

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Génie mécanique

Spécialité : Construction mécanique

Par : KHELIFI ABDESSAMED

Sujet

**Etude de la vibration libre d'une plaque triangulaire de Mindlin
par la version p de la méthode des éléments finis**

Soutenu publiquement, le 28 /06 /2022 , devant le jury composé de :

M. HOUMAT Abderrahim
M. BELKAID Mohammed
M. MEFTAH Khouane

Professeur
MAA
Professeur

Université de Tlemcen
Université de Tlemcen
Université de Tlemcen

Président
Encadreur
Examineur

Année universitaire : 2021 /2022

Je dédie ce travail :

A mon père que dieu l'accueille dans son vaste paradis

A ma mère

A mes frères et ma sœur

*A ma famille **KHELIFI** et **OUJEDI***

A tous mes collègues de promo construction mécanique 2022

Et à tous ceux qui m'ont apporté leur aide

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier « ALLAH » le tout puissant de m'avoir donnée la force, le courage et la volonté de réaliser ce travail.

*Je tiens mes remerciements, et vive gratitude à mon directeur de mémoire monsieur **BELKAID MOHAMED**, de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir consacré beaucoup de son temps à la réalisation de ce mémoire. De plus, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses compétences, sa confiance, ses conseils et ses encouragements.*

*Je tiens à remercier monsieur le professeur **Houmat Abderrahim**, pour avoir accepté de présider le jury.*

*Je tiens à remercier monsieur **Meftah Khouane**, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail.*

*Ma reconnaissance et mes remerciements s'adressent aussi à tous mes enseignants et l'équipes pédagogiques de la faculté de technologies à l'université **ABOU BEKR BELAIKD** Tlemcen.*

Merci à toutes les personnes qui ont aidé, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'application de la version p de la méthode des éléments finis à l'étude de vibration libre d'une plaque triangulaire.

La formulation du problème est basée sur la théorie des plaques épaisse (théorie de MINDLIN). Un programme en FORTRAN 77 est élaboré, les résultats obtenus sont validés avec la littérature. Une étude paramétrique est établie.

Les résultats obtenus sont donnés sous formes de graphes et de tableaux.

Mots clés :

Vibration libre, version p, éléments finis, fréquences propres, modes propres de la vibration, plaque triangulaire, plaque de Mindlin

ABSTRACT

The objective of this work is the application of the p version of the finite element method to the study of free vibration of a triangular plate.

The formulation of the problem is based on the theory of thick plates (MINDLIN theory). A program in FORTRAN 77 is elaborated, the obtained results are validated with the literature. A parametric study is established.

The obtained results are given in the form of graphs and tables.

Keywords:

Free vibration, p-version, finite elements, natural frequencies, natural modes of vibration, triangular plate, Mindlin plate

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطبيق النسخة p من طريقة العناصر المحدودة لدراسة الاهتزاز الحر للوحة مثانة. تعتمد صياغة المشكلة على نظرية الصفائح السمكية (نظرية MINDLIN). تم تطوير برنامج في FORTRAN 77 ، ويتم التحقق من صحة النتائج التي تم الحصول عليها مع دراسات سابقة. تم إنشاء دراسة بارامترية. النتائج التي تم الحصول عليها تم تقديمها على شكل رسوم بيانية وجداول.

الكلمات المفتاحية

اهتزاز حر , إصدار p , ترددات ذاتية , الوضع الذاتي للاهتزاز , عناصر محدودة , لوحة مثانة ,
لوحة مندلين

Sommaire

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des graphes

Notations

Introduction 1

Chapitre 1: Généralité sur les plaques

1.1. Introduction 3

1.2. Définition d'une plaque 3

1.3. Domaines de validité 4

1.4. Théorie des plaques minces 4

1.4.1. Hypothèses 5

1.4.2. Champs de déplacement 5

1.4.3. Relation déformation-déplacement 6

1.4.4. Relation contraintes-déformation 7

1.5. Théorie des plaques épaisses 7

1.5.1. Hypothèses 8

1.5.2. Champ de déplacement 8

1.5.3. Relation déformation-déplacement 9

1.5.4. Relations contraintes-déformation 10

1.5.5. Facteur de correction du cisaillement transversal 12

1.6. Energie de déformation et énergie cinétique de la plaque 13

1.6.1. Energie de déformation 13

1.6.2. Energie cinétique 14

1.7. Equation de mouvement 15

Chapitre 2: Formulation par la version p de la méthode des éléments finis

2.1. Introduction 16

2.2. Domaines d'application 16

2.3. Version-p de la MEF 17

2.4. Fondement de la version-p 17

2.5. Avantages de la méthode-p	17
2.6. Inconvénients de la méthode-p.....	18
2.7. Modélisation de la plaque	19
2.7.1. Coordonnées d'aire	19
2.7.1.1. Interpolation linéaire	20
2.7.1.2. Transformation des coordonnées.....	20
2.7.1.3. Dérivés partielles	21
2.7.2. Choix de l'élément fini.....	22
2.7.3. Espaces polynomiaux	23
2.7.3.1. Espace "Serendipity" Sp	23
2.7.3.2. Espace "Lagrange" Sp, q	24
2.7.3.3. Espace "mixte" Sp, q :	24
2.7.4. Fonctions de forme hiérarchiques	24
2.7.4.1. Fonctions de forme nodales.....	25
2.7.4.2. Fonctions de forme de cotés.....	25
2.7.4.3. Fonctions de forme internes	25
2.7.5. Vecteurs de déformation χ et γ	27
2.7.5.1. Vecteur de courbure de flexion χ	27
2.7.5.2. Vecteur de déformation γ	28
2.7.6. Matrices masse et de rigidité élémentaires.....	30
2.7.6.1. Matrice masse.....	30
2.7.6.2. Matrice de rigidité	31

Chapitre 3: Programmation

3.1. Introduction	36
3.2. Environnement de la programmation	36
3.3. Organigramme du programme	37
3.4. Description du programme.....	38
3.4.1. Sous-programme INPUT	38
3.4.2. Sous-programme INTEGRALE	39
3.4.3. Sous-programme MATRICE MASSE [M].....	39
3.4.4. Sous-programme MATRICE RIGIDITE [K]	39
3.4.5. Sous-programme CONDITIONS AUX LIMITES.....	39
3.4.6. Sous-programme JACOBI	40

3.4.7. Sous-programme SORT 40
3.4.8. Sous-programme AFFICHAGE 40

Chapitre 4: Résultats et interprétations

4.1. Introduction 41
4.2. Validation du programme..... 41
4.3. Etude de convergence..... 41
 4.3.1. Validation des résultats 43
 4.3.1.1. Cas d'un plaque triangulaire E-L-L avec $b/a=1$ 43
 4.3.1.2. Cas d'un plaque triangulaire E-L-L avec $b/a=2$ 44
4.4. Influence du rapport b/a 46
4.5. Influence du l'épaisseur e 50
4.6. Influence du facteur de correction du cisaillement transversal (k) 53
Conclusion..... 53

Références bibliographiques

Annexe-A-

Annexe-B-

Annexe-C-

Annexe-D-

Annexe-F-

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1.1: plaque de forme quelconque	3
Figure 1.2: Déformation d'une plaque mince	5
Figure 1.3: Déplacement u d'un point dans un élément infinitésimal [7]	6
Figure 1.4: Définition de l'état supposé de la déformée dans la direction Y [7]	9
Figure 1.5 : Contraintes dans une plaque [7].....	11
Figure 1.6: Moment de flexion et efforts de cisaillement dans une plaque [7]	11

Chapitre 2

Figure 2.1 : Coordonnées cartésiennes et Coordonnées d'aire pour élément triangulaire.....	19
Figure 2.2: élément finis triangulaire	23
Figure 2.3: Elément réel et élément de référence	23
Figure 2.4: Espace Serendipity.....	24
Figure 2.5: Espace Lagrange	24

Chapitre 3

Figure 3.1 : Elément p triangulaire.....	36
Figure 3.2: Organigramme principal.....	37

Chapitre 4

Figure 4.1: Plaque triangulaire E-L-L	41
Figure 4.2 : plaque triangulaire avec différents rapport b/a	46

Liste des tableaux

Tableau 4.1 : Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=0.5$, $a=10$, $e=0.063$).....	42
Tableau 4.2: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$, $e=0.063$).....	42
Tableau 4.3: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=1.5$, $a=10$, $e=0.063$).....	43
Tableau 4.4: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=2$, $a=10$, $e=0.063$).....	43
Tableau 4.5: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$, $e=0.063$).....	43
Tableau 4.6: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=2$, $a=10$, $e=0.063$).....	44
Tableau 4.7 : paramètres de fréquence ω en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3$, $e=0.5$, $a=10$, $e/a=0.05$).....	47
Tableau 4.8 : paramètres de fréquence ω en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3$, $e=1$, $a=10$, $e/a=0.1$).....	47
Tableau 4.9 : paramètres de fréquence ω en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3$, $e=1.5$, $a=10$, $e/a=0.15$).....	47
Tableau 4.10: paramètres de fréquence ω en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3$, $e=2$, $a=10$, $e/a=0.2$).....	47
Tableau 4.11: paramètres de fréquence ω en fonction de rapport e ($\nu=0.3$, $b/a=0.5$, $a=10$) ..	50
Tableau 4.12: paramètres de fréquence ω en fonction de rapport e ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$) ..	50
Tableau 4.13: paramètres de fréquence ω en fonction de rapport e ($\nu=0.3$, $b/a=1.5$, $a=10$) ..	50
Tableau 4.14: paramètres de fréquence ω en fonction de rapport e ($\nu=0.3$, $b/a=2$, $a=10$) ..	50
Tableau 4.15 : paramètres de fréquence ω en fonction de k ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$, $e=0.5$, $e/a=0.05$).....	53
Tableau 4.16: paramètres de fréquence ω en fonction de k ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$, $e=1$, $e/a=0.1$).....	53
Tableau 4.17 : paramètres de fréquence ω en fonction de k ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$, $e=1.5$, $e/a=0.15$).....	54
Tableau 4.18 : paramètres de fréquence ω en fonction de k ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$, $e=2$, $e/a=0.2$).....	54

Liste des graphes

Graphe 4.1 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L $b/a=0.5$	44
Graphe 4.2 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L $b/a=1$	45
Graphe 4.3 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L $b/a=1.5$	45
Graphe 4.4 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L $b/a=2$	46
Graphe 4.5 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=0.5, e/a=0.05$).....	48
Graphe 4.6 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=1, e/a=0.1$).....	48
Graphe 4.7 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=1.5, e/a=0.15$).....	49
Graphe 4.8 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=2, e/a=0.2$).....	49
Graphe 4.9 : Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=0.5$)	51
Graphe 4.10 : Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1$)	51
Graphe 4.11 : Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1.5$).....	52
Graphe 4.12 : Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=2$)	52
Graphe 4.13 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1, e=0.5, e/a=0.05$).....	54
Graphe 4.14 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1, e=1, e/a=0.1$).....	55
Graphe 4.15 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1, e=1.5, e/a=0.15$).....	55
Graphe 4.16 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1, e=2, e/a=0.2$).....	56

Notations

x, y, z	Coordonnées cartésiennes
ξ_1, ξ_2, ξ_3	Coordonnées d'aire (Triangulaire)
a, b	Dimensions de la plaque
e	Epaisseur de la plaque
A	Aire de l'élément finis
G	Module de cisaillement
E	Module de YOUNG
K	Facteur de correction du cisaillement transversale
$[M^e]$	Matrice masse élémentaire
$[k^e]$	Matrice rigidité élémentaire
ν	Coefficient de poisson
ρ	Masse volumique
T	Energie cinétique
U	Energie de déformation
U_F	Energie de déformation due à la flexion
U_C	Energie de déformation due u cisaillement transversale
$[D_F]$	Matrice des constantes élastique de flexion
$[D_C]$	Matrice des constantes élastique de cisaillement transversale
$\{q\}$	Vecteur coordonnées généralisées
u	Déplacement suivant x
v	Déplacement suivant y
w	Déplacement suivant z
θ_x	Rotation par rapport à l'axe x
θ_y	Rotation par rapport à l'axe y
ω	Fréquence propre

Ω	Paramètre de fréquence ($\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$)
$\{\gamma\}$	Vecteur de déformation
$\{\chi\}$	Vecteur de courbure de flexion
$[K_F]$	Matrice de rigidité élémentaire due à la flexion
$[K_C]$	Matrice de rigidité due au cisaillement transversale
$[B_F]$	Matrice de déformation de flexion
$[B_C]$	Matrice de déformation de cisaillement
$N_I(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$	Fonctions de formes
P_i^*	Polynôme de Legendre
R	Nombre totale degré de liberté
t	Temps

Introduction

Les plaques font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés, d'où la nécessité de l'étude de leur comportement vibratoire et d'une grande importance pour les ingénieurs ce qui va permettre de concevoir de meilleures structures.

L'analyse vibratoire est une thématique actuelle importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette dernière touche de nombreux domaines, comme l'ingénierie mécanique, l'ingénierie navale et civile, génie nucléaire, aéronautique et la technologie spatiale. Le contrôle des vibrations dans les éléments de structure comme les plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur.

Pour assurer ce contrôle, la détermination du comportement des plaques est indispensable. Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à des niveaux d'excitations importants. C'est pour cette raison que le comportement des plaques est depuis plus de cent ans le sujet de recherches exhaustives.

Ce mémoire, « étude de la vibration d'une plaque triangulaire par la méthode des éléments finis » s'inscrit dans cette thématique

L'objectif fondamental de ce travail est de résoudre le problème en vibration des plaques triangulaires isotropes afin d'obtenir les fréquences et les modes propres, en utilisant la version p de la méthode des éléments finis soumis à différentes paramètres.

Le travail réalisé est organisé en quatre chapitres :

Dans un premier temps, le **chapitre 1** présente une généralité sur plaques avec des rappels théoriques sur les lois du comportement et les champs de déplacements des théories de KIRCHHOFF et MINDLIN

Dans le **2^{ème} chapitre** une formulation par la version-p des éléments finis, un élément triangulaire est présenté, nous déterminons les fonctions de formes de cet élément ainsi que la matrice masse [M] et la matrice rigidité [K].

Dans le **3^{ème} chapitre** nous décrivons les différentes étapes de programmation, l'environnement et l'algorithme de calcul.

Le **4^{ème} chapitre** est consacré à l'interprétation des résultats obtenus par le programme élaboré pour différents paramètres.

Chapitre 1: Généralités sur les plaques

1.1.Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans la conception industrielle de la mécanique (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), dans l'industrie sous-marine, aérospatial, génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,..), dans le domaine de l'énergie, et même dans le monde du vivant (artères, bronches,...), etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

Afin de résoudre les problèmes des structures mécaniques ayant comme éléments structuraux des plaques dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement dynamique et statique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

1.2. Définition d'une plaque

La plaque est un corps solide tridimensionnel limité par deux plans (les faces de la plaque). Avec une épaisseur e , la surface moyenne située à mi-distance entre les deux faces de la plaque (Figure (1.1)).

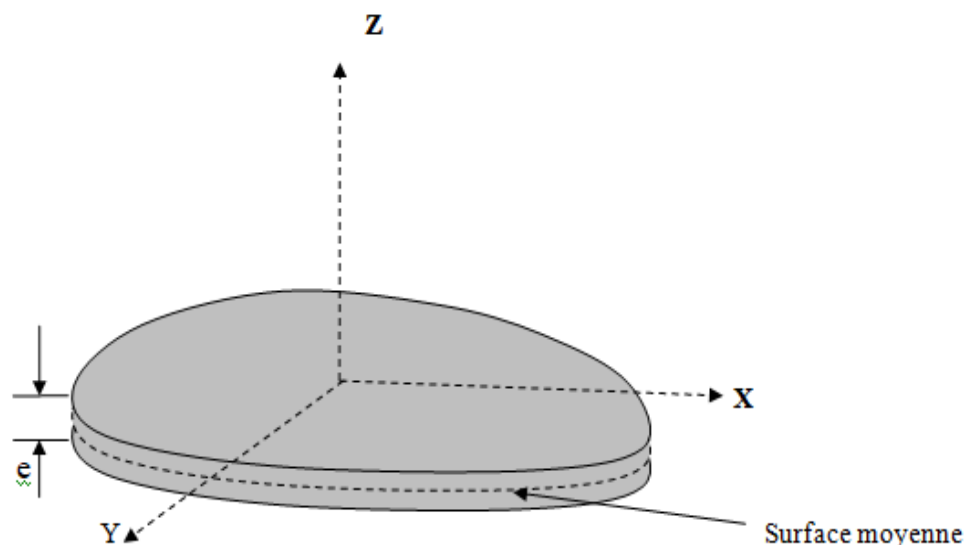


Figure 1.1: plaque de forme quelconque

Les plaques peuvent être classées en trois catégories :

- 1) Les plaques isotropes: elles sont constituées d'un matériau isotrope et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes.
- 2) Les plaques orthotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art
- 3) Les plaques anisotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les définir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

1.3. Domaines de validité

La vibration de la plaque est étudiée par deux théories de base approchées,

- La première est constituée de plaques minces (appelée théorie des plaques de Kirchhoff),
- La seconde est La théorie des plaques épaisses (appelée théorie des plaques de Mindlin).

Ainsi, la plaque peut être mince ou épaisse. La validité de chacun d'eux dépend de ses caractéristiques géométriques

- Théorie de Kirchhoff (plaque mince) : $\frac{e}{L} < \frac{1}{20}$
- Théorie de Mindlin (plaque épaisse) : $\frac{1}{20} \leq \frac{e}{L} \leq \frac{1}{4}$

Où L est une dimension caractéristique de la plaque dans le plan (xy).

1.4. Théorie des plaques minces

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [1] de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée (Figure. I.6) [2]

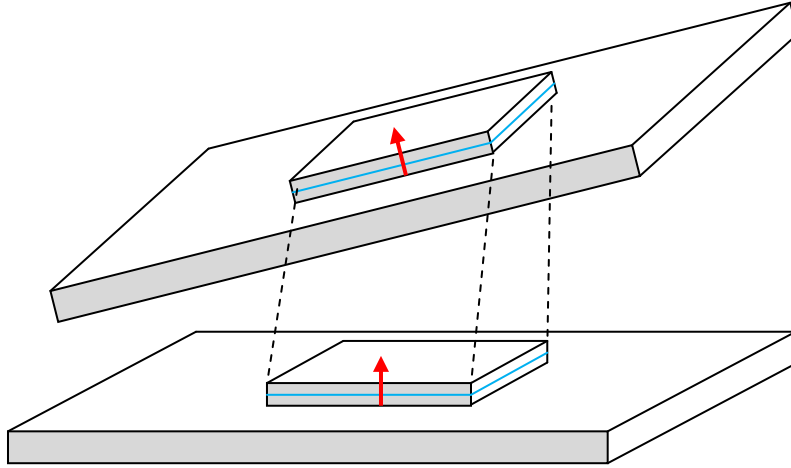


Figure 1.2: Déformation d'une plaque mince

1.4.1. Hypothèses

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff [1] de contrainte plane, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- 1) La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- 2) Les sections droites initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation due au cisaillement transversal est donc négligée.
- 3) Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
- 4) La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z .

1.4.2. Champs de déplacement

Les composantes du champ de déplacements pour le cas de la théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$u(x,y,z,t) = z\theta_y(x,y,t) \tag{1.1}$$

$$v(x,y,z,t) = -z\theta_x(x,y,t) \tag{1.2}$$

$$w(x,y,z,t) = w(x,y,t) \tag{1.3}$$

Où

x , y et z sont les coordonnées d'un point de la plaque dans un repère Cartésien.

θ_x , θ_y sont les rotations par rapport aux axes x et y respectivement.

t est le temps.

Les déplacements u , v d'un point quelconque dans un élément infinitésimal est montré dans la figure (1.3)

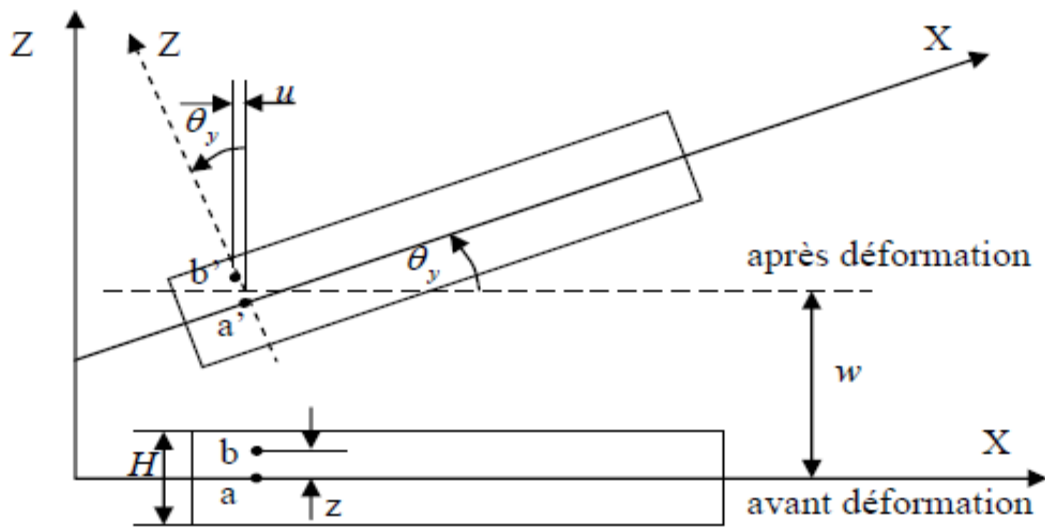


Figure 1.3: Déplacement u d'un point dans un élément infinitésimal [7]

1.4.3.Relation déformation-déplacement

Les relations déformations-déplacements sont données par :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \tag{1.4}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \tag{1.5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \tag{1.6}$$

En remplaçant, respectivement, les rotations θ_x , θ_y dans les équations (1.4), (1.5), (1.6) nous obtenons :

$$\varepsilon_{xx} = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.8)$$

$$\gamma_{xy} = -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.9)$$

1.4.4. Relation contraintes-déformation

Les relations contraintes-déformations pour un matériau isotrope sont données par :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad (1.10)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad (1.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (1.12)$$

En remplaçant ε_{xx} , ε_{yy} et γ_{xy} dans (1.10), (1.11) et (1.12) nous obtenons :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.14)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{Ez}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.15)$$

1.5. Théorie des plaques épaisses

Lorsque l'épaisseur sur la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (ie elle n'est plus très petite devant la dimension des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

Rayleigh en 1877 puis Timoshenko en 1921 [3] montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement transversal affecte les fréquences propres de flexion de poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement transversal est proposée par Reissner en 1945 [4] dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948 [5]. C'est cependant l'article de Mindlin [6], publié 3 ans plus tard qui fera date.

