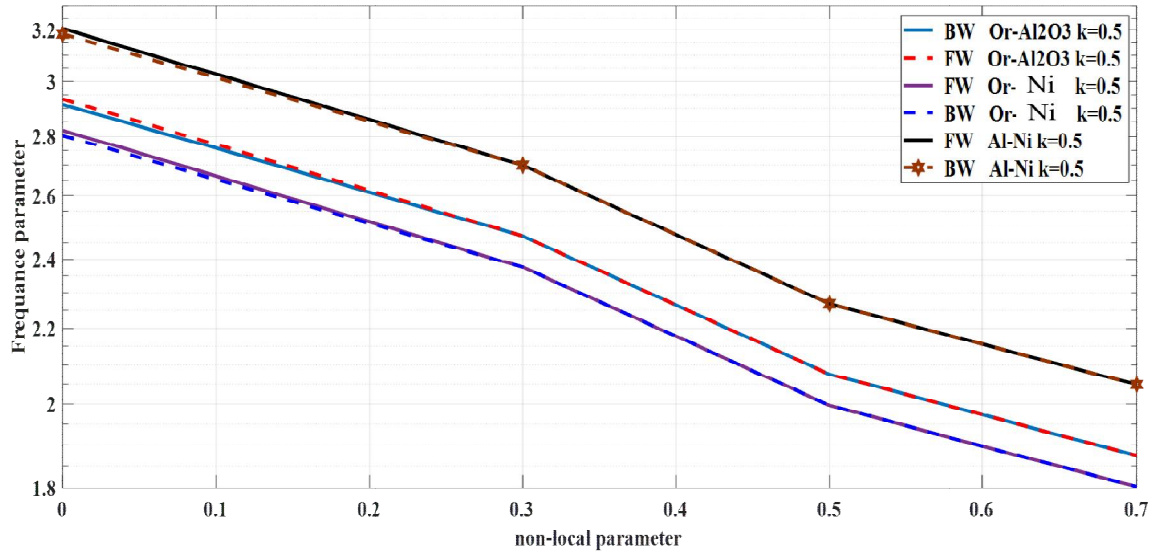


Figure 4.14: Paramètre de fréquence en fonction de paramètre non local pour différents types de mélange FG ( $k=0.5$ , S-S) avec un paramètre de vitesse égale à 100

