الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences/Département de Mathématiques

Thèse

En vue de l'obtention du Doctorat Es-sciences en Mathématiques

Option : Géométrie différentielle

Thème

Propriétés spectrales de certains générateurs infinitésimaux dans un espace de Fréchet de type hyperbolique

---

Présentée par : M^{me} ***Amina CHERIFI HADJIAT***

Soutenue publiquement le :

Devant le jury composé de :

Président :	Benalili Mohamed	Professeur, Université de Tlemcen
Rapporteur :	Lansari Azzeddine	Professeur, Université de Tlemcen
Examinateurs :	Benchohra Mouffak	Professeur, Université de Sidi Bel Abbes
	Litimein Sara	Professeure, Université de Sidi Bel Abbes
	Bouguima Sidi Mohammed	Professeur, Université de Tlemcen
	Matallah Atika	MCA, Ecole Supér. de Management, Tlemcen
Invité d'honneur :	Maliki Youcef	MCA, Université de Tlemcen

Laboratoire : Systèmes Dynamiques et Applications, Université de Tlemcen.

Remerciements

Au nom d'Allah, le très gracieux, le très miséricordieux par essence et par excellence.

Louange à Allah qui m'a donné force et inspiration pour réaliser cette thèse. La paix soit sur son messager Mohammed et son honorable famille, et ses valeureux compagnons. Tout d'abord, j'aimerais exprimer ma sincère gratitude à mon directeur de thèse, Pr Azzedine Lansari, pour son soutien continu dans mes études et mes recherches de doctorat, pour sa patience et sa motivation. Je voudrais également remercier le Pr M. Benalili, qui a accepté de présider ce comité de thèse. Mes remerciements particuliers vont au Pr S. Bouguima, au Pr M. Benchohra, au Pr. S. Litimein et au Dr A. Matallah qui, au milieu de toutes leurs préoccupations pédagogiques et académiques, ont accepté d'être membres de ce comité de thèse. Cest avec une immense joie que Dr Y. Maliki nous fait honneur d'avoir accepter d'être parmi nous à cette occasion. Sans oublier mes ami(e)s et collègues, à qui je ne saurai jamais être assez reconnaissante pour leurs encouragements, leur compréhension, leur tolérance et leurs prières qui ont été un énorme soutien pour ma réussite. Enfin, je dédie cette thèse à mon mari pour sa patience, son aide et son soutien moral et matériel ; qu'il trouve dans ce travail le témoignage de ma reconnaissance et de mon profond respect que je lui dois.

Publications

Cherifi Hadjiat, A., Lansari, A. Surjectivity of certain adjoint operators and applications. Arab. J. Math. **9**, 567–588 (2020). https ://doi.org/10.1007/s40065-020-00294-x

Cherifi Hadjiat, A., Lansari, A. Sturm-Liouville problem generated by an adjoint operator in a Fréchet space (Pre-publication).

Propriétés spectrales de certains générateurs infinitésimaux dans un espace de Fréchet de type hyperbolique.

Résumé : L'objectif principal de cette thèse est d'apporter quelques nouveaux résultats concernant :
- Dune part, les propriétés spectrales des générateurs infinitésimaux dans un espace de Fréchet, qui nous ont conduits à l'existence des séries de Fourier et à la résolution des problèmes aux limites de Sturm-Liouville engendrés par des champs de vecteurs dans une algèbre de Lie de Fréchet. C'est une généralisation des travaux de A. Zajtz. Ces résultats sont très importants en géométrie différentielle et en théorie des équations différentielles. Nous estimons que ces résultats peuvent faire l'objet à l'avenir d'une généralisation de la théorie des fonctions spéciales et des polynômes orthogonaux de champs de vecteurs dans un espace de Fréchet.
- D'autre part, nous nous sommes intéressé aux propriétés spectrales des semi-groupes de translation et de dilatation perturbés dans un espace de Fréchet de type hyperbolique, qui nous conduits à l'existence des idéaux de co-dimension finie. C'est une généralisation des travaux de M. Benalili et de A. Lansari. Ces résultats sont très importants dans l'analyse fonctionnelle, dans la théorie des champs en physique, dans les systèmes dynamiques, et trouvent même des applications en finances, ce qui nous a permis de publier un article intitulé *Surjectivity of certain adjoint operators and applications* dans le journal *Arab. J. Math.* édité par *Springer Nature* en septembre 2020.