1.5.1.Hypothèses

Les hypothèses de Mindlin, reprennent le premier point et le quatrième point de celle de Kirchhoff. La deuxième et la troisième de précédentes hypothèses ne sont plus retenues afin de prendre en compte les deux nouveaux effets :

- L'effet du cisaillement transversal.
- L'inertie de rotation.

1.5.2.Champ de déplacement

Dans la théorie des plaques de Mindlin, les composantes du champ de déplacements (figure 1.4) sont données par :

$$u(x,y,z,t) = z\theta_y(x, y, t) \quad (1.16)$$

$$v(x,y,z,t) = -z\theta_x(x, y, t) \quad (1.17)$$

$$w(x,y,z,t) = w(x,y,t) \quad (1.18)$$

Ou

u, v : sont les déplacements membranaires dans les directions x et y respectivement

w : est le déplacement transversal ;

θ_x, θ_y : sont les rotations autour des axes x et y respectivement .

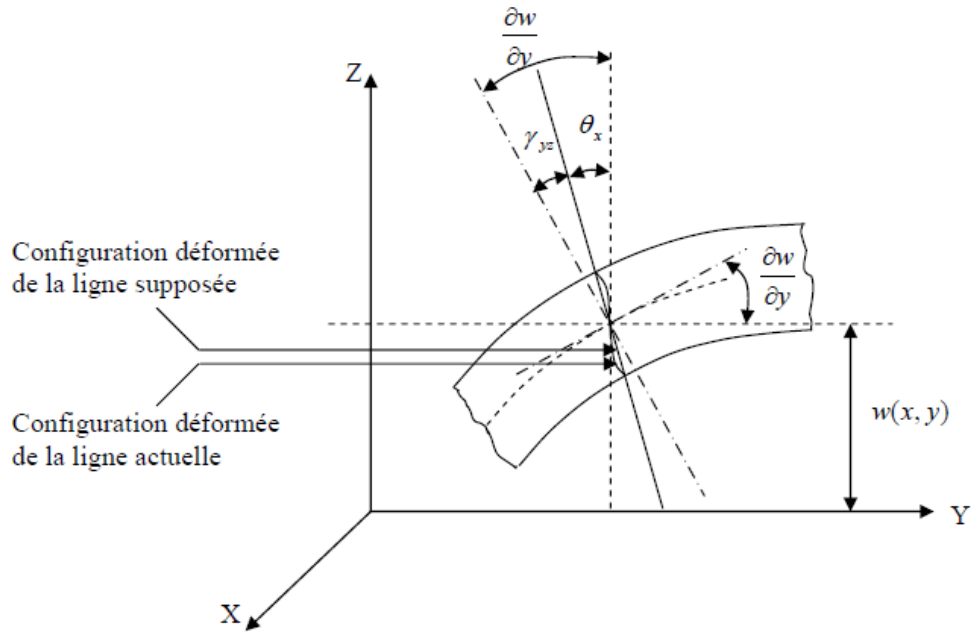


Figure 1.4: Définition de l'état supposé de la déformée dans la direction Y [7]

1.5.3. Relation déformation-déplacement

Les relations déformations-déplacements [9] s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (1.19a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (1.19b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.19c)$$

$$\gamma_{xy} = z \left(-\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (1.19d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \quad (1.19e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \quad (1.19f)$$

Les équations (1.19) peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = -z\{\chi\} \quad (1.20)$$

Et

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Ou

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Et} \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

1.5.4. Relations contraintes-déformation

Les relations contraintes –déformations pour un matériau isotrope sont donnée par :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_x + \nu \chi_y) \quad (1.23A)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_y + \nu \chi_x) \quad (1.23B)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (1.23C)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = Gz \chi_{xy} \quad (1.23D)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (1.23E)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \quad (1.23F)$$

G est le module de cisaillement donnée par :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Les contraintes, moments de flexion et de torsion et efforts de cisaillement sont représentées dans les figures (1.5) (1.6)

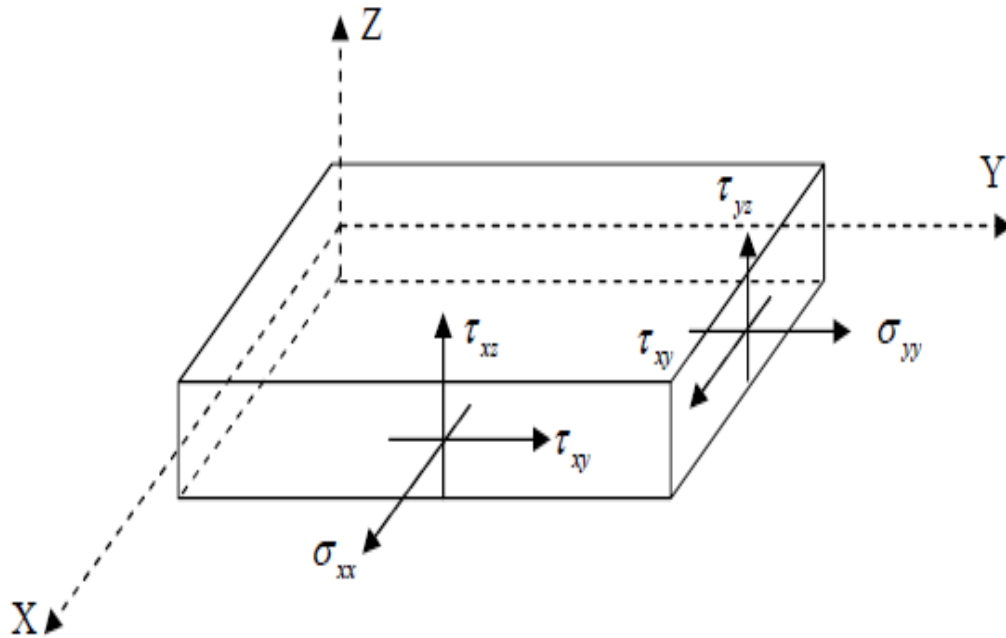


Figure 1.5 : Contraintes dans une plaque [7]

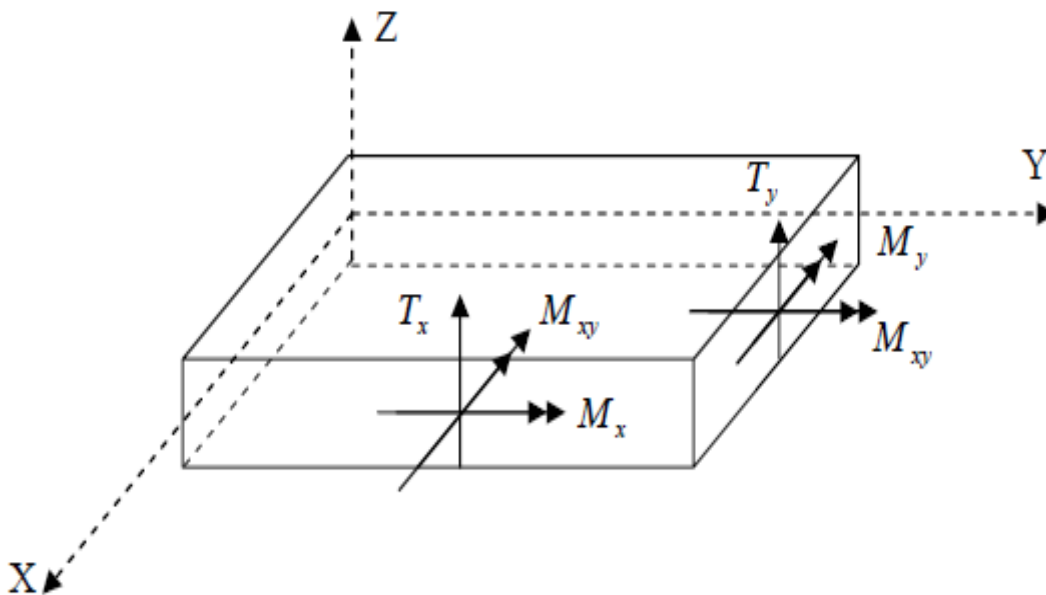


Figure 1.6: Moment de flexion et efforts de cisaillement dans une plaque [7]

Les relations entre les efforts et les courbures sont obtenues en intégrant les équations (1.23)

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_x z dz \\ \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_y z dz \\ \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \tau_{xy} z dz \\ \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \tau_{xz} dz \\ \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \tau_{yz} dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ D(\chi_y + \nu\chi_x) \\ D\frac{(1-\nu)}{2}\chi_{xy} \\ kGH\chi_{xz} \\ kGH\chi_{yz} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Où , M_x, M_y et M_{xy} sont les moments de flexion par unité de longueur,
 T_x et T_y sont les efforts dus au cisaillement transversal par unité de longueur,
 k facteur de correction du cisaillement transversal,
 e épaisseur de la plaque,
 D rigidité de flexion de la plaque donnée par :

$$D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$$

1.5.5.Facteur de correction du cisaillement transversal (k)

K est un facteur corrigeant l'hypothèse de contrainte de cisaillement τ_{zx} et τ_{zy} constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin [6], en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres.

Mindlin trouve ce facteur dépendant du coefficient de Poisson ν et variant de 0.86 pour $\nu=0.176$ à 0.91 pour $\nu=0.50$ dans le cas de matériau isotrope [8].

En choisissant k de façon à évaluer les fréquences du premier mode antisymétrique d'une plaque isotrope, déterminées par la théorie exacte de l'élasticité de la théorie de Mindlin. Nous pouvons montrer que le facteur k est solution d'une équation polynomiale d'ordre 3 [9] telle que :

$$K=0,86 \text{ si } \nu=0,300 \text{ et } k = \frac{\pi^2}{12} \text{ si } \nu=0,176 \quad (1.25)$$

Wittrick en 1987[10] propose une approximation de k dans le cas d'une plaque simplement supportée

$$k = \frac{5}{(6 - \nu)}$$

En comparant les résultats de Mindlin et de Reissner, qui une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, nous obtenons $k=5/6$.

A ce jour, la valeur de facteur k est toujours sujette à discussion et peu d'autres s'accordent excepté pour juger de son influence sur les résultats

1.6. Energie de déformation et énergie cinétique de la plaque

1.6.1. Energie de déformation

L'énergie de déformation due au mouvement de flexion de la plaque de Mindlin donnée en fonction des tenseurs de contraintes σ et de déformation ε par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (1.26)$$

Ou bien

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T B \varepsilon dV \quad (1.27)$$

Et $\varepsilon^T = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}$: V et le volume de la plaque et la matrice B des constantes élastique du matériau pour une plaque élastique isotrope donnée par

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kG & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kG \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

La substitution des équations (1.19) et (1.28) dans l'équation (1.27) et intégration par rapport à l'épaisseur de la plaque donne :

$$U = \frac{1}{2} \int \left\{ D \left[(\chi_x + \nu \chi_y) \chi_x + (\chi_y + \nu \chi_x) \chi_y + \frac{1-\nu}{2} \chi_{xy} \chi_{xy} \right] + kG e [\gamma_{xz} \gamma_{xz} + \gamma_{yz} \gamma_{yz}] \right\} dA \quad (1.29)$$

Où $dA = dx dy$

L'équation (1.27) peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(D \begin{Bmatrix} \chi_x & \chi_y & \chi_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} + kGe \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \right) dA \quad (1.30)$$

$$\text{Où bien } U = \frac{1}{2} \int \{\chi\}^T [D_F] \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int \{\gamma\}^T [D_C] \{\gamma\} dA \quad (1.31)$$

$$U = U_F + U_c$$

où

$$[D_F] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Et

$$[D_C] = kGe \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Où

U_F : est l'énergie de déformation due à la flexion

U_c : est l'énergie de déformation due au cisaillement transversal

$[D_F]$: est la matrice des constantes élastiques de flexion

$[D_C]$: est la matrice des constantes élastique due au cisaillement transversal.

1.6.2. Energie cinétique

L'énergie cinétique pour une plaque de Mindlin donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (1.34)$$

Où $\dot{u} = z\dot{\theta}_y$ et $\dot{v} = z\dot{\theta}_x$ et le point dénote la dérivée par rapport au temps.

L'équation (1.34) peut s'écrire comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \int_{-e/2}^{e/2} \int \rho (\dot{w}^2 + z^2 \dot{\theta}_y^2 + z^2 \dot{\theta}_x^2) dz dA$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (h\dot{w}^2 + \frac{e^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{e^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dA \quad (1.35)$$

Où sous forme matricielle comme suit

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \begin{Bmatrix} \dot{w} & \dot{\theta}_x & \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^3}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} dA = \frac{1}{2} \int \rho \begin{Bmatrix} \dot{w} & \dot{\theta}_x & \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} [D_M] \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} dA \quad (1.36)$$

Où

$$[D_M] = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^3}{12} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

1.7. Equation de mouvement

L'équation de mouvement sera déduit a partir de l'équation de Lagrange [12]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.38)$$

Où q est une coordonnée généralisée ; L représenté le lagrangien du système

$$L = T - U \quad (1.39)$$

T : Energie cinétique

U : Energie de déformation

En remplant l'équation (1.39) dans l'équation (1.38), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (1.40)$$

L'équation de mouvement peut être écrire sous la forme

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{q\} = 0$$

Où $[K]$: est la matrice de rigidité $[M]$: est la matrice de masse

$\{q\}$: est le vecteur propre

ω : est la fréquence propre

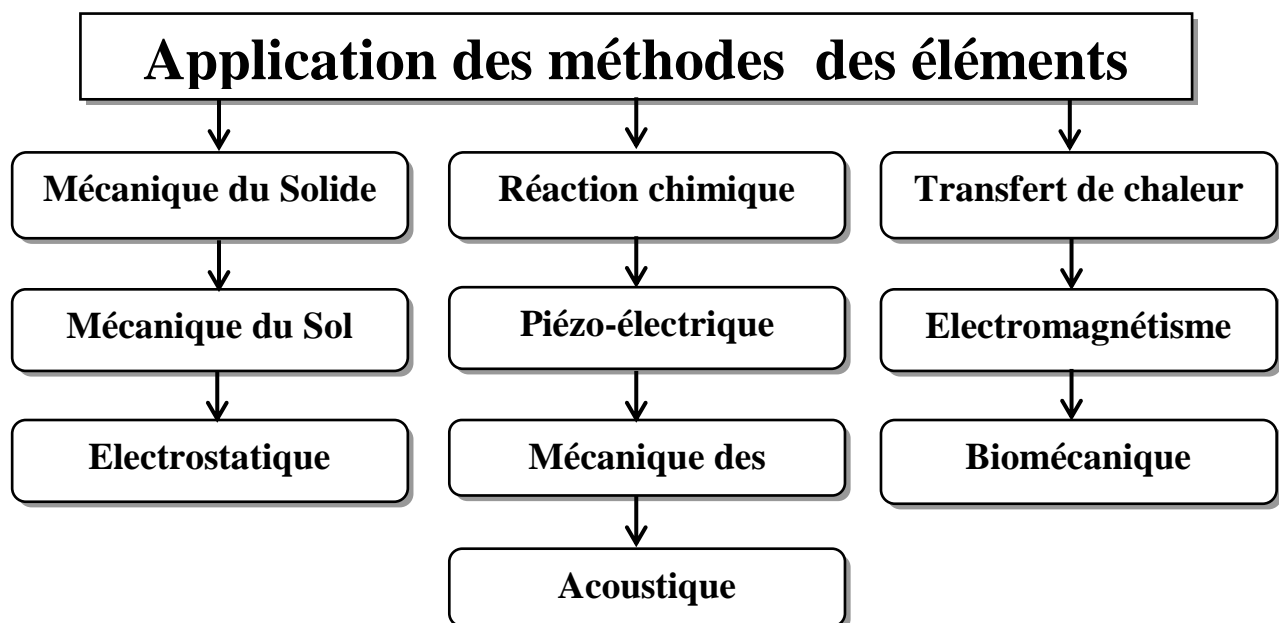
Chapitre 2: Formulation par la version p de la méthode des éléments finis

2.1.Introduction

La modélisation physique des systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approchée du problème physique. La Méthode des Éléments Finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

2.2.Domains d'application

La méthode des éléments finis est appliquée dans la majorité des domaines de la physique figure. Cela va de la mécanique à l'électronique, en passant par la thermique et la météorologie. Dans tous ces cas, la formulation reste quasiment identique, mais la nature des champs et les lois de comportement sont adaptées au domaine d'application



2.3. Version-p de la MEF

L'objectif du calcul numérique est de combiner les techniques d'évaluation et d'amélioration de la qualité de la solution. La méthode-p désigne une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant leur taille. Elle s'oppose à la méthode-h qui consiste à faire varier la taille des éléments tout en conservant leur degré d'interpolation. On parlera également de version-h ou -p de la méthode des éléments finis.

2.4. Fondement de la version-p

Dès l'apparition de la méthode des éléments finis, beaucoup de chercheurs ont testé des éléments finis de degré d'approximation élevé. Ces éléments sont de formulation totale, c'est-à-dire que chaque fonction de forme est physiquement rattachée à un nœud, ce qui ne permet pas d'en tirer un profit maximum [Beckers 1970] & [26]. Il faut attendre l'introduction de la formulation hiérarchique [25] pour réellement voir la naissance d'une méthode-p efficace. Une approximation par éléments finis

$$\{\mathbf{u}\} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{a}_i$$

est dite hiérarchique si le passage de n à $n+1$ n'altère pas les fonctions de forme N_i ($i = 1$ à n). Cette formulation présente certains avantages [Zienkiewicz & al. 1983].

- La génération d'une discrétisation initiale peut être mise à profit pour le calcul des solutions raffinées
- Le système d'équations est mieux conditionné
- Les solutions obtenues sont moins sensibles aux imprécisions numériques

2.5. Avantages de la méthode-p

Les avantages de la version-p de la MEF est :

- Elle est plus précise et sa convergence est plus rapide que celle de la méthode-h. En effet, pour différentes catégories de problèmes, on observe les caractéristiques suivantes :
 - 1- Catégorie A (la solution exacte est partout analytique) : le taux de convergence est exponentiel, alors que celui de la méthode-h n'est qu'algébrique.

- 2- Catégorie B (la solution exacte contient un nombre fini de points singuliers) :
le taux de convergence est algébrique, mais il est deux fois plus élevé que celui de la méthode-h lorsque ces points singuliers sont aussi des nœuds-sommets du maillage.

Notons que la plupart des problèmes de statique linéaire rencontrés dans la pratique appartiennent à cette catégorie.

- Comme une formulation hiérarchique est adoptée pour la représentation des déplacements, la matrice de raideur relative à un degré donné imbrique celles de degrés inférieurs. Ceci permet d'obtenir de manière économique une séquence de solutions au lieu d'une seule solution comme c'est le cas de la méthode-h.

Il est donc possible d'utiliser des techniques d'extrapolation pour le contrôle de la qualité des analyses : les solutions convergent de manière strictement monotone, ce qui permet d'estimer l'énergie potentielle totale exacte du problème à partir de trois solutions consécutives en utilisant une procédure d'extrapolation de *Richardson*. L'erreur globale peut ainsi être estimée.

La géométrie peut être représentée de manière exacte, ce qui évite les erreurs liées à sa modélisation.

- La tâche de modélisation est réduite car le maillage contient peu d'éléments et peut être directement obtenu par division des volumes, définis par les outils de la C.A.O., en macroéléments (maillages structurés)

2.6. Inconvénients de la méthode-p

Les inconvénients de la version-p est :

- Tout d'abord, la méthode-p convient bien pour une analyse détaillée des composantes d'une structure complexe. En effet, dans ce cas le nombre de points singuliers est souvent réduit et l'on bénéficie pleinement de la vitesse de convergence élevée de la méthode. Un champ de contrainte de qualité supérieure est obtenu avec peu de degrés de liberté, ce qui permet une analyse locale précise. Par contre, la méthode-h semble plus adéquate pour obtenir une solution globale car le maillage structuré d'une pièce mécanique comportant plusieurs niveaux de détails est très difficile à réaliser et aboutit souvent à un grand nombre d'éléments.

- Pour des problèmes dont la solution contient un nombre infini de points singuliers (problèmes de Catégorie C), la méthode-p n'est pas meilleure que la méthode-h du point de vue de la convergence. A noter que les structures composées de plusieurs matériaux et les structures en régime élasto-plastique font partie des problèmes de la Catégorie C.
- Pour un même nombre de degrés de liberté, la matrice de raideur relative à la méthode-p est plus dense. Ceci signifie que, pour le même nombre de degrés de liberté, les demandes en mémoire centrale et en temps de calcul seront plus importantes. Mais en choisissant des méthodes de résolution appropriées, le gain de précision l'emporte sur l'augmentation du temps de calcul [Carnevali & al. 1993].

2.7.Modélisation de la plaque

Nous utilisons un système de coordonnées d'aire (ou coordonnées triangulaires)

2.7.1.Coordonnées d'aire

Les points d'un triangle peuvent être représentés à l'aide d'un système de coordonnées d'aire ξ_1, ξ_2, ξ_3 (coordonnées triangulaire) .

