



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Probabilités et Statistiques

Par :

KHETTAB Zahira

Sur le thème

Etude Spectrale de Matrices de Covariance d'un Processus Autorégressif AR(1)

Soutenue publiquement le 23/ 10 /2021 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr Boukhari Fekhr Eddine	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr Allam Abdelaziz	MCA	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr Madani Fethi	Professeur	Université de Saida	Examineur
Mr Kandouci Abdeldjebbar	Professeur	Université de Saida	Examineur
Mme Bouchentouf Amina	Professeur	Université de Sidi Bel Abbes	Examinatrice

*Laboratoire de Statistiques et Modélisations Aléatoires (SMA)
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*

REMERCIEMENTS

Cette thèse est l'aboutissement d'un long travail durant lequel de nombreuses personnes m'ont aidé, soutenu et encouragé. Je profite pour les en remercier.

Je tiens tout d'abord à rendre hommage au Professeur MOURID Tahar. Ce travail lui doit beaucoup.

Mes vifs remerciements et ma plus grande reconnaissance vont à Monsieur ALLAM Abdelaziz, Maître de conférences Habilité à l'Université de Tlemcen, qui m'a fait le grand bonheur de diriger le travail de cette thèse malgré sa charge pédagogique et scientifique.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Monsieur BOUKHARI Fekhr Eddine, Professeur à Université de Tlemcen. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je suis très honoré à remercier de la présence à mon jury de thèse et je tiens à remercier, Monsieur MADNI Fethi, Professeur à Université de Saida, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre de mon jury de thèse. Je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Monsieur KANDOUCI Abdeldjebbar, Professeur à Université de Saida, a bien voulu accepter d'examiner le travail de cette thèse, je le remercie infiniment et le prie de bien vouloir recevoir mes sincères remerciements.

Je tiens à exprimer à Madame Bouchentouf Amina, Professeur à Université de Sidi Bel Abbes, mes respectueux remerciements pour l'intérêt qu'elle a manifesté à ce travail de thèse en acceptant de participer au jury.

Je remercie tous mes amis et collègues, qui m'ont aidé chacun à leur manière.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des membres de ma famille un par un pour leur amour et leur soutien constant.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de la distribution spectrale limite d'une classe de grandes matrices aléatoires dont les entrées sont corrélées. On s'intéresse au comportement asymptotique de grandes matrices de covariances dont les entrées sont liées par la relation d'un autorégressif d'ordre un. On montre dans ce contexte que la fonction de répartition empirique des valeurs propres de la matrice de covariance converge presque sûrement vers une fonction non aléatoire donnée par Marcenko et Pastur. Notre approche consiste à une centralisation et une troncature des variables aléatoires fortement géométriquement mélangeant et une application de la méthode de la transformée de Stieltjes qui permet d'obtenir, sous certaines conditions, l'équation intégrale de la distribution spectrale limite, et on montre ainsi un résultat d'universalité concernant le comportement asymptotique du spectre de ces matrices de covariance.

On traite également le cas des matrices dont les colonnes sont des processus autorégressifs d'ordre un. Ceci étend d'une part le premier résultat à un cadre vectoriel et généralise d'autre part, les résultats sur les matrices à entrées indépendantes identiquement distribuées.

Enfin, on présente des simulations numériques illustrant le comportement de l'estimateur de la densité des valeurs propres des matrices en question au tour de la vraie densité en variant les différents paramètres.

Abstract

This thesis deals with the study of the limit spectral distribution of a class of large random matrices having correlated entries. We are interested in the asymptotic behavior of large covariance matrices whose entries are correlated by the relation of an autoregressive of order one. In this context, we show that the empirical eigenvalue distribution function of the covariance matrix converges almost surely to a non-random function given by Marcenko and Pastur. Our approach consists of a centralization and a truncation of strongly geometrically mixing random variables and an application of the Stieltjes transform method which makes it possible to obtain, under certain conditions, the integral equation of the limit spectral distribution, and we thus show a universality result concerning the asymptotic behavior of the spectrum of these covariance matrices.

We also investigate the case of matrices whose columns are autoregressive processes of order one. This extends on the one hand the first result to a vector framework and on the other hand generalizes the results on matrices with independent identically distributed entries.

Finally, we present numerical simulations illustrating the behavior of the estimator of the spectral density of the matrices in question around the true density by varying the various parameters.

Notations

$p.s.$	presque sûrement
$i.i.d.$	indépendantes identiquement distribuées
$f.d.r.e.$	fonction de répartition empirique
$AR(1)$	autorégressif d'ordre 1
$MA(q)$	processus moyenne mobile d'ordre q
$MA(\infty)$	processus moyenne mobile d'ordre infini
$v.p.$	valeur propre
GSM	mélange géométriquement fort
LSD	distribution spectrale limite
STE	estimateur par la transformée de Stieltjes
I	matrice identité
A^t	transposée de la matrice A
A^*	matrice adjointe de A
$tr(A), rg(A)$	trace et rang de la matrice A
$\ A\ $	norme spectrale de la matrice A
$\ X\ _p$	norme L^p du vecteur X
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$	espace probabilisé avec \mathcal{F} une σ -algèbre et \mathcal{P} une mesure
(Ω, A, P)	
P	probabilité
$E(X), Var(X)$	espérance de X , variance de X
$Cov(X, Y)$	covariance de X et Y
\xrightarrow{v}	convergence vague
\xrightarrow{D}	convergence en distribution
δ_x	mesure de Dirac au point x
$\mathcal{M}(\mathbb{R})$	ensemble de distributions sur l'ensemble des réels

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ensemble des entiers naturels, nombres entiers, réels et complexes

$\operatorname{Im} z$ partie imaginaire de z

\mathbb{C}^+ $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

$\mathbb{I}_{(A)}$ fonction indicatrice de A

Table des Matières

Introduction	7
1 Spectre de matrices de covariance	12
1.1 Préliminaires	12
1.1.1 Transformée de Stieltjes	13
1.1.2 Processus Linéaires	14
1.1.3 Mélange fort de Processus	16
1.2 Etude globale du spectre	17
1.2.1 Loi du demi-cercle	17
1.2.2 Loi de Marcenko-Pastur	18
1.2.3 Limite de la distribution spectrale de matrices aléatoires à entrées corrélées	20
1.3 Etude locale du spectre	21
1.3.1 Séparation des valeurs propres de matrices de covariances dans le cas i.i.d.	21
1.3.2 Localisation des valeurs propres des matrices gaussiennes générale- ment corrélées	23
2 Loi asymptotique de la distribution empirique des valeurs propres	25
2.1 Représentation scalaire du processus AR(1)	25
2.1.1 Introduction	25
2.1.2 Résultat	27
2.2 Preuve du Théorème 2.1.	27
2.2.1 Variables tronquées centrées	27
2.2.2 Lemmes auxiliaires	32
2.2.3 Esperance et variance de trace de matrices d'entrées tronquées centrées	35
2.2.4 Convergence de la transformée de Stieltjes	41
2.2.5 Expression de la loi limite	47
2.2.6 Unicité de la limite	48

3	Distribution spectrale limite des matrices de processus linéaires	50
3.1	Introduction	50
3.2	Représentation vectorielle du processus AR(1)	52
4	Simulations Numériques	55
4.1	Estimation de la densité par la transformée de Stieltjes	56
4.1.1	1 ^{ier} cas: T_N matrice identité	56
4.1.2	2 ^{ème} cas: T_N matrice diagonale	60
4.2	Conclusion	64
	Appendice	65
A.1	Preuves des lemmes auxiliaires	65
A.2	Lemmes utiles	77
	Conclusion générale	79
	Bibliographie	80

Introduction

La théorie des matrices aléatoires est un outil prometteur pour la résolution des problèmes théoriques et pratiques mathématiques et physiques, elle s'intéresse, entre autres, aux propriétés du spectre des matrices aléatoires, telles que le comportement asymptotique global du spectre, le comportement asymptotique des valeurs propres extrêmes, la loi jointe des valeurs propres, etc.

La théorie des matrices aléatoires consiste initialement en une étude spécifique de la théorie des probabilités au cas de variables aléatoires à valeur matricielle. Une matrice X est dite aléatoire si ses entrées suivent une loi de probabilité conjointe. Dans ce qui suit, il apparaîtra en particulier très naturellement que l'étude des propriétés statistiques de matrices de type XX^t (XX^*), X étant composée de colonnes identiquement distribuées, sera d'une grande importance. Ces matrices sont généralement appelées matrices de covariance empiriques. Lorsque la matrice X est composée d'entrées gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de covariance R , XX^t (XX^*) est une matrice dite matrice de Wishart de covariance R .

Les matrices aléatoires ont été introduites par Wishart dans les années 20, dans le cadre des statistiques multivariées. Dans les années 50, Wigner a utilisé un autre type de matrices aléatoires, appelées matrices de Wigner, dans le but de modéliser les Hamiltoniens qui régissent les évolutions des systèmes en physique statistique. Devenues populaires grâce au phénomène d'universalité, i.e. le fait que ces propriétés asymptotiques ne dépendent pas de la loi des coefficients de la matrice, leur étude a intéressé de nombreux domaines comme la combinatoire, les systèmes intégrables, les probabilités libres, les télécommunications, le traitement du signal, l'analyse fonctionnelle géométrique et, plus tard, la finance.

Dans ce travail nous développons des résultats basés sur la théorie des matrices aléatoires pour étudier un modèle de matrices dont les entrées sont liées, identiquement dis-

tribuées, nous nous intéressons particulièrement pour la dépendance des entrées au processus linéaire. Plus précisément, les processus autorégressifs réels d'ordre un (AR(1)), nous regardons l'intérêt de la notion du mélange pour ce type de processus.

Notre objet dans le premier cas où on considère la dépendance entre les composantes de la même ligne de la matrice de l'étude, consiste à établir l'existence d'une loi limite (déterministe) approximante la loi spectrale des matrices aléatoires en question par la méthode de la résolvante, liée à la transformée de Stieltjes. En suite, on passe au cas de la dépendance par lignes et colonnes de la matrice de l'étude, pour montrer l'existence de la loi limite de la distribution spectrale de la matrice de covariance, en se reposant sur des résultats qui introduisent la notion de la probabilité libre et la méthode des moments.

La probabilité libre est une théorie des probabilités traitant des variables ayant le plus haut degré de non-commutativité, un aspect que l'on retrouve dans de nombreux domaines (mécanique quantique, algèbres de groupes libres, matrices aléatoires, etc.). Trente ans après sa fondation, il s'agit d'un domaine des mathématiques bien établi et très actif. Issue de la tentative de Voiculescu de résoudre le problème du facteur de groupe libre dans les algèbres des opérateurs, la probabilité libre a des liens importants avec la théorie des matrices aléatoires, la combinatoire, l'analyse harmonique, la théorie de la représentation des grands groupes et la communication sans fil.

Parmi les différents résultats et contributions développés dans le sens de l'étude du spectre des matrices aléatoires de grandes dimension, nous citons l'étude qui a été abordé par Wigner en 1958 pour résoudre des problèmes de mécanique quantique. Il a étudié le modèle dit GUE (Gaussian Unitary Ensemble), défini par

Définition 0.1 *une matrice aléatoire auto-adjointe X appartient à l'ensemble GUE, si ses coefficients $\{X_{ij}\}$ sont des variables gaussiennes complexes, centrées, et de variances $Var(ReX_{ij}) = Var(ImX_{ij}) = 1/2$ pour $i < j$ et $Var(X_{ii}) = 1$, (et à l'ensemble gaussien orthogonal (GOE) lorsqu'elle est symétrique réelle).*

Citons aussi les matrices de Wigner à entrées indépendantes non identiquement distribuées, les matrices de Wishart, les matrices de l'ensemble LUE (Laguerre Unitary Ensemble), défini par

Définition 0.2 *Une matrice aléatoire W appartient à l'ensemble LUE si sa loi est celle d'un produit XX^* , où X est une matrice aléatoire dont les entrées $\{X_{ij}\}$ sont des variables*

gaussiennes complexes, centrées et réduites, (ou à l'ensemble orthogonal de Laguerre (LOE) selon si elle est complexe ou réelle).

Après les travaux de Wigner et Dyson sur les matrices de Wigner et les travaux de Marcenko et Pastur sur les matrices de covariances, le comportement asymptotique de la mesure spectrale a été largement étudié pour une grande classe de modèles de grandes matrices aléatoires, par exemple [19], [20], [21], [26], [44], [49], [50], et [38]. Dans [38], Bai et Silverstein ont étudié un modèle de matrices, donné par:

$$B_N = X_N T_N X_N^* + A_N,$$

où T_N est une matrice (n, n) diagonale, avec $n = n(N)$, X_N est une matrice aléatoire (N, n) à entrées indépendantes et identiquement distribuées, et A_N est une matrice (N, N) hermitienne, les trois matrices sont indépendantes.

On définit la proportion des valeurs propres d'une matrice donnée, par

Définition 0.3 *Soit X_N une matrice (N, N) Hermitienne. On définit sa fonction de répartition empirique ou sa distribution spectrale empirique F^{X_N} comme la fonction de distribution des valeurs propres de X_N , i.e, pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$F^{X_N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{(\lambda_i \leq x)},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ sont les valeurs propres de X_N .

Bai et Silverstein [38] ont montré que si F^{T_N} , la mesure spectrale de T_N , converge vers une loi déterministe H presque sûrement, et F^{A_N} converge vaguement vers une loi L . Alors, la loi spectrale F^{B_N} converge presque sûrement vers une loi déterministe qui dépend des lois H et L .

Un autre modèle de matrices a été étudié dans cette thèse qui comprend quatre chapitres.

Le premier chapitre constitue une introduction aux chapitres suivants. Dans le quel, nous rappelons quelques définitions, ainsi que les principales notions introduites: Transformée de Stieltjes, processus autorégressif réel d'ordre un (AR(1)), et le mélange géométrique fort pour ce dernier.

Dans le deuxième chapitre, nous énonçons le premier résultat et nous présentons le modèle de matrice aléatoire à étudier,

$$B_N = X_N T_N X_N^t.$$

Pour $N = 1, 2, 3, \dots$, X_N est une matrice de dimension (N, n) avec $n = n(N)$ et

$\frac{n}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} c > 0$, ses composantes X_{ij} ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$) sont liées par la relation d'autorégressive réel d'ordre un (AR(1)) suivant chaque ligne i ,

$$X_{ij+1} = \rho X_{ij} + \varepsilon_{ij+1} \quad j \geq 1$$

où ρ est un réel tel que $|\rho| < 1$ et ε_{in} est un bruit blanc fort.

La matrice diagonale T_N de dimension (n, n) possède une fonction de répartition empirique F^{T_N} convergente presque sûrement vers une fonction de répartition non aléatoire H .

Une partie du chapitre est consacré à la preuve du théorème principal dans ce cas, qui se répartie en plusieurs sections. On commence par l'écriture de la trace du carré de la matrice en question, puis on calcule son espérance et sa variance, en suite on tronque et on centralise les variables de la matrice X_N définies précédemment. Une application des résultats du calcul développé dans la première sections nous permet d'exprimer la limite, quand $N \rightarrow \infty$ de la transformée de Stieltjes de la fonction de répartition empirique de la matrice B_N par

$$m(z) = - \left(z - c \int \frac{\tau}{1 + \tau m(z)} dH(\tau) \right)^{-1} \quad z \in \mathbb{C}^+ \equiv \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}.$$

À l'aide de la formule inverse, on aboutit au résultat cherché: la convergence presque sûre de F^{B_N} vers une loi déterministe.

Une autre manière de généraliser le modèle de la matrice $B_N = X_N T_N X_N^t$ est de considérer dans le troisième chapitre des processus linéaires vectoriels de la forme

$$X_{(t)} = A_N X_{(t-1)} + \varepsilon_{(t)}, \quad \forall t > 1$$

où $X_{(t)}, X_{(t-1)}$ sont des vecteurs colonne de la matrice X_N , $\varepsilon_{(t)}$ est un vecteur colonne de composantes indépendantes centrées de variance $\sigma^2 > 0$, et A_N matrice carrée d'ordre N , tel que $\sup_N \lambda_{\max}(A_N^t A_N) < 1$.

Le dernier chapitre est réservé aux simulations numériques en utilisant le logiciel R version 2.12.1. Nous donnons des graphiques illustrant l'effet de la dimension N , le coefficient de corrélation ρ et la limite c du rapport $\frac{n}{N}$ quand $N \rightarrow \infty$, sur la densité des valeurs propres de matrices de covariance par la transformée de Stieltjes, pour des différents choix des valeurs propres de la matrice T_N . Si on répète l'expérience, le graphique en petite dimension ($N = 100$) va beaucoup fluctuer, tandis que celui en grande dimension ($N = 1000$) va très peu fluctuer. Même chose pour les valeurs de ρ proche de 1 (forte dépendance) et les valeurs de ρ proche de 0 (indépendance). Ainsi qu'on donne à c des valeurs petite et grande par rapport à la valeur critique 1. Un caractère aléatoire s'efface en grande dimension et laisse place à un déterminisme. À la base des erreurs L_1 et L_2 on aboutit à des conclusions intéressantes.

Enfin, nous rassemblons, en appendice, les preuves des lemmes auxiliaires et quelques lemmes techniques et préliminaires utilisés tout au long de la thèse.

Chapitre 1

Spectre de matrices de covariance

1.1 Préliminaires

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de répartition dans \mathbb{R} .

Définition 1.1 [38] Soient F et G deux fonctions de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. On définit la métrique de F et G par

$$D(F, G) = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int f_i dF - \int f_i dG \right| 2^{-i},$$

où $\{f_i\}$ est une suite de fonctions de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ qui satisfait

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \text{ pour tout } x, y \text{ dans } \mathbb{R},$$

telle que la convergence de la métrique dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ implique la convergence faible.

Par le théorème de sélection de Helley, on a pour $F_N, G_N \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|F_N - G_N\| \implies \lim_{N \rightarrow \infty} D(F_N, G_N) = 0. \quad (1.1)$$

Comme, pour tout i et $x, y \in \mathbb{R}$, $|f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y|$. Il s'ensuit que pour les fonctions de répartition empirique F, G des ensembles $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, on a

$$D^2(F, G) \leq \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j - y_j| \right)^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^2. \quad (1.2)$$

1.1.1 Transformée de Stieltjes

La transformée de Stieltjes constitue un des outils de base dans l'étude des valeurs propres de matrices aléatoires. Comme la fonction caractéristique ou la fonction de répartition, la transformée de Stieltjes est une fonction qui permet de manipuler les mesures de probabilités ou plus généralement les mesures positives sans perte d'information.

Définition 1.2 *La transformée de Stieltjes de $G \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, est définie par*

$$m_G(z) = \int \frac{1}{\lambda - z} dG(\lambda), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Formule inverse

La formule inverse de la transformée de Stieltjes est donnée par le théorème suivant

Théorème 1.1 [2] *Pour tout $a < b$ points de continuités de G , on a*

$$G\{[a, b]\} = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^b \operatorname{Im} m_G(\xi + i\eta) d\xi.$$

Convergence

L'importance de la transformée de Stieltjes est liée aussi au théorème suivant, qui montre que la convergence de la f.d.r.e. d'une suite de matrices, revient à montrer la convergence de sa transformée de Stieltjes et la fonction de distribution limite peut être déterminé par la limite de la transformée.

Théorème 1.2 [2] *Supposons que la suite $\{G_N\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_{G_N}(z) = m_G(z), \forall z \in \mathbb{C}^+ \Leftrightarrow G_N \xrightarrow{v} G. \quad (1.3)$$

Autrement dit, m_G permet de caractériser complètement G .

Fonction de densité

Un autre avantage de la transformée de Stieltjes est qu'on peut facilement trouver la fonction de densité d'une distribution à l'aide de sa transformée de Stieltjes.

Théorème 1.3 [42] *Soient $G \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que, $\lim_{z \in \mathbb{C}^+ \rightarrow x_0} \operatorname{Im} m_G(z)$ existe et elle sera notée $\operatorname{Im} m_G(x_0)$. Alors G est différentiable en x_0 et sa dérivée est $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m_G(x_0)$.*

Propriété

Il est bien connu en analyse matricielle que la résolvante est un puissant outil pour obtenir des informations sur le spectre d'une matrice donnée.

Définition 1.3 *On appelle résolvante de la matrice XX^t , la matrice suivante,*

$$R(z) = (XX^t - zI)^{-1}, z \in \mathbb{C}^+.$$

La trace normalisée de la résolvante $R(z)$ de la matrice XX^t est égale à la transformée de Stieltjes de la mesure spectrale de XX^t . En effet, si $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ sont les valeurs propres de la matrice XX^t , on a

$$\begin{aligned} m_N(z) &= \frac{1}{N} \text{tr} (XX^t - zI)^{-1} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i - z}. \end{aligned}$$

1.1.2 Processus Linéaires

Les processus aléatoires indicés par le temps sont appelés séries chronologiques. Il est évident que la modélisation à l'aide des séries chronologiques peut s'appliquer à une multitude de plusieurs domaines :

- en économie : pour l'étude de l'indice des prix, du PNB (produit national brut)....
- en météorologie : pour la mesure de la température, de l'indice de pollution...
- en biologie : pour suivre l'évolution du taux d'hormones ou la progression du nombre de bactéries dans un milieu...

L'étude de ces processus a notamment les objectifs suivants :

- comprendre le passé,
- étudier le lien avec d'autres processus,
- prédire les valeurs futures.

Le processus AR(1) est un cas très particulier. Il existe de nombreux autres processus aléatoires pouvant générer des aléas. Cependant, parce que la plupart des problèmes soulevés par l'estimation et l'inférence dans les modèles d'autocorrélation sont déjà présents dans le cas AR(1), mais aussi parce que c'est le processus le plus fréquent en pratique.

Définition 1.4 Le processus aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit processus linéaire s'il est défini par

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $(\varepsilon = \varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc, c'est à dire une suite de variables aléatoires réelles telle que

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0, \text{ et pour } s, t \in \mathbb{Z} \\ E(\varepsilon_s \varepsilon_t) &= \begin{cases} \sigma^2 < \infty & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } s \neq t, \end{cases} \end{aligned}$$

et (a_j) une suite de nombres réels.

Processus autorégressifs réels d'ordre un

Dans la définition précédente si, on a

$$a_j = \rho^j, \quad j \geq 0 \quad \text{et,} \quad -1 < \rho < 1.$$

Alors, (X_t) satisfait la relation

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

du processus autorégressif réel d'ordre un AR(1).

Pour un processus autorégressif, chaque valeur de la série est une combinaison linéaire des valeurs précédentes. Si la valeur de la série à l'instant t , X_t , ne dépend que de la valeur précédente X_{t-1} à une perturbation aléatoire près ε_t , le processus est dit autorégressif du premier ordre AR(1). Le coefficient ρ exprime la force de la liaison linéaire entre deux valeurs successives et le fait qu'il est dans l'intervalle $]-1, 1[$ assure la stationnarité du processus.