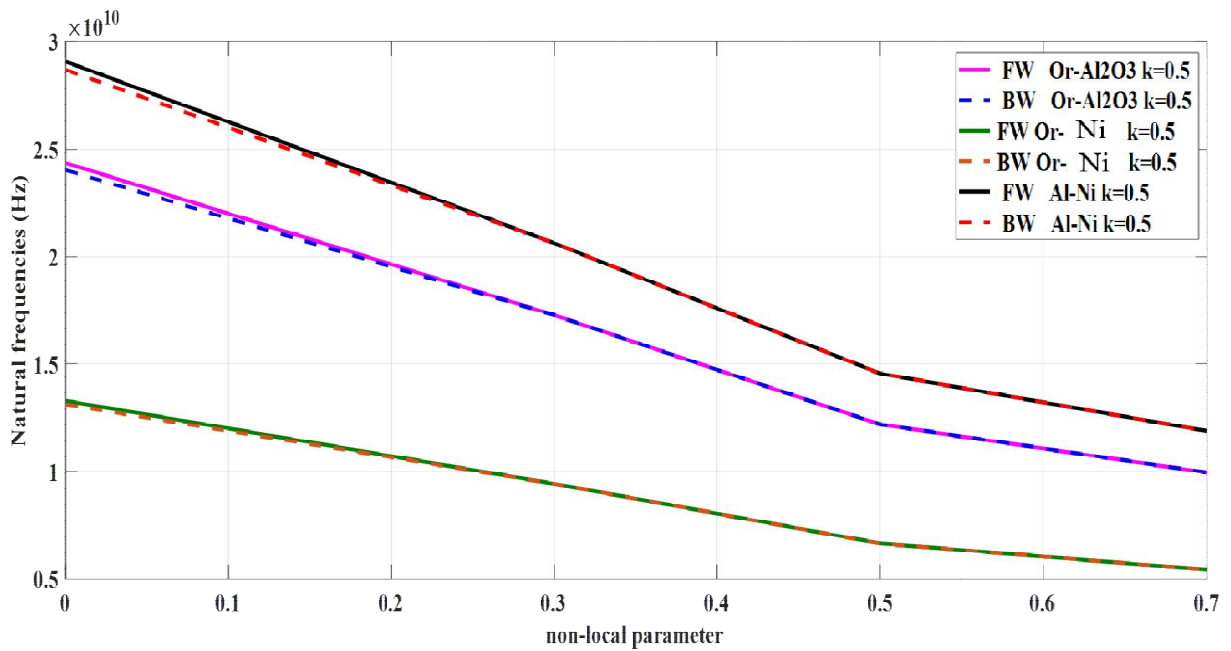


Figure 4.15: Fréquences naturelles en fonction de paramètre non local pour différents types de mélange FG ( $k=0.5$ , S-S) avec un paramètre de vitesse égale à 100

### *Interprétation :*

On remarque d'après les tableaux (4.11/.../4.14) que l'écart entre les fréquences par rapport au paramètre de vitesse de rotation est faible

Dans le domaine non local l'effet gyroscopique n'a pas une grande influence d'après les résultats.

On remarque que le mélange Al-Ni est plus résistant aux vibrations comparé au d'autre mélange tel que l'Or-Ni et l'Or-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

## **IV.4 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons étudié les influences de différents paramètres sur les fréquences propres des nano-rotors, en appliquant la DQFEM. La convergence de la méthode est très rapide et les résultats obtenus sont très proches des résultats exacts. Nous pouvons aussi dire que plus le paramètre non local augmente c'est-à-dire la nanostructure diminue plus les fréquences propres diminuent ; l'effet d'échelle augmente la rigidité de la structure.



**CONCLUSION**  
**GENERALE**

L'analyse du comportement vibrationnel des nano arbres en matériaux FG est traitée dans ce mémoire, en utilisant la méthode des éléments finis en quadrature différentiel (DQFEM). L'utilisation de cette méthode est nouvelle dans le cadre de la dynamique des rotors et en particulier dans les nano rotors.

Le calcul de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de nano arbre, l'application de principe d'Hamilton, et l'introduction des caractéristiques de la méthode des éléments finis en quadrature différentielle, nous ont donné les équations de mouvement du système. Un programme de calcul des fréquences naturelles, et le traçage des diagrammes de Campbell a été développé avec le langage de programmation Matlab.

Les résultats d'un exemple d'arbre dans la littérature ont bien été validés avec les méthodes DQFEM, et l'écart entre les méthodes est petit, ce qui explique l'efficacité des méthodes. La convergence est obtenue pour un nombre d'échantillonnage et un nombre d'élément bas par rapport aux versions h-FEM et hp-FEM.

Plusieurs exemples ont été traités et cela nous a permis de déterminer l'influence de différents paramètres géométriques du nano rotor.

Ce travail nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- La convergence des résultats peut être contrôlée en augmentant le nombre d'échantillonnage et le nombre d'éléments.
- Le polynôme de Legendre est utilisé dans ce travail, en raison de son approximation très proche des fonctions des arbres déformés.
- La méthode DQFEM présentant les avantages d'un principe mathématique simple, d'une vitesse de convergence rapide, d'une grande précision de calcul, d'une faible quantité de calcul et d'une moindre demande de mémoire, etc. Selon les résultats obtenus dans ce travail.
- La vitesse de rotation a une influence importante sur les fréquences de nano rotor, selon les résultats obtenus dans le domaine non local, les fréquences diminuent en

augmentant la valeur de la vitesse de rotation, avec une influence faible de l'effet gyroscopique comparé au domaine des macrostructures.

- Le type de matériaux choisi pour les nanostructures est primordial, les résultats pour différents mélanges FG, ont montré l'importance du type de mélange choisi.
- Les fréquences diminuent quand le paramètre non local augmente, quel que soit le pourcentage de la composition du matériau FG, c'est à dire l'indice de volume fraction.
- La rigidité du nano-rotor est comprise entre celles des matériaux qui le composent.
- les fréquences diminuent quand le rapport longueur/diamètre augmente.
- le mélange Al-Ni est plus résistant aux vibrations comparé au d'autre mélange tel que l'Or-Ni et l'Or-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Les nano rotors sont de plus en plus utilisés dans les domaines médical et électronique, d'où l'importance des études de leur comportement.

Perspectives :

Comme perspectives nous pouvons citer :

- L'étude du comportement vibratoire des nano rotors en utilisant la théorie de Timoshenko
- L'étude de l'influence de la température et de l'hydrothermie sur le comportement vibratoire des nano rotors.