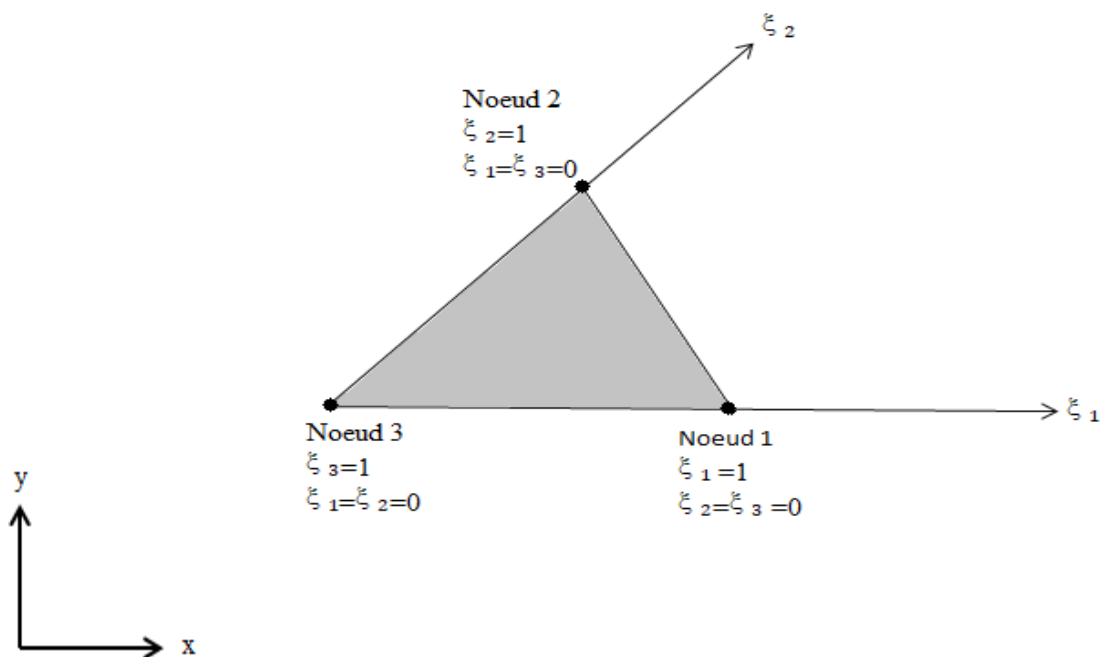


Figure 2.1 : Coordonnées cartésiennes et Coordonnées d'aire pour élément triangulaire

Si l'arrête i du triangle est celle opposée au nœud i , l'équation ($\xi_i = \text{Constante}$) représente une ligne parallèle à l'arête i . l'arête 1 est reliant les nœuds 2 et 3 est représenté par l'équation $\xi_1=0$. Les coordonnées des nœuds sont

- Nœud 1 : $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$
- Nœud 2 : $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0$
- Nœud 3 : $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1$

Les coordonnées d'aire ne sont pas tout indépendant. La relation reliant les coordonnées d'aire est :

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{2.1}$$

2.7.1.1. Interpolation linéaire

On suppose que la fonction $w(x,y)$ qui varie linéairement sur le triangle. En termes des coordonnées cartésiennes, l'interpolation s'écrit comme :

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y \tag{2.2}$$

Où a_1, a_2 et a_3 sont des coefficients à déterminer à partir des valeurs nodales de la fonction w . L'interpolation w n'est pas une interpolation nodale tandis qu'une interpolation telle que :

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + w_3\xi_3 \tag{2.3}$$

Est une interpolation qui utilise les valeurs nodale comme inconnus.

2.7.1.2. Transformation des coordonnées

Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées d'aire reliant par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

La première équation de (2.4) exprime la somme des trois coordonnées triangulaires, la deuxième et la troisième montrent que les coordonnées cartésiennes du triangle sont interpolées linéairement en utilisant les coordonnées nodales. Un point du triangle de coordonnées d'aire à pour coordonnées cartésiennes :

$$x = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \tag{2.5.a}$$

$$y = y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 \quad (2.5.b)$$

On inverse (2.4) et on obtient :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Où A est l'aire du triangle donnée par :

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.7.1.3. Dérivés partielles

A partir des équations (2.5) et (2.6), nous obtenons les relations suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = x_i \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_i} = y_i \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} (y_i - y_k) \quad (2.8c)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} (x_k - x_j) \quad (2.8d)$$

Où j et k dénotent une permutation cyclique de i (si i= 3, alors j=3 et k=1).

Les dérivées de $w(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ par rapport à x et y se déduisent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

Où i = 1, 2, 3

Donc

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left[\frac{\partial w}{\partial \xi_1} (y_2 - y_3) + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} (y_3 - y_1) + \frac{\partial w}{\partial \xi_3} (y_1 - y_2) \right] \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left[\frac{\partial w}{\partial \xi_1} (x_3 - x_2) + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} (x_1 - x_3) + \frac{\partial w}{\partial \xi_3} (x_2 - x_1) \right] \quad (2.13)$$

On note que :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} = w_i \\ b_i = y_i - y_k \\ a_i = x_k - x_j \end{cases} \quad \text{avec } i,j,k = 1,2,3$$

Donc sous forme générale

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \quad (2.15)$$

Où $n = 3$

$$b_1 = y_2 - y_3, b_2 = y_3 - y_1, b_3 = y_1 - y_2 \quad (2.16)$$

$$a_1 = x_3 - x_2, a_2 = x_1 - x_3, a_3 = x_2 - x_1$$

2.7.2. Choix de l'élément fini

Pour assurer une bonne approximation, le domaine Ω de la plaque est divisé en sous-domaines plus petit (élément finis Ω^e). Nous choisissons des géométries élémentaires triangulaires. Leur géométrie est décrite par la position des trois nœuds.

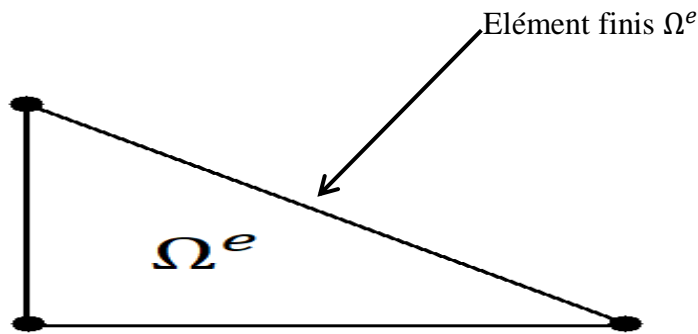


Figure 2.2: élément finis triangulaire

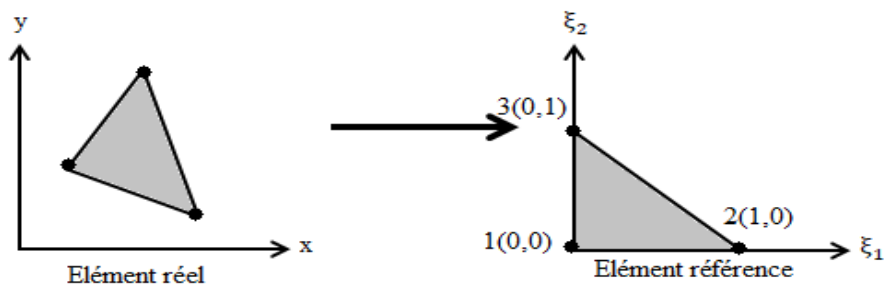


Figure 2.3: Elément réel et élément de référence

Où $0 \leq \xi_1 \leq 1$ et $0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1$

2.7.3. Espaces polynomiaux

Pour le domaine carré $\square = \{0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$, il existe trois espaces polynomiaux.

2.7.3.1. Espace "Serendipity" S^p

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$

Et $i+j=0, 1, \dots, p$. Avec en plus, si $p=1$ le monôme $\xi \eta$. si $p \geq 2$ $\xi^p \eta$ et $\xi \eta^p$.

Ces monômes supplémentaires n'augmentent pas le degré sur les côtés de l'élément de référence. Cet espace est généralement utilisé dans la méthode des éléments finis hiérarchique.

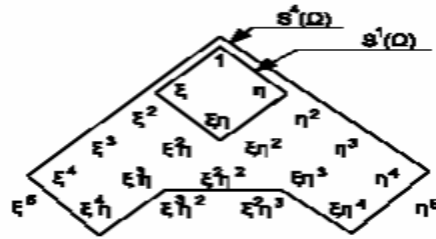


Figure 2.4: Espace Serendipity

2.7.3.2. Espace "Lagrange" $S^{p,q}$

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i, j = 0, 1, \dots, q$

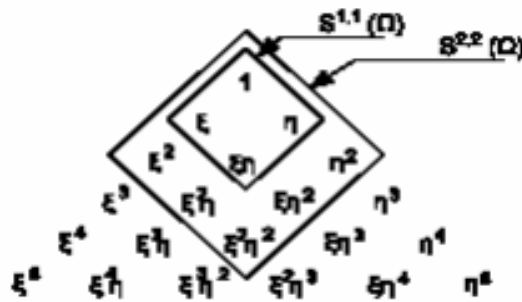


Figure 2.5: Espace Lagrange

2.7.3.3. Espace "mixte" $\overline{S^{p,q}}$:

Il correspond de l'ensemble des monômes communs aux deux espace polynomiaux précédents formellement $\overline{S^{p,q}} = S^p \cap S^q$

2.7.4. Fonctions de forme hiérarchiques

Généralement les fonctions de forme hiérarchiques sont utilisées dans l'espace de Serendipity. Elles sont définies à partir des polynômes de Legendre. Ces fonctions de forme peuvent être classées en trois catégories :

- Fonctions de forme nodales
- Fonctions de forme cotée
- Fonctions de forme internes

Pour obtenir les fonctions de forme hiérarchiques nous utilisons le polynôme de Legendre déplacée introduit par Houmat [15]

La relation de récurrence du polynôme de Legendre déplacée est donnée par :

$$P_{i+1}^*(\xi) = \frac{1}{i+1} [(-2i + 1 + (4i + 2)\xi)P_i^*(\xi) - iP_{i-1}^*(\xi)] \quad (2.17)$$

Avec $P_0^*(\xi) = 0$ et $P_1^*(\xi) = 2\xi - 1$

2.7.4.1. Fonctions de forme nodales

Elles sont données par :

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1 \\ N_2 &= \xi_2 \\ N_3 &= \xi_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.7.4.2. Fonctions de forme de cotés

Elles sont données par :

- Coté 1-2 : $N_1 = \xi_1 \xi_2 P_i^*(\xi_2)$ (2.19a)
- Coté 2-3 : $N_2 = \xi_2 \xi_3 P_i^*(\xi_3)$ (2.19b)
- Coté 1-3 : $N_3 = \xi_1 \xi_3 P_i^*(\xi_3)$ (2.19c)

Ou $i = 0, 1, \dots, p-2$

2.7.4.3. Fonctions de forme internes

Elles sont données par :

$$N_1 = \xi_1 \xi_2 \xi_3 P_i^*(\xi_2) P_k^*(\xi_3) \quad (2.20)$$

Ou $j = 0, 1, \dots, p-3$ et $k = p-j-3$

Donc nous aurons

- 3 Fonctions de forme nodales
- (p-1) fonction de forme pour chacun des trois cotés
- $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ fonctions de forme internes

Avec nombre degrés de liberté sera :

$$R = \frac{1}{2}(p+1)(p+2) \quad (2.21)$$

Dans le mouvement harmonique, les rotations suivent x et y avec le déplacement w sont données par les relations suivantes :

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \bar{w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sin \omega t \quad (2.22a)$$

$$\theta_x(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \bar{\theta}_x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sin \omega t \quad (2.22b)$$

$$\theta_y(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \bar{\theta}_y(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sin \omega t \quad (2.22c)$$

Avec :

$$\bar{w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^R w_i N_i \quad (2.23a)$$

$$\bar{\theta}_x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^R \theta_x N_i \quad (2.23b)$$

$$\bar{\theta}_y(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^R \theta_y N_i \quad (2.23c)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} = [N]\{q\} \quad (2.24)$$

Où

$$[N] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} [N_1 & 0 & 0] & [N_2 & 0 & 0] & \dots & [N_i & 0 & 0] & \dots & [N_R & 0 & 0] \\ \hline 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_i & 0 & \dots & 0 & N_R & 0 \\ \hline 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_i & \dots & 0 & 0 & N_R \end{array} \right] \quad (2.25)$$

$$\{q\}^T = \left\{ w_1, (\theta_x)_1, (\theta_y)_1, w_2, (\theta_x)_2, (\theta_y)_2, \dots, w_i, (\theta_x)_i, (\theta_y)_i, w_R, (\theta_x)_R, (\theta_y)_R \right\}^T \quad (2.26)$$

2.7.5. Vecteurs de déformation $\{\chi\}$ et $\{\gamma\}$

2.7.5.1. Vecteur de courbure de flexion $\{\chi\}$

Le vecteur de courbure $\{\chi\}$ est donné par :

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Tel que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (y_2 - y_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (y_3 - y_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (y_1 - y_2) \right] \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (x_3 - x_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (x_1 - x_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (x_2 - x_1) \right] \quad (2.28b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (2.28c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (2.28d)$$

Le vecteur de courbure $\{\chi\}$ sous forme matricielle :

$$\{\chi\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ 0 & \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

On pose que

$$[A_F] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ 0 & \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Donc l'équation (2.29) est de la forme

$$\{\chi\} = [A_F] \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

On remplaçant l'équation (2.24) dans l'équation (2.31), nous obtenons

$$\{\chi\} = [A_F][N]\{q\} \quad (2.32)$$

En posant

$$[B_F] = [A_F][N] \quad (2.33)$$

Alors l'équation (2.32) devient :

$$\{\chi\} = [B_F]\{q\} \quad (2.34)$$

Ou $[B_F]$ dépend de $[N]$ alors :

$$[B_F] = [[(B_F)_1], [(B_F)_2], \dots, [(B_F)_i], \dots, [(B_F)_R]] \quad (2.35)$$

Tel que :

$$[(B_F)_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} \\ 0 & \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} & -\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

2.7.5.2. Vecteur de déformation $\{\gamma\}$

Le vecteur de déformation $\{\gamma\}$ est donné par

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\theta}_y \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{\theta}_x \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Le vecteur $\{\gamma\}$ sous forme matricielle :

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

En remplaçant les équations (2.28) dans l'équation (2.38), nous aurons

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} (y_2 - y_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (y_3 - y_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (y_1 - y_2) \right) & 0 & 1 \\ \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} (x_3 - x_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (x_1 - x_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (x_2 - x_1) \right) & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Ou bien

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

En posant que

$$[A_C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Donc l'équation (2.40) devient

$$\{\gamma\} = [A_C] \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

On remplaçant l'équation (2.24) dans l'équation (2.42), nous obtenons

$$\{\gamma\} = [A_C][N]\{q\} \quad (2.43)$$

En posant que

$$[B_C] = [A_C][N] \quad (2.44)$$

L'équation (2.43) devient

$$\{\gamma\} = [B_C]\{q\} \quad (2.45)$$

Avec $[B_C]$ dépend de $[N]$ donc

$$[B_C] = [[(B_C)_1], [(B_C)_2], \dots, [(B_C)_i], \dots, [(B_C)_R]] \quad (2.46)$$

Tel que

$$[(B_C)_j] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} & 0 & N_j \\ \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} & -N_j & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

2.7.6. Matrices masse et de rigidité élémentaires

2.7.6.1. Matrice masse

D'après l'expression de l'énergie cinétique donnée par l'équation (1.36) est

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left\{ \dot{\bar{w}} \quad \dot{\bar{\theta}}_x \quad \dot{\bar{\theta}}_y \right\} [D_M] \begin{Bmatrix} \dot{\bar{w}} \\ \dot{\bar{\theta}}_x \\ \dot{\bar{\theta}}_y \end{Bmatrix} dA \quad (2.48)$$

En remplaçant l'équation (2.24) dans l'équation (2.48), nous obtenons

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho \{ \dot{q} \}^T [N]^T [D_M] [N] \{ \dot{q} \} dA \quad (2.49)$$

L'expression T est de la forme

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [M] \{ \dot{q} \} \quad (2.50)$$

Ou

$$[M] = \int_A \rho [N]^T [D_M] [N] dA \quad (2.51)$$

Mais $dA = dx dy = 2A d\xi_1 d\xi_2$ donc l'équation (2.51) devient

$$[M] = 2A\rho \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} [N]^T [D_M] [N] d\xi_2 d\xi_1 \quad (2.52)$$

En posant que

$$H_{(i,j)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i N_j d\xi_2 d\xi_1 \quad (2.53)$$

Tel que $i,j=1,\dots,\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$. Alors la matrice globale [M] sera composée de

$\left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right) \times \left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right)$ Sous matrices de type

$$[M_{(i,j)}] = 2A\rho H_{(i,j)} [D_M] \quad (2.54)$$

Avec

$$[D_M] = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^3}{12} \end{bmatrix}$$

2.7.6.2. Matrice de rigidité

L'expression de l'énergie de déformation donnée par l'équation (1.34) elle est composée d'une énergie de déformation due à la flexion et une énergie de déformation due au cisaillement transversal :

$$U = U_F + U_C \quad (2.55)$$

Alors la matrice de rigidité sera composée de deux matrices

$$[K] = [K_F] + [K_C] \quad (2.56)$$

Ou

$[K_F]$: Matrice rigidité due à la flexion

$[K_C]$: Matrice de rigidité due au cisaillement transversal

2.7.6.2.1. Matrice de rigidité $[K_F]$:

On a

$$U_F = \frac{1}{2} \int \{\chi\}^T [D_F] \{\chi\} dA \quad (2.57)$$

En introduisant l'équation (2.34) dans l'équation (2.57), nous aurons

$$U_F = \frac{1}{2} \int \{q\}^T [B_F]^T [D_F] [B_F] \{q\} dA \quad (2.58)$$

L'expression U_F est de la forme

$$U_F = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_F] \{q\} \quad (2.59)$$

Avec

$$[K_F] = \int [B_F]^T [D_F] [B_F] dA \quad (2.60)$$

Mais $dA = dx dy = 2A d\xi_1 d\xi_2$ donc l'équation (2.60) devient

$$[K_F] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} [B_F]^T [D_F] [B_F] d\xi_2 d\xi_1 \quad (2.61)$$

En posant

$$E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} d\xi_2 d\xi_1 \quad (2.62)$$

Tel que $i,j=1,\dots, \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ et $\alpha,\beta = 1,2,3$ donc la matrice $[K_F]$ sera composée de

$\left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right) \times \left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right)$ Sous matrices de type :

$$[K_{F(i,j)}] = \frac{D}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{F1(i,j)} & I_{F2(i,j)} \\ 0 & I_{F3(i,j)} & I_{F4(i,j)} \end{bmatrix}$$

Tel que :

$$I_{F1(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(a_\alpha a_\beta + \frac{(1-\nu)}{2} b_\alpha b_\beta \right) E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right] \quad (2.63a)$$

$$I_{F2(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(-\nu b_\alpha a_\beta - \frac{(1-\nu)}{2} a_\alpha b_\beta \right) E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right] \quad (2.63b)$$

$$I_{F3(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(-v b_{\alpha} a_{\beta} - \frac{(1-v)}{2} a_{\alpha} b_{\beta} \right) E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right] \quad (2.63c)$$

$$I_{F4(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(b_{\alpha} b_{\beta} + \frac{(1-v)}{2} a_{\alpha} a_{\beta} \right) E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right] \quad (2.63d)$$

2.7.6.2.2. Matrice de rigidité $[K_C]$

L'expression U_C donne :

$$U_c = \frac{1}{2} \int \{\gamma\}^T [D_C] \{\gamma\} dA \quad (2.64)$$

D'après l'équation (2.45) on a

$$\{\gamma\} = [B_C] \{q\}$$

Donc l'équation (2.64) devient :

$$U_c = \frac{1}{2} \int [B_C]^T \{q\}^T [D_C] [B_C] \{q\} dA \quad (2.65)$$

L'expression U_C est de la forme

$$U_c = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_C] \{q\} \quad (2.66)$$

Avec

$$[K_C] = \int [B_C]^T [D_C] [B_C] dA \quad (2.67)$$

Mais $dA = dx dy = 2A d\xi_1 d\xi_2$ donc l'équation (2.67) devient

$$[K_C] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} [B_C]^T [D_C] [B_C] d\xi_2 d\xi_1 \quad (2.68)$$

En posant

$$X_{(i,j)}^{\alpha} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\alpha}} d\xi_2 d\xi_1 \quad (2.69)$$

$$XX_{(i,j)}^\alpha = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} N_j d\xi_2 d\xi_1 \quad (2.70)$$

Tel que $i,j=1,\dots,\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ et $\alpha,\beta = 1,2,3$ donc la matrice $[K_C]$ sera composée de

$\left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right) \times \left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right)$ Sous matrices de type :

$$[K_{C(i,j)}] = KGe \begin{bmatrix} I_{C1(i,j)} & I_{C2(i,j)} & I_{C3(i,j)} \\ I_{C4(i,j)} & I_{C5(i,j)} & 0 \\ I_{C6(i,j)} & 0 & I_{C7(i,j)} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$I_{C1(i,j)} = \frac{1}{2A} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 (b_\alpha b_\beta + a_\alpha a_\beta) E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) \quad (2.72a)$$

$$I_{C2(i,j)} = - \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha XX_{(i,j)}^\alpha \quad (2.72b)$$

$$I_{C3(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha XX_{(i,j)}^\alpha \quad (2.72c)$$

$$I_{C4(i,j)} = - \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha X_{(i,j)}^\alpha \quad (2.72d)$$

$$I_{C5(i,j)} = I_{C7(i,j)} = 2AH_{(i,j)} \quad (2.72e)$$

$$I_{C6(i,j)} = \sum_{\alpha=1}^3 b_\alpha X_{(i,j)}^\alpha \quad (2.72f)$$

Donc la formule globale de sous matrice de rigidité $[K]$ est :

$$[K] = \frac{D}{2A} [K_{F(i,j)}] + KGe [K_{C(i,j)}]$$

$$[K] = \frac{D}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{F1(i,j)} & I_{F2(i,j)} \\ 0 & I_{F3(i,j)} & I_{F4(i,j)} \end{bmatrix} + KGe \begin{bmatrix} I_{C1(i,j)} & I_{C2(i,j)} & I_{C3(i,j)} \\ I_{C4(i,j)} & I_{C5(i,j)} & 0 \\ I_{C6(i,j)} & 0 & I_{C7(i,j)} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} KGeI_{C1(i,j)} & KGeI_{C2(i,j)} & KGeI_{C3(i,j)} \\ KGeI_{C4(i,j)} & \frac{D}{2A} I_{F1(i,j)} + KGeI_{C5(i,j)} & \frac{D}{2A} I_{F2(i,j)} \\ KGeI_{C6(i,j)} & \frac{D}{2A} I_{F3(i,j)} & \frac{D}{2A} I_{F4(i,j)} + KGeI_{C7(i,j)} \end{bmatrix}$$

Chapitre 3: Programmation

3.1.Introduction

Dans ce chapitre nous avons élaboré un programme qui permet de résoudre un problème de la vibration libre d'une plaque triangulaire en se basant sur la théorie des plaques de MINDLIN et en utilisant la version p de la méthode des éléments finis.

L'objectif de ce programme est calculer les fréquences et les modes propres d'une plaque de type MINDLIN par la version p de la méthode des éléments finis.

Les données exigées par ce programme sont les caractéristiques géométriques et physiques de la plaque. Ainsi que les données relatives au maillage.