Processus stationnaires

Définition 1.5 Un processus réel sera une suite $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles indexées par \mathbb{Z} sur un espace probabilisé (Ω, A, P) .

Définition 1.6 *Le processus réel $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit stationnaire, si $\forall (s, t) \in \mathbb{Z}^2$,*

- $X_t \in L^2(\Omega, A, P)$.
- $E(X_t)$ ne dépend pas de t .
- $cov(X_s, X_t)$ ne dépend que de la différence $(t - s)$.

Si ces conditions sont vérifiées, on note $\mu = E(X_0)$ la moyenne du processus. Si $\mu = 0$, on dit que X est centré.

1.1.3 Mélange fort de Processus

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire en loi, à valeurs dans \mathbb{R} . Notons \mathcal{F}_0^m la tribu engendrée par $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_m\}$ et \mathcal{F}_{m+k}^∞ celle engendrée par $\{X_{m+k}, X_{m+k+1}, X_{m+k+2}, \dots\}$.

Pour obtenir des résultats asymptotiques sur le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ on est souvent amenés à supposer que les tribus \mathcal{F}_0^m et \mathcal{F}_{m+k}^∞ sont asymptotiquement indépendantes quand k devient grand.

Les hypothèses de mélange sont un des moyens de modéliser cette indépendance asymptotique. De nombreuses notions de mélange ont été introduites. Citons sans être exhaustif, le mélange défini à partir du coefficient suivant:

Définition 1.7 *On appelle coefficient de mélange fort (α -mélange) entre deux tribus \mathcal{F}_0^m et \mathcal{F}_{m+k}^∞ le nombre*

$$\alpha_k = \sup \{ |P(A \cap B) - P(A)P(B)|; A \in \mathcal{F}_0^m, B \in \mathcal{F}_{m+k}^\infty \}.$$

Nous donnons en suite une définition de la notion de la forte mélangeance pour un processus.

Définition 1.8 *-Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sera dit fortement mélangeant si la suite α_k converge vers zéro lorsque k tend vers ∞ .*

Mélange géométrique fort

Dans ce qui suit, nous rappelons la notion du mélange géométrique fort.

Définition 1.9 *-Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sera dit fortement géométriquement mélangeant (G.S.M), si*

$$\alpha_k = O(u^k) \quad \text{avec } 0 < u < 1.$$

Par conséquent, si $(X_t)_{t \in Z}$ est un processus autorégressif réel défini par (1.4) avec les (ε_t) indépendantes identiquement distribuées (*i.i.d.*) le bruit blanc ($\varepsilon = \varepsilon_t, t \in Z$) sera dit fort, et les (ε_t) ont une densité continue. Alors (X_t) est fortement géométriquement mélangeant (G.S.M).

Pour établir la convergence presque sûre du processus sous dépendance, nous aurons besoin de l'inégalité classique suivante.

Proposition 1.1 [17] (*Inégalité de Davydov*) *Si $Y \in L^p$ et $Z \in L^q$ sont des variables respectivement \mathcal{F}_0^m et \mathcal{F}_{m+k}^∞ mesurables alors, lorsque $1 \leq p, q, r \leq \infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$*

$$|E(YZ) - E(Y)E(Z)| \leq 12 \|Y\|_p \|Z\|_q \alpha_k^{\frac{1}{r}}. \quad (1.5)$$

1.2 Etude globale du spectre

Nous commençons par décrire les modèles de matrices aléatoires aux quels nous nous intéressons dans cette thèse, avant de présenter certains résultats asymptotiques concernant les propriétés spectrales de ces matrices. Les matrices de Wigner considérées ici seront définies de la manière suivante.

1.2.1 Loi du demi-cercle

Définition 1.10 *Soit $N \in \mathbb{N}$. M_N est une matrice (N, N) hermitienne de Wigner si :*

- ses coefficients sont indépendants,
- les parties réelles et imaginaires des coefficients sont indépendantes,
- ses coefficients ont une moyenne nulle et une variance égale à 1.

Dans le cas des matrices de Wigner symétriques réelles, les coefficients diagonaux ont une variance égale à 2 tandis que les coefficients non diagonaux ont une variance égale à 1.

Le théorème de Wigner dont nous parlerons plus loin fournit une loi limite pour le spectre de telles matrices. Le support de cette loi limite dépendant uniquement de la variance des coefficients non diagonaux, nous avons choisi de normaliser les matrices de telle sorte que cette variance soit égale à 1, tant pour des matrices symétriques réelles que pour des matrices hermitiennes complexes.

Plutôt que M_N , nous utiliserons fréquemment la matrice renormalisée W_N définie par $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}}M_N$. M_N et W_N étant des matrices hermitiennes (ou symétriques réelles), elles ont N valeurs propres réelles.

Théorème 1.4 [47] *Soit $(M_N)_{N \geq 1}$ une suite de matrices de GUE. Alors la suite des mesures spectrales empiriques de matrices renormalisées $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}}M_N$*

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}(W_N),$$

converge presque sûrement vers la loi du demi-cercle σ :

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbb{I}_{[-2,2]} dx.$$

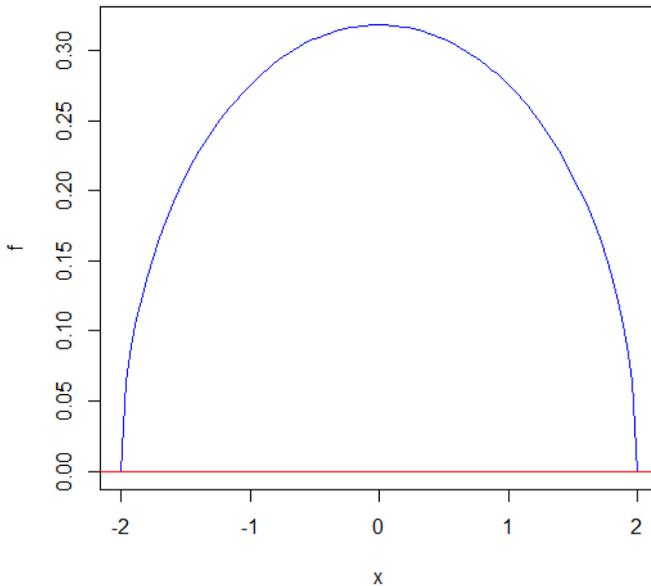


Figure 1 -Densité de la loi du demi cercle

1.2.2 Loi de Marcenko-Pastur

De même que pour les matrices de Wigner, Marchenko et Pastur ont montré le théorème si dessus, concernant le comportement global du spectre de matrices de covariance. La démonstration peut se faire de manière combinatoire ou par la transformée de Stieltjes, comme pour le théorème de Wigner.

Définition 1.11 Soit X une matrice aléatoire de taille (N, n) dont les coefficients sont indépendants, de moyenne nulle et de variance 1. On suppose également, dans le cas où les coefficients sont complexes, que leurs parties réelles et imaginaires sont indépendantes. La matrice $S_N = XX^*$, de taille (N, N) est une matrice de covariance empirique.

La matrice S_N étant semi-définie positive, ses N valeurs propres sont réelles et positives ou nulles.

Théorème 1.5 [26] Soit $(S_N)_{N>0}$ une suite de matrices de LUE, avec $S_N = XX^*$, X matrice de dimension (N, n) , telle que $n/N \rightarrow c > 0$. Alors la suite des mesures spectrales empiriques de matrices renormalisées $\tilde{S}_N = \frac{1}{\sqrt{N}}S_N$

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}(\tilde{S}_N),$$

converge presque sûrement vers la loi de Marchenko-Pastur de paramètre c :

$$\mu_c = \max\{1 - c, 0\} \delta_0 + \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)} \mathbb{I}_{[x_-, x_+]}(x) dx, \text{ avec } x_{\pm} = (1 \pm \sqrt{c})^2.$$

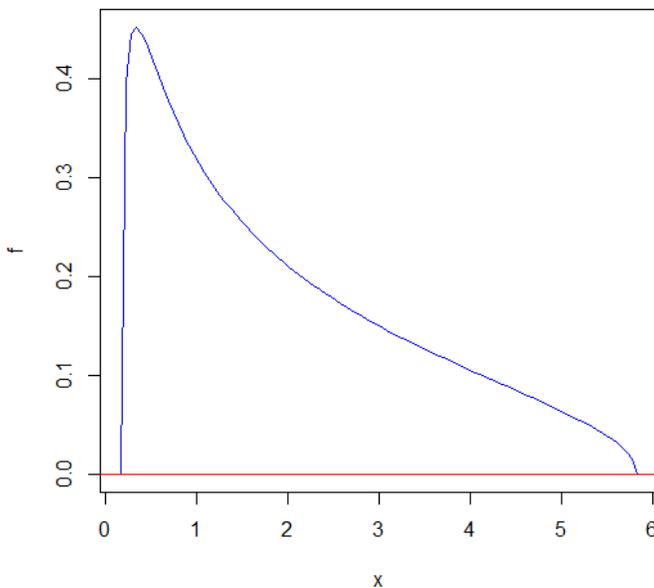


Figure 2 -Densité de la loi de Marchenko-Pastur avec $c=2$

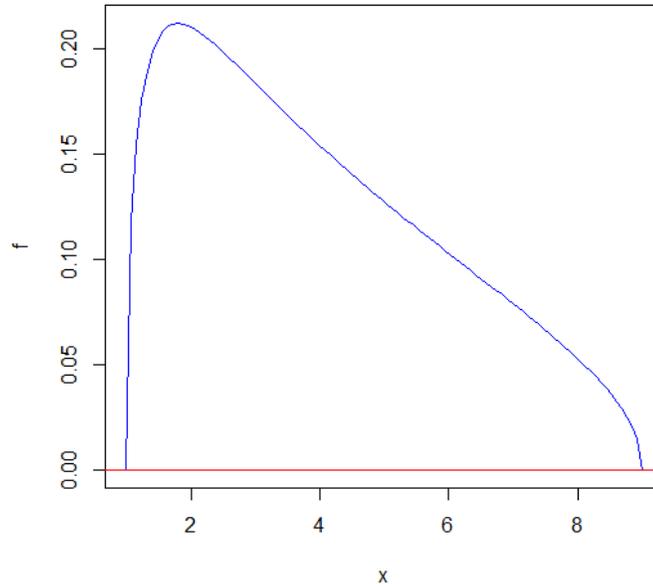


Figure 3 -Densité de la loi de Marcenko-Pastur avec c=4

1.2.3 Limite de la distribution spectrale de matrices aléatoires à entrées corrélées

La convergence de la fonction de répartition empirique de matrices de covariance a été traitée dans le cas de matrices aléatoires à entrées gaussiennes corrélées avec une condition de sommabilité de la matrice de covariance des entrées. La limite est définie par la transformée de Stieltjes et sa dérivée est la densité des valeurs propres de la matrice de covariance.

Les composantes de matrices aléatoires symétriques (N, N) considérées ont la forme suivante

$$H_N(i, k) = H_0(i - k) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n X_{ij} X_{kj} \quad i, k = 1, 2, \dots, N.$$

La suite non aléatoire $H_0(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, satisfait la condition

$$H_0(-i) = H_0(i), \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}} H_0(i) = h_0 < \infty.$$

Soient les variables aléatoires X_{ij} , $i, j \in \mathbb{N}$ de distribution gaussienne avec

$$EX_{ij} = 0, \quad EX_{ij} X_{kl} = V_{i-k}(j - l), \quad \text{où } V_i(j) \text{ est tel que } V_{-i}(-j) = V_i(j).$$

Théorème 1.6 [14] Soit V la matrice de covariance de X_{ij} , qui satisfait la condition de sommabilité suivante

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} |V_i(j)| = V_{\max} < \infty.$$

Alors,

a) La fonction de répartition empirique $F^N(\lambda)$ converge en probabilité vers la fonction non aléatoire $F(\lambda)$, quand $N \rightarrow \infty$ et $\frac{n}{N} \rightarrow c > 0$.

b) La transformée de Stieltjes $m(z) = \int (\lambda - z)^{-1} dF(\lambda)$, $z \in \mathbb{C}^+$, se donne par

$$m(z) = \int_0^1 \tilde{g}(q, z) dz, \quad (1.6)$$

où $\tilde{g}(q, z)$ est une solution de l'équation

$$\tilde{g}(q, z) = \left(\tilde{H}_0(q) - z + \int_0^1 \frac{\tilde{V}_r(q)}{1 + \int_0^1 \tilde{V}_r(s) \tilde{g}(s, z) ds} dr \right)^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(q) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} H_0(m) \exp\{-2\pi i m q\}, \\ \tilde{V}_r(q) &= \sum_{m, j \in \mathbb{Z}} V_j(m) \exp\{-2\pi i(mq) + jr\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 La relation (1.6) est une généralisation de l'équation

$$m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{H}_0(q) - z + \frac{cv^2}{1 + v^2 f(z)} \right)^{-1} dq,$$

donnée par [26] dans le cas où les variables X_{ij} sont *i.i.d.* de moyenne nulle et de variance v^2 .

1.3 Etude locale du spectre

1.3.1 Séparation des valeurs propres de matrices de covariances dans le cas *i.i.d.*

Considérons la matrice de covariance aléatoire $B_N = T_N^{1/2} X_N X_N^* T_N^{1/2}$, où X_N est une matrice (N, n) de composantes *i.i.d.* complexes, standards. T_N est une matrice (N, N)

définie non négative, hermitienne et $T_N^{1/2}$ sa racine carrée.

Dans [38], Silverstein et Bai ont montré que si la fonction de répartition de la matrice T_N converge en loi vers H une fonction de répartition non aléatoire et quand $N \rightarrow \infty$, $\frac{n}{N} \rightarrow c > 0$, alors la fonction de répartition empirique de la matrice B_N converge presque sûrement vers une limite non aléatoire $F_{H,c}$.

Le résultat suivant établit que sous certaines conditions, aucune valeur propre de la matrice B_N n'appartient à un intervalle fermé contenu dans le complémentaire du support de la fonction de répartition limite $F_{H,c}$.

Théorème 1.7 ([39]) *On suppose que*

a) $X_N = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}X_{ij}\right)$ est une matrice (N, n) , ses composantes complexes X_{ij} sont des variables aléatoire i.i.d. avec $EX_{11} = 0$, $E|X_{11}|^2 = 1$ et $E|X_{11}|^4 < \infty$.

b) $n = n(N)$ et $\frac{n}{N} \rightarrow c > 0$ quand $N \rightarrow \infty$.

c) T_N est une matrice (N, N) hermitienne définie non négative et $T_N^{1/2}$ est sa racine carrée, la fonction de répartition empirique de T_N converge presque sûrement vers la fonction H quand $N \rightarrow \infty$.

d) $\|T_N\|$ la norme spectrale de T_N est bornée par rapport à N .

e) L'intervalle $[a, b]$ avec $a > 0$ est à l'extérieur du support de $F_{H,c}$ la limite de la fonction de répartition empirique de $B_N = T_N^{1/2}X_NX_N^*T_N^{1/2}$.

Alors, $P(\text{aucune valeur propre de } B_N \text{ n'appartient à l'intervalle } [a, b] \text{ pour tout } N \text{ assez grand})=1$.

Corollaire 1.1 ([39]) *Si $\|T_N\|$ converge vers le plus grand nombre du support de H , alors $\|B_N\|$ converge p.s. vers le plus grand nombre du support de $F_{H,c}$. Si la plus petite valeur propre de T_N converge vers le plus petit nombre du support de H , alors $c < 1$ implique que la plus petite valeur propre de B_N converge vers le plus petit nombre du support de $F_{H,c}$.*

La preuve du Théorème 1.7 se fait à l'aide des convergences des transformées de Stieltjes ainsi que des inégalités des moments des suites de différence martingales et une extension de l'inégalité de Rosenthal pour les formes quadratiques aléatoires.

Sous les mêmes hypothèses, le théorème suivant établit la séparation exact des valeurs propres, avec une probabilité égale à 1, le nombre de valeurs propres des matrices B_N et T_N se trouvant à l'extérieur de leurs intervalles respectifs sont identique.

Théorème 1.8 ([3]) *On suppose que les hypothèses a)-e) du Théorème 1.7 sont vérifiées.*

1) *Si $c[1 - cH(0)] > 1$, alors x_0 , la plus petite valeur propre dans le support de $F_{H,c}$, est positive, et presque sûrement, $\lambda_N^{B_N} \rightarrow x_0$ quand $N \rightarrow \infty$.*

2) *Si $c[1 - cH(0)] \leq 1$ ou bien $c[1 - cH(0)] > 1$ et mais $[a, b]$ n'est pas inclus dans $[0, x_0]$ alors $m_{F_{H,c}}(b) < 0$ et avec l'entier i_N tels que $\lambda_{i_N}^{T_N} > -1/m_{F_{H,c}}(b)$ et $\lambda_{i_N+1}^{T_N} < -1/m_{F_{H,c}}(a)$, on a*

$$P\left(\lambda_{i_N}^{B_N} > (b) \quad \text{et} \quad \lambda_{i_N+1}^{B_N} < (a) \quad \text{pour } N \text{ assez grand}\right) = 1.$$

1.3.2 Localisation des valeurs propres des matrices gaussiennes généralement corrélées

L'étude du comportement du spectre de matrices aléatoires gaussiennes généralement corrélées, établit qu'il n'y a pas de valeur propre en dehors du support de la distribution spectrale limite de ce type de matrices qui apparaît naturellement dans les applications de traitement statistique du signal et de communication sans fil.

Pour fournir des propriétés du spectre de matrices gaussiennes généralement corrélées, c'est-à-dire des matrices dont les colonnes sont des vecteurs aléatoires indépendants de moyenne nulle mais ont des covariances différentes, on considère la matrice de dimension $(N \times n)$, $X_N = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, où les vecteurs colonnes X_i vérifient l'hypothèse suivante

H_1 : $(X_i)_{i=1}^n$ sont des vecteurs complexes gaussiens de moyenne nulle et de covariance Γ_i avec,

$$\inf_N \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_1(\Gamma_i) > 0, \quad \sup_N \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_N(\Gamma_i) < \infty,$$

où $\lambda_1(\Gamma_i)$, $\lambda_N(\Gamma_i)$ sont la plus petite et la plus grande valeur propre de Γ_i .

$$H_2 : c_N = \frac{n}{N} \text{ vérifie } 0 < \liminf c_N \leq \limsup c_N < 1.$$

Le résultat suivant établit que zéro n'appartient pas à S_N le support de la distribution spectrale limite de la matrice $\frac{1}{N} X_N X_N^*$.

Théorème 1.9 ([22]) *Sous les hypothèses H_1 et H_2 , $0 \notin S_N$. Plus précisément, il existe $\epsilon > 0$ tel que:*

$$[0, \epsilon] \cap S_N = \emptyset.$$

Pour conclure on ajoute le deuxième résultat qui établit que presque sûrement aucune valeur propre de la matrice $\frac{1}{N}X_N X_N^*$ n'existe dans S_N^c .

Théorème 1.10 ([22]) *Supposons qu'ils existent $\epsilon > 0$ et deux réels a, b tel que:*

$$]a - \epsilon, b + \epsilon[\cap S_N = \emptyset.$$

Alors, avec une probabilité égale à 1, aucune valeur propre de $\frac{1}{N}X_N X_N^$ n'appartient à l'intervalle $[a, b]$ pour tout N assez grand.*

Chapitre 2

Loi asymptotique de la distribution empirique des valeurs propres

2.1 Représentation scalaire du processus AR(1)

2.1.1 Introduction

On considère la matrice aléatoire

$$B_N = X_N T_N X_N^t, \quad (2.1)$$

où $X_N = (\frac{1}{\sqrt{N}} X_{ij})$ est une matrice de dimension (N, n) , $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, n(N)$ et T_N est une matrice diagonale de dimension (n, n) indépendante de X_N . La fonction de répartition empirique des valeurs propres λ_i de la matrice B_N est définie par

$$F^{B_N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{\lambda_i \leq x}(x).$$

Notre but est d'établir la convergence presque sûre de la fonction de répartition empirique des valeurs propres de la matrice $B_N = X_N T_N X_N^t$, où les composantes X_{ij} de la matrice X_N satisfont pour chaque i la relation d'autorégressive AR(1):

$$X_{ij+1} = \rho X_{ij} + \varepsilon_{ij+1}, \quad j \geq 1 \quad (2.2)$$

où $(\varepsilon_{in}, n \in \mathbb{Z})$ sont des v.a. de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 < +\infty$, le paramètre ρ est tel que $|\rho| < 1$.

On commence par une troncation et une centralisation des v.a. X_{ij} , soient

$$\hat{X}_{ij} = X_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| < \sqrt{N})}, \hat{B}_N = \hat{X}_N T_N \hat{X}_N^t \quad \text{où} \quad \hat{X}_N = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \hat{X}_{ij} \right), \quad (2.3)$$

$$\tilde{X}_{ij} = \hat{X}_{ij} - E \left(\hat{X}_{ij} \right), \tilde{B}_N = \tilde{X}_N T_N \tilde{X}_N^t \quad \text{où} \quad \tilde{X}_N = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{X}_{ij} \right), \quad (2.4)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{X}_{ij} &= \tilde{X}_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \leq \ln N)} - E \tilde{X}_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \leq \ln N)}, \\ \bar{B}_N &= \bar{X}_N T_N \bar{X}_N^t \quad \text{où} \quad \bar{X}_N = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \bar{X}_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour $j, l = 1, 2, \dots, n$, soit \bar{q}_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de \bar{X}_N :

$$\bar{q}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} (\bar{X}_{1j}, \dots, \bar{X}_{Nj})^t := \frac{1}{\sqrt{N}} V_j, \quad (2.6)$$

et

$$\bar{B}_{(j)} = \bar{B}_N^N := \bar{B}_N - \tau_j \bar{q}_j \bar{q}_j^t, \quad (2.7)$$

où τ_j est le $j^{\text{ième}}$ élément diagonal de la matrice T_N . On définit

$$x = x_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j}{1 + \tau_j m_{F^{\bar{B}_N}}(z)}, \quad x_{(j)} = x_{(j)}^N = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{\bar{B}_{(j)}}}(z)}, \quad (2.8)$$

où $m_{F^{\bar{B}_N}}$ et $m_{F^{\bar{B}_{(j)}}}$ sont les transformées de Stieltjes des f.d.r.e des matrices \bar{B}_N et $\bar{B}_{(j)}$ respectivement.