## Bibliographiques

- [1] : **Zettl, Alex.** *Functionalized Boron Nitride Nanotubes with a Stannic Oxide Coating.* 2003.
- [2] : **A.C. Eringen.** *Nonlocal polar elastic continua.* 1972.
- [3] : **A.C. Eringen.** *On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves.* 1983.
- [4] : **J. A. Ruud, T. R. Jervis, and F. Spaepen.** *Nanoindentation of Ag/Ni multilayered thin films . s.l. : Journal of Applied Physics 75 , 1994 .*
- [5] : **J. Peddieson, G.R. Buchanan, and R.P. McNitt.** *Application of nonlocal continuum models to nanotechnology.* 2003.
- [6] : **Aydogdu, M.** *A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending .* 2009.
- [7] : **Reddy, J.N.** *Nonlocal theories for bending.* 2007 .
- [8] : **Xu, M.** *Free transverse vibrations of nano-to-micron scale .* 2006.
- [9] : **Wang, et al.** *Vibration of nonlocal Timoshenko beams, Nanotechnology.* 2007.
- [10] : **A. Farrokhabadi 1, H. Hosseini-Toudeshky1 And B. Mohammadi.** *Micro/macro Approach for Prediction of Matrix Cracking Evolution.* 2016.
- [11] : **S.A.M. Ghannadpour, B. Mohammadi.** *Energy approach vibration analysis of nonlocal Timoshenko beam theory.* 2011.
- [12] : **J. Loya, J. Lopez-Puente, R. Zaera, and J. Fernández-Saez.** *Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model.* 2009.
- [13] : **T. Murmu, and S. Adhikari.** *Scale-dependent vibration analysis of prestressed carbon nanotubes undergoing rotation, Journal of Applied.* 2010.
- [14] : **M.A. Eltaher, A. Emam Samir, F.F. Mahmoud.** *Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams .* 2012 .
- [15] : **J. K. Phadikar, and S. C. Pradhan.** *Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates.* 2010.
- [16] : **T. Murmu.** *Small-scale effect on the vibration of nonuniform nanocantilever based on nonlocal elasticity theory.* 2009.
- [17] : **S. Chakraverty, R. Jindal, V. K. Agarwal.** *Effect of non-homogeneity on natural frequencies of vibration of elliptic plates, Meccanica.* 2007.

- [18] : **Bresson, Paul.** *Étude des phénomènes thermiques ultrarapides dans les nanostructures plasmoniques.* 2020
- [19] : **xing, liu.** *High-accuracy differential quadrature finite element method.* 2009.
- [20] : **YOSHIDA, KANJI.** *Targeted disruption of gpl30, a common signal transducer for the.* 1996
- [21] : **Niino, M.** *Fabrication of a High Pressure Thrust Chamber by the CIP Forming Method .* 1984
- [22] : **Wakashima et al.** *the stresses and strains in a thick-walled tube for functionally graded material.* 1990.
- [23] : **Malik, Charles W Bert and Moinuddin.** *Differential quadrature method in computational mechanics.* 1996, Applied Mechanics Revue.
- [24] : **Sliepevich, Civan et.** *Quadrature différentielle pour les problèmes multidimensionnels.* 1984.
- [25] : **Striz, A. G., Chen, W. L. and Bert, C. W.** *Free vibration of plates by the high accuracy quadrature element method.* 1997.
- [26] : **Zhong, H. and Yu, T.** *weak form quadrature element method for plane elasticity problems.* 2009, Applied Mathematical Modelling.
- [27] : **Chen and New, C.** *differential quadrature finite element method..* 1999, Proceedings of the 6th Pan-American.
- [28] : **Yufeng, X., Bo, L. and Guang, L.** *Differential Quadrature Finite Element Method.* 2010, International Journal of Applied Mechanics.
- [29] : **C. M. Wang, Y. Y. Zhang, X. Q. He,.** *Vibration of nonlocal Timoshenko beams, Nanotechnology .* 2007 .
- [30] : **Ahmed, SAIMI, et al.** *Diffirentail quadrature finit elements and Diffirentail quadrature hierchical finit elements methodes for the dynamics analysis of on board shaft. european Journal of computational mechanics.* 2021.
- [31] : **Gibert, R. J.** *Pressure Vessel Technol.* 2010.
- [32] : **Chakraverty, Behera.** *Free vibration of Euler and Timoshenko nanobeams using boundary characteristic orthogonal polynomials.* 2013.