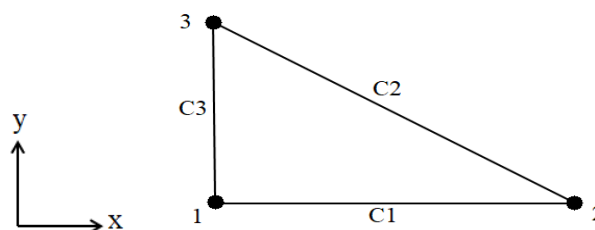


Figure 3.1 : Élément p triangulaire

3.2. Environnement de la programmation

Le matériel utilisé pour l'exécution de ce programme est :

- Un micro-ordinateur DELL 5470, contient un processeur i5 de 6eme génération avec 8G RAM.
- Le langage fortran 77 est un langage de calcul impératif à usage général, spécialement optimisé pour les calculs numériques et les calculs scientifiques. Il a été développé par IBM dans les années 1950 en Californie aux États-Unis. FORTRAN a de nombreuses versions. Dans cette étude nous utilisons le FORTRAN77.C'est un langage scientifique très adapté à la méthode des éléments finis.
- Logiciel commerciale MATLAB est un système interactif de programmation scientifique, pour le calcul numérique et la visualisation graphique, basé sur la représentation matricielle des données, dont le nom est dérivé de Matrix Laboratory

3.3. Organigramme du programme

Le schéma de l'organigramme général du programme est montré dans la figure (3.2). Il se compose d'un programme principal qui fait appel à des sous-programmes.

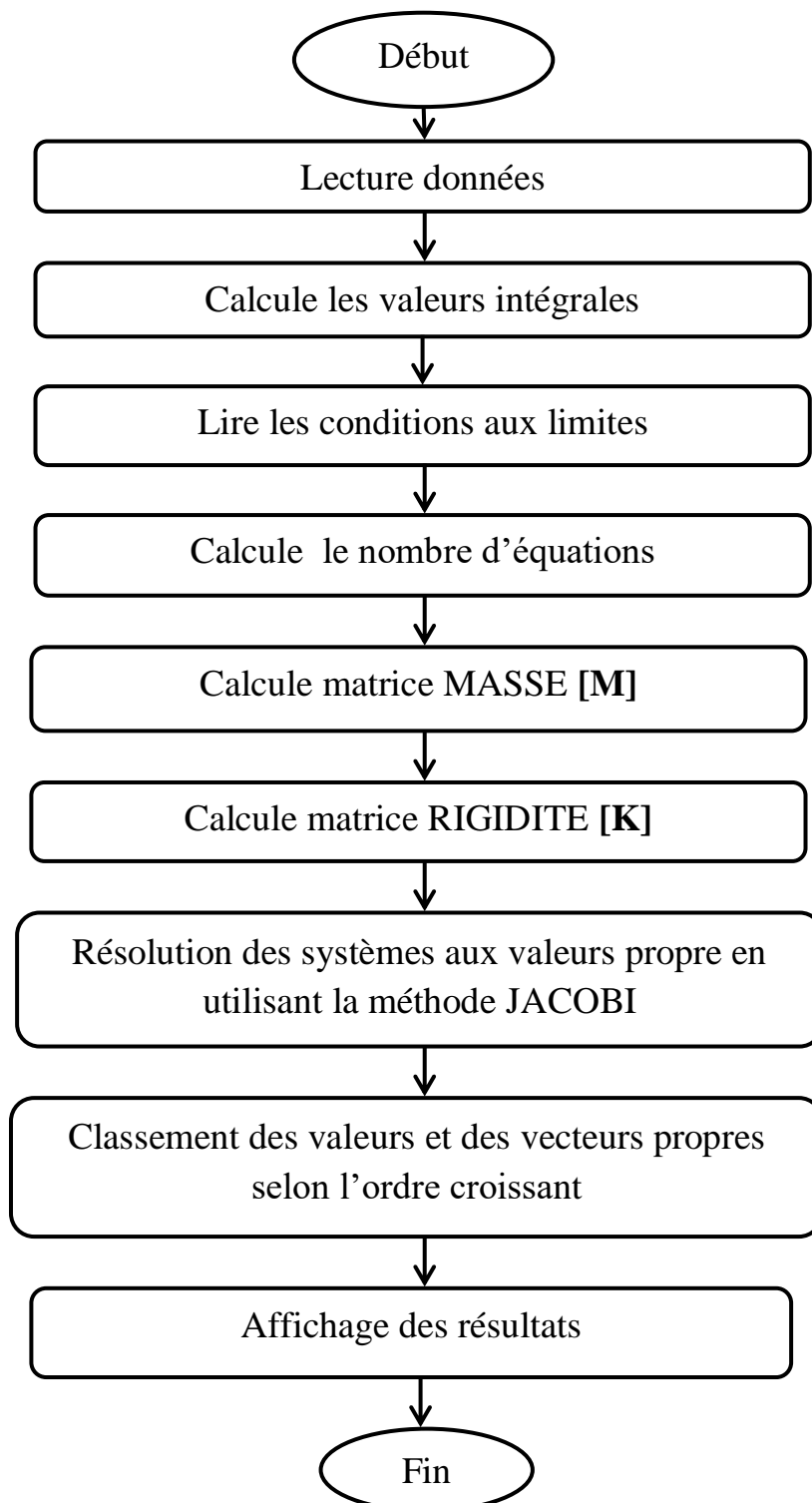


Figure 3.2: Organigramme principal

3.4. Description du programme

Le programme se compose d'un programme principal qui fait appel aux sous-programmes suivants :

- Sous-programme INPUT
- Sous-programme INTEGRALE
- Sous-programme MATRICE MASSE [M]
- Sous-programme MATRICE RIGIDITE [K]
- Sous-programme CONDITION AUX LIMITES
- Sous-programme JACOBI
- Sous-programme SORT
- Sous-programme AFFICHAGE

3.4.1. Sous-programme INPUT

Le sous-programme INPUT permet de lire les données qui caractérisant la géométrie et les propriétés physiques du matériau à partir d'un fichier appelé PROGSD.DAT selon l'ordre suivant :

- Titre du problème.
- NTE : Nombre total d'éléments
- NTN : Nombre total des nœuds.
- NNR : Nombre total des nœuds restreints.
- NTC : Nombre total des côtés.
- NCR : Nombre total des côtés restreints.
- A : Aire du triangle
- HR : Epaisseur de la plaque (e).
- PR : Coefficient de Poisson (ν).
- IP : Degré de polynôme d'interpolation p
- NMODE : Nombre de modes propres.
- SC : Facteur de correction du cisaillement transversal (K).
- XN(I), YN(I) : Coordonnées des nœuds
- Condition aux limites des nœuds et des cotés restreint

3.4.2.Sous-programme INTEGRALE

Les intégrales données dans les équations (2.53), (2.62), (2.69), (2.70) sont calculer analytiquement en utilisant le calcul symbolique dans le logiciel MATLAB sous les instructions suivantes :

- $H_{(i,j)} = \text{int}(\text{int}(N(j) * N(i), \xi_2, 0, 1 - \xi_1), \xi_1, 0, 1);$
- $E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} = \text{int}(\text{int}(\text{diff}(N(i), \xi_\alpha) * \text{diff}(N(j), \xi_\beta), \xi_2, 0, 1 - \xi_1), \xi_1, 0, 1);$
- $X_{(i,j)}^\alpha = \text{int}(\text{int}(N(i) * \text{diff}(N(j), \xi_\alpha), \xi_2, 0, 1 - \xi_1), \xi_1, 0, 1);$
- $XX_{(i,j)}^\alpha = \text{int}(\text{int}(N(j) * \text{diff}(N(i), \xi_\alpha), \xi_2, 0, 1 - \xi_1), \xi_1, 0, 1);$

Les valeurs des intégrales sont stockées dans des fichiers suivants :

- ✓ Les valeurs de l'intégrale $E_{(i,j)}^{\alpha,\beta}$ sont stockées dans un fichier (**EI.DAT**)
- ✓ Les valeurs de l'intégrale $H_{(i,j)}$ sont stockées dans un fichier (**H1.DAT**)
- ✓ Les valeurs de l'intégrale $X_{(i,j)}^\alpha$ sont stockées dans un fichier (**XI.DAT**)
- ✓ Les valeurs de l'intégrale $XX_{(i,j)}^\alpha$ sont stockées dans un fichier (**XXI.DAT**)

3.4.3.Sous-programme MATRICE MASSE [M]

Le Sous-programme MATRICE MASSE [M] permet de calculer la matrice masse [M] globale à l'aide des intégrales. La matrice masse [M] globale sera composée de $\left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right) \times \left(\frac{1}{2}(p+1)(p+2)\right)$ sous matrice de type

$$[M_{(i,j)}] = 2A\rho H_{(i,j)}[D_M]$$

3.4.4.Sous-programme MATRICE RIGIDITE [K]

Le Sous-programme MATRICE RIGIDITE [K] permet de calculer la matrice RIGIDITE [K] globale à l'aide des intégrales et les coordonnées des nœuds. La matrice RIGIDITE [K] globale sera composée d'une matrice rigidité due à la flexion et une matrice rigidité due au cisaillement transversal de type :

$$[K] = \frac{D}{2A} [K_{F(i,j)}] + KGe [K_{C(i,j)}]$$

3.4.5.Sous-programme CONDITIONS AUX LIMITES

Pour chaque nœud restreint et coté restreint nous introduisons les conditions pour les trois coordonnées généralisées (w, θ_x, θ_y), en note 1 si le déplacement w est restreint, et 0 s'il n'est pas restreint. Ceci s'applique de la même façon pour les autres coordonnées généralisée (θ_x, θ_y).

3.4.6.Sous-programme JACOBI

Le sous-programme JACOBI permet de calculer les fréquences, les modes propres et les vecteurs propres.

3.4.7. Sous-programme SORT

Le sous-programme SORT permet de classer les valeurs propres et les vecteurs propres par ordre croissant.

3.4.8.Sous-programme AFFICHAGE

Ce sous-programme permet d'afficher les paramètres de fréquences Ω .

Chapitre 4: Résultats et interprétations

4.1.Introduction

L'étude vibratoire des plaques peut être influencées par plusieurs paramètres, Nous présenterons dans ce chapitre la variation du paramètres de fréquences en fonctions des divers paramètres (les paramètres géométriques a et b, l'épaisseur (e), facteur de corrections du cisaillement transversale (k).

4.2.Validation du programme

Les résultats que nous avons obtenus par le programme élaboré sont validés avec les résultats donnés en références [16], [17], [18], [19], [20], [21].

Nous considérons une plaque triangulaire (Figure 4.1), et nous calculons les paramètres de fréquences des six premiers modes.

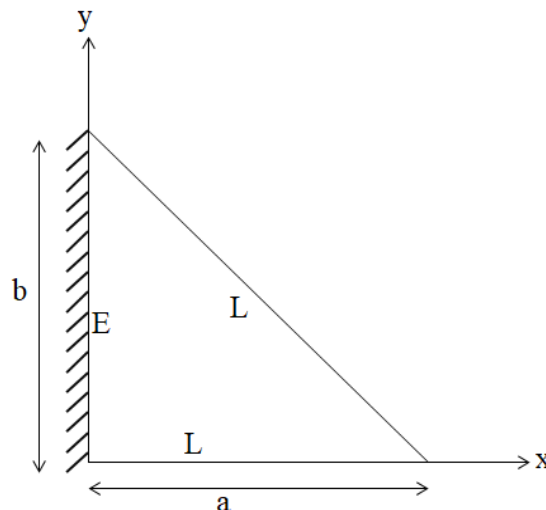


Figure 4.1:Plaque triangulaire E-L-L

Les dimensions de la plaque sont $a=10$, $e=0.063$, $a/e=158.73$, pour la dimension b nous considérons quatre cas $b=5$, $b=10$, $b=15$, $b=20$. Le paramètre de fréquence que nous avons

obtenu par notre programme est : $\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$

4.3. Etude de convergence

Pour illustrer la convergence nous étudierons quatre exemples.

- Exemple 1 : plaque triangulaire avec des extrémités **E-L-L**, avec $b/a=0.5$
- Exemple 2 : plaque triangulaire avec des extrémités **E-L-L**, avec $b/a=1$
- Exemple 3 : plaque triangulaire avec des extrémités **E-L-L**, avec $b/a=1.5$
- Exemple 4 : plaque triangulaire avec des extrémités **E-L-L**, avec $b/a=2$

Les tableaux 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 donnent la convergence des paramètres de fréquences pour les six premiers modes. Pour les quatre cas nous varions le degré de polynôme d'interpolation (P) jusqu'à la stabilité des résultats.

Nous observons que le nombre d'équation (NEQB) augmente au fur à mesure avec le degré de polynôme d'interpolation (P), et la convergence est rapide ($p=10$), ainsi que le temps d'exécution est plus élevé.

L'avantage de la version-p de la méthode des éléments finis, avec un seul élément et en variant seulement le degré du polynôme, nous pouvons obtenir la convergence vers la solution souhaitée.

Les graphes 1, 2, 3, et 4 montrent la convergence des six premiers modes

Tableau 4.1 : Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=0.5$, $a=10$, $e=0.063$)

P	NEQB	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
3	18	0.00717	0.02797	0.06262	0.6364	0.8800	0.9952
4	30	0.00685	0.02265	0.03741	0.06150	0.1233	0.2134
5	45	0.00681	0.01915	0.03558	0.05581	0.0852	0.1052
6	63	0.00678	0.01892	0.03517	0.03968	0.0775	0.09805
7	84	0.00677	0.01853	0.03514	0.03892	0.0662	0.07650
8	108	0.00676	0.01850	0.03592	0.03700	0.0650	0.07557
9	135	0.00676	0.01849	0.03490	0.03689	0.0594	0.07401
10	165	0.00676	0.01849	0.03490	0.03679	0.0591	0.07343

Tableau 4.2: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=1$ $a=10$, $e=0.063$)

P	NEQB	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
3	18	0.00203	0.00898	0.01805	0.3174	0.4387	0.4968
4	30	0.00191	0.00813	0.01137	0.02391	0.04148	0.0839
5	45	0.00190	0.00747	0.01025	0.02016	0.02775	0.04388
6	63	0.00189	0.00722	0.01008	0.01835	0.02545	0.03554
7	84	0.00189	0.00721	0.01005	0.01732	0.02401	0.03304
8	108	0.00189	0.00720	0.01004	0.01727	0.02357	0.03076
9	135	0.00189	0.00720	0.01003	0.01724	0.02349	0.03065
10	165	0.00189	0.00720	0.01003	0.01724	0.02347	0.03049

Tableau 4.3: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=1.5$, $a=10$, $e=0.063$)

P	NEQB	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
3	18	0.00093	0.00450	0.00981	0.21266	0.29237	0.3311
4	30	0.00090	0.00392	0.00631	0.01233	0.02561	0.0642
5	45	0.00088	0.00381	0.00568	0.00981	0.01520	0.0248
6	63	0.00088	0.00373	0.00553	0.00943	0.01412	0.0190
7	84	0.00088	0.00372	0.00548	0.00914	0.01343	0.0181
8	108	0.00088	0.00372	0.00547	0.00911	0.01314	0.0172
9	135	0.00088	0.00371	0.00547	0.00911	0.01313	0.0172
10	165	0.00088	0.00371	0.00547	0.00911	0.01313	0.0172

Tableau 4.4: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=2$, $a=10$, $e=0.063$)

P	NEQB	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
3	18	0.00053	0.00266	0.00677	0.16073	0.21923	0.24832
4	30	0.00052	0.00227	0.00435	0.00726	0.01880	0.05830
5	45	0.00051	0.00222	0.00393	0.00570	0.01053	0.01519
6	63	0.00051	0.00219	0.00384	0.00549	0.00950	0.01118
7	84	0.00050	0.00218	0.00380	0.00537	0.00926	0.01059
8	108	0.00050	0.00218	0.00379	0.00535	0.00900	0.01028
9	135	0.00050	0.00218	0.00379	0.00535	0.00897	0.01023
10	165	0.00050	0.00218	0.00379	0.00535	0.00897	0.01021

4.3.1. Validation des résultats

Les résultats que nous avons obtenus seront justifiés par une comparaison avec les résultats données en références [16], [17], [18], [19], [20], [21], pour $b/a=1$ et $b/a=2$

4.3.1.1. Cas d'un plaque triangulaire E-L-L avec $b/a=1$

Pour un plaque triangulaire (encasté-libre-libre) avec $b=a$, le tableau 4.5, donne la comparaison des paramètres de fréquences obtenus avec ceux donne dans [16], [17], [18], [19], [20], [21].

Tableau 4.5: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=1$, $a=10$, $e=0.063$)

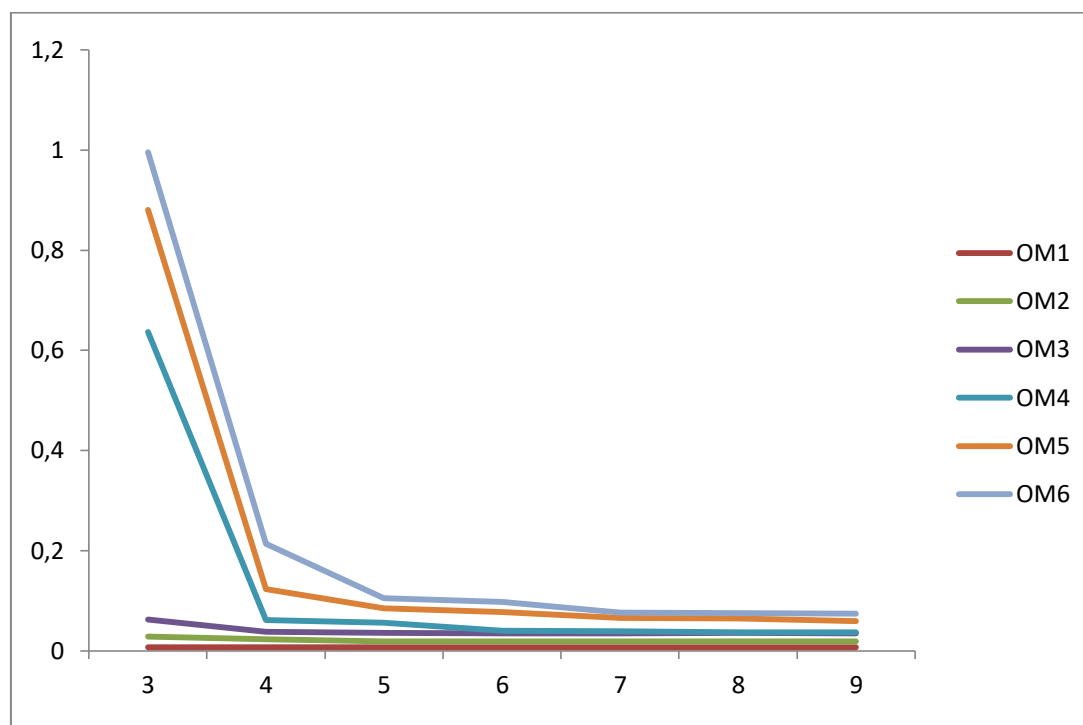
Source des résultats	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
FEM (25 éléments) [20]	0.00198	0.00705	0.00967	0.01693
FEM (100 éléments) [20]	0.00188	0.00708	0.00979	0.01687
Mirza and Alizadeh [16]	0.00189	0.00721	0.01003	0.01718
Mirza and Biljani [19]	0.00189	0.00709	0.01023	0.01719
Kim and Dickinson [20]	0.00189	0.00721	0.01004	0.01726
Bhat [21]	0.00190	0.00722	0.01006	0.01734
Christensen [18]	0.00189	0.00729	0.01000	0.01691
Expérimente [17]	0.00182	0.00719	0.01005	0.01718
Présent	0.00189	0.00720	0.01003	0.01724

4.3.1.2. Cas d'une plaque triangulaire E-L-L avec $b/a=2$

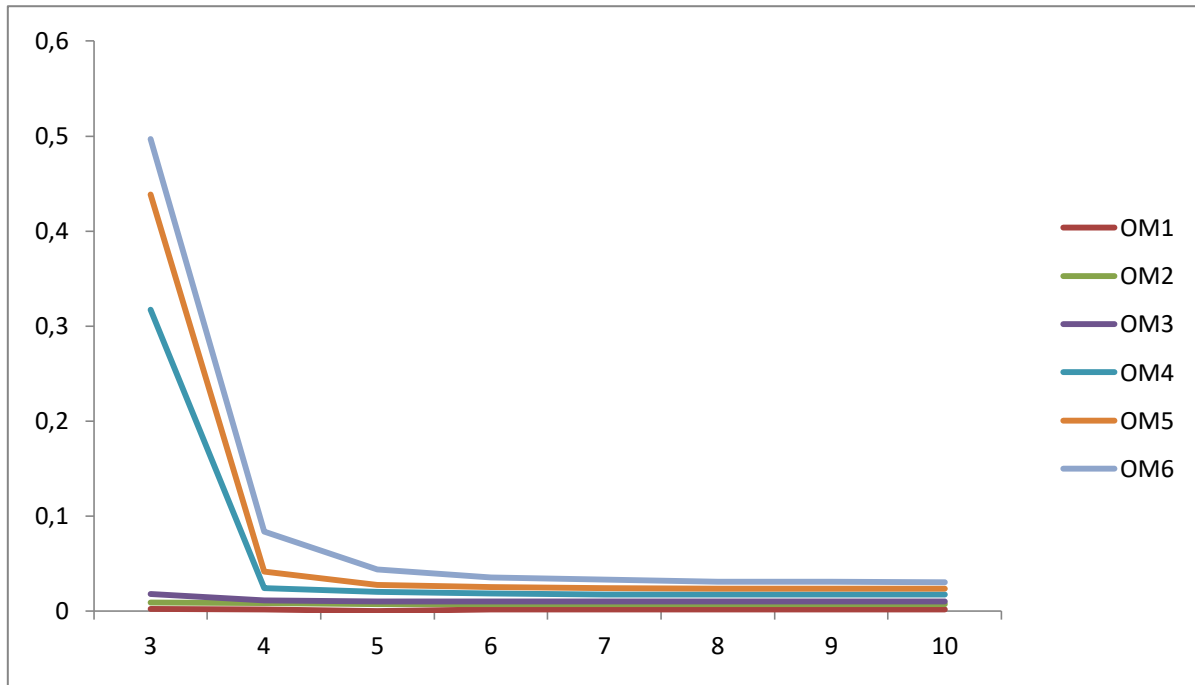
Pour une plaque triangulaire (encasté-libre-libre) avec $b/a=2$, le tableau 4.6 donne la comparaison des paramètres de fréquences obtenus avec ceux donnés dans [16], [19], [20].