On pose

$$C_{(j)}^1 = (\bar{B}_{(j)} - zI)^{-1} \quad \text{et} \quad C_{(j)}^2 = (\bar{B}_{(j)} - zI)^{-1} (x_{(j)} - z)^{-1}. \quad (2.9)$$

2.1.2 Résultat

Théorème 2.1 *On suppose que*

a) *Pour $N = 1, 2, \dots$, $X_N = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}X_{ij}\right)$ est une matrice $(N, n(N))$, avec des lignes indépendantes et une relation d'autorégressive (2.2) dans chaque ligne, les composantes X_{ij} ont des moments finis et $\frac{n(N)}{N} \rightarrow c > 0$ quand $N \rightarrow \infty$.*

b) *$T_N = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, et la f.d.r.e. de T_N converge presque sûrement vers la fonction de répartition H quand $N \rightarrow \infty$.*

c) *Les matrices X_N et T_N sont indépendantes.*

d) *Pour $k = 1, 2$ et $j = 1, 2, \dots, n$, les matrices $C_{(j)}^k$ définies par (2.9) satisfont $E \left| V_j^t C_{(j)}^k V_j - \text{tr} C_{(j)}^k \right|^6 \leq KN^3$, où K est une constante positive.*

Alors, la f.d.r.e F^{B_N} de la matrice aléatoire $B_N = X_N T_N X_N^t$ converge presque sûrement vers la fonction de répartition F , dont la transformée de Stieltjes est donnée par

$$m_F(z) = - \left(z - c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau m_F(z)} \right)^{-1}; \quad z \in \mathbb{C}^+. \quad (2.10)$$

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes rédigée dans la section suivante.

2.2 Preuve du Théorème 2.1.

Le paragraphe suivant introduit la première étape de la démonstration du Théorème 2.1.

2.2.1 Variables tronquées centrées

On note les matrices X_N et T_N par X et T pour alléger les écritures et on procède pour les remplacer par des matrices convenables à notre étude. Toutes les convergences sont faite lorsque $N \rightarrow \infty$.

Pour $\theta \geq 0$, on définit

$$T_\theta = \text{diag}(\tau_1 \mathbb{I}_{(|\tau_1| \leq \theta)}, \dots, \tau_n \mathbb{I}_{(|\tau_n| \leq \theta)})$$

et soit Q une matrice (N, n) . Si θ et $-\theta$ sont des points de continuités de H , et sous les hypothèses a), b) du Théorème 2.1, et le lemme 4.4, on a

$$\begin{aligned}
\left\| F^{QTQ^t} - F^{QT_\theta Q^t} \right\| &\leq \frac{1}{N} rg(T - T_\theta) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{(|\tau_j| > \theta)} \\
&\leq \frac{n}{N} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{(|\tau_j| > \theta)} \rightarrow cH \{[-\theta, \theta]^c\} \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

donc si, $\theta = \theta_N \rightarrow \infty$ alors

$$\left\| F^{QTQ^t} - F^{QT_\theta Q^t} \right\| \rightarrow 0 \text{ p.s.} \quad (2.11)$$

Choisissons $\theta = \theta_N$ telle que

$$\theta^4 \left(E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \ln N)} + \frac{1}{N} \right) \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

et

$$\sum_{N=1}^{\infty} \theta^8 \left(\frac{1}{N^{7/6}} E^{1/6} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N \leq |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^2} \right) < \infty. \quad (2.13)$$

- Pour monter que $D(F^{B_N}, F^{\hat{B}_N}) \rightarrow 0$ p.s, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1 Soient $X = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} X_{ij} \right)$ une matrice (N, n) vérifiant l'hypothèse a) du Théorème 2.1, $\hat{X} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \hat{X}_{ij} \right)$ une matrice (N, n) avec $\hat{X}_{ij} = X_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| < \sqrt{N})}$, et $T_\theta = \text{diag}(\tau_1 \mathbb{I}_{(|\tau_1| \leq \theta)}, \dots, \tau_n \mathbb{I}_{(|\tau_n| \leq \theta)})$ pour $\theta \geq 0$. Alors, on a

$$D(F^{XT_\theta X^t}, F^{\hat{X}T_\theta \hat{X}^t}) \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Preuve En utilisant le corollaire A.42 de [2], on trouve

$$D(F^{XT_\theta X^t}, F^{\hat{X}T_\theta \hat{X}^t}) \leq \left(\frac{2}{N} \text{tr} (XT_\theta X^t + \hat{X}T_\theta \hat{X}^t) \right)^{1/2} \left(\frac{1}{N} \text{tr} (X - \hat{X}) T_\theta (X - \hat{X})^t \right)^{1/2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
D^2(F^{XT_\theta X^t}, F^{\hat{X}T_\theta \hat{X}^t}) &\leq \left[\frac{2\theta}{N} \text{tr} (XX^t + \hat{X}\hat{X}^t) \right] \left[\frac{\theta}{N} \text{tr} (XX^t - \hat{X}\hat{X}^t) \right] \\
&\leq \left[\frac{2}{N} \text{tr} (XX^t - \hat{X}\hat{X}^t) + \frac{4}{N} \text{tr} \hat{X}\hat{X}^t \right] \left[\frac{\theta^2}{N} \text{tr} (XX^t - \hat{X}\hat{X}^t) \right].
\end{aligned}$$

Pour montrer que cette distance tend presque sûrement vers 0, on montre que $\left[\frac{\theta^2}{N} \text{tr} \left(X X^t - \hat{X} \hat{X}^t \right)\right]$ tend vers 0 et $\left[\frac{4}{N} \text{tr} \hat{X} \hat{X}^t\right]$ est bornée presque sûrement . On a

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\theta^2}{N} \text{tr} \left(X X^t - \hat{X} \hat{X}^t \right) \right] &= \frac{\theta^2}{N^2} E \left(\sum_{ij} X_{ij}^2 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \geq \sqrt{N})} \right) \\ &= \frac{\theta^2}{N^2} nN \left(E X_{11}^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \sqrt{N})} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

puisque (2.12) donne

$$0 \leq \theta^2 E |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \sqrt{N})} \leq \theta^4 E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \ln N)} \rightarrow 0.$$

Pour la variance, on a

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left[\frac{\theta^2}{N} \text{tr} \left(X X^t - \hat{X} \hat{X}^t \right) \right] \\ &= \frac{\theta^4}{N^4} \left[E \left(\sum_{ij} |X_{ij}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \geq \sqrt{N})} \right)^2 - E^2 \left(\sum_{ij} |X_{ij}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \geq \sqrt{N})} \right) \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & E \left(\sum_{ij} |X_{ij}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \geq \sqrt{N})} \right)^2 = E \left(\sum_{ij} |X_{ij}|^4 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \geq \sqrt{N})} \right) \\ & + E \left(\sum_i \sum_{j \neq l} \left(|X_{ij}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \geq \sqrt{N})} \right) \left(|X_{il}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{il}| \geq \sqrt{N})} \right) \right) \\ & + E \left(\sum_{i \neq k} \left(\sum_j |X_{ij}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \geq \sqrt{N})} \right) \left(\sum_j |X_{kj}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{kj}| \geq \sqrt{N})} \right) \right) \\ & \leq nNE \left(|X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \sqrt{N})} \right) + N \sum_{j \neq l} E \left(|X_{1j}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{1j}| \geq \sqrt{N})} \right) \left(|X_{1l}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{1l}| \geq \sqrt{N})} \right) \\ & + N^2 n^2 E^2 \left(|X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \sqrt{N})} \right). \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Davydov (1.5) avec $r = l - j$, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j \neq l} E \left(|X_{1j}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{1j}| \geq \sqrt{N})} \right) \left(|X_{1l}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{1l}| \geq \sqrt{N})} \right) \\ & \leq 2nE^2 \left(|X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \sqrt{N})} \right) + 24E^{\frac{2}{3}} \left(|X_{11}|^6 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \sqrt{N})} \right) \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Comme les (X_{ij}) pour tout $i = 1, 2, \dots, N$ et $j = 1, 2, \dots, n$, vérifient la relation (2.2) d'autorégressive réel d'ordre un, alors elles sont fortement géométriquement mélangeantes (G.S.M); par suite $\alpha_r = O(\rho^r)$ où $0 < \rho < 1$, et la somme $\sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}}$ est finie. Donc, on a la borne

$$\text{Var} \left[\frac{\theta^2}{N} \text{tr} \left(X X^t - \hat{X} \hat{X}^t \right) \right] \leq K \frac{\theta^4}{N^2} E^{\frac{2}{3}} \left(|X_{11}|^6 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \sqrt{N})} \right),$$

qui est sommable par (2.13). On a aussi

$$\begin{aligned} E \left(\frac{4}{N} \text{tr} \hat{X} \hat{X}^t \right) &= \frac{4}{N^2} E \left(\sum_{ij} |X_{ij}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{ij}| < \sqrt{N})} \right) \\ &= \frac{4}{N^2} n N E \left(|X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| < \sqrt{N})} \right) \rightarrow 4cE |X_{11}|^2 := 4c\gamma. \end{aligned}$$

Un calcul similaire de la variance précédente, permet d'écrire

$$\text{Var} \left[\frac{4}{N} \text{tr} \hat{X} \hat{X}^t \right] \leq K \frac{1}{N^2} E^{\frac{2}{3}} \left(|X_{11}|^6 \mathbb{I}_{(|X_{11}| < \sqrt{N})} \right),$$

qui est sommable. Par le lemme de Borel-Cantelli, on trouve $\frac{\theta^2}{N} \text{tr} \left(X X^t - \hat{X} \hat{X}^t \right) \rightarrow 0$ et $\frac{4}{N} \text{tr} \hat{X} \hat{X}^t \rightarrow 4c\gamma$ p.s. Donc $D \left(F^{X T_\theta X^t}, F^{\hat{X} T_\theta \hat{X}^t} \right) \rightarrow 0$ p.s. ■

En utilisant les relations (2.11), (1.1) et le Lemme 2.1, on aboutit a

$$D \left(F^{B_N}, F^{\hat{B}_N} \right) \rightarrow 0 \text{ p.s.} \quad (2.14)$$

- Comme le $rgE \left(\hat{X} \right) \leq 1$, par le lemme 4.4, on a

$$\left\| F^{\hat{B}_N} - F^{\tilde{B}_N} \right\| \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

puisque

$$\begin{aligned} \left\| F^{\hat{B}_N} - F^{\tilde{B}_N} \right\| &= \left\| F^{\hat{X} T \hat{X}^t} - F^{\tilde{X} T \tilde{X}^t} \right\| \leq \frac{2}{N} rg \left(\hat{X} - \tilde{X} \right) \\ &\leq \frac{2}{N} rg \left(\hat{X} - \tilde{X} + E \left(\hat{X} \right) \right) \leq \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

- Soient

$$\bar{\tilde{X}}_{ij} = \tilde{\tilde{X}}_{ij} - \bar{X}_{ij}.$$

Donc,

$$\bar{X}_{ij} = \tilde{X}_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| > \ln N)} + E\tilde{X}_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \leq \ln N)},$$

et

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \bar{X}_{ij} \right).$$

Alors, par la relation (1.2), et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} D^2 \left(F^{\tilde{X}T_\theta \tilde{X}^t} - F^{\bar{X}T_\theta \bar{X}^t} \right) &\leq \frac{1}{N} \text{tr} \left(\tilde{X}T_\theta \tilde{X}^t - \bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right)^2 + \text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t + \bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t + \bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \right\} \\ &\leq \frac{1}{N} \left\{ \text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right)^2 + 4 \text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left[\text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right)^2 \leq \theta^2 \text{tr} \left(\bar{X} \bar{X}^t \right)^2,$$

et

$$\text{tr} \left(\bar{X}T_\theta \bar{X}^t - \bar{X}T_\theta \bar{X}^t \right) \leq \left[\theta^4 \text{tr} \left(\bar{X} \bar{X}^t \right)^2 \text{tr} \left(\bar{X} \bar{X}^t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour montrer que

$$D \left(F^{\tilde{X}T_\theta \tilde{X}^t}, F^{\bar{X}T_\theta \bar{X}^t} \right) \rightarrow 0 \text{ p.s.} \quad (2.16)$$

Il suffit de vérifier que

$$\theta^4 \frac{1}{N} \text{tr} \left(\frac{\bar{X} \bar{X}^t}{N} \right)^2 \rightarrow 0 \text{ p.s. et } \frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 = O(1) \text{ p.s.} \quad (2.17)$$

2.2.2 Lemmes auxiliaires

Les lemmes suivants dont les preuves se trouvent en appendice, donnent des bornes de l'espérance et de la variance de la trace de la matrice $(XX^t)^2$ où $X = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} X_{ij} \right)$ ($i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n$). Soit

$$\text{tr} (XX^t)^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 + \sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right), \quad (2.18)$$

où

$$\mathcal{A}_{ii} = \sum_{j=1}^n X_{ij}^2, \quad \mathcal{A}_{ik} = \sum_{j=1}^n X_{ij} X_{kj}. \quad (2.19)$$

On note par K la constante positive qui peut prendre des valeurs différentes d'une ligne à l'autre.

Lemme 2.2 soit $X = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} X_{ij} \right)$ une matrice (N, n) qui satisfait l'hypothèse a) du Théorème 2.1. Alors on a

$$M_1 \leq E \left(\text{tr} (XX^t)^2 \right) \leq M_2, \quad (2.20)$$

où

$$M_1 = \frac{K}{N} \{ nE |X_{11}|^4 + n(N+n-2) E^2 |X_{11}|^2 - E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6 \},$$

et

$$M_2 = \frac{K}{N} \{ nE |X_{11}|^4 + n(N+n-2) E^2 |X_{11}|^2 + E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6 + (N-1) E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^3 \}.$$

Pour la variance, on a

$$\begin{aligned} E^2 \left(\text{tr} (XX^t)^2 \right) &= \frac{1}{N^4} E^2 \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 + \sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) \\ &= \frac{1}{N^4} \left[E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right) + E \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{N^4} \left[E^2 \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right) + E^2 \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) + 2E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right) E \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N E \mathcal{A}_{ii}^2 \right)^2 &= \sum_{i=1}^N E^2 (\mathcal{A}_{ii}^2) + \sum_{i \neq k}^N E (\mathcal{A}_{ii}^2) E (\mathcal{A}_{kk}^2) \\ &= \sum_{i=1}^N E^2 (\mathcal{A}_{ii}^2) + N \sum_{i=1}^{N-1} E^2 (\mathcal{A}_{ii}^2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \neq k} E \mathcal{A}_{ik}^2 \right)^2 &= \sum_{i \neq k} E^2 (\mathcal{A}_{ik}^2) + \sum_{\substack{i \neq k \\ \neq \\ I \neq K}} E (\mathcal{A}_{ik}^2) E (\mathcal{A}_{IK}^2) \\ &= \sum_{i \neq k} E^2 (\mathcal{A}_{ik}^2) + N(N-1) \sum_{i \neq k} E^2 (\mathcal{A}_{ik}^2). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E \left(\text{tr} (XX^t)^2 \right)^2 &= \frac{1}{N^4} E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 + \sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^4} \left[E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right)^2 + E \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right)^2 + 2E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right) \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) \right], \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right)^2 &= E \left[\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^4 + \sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ii}^2 \mathcal{A}_{kk}^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N E (\mathcal{A}_{ii}^4) + \sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ii}^2 \mathcal{A}_{kk}^2) \\ &= \sum_{i=1}^N E (\mathcal{A}_{ii}^4) + \sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ii}^2) E (\mathcal{A}_{kk}^2) \\ &= \sum_{i=1}^N E (\mathcal{A}_{ii}^4) + N \sum_{i=1}^{N-1} E^2 (\mathcal{A}_{ii}^2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right)^2 &= \sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ik}^4) + \sum_{\substack{i \neq k \\ \neq \\ I \neq K}} E (\mathcal{A}_{ik}^2 \mathcal{A}_{IK}^2) \\ &= \sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ik}^4) + \sum_{\substack{i \neq k \\ \neq \\ I \neq K}} E (\mathcal{A}_{ik}^2) E (\mathcal{A}_{IK}^2) \\ &= \sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ik}^4) + N(N-1) \sum_{i \neq k} E^2 (\mathcal{A}_{ik}^2). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \text{var} \left(\text{tr} (XX^t)^2 \right) \tag{2.21} \\ & \leq \frac{1}{N^4} \left\{ \sum_{i=1}^N E (\mathcal{A}_{ii}^4) + \sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ik}^4) + 2 \left[E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right) \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) - E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^2 \right) E \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Les résultats suivants aident à majorer chacun des termes de (2.21).

Lemme 2.3 *Sous les hypothèses du Lemme 2.2, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N E (\mathcal{A}_{ii}^4) &= E \left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2 \right)^4 \right) \leq K \{ N^4 E^4 |X_{11}|^2 + N^3 [E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \\ &+ E |X_{11}|^2 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12}] + N^2 [E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} + E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12}] \}. \end{aligned}$$

Lemme 2.4 *Sous les hypothèses du Lemme 2.2, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ik}^4) &= E \left(\sum_{i \neq k} \left(\sum_{j=1}^n X_{ij} X_{kj} \right)^4 \right) \leq K \{ N^4 E^4 |X_{11}|^2 + \\ &N^3 [E^{\frac{1}{2}} |X_{11}|^4 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12} + E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6] \}. \end{aligned}$$

Lemme 2.5 *Sous les hypothèses du Lemme 2.2, et pour \mathcal{A}_{ii} , \mathcal{A}_{ik} définies par la relation (2.19), on a*

$$\begin{aligned} E \left(\sum_i \mathcal{A}_{ii}^2 \sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) - E \left(\sum_i \mathcal{A}_{ii}^2 \right) \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) &\leq K \{ N^4 E |X_{11}|^4 E^2 |X_{11}|^2 \\ &+ N^3 [E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 + E |X_{11}|^2 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12} + E |X_{11}|^2 E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^9] + \\ &N^2 [E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{15} E |X_{11}|^3 + E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} + E^{\frac{5}{12}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{18} + E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6] \}. \end{aligned}$$

Par les Lemmes 2.3, 2.4 et 2.5 on en déduit une majoration de la variance

$$\text{var} \left(\text{tr} (XX^t)^2 \right) \leq \frac{K}{N^4} \{ N^4 E |X_{11}|^4 E^2 |X_{11}|^2 \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} &+ N^3 [E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 + E^{\frac{1}{2}} |X_{11}|^4 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12} + E |X_{11}|^2 E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^9] \\ &+ N^2 [E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} + E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{15} E |X_{11}|^3 + E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} + E^{\frac{5}{12}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{18}] \}. \end{aligned}$$

2.2.3 Esperance et variance de trace de matrices d'entrées tronquées centrées

Comme $E\left(\bar{\tilde{X}}_{11}\right) = 0$ et $\bar{\tilde{X}}_{ij} = \tilde{X}_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| > \ln N)} + E\tilde{X}_{ij} \mathbb{I}_{(|X_{ij}| \leq \ln N)}$, alors

$$\begin{aligned}
E\left|\bar{\tilde{X}}_{11}\right|^2 &= \text{var}\left(\text{Re}\bar{\tilde{X}}_{11}\right) + \text{var}\left(\text{Im}\bar{\tilde{X}}_{11}\right) \\
&= \text{var}\left(\text{Re}\tilde{X}_{11}\mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \ln N)}\right) + \text{var}\left(\text{Im}\tilde{X}_{11}\mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \ln N)}\right) \\
&\leq E\left|\tilde{X}_{11}\right|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \ln N)} \\
&\leq 2\left(E|X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(\ln N \leq |X_{11}| < \sqrt{N})} + \left|EX_{11}\mathbb{I}_{(|X_{11}| < \sqrt{N})}\right|^2 P(|X_{11}| \geq \ln N)\right) \\
&\leq kE|X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \ln N)} \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Pour $p \geq 4$, on a

$$\begin{aligned}
E\left|\bar{\tilde{X}}_{11}\right|^p &\leq 2^{p-1}\left(E\left|\tilde{X}_{11}\right|^p \mathbb{I}_{(|X_{11}| \geq \ln N)} + \left|E\tilde{X}_{11}\mathbb{I}_{(|X_{11}| < \ln N)}\right|^p\right) \\
&\leq 2^{2(p-1)}E|X_{11}|^p \mathbb{I}_{(\ln N \leq |X_{11}| < \sqrt{N})} + \left(2^{2(p-1)} + 2^{2p-1}\right)(E|X_{11}|)^p \\
&\leq k_p\left(N^{\frac{p-4}{2}}E|X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N \leq |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1\right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
E\left|\bar{X}_{11}\right|^2 &= E\left|\tilde{X}_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} - E\tilde{X}_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)}\right|^2 \\
&= E\left|(\hat{X}_{11} - E\hat{X}_{11}) \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} - E\left(\hat{X}_{11} - E\hat{X}_{11}\right) \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)}\right|^2 \\
&= E\left|(X_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| < \sqrt{N})} - EX_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| < \sqrt{N})}) \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)}\right|^2 \\
&= E\left|(X_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} - EX_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)})\right|^2 \\
&= E\left|(X_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)})^2 + (EX_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)})^2 - 2(X_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)})(EX_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)})\right|^2 \\
&\leq E|X_{11}|^2,
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$E\left|\bar{X}_{11}\right|^2 \leq E|X_{11}|^2. \tag{2.25}$$

Une application du théorème de la convergence dominée, donne

$$E |\bar{X}_{11}|^2 \rightarrow E |X_{11}|^2 = \gamma = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}. \quad (2.26)$$

Pour $p \geq 4$, on a

$$\begin{aligned} E |\bar{X}_{11}|^p &\leq 2^{p-1} \left(E |\tilde{X}_{11}|^p \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} + \left| E \tilde{X}_{11} \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} \right|^p \right) \\ &\leq 2^{2(p-1)} \left(E |X_{11}|^p \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} + \left(2^{2(p-1)} + 2^{2p-1} \right) \left(E |X_{11}| \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} \right)^p \right) \\ &\leq K E |X_{11}|^p \mathbb{I}_{(|X_{11}| \leq \ln N)} \\ &\leq K (\ln N)^{p-2} E |X_{11}|^2 \\ &= K \gamma (\ln N)^{p-2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Comme les (X_{ij}) pour tout $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, n$ sont fortement géométriquement mélangeantes (G.S.M), de même les (\bar{X}_{ij}) et les $(\bar{\bar{X}}_{ij})$ le sont aussi, puisque

$$\bar{X}_{ij} = g(X_{ij}) \text{ et } \bar{\bar{X}}_{ij} = h(X_{ij}),$$

avec g, h fonctions mesurables.

Espérance de trace de matrices d'entrées $\bar{\bar{X}}_{ij}$

En utilisant (2.20), (2.12), (2.23) et (2.24), on peut vérifier que

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{X}}^t \right)^2 \right] &\leq \frac{K}{N^2} \theta^4 \left[nE \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^4 + n(N+n-2) E^2 \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^2 + E^{\frac{2}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^6 \right. \\
&\quad \left. + (N-1) E^{\frac{4}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^3 \right] \\
&\leq K \theta^4 \left[\frac{1}{N} E \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^4 + E^2 \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^2 + \frac{1}{N^2} E^{\frac{2}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^6 + \frac{1}{N} E \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^4 \right] \\
&\leq K \theta^4 \left[\frac{1}{N} \left[E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right] + E^2 |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{N^2} \left[N E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right]^{\frac{2}{3}} \right] \\
&\leq K \theta^4 \left[\frac{1}{N} \left[E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right] + E^2 |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{N^2} \left[N^{\frac{2}{3}} E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right] \right] \\
&\leq K \theta^4 \left[E |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \frac{1}{N} + E^2 |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{N^2} N^{\frac{4}{3}} E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \frac{1}{N^2} \right] \\
&\leq K \theta^4 \left[E |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \frac{1}{N} + E^2 |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} \right], \\
E \left[\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{X}}^t \right)^2 \right] &\leq K \theta^4 \left[E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} + \frac{1}{N} \right] \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Variance de trace de matrices d'entrées $\bar{\bar{X}}_{ij}$

Pour la variance en utilisant (2.22) et (2.13), (2.23) et (2.24), on a

$$\begin{aligned}
\text{var} \left(\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{X}}^t \right)^2 \right) &\leq K \frac{\theta^8}{N^6} \{ N^4 E \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^4 E^2 \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^2 + N^3 [E^{\frac{4}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^6 \\
&\quad + E^{\frac{1}{2}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^4 E^{\frac{1}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^6 E^{\frac{1}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^{12} + E \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^2 E^{\frac{2}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^9] + N^2 [E^{\frac{1}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^6 E^{\frac{1}{6}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^{12} E^{\frac{1}{6}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^{24} \\
&\quad + E^{\frac{1}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^{15} E^{\frac{3}{4}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^4 + E^{\frac{2}{3}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^{12} + E^{\frac{5}{12}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^{12} E^{\frac{1}{6}} \left| \bar{\bar{X}}_{11} \right|^{18}] \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{var} \left(\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{X}}^t \right)^2 \right) &\leq K \frac{\theta^8}{N^6} \{ N^4 \left(E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right) \left(E |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} \right)^2 \\
&+ N^3 \left[\left(NE |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right) \left(N^2 E |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\
&+ \left. \left(E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(NE |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\
&\left. \left(N^4 E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} + \left(E |X_{11}|^2 \mathbb{I}_{(|X_{11}| > \ln N)} \right) \left(N^{\frac{5}{2}} E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{2}{3}} \right] \\
&+ N^2 \left[\left(NE |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} \left(N^4 E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{6}} \right. \\
&\left. \left(N^{10} E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{6}} + \left(N^{\frac{11}{2}} E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} \right. \\
&\left. \left(E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{3}{4}} + \left(N^4 E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{2}{3}} \right. \\
&\left. + \left(N^4 E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{5}{12}} \left(N^7 E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right)^{\frac{1}{6}} \right] \}, \\
\text{var} \left(\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{X}}^t \right)^2 \right) &\leq K \theta^8 \left\{ \frac{1}{N^2} \left(E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + 1 \right) + \frac{1}{N^{4/3}} E |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} \right. \\
&+ \frac{1}{N^{4/3}} E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^{4/3}} E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^3} \\
&+ \frac{1}{N^{4/3}} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^{13/6}} E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} \\
&\left. \frac{1}{N^{4/3}} E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^{7/6}} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^4} \right\}, \\
\text{var} \left[\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{X}}^t \right)^2 \right] &\leq K \theta^8 \left[\frac{1}{N^{7/6}} E^{1/6} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^2} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{N=1}^{\infty} \text{var} \left[\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{X}}^t \right)^2 \right] \leq K \sum_{N=1}^{\infty} \theta^8 \left[\frac{1}{N^{7/6}} E^{1/6} |X_{11}|^4 \mathbb{I}_{(\ln N < |X_{11}| < \sqrt{N})} + \frac{1}{N^2} \right] < \infty.$$

D'où le résultat

$$\frac{1}{N} \theta^4 \text{tr} \left(\frac{\bar{X} \bar{X}^t}{\bar{X} \bar{X}} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{p.s.}$$

Reste à montrer que

$$\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 = O(1) \quad \text{p.s.}$$

Espérance de trace de matrices d'entrées \bar{X}_{ij}

On étudie la convergence de

$$E \left[\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right].$$

En utilisant (2.20) et (2.25)-(2.27), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{K}{N^2} \{ nE |\bar{X}_{11}|^4 + n(N+n-2) E^2 |\bar{X}_{11}|^2 - E^{\frac{2}{3}} |\bar{X}_{11}|^6 \} \leq E \left[\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right] \\ & \leq \frac{K}{N^2} \{ nE |\bar{X}_{11}|^4 + n(N+n-2) E^2 |\bar{X}_{11}|^2 + E^{\frac{2}{3}} |\bar{X}_{11}|^6 + (N-1) E^{\frac{4}{3}} |\bar{X}_{11}|^3 \}, \\ & \quad K \left\{ \frac{n}{N} \left(\frac{n}{N} + 1 - \frac{2}{N} \right) E^2 |\bar{X}_{11}|^2 - \frac{(\ln N)^{\frac{8}{3}}}{N^2} \right\} \leq E \left[\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right] \\ & \leq K \left\{ \frac{n}{N} \frac{(\ln N)^2}{N} + \frac{n}{N} \left(\frac{n}{N} + 1 - \frac{2}{N} \right) E^2 |\bar{X}_{11}|^2 + \frac{(\ln N)^{\frac{8}{3}}}{N^2} + \frac{(\ln N)^{\frac{4}{3}}}{N} \right\}, \\ & \quad K \left\{ -\frac{(\ln N)^{\frac{8}{3}}}{N^2} \right\} \leq E \left[\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right] - \frac{n}{N} \left(\frac{n}{N} + 1 - \frac{2}{N} \right) E^2 |\bar{X}_{11}|^2 \\ & \leq K \left\{ \frac{n}{N} \frac{(\ln N)^2}{N} + \frac{(\ln N)^{\frac{8}{3}}}{N^2} + \frac{(\ln N)^{\frac{4}{3}}}{N} \right\}, \\ & \quad E \left[\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right] - \frac{n}{N} \left(\frac{n}{N} + 1 - \frac{2}{N} \right) E^2 |\bar{X}_{11}|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc

$$E \left[\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right] \rightarrow \gamma^2 [c(c+1)].$$

Variance de trace de matrices d'entrées \bar{X}_{ij}

Pour la variance, par (2.22), (2.26) et (2.27), on obtient

$$\begin{aligned} \text{var} \left(\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right) &\leq \frac{K}{N^6} \{ N^4 E |\bar{X}_{11}|^4 E^2 |\bar{X}_{11}|^2 + N^3 [E^{\frac{4}{3}} |\bar{X}_{11}|^6 \\ &+ E^{\frac{1}{2}} |\bar{X}_{11}|^4 E^{\frac{1}{3}} |\bar{X}_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |\bar{X}_{11}|^{12} + E |\bar{X}_{11}|^2 E^{\frac{2}{3}} |\bar{X}_{11}|^9] + N^2 [E^{\frac{1}{3}} |\bar{X}_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |\bar{X}_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |\bar{X}_{11}|^{24} \\ &+ E^{\frac{1}{3}} |\bar{X}_{11}|^{15} E^{\frac{3}{4}} |\bar{X}_{11}|^4 + E^{\frac{2}{3}} |\bar{X}_{11}|^{12} + E^{\frac{5}{12}} |\bar{X}_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |\bar{X}_{11}|^{18}] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var} \left(\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right) &\leq K \left\{ \frac{(\ln N)^2}{N^2} + \frac{(\ln N)^{16/3}}{N^3} + \frac{(\ln N)^{17/3}}{N^3} + \frac{(\ln N)^{14/3}}{N^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\ln N)^{20/3}}{N^4} + \frac{(\ln N)^{35/6}}{N^4} + \frac{(\ln N)^{41/6}}{N^4} \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{var} \left(\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 \right) \leq K \frac{(\ln N)^{17/3}}{N^3},$$

qui est sommable. Donc,

$$\frac{1}{N} \text{tr} (\bar{X} \bar{X}^t)^2 = O(1) \text{ p.s.}$$

D'où (2.17) s'obtient et par suite (2.16).

Ce résultat avec (1.1), et (2.11) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} D \left(F^{\tilde{X}T\tilde{X}^t}, F^{\bar{X}T\bar{X}^t} \right) &\leq D \left(F^{\tilde{X}T\tilde{X}^t}, F^{\tilde{X}T_\theta\tilde{X}^t} \right) + D \left(F^{\tilde{X}T_\theta\tilde{X}^t}, F^{\bar{X}T_\theta\bar{X}^t} \right) \\ &\quad + D \left(F^{\bar{X}T_\theta\bar{X}^t}, F^{\bar{X}T\bar{X}^t} \right), \end{aligned}$$

Par suite,

$$D \left(F^{\tilde{X}T\tilde{X}^t}, F^{\bar{X}T\bar{X}^t} \right) \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Avec (2.14) et (2.15) montrer que

$$D \left(F^{X^tX}, F_{H,c} \right) \rightarrow 0, \text{ revient à établir que}$$

$$D\left(F^{\bar{X}T\bar{X}^t}, F_{H,c}\right) \rightarrow 0,$$

ou encore par (1.3), pour $z \in \mathbb{C}^+$

$$m_{F^{\bar{X}T\bar{X}^t}}(z) \xrightarrow{p.s.} m_{F_{H,c}}(z).$$

Soit $diag\left(E|\bar{X}_{11}|^2\tau_1^N, \dots, E|\bar{X}_{11}|^2\tau_n^N\right)$ une matrice diagonale qui satisfait l'hypothèse b) du Théorème 2.1, avec laquelle on va remplacer la matrice T . On remplace aussi la matrice \bar{X} par $\left(1/\sqrt{E|\bar{X}_{11}|^2}\right)\bar{X}$. ($E|\bar{X}_{11}|^2 > 0$ pour N assez grand). Comme

$$|\tilde{X}_{ij}| \leq \ln N + E|X_{11}|, \text{ on a pour } N \text{ assez grand } \left(1/\sqrt{E|\bar{X}_{11}|^2}\right)|\bar{X}_{ij}| \leq a \ln N,$$

avec $a > 2$. Soit $\log N$ le logarithme de N avec la base $e^{\frac{1}{a}}$ (i.e $a \ln N = \log N$).

Dans la suite pour simplifier les notations, au lieu de $\bar{B}_N = \bar{X}T\bar{X}^t$ on écrit tout simplement $B_N = XT X^t$, avec $X = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}X_{ij}\right)$, où

- (1) X_{ij} sont (G.S.M) pour tout j et i fixé.
- (2) $|X_{ij}| \leq \log N$.
- (3) $E(X_{ij}) = 0$, $E|X_{11}|^2 = 1$.

2.2.4 Convergence de la transformée de Stieltjes

Sous les hypothèses a), b), c) du Théorème 2.1, on procède pour montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^+$

$$m_{F^{XTX^t}}(z) \xrightarrow{p.s.} m_{F_{H,c}}(z).$$

On peut utiliser la relation

$$q^*(B + \tau q q^*)^{-1} = \frac{1}{1 + (\tau q^* B^{-1} q)} q^* B^{-1}, \quad (2.28)$$

et le lemme suivant.

Lemme 2.6 [38] Soit $C = (C_{ij})$, $C_{ij} \in \mathbb{C}$, une matrice de dimension (N, N) avec $\|C\| \leq 1$ et $X = (X_1, \dots, X_N)^t$, $X_i \in \mathbb{C}$, où X_i sont i.i.d. et satisfont les conditions (2) et (3). Alors

$$E|X^*CX - \text{tr}C|^6 \leq KN^3 \log^{12} N,$$

où K ne dépend ni de N, C , ni de la distribution de X_1 .

Considérons maintenant le comportement de $F^{X^T X^t}$. On a

$$\begin{aligned} \text{tr} X^t X &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N |X_{i1}|^2 + \sum_{i=1}^N |X_{i2}|^2 + \dots + \sum_{i=1}^N |X_{in}|^2 \right) \\ &\leq \frac{n}{N} \max \left(\sum_{i=1}^N |X_{i1}|^2, \sum_{i=1}^N |X_{i2}|^2, \dots, \sum_{i=1}^N |X_{in}|^2 \right) \\ &\leq \frac{n}{N} \sum_{i=1}^N |X_{i1}|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{n} \text{tr} X^t X \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{i1}|^2.$$

D'après le lemme précédent, avec $C = I$, et $X = (X_{11}, X_{21}, \dots, X_{N1})^t$, on a

$$E \left| \sum_{i=1}^N |X_{i1}|^2 - N \right|^6 \leq KN^3 \log^{12} N,$$

par conséquent

$$E \left| \frac{1}{n} \text{tr} X^t X - 1 \right|^6 \leq E \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{i1}|^2 - 1 \right|^6 \leq \frac{K \log^{12} N}{N^3},$$

$\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_N P \left(\left| \frac{1}{n} \text{tr} X^t X - 1 \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^6} \sum_N E \left| \frac{1}{n} \text{tr} X^t X - 1 \right|^6 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^6} \sum_N \frac{K \log^{12} N}{N^3} < \infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{n} \text{tr} X^t X \rightarrow 1 \quad \text{p.s.}$$

Ce qui implique que la suite $\{F^{X^t X}\}$ est tendue presque sûrement. Comme, $F^T \rightarrow H$ p.s. il s'ensuit de la deuxième inégalité du Lemme 4.2 que $\{F^{X^T X^t}\}$ est aussi tendue presque sûrement,

$$F^{X^T X^t} \text{ tendue: } \forall \varepsilon > 0, F^{|X^T X^t|} \{(y, \infty)\} \leq \varepsilon.$$

Soit $\{F^{B_{N_i}}\}$ une sous-suite de $\{F^{B_N}\}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \geq 0, 0 \leq F^{B_{N_i}} \{(x, \infty)\} = F^{X_{N_i} T_{N_i} X_{N_i}^t} \{(x, \infty)\} \leq \varepsilon.$$

Donc

$$F^{B_{N_i}}\{(x, \infty)\} \rightarrow 0 \text{ p.s. et } F^{B_{N_i}}\{(0, x)\} \xrightarrow{v} 1 \text{ p.s.}$$

Ce qui prouve qu'il n'existe aucune sous-suite de $\{F^{B_N}\}$ convergente vaguement vers 0.

Ainsi, pour $z = u + iv \in \mathbb{C}^+$ fixé, la suite $\{F^{B_N}\}$ satisfait les conditions du Lemme 4.7, et $\exists m > 0$ tel que,

$$\begin{aligned} \delta &= \inf_N \operatorname{Im} (m_{F^{B_N}}(z)) = \inf_N \operatorname{Im} \left(\int \frac{1}{x-z} dF^{B_N}(x) \right) \\ &= \inf_N \operatorname{Im} \left(\int \frac{x-u+iv}{(x-u)^2+v^2} dF^{B_N}(x) \right) \\ &= \inf_N \left(\int \frac{v}{(x-u)^2+v^2} dF^{B_N}(x) \right) \\ &\geq \inf_N \left(\int \frac{v}{2(x^2+u^2)+v^2} dF^{B_N}(x) \right) \\ &\geq \inf_N \left(\int_{-m}^m \frac{v}{2(x^2+u^2)+v^2} dF^{B_N}(x) \right) \\ &\geq \frac{v}{2(m^2+u^2)+v^2} \inf_N F^{B_N}[-m, m], \end{aligned}$$

donc

$$\delta > 0 \text{ p.s.}$$

Dans ce qui suit, on procède à montrer que pour $z \in \mathbb{C}^+$,

$$-(z-x)^{-1} - m_{F^{B_N}}(z) \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty .$$

Pour $j, l = 1, 2, \dots, n$, soient

$q_j (= q_j^N)$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de X ,

$$B_{(j)} = B_{(j)}^N = B_N - \tau_j q_j q_j^t,$$

$$x = x_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j}{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}, \quad x_{(j)} = x_{(j)}^N = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{B_{(j)}}}(z)}.$$

Ecrivons

$$\begin{aligned}
B_N &= XTX^t \\
B_N - zI &= -(z-x)I + XTX^t - xI \\
-(z-x)^{-1}(B_N - zI) &= I - (z-x)^{-1}(XTX^t - xI) \\
-(z-x)^{-1}I &= (B_N - zI)^{-1} - (z-x)^{-1}(XTX^t - xI)(B_N - zI)^{-1} \\
-(z-x)^{-1}I - (B_N - zI)^{-1} &= -(z-x)^{-1}(XTX^t - xI)(B_N - zI)^{-1}.
\end{aligned}$$

On calcule la trace des deux membres

$$\begin{aligned}
(x-z)^{-1} - m_{B_N}(z) &= (x-z)^{-1} - \frac{1}{N} \text{tr}(B_N - zI)^{-1} \\
&= \frac{1}{N} (x-z)^{-1} \text{tr} \left[(XTX^t - xI)(B_N - zI)^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{N} (x-z)^{-1} \text{tr} \left[\left(\sum_{j=1}^n \tau_j q_j q_j^t - xI \right) (B_N - zI)^{-1} \right].
\end{aligned}$$

Par la relation (2.28), on a

$$\begin{aligned}
(B_N - zI)^{-1} &= (B_{(j)} - zI + \tau_j q_j q_j^t)^{-1} \\
&= \frac{1}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} (B_{(j)} - zI)^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&(x-z)^{-1} - m_{B_N}(z) \\
&= \frac{1}{N} (x-z)^{-1} \text{tr} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\tau_j q_j q_j^t}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} (B_{(j)} - zI)^{-1} - x(B_N - zI)^{-1} \right].
\end{aligned}$$

Alors

$$(x-z)^{-1} - m_{B_N}(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j}{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)} d_j, \quad (2.29)$$

avec

$$\begin{aligned}
d_j &= d_j^N \\
&= (x-z)^{-1} \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \\
&\quad - \frac{1}{N} (x-z)^{-1} \text{tr}(B_N - zI)^{-1}.
\end{aligned}$$

Par le Lemme 2.6, on a

$$E \left| \|q_j\|^2 - 1 \right|^6 \leq \frac{K \log^{12} N}{N^3},$$

et par l'hypothèse d) du Théorème 2.1, on a

$$E \left| q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j - \frac{1}{N} \text{tr} (B_{(j)} - zI)^{-1} \right|^6 \leq \frac{K}{N^3},$$

et

$$E \left| q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} \left((x_{(j)} - z)^{-1} I \right) q_j - \frac{1}{N} \text{tr} (B_{(j)} - zI)^{-1} \left((x_{(j)} - z)^{-1} I \right) \right|^6 \leq \frac{K}{N^3}.$$

Ce qui est suffisant pour assurer que

$$\max_{j \leq n} \max \left[\begin{array}{l} \left| \|q_j\|^2 - 1 \right|, \left| q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j - \frac{1}{N} \text{tr} (B_{(j)} - zI)^{-1} \right|, \\ \left| q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} \left((x_{(j)} - z)^{-1} I \right) q_j - \frac{1}{N} \text{tr} (B_{(j)} - zI)^{-1} \left((x_{(j)} - z)^{-1} I \right) \right| \end{array} \right] \rightarrow 0 \text{ p.s.} \quad (2.30)$$

Par le Lemme 4.5, on a

$$\left| \frac{1}{N} \text{tr} (B_{(j)} - zI)^{-1} - \frac{1}{N} \text{tr} (B_N - zI)^{-1} \right| \leq \frac{1}{Nv} \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty,$$

donc

$$\left| m_{F^{B_{(j)}}}(z) - m_{F^{B_N}}(z) \right| \leq \frac{1}{Nv} \rightarrow 0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \left| m_{F^{B_N}}(z) - q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \right| &\leq \left| m_{F^{B_N}}(z) - m_{F^{B_{(j)}}}(z) \right| + \left| m_{F^{B_{(j)}}}(z) - q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \right| \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

donc

$$\max_{j \leq n} \max \left[\left| m_{F^{B_{(j)}}}(z) - m_{F^{B_N}}(z) \right|, \left| m_{F^{B_N}}(z) - q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \right| \right] \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

Pour N assez grand tel que

$$\max_{j \leq n} \max \left[\left| \text{Im} m_{F^{B_{(j)}}}(z) - \text{Im} m_{F^{B_N}}(z) \right|, \left| \text{Im} m_{F^{B_N}}(z) - \text{Im} q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \right| \right] < \frac{\delta}{2}.$$

On a pour $j, l \leq n$,

$$\left| \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} - 1 \right| < \frac{2}{\delta} \left| m_{F^{B_N}}(z) - q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \right|,$$

et

$$\left| \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{B_N}}(z)} - \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{B_{(j)}}}(z)} \right| \leq \frac{2}{\delta^2} \left| m_{F^{B_N}}(z) - m_{F^{B_{(j)}}}(z) \right|.$$

Donc

$$\begin{aligned} |x - x_{(j)}| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{B_N}}(z)} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{B_{(j)}}}(z)} \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n \left| \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{B_N}}(z)} - \frac{\tau_l}{1 + \tau_l m_{F^{B_{(j)}}}(z)} \right| \\ &\leq \frac{n}{N} \frac{2}{\delta^2} \left| m_{F^{B_N}}(z) - m_{F^{B_{(j)}}}(z) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Par suite

$$\max_{j \leq n} \max \left[\left| \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} - 1 \right|, |x - x_{(j)}| \right] \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

En utilisant les Lemmes 4.5, 4.6 et les relations (2.30)–(2.32), on trouve que

$$\max_{j \leq n} d_j \rightarrow 0,$$

en effet,

$$|d_j| = \left| \begin{aligned} &\frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} \begin{bmatrix} (x - z)^{-1} q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \\ - (x_{(j)} - z)^{-1} q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \\ + (x_{(j)} - z)^{-1} q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j \end{bmatrix} \\ &- \frac{1}{N} (x - z)^{-1} \left[\text{tr}(B_N - zI)^{-1} - \text{tr}(B_{(j)} - zI)^{-1} \right] \\ &- \frac{1}{N} \left[(x - z)^{-1} \text{tr}(B_{(j)} - zI)^{-1} - (x_{(j)} - z)^{-1} \text{tr}(B_{(j)} - zI)^{-1} \right] \\ &- \frac{1}{N} (x_{(j)} - z)^{-1} \left[\text{tr}(B_{(j)} - zI)^{-1} \left(1 - \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} \right) \right] \\ &- \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} \frac{1}{N} (x_{(j)} - z)^{-1} \text{tr}(B_{(j)} - zI)^{-1} \end{aligned} \right|.$$

Ou encore

$$\begin{aligned}
|d_j| &\leq \frac{1}{v^3} \left| \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} \right| |x - x_{(j)}| \|q_j\|^2 + \\
&\quad \left| \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} \right| \left| \frac{(x_{(j)} - z)^{-1} q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j}{-\frac{1}{N} (x_{(j)} - z)^{-1} \text{tr} (B_{(j)} - zI)^{-1}} \right| + \\
&\quad \frac{1}{Nv^2} + \frac{1}{N} \left(N |x - x_{(j)}| \frac{1}{v^3} \right) + \frac{1}{Nv^2} \left| 1 - \frac{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)}{1 + \tau_j q_j^t (B_{(j)} - zI)^{-1} q_j} \right| \\
&\rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Comme

$$\left| \frac{\tau_j}{1 + \tau_j m_{F^{B_N}}(z)} \right| \leq \frac{1}{\delta},$$

on conclut par (2.29) que

$$(x - z)^{-1} - m_{B_N}(z) \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

2.2.5 Expression de la loi limite

On considère une sous-suite $\{N_i\}$ telle que $m_{F^{B_{N_i}}}$ converge vers le nombre m .