Tableau 4.6: Paramètres de fréquence Ω pour plaque triangulaire E-L-L ($\nu=0.3$, $b/a=2$, $a=10$, $e=0.063$)

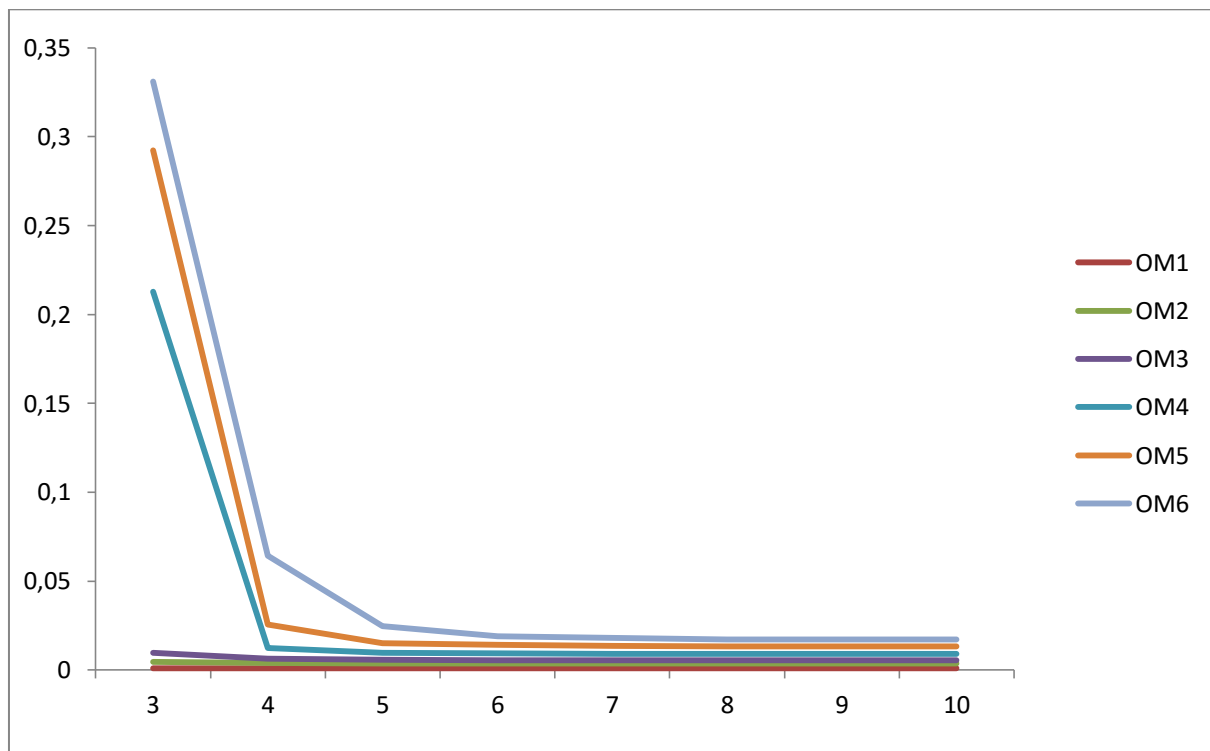
Source des résultats	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
FEM (25 éléments) [20]	0.00054	0.00223	0.00388	0.00541
FEM (100 éléments) [20]	0.00051	0.00217	0.00380	0.00531
Mirza and Alizadeh [16]	0.00051	0.00219	0.00382	0.00538
Mirza and Biljani [19]	0.00051	0.00227	0.00392	0.00598
Kim and Dickinson [20]	0.00051	0.00219	0.00380	0.00535
Présent	0.00050	0.00218	0.00379	0.00535



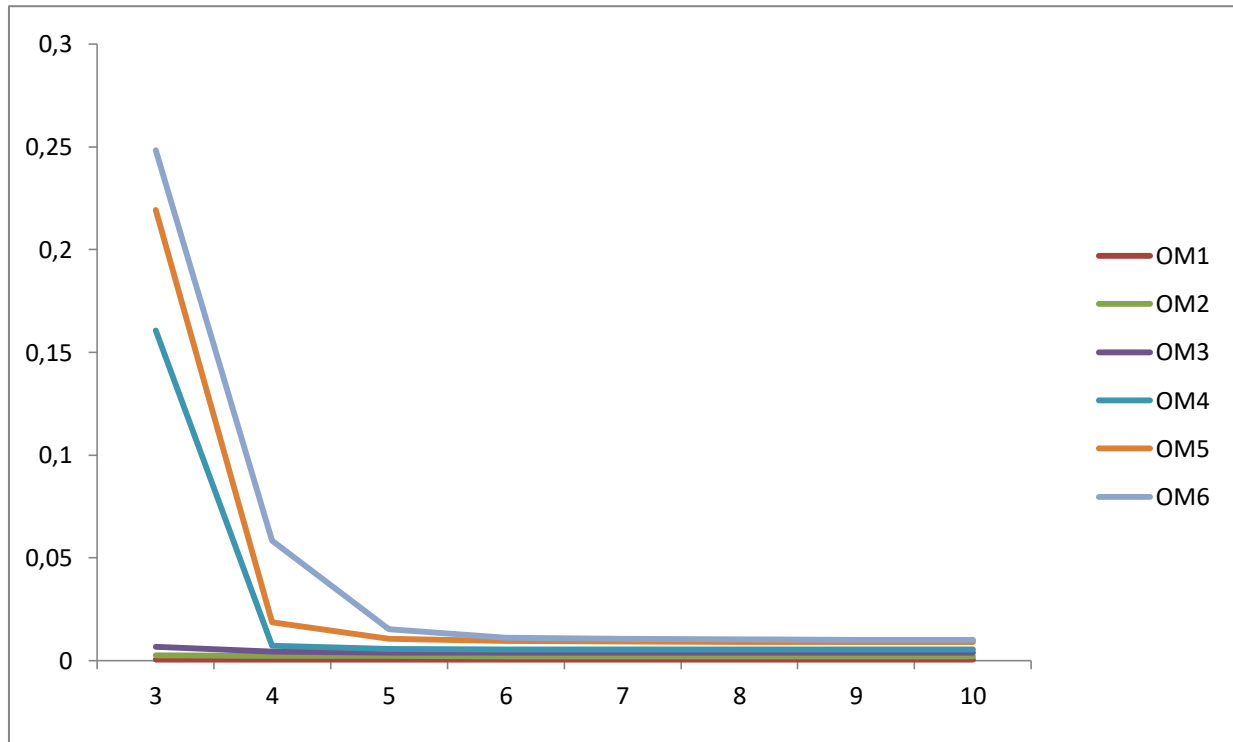
Graph 4.1 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L $b/a=0.5$



Graph 4.2 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L b/a=1



Graph 4.3 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L b/a=1.5



Graph 4.4 : Convergence des paramètres de fréquence en fonction de p pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L b/a=2

4.4. Influence du rapport b/a

Nous considérons quatre cas ($b/a=0.5$, $b/a=1$, $b/a=1.5$, $b/a=2$) et nous calculons les paramètres de fréquences Ω pour les six premiers modes avec différentes rapport e/a.

Les tableaux 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 présentent les résultats en fonction de b/a et différentes valeurs de e/a ($e/a=0.05$, $e/a=0.1$, $e/a=0.15$, $e/a=0.2$)

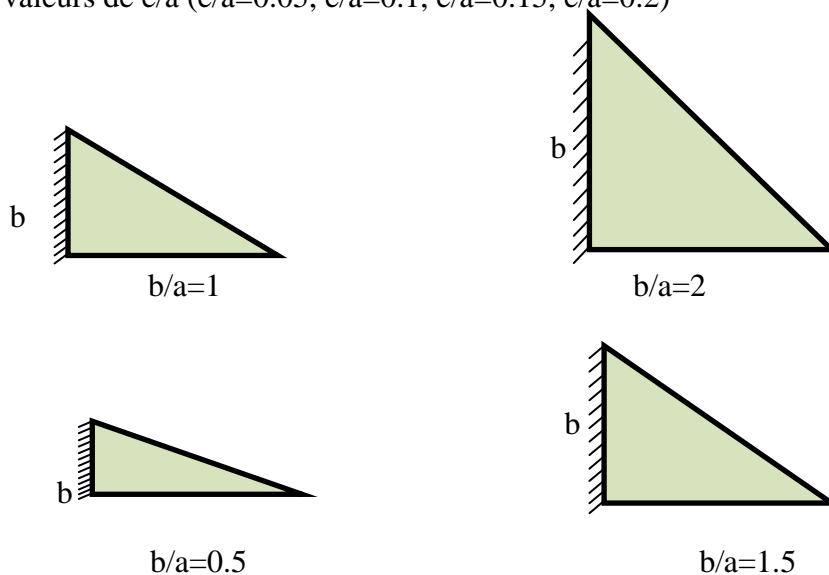


Figure 4.2 : plaque triangulaire avec différentes rapport b/a

Les graphes 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 montrent : plus le facteur b/a augmente les paramètres de fréquences diminues pour les différentes valeurs du rapport e/a . La diminution des paramètres de fréquences Ω est plus rapide pour les valeurs du rapport b/a comprises entre (0.5 et 1).

Tableau 4.7 : paramètres de fréquence om en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3, e=0.5, a=10, e/a=0.05$)

b/a	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0,05247	0,1390	0,2556	0,26872	0,42009	0,5079
1	0,01490	0,05581	0,07681	0,13113	0,17705	0,22574
1.5	0,00697	0,02916	0,04213	0,07069	0,10011	0,13108
2	0,00402	0,01721	0,02929	0,04188	0,06893	0,07887

Tableau 4.8 : paramètres de fréquence om en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3, e=1, a=10, e/a=0.1$)

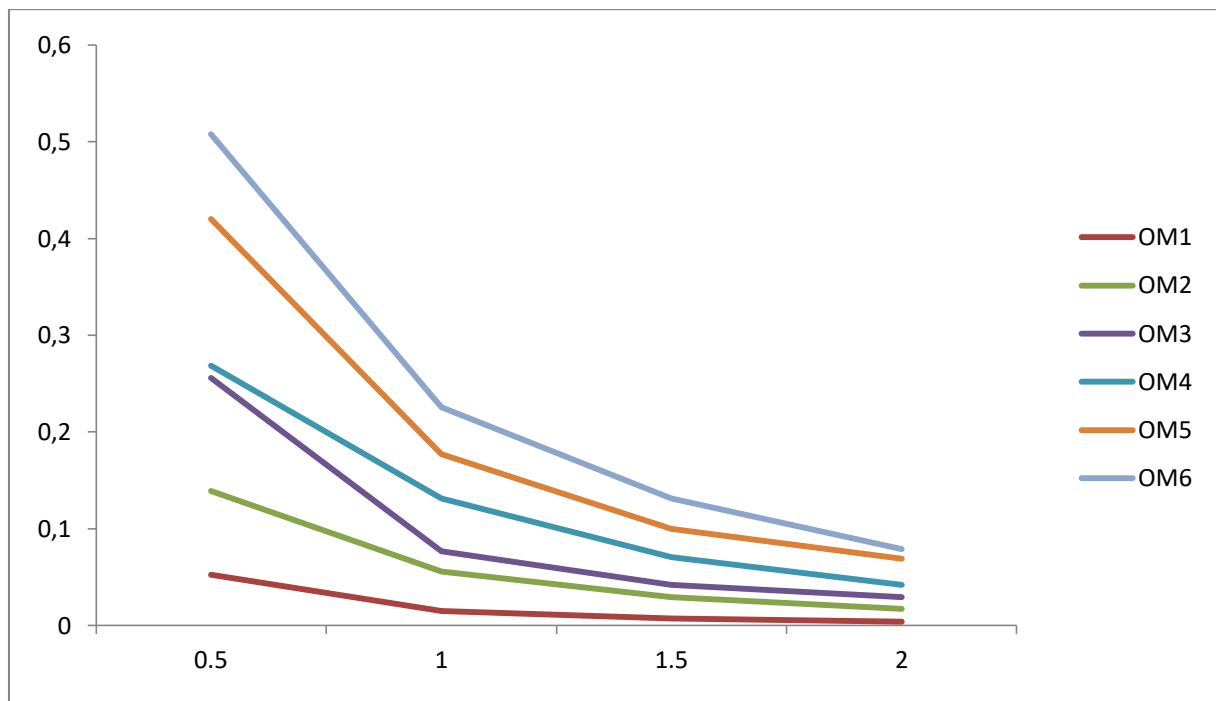
b/a	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.1004	0.2492	0.4307	0.4597	0.6853	0.7951
1	0.02935	0.1060	0.1425	0.2396	0.3168	0.3915
1.5	0.01384	0.05685	0.07953	0.1343	0.1842	0.2404
2	0.00800	0.03390	0.05771	0.08119	0.1289	0.1488

Tableau 4.9 : paramètres de fréquence om en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3, e=1.5, a=10, e/a=0.15$)

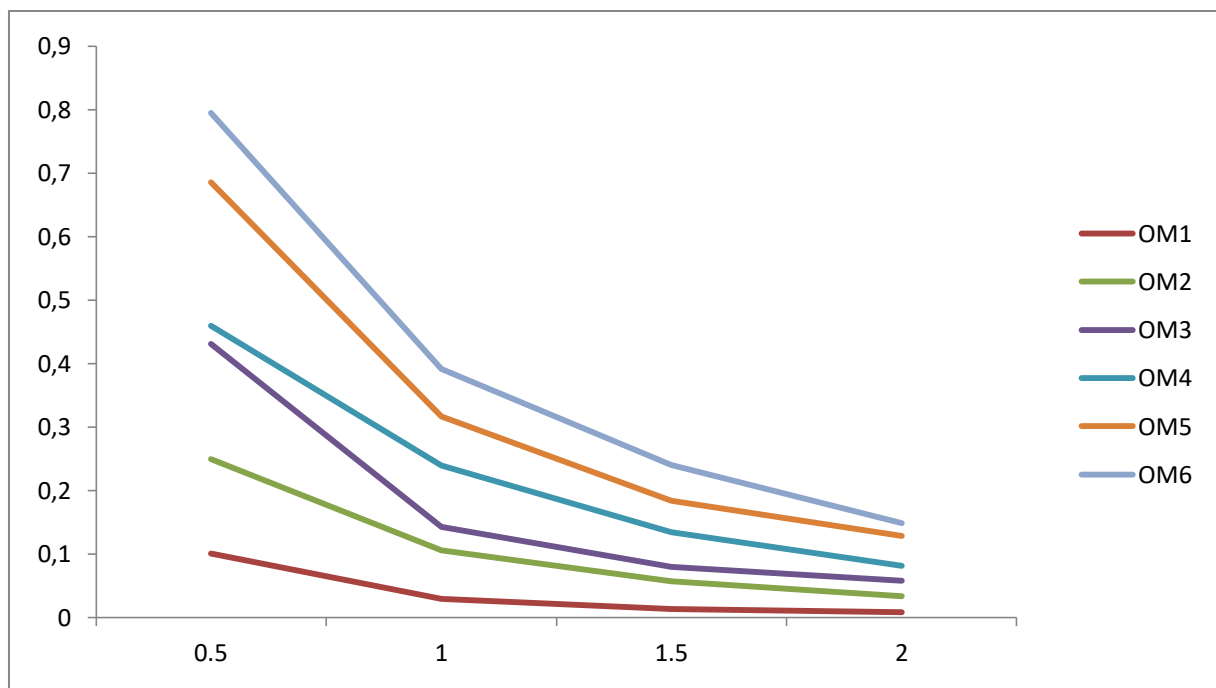
b/a	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.1420	0.3279	0.5304	0.5825	0.8350	0.9388
1	0.04312	0.1485	0.1937	0.3207	0.4144	0.4979
1.5	0.02053	0.08225	0.1104	0.1880	0.2478	0.3226
2	0.01193	0.04974	0.07816	0.1164	0.1765	0.2068

Tableau 4.10: paramètres de fréquence om en fonction de rapport b/a ($\nu=0.3, e=2, a=10, e/a=0.2$)

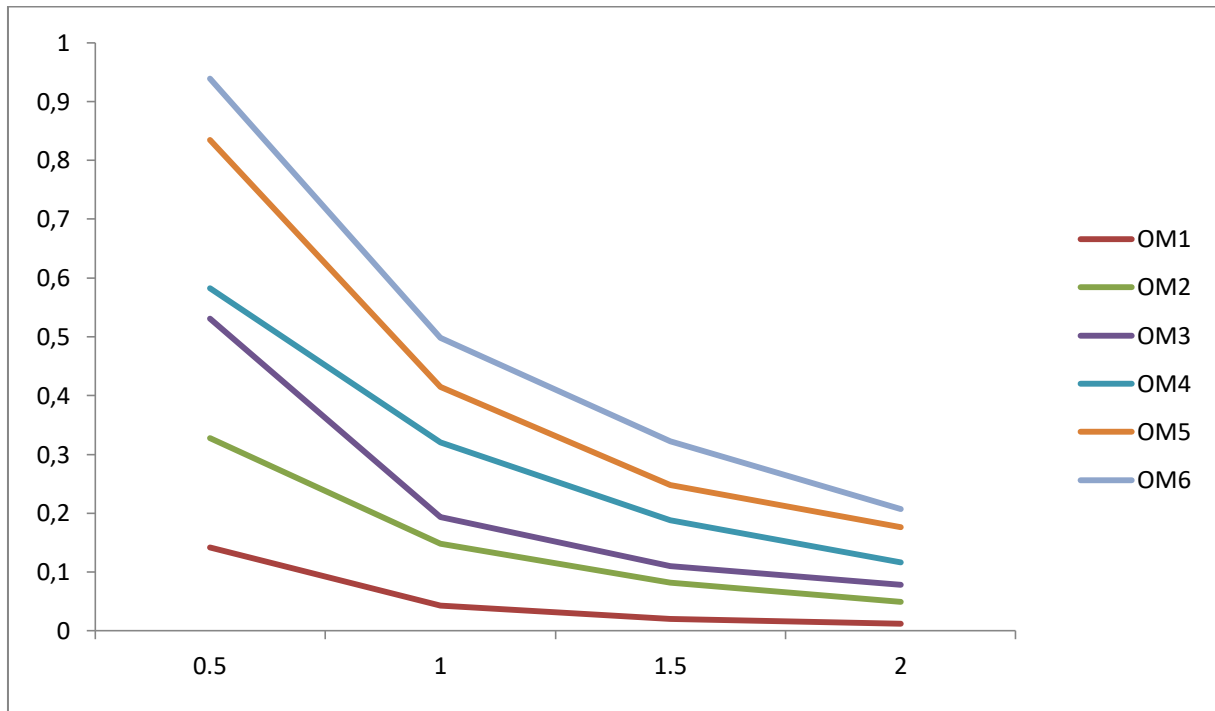
b/a	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.1769	0.3816	0.5828	0.6612	0.9176	1.0088
1	0.05606	0.1827	0.2314	0.3781	0.4782	0.5615
1.5	0.02702	0.1048	0.1346	0.2312	0.2918	0.3808
2	0.01577	0.06452	0.09621	0.1471	0.2109	0.2530



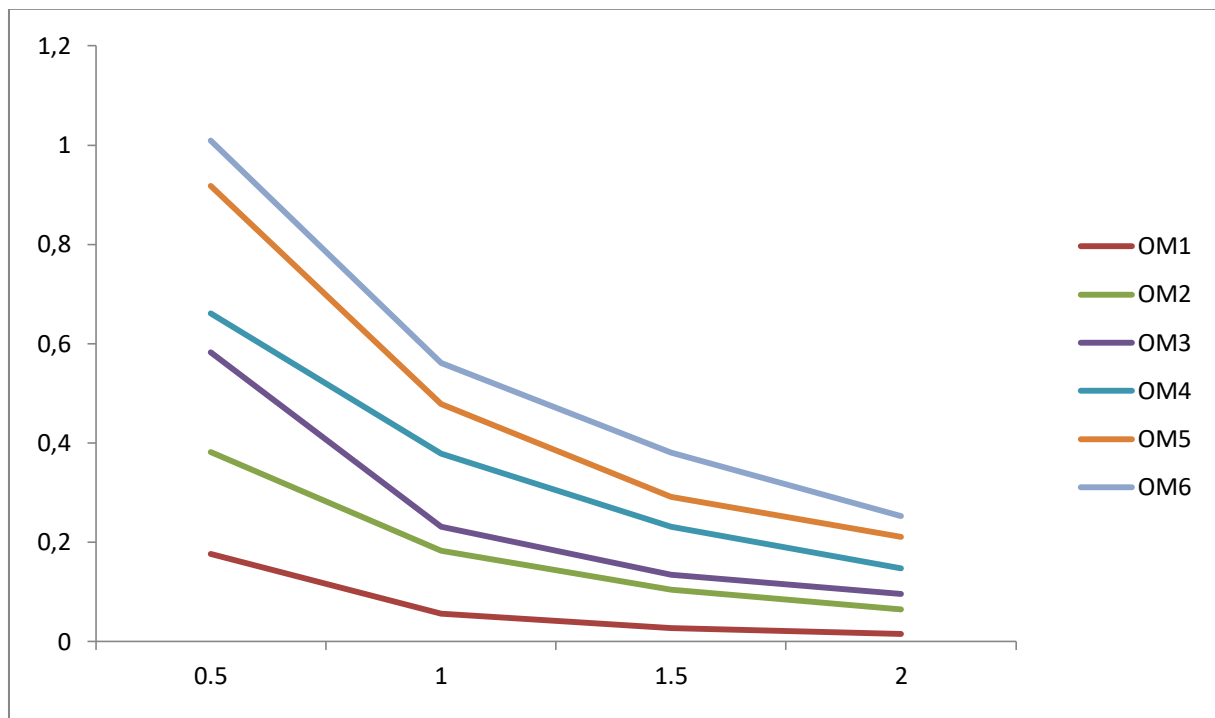
Graph 4.5 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=0.5$, $e/a=0.05$)



Graph 4.6 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=1$, $e/a=0.1$)



Graph 4.7 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=1.5$, $e/a=0.15$)



Graph 4.8 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport b/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($e=2$, $e/a=0.2$)

4.5. Influence du l'épaisseur e

On considère une plaque triangulaire E-L-L, nous varions l'épaisseur e pour les cas suivants

e=0.5, e=1, e=1.5, e=2, et nous calculons les paramètres de fréquences Ω pour les six premiers modes pour un degré de polynôme p=9.

Les tableaux 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14 montrent la variation des paramètres de fréquences Ω en fonction de l'épaisseur e, pour b/a=0.5, 1, 1.5 et 2.

D'après les graphes 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12 nous remarquons la croissance de Ω en fonction de l'épaisseur, et ceci pour les quatre valeurs de b/a.