Comme

$$f(\tau) = \frac{\tau}{1 + \tau m}$$

est bornée, et

$$\left| \frac{\tau}{1 + \tau m_{F^{B_{N_i}}}(z)} - f(\tau) \right| \leq \frac{1}{\delta^2} |m_{F^{B_{N_i}}}(z) - m|,$$

implique que

$$\left| \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j}{1 + \tau_j m_{F^{B_{N_i}}}(z)} - \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j}{1 + \tau_j m} \right| \leq \frac{n}{N_i} \frac{1}{\delta^2} |m_{F^{B_{N_i}}}(z) - m| \rightarrow 0,$$

alors

$$\left| x_{N_i} - \frac{n}{N_i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\tau_j}{1 + \tau_j m} \right| \rightarrow 0,$$

où

$$x(= x_{N_i}) \rightarrow c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau m},$$

avec (2.33) on conclut que

$$m = -(z - x)^{-1} = - \left(z - c \int \frac{\tau}{1 + \tau m} dH(\tau) \right)^{-1}.$$

Par conséquent, m est unique (section suivante), et on doit avoir $m_{F^{B_N}} \rightarrow m$ p.s; et en utilisant (1.3) la preuve du Théorème 2.1 sera complète.

2.2.6 Unicité de la limite

Le lemme suivant permet de montrer l'unicité de la limite établit dans le Théorème 2.1.

Lemme 2.7 *Pour $z = u + iv \in \mathbb{C}^+$, il existe au plus un $m \in \mathbb{C}^+$ tel que*

$$m(z) = - \left(z - c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau m(z)} \right)^{-1}. \quad (2.34)$$

Preuve Supposons qu'il existe deux solutions M_1 et $M_2 \in \mathbb{C}^+$ de l'équation (2.34), on a

$$M_1 = \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right)^{-1}, \quad (2.35)$$

$$M_2 = \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_2} - z \right)^{-1}.$$

Donc

$$M_1 - M_2 = \frac{1}{\left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right)} - \frac{1}{\left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_2} - z \right)},$$

et

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 &= \left(c \int \frac{\tau}{1 + \tau M_2} - \frac{\tau}{1 + \tau M_1} dH(\tau) \right) \\ &\quad \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right)^{-1} \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_2} - z \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 &= c(M_1 - M_2) \int \frac{\tau^2}{(1 + \tau M_1)(1 + \tau M_2)} dH(\tau) \\ &\quad \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right)^{-1} \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_2} - z \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme $M_1 \neq M_2$ on a

$$\begin{aligned} 1 &= c \int \frac{\tau^2}{(1 + \tau M_1)(1 + \tau M_2)} dH(\tau) \\ &\quad \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right)^{-1} \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_2} - z \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$1 \leq c \left(\int \frac{\tau^2}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \frac{\tau^2}{|1 + \tau M_2|^2} dH(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \left| \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right)^{-1} \left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_2} - z \right)^{-1} \right|. \quad (2.36)$$

D'autre part, par (2.35), on a

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\left(c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau(\operatorname{Re}(M_1) + i \operatorname{Im}(M_1))} - (u + iv) \right)} \\ &= \frac{1}{\left(c \int \frac{\tau(1 + \tau \operatorname{Re}(M_1)) - i \tau^2 \operatorname{Im}(M_1)}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) - (u + iv) \right)} \\ &= \frac{1}{\left(-u + c \int \frac{\tau(1 + \tau \operatorname{Re}(M_1))}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) - i \left(v + c \int \frac{\tau^2 \operatorname{Im}(M_1)}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) \right) \right)}, \end{aligned}$$

et

$$M_1 = \left(-u + c \int \frac{\tau(1 + \tau \operatorname{Re}(M_1))}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) + i \left(v + c \int \frac{\tau^2 \operatorname{Im}(M_1)}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) \right) \right) \left| c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right|^{-2}.$$

Donc

$$\operatorname{Im} M_1 = \left(v + c \operatorname{Im}(M_1) \int \frac{\tau^2}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) \right) \left| c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right|^{-2}.$$

Comme $v > 0$

$$\operatorname{Im} M_1 > c \operatorname{Im}(M_1) \int \frac{\tau^2}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) \left| c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right|^{-2}.$$

Par suite

$$1 > c \int \frac{\tau^2}{|1 + \tau M_1|^2} dH(\tau) \left| c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_1} - z \right|^{-2}. \quad (2.37)$$

De même

$$1 > c \int \frac{\tau^2}{|1 + \tau M_2|^2} dH(\tau) \left| c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau M_2} - z \right|^{-2}. \quad (2.38)$$

La contradiction de (2.36) avec (2.37) et (2.38) implique que $M_1 = M_2$. Ce qui prouve que la solution de (2.34) est unique. ■

Chapitre 3

Distribution spectrale limite des matrices de processus linéaires

3.1 Introduction

Les modèles de séries temporelles connus sous le nom de modèles *ARMA* peuvent inclure des termes autorégressifs et, ou des termes de moyenne mobile, nous exprimons X_t en fonction des valeurs passées de X_t et, ou des erreurs passées ainsi qu'une erreur de temps présent. Le modèle de moyenne mobile d'ordre q , noté *MA*(q) est:

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in Z$$

où les $\theta_1, \dots, \theta_q$ sont les paramètres du modèle et les $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ sont les termes d'erreur du bruit blanc.

Un modèle *AR*(1) est un modèle linéaire qui prédit la valeur actuelle d'une série chronologique en utilisant la valeur temporelle immédiatement antérieure. Un terme autorégressif dans un modèle de série chronologique pour la variable X_t est une valeur décalée de X_t .

Nous verrons qu'un modèle $AR(1)$

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in Z$$

peut être converti en un modèle MA d'ordre infini:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}.$$

Cette sommation des termes de bruit blanc passés est connue sous le nom de représentation causale d'un $AR(1)$. En d'autres termes, X_t est un type spécial de MA avec un nombre infini de termes remontant dans le temps. C'est ce qu'on appelle un MA d'ordre infini ou $MA(\infty)$.

Considérons le modèle

$$X_{(t)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \forall t \geq 1 \quad (3.1)$$

où $X_{(t)}$ et $\varepsilon_{(t)}$ sont des vecteurs de dimension $(N \times 1)$ et ψ_j matrice carrée d'ordre N avec $\psi_0 = I_N$.

Définissons la matrice d'autocovariance par

$$\Gamma_u = E \left(X_{(t)} X_{(t+u)}^* \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+u}^*, \quad u = 0, 1, \dots$$

L'estimateur de Γ_u est la matrice d'autocovariance empirique

$$\hat{\Gamma}_u = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-u} X_{(t)} X_{(t+u)}^*, \quad 0 \leq u \leq N-1.$$

Un cas simple de (3.1) est de $X_{(t)} = \varepsilon_{(t)} = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{N,t})^t$ avec $\{\varepsilon_{i,t}\}$ des variables aléatoire *i.i.d.* de moyenne nulle et de variance 1, alors $\hat{\Gamma}_0$ est la matrice de covariance empirique, et on retrouve dans ce cas la loi de Marcenko-Pastur comme distribution spectrale limite.

Considérons les hypothèses suivantes sur le processus $\{\varepsilon_{(t)}\}$ et les coefficients des matrices $\{\psi_j\}$:

$$(A1) \quad \{\varepsilon_{i,j}\} \text{ sont indépendants avec } E(\varepsilon_{i,j}) = 0 \text{ et } E|\varepsilon_{i,j}|^2 = 1, \forall i, j.$$

$$(A2) \quad \sup_{i,j} E \left(|\varepsilon_{i,j}|^k \right) < C_k < \infty, \forall k \geq 1.$$

(A3) $\{\psi_j\}$ sont à support compacte et pour tout polynôme Π de $\{\psi_j, \psi_j^*\}$ la limite $\lim n^{-1} \text{tr}(\Pi)$ existe et elle est finie.

Le théorème suivant établit l'existence de la limite de la distribution spectrale des polynômes symétriques de l'estimateur de la matrice d'autocovariance empirique.

Théorème 3.1 [7] *On suppose que $X_{(t)} \sim MA(q)$, $q < \infty$, si les hypothèses (A1), (A2), (A3) sont vérifiées et $\frac{n(N)}{N} \rightarrow c > 0$ quand $N \rightarrow \infty$. Alors, la distribution spectrale limite (LSD) de tout polynôme symétrique $\Pi(\hat{\Gamma}_u, \hat{\Gamma}_u^* : u \geq 0)$ existe.*

Pour des polynômes symétriques particuliers, la distribution spectrale limite (LSD) existe sans l'hypothèse sur les moments. Dans la remarque suivante on considère la distribution spectrale limite (LSD) de $\{\hat{\Gamma}_u + \hat{\Gamma}_u^*\}$ et $\{\hat{\Gamma}_u \hat{\Gamma}_u^*\}$.

Remarque 3.1 [7] *On suppose que $X_{(t)} \sim MA(q)$, $q < \infty$, si les hypothèses (A1), (A3) sont vérifiées et $\frac{n(N)}{N} \rightarrow c > 0$ quand $N \rightarrow \infty$. Alors, on a*

(a) *Pour tout $0 \leq u < \infty$, la distribution spectrale limite (LSD) de $\hat{\Gamma}_u + \hat{\Gamma}_u^*$ existe, si pour $\delta \in (0, 2]$,*

$$(A4) \sup_{i,j} E \left(|\varepsilon_{i,j}|^{2+\delta} \right) < M < \infty, \text{ et}$$

$$(A5) \text{ Pour tout } \eta > 0, \frac{1}{\eta^{2+\delta} N n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N E \left(|\varepsilon_{i,j}|^{2+\delta} \mathbb{I}_{(|\varepsilon_{i,j}| > \eta N^{1/(2+\delta)})} \right) \rightarrow 0.$$

(b) *Pour tout $0 \leq u < \infty$, la distribution spectrale limite (LSD) de $\hat{\Gamma}_u \hat{\Gamma}_u^*$ existe, si on a (A5) et*

$$(A6) \sup_{i,j} E \left(|\varepsilon_{i,j}|^4 \right) < M < \infty.$$

Avec une hypothèse supplémentaire les deux résultats précédents reste valable pour $q = \infty$.

Corollaire 3.1 [7] *Le théorème et la remarque (a), (b) précédents s'obtiennent pour le processus $MA(\infty)$ aussi, en remplaçant q par ∞ sous l'hypothèse*

$$(A7) \sum_{j=0}^{\infty} \sup_n \|\psi_j\| < \infty, \text{ où } \|\psi_j\| \text{ est la norme spectrale de } \psi_j, \text{ pour tout } j \geq 0.$$

3.2 Représentation vectorielle du processus AR(1)

Pour obtenir le résultat de la convergence presque sûre de la fonction de répartition empirique des valeurs propres de la matrice $B_N = X_N T_N X_N^t$, dans le cadre d'un processus linéaire vectoriel, on considère les hypothèses suivantes:

(H₁) : $X_{(t)}$, le t -vecteur colonne ($N \times 1$) de la matrice aléatoire X_N , satisfaisant

$$X_{(t)} = A_N X_{(t-1)} + \varepsilon_{(t)}, \quad \forall t > 1 \quad (3.2)$$

où A_N est une matrice réelle ($N \times N$) avec $\sup_N \lambda_{\max}(A_N^t A_N) < 1$ et dont la distribution spectrale limite (*LSD*) existe, et $\varepsilon_{(t)}$ est donné par l'hypothèse (H₂).

(H₂) : $\{\varepsilon_{(t)} = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{N,t})^t\}$ sont des vecteurs aléatoires ($N \times 1$) identiquement distribués dont les entrées sont indépendantes de moyenne 0, variance $\sigma^2 > 0$, $\sup_{i,j} E(|\varepsilon_{i,j}|^4) < \infty$ et pour $\delta \in (0, 2]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nn(N)} \sum_{t=1}^{n(N)} \sum_{i=1}^N E\left(|\varepsilon_{i,t}|^{2+\delta} \mathbb{I}_{(|\varepsilon_{i,t}| > \sqrt{n})}\right) \rightarrow 0.$$

(H₃) : T_N est une suite de matrices réelles symétriques ($n(N) \times n(N)$) de normes bornées dont la distribution spectrale limite (*LSD*) existe. Pour tout $k \geq 0$, soit la suite des matrices ($n(N) \times n(N)$), $P_{k,N}$ où la k -ième sur-diagonale est égale à 1 et 0 ailleurs. On note que $P_{0,N} = I_N$ est la matrice identité d'ordre N . On suppose que la trace moyenne de tout polynôme d'ordre fini dans $\{T_N, P_{k,N}, P_{k,N}^t : k \geq 0\}$ converge quand $N \rightarrow \infty$.

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃) et $\frac{n(N)}{N} \rightarrow c > 0$ quand $N \rightarrow \infty$, la distribution spectrale limite (*LSD*) de la matrice aléatoire $X_N T_N X_N^t$ existe presque sûrement et elle peut être exprimé en termes de polynômes de variables librement indépendantes.*

Preuve On a

$$X_{(t)} = \sum_{k=0}^{t-1} (A_N)^k \varepsilon_{t-k}, \quad \forall t \geq 1.$$

On définit les deux processus suivants, pour $q \geq 0$

$$\tilde{X}_{(t)} = \sum_{k=0}^q (A_N)^k \varepsilon_{t-k}, \quad \forall t \geq 1,$$

et

$$\hat{X}_{(t)} = \sum_{k=0}^q (A_N)^k \hat{\varepsilon}_{t-k}, \quad \forall t \geq 1,$$

où

$$\hat{\varepsilon}_{i,t} = \varepsilon_{i,t} \mathbb{I}_{(|\varepsilon_{i,t}| < \sqrt{n})} - E\left(\varepsilon_{i,t} \mathbb{I}_{(|\varepsilon_{i,t}| < \sqrt{n})}\right).$$

Par le Théorème 3.1, presque sûrement la distribution spectrale limite (*LSD*) de $\hat{X}_N T_N \hat{X}_N^t$ existe pour tout $0 \leq q < \infty$. Pour q fixé on note cette limite par F_q . Soit $L(.,.)$ la métrique de Lévy entre de fonctions de distribution. Alors,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L\left(F^{\hat{X}_N T_N \hat{X}_N^t}, F_q\right) = 0, \quad \forall q \geq 0. \quad (3.3)$$

D'après le Corollaire 3.1, il existe une fonction de distribution F telle que,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} L(F_q, F) = 0. \quad (3.4)$$

En remplaçant $\psi_j = (A_N)^j$ et $P_{j-j'+k,N} = P_{j,N} T_N P_{j'+k,N}$ pour tout j, j', k et N dans la preuve de la Remarque 3.1, il est immédiat que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L\left(F^{\tilde{X}_N T_N \tilde{X}_N^t}, F^{\tilde{X}_N T_N \tilde{X}_N^t}\right) = 0, \quad \forall q \geq 1. \quad (3.5)$$

Aussi par le Corollaire 3.1, il s'ensuit que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} L\left(F^{X_N T_N X_N^t}, F^{\tilde{X}_N T_N \tilde{X}_N^t}\right) = 0. \quad (3.6)$$

En combinant les équations (3.3)-(3.6) la preuve du théorème sera complète ■

Chapitre 4

Simulations Numériques

Dans ce chapitre, nous illustrons le comportement des estimateurs de la densité de la fonction de répartition empirique des valeurs propres de grandes matrices aléatoires $B_N = X_N T_N X_N^t$, et nous identifions la fonction de densité de la loi limite par des simulations numériques. Nous rappelons (voir [42]) que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction de répartition F (la limite de la f.d.r.e. F^{B_N}) admet une dérivée continue f sur \mathbb{R}^* donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m_0(x),$$

où $m_0(x)$ est donnée par la transformée de Stieltjes $m_F(z)$ de la façon suivante,

$$\lim_{z \rightarrow x} m_F(z) = m_0(x),$$

avec $z = x + iy$.

Dans cette étude, nous distinguons deux cas,

- 1^{ier} cas: T_N matrice identité d'ordre n avec $n = n(N)$.
- 2^{ième} cas: T_N matrice diagonale, $T_N = \operatorname{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ avec τ_i variable aléatoire réelle.

Les éléments de la matrice X_N vérifient la relation (2.2) d'un processus autorégressif réel d'ordre 1, où ρ est un réel tel que $|\rho| < 1$ et ε_{ij} , ($i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, n$) est un bruit blanc gaussien, avec la condition initiale

$$X_{i1} = \varepsilon_{i1}.$$

Pour le cas du processus autorégressif vectoriel donné par la relation (3.2), il suffit de se mettre dans le cas particulier de l'hypothèse sur la matrice A_N et de prendre $A_N = \rho I_N$, pour obtenir les mêmes simulations numériques .

4.1 Estimation de la densité par la transformée de Stieltjes

En calculant les valeurs propres λ_i de B_N , on peut avoir la transformée de Stieltjes de sa fonction de répartition empirique, pour $z \in \mathbb{C}^+$

$$m_{F^{B_N}}(z) = \frac{1}{N} \text{tr} (B_N - zI)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_i (\lambda_i - z)^{-1},$$

et la densité empirique,

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} m_{F^{B_N}}(z),$$

qu'on va noter (STE) "Stieltjes Transform Estimator".

Le premier résultat établit, lorsque $\frac{n}{N} \rightarrow c$ et $F^{T_N} \rightarrow H$ p.s. quand N est assez grand, que la transformée de Stieltjes de la loi limite a l'expression suivante

$$m_F(z) = - \left(z - c \int \frac{\tau dH(\tau)}{1 + \tau m_F(z)} \right)^{-1}. \quad (4.1)$$

4.1.1 ^{ier} cas: T_N matrice identité

Dans ce cas la relation (4.1) est la transformée de Stieltjes de loi de Marcenko-Pastur (MP)

$$m_F = \frac{(c - z - 1) + \sqrt{(1 + c - z)^2 - 4c}}{2z}.$$

Exemple 1

On donne une représentation de la densité de la loi limite et la densité estimée par la transformée de Stieltjes lorsque le paramètre d'autorégressif $\rho = 0.2$ en suite $\rho = 0.7$ ainsi qu'on augmente la dimension N de 100 à 1000 avec $c = 1$.

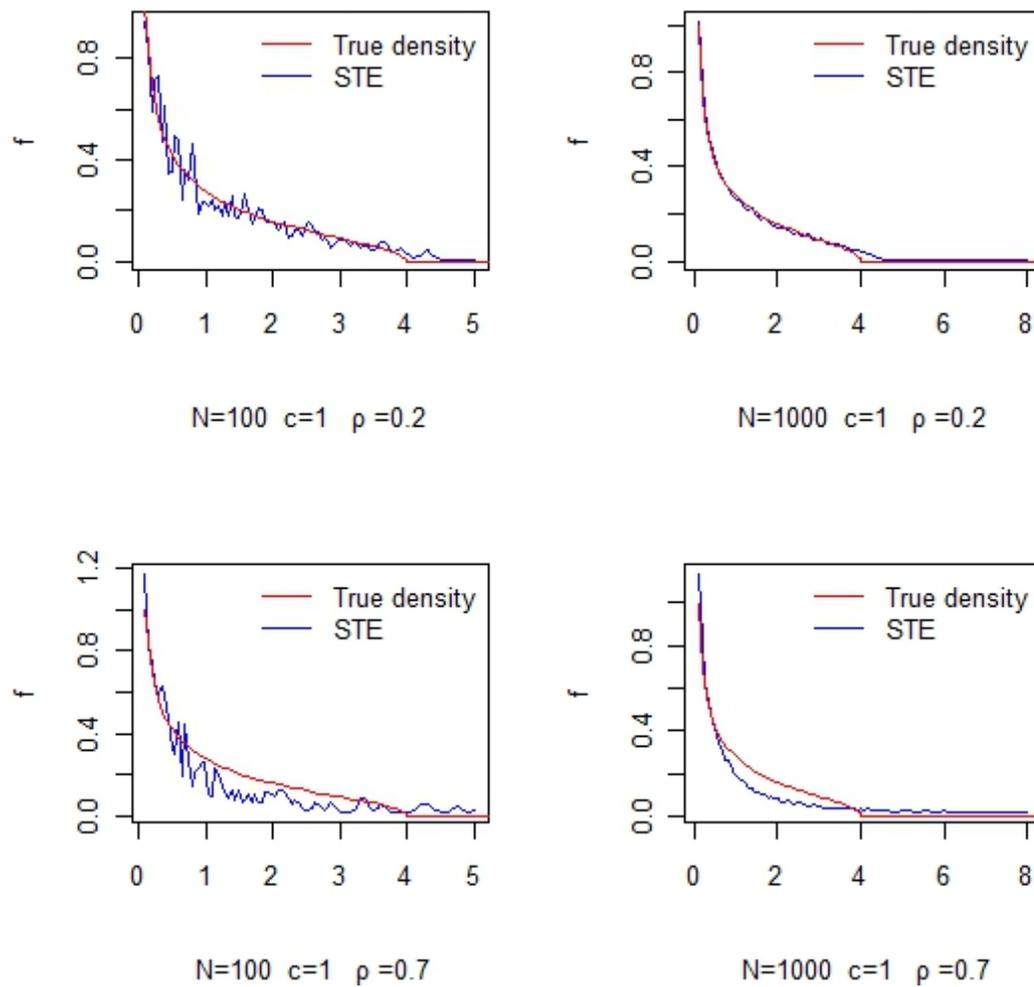


Figure 1: Estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec $c = 1$

Exemple 2

On refait les représentations de l'exemple 1, avec $c = 2$.