Tableau 4.11 : paramètres de fréquence om en fonction de rapport e (v=0.3, b/a=0.5, a=10)

e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.005367	0.01468	0.02770	0.02923	0.04702	0.05835
1	0.010719	0.02929	0.05521	0.05822	0.09357	0.11596
1.5	0.016049	0.04377	0.08240	0.08681	0.13927	0.17230
2	0.02135	0.05808	0.10914	0.11488	0.18386	0.22697

Tableau 4.12: paramètres de fréquence om en fonction de rapport e (v=0.3, b/a=1, a=10)

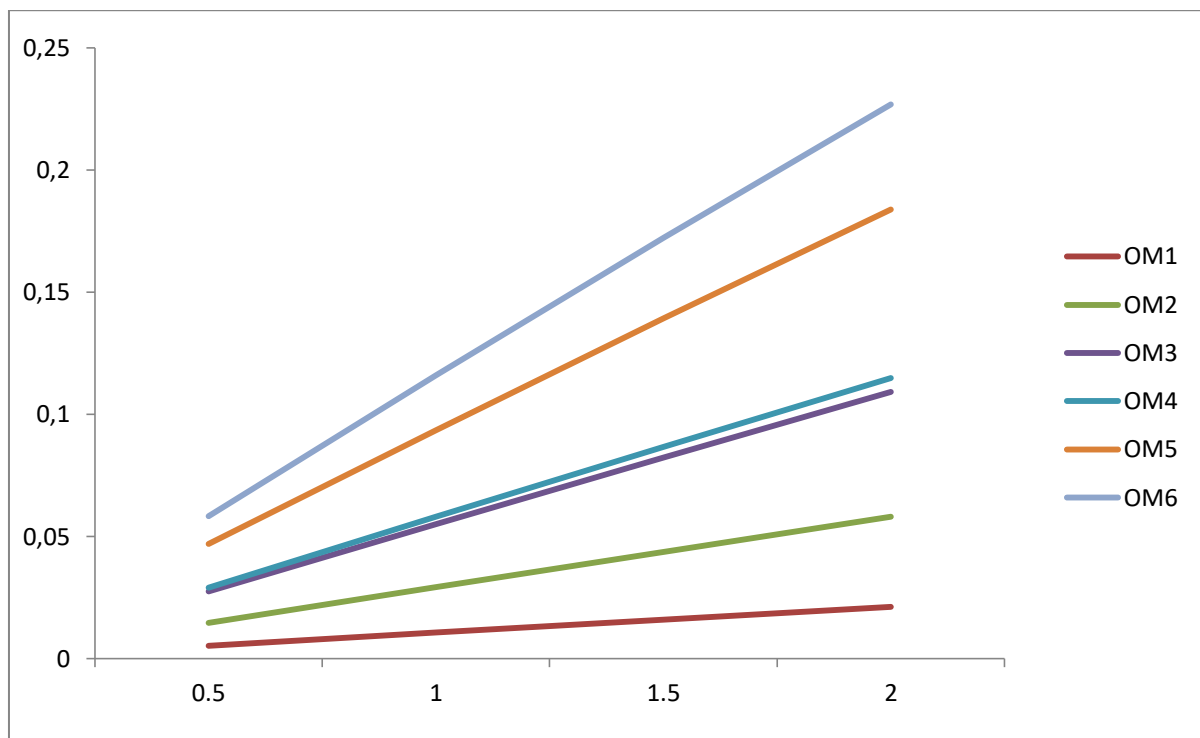
e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.001503	0.005720	0.007964	0.01368	0.01863	0.02421
1	0.003006	0.011428	0.015903	0.02732	0.03719	0.04828
1.5	0.004505	0.017112	0.023795	0.04087	0.05560	0.07210
2	0.006002	0.022765	0.031623	0.05429	0.07382	0.09557

Tableau 4.13: paramètres de fréquence om en fonction de rapport e (v=0.3, b/a=1.5, a=10)

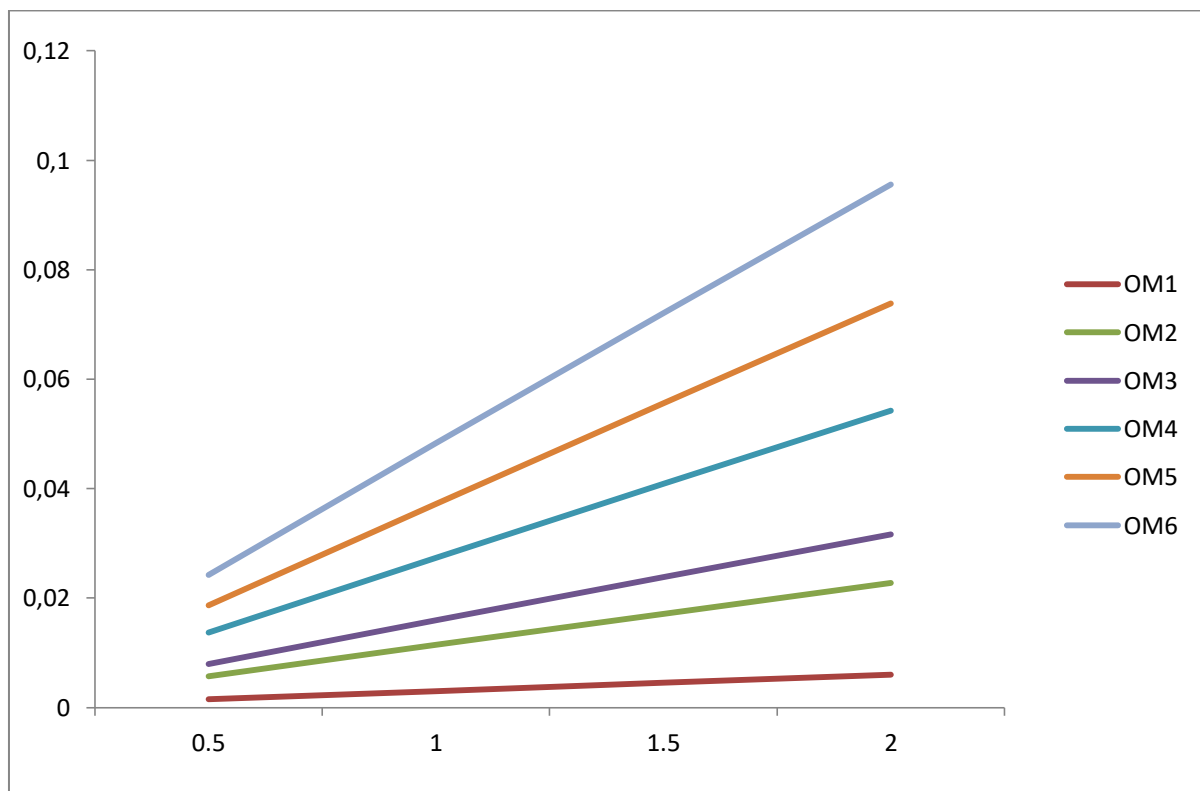
e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.000701	0.002952	0.004344	0.007233	0.01042	0.01366
1	0.001402	0.005902	0.008678	0.014454	0.02082	0.02728
1.5	0.002102	0.008845	0.012990	0.021650	0.03115	0.04083
2	0.002802	0.011782	0.017275	0.028813	0.04139	0.05426

Tableau 4.14: paramètres de fréquence om en fonction de rapport e (v=0.3, b/a=2, a=10)

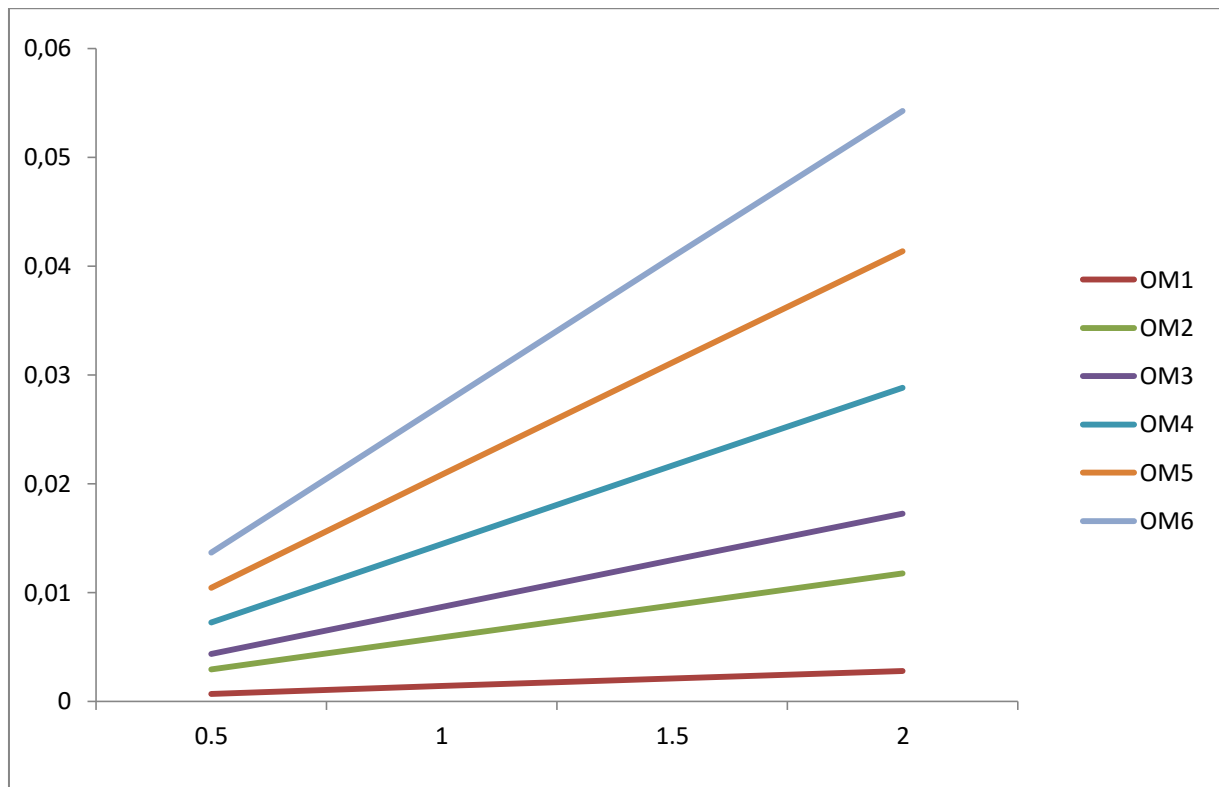
e	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.000404	0.001734	0.003013	0.004248	0.007127	0.008122
1	0.000807	0.003468	0.006019	0.008492	0.01423	0.01622
1.5	0.001211	0.005199	0.009011	0.012726	0.021308	0.024294
2	0.001614	0.006927	0.011986	0.016948	0.028333	0.032317



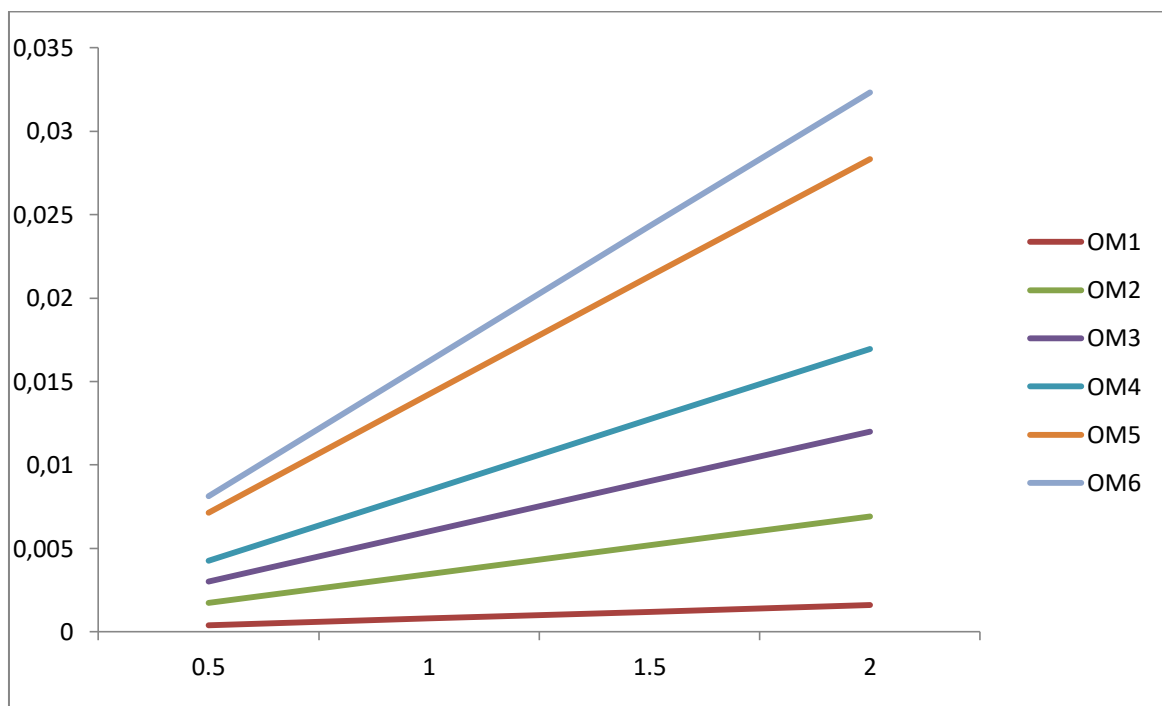
Graph 4.9 : Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=0.5$)



Graph 4.10: Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1$)



Graph 4.11 : Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1.5$)



Graph 4.12: Variation des paramètres de fréquence en fonction de l'épaisseur e pour les six premiers modes pour un plaque triangulaire E-L-L ($b/a=2$)

4.6. Influence du facteur de correction du cisaillement transversal (k)

Nous considérons une plaque triangulaire E-L-L avec $b=a$ et nous varions le facteur de corrections de cisaillement transversal k .

Nous prenons les valeurs données par : MINDLIN ($k = \frac{\pi^2}{12}$), Reissner (5/6), Wittrick ($\frac{5}{6-\nu}$) avec d'autres valeurs 0.5, 0.6, 0.9, 1, et nous calculons les paramètres de fréquences Ω

Dans les tableaux 4.15, 4.16, 4.17 et 4.18, nous calculons les paramètres de fréquences en fonctions de facteur de correction du cisaillement transversale (k) avec différentes valeurs de rapport e/a .

Les graphes 4.13, 4.14, 4.15 et 4.16, représentent les variations des paramètres de fréquence en fonction de facteur de correction transversal (k). Nous observons de que les courbes sont croissent avec une pente très faible. Donc on peut constater que l'influence de facteur (k) devrait être minime, car le facteur k est un facteur corrigeant l'hypothèse des plaques minces (KIRCHHOFF).

Le facteur k représente l'une des propriétés du matériau du fait qu'il avait une relation avec le coefficient de poisson.

Tableau 4.15 : paramètres de fréquence Ω en fonction de k ($\nu=0.3, b/a=1, a=10, e=0.5, e/a=0.05$)

K	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.01485	0.05529	0.07583	0.12904	0.17355	0.22062
0.6	0.01487	0.05551	0.07625	0.12993	0.17506	0.22301
0.822	0.01490	0.05582	0.07687	0.13121	0.17722	0.22650
0.833	0.01490	0.05584	0.07689	0.13125	0.17730	0.22663
0.877	0.01491	0.05588	0.07698	0.13143	0.17760	0.22712
0.9	0.01491	0.05590	0.07702	0.13152	0.17775	0.22737
1	0.01492	0.05599	0.07718	0.13186	0.17784	0.22831

Tableau 4.16: paramètres de fréquence Ω en fonction de k ($\nu=0.3, b/a=1, a=10, e=1, e/a=0.1$)

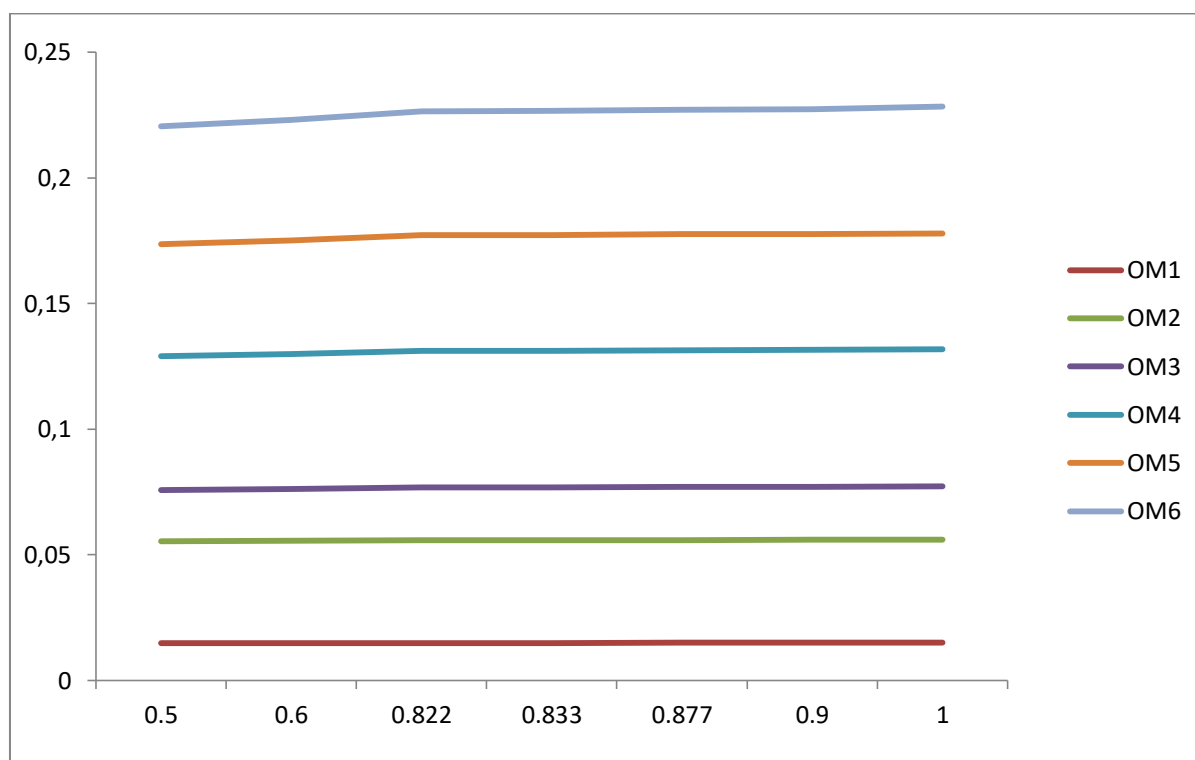
K	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.02908	0.10327	0.13728	0.22890	0.29932	0.36789
0.6	0.02919	0.10442	0.13941	0.23326	0.30643	0.37752
0.822	0.02935	0.10609	0.14253	0.23968	0.31704	0.39214
0.833	0.02936	0.10616	0.14265	0.23992	0.31744	0.39270
0.877	0.02938	0.10629	0.14309	0.24084	0.31897	0.39485
0.9	0.02994	0.10651	0.14331	0.24129	0.31972	0.39590
1	0.02943	0.10696	0.14416	0.24303	0.32264	0.40002

Tableau 4.17 : paramètres de fréquence om en fonction de k (v=0.3, b/a=1, a=10, e=1.5, e/a=0.15)

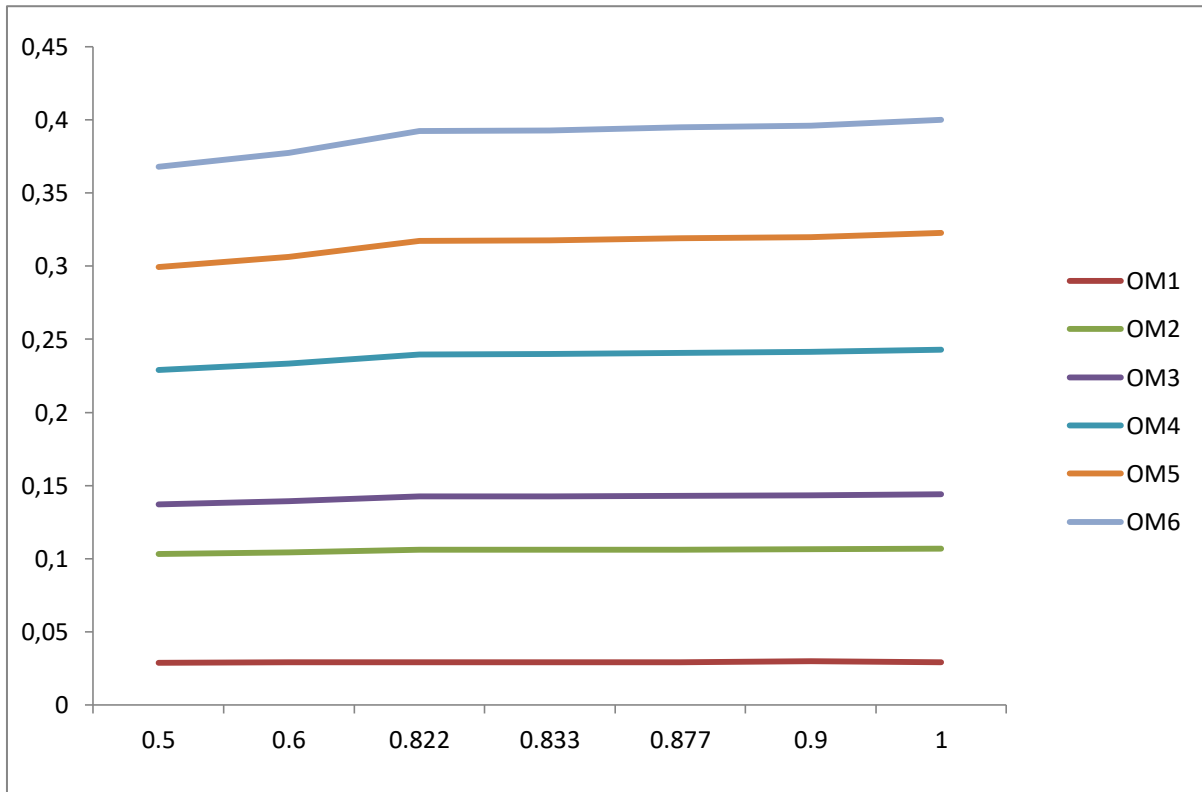
K	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.04238	0.14169	0.18185	0.29742	0.37864	0.45320
0.6	0.04269	0.14446	0.18658	0.30664	0.39263	0.47072
0.822	0.04312	0.14857	0.19376	0.32075	0.41459	0.49836
0.833	0.43142	0.14873	0.19403	0.32130	0.41545	0.49945
0.877	0.43203	0.14932	0.19508	0.32337	0.41874	0.50361
0.9	0.43233	0.14961	0.19560	0.32439	0.42036	0.50567
1	0.43349	0.15074	0.19761	0.32837	0.42673	0.51378