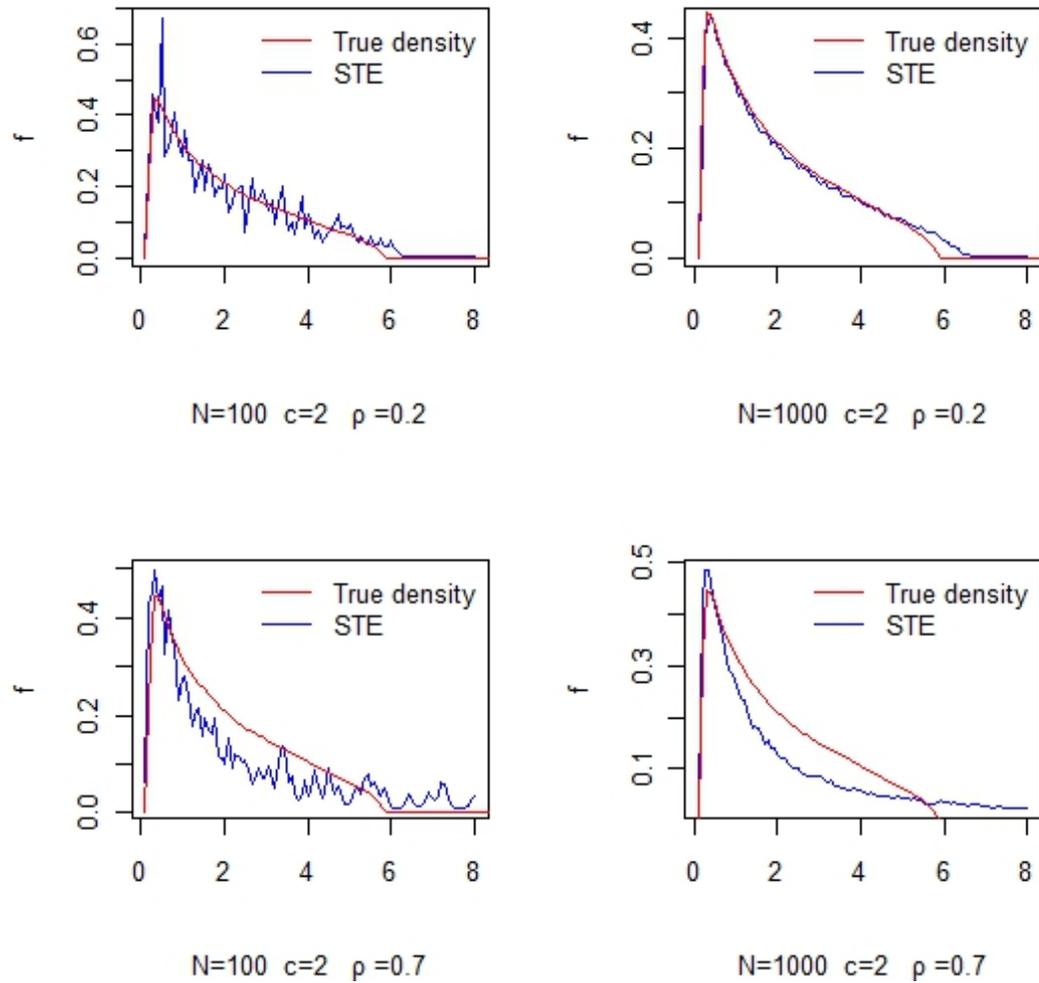


Figure 2: Estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec $c = 2$

Exemple 3

Un autre changement $c = 4$, pour les mêmes valeurs de ρ et N , nous permet de représenter les densités comme suite.

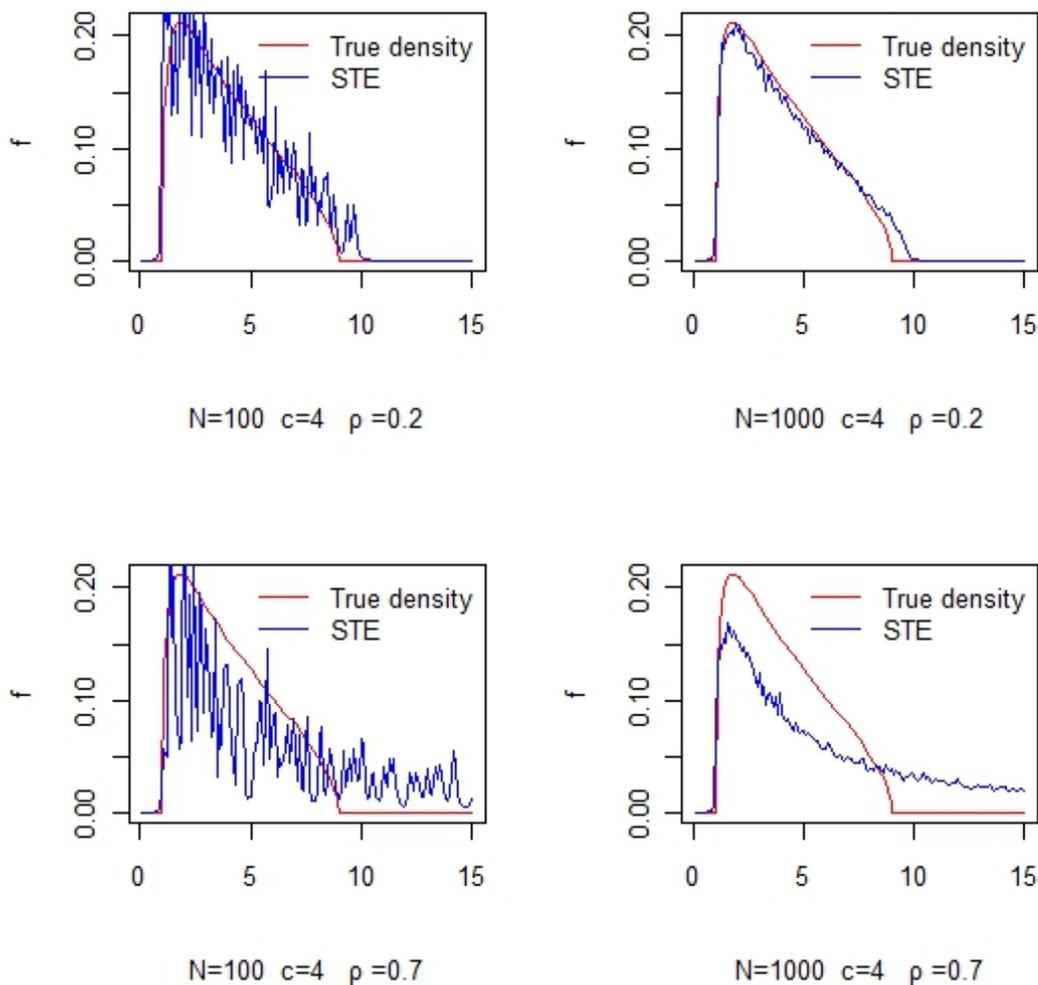


Figure 3: Estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec $c = 4$

Pour mesurer l'effet du choix des paramètres ρ , N et c , sur l'estimation de la densité des valeurs propres de matrices de covariance, on calcule les erreurs $L_1 = \int_0^\infty |f_N(x) - f(x)| dx$ et $L_2 = \left(\int_0^\infty (f_N(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Table 1: Erreurs L_1 et L_2 de l'estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec T_N matrice identité.

	$\rho = 0.2$				$\rho = 0.7$			
	$N = 100$		$N = 1000$		$N = 100$		$N = 1000$	
	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2
$c = 1$	0.0831	0.1041	0.0212	0.0302	0.0558	0.0762	0.0295	0.0362
$c = 2$	0.0537	0.0748	0.0470	0.0623	0.0430	0.0512	0.0400	0.0435
$c = 4$	0.0559	0.0814	0.0542	0.0787	0.0550	0.0732	0.0485	0.0611

D'après les valeurs d'erreurs, on remarque que pour une matrice de dimension $N = 100$ et dans les deux cas: $\rho = 0.2$ (faible dépendance) et $\rho = 0.7$ (forte dépendance) les plus faibles erreurs sont atteinte avec $c = 2$, tandis que pour la dimension $N = 1000$, elles sont atteinte avec $c = 1$.

4.1.2 2^{ème} cas: T_N matrice diagonale

Dans ce cas, on varie le nombre de valeurs propres de la matrice T_N de deux à quatre valeurs, ainsi qu'on augmente la dimension de la matrice B_N à $N = 500$ au lieu de $N = 100$ où la représentation graphique est mauvaise. On donne au paramètre d'autorégressif ρ les valeurs 0.2 et 0.7.

Exemple 1

La figure suivante représente la densité de la loi limite et son estimateur par la transformée de Stieltjes, avec T_N matrice de deux valeurs propres: 1.5 et 4, où H la limite de la fonction de répartition empirique F^{T_N} , prend les valeurs 0.3 et 0.7 respectivement avec $c = 0.1$.

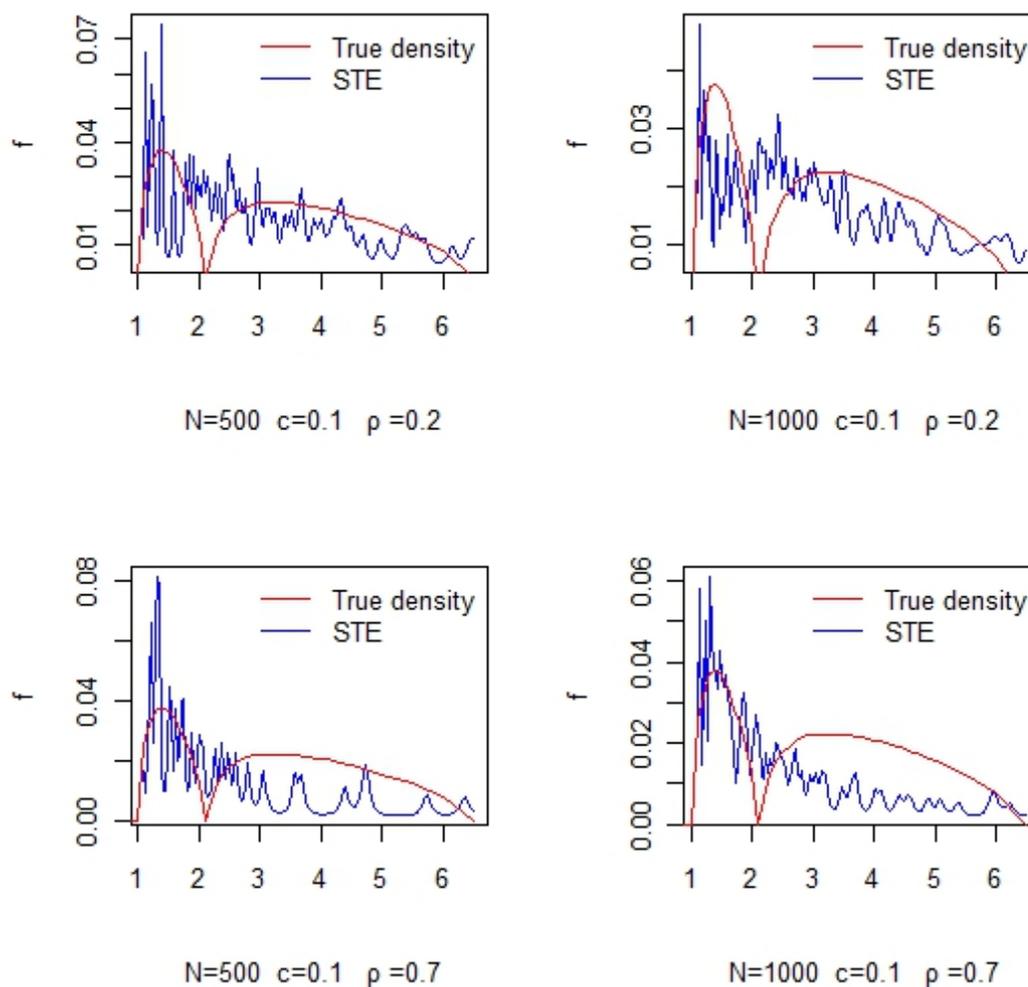


Figure 4: Estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec T_N matrice diagonale de deux valeurs propres 1.5 et 4

Exemple 2

Dans la présentation suivante la matrice T_N a trois valeurs propres: 1, 3 et 10 où H prend les valeurs: 0.2, 0.4 et 0.4 respectivement avec $c = 0.2$.

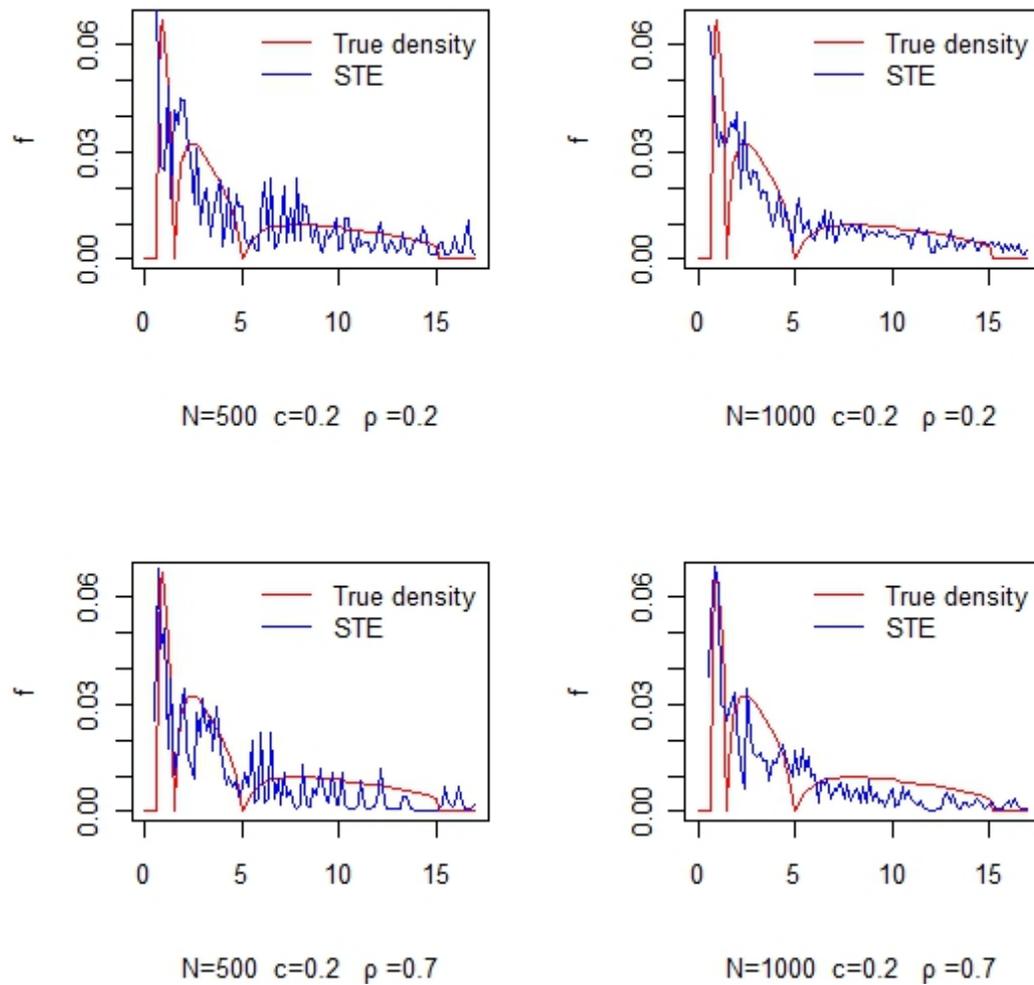


Figure 5: Estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec T_N matrice diagonale de trois valeurs propres 1, 3 et 10.

Exemple 3

On représente l'estimateur par la transformée de Stieltjes de la densité de la loi limite des valeurs propres d'une matrice de covariance avec T_N matrice diagonale de quatre valeurs propres 0.5, 2, 5 et 13 où H prend les valeurs: 0.3, 0.1, 0.2 et 0.4 respectivement avec $c = 0.2$.

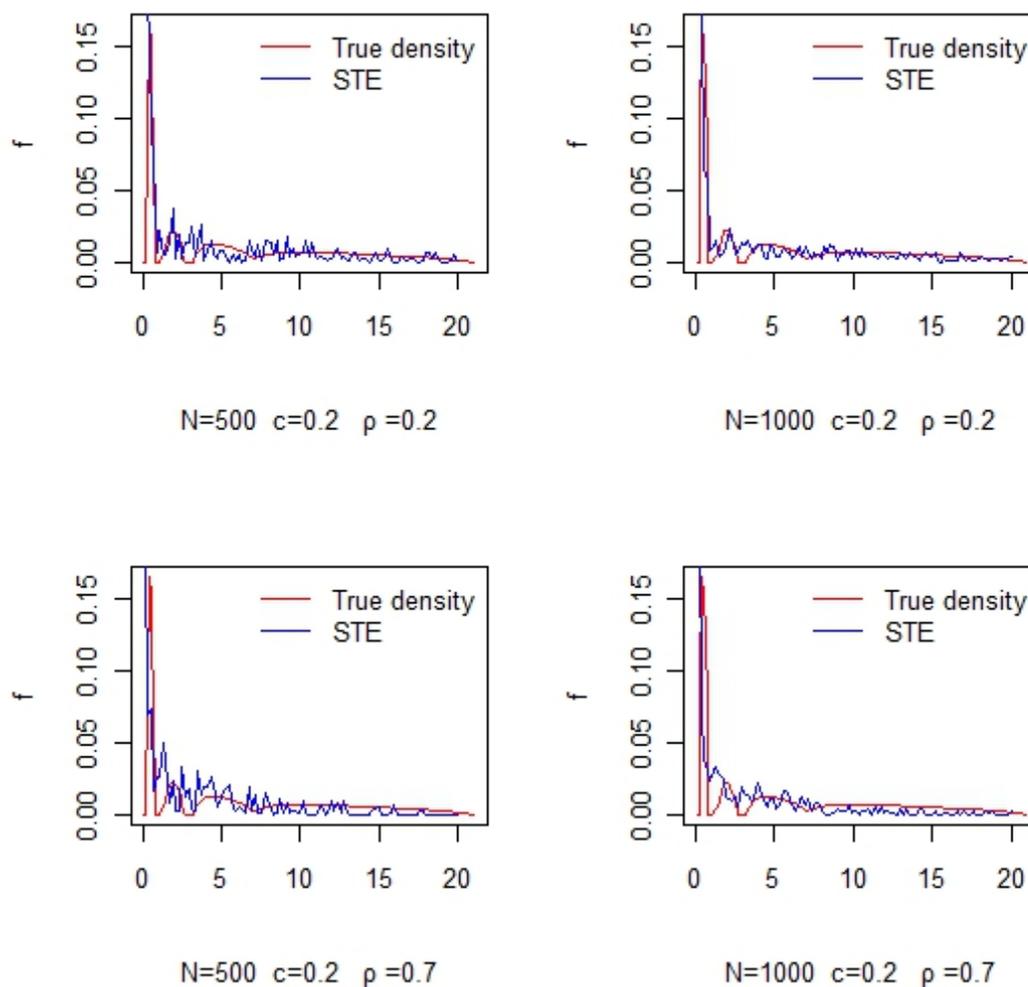


Figure 6: Estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec T_N matrice diagonale de quatre valeurs propres 0.5, 2, 5 et 13.

Les valeurs des erreurs L_1 et L_2 de l'estimateur de la densité résumées dans la Table 2 permettent de mesurer l'effet du changement de nombre de valeurs propres de la matrice T_N avec les différents choix du paramètre d'autorégressif ρ , la dimension N et la constante c .

Table 2: Erreurs L_1 et L_2 de l'estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes avec T_N matrice diagonale.

		$\rho = 0.2$				$\rho = 0.7$			
		$N = 500$		$N = 1000$		$N = 500$		$N = 1000$	
		L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2	L_1	L_2
2 v.p.	$c = 0.1$	0.0105	0.0134	0.0094	0.0113	0.0141	0.0170	0.0131	0.0157
3 v.p.	$c = 0.2$	0.0020	0.0161	0.0009	0.0148	0.0018	0.0151	0.0009	0.0145
4 v.p.	$c = 0.2$	0.0135	0.0391	0.0128	0.0387	0.0149	0.0400	0.0144	0.0411

On remarque essentiellement que les valeurs les plus faible des erreurs L_1 et L_2 sont atteintes dans le cas où la matrice T_N a trois valeurs propres, ainsi que dans ce cas, pour $N = 1000$, on a presque les mêmes valeurs d'erreurs pour $\rho = 0.2$ et $\rho = 0.7$.

4.2 Conclusion

Les simulations numériques ont montré qu'en général la performance des estimateurs qui est évaluée sur la base des erreurs L_1 et L_2 , dépend fortement du choix de la dimension c , paramètre AR ρ , de la taille de l'échantillon N et des valeurs propres de la matrice T_N . Nous pouvons observer que la variabilité des paramètres a un impact direct sur la stabilisation et la convergence des estimateurs. Le choix particulier des paramètres confirme une bonne performance des estimateurs et indique les valeurs optimales pour ces paramètres. Nous observons également l'influence marginal de la dimension c sur la convergence des estimateurs de la densité. Pour les valeurs de $c > 1$, pour les dépendances faibles et fortes ($\rho = 0.2$ et $\rho = 0.7$), les estimateurs se comportent bien à partir de $N = 100$. Cependant pour les petites valeurs ($c \leq 0.2$) nous obtenons une mauvaise représentation de la vraie densité pour $N = 100$, mais ça commence à se stabiliser à partir de $N = 500$. Le nombre et le choix des valeurs propres de T_N a un effet sur la forme des estimateurs ainsi que sur leurs performance.