Tableau 4.18 : paramètres de fréquence om en fonction de k (v=0.3, b/a=1, a=10, e=2, e/a=0.2)

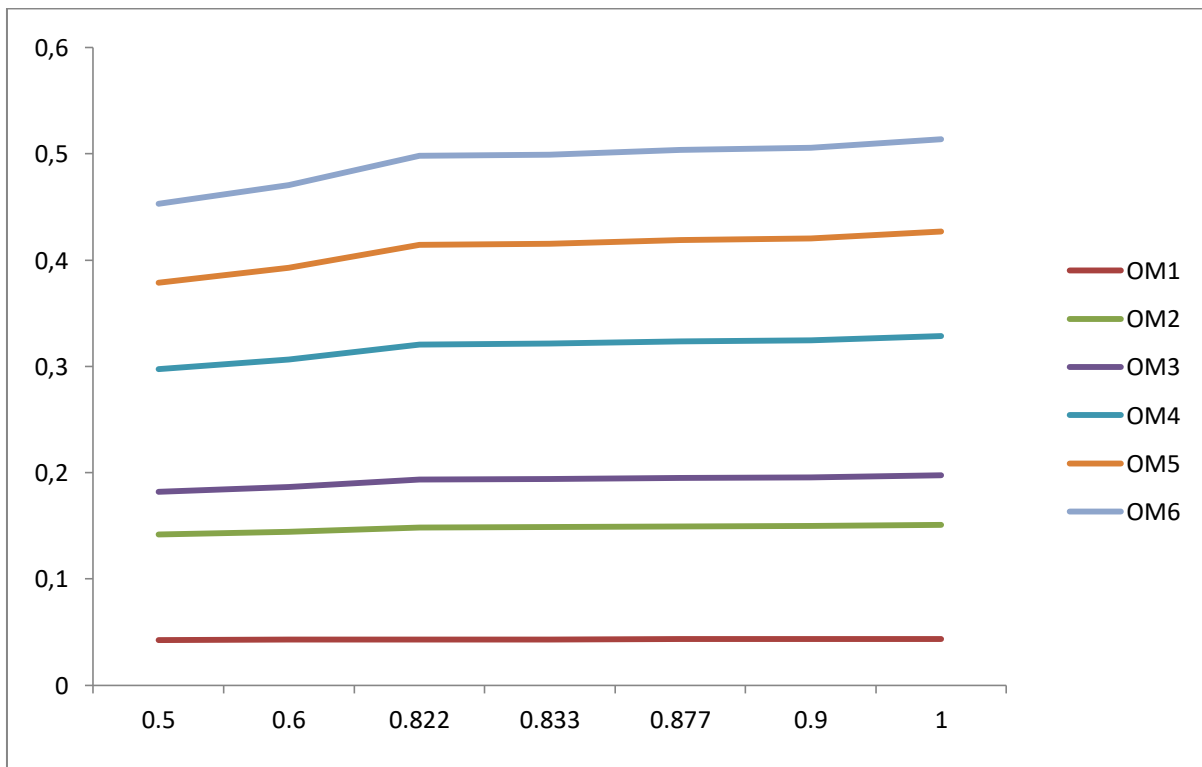
K	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.05459	0.17082	0.21233	0.34223	0.42610	0.49875
0.6	0.05519	0.17553	0.21978	0.35615	0.44592	0.52278
0.822	0.05606	0.18270	0.23149	0.37817	0.47834	0.56182
0.833	0.05609	0.18298	0.23195	0.37904	0.47965	0.56339
0.877	0.05622	0.18403	0.23370	0.38236	0.48465	0.56939
0.9	0.05628	0.18455	0.23457	0.38400	0.48714	0.57237
1	0.05651	0.18658	0.23798	0.39046	0.49701	0.58420



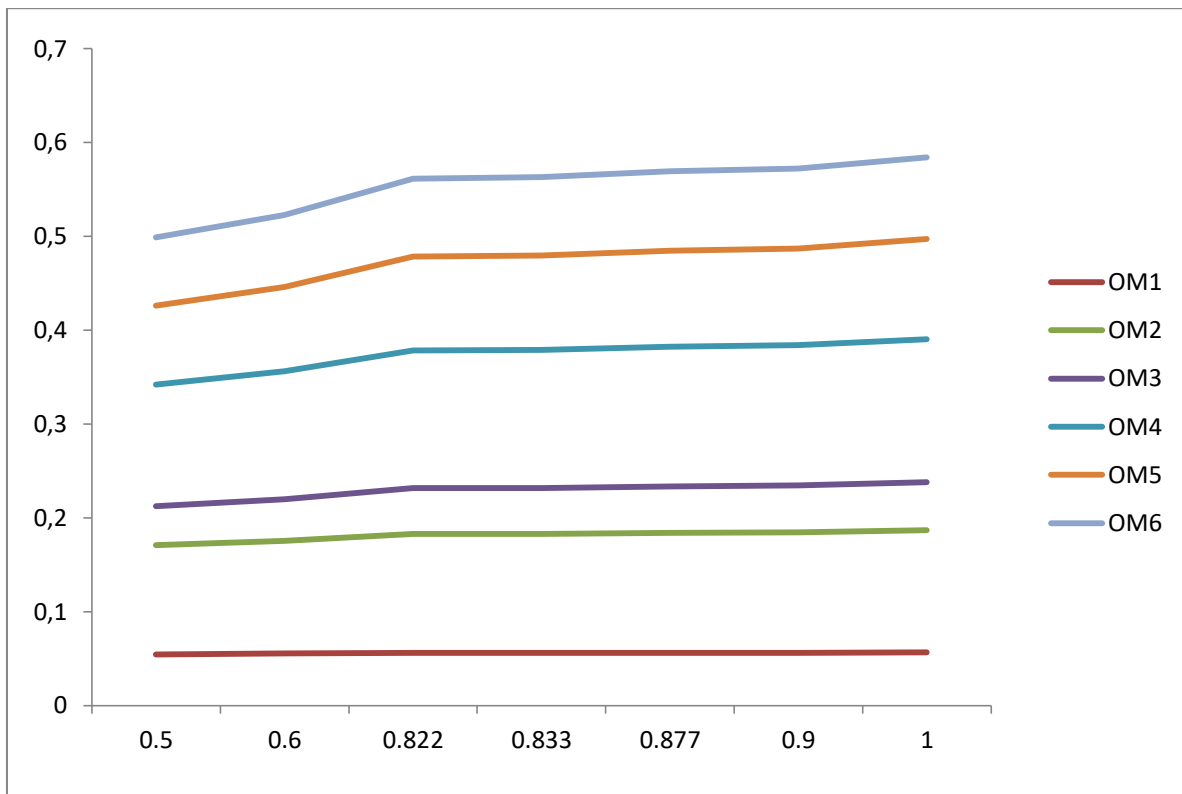
Graph 4.13 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L (b/a=1, e=0.5, e/a=0.05)



Graph 4.14 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1$, $e=1$, $e/a=0.1$)



Graph 4.15: Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1$, $e=1.5$, $e/a=0.15$)



Graphe 4.16 : Variation des paramètres de fréquence en fonction du rapport e/a pour les six premiers modes pour une plaque triangulaire E-L-L ($b/a=1$, $e=2$, $e/a=0.2$)

Conclusion

Dans ce travail, nous avons fait l'étude paramétrique de la vibration libre d'une plaque triangulaire basant sur la théorie de MINDLIN par la version-p de la méthode des éléments finis.

Nous avons utilisé la théorie de MINDLIN (théorie des plaques épaisses) qui tiens en compte les termes négligés par la théorie de KIRCHHOFF (théorie des plaques minces) telle que l'inertie et le cisaillement transversal.

Pour la formulation du problème, nous avons choisi la version-p de la méthode des éléments finis avec un élément triangulaire iso-paramétrique.

Nous avons élaboré un programme en FORTRAN 77 qui permet de résoudre le problème et de calculer les fréquences et les modes propres. Pour le calcul des fonctions de formes et leurs dérivées et les intégrales nous avons utilisé le logiciel MATLAB.

Une étude de convergence et de comparaison a été établie par rapport aux d'autres travaux similaires ainsi que d'autres méthodes comme la version h et des études expérimentales.

Nous avons effectué une analyse paramétrique géométrique où nous avons vu l'influence des rapports e/a et b/a sur les fréquences et les modes propres, ainsi que le coefficient de correction du cisaillement transversal (k).

Nous recommandons de continuer cette étude en utilisant un élément triangulaire courbé pour modéliser une plaque circulaire.

Références bibliographiques

- [1] G. KIRCHHOFF. Uher das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40.
- [2] DERBANE, SAID. Modélisation des plaques par la méthode des éléments finis. Diss. Université Mohamed Khider–Biskra, 2012
- [3] S.TIMOSHENKO, On the correction of transverse shear déformation of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. Phil. Mag., 1921, Vol 6, N°41 P, 742
- [4] E. REISSNER, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. of Appl. Mech., Vol 69-77, 1945
- [5] Y. S. UFLYAND, The propagation of waves in the transverse vibration of bard and plates ,Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech., Vol. 287-300, 1948
- [6] R. D. MINDLIN, influence of rotatory inertia and shear on flexural montion of isotropic, elastic plates, Journal of applied mechanics, 18, 31-38, 1951
- [7] BELALIA, SID AHMED. Analyse tridimensionnelle des vibrations des plaques par la version h-p de la méthode des éléments finis. Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen, 2005
- [8] L. JAOUEN, Vibrations de flexion des plaques, Université de Sherbrooke 2002
- [9] K. M LIEW, C .M WANG, Y. XIANG & S. KITIPORNHAL, Vibration of Mindlin plates, programming the p-version Ritz metode. Elsevier 1998
- [10]W.H.WITTRICK , Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observation on Mindlin’s plat theory, J.of Applied Mechanics, Vol 441-464, 1987
- [11] J. N. REDDY, Energy and variational methods In applied mechanics, John Willey and Sons 1984.
- [12] Thomas GMUR, Dynamique des structure Analyse modale numérique. Presses polytechnique et universitaires, Romandes 1997

- [13] KADDOURI Djamel Eddine. Analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement non linéaire d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel
- [14] Leissa AW. Vibration of plates. NASA, SP-160, Office of Technology Utilization, NASA, Washington, DC, 1969
- [15] A.HOUMAT free vibration analysis of membranes using the h-p version of finite element method, Journal of sound and vibration
- [16] S.MIRZA & Y.ALIZADEH, Free vibration of partially supported triangular plates computers & structures 51, 143-150, 1994
- [17] P.N GUSTAFSON, W.F.STOKEY and C.F.ZOROWSKI, An experimental study of natural vibrations of cantilevered triangular plate, J.Aeronaut. Sci . 20,331-337,1953.
- [18] R.M CHRISTENSEN, Vibration of a 45°right triangular cantilver plate by gridwork method. AIAA Jnl 1, 1790-1795, 1963
- [19] MIRZA and BILJANI, Vibration of triangular plate , AIAA Jnl 21, 1472-1475, 1983
- [20] C.S KIM & S.M DICKINSON, The free flexural vibrations of right triangular isotropic and orthotropic plates, Journal of sound and vibration 141, 291-311, 1990
- [21] R.B.BHAT, Flexural vibration of polygonal plates using characteristic orthogonal polynomials in two variables? Journal sound and vibration 114, 65-71, 1987
- [22] Florence Zara Modèle mécanique d'une plaque mince, Version du 10 mai 2017 Université Lyon 1, Faculté des Sciences et Technologie.
- [23] CHAUCHE Abdellah, ANALYSE VIBRATOIRE DES PLAQUES MINCES SOUS DIFFÉRENTES CONDITIONS AUX LIMITES, UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA 2012/2013.
- [24] Reissner, E., (1945).The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, pp. 69-77
- [25] Peano, A.G., (1976).Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. Comp. Maths. Appl, Vol. 2, pp. 211-224.
- [26] Fraeijns de Veubeke, B. M., A new variational principle for finite elastic displacements, Int. J. Engrg. Sci, 10, 745-763, 1972

Annexe-A-

$$[K_F] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} [B_F]^T [D_F] [B_F] d\xi_2 d\xi_1$$

On note que $a_i = a_\alpha$, $a_j = a_\beta$, $\xi_\alpha = \xi_i$, $\xi_\beta = \xi_j$

$$[K_F] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & -\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \end{bmatrix}^T D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{\beta=1}^n b_\beta \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} \\ 0 & \sum_{\beta=1}^n a_\beta \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} & 0 \\ 0 & \sum_{\beta=1}^n b_\beta \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} & -\sum_{\beta=1}^n a_\beta \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} \end{bmatrix} d\xi_2 d\xi_1$$

Calcule $[B_F]^T [D_F]$:

$$[B_F]^T [D_F] = \frac{D}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \\ -\sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & 0 & -\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{D}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & \frac{1-\nu}{2} \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \\ -\sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & -\nu \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} & -\frac{(1-\nu)}{2} \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice $[K_F]$ sera

$$[K_F] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{D}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \\ v \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \frac{1-v}{2} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \\ -\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & -v \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & -\frac{(1-v)}{2} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \\ 0 & \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & 0 \\ 0 & \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & -\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \end{bmatrix} d\xi_2 d\xi_1$$

Calcule la résultante de $[B_F]^T [D_F]$ avec $[B_F]$

$$\frac{D}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \\ v \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \frac{1-v}{2} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \\ -\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & -v \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & -\frac{(1-v)}{2} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \\ 0 & \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & 0 \\ 0 & \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & -\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{D}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \frac{1-v}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & \left(v \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(-\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) - \left(\frac{1-v}{2} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) \\ 0 & \left(-v \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) - \left(\frac{1-v}{2} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & \left(\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \left(\frac{1-v}{2} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) \end{bmatrix}$$

Donc la matrice $[K_F]$ sera

$$\begin{aligned}
&= \frac{D}{2A} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_{[K_F]} d\xi_2 d\xi_1 \\
&= \frac{D}{2A} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_{[K_F]} d\xi_2 d\xi_1 \\
&= \frac{D}{2A} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \left[\begin{array}{cc} \left(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \frac{1-v}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & \left(v \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(- \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) - \left(\frac{(1-v)}{2} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) \\ \left(-v \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) - \left(\frac{(1-v)}{2} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & \left(\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \left(\frac{(1-v)}{2} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) \end{array} \right] d\xi_2 d\xi_1 \\
&= \frac{D}{2A} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \left[\begin{array}{cc} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \frac{1-v}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -v b_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -\frac{(1-v)}{2} a_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) \\ \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -v a_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -\frac{(1-v)}{2} b_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{(1-v)}{2} a_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) \end{array} \right] d\xi_2 d\xi_1
\end{aligned}$$

On a

$$E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} d\xi_2 d\xi_1$$

Donc :

$$[K_F^e] = \frac{D}{2A} \left[\begin{array}{cc} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \frac{1-v}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) & \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -v b_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -\frac{(1-v)}{2} a_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) \\ \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -v a_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -\frac{(1-v)}{2} b_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) & \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{(1-v)}{2} a_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
I_{F1(i,j)} &= \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \frac{1-v}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left(a_{\alpha} a_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + \frac{(1-v)}{2} b_{\alpha} b_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) \\
I_{F2(i,j)} &= \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -v b_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -\frac{(1-v)}{2} a_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left(-v a_{\alpha} b_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - \frac{(1-v)}{2} b_{\alpha} a_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) \\
I_{F3(i,j)} &= \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -v a_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n -\frac{(1-v)}{2} b_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left(-v b_{\alpha} a_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} - \frac{(1-v)}{2} a_{\alpha} b_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) \\
I_{F4(i,j)} &= \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot b_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{(1-v)}{2} a_{\beta} \cdot a_{\alpha} \cdot E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left(b_{\alpha} b_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + \frac{(1-v)}{2} a_{\alpha} a_{\beta} E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right)
\end{aligned}$$

$$[K_C] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} [B_C]^T [D_C] [B_C] d\xi_2 d\xi_1$$

On pose que $\xi_i = \xi_{\alpha}$, $\xi_j = \xi_{\beta}$, $a_i = a_{\alpha}$, $b_i = b_{\alpha}$, $a_j = a_{\beta}$, $b_j = b_{\beta}$

$$[K_C] = 2AkGe \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & 0 & N_i \\ \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & -N_i & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & 0 & N_j \\ \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & -N_j & 0 \end{bmatrix} d\xi_2 d\xi_1$$

Calcule $[B_C]^T [D_C]$ donc

$$[B_C]^T [D_C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \\ 0 & -N_i \\ N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \\ 0 & -N_i \\ N_i & 0 \end{bmatrix}$$

Donc la matrice $[K_C]$ sera

$$[K_C] = 2AkGe \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \\ 0 & -N_i \\ N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & 0 & N_j \\ \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & -N_j & 0 \end{bmatrix} d\xi_2 d\xi_1$$

Calcule la résultante de $[B_C]^T [D_C]$ avec $[B_C]$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} & \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \\ 0 & -N_i \\ N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & 0 & N_j \\ \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} & -N_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \left(\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & -\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} N_j & \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} N_j \\ -\frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} N_i & N_i N_j & 0 \\ \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} N_i & 0 & N_i N_j \end{bmatrix}$$

Donc

$[K_C]$

$$= 2AkGe \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) + \left(\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} \right) \left(\frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} \right) & -\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} N_j & \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} N_j \\ -\frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} N_i & N_i N_j & 0 \\ \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_{\beta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\beta}} N_i & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} d\xi_2 d\xi_1$$

On a

$$X_{(i,j)}^\alpha = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} d\xi_2 d\xi_1, \quad XX_{(i,j)}^\alpha = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_j \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} d\xi_2 d\xi_1, \quad E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} d\xi_2 d\xi_1, \quad H_{(i,j)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} N_i N_j d\xi_1 d\xi_2$$

Donc

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{(2A)^2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_\beta \cdot b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} \right) + \left(\frac{1}{(2A)^2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_\beta \cdot a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} \right) & -\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} N_j & \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} N_j \\ -\frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n a_\beta \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} N_i & N_i N_j & 0 \\ \frac{1}{2A} \sum_{\beta=1}^n b_\beta \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} N_i & 0 & N_i N_j \end{array} \right]$$

Alors :

$$I_{C1(i,j)} = 2A \left(\frac{1}{(2A)^2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_\beta \cdot b_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} \right) + \left(\frac{1}{(2A)^2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_\beta \cdot a_\alpha \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_\beta} \right) = \frac{1}{2A} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 b_\alpha b_\beta E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_\alpha a_\beta E_{(i,j)}^{\alpha,\beta} \right)$$

$$I_{C2(i,j)} = -\frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} N_j = -2A \left(\frac{1}{2A} \right) \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} X X_{(i,j)}^{\alpha}$$

$$I_{C3(i,j)} = \frac{1}{2A} \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi_{\alpha}} N_j = 2A \left(\frac{1}{2A} \right) \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} X X_{(i,j)}^{\alpha}$$

$$I_{C4(i,j)} = -2A \left(\frac{1}{2A} \right) \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\alpha}} N_i = -\sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} X_{(i,j)}^{\alpha}$$

$$I_{C5(i,j)} = I_{C7(i,j)} = 2AH_{(i,j)}$$

$$I_{C6(i,j)} = 2A \left(\frac{1}{2A} \right) \sum_{\beta=1}^n b_{\alpha} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \xi_{\alpha}} N_i = \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} X_{(i,j)}^{\alpha}$$

Donc la matrice rigidité [K] sera

[K]

$$= \begin{bmatrix} KGe \frac{1}{2A} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 (b_{\alpha} b_{\beta} + a_{\alpha} a_{\beta}) E_{(i,j)}^{\alpha, \beta} \right) & -KGe \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} X X_{(i,j)}^{\alpha} & KGe \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} X X_{(i,j)}^{\alpha} \\ -KGe \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} X_{(i,j)}^{\alpha} & \frac{D}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(a_{\alpha} a_{\beta} + \frac{(1-\nu)}{2} b_{\alpha} b_{\beta} \right) E_{(i,j)}^{\alpha, \beta} \right] + 2AKGeH_{(i,j)} & \frac{D}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(-\nu b_{\alpha} a_{\beta} - \frac{(1-\nu)}{2} a_{\alpha} b_{\beta} \right) E_{(i,j)}^{\alpha, \beta} \right] \\ KGe \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} X_{(i,j)}^{\alpha} & \frac{D}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(-\nu b_{\alpha} a_{\beta} - \frac{(1-\nu)}{2} a_{\alpha} b_{\beta} \right) E_{(i,j)}^{\alpha, \beta} \right] & \frac{D}{2A} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\left(b_{\alpha} b_{\beta} + \frac{(1-\nu)}{2} a_{\alpha} a_{\beta} \right) E_{(i,j)}^{\alpha, \beta} \right] + 2AKGeH_{(i,j)} \end{bmatrix}$$

Annexe –B-

%Programme MATLAB pour calculer les fonctions de formes et leurs dérivées avec les intégrales

Sysm XI1 XI2 XI3

XI3=1-XI1-XI2

F(1,1)=XI1;

F(1,2)=XI2;

F(1,3)=XI3;

F(1,4)=XI1*XI2;

F(1,5)=XI2*XI3;

F(1,6)=XI1*XI3;

F(1,7)=(2*XI1*(XI2^2))-XI1*XI2;

F(1,8)=(2*XI2*(XI3^2))-XI2*XI3;

F(1,9)=(2*XI1*(XI3^2))-XI1*XI3;

F(1,10)=XI1*XI2*XI3;

F(1,11)=(6*XI1*(XI2^3))-(6*XI1*(XI2^2))+XI1*XI2;

F(1,12)=(6*XI2*(XI3^3))-(6*XI2*(XI3^2))+XI2*XI3;

F(1,13)=(6*XI1*(XI3^3))-(6*XI1*(XI3^2))+XI1*XI3;

F(1,15)=(2*XI1*XI2*(XI3^2))-(XI1*XI2*XI3);

F(1,14)=(2*XI1*XI3*(XI2^2))-(XI1*XI2*XI3);

F(1,16)=(20*XI1*(XI2^4))-(30*XI1*(XI2^3))+12*XI1*(XI2^2)-(XI1*XI2);

F(1,17)=(20*XI2*(XI3^4))-(30*XI2*(XI3^3))+12*XI2*(XI3^2)-(XI2*XI3);

F(1,18)=(20*XI1*(XI3^4))-(30*XI1*(XI3^3))+12*XI1*(XI3^2)-(XI1*XI3);