Appendice

A.1 Preuves des lemmes auxiliaires

A.1.1 Borne de l'espérance

Preuve du lemme 2.2:

Calculons l'espérance de $\text{tr}(XX^t)^2$ en utilisant la relation (2.18)

$$E\left(\text{tr}(XX^t)^2\right) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N E(\mathcal{A}_{ii}^2) + \sum_{i \neq k} E(\mathcal{A}_{ik}^2) \right).$$

Commençons par

$$E(\mathcal{A}_{ii}^2) = E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2\right)^2 = \sum_{j=1}^n E(X_{ij})^4 + \sum_{j \neq l} E(X_{ij}X_{il})^2.$$

Par l'inégalité de Davydov (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq l}^n (E(X_{ij})^2 E(X_{il})^2 - 12 \|X_{ij}^2\|_3 \|X_{il}^2\|_3 \alpha_{l-j}^{\frac{1}{3}}) &\leq \sum_{j \neq l}^n E(X_{ij}X_{il})^2 \\ &\leq \sum_{j \neq l}^n (E(X_{ij})^2 E(X_{il})^2 + 12 \|X_{ij}^2\|_3 \|X_{il}^2\|_3 \alpha_{l-j}^{\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n E(X_{ij})^4 + 2 \sum_{l>j}^n (E(X_{ij})^2 E(X_{il})^2 - 12 \|X_{ij}^2\|_3 \|X_{il}^2\|_3 \alpha_{l-j}^{\frac{1}{3}}) &\leq E(\mathcal{A}_{ii}^2) \\ &\leq \sum_{j=1}^n E(X_{ij})^4 + 2 \sum_{l>j}^n (E(X_{ij})^2 E(X_{il})^2 + 12 \|X_{ij}^2\|_3 \|X_{il}^2\|_3 \alpha_{l-j}^{\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

Si on prend $r = l - j$

$$\begin{aligned} NnE(X_{11})^4 + Nn(n-1)E^2(X_{11})^2 - 24NE^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}} &\leq \sum_{i=1}^N E(\mathcal{A}_{ii}^2) \\ &\leq NnE(X_{11})^4 + Nn(n-1)E^2(X_{11})^2 + 24NE^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} E(\mathcal{A}_{ik}^2) &= \sum_{j=1}^n E(X_{ij}X_{kj})^2 + \sum_{j \neq l}^n E(X_{ij}X_{kj})(X_{il}X_{kl}) \\ &= \sum_{j=1}^n E(X_{ij})^2 E(X_{kj})^2 + \sum_{j \neq l}^n E(X_{ij}X_{il}) E(X_{kj}X_{kl}) \\ &= \sum_{j=1}^n E^2(X_{ij})^2 + \sum_{j \neq l}^n E^2(X_{ij}X_{il}). \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Davydov (1.5), on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j \neq l}^n E^2(X_{ij}X_{il}) \leq 2 \sum_{l>j} \left[E(X_{ij}) E(X_{il}) + 12 \|X_{ij}\|_3 \|X_{il}\|_3 \alpha_{l-j}^{\frac{1}{3}} \right]^2 \\ &\leq 288E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^3 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} N(N-1)nE^2(X_{11})^2 &\leq \sum_{i \neq k} E(\mathcal{A}_{ik}^2) \\ &\leq N(N-1)nE^2(X_{11})^2 + 288N(N-1)E^{\frac{4}{3}}|X_{11}|^3 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Par (4.2) et (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^2} [NnE(X_{11})^4 + Nn(N+n-2)E^2(X_{11})^2 - 24NE^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}}] \leq E(\text{tr}(XX^t)^2) \\ &\leq \frac{1}{N^2} [NnE(X_{11})^4 + Nn(N+n-2)E^2(X_{11})^2 + 24NE^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}} + 288N(N-1)E^{\frac{4}{3}}|X_{11}|^3 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{2}{3}}]. \end{aligned}$$

Comme les (X_{ij}) pour tout $i = 1, 2, \dots, N$ et $j = 1, 2, \dots, n$, vérifient la relation (2.2) d'autorégressif réel d'ordre un, alors elles sont fortement géométriquement mélangeantes (G.S.M); par suite $\alpha_r = O(\rho^r)$ où $0 < \rho < 1$, et la somme $\sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}}$ est finie. Alors

$$\begin{aligned} &\frac{K}{N} \{nE(X_{11})^4 + n(N+n-2)E^2(X_{11})^2 - E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6\} \leq E(\text{tr}(XX^t)^2) \\ &\leq \frac{K}{N} \{nE(X_{11})^4 + n(N+n-2)E^2(X_{11})^2 + E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6 + (N-1)E^{\frac{4}{3}}|X_{11}|^3\} \end{aligned}$$

où K est une constante positive ■

A.1.2 Borne de la variance

Preuve du lemme 2.3:

On veut montrer,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N E(\mathcal{A}_{ii}^4) &= E\left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2\right)^4\right) \leq K\{N^4 E^4 |X_{11}|^2 + N^3 [E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \\ &+ E |X_{11}|^2 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12}] + N^2 [E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} + E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12}]\}. \end{aligned}$$

On a,

$$E(\mathcal{A}_{ii}^4) \leq 2 \sum_{j=1}^n E(X_{ij})^8 + 4 \sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E(X_{ij} X_{il})^4 + 2 \sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E(X_{ij} X_{il} X_{iJ} X_{iL})^2. \quad (4.4)$$

Puisque,

$$\begin{aligned} E(\mathcal{A}_{ii}^4) &= E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2\right)^4 = E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^4 + \sum_{j \neq l} X_{ij}^2 X_{il}^2\right)^2 \\ &\leq 2 \left[E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^4\right)^2 + E\left(\sum_{j \neq l} X_{ij}^2 X_{il}^2\right)^2 \right] \\ &\leq 2 \left[E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^8 + \sum_{j \neq l} X_{ij}^4 X_{il}^4\right) + E\left(\sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}} X_{ij}^4 X_{il}^4 + \sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}} X_{ij}^2 X_{il}^2 X_{iJ}^2 X_{iL}^2\right) \right] \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^n E(X_{ij})^8 + 4 \sum_{j \neq l} E(X_{ij} X_{il})^4 + 2 \sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}} E(X_{ij} X_{il} X_{iJ} X_{iL})^2. \end{aligned}$$

Avec,

$$\sum_{j=1}^n E(X_{ij})^8 = n E |X_{11}|^8. \quad (4.5)$$

Par l'inégalité (1.5) et avec les notations précédentes, on obtient

$$\sum_{j \neq l} E(X_{ij} X_{il})^4 \leq n(n-1) E^2 |X_{11}|^4 + 24 E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{1}{3}}. \quad (4.6)$$

Pour le troisième terme de (4.4), pour une ligne (i) fixée, on peut écrire,

$$\sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E (X_{ij} X_{il} X_{iJ} X_{iL})^2 = \sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E (X_{1j} X_{1l} X_{1J} X_{1L})^2.$$

Comme les variables sont identiquement distribuées, on peut avoir

$$\begin{aligned} E (X_{1j} X_{1l} X_{1J} X_{1L})^2 &= E (X_{1j-(j-1)} X_{1l-(j-1)} X_{1J-(j-1)} X_{1L-(j-1)})^2 \\ &= E (X_{11} X_{1l-j+1} X_{1J-l+l-j+1} X_{1L-J+J-l+l-j+1})^2 \\ &= E (X_{11} X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2, \end{aligned}$$

où

$$r = l - j, \quad s = J - l, \quad t = L - J,$$

avec

$$r, s, t > 0 \quad \text{et} \quad r + s + t \leq n - 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \neq l \\ \neq \\ J \neq L}}^n E (X_{1j} X_{1l} X_{1J} X_{1L})^2 &= 2^3 \sum_{\substack{l > j \\ J > l \\ L > J}}^n E (X_{1j} X_{1l} X_{1J} X_{1L})^2 \\ &= 2^3 \sum_{r, s, t > 0} E (X_{11} X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

En utilisant l'inégalité (1.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} E (X_{11})^2 (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 &\leq E (X_{11})^2 E (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \\ &\quad + 12 \|X_{11}^2\|_3 \|X_{1r+1}^2 X_{1s+r+1}^2 X_{1t+s+r+1}^2\|_3 \alpha_r^{\frac{1}{3}} \\ &\leq E (X_{11})^2 E (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \\ &\quad + 12 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{1r+1} X_{1r+s+1}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{1t+s+r+1}|^{12} \alpha_r^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

$$E (X_{11})^2 (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \leq$$

$$E (X_{11})^2 E (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 + 12 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} \alpha_r^{\frac{1}{3}}.$$

Ou encore, en utilisant la majoration $E |X_{11}|^a \leq E^{\frac{1}{b}} |X_{11}|^{a \cdot b}$, avec $a, b > 1$,

$$E (X_{11})^2 (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \leq \quad (4.8)$$

$$E (X_{11})^2 E (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 + 12 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{24} \alpha_r^{\frac{1}{3}}.$$

Puisque,

$$E(X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 = E(X_{11}X_{1s+1}X_{1t+s+1})^2. \quad (4.9)$$

On a, ou bien

$$E(X_{11})^2(X_{1s+1}X_{1t+s+1})^2 \leq E(X_{11})^2E(X_{1s+1}X_{1t+s+1})^2 + 12\|X_{11}^2\|_3\|X_{1s+1}^2X_{1s+t+1}^2\|_3\alpha_s^{\frac{1}{3}},$$

avec

$$\begin{aligned} E(X_{1s+1}X_{1t+s+1})^2 &= E(X_{11}X_{1t+1})^2 \\ &\leq E(X_{11})^2E(X_{1t+1})^2 + 12\|X_{11}^2\|_3^2\alpha_t^{\frac{1}{3}} \\ &\leq E^2(X_{11})^2 + 12E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6\alpha_t^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(X_{11})^2(X_{1s+1}X_{1t+s+1})^2 &\leq E(X_{11})^2 \left[E^2(X_{11})^2 + 12E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6\alpha_t^{\frac{1}{3}} \right] \\ &\quad + 12E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6E^{\frac{1}{3}}|X_{1s+1}X_{1t+s+1}|^6\alpha_s^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

$$E(X_{11})^2(X_{1s+1}X_{1t+s+1})^2 \leq E^3(X_{11})^2 + 12E(X_{11})^2E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6\alpha_t^{\frac{1}{3}} + 12E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12}\alpha_s^{\frac{1}{3}}.$$

Ou bien, de la même façon

$$E(X_{11}X_{1s+1})^2(X_{1t+s+1})^2 \leq E^3(X_{11})^2 + 12E(X_{11})^2E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6\alpha_s^{\frac{1}{3}} + 12E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12}\alpha_t^{\frac{1}{3}}.$$

Donc (4.9) se majore ainsi

$$\begin{aligned} E(X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 &\leq 2E^3(X_{11})^2 + 12E(X_{11})^2E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6 \left(\alpha_t^{\frac{1}{3}} + \alpha_s^{\frac{1}{3}} \right) \\ &\quad + 12E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12} \left(\alpha_s^{\frac{1}{3}} + \alpha_t^{\frac{1}{3}} \right). \end{aligned}$$

$$E(X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 \leq 2E^3(X_{11})^2 + 12 \left[E(X_{11})^2E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^6 + E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12} \right] \left(\alpha_t^{\frac{1}{3}} + \alpha_s^{\frac{1}{3}} \right).$$

$$E (X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 \leq 2E^3 (X_{11})^2 + 24E^{\frac{1}{2}} |X_{11}|^{12} \left(\alpha_t^{\frac{1}{3}} + \alpha_s^{\frac{1}{3}} \right), \quad (4.11)$$

et (4.8) devient

$$\begin{aligned} E (X_{11})^2 (X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 &\leq 2E^4 |X_{11}|^2 \\ &+ 24E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \left(\alpha_t^{\frac{1}{3}} + \alpha_s^{\frac{1}{3}} \right) + 12E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{24} \alpha_r^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

De même

$$\begin{aligned} E (X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1})^2 (X_{1t+s+r+1})^2 &\leq 2E^4 |X_{11}|^2 \\ &+ 24E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \left(\alpha_r^{\frac{1}{3}} + \alpha_s^{\frac{1}{3}} \right) + 12E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{24} \alpha_t^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

On a aussi, par l'inégalité (1.5), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et la relation (4.10),

$$\begin{aligned} E (X_{11}X_{1r+1})^2 (X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 &\leq E (X_{11}X_{1r+1})^2 E (X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 + 12 \|X_{11}^2 X_{1r+1}^2\|_3^2 \alpha_s^{\frac{1}{3}} \\ &\leq E (X_{11}X_{1r+1})^2 E (X_{11}X_{1t+1})^2 + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}X_{1r+1}|^6 \alpha_s^{\frac{1}{3}} \\ &\leq \left[E^2 (X_{11})^2 + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6 \alpha_r^{\frac{1}{3}} \right] \left[E^2 (X_{11})^2 + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6 \alpha_t^{\frac{1}{3}} \right] \\ &\quad + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \alpha_s^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E (X_{11}X_{1r+1})^2 (X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 &\leq E^4 (X_{11})^2 \\ &\quad + 12E^2 (X_{11})^2 E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6 \left(\alpha_r^{\frac{1}{3}} + \alpha_t^{\frac{1}{3}} \right) \\ &\quad + 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \alpha_s^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E (X_{11}X_{1r+1})^2 (X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})^2 &\leq E^4 (X_{11})^2 + 12E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \left(\alpha_r^{\frac{1}{3}} + \alpha_t^{\frac{1}{3}} \right) \\ &\quad + 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \alpha_s^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Majorons, maintenant les trois sommes

$$\sum_{s,t \leq r} \alpha_s^{\frac{1}{3}} \quad , \quad \sum_{s,t \leq r} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \quad , \quad \text{et} \quad \sum_{r,t \leq s} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} .$$

On a,

$$\sum_{s,t \leq r} \alpha_s^{\frac{1}{3}} = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{t,s=1}^r \alpha_s^{\frac{1}{3}} \leq 2(n-1) \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s^{\frac{1}{3}} \leq 2n \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^{\frac{1}{6}} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\frac{1}{6}} ,$$

donc

$$\sum_{s,t \leq r} \alpha_s^{\frac{1}{3}} \leq 2n \left(\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\frac{1}{6}} \right)^2 . \quad (4.15)$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} \sum_{s,t \leq r} \alpha_r^{\frac{1}{3}} &= \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{t,s=1}^r \alpha_r^{\frac{1}{3}} \leq 2(n-1) \sum_{r=1}^{n-1} r \alpha_r^{\frac{1}{3}} \\ &\leq 2(n-1) \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=u}^{n-1} \alpha_v^{\frac{1}{3}} \leq 2n \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_u^{\frac{1}{6}} \sum_{v=u}^{\infty} \alpha_v^{\frac{1}{6}} , \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sum_{s,t \leq r} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \leq 2n \left(\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^{\frac{1}{6}} \right)^2 . \quad (4.16)$$

Puisque $\alpha_r < 1$, on obtient

$$\sum_{r,t \leq s} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} \leq \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r,t=1}^{\infty} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} ,$$

d'où

$$\sum_{r,t \leq s} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} \leq 2n \left(\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^{\frac{1}{6}} \right)^2 . \quad (4.17)$$

A l'aide des inégalités (4.12)-(4.14) et les majorations des sommes (4.15)-(4.17), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{r,s,t > 0} E(X_{11} X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 &\leq \sum_{s,t \leq r} E(X_{11})^2 (X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \\ &\quad + \sum_{r,s \leq t} E(X_{11} X_{1r+1} X_{1s+r+1})^2 (X_{1t+s+r+1})^2 \\ &\quad + \sum_{r,t \leq s} E(X_{11} X_{1r+1})^2 (X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r,s,t>0} E (X_{11} X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \leq 5 \sum_{r,s,t>0} E^4 (X_{11})^2 \\
& + 24E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \left\{ \sum_{s,t \leq r} \left(\alpha_s^{\frac{1}{3}} + \alpha_t^{\frac{1}{3}} \right) + \sum_{r,s \leq t} \left(\alpha_r^{\frac{1}{3}} + \alpha_s^{\frac{1}{3}} \right) \right\} + 12E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{24} \left\{ \sum_{s,t \leq r} \alpha_r^{\frac{1}{3}} + \sum_{r,s \leq t} \alpha_t^{\frac{1}{3}} \right\} \\
& + 12E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \sum_{r,t \leq s} \left(\alpha_r^{\frac{1}{3}} + \alpha_t^{\frac{1}{3}} \right) + 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \sum_{r,t \leq s} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \sum_{r,t \leq s} \alpha_s^{\frac{1}{3}}, \\
& \sum_{r,s,t>0} E (X_{11} X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \leq 5 \sum_{r,s,t>0} E^4 (X_{11})^2 \\
& + 48E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \sum_{s,t \leq r} \alpha_s^{\frac{1}{3}} + 24E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{24} \sum_{s,t \leq r} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \\
& + 24E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \sum_{r,t \leq s} \alpha_r^{\frac{1}{3}} + 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \sum_{r,t \leq s} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \alpha_t^{\frac{1}{3}} + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \sum_{r,t \leq s} \alpha_s^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r,s,t>0} E (X_{11} X_{1r+1} X_{1s+r+1} X_{1t+s+r+1})^2 \leq 5n^3 E^4 (X_{11})^2 \\
& + [72E^2 |X_{11}|^2 E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6 + 48E |X_{11}|^2 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12}] 2n^2 \left(\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{\frac{1}{3}} \right) \quad (4.18) \\
& + [24E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} + 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} \\
& + 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6] 2n \left(\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^{\frac{1}{6}} \right)^2,
\end{aligned}$$

avec (4.5), (4.6) et (4.7), la relation (4.4) devient

$$\begin{aligned}
E \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ii}^4 \right) & \leq K \{ N^4 E^4 (X_{11})^2 + N^3 [E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 + E |X_{11}|^2 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12}] \\
& + N^2 [E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} + E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12}] \},
\end{aligned}$$

où K est une constante positive ■

Preuve du lemme 2.4:

On veut montrer,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq k} E (\mathcal{A}_{ik}^4) & = E \left(\sum_{i \neq k} \left(\sum_{j=1}^n X_{ij} X_{kj} \right)^4 \right) \leq K \{ N^4 E^4 |X_{11}|^2 + \\
& N^3 [E^{\frac{1}{2}} |X_{11}|^4 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12} + E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6] \}.
\end{aligned}$$

On majore d'abord

$$\begin{aligned}
E(\mathcal{A}_{ik}^4) &= E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}X_{kj}\right)^4 = E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2X_{kj}^2 + \sum_{j \neq l}^n (X_{ij}X_{kj})(X_{il}X_{kl})\right)^2 \\
&\leq 2E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^2X_{kj}^2\right)^2 + 2E\left(\sum_{j \neq l}^n (X_{ij}X_{kj}X_{il}X_{kl})\right)^2 \\
&\leq 2E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}^4X_{kj}^4 + \sum_{j \neq l}^n X_{ij}^2X_{kj}^2X_{il}^2X_{kl}^2\right) \\
&\quad + 2E\left(\sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n X_{ij}^2X_{kj}^2X_{il}^2X_{kl}^2 + \sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n (X_{ij}X_{kj}X_{il}X_{kl})(X_{iJ}X_{kJ}X_{iL}X_{kL})\right) \\
&\leq 2\left\{\sum_{j=1}^n E(X_{ij}^4X_{kj}^4) + 2\sum_{j \neq l}^n E(X_{ij}^2X_{il}^2)(X_{kj}^2X_{kl}^2)\right. \\
&\quad \left.+ \sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E(X_{ij}X_{il}X_{iJ}X_{iL})(X_{kj}X_{kl}X_{kJ}X_{kL})\right\} \\
&\leq 2\sum_{j=1}^n E(X_{ij}^4)E(X_{kj}^4) + 4\sum_{j \neq l}^n E(X_{ij}^2X_{il}^2)E(X_{kj}^2X_{kl}^2) \\
&\quad + 2\sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E(X_{ij}X_{il}X_{iJ}X_{iL})E(X_{kj}X_{kl}X_{kJ}X_{kL}),
\end{aligned}$$

donc

$$E\left(\sum_{j=1}^n X_{ij}X_{kj}\right)^4 \leq 2\sum_{j=1}^n E^2(X_{ij})^4 + 4\sum_{j \neq l}^n E^2(X_{ij}X_{il})^2 + 2\sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E^2(X_{ij}X_{il}X_{iJ}X_{iL}). \quad (4.19)$$

Avec

$$\sum_{j=1}^n E^2(X_{ij})^4 = nE^2(X_{11})^4. \quad (4.20)$$

Par l'inégalité (1.5), on a

$$\begin{aligned}
E(X_{ij}X_{il})^2 &\leq E(X_{ij})^2E(X_{il})^2 + 12\|X_{ij}^2\|_3\|X_{il}^2\|_3\alpha_{l-j}^{\frac{1}{3}} \\
&\leq E^2(X_{ij})^2 + 12E^{\frac{2}{3}}|X_{ij}|^6\alpha_{l-j}^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Et

$$E^2 (X_{ij}X_{il})^2 \leq 2E^4 (X_{ij})^2 + 288E^{\frac{4}{3}} |X_{ij}|^6 \alpha_{l-j}^{\frac{2}{3}},$$

donc

$$\sum_{j \neq l}^n E^2 (X_{ij}X_{il})^2 \leq 2n(n-1) E^4 (X_{11})^2 + 576E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \sum_{l>j} \alpha_{l-j}^{\frac{2}{3}},$$

avec $r = l - j$, on a

$$\sum_{j \neq l}^n E^2 (X_{ij}X_{il})^2 \leq 2n(n-1) E^4 (X_{11})^2 + 576E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \sum_{r>0} \alpha_r^{\frac{2}{3}}. \quad (4.21)$$

Pour le dernier terme de (4.19)

$$\sum_{\substack{j \neq l \\ \neq \\ J \neq L}}^n E^2 (X_{ij}X_{il}X_{iJ}X_{iL})$$

on a, avec les notations précédentes

$$E (X_{ij}X_{il}X_{iJ}X_{iL}) = E (X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}),$$

par l'inégalité (1.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$\begin{aligned} & |E (X_{11}) (X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) - E (X_{11}) E (X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})| \leq \\ & + 12 \|X_{11}\|_3 \|X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}\|_3 \alpha_r^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E (X_{11}) (X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1})| & \leq 12E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^3 E^{\frac{1}{3}} |X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}|^3 \alpha_r^{\frac{1}{3}} \\ & \leq 12E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^3 E^{\frac{1}{6}} |X_{1r+1}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}|^6 \alpha_r^{\frac{1}{3}} \\ & \leq 12E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^3 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{12} \alpha_r^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

donc

$$E^2 (X_{11}) (X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) \leq 144E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^3 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12} \alpha_r^{\frac{2}{3}}. \quad (4.22)$$

De même

$$E^2 (X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1}) (X_{1t+s+r+1}) \leq 144E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^3 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12} \alpha_t^{\frac{2}{3}}. \quad (4.23)$$

On a aussi,

$$|E(X_{11}X_{1r+1}) - E(X_{11})E(X_{1r+1})| \leq 12 \|X_{11}\|_3 \|X_{1r+1}\|_3 \alpha_r^{\frac{1}{3}},$$

$$|E(X_{11}X_{1r+1})| \leq 12E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^3 \alpha_r^{\frac{1}{3}},$$

$$E^2(X_{11}X_{1r+1}) \leq 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^3 \alpha_r^{\frac{2}{3}}. \quad (4.24)$$

De même

$$E^2(X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) \leq 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^3 \alpha_t^{\frac{2}{3}}. \quad (4.25a)$$

Si

$$E(X_1X_{r+1})(X_{s+r+1}X_{t+s+r+1}) \geq 0.$$

On utilise l'inégalité (1.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour montrer

$$\begin{aligned} E(X_1X_{r+1})(X_{s+r+1}X_{t+s+r+1}) &\leq E(X_{11}X_{1r+1})E(X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) \\ &\quad + 12 \|X_{11}X_{1r+1}\|_3 \|X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}\|_3 \alpha_s^{\frac{1}{3}} \\ &\leq E(X_{11}X_{1r+1})E(X_{11}X_{1t+1}) + 12 \|X_{11}X_{1r+1}\|_3^2 \alpha_s^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$E^2(X_1X_{r+1})(X_{s+r+1}X_{t+s+r+1}) \leq 2[E^2(X_{11}X_{1r+1})E^2(X_{11}X_{1t+1}) + 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \alpha_s^{\frac{2}{3}}],$$

par (4.24) et (4.25a), on obtient

$$E^2(X_{11}X_{1r+1})(X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) \leq 41472E^{\frac{8}{3}} |X_{11}|^3 \alpha_r^{\frac{2}{3}} \alpha_t^{\frac{2}{3}} + 288E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \alpha_s^{\frac{2}{3}}. \quad (4.26)$$

Si

$$E(X_1X_{r+1})(X_{s+r+1}X_{t+s+r+1}) \leq 0.$$

Par l'inégalité (1.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} E(X_1X_{r+1})(X_{s+r+1}X_{t+s+r+1}) &\geq E(X_{11}X_{1r+1})E(X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) \\ &\quad - 12 \|X_{11}X_{1r+1}\|_3 \|X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}\|_3 \alpha_s^{\frac{1}{3}} \\ &\geq E(X_{11}X_{1r+1})E(X_{11}X_{1t+1}) - 12 \|X_{11}X_{1r+1}\|_3^2 \alpha_s^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^2(X_1X_{r+1})(X_{s+r+1}X_{t+s+r+1}) &\leq 2[E^2(X_{11}X_{1r+1})E^2(X_{11}X_{1t+1}) + 144 \|X_{11}X_{1r+1}\|_3^4 \alpha_s^{\frac{2}{3}}] \\ &\leq 2[E^2(X_{11}X_{1r+1})E^2(X_{11}X_{1t+1}) + 144E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 \alpha_s^{\frac{2}{3}}], \end{aligned}$$

par (4.24) et (4.25a) on retrouve (4.26).

Comme on a

$$\sum_{\substack{j \neq l \\ J \neq L}}^n E^2(X_{ij}X_{il}X_{iJ}X_{iL}) = 2^3 \sum_{r,s,t>0}^n E^2(X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}), \quad (4.27)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{r,s,t>0}^n E^2(X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) &\leq \sum_{s,t \leq r} E^2(X_{11})(X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) \\ &+ \sum_{r,s \leq t} E^2(X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1})(X_{1t+s+r+1}) \\ &+ \sum_{r,t \leq s} E^2(X_{11}X_{1r+1})(X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}), \end{aligned}$$

avec les inégalités (4.22), (4.23) et (4.26), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{r,s,t>0}^n E^2(X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) &\leq 144E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^3 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12} \left(\sum_{s,t \leq r} \alpha_r^{\frac{2}{3}} + \sum_{s,r \leq t} \alpha_t^{\frac{2}{3}} \right) \\ &+ 41472E^{\frac{8}{3}}|X_{11}|^3 \sum_{r,t \leq s} \alpha_r^{\frac{2}{3}} \alpha_t^{\frac{2}{3}} + 288E^{\frac{4}{3}}|X_{11}|^6 \sum_{r,t \leq s} \alpha_s^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

et par (4.16) et (4.17), avec K une constante positive, on a

$$\sum_{r,s,t>0}^n E^2(X_{11}X_{1r+1}X_{1s+r+1}X_{1t+s+r+1}) \leq K[E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^3 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12} + E^{\frac{4}{3}}|X_{11}|^6]n \left(\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^{\frac{1}{3}} \right)^2. \quad (4.28)$$

Par conséquent, la somme de (4.19) se donne à l'aide de (4.20), (4.21), (4.27) et (4.28)

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k} E \left(\sum_{j=1}^n X_{ij}X_{kj} \right)^4 &\leq K \{ nN(N-1)E^2(X_{11})^4 + n(n-1)N(N-1)E^4(X_{11})^2 \\ &+ nN(N-1)(E^{\frac{2}{3}}|X_{11}|^3 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12} + E^{\frac{4}{3}}|X_{11}|^6) \}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k} E(\mathcal{A}_{ik}^4) &= E \left(\sum_{i \neq k} \left(\sum_{j=1}^n X_{ij}X_{kj} \right)^4 \right) \leq K \{ N^4 E^4 |X_{11}|^2 + \\ &N^3 [E^{\frac{1}{2}}|X_{11}|^4 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}}|X_{11}|^{12} + E^{\frac{4}{3}}|X_{11}|^6] \} \blacksquare \end{aligned} \quad (4.29)$$

Preuve du lemme 2.5:

En utilisant les mêmes techniques de démonstration des Lemmes 2.3, 2.4, on arrive à montrer que

$$E \left(\sum_i \mathcal{A}_{ii}^2 \sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) - E \left(\sum_i \mathcal{A}_{ii}^2 \right) \left(\sum_{i \neq k} \mathcal{A}_{ik}^2 \right) \leq K \{ N^4 E |X_{11}|^4 E^2 |X_{11}|^2 + N^3 [E^{\frac{4}{3}} |X_{11}|^6 + E |X_{11}|^2 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^6 E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{12} + E |X_{11}|^2 E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^9] + N^2 [E^{\frac{1}{3}} |X_{11}|^{15} E |X_{11}|^3 + E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^{12} + E^{\frac{5}{12}} |X_{11}|^{12} E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{18} + E^{\frac{1}{6}} |X_{11}|^{24} E^{\frac{2}{3}} |X_{11}|^6] \}.$$

A.2 Lemmes utiles

Soit A une matrice rectangulaire, on note le rang de A par $rg(A)$, pour l'entier positif $i \leq rg(A)$, S_i^A est la plus grande valeur singulière de A , et pour $i > rg(A)$, S_i^A est nulle.

On note $\sqrt{AA^*}$ la matrice obtenue en remplaçant les valeurs propres de la décomposition spectrale AA^* par leurs racines carrées.

Si A est une matrice carrée avec des valeurs propres réelles, on note λ_i^A la $i^{\text{ième}}$ valeur propre de A , et $tr(A)$ la trace de A .

Si $q \in \mathbb{C}^N$, sa norme euclidienne sera notée $\|q\|$, et la norme spectrale de la matrice A sera notée $\|A\|$, ($\|A\| = S_1^A = \sqrt{\lambda_1^{AA^*}} = \lambda_1^{\sqrt{AA^*}}$).

La mesure de l'intervalle J introduite par la fonction de répartition empirique G sera notée $G\{J\}$.

Lemme 4.1 [19]

Soient m, n deux entiers arbitraires non négatifs, et A, B deux matrices rectangulaires de même dimension, on a la relation des valeurs singulières

$$S_{m+n+1}^{A+B} \leq S_{m+1}^A + S_{n+1}^B.$$

Pour A, B deux matrices rectangulaires telles que AB soit défini, on a

$$S_{m+n+1}^{AB} \leq S_{m+1}^A S_{n+1}^B.$$

A l'aide du lemme suivant, ces inégalités peuvent être exprimées en termes de fonctions de répartitions empiriques.

Lemme 4.2 [38] Soient x, y deux nombres arbitraires non négatifs et A, B deux matrices rectangulaires de même dimension, alors on a

$$F^{\sqrt{(A+B)(A+B)^*}} \{x + y, \infty\} \leq F^{\sqrt{AA^*}} \{x, \infty\} + F^{\sqrt{BB^*}} \{y, \infty\}.$$

Si en plus, A et B sont deux matrices carrées, alors

$$F^{\sqrt{(AB)(AB)^*}} \{xy, \infty\} \leq F^{\sqrt{AA^*}} \{x, \infty\} + F^{\sqrt{BB^*}} \{y, \infty\}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, sa norme est $\|f\| = \sup |f(x)|$.

Lemme 4.3 [49] Soient A, B deux matrices de dimension (N, n) , alors

$$\left\| F^{AA^*} - F^{BB^*} \right\| \leq \frac{1}{N} \text{rg}(A - B).$$

Ce résultat a comme extension le lemme suivant

Lemme 4.4 [38] Soient A, B deux matrices hermitiennes de dimension (N, N) , alors

$$\left\| F^A - F^B \right\| \leq \frac{1}{N} \text{rg}(A - B).$$

Soient A une matrice hermitienne de dimension (N, N) , Q et \bar{Q} des matrices de dimension (N, n) et T, \bar{T} des matrices hermitiennes de dimension (n, n) . Alors

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left\| F^{A+QTQ^*} - F^{A+\bar{Q}T\bar{Q}^*} \right\| \leq \frac{2}{N} \text{rg}(Q - \bar{Q}). \\ \text{b)} \quad & \left\| F^{A+QTQ^*} - F^{A+Q\bar{T}Q^*} \right\| \leq \frac{1}{N} \text{rg}(T - \bar{T}). \end{aligned}$$

Le lemme suivant utilise le fait que pour une matrice B de dimension (N, N) , $\tau \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{C}^N$ pour lesquels B et $(B + \tau qq^*)$ sont inversibles,

$$q^* (B + \tau qq^*)^{-1} = \frac{1}{1 + (\tau q^* B^{-1} q)} q^* B^{-1}.$$

Lemme 4.5 [38] Soient $z \in \mathbb{C}^+$ avec $v = \text{Im } z$, A, B deux matrices de dimension (N, N) avec B hermitienne, $\tau \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{C}^N$. Alors

$$\left| \text{tr} \left[(B - zI)^{-1} - (B + \tau qq^* - zI)^{-1} \right] A \right| \leq \frac{\|A\|}{v}.$$

Lemme 4.6 [38] Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+$ tels que $\max(\text{Im } z_1, \text{Im } z_2) \geq v > 0$, A, B deux matrices de dimension (N, N) avec A hermitienne, $q \in \mathbb{C}^N$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \text{tr} B \left[(A - z_1 I)^{-1} - (A - z_2 I)^{-1} \right] \right| & \leq |z_1 - z_2| N \|B\| \frac{1}{v^2}. \\ \left| q^* B (A - z_1 I)^{-1} q - q^* B (A - z_2 I)^{-1} q \right| & \leq |z_1 - z_2| \|q\|^2 \|B\| \frac{1}{v^2}. \end{aligned}$$

Lemme 4.7 [38] Soit $\{F_N\}_{N=1}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $F_N \neq 0$ et n'admettant aucune sous suite convergente vaguement vers 0. Alors

$$\exists m > 0 \quad \text{tel que } \inf_N F_N \{[-m, m]\} > 0.$$

Conclusion générale

Les propriétés locales et globales du spectre de matrices de covariance ont été conjecturées comme étant universelles mais cette universalité pour des classes de matrices assez générales n'a été atteinte que récemment. Les premiers théorèmes d'universalité sont ceux de Wigner et de Marchenko-Pastur concernant la convergence de la mesure spectrale empirique. Ils ont été obtenus directement ou améliorés rapidement pour des matrices très générales et sont basés sur la méthode des moments ou la transformée de Stieltjes.

Notre premier résultat sur le modèle des matrices de covariance du processus AR(1) montre la difficulté d'établir des résultats similaires pour un ordre plus élevé de l'autorégressif ainsi que pour les processus autorégressifs fonctionnels et les processus non linéaires, ce qui mène à dire qu'il faut procéder autrement pour établir la convergence de la fonction de répartition empiriques des valeurs propres de ce type de matrice aléatoire.

Les travaux récents sur la distribution spectrale limite apportent une avance énorme à la recherche dans le domaine de la théorie de grandes matrices aléatoires comme le montre le deuxième résultat, d'où provient l'idée d'utiliser ces résultats dans d'autres pistes, bien qu'on s'intéresse beaucoup plus dans les futures travaux à la localisation et la séparation des valeurs propres des matrices des modèles étudiées ainsi qu'à l'estimation de la densité spectrale de ces matrices par des méthodes autre que celle de la transformée de Stieltjes.

Bibliographie

- [1] Anderson. G, Guionnet. A and Zeitouni. O, “An introduction to random matrices”. Volume 118 de Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] Bai. Z. D, Silverstein. J. W, “Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices”. 2nd Edition, Springer, 2010.
- [3] Bai. Z. D, Silverstein. J. W, “Exact Separation of Eigenvalues of Large Dimensional Sample Covariance Matrices”. The Annals of Probability, 27(3), pp. 1536-1555, 1999.
- [4] Banna. M, “Limiting spectral distribution of Gram matrices associated with functional of β -mixing processes”. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 433(1), 416-433, 2016.
- [5] Banna. M and Merlevède. F, “Limiting Spectral Distribution of Large Sample Covariance Matrices Associated with a Class of Stationary Processes”. Journal of Theoretical Probability (28), 745–783, 2015.
- [6] Banna. M; Merlevède. F and Peligrad. M, “On the limiting spectral distribution for a large class of symmetric random matrices with correlated entries”. Stochastic Processes and Their Applications. 2700-2726, 2015.
- [7] Bhattacharjee. M and Bose. A, “Large sample behavior of high dimensional autocovariance matrices ”. Ann. Statist; 44 (2016), pp. 598-628.
- [8] Bhattacharjee. M and Bose. A, “Matrix polynomial generalizations of the sample variance-covariance matrix when $p/n \rightarrow 0$. Random Matrices: Theory and Applications, 5, 4, 1650014 (41 pages), 2016.
- [9] Bhattacharjee. M and Bose. A, “Joint convergence of sample autocovariance matrices when $p/n \rightarrow 0$ with application”. Annals of Statistics, 47 (6): 3470-3503, 2019.
- [10] Billingsley. P, “Convergence of Probability Measures”. NewYork: Wiley 1968.
- [11] Bosq. D, “Linear Processes in Function spaces. Theory and Applications”. Lecture Notes in Statistics 149 Springer 2000.
- [12] Bosq. D, “Nonparametric Statistics for Stochastic Processes. Estimation and Prediction”. Lecture Notes in Statistics 110 Springer, 1998.

- [13] Bosq. D, Lecoutre. J.P, “Théorie de l’estimation fonctionnelle”. *Economica*, 1987.
- [14] Boutet de Monvel. A and Khorunzhy. A, “Limit theorems for random matrices with correlated entries”. *Markov Process. Related Fields* 4, (2)175–197. 1998.
- [15] Boutet de Monvel. A and Khorunzhy. A, “On the Norm and Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices”. *Ann. Probab.* 27 913-944, 1999.
- [16] Chafaï. D, “Introduction aux matrices aléatoires”. Journées X-UPS, 15–16 avril 2013.
- [17] Davydov. Y, “The invariance principle for stationary processes”. *Theory Probab. Apl.* 15 (1970), 487-498.
- [18] Dedecker. J and Merlevède. F, “Necessary and sufficient conditions for the conditional central limit theorem”. *Annals of Probability.* 30(3):1044 1081, 2002.
- [19] Fan. K, “Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators”. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 37 760-766, 1951.
- [20] Grenander. U and Silverstein. J. W, “Spectral analysis of networks with random topologies”. *SIAM J. Appl. Math.* 32(2):499-519, 1977.
- [21] Jonsson. D, “Some limit theorems for the eigenvalues of a sample covariance matrix”. *J. Multivariate Anal.* 12: 1-38. 1982.
- [22] Kammoun. A and Alouini. M, “No Eigenvalues Outside the Limiting Support of Generally Correlated Gaussian Matrices”. *IEEE Transactions on information theory*, Vol. 62, No. 7, 4312-4326, 2016.
- [23] Khettab. Z and Mourid. T, “Eigenvalues empirical distribution of covariance matrices of AR processes. A simulation study”. *Annales de l’ISUP*, 2016.
- [24] Khettab. Z, “Limiting spectral distribution of large dimensional random matrices of linear processes”. *Metodoloski zvezki*, 17 (2), 67–77, 2020.
- [25] Krishna. B, Athreya and G. Sastry. Pantula, “Mixing Properties of Harris Chains and Autoregressive Processes”. *Journal of Applied Probability*, Vol. 23, No. 4 (Dec., 1986), pp. 880-892.
- [26] Marcenko. V. A, Pastur. L. A, “Distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices”. *Mat. SB (N. S.)*, 72 (114), 507-536. 1967.
- [27] Mehta. M, “Random Matrices”. 2nd edition (Academic, San Diego, 1991).
- [28] Mehta. M, “Random Matrices”. 3d edition, Elsevier 2004.
- [29] Mehta. M, “Random matrices”. Volume 142 de Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition, 2004.

- [30] Merlevede and Peligrad, “On the empirical spectral distribution for matrices with long memory and independent rows”. *Stochastic Processes and their Applications*; 126 (2016), pp. 2734-2760.
- [31] Mokkaedem. A, “Propriétés de mélange des processus autorégressifs polynomiaux”. *Annales de l’I.H.P,section B*, tome 26, n° 2(1990), p 219-260.
- [32] Najim. J, and Hachem. W, Kharouf. M, and Silverstein. J .W, “A CLT for Information-theoretic statistics of non-centered Gram random matrices”. *Random Matrices Theory and its Applications* 1(2) 2012, pp. 1150010.
- [33] Parzen. E, “On the estimation of a probability density and the mode”. *Ann. Math. Statist.*, 33:1965 1976, 1962.
- [34] Pastur. L, “The spectrum of random matrices”. *Teoret. Mat. Fiz*, 10(1):102–112, 1972.
- [35] Pastur. L et Shcherbina. M, “Eigenvalue distribution of large random matrices”. Volume 171 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [36] Rosamblatt. M, “A central limite theorem and a strong mixing condition”. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 42 (1956), 43-47.
- [37] Silverstein. J .W, “The Stieltjes transform and its role in eigenvalue behavior of large dimensional random matrices”. *Random Random Matrices: Theory and Applications*, Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore 18, World Scientific, Singapore 2009, pp. 1-25.
- [38] Silverstein. J .W and Bai. Z. D, “On the empirical distribution of eigenvalues of a class of large dimensional random matrices”. *Journal of Multivariate Analysis*, 54(2), pp.175-192, 1995.
- [39] Silverstein. J .W and Bai. Z. D, “No eigenvalues outside the support of the limiting spectral distribution of large dimensional random matrices”. *Annals of Probability*. 26(1) pp. 316-345, 1998.
- [40] Silverstein .J. W and Dozier.R. B, “On the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional information-plus-noise-type matrices”. *Journal of Multivariate Analysis.*, 98(4) (2007), pp. 678-694.
- [41] Silverstein. J. W and Bai .Z. D, “No Eigenvalues Outside the Support of the Limiting Spectral Distribution of Information-Plus-Noise Type Matrices”. *Random Matrices: Theory and Applications* 1(1) 2012, pp. 1150004.
- [42] Silverstein. J. W and Choi. S. I, “Analysis of the limiting spectral distribution of large dimensional Random Matrices”. *Journal of Multivariate Analysis*, 54(2), pp.295-309, 1995.

- [43] Silverstein .J. W and Bai, Couillet. R, Debbah. M, “Eigen-inference for Energy Estimation of Multiple Sources”. *IEEE Transactions on Information Theory* 57(4) (2011), pp. 2420-2439.
- [44] Wachter. K. W, “The limiting empirical measure of multiple discriminant ratios”. *Ann. Stat.* 8: 937-957, 1980.
- [45] Wachter, Kenneth W. “The strong limits of random matrix spectra for sample matrices of independent elements”. *Ann. Probab.* 6, 1-18, 1978.
- [46] Wang and Paul, “Limiting spectral distribution of renormalized separable sample covariance matrices when $p/n \rightarrow 0$ ”. *Journal of Multivariate Analysis*; 126 (2014), pp. 25-52.
- [47] Wigner. E, “On the distribution of the roots of certain symmetric matrices”. *Ann. of Math.* (2), 67:325–327, 1958.
- [48] Wu. W. B and Mielniczuk. J, “Kernel density estimation for linear processes”. *Ann. Statist.*, 30:1441 1459, 2002.
- [49] Yin. Y. Q, “Limiting spectral distribution for a class of random matrices”. *J. Multivariate Anal.* 20: 50-68, 1986.
- [50] Yin. Y. Q and Krishnaiah. P. R, “A limit theorem for the eigenvalues of product of two random matrices”. *J. Multivariate Anal.* 13: 489-507, 1983.
- [51] Zhang. T, “Marchenko-Pastur Law for Tyler’s and Maronna’s M-estimators”. *ArXiv:1401.3424v3 [math.ST]* 1 Dec 2014.

Titre: Etude Spectrale de Matrices de Covariance d'un Processus Autorégressif AR(1)

Résumé:

Nous considérons une classe de grandes matrices de covariance aléatoire où les composantes suivent un processus autorégressif réel faiblement stationnaire d'ordre un AR(1).

Sous certaines conditions, nous montrons dans un premier temps, que la fonction de répartition empirique des valeurs propres de la matrice de covariance converge presque sûrement vers une fonction non aléatoire donnée par Marcenko et Pastur. Ensuite, nous traitons le cas des entrées dépendantes par colonnes à travers une représentation autorégressive vectorielle. Enfin, nous présentons des simulations numériques illustrant le comportement de l'estimateur de la densité par la transformée de Stieltjes au tour de la vraie densité en variant les différents paramètres.

Title: Spectral Study of Covariance Matrices of an Autoregressive Process AR(1)

Abstract:

We consider a class of large random covariance matrices where the components follow a real, weakly stationary autoregressive process of order one AR (1).

Under certain conditions, we first show that the empirical distribution function of the eigenvalues of the covariance matrix converges almost surely to a non-random function given by Marcenko and Pastur. Then, we treat the case of dependent inputs by columns through a vector autoregressive representation. Finally, we present numerical simulations illustrating the behavior of the Stieltjes transform density estimator around the true density by varying the different parameters.

دراسة طيفية لمصفوفات التباين لنماذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى العنوان:

ملخص:

نعتبر فئة من مصفوفات التباين العشوائي الكبيرة ذات عناصر تلبية علاقة الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى. في ظل فرضيات معينة, نبين ان دالة التوزيع التجريبية للقيم الذاتية لمصفوفات التباين تتقارب بثبات نحو دالة غير عشوائية عرفها مارسينكو و باستور.

نقدم بعدها بعض المحاكاة العددية التي توضح سلوك مقدر الكثافة بواسطة تحويل ستيلتجيس للكثافة الحقيقية بتغيير معلمات مختلفة.