F(1,21)=(6*XI1*XI2*(XI3^3))-(6*XI1*XI2*(XI3^2))+XI1*XI2*XI3;

F(1,19)=(4*XI1*(XI2^2)*(XI3^2))-(2*XI1*XI3*(XI2^2))-(2*XI1*XI2*(XI3^2))+XI1*XI2*XI3;

F(1,20)=(6*XI1*XI3*(XI2^3))-(6*XI1*XI3*(XI2^2))+XI1*XI2*XI3;

F(1,22)=(70*XI1*(XI2^5))-(140*XI1*(XI2^4))+90*XI1*(XI2^3)-(20*XI1*(XI2^2))+XI1*XI2;

F(1,23)=(70*XI2*(XI3^5))-(140*XI2*(XI3^4))+90*XI2*(XI3^3)-(20*XI2*(XI3^2))+XI2*XI3;

F(1,24)=(70*XI1*(XI3^5))-(140*XI1*(XI3^4))+90*XI1*(XI3^3)-(20*XI1*(XI3^2))+XI1*XI3;

F(1,26)=(20*XI1*XI2*(XI3^4))-(30*XI1*XI2*(XI3^3))+12*XI1*XI2*(XI3^2)-(XI1*XI2*XI3);

F(1,27)=(12*XI1*(XI2^2)*(XI3^3))-(12*XI1*(XI2^2)*(XI3^2))-(6*XI1*XI2*(XI3^3))+6*XI1*XI2*(XI3^2)+(2*XI1*(XI2^2)*XI3)-(XI1*XI2*XI3);

F(1,28)=(-12*XI1*(XI2^2)*(XI3^2))+6*XI1*(XI2^2)*XI3+(2*XI1*XI2*(XI3^2))-(XI1*XI2*XI3)+(12*XI1*(XI2^3)*(XI3^2))-(6*XI1*XI3*(XI2^3));

F(1,25)=(12*XI1*(XI2^2)*XI3)-(XI1*XI2*XI3)-(30*XI1*(XI2^3)*XI3)+(20*XI1*(XI2^4)*XI3);

F(1,29)=(30*XI1*(XI2^2))-(XI1*XI2)-(210*XI1*(XI2^3))+(560*XI1*(XI2^4))-(630*XI1*(XI2^5))+(252*XI1*(XI2^6));

$$\begin{aligned}
F(1,30) &= (30 * XI2 * (XI3^2)) - (XI2 * XI3) - (210 * XI2 * (XI3^3)) + (560 * XI2 * (XI3^4)) - (630 * XI2 * (XI3^5)) + (252 * XI2 * (XI3^6)); \\
F(1,31) &= (30 * XI1 * (XI3^2)) - (XI1 * XI3) - (210 * XI1 * (XI3^3)) + (560 * XI1 * (XI3^4)) - (630 * XI1 * (XI3^5)) + (252 * XI1 * (XI3^6)); \\
F(1,32) &= -(20 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) + (XI1 * XI2 * XI3) + (90 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) - (140 * XI1 * XI2 * (XI3^4)) + (70 * XI1 * XI2 * (XI3^5)); \\
F(1,33) &= (24 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^2)) - (2 * XI1 * (XI2^2) * XI3) - (60 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^3)) + (40 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^4)) - \\
& (12 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) + (XI1 * XI2 * XI3) + (30 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) - (20 * XI1 * XI2 * (XI3^4)); \\
F(1,34) &= (36 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^2)) - (6 * XI1 * (XI2^2) * XI3) - (36 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^3)) - (6 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) + (XI1 * XI2 * XI3) + (6 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) - \\
& (36 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^2)) + (6 * XI1 * XI3 * (XI2^3)) + (36 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^3)); \\
F(1,35) &= (24 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^2)) - (12 * XI1 * (XI2^2) * XI3) - (2 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) + (XI1 * XI2 * XI3) - \\
& (60 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^2)) + (30 * XI1 * (XI2^3) * XI3) + (40 * XI1 * (XI2^4) * (XI3^2)) - (20 * XI1 * (XI2^4) * XI3); \\
F(1,36) &= -(20 * XI1 * (XI2^2) * XI3) + (XI1 * XI2 * XI3) + (90 * XI1 * (XI2^3) * XI3) - (140 * XI1 * (XI2^4) * XI3) + (70 * XI1 * (XI2^5) * XI3); \\
F(1,37) &= -(42 * XI1 * (XI2^2)) + (XI1 * XI2) + (420 * XI1 * (XI2^3)) - (1680 * XI1 * (XI2^4)) + (3150 * XI1 * (XI2^5)) - (2772 * XI1 * (XI2^6)) + (924 * XI1 * (XI2^7)); \\
F(1,38) &= -(42 * XI2 * (XI3^2)) + (XI2 * XI3) + (420 * XI2 * (XI3^3)) - (1680 * XI2 * (XI3^4)) + (3150 * XI2 * (XI3^5)) - (2772 * XI2 * (XI3^6)) + (924 * XI2 * (XI3^7)); \\
F(1,39) &= -(42 * XI1 * (XI3^2)) + (XI1 * XI3) + (420 * XI1 * (XI3^3)) - (1680 * XI1 * (XI3^4)) + (3150 * XI1 * (XI3^5)) - (2772 * XI1 * (XI3^6)) + (924 * XI1 * (XI3^7)); \\
F(1,40) &= (30 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) - (XI1 * XI2 * XI3) - (210 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) + (560 * XI1 * XI2 * (XI3^4)) - (630 * XI1 * XI2 * (XI3^5)) + (252 * XI1 * XI2 * (XI3^6)); \\
F(1,41) &= -(40 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^2)) + (2 * XI1 * (XI2^2) * XI3) + (180 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^3)) - \\
& (280 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^4)) + (140 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^5)) + (20 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) - (XI1 * XI2 * XI3) - (90 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) + (140 * XI1 * XI2 * (XI3^4)) - \\
& (70 * XI1 * XI2 * (XI3^5)); \\
F(1,42) &= -(72 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^2)) + (6 * XI1 * (XI2^2) * XI3) + (180 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^3)) - (120 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^4)) + (12 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) - (XI1 * XI2 * XI3) - \\
& (30 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) + (20 * XI1 * XI2 * (XI3^4)) + (72 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^2)) - (6 * XI1 * (XI2^3) * XI3) - (180 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^3)) + (120 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^4)); \\
F(1,43) &= -(72 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^2)) + (12 * XI1 * (XI2^2) * XI3) + (72 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^3)) + (6 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) - (XI1 * XI2 * XI3) - \\
& (6 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) + (180 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^2)) - (30 * XI1 * (XI2^3) * XI3) - (180 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^3)) - \\
& (120 * XI1 * (XI2^4) * (XI3^2)) + (20 * XI1 * (XI2^4) * XI3) + (120 * XI1 * (XI2^4) * (XI3^3)); \\
F(1,44) &= -(40 * XI1 * (XI2^2) * (XI3^2)) + (20 * XI1 * (XI2^2) * XI3) + (2 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) - (XI1 * XI2 * XI3) + (180 * XI1 * (XI2^3) * (XI3^2)) - (90 * XI1 * (XI2^3) * XI3) - \\
& (280 * XI1 * (XI2^4) * (XI3^2)) + (140 * XI1 * (XI2^4) * XI3) + (140 * XI1 * (XI2^5) * (XI3^2)) - (70 * XI1 * (XI2^5) * XI3); \\
F(1,45) &= (30 * XI1 * (XI2^2) * XI3) - (XI1 * XI2 * XI3) - (210 * XI1 * (XI2^3) * XI3) + (560 * XI1 * (XI2^4) * XI3) - (630 * XI1 * (XI2^5) * XI3) + (252 * XI1 * (XI2^6) * XI3); \\
F(1,46) &= (56 * XI1 * (XI2^2)) - (XI1 * XI2) - (756 * XI1 * (XI2^3)) + (4200 * XI1 * (XI2^4)) - (11550 * XI1 * (XI2^5)) + (16632 * XI1 * (XI2^6)) - \\
& (12012 * XI1 * (XI2^7)) + (3432 * XI1 * (XI2^8)); \\
F(1,47) &= (56 * XI2 * (XI3^2)) - (XI1 * XI2) - (756 * XI2 * (XI3^3)) + (4200 * XI2 * (XI3^4)) - (11550 * XI2 * (XI3^5)) + (16632 * XI2 * (XI3^6)) - \\
& (12012 * XI2 * (XI3^7)) + (3432 * XI2 * (XI3^8)); \\
F(1,48) &= (56 * XI1 * (XI3^2)) - (XI1 * XI2) - (756 * XI1 * (XI3^3)) + (4200 * XI1 * (XI3^4)) - (11550 * XI1 * (XI3^5)) + (16632 * XI1 * (XI3^6)) - \\
& (12012 * XI1 * (XI3^7)) + (3432 * XI1 * (XI3^8)); \\
F(1,49) &= -(42 * XI1 * XI2 * (XI3^2)) + (XI1 * XI2 * XI3) + (420 * XI1 * XI2 * (XI3^3)) - (1680 * XI1 * XI2 * (XI3^4)) + (3150 * XI1 * XI2 * (XI3^5)) - \\
& (2772 * XI1 * XI2 * (XI3^6)) + (924 * XI1 * XI2 * (XI3^7))
\end{aligned}$$

$$F(1,50)=(60*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^2))- (2*X_{I1}*(X_{I2}^2)*X_{I3})- (420*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^3))+ (1120*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^4))- (1260*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^5))+ (504*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^6))- (30*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))+ (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})+ (210*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^3))- (550*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^4))+ (630*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^5))- (252*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^6))$$

$$F(1,51)=(120*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^2))- (6*X_{I1}*(X_{I2}^2)*X_{I3})- (540*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^3))+ (840*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^4))- (420*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^5))- (20*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))+ (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})+ (90*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^3))- (140*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^4))+ (70*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^5))-$$

$$(120*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^2))+ (6*X_{I1}*X_{I3}*(X_{I2}^3))+ (540*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^3))- (840*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^4))+ (420*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^5))$$

$$F(1,52)=(144*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^2))- (12*X_{I1}*(X_{I2}^2)*X_{I3})- (360*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^3))+ (240*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^4))- (12*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))+ (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})+ (30*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^3))- (20*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^4))-$$

$$(360*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^2))+ (30*X_{I1}*(X_{I2}^3)*X_{I3})+ (900*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^3))- (600*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^4))+ (240*X_{I1}*(X_{I2}^4)*(X_{I3}^2))- (20*X_{I1}*(X_{I2}^4)*X_{I3})- (600*X_{I1}*(X_{I2}^4)*(X_{I3}^3))+ (400*X_{I1}*(X_{I2}^4)*(X_{I3}^4))$$

$$F(1,53)=(120*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^2))- (20*X_{I1}*(X_{I2}^2)*X_{I3})- (120*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^3))- (6*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))+ (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})+ (6*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^3))- (540*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^2))+ (90*X_{I1}*(X_{I2}^3)*X_{I3})+ (540*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^3))+ (840*X_{I1}*(X_{I2}^4)*(X_{I3}^2))- (140*X_{I1}*(X_{I2}^4)*X_{I3})-$$

$$(840*X_{I1}*(X_{I2}^4)*(X_{I3}^3))- (420*X_{I1}*(X_{I2}^5)*(X_{I3}^2))+ (70*X_{I1}*(X_{I2}^5)*X_{I3})+ (420*X_{I1}*(X_{I2}^5)*(X_{I3}^3))$$

$$F(1,54)=(60*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^2))- (30*X_{I1}*(X_{I2}^2)*X_{I3})- (2*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))+ (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})-$$

$$(420*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^2))+ (210*X_{I1}*(X_{I2}^3)*X_{I3})+ (1120*X_{I1}*(X_{I2}^4)*(X_{I3}^2))- (560*X_{I1}*(X_{I2}^4)*X_{I3})-$$

$$(1260*X_{I1}*(X_{I2}^5)*(X_{I3}^2))+ (630*X_{I1}*(X_{I2}^5)*X_{I3})+ (504*X_{I1}*(X_{I2}^6)*(X_{I3}^2))- (252*X_{I1}*(X_{I2}^6)*X_{I3})$$

$$F(1,55)=-(42*X_{I1}*(X_{I2}^2)*X_{I3})+ (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})+ (420*X_{I1}*(X_{I2}^3)*X_{I3})- (1680*X_{I1}*(X_{I2}^4)*X_{I3})+ (3150*X_{I1}*(X_{I2}^5)*X_{I3})- (2772*X_{I1}*(X_{I2}^6)*X_{I3})+ (924*X_{I1}*(X_{I2}^7)*X_{I3})$$

$$F(1,56)=-(72*X_{I1}*(X_{I2}^2))+ (X_{I1}*X_{I2})+ (1260*X_{I1}*(X_{I2}^3))- (9240*X_{I1}*(X_{I2}^4))+ (34650*X_{I1}*(X_{I2}^5))- (72072*X_{I1}*(X_{I2}^6))+ (84084*X_{I1}*(X_{I2}^7))- (51480*X_{I1}*(X_{I2}^8))+ (12870*X_{I1}*(X_{I2}^9))$$

$$F(1,57)=-(72*X_{I2}*(X_{I3}^2))+ (X_{I2}*X_{I3})+ (1260*X_{I2}*(X_{I3}^3))- (9240*X_{I2}*(X_{I3}^4))+ (34650*X_{I2}*(X_{I3}^5))- (72072*X_{I2}*(X_{I3}^6))+ (84084*X_{I2}*(X_{I3}^7))- (51480*X_{I2}*(X_{I3}^8))+ (12870*X_{I2}*(X_{I3}^9))$$

$$F(1,58)=-(72*X_{I1}*(X_{I3}^2))+ (X_{I1}*X_{I3})+ (1260*X_{I1}*(X_{I3}^3))- (9240*X_{I1}*(X_{I3}^4))+ (34650*X_{I1}*(X_{I3}^5))- (72072*X_{I1}*(X_{I3}^6))+ (84084*X_{I1}*(X_{I3}^7))- (51480*X_{I1}*(X_{I3}^8))+ (12870*X_{I1}*(X_{I3}^9))$$

$$F(1,59)=(56*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))- (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})- (756*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^3))+ (4200*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^4))- (11550*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^5))+ (16632*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^6))- (12012*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^7))+ (3432*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^8))$$

$$F(1,60)=-(84*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^2))+ (2*X_{I1}*X_{I3}*(X_{I2}^2))+ (840*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^3))- (3360*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^4))+ (6300*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^5))- (5544*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^6))+ (1848*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^7))+ (42*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))- (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})- (420*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^3))+ (1680*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^4))- (3150*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^5))+ (2772*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^6))- (924*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^7))$$

$$F(1,61)=-(180*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^2))+ (6*X_{I1}*(X_{I2}^2)*X_{I3})+ (1260*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^3))- (3360*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^4))+ (3780*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^5))- (1512*X_{I1}*(X_{I2}^2)*(X_{I3}^6))+ (30*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^2))- (X_{I1}*X_{I2}*X_{I3})- (210*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^3))+ (560*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^4))-$$

$$(630*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^5))+ (252*X_{I1}*X_{I2}*(X_{I3}^6))+ (180*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^2))- (6*X_{I1}*(X_{I2}^3)*X_{I3})- (1260*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^3))+ (3360*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^4))- (3780*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^5))+ (1512*X_{I1}*(X_{I2}^3)*(X_{I3}^6))$$

```

F(1,62)=- (240*X11*(X12^2)*(X13^2))+(12*X11*(X12^2)*X13)+(1080*X11*(X12^2)*(X13^3))-
(1680*X11*(X12^2)*(X13^4))+(840*X11*(X12^2)*(X13^5))+(20*X11*X12*(X13^2))-(X11*X12*X13)-(90*X11*X12*(X13^3))+(140*X11*X12*(X13^4))-
(70*X11*X12*(X13^5))+(600*X11*(X12^3)*(X13^2))-(30*X11*(X12^3)*X13)-(2700*X11*(X12^3)*(X13^3))+(4200*X11*(X12^3)*(X13^4))-
(2100*X11*(X12^3)*(X13^5))-(400*X11*(X12^4)*(X13^2))+(20*X11*(X12^4)*X13)+(1800*X11*(X12^4)*(X13^3))-
(2800*X11*(X12^4)*(X13^4))+(1400*X11*(X12^4)*(X13^5))
F(1,63)=- (240*X11*(X12^2)*(X13^2))+(20*X11*(X12^2)*X13)+(600*X11*(X12^2)*(X13^3))-(400*X11*(X12^2)*(X13^4))+(12*X11*X12*(X13^2))-(X11*X12*X13)-
(30*X11*X12*(X13^3))+(20*X11*X12*(X13^4))+(1080*X11*(X12^3)*(X13^2))-(90*X11*(X12^3)*X13)-(2700*X11*(X12^3)*(X13^3))+(1800*X11*(X12^3)*(X13^4))-
(1680*X11*(X12^4)*(X13^2))+(140*X11*(X12^4)*X13)+(4200*X11*(X12^4)*(X13^3))-(2800*X11*(X12^4)*(X13^4))+(840*X11*(X12^5)*(X13^2))-
(70*X11*(X12^5)*X13)-(2100*X11*(X12^5)*(X13^3))+(1400*X11*(X12^5)*(X13^4))
F(1,64)=- (180*X11*(X12^2)*(X13^2))+(30*X11*(X12^2)*X13)+(180*X11*(X12^2)*(X13^3))+(6*X11*X12*(X13^2))-(X11*X12*X13)-
(6*X11*X12*(X13^3))+(1260*X11*(X12^3)*(X13^2))-(210*X11*(X12^3)*X13)-(1260*X11*(X12^3)*(X13^3))-
(3360*X11*(X12^4)*(X13^2))+(560*X11*(X12^4)*X13)+(3360*X11*(X12^4)*(X13^3))-(3780*X11*(X12^5)*(X13^2))-(630*X11*(X12^5)*X13)-
(3780*X11*(X12^5)*(X13^3))-(1512*X11*(X12^6)*(X13^2))+(252*X11*(X12^6)*X13)+(1512*X11*(X12^6)*(X13^3))
F(1,65)=- (84*X11*(X12^2)*(X13^2))+(42*X11*(X12^2)*X13)+(2*X11*X12*(X13^2))-(X11*X12*X13)+(840*X11*(X12^3)*(X13^2))-(420*X11*(X12^3)*X13)-
(3360*X11*(X12^4)*(X13^2))+(1680*X11*(X12^4)*X13)+(6300*X11*(X12^5)*(X13^2))-(3150*X11*(X12^5)*X13)-
(5544*X11*(X12^6)*(X13^2))+(2772*X11*(X12^6)*X13)+(1848*X11*(X12^7)*(X13^2))-(924*X11*(X12^7)*X13)
F(1,66)=(56*X11*(X12^2)*X13)-(X11*X12*X13)-(756*X11*(X12^3)*X13)+(4200*X11*(X12^4)*X13)-(11550*X11*(X12^5)*X13)+(16632*X11*(X12^6)*X13)-
(12012*X11*(X12^7)*X13)+(3432*X11*(X12^8)*X13)
for i=1:66
    dx=diff(F(1,i),X11)
    dy=diff(F(1,i),X12)
    dz=diff(F(1,i),X13)
end
for k=2:4
    for l=2:4
        for i=1:45
            for j=1:45
                E(i,j)=int(int((F(k,i)*F(l,j)),X12,0,1-X11),X11,0,1);
                E(i,j)=vpa((E(i,j)));
            end
        end
    end
end
end
end
end
    reshape(E,2025,1)

```

Annexe –C-

Exemple d'un fichier d'entrée

PLAQUE TRIANGULAIRE

```
1 3 3 3 3 8 10 7.778 0.063 6800000 .8224 .3 50
1 0 0
2 10 0
3 0 10
1 1 1 1
2 0 0 0
3 1 1 1
1 0 0 0
2 0 0 0
3 1 1 1
```

Annexe-D-

Exemple d'un fichier de sortie

PLAQUE TRIANGULAIRE

BASIC PARAMETERS ELEMENTS

NTE	NTN	NTC	NNR	NCR	NMODE	IP	RO	HR	E	SC	PR	T
1	3	3	3	3	8	10	.778E+01	.630E-01	.680E+07	.822E+00	.300E+00	.500E+02

COORDONNEES DES NOEUDS

NOEUDS	XN	YN
1	.0000	.0000
2	10.0000	.0000
3	.0000	10.0000

NOEUDS RESTRIENTS

NOEUDS	R1	R2	R3
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	1	1

COTES RESTREINTS

COTE	C1	C2	C3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	1	1	1

NUMBER OF EQUATIONS= 165

PARAMETRES DE FREQUANCES

NMODE	OMEGA
1	1.894714743681059E-003
2	7.206366220393588E-003
3	1.003408560165088E-002
4	1.724321301240095E-002
5	2.347089827479095E-002
6	3.049051680085370E-002
7	3.435583257052777E-002
8	4.143966392156155E-002

Annexe-F

Polynôme de légènder déplacée :

$$P_0(\xi) = 1$$

$$P_1(\xi) = 2\xi - 1$$

$$P_2(\xi) = 6\xi^2 - 6\xi + 1$$

$$P_3(\xi) = 20\xi^3 - 30\xi^2 + 12\xi - 1$$

$$P_4(\xi) = 70\xi^4 - 140\xi^3 + 90\xi^2 - 20\xi + 1$$

$$P_5(\xi) = 252\xi^5 - 630\xi^4 + 560\xi^3 - 210\xi^2 + 30\xi - 1$$

$$P_6(\xi) = 924\xi^6 - 2772\xi^5 + 3150\xi^4 - 1680\xi^3 + 420\xi^2 - 42\xi + 1$$

$$P_7(\xi) = 3432\xi^7 - 12012\xi^6 + 16632\xi^5 - 11550\xi^4 + 4200\xi^3 - 750\xi^2 + 56\xi - 1$$

$$P_8(\xi) = 12870\xi^8 - 51480\xi^7 + 84084\xi^6 - 72072\xi^5 + 34650\xi^4 - 9240\xi^3 + 1260\xi^2 - 72\xi + 1$$

$$P_9(\xi) = 48620\xi^9 - 218790\xi^8 + 411840\xi^7 - 420420\xi^6 + 252252\xi^5 - 90090\xi^4 + 18480\xi^3 - 1980\xi^2 + 90\xi - 1$$

$$P_{10}(\xi) = 184756\xi^{10} - 923780\xi^9 + 1969110\xi^8 - 2333760\xi^7 + 1681680\xi^6 - 756756\xi^5 + 210210\xi^4 - 34320\xi^3 + 2970\xi^2 - 110\xi + 1$$