Mots-clés : Spectres, surjectivité, injectivité, Idéaux de codimension finie, opérateur adjoint, structure hyperbolique, espace de Fréchet, algèbre admissible, difféomorphisme, problème de Sturm-Liouville.

Spectral properties of certain infinitesimal generators in a hyperbolic Fréchet space.

Abstract : The main objective of this thesis is to report some new results concerning :
- On the one hand, the spectral properties of infinitesimal generators in a Fréchet space, which led us to the existence of Fourier series and to the resolution of the boundary problems of Sturm-Liouville generated by vector fields in a Lie-Fréchet algebra. It is a generalization of the work of A. Zajtz. These results are very important in differential geometry and in differential equation theory. We believe that these results may be the subject of a future generalization of the theory of special functions and orthogonal polynomials of vector fields in a Fréchet space.
- On the other hand, we are interested in the spectral properties of the translational and dilatational semigroups disturbed in a Fréchet space of hyperbolic type, which leads us to the existence of finite codimensional ideals. It is a generalization of the work of M. Benalili and A. Lansari. These results are very important in functional analysis, in field theory in physics, in dynamical systems, and even find applications in finance, which has enabled us to publish an article entitled : *"Surjectivity of certain adjoint operators and applications"* in the journal : *Arab. J. Math.* Edited by *Springer Nature* in September 2020.

Keywords : Spectra, surjectivity, Injectivity, Ideals of finite codimension, adjoint operator, hyperbolic structure, Fréchet space, admissible algebra, diffeomorphism, Sturm-Liouville problem.

الخصائص الطيفية لبعض المولّدات المتناهية الصغر
في فضاء فريشيه ذي البنية الزائدية

الـملخّص: الهدف الرئيسي في هذه الأطروحة هو التّوصل إلى بعض النتائج الجديدة المتعلّقة بالخصائص الطّيفية أولاً لأشباه الزمر الخاصة بالانسحابات والتمدّدات المضطربة في فضاء فريشيه من النّوع القطع زائدي، ثم الخصائص الطيفية لمولّداتها المتناهية الصغر. تمثّل هذه النتائج تعميما لأبحاث الدكتورين محمد بن عليلي وعزّ الدّين الأنصاري. تعدّ هذه النتائج مهمّة جدًا في ميادين رياضياتية وتطبيقية كثيرة منها التّحليل الوظيفي، ونظرية المجال في الفيزياء، والأنظمة الديناميكية، كما نجد لها تطبيقات في ميدان الاقتصاد والمالية. تمّ نشر جزء من هذه النتائج كمقال في المجلّة المحكّمة *Arab. J. Math.* برعاية الناشر *Springer Nature* في أيلول (سبتمبر) 2020 بعنوان: غامرية بعض المؤثرات المرافقة وتطبيقاتها.

انصبّ اهتمامنا بعد ذلك حول سلسلة فورييه والمسائل الحدّية لستورم-ليوفيل الناتجة عن الحقول المتّجهة في جبر لاي-فريشيه، إنّه تعميم لأبحاث البروفيسور زايس *Zajtz*. تعتبر هذه النتائج مهمّة للغاية في ميدان الهندسة التّفاضلية وفي نظرية المعادلات التّفاضلية.

الكلمات المفتاحية: الأطياف، التباين، الغامرية، مِثالي ذو بعدٍ مُصاحبٍ مُنتَهٍ، مؤثّر مرافق، البنية الزائدية، فضاء فريشيه، جبر مقبول، زمرة تفاضلية، مسألة ستورم-ليوفيل.

Table des matières

Notations

Pour mener à bien la compréhension de ce qui va suivre, nous donnons une interprétation des notations et abréviations utilisées dans cette thèse.

- $\mathbb{R}^n$: Un espace Euclidien de dimension n ;
- $\| \,.\, \|$ La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$;
- $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$;
- $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$ La dérivée partielle d'ordre α ;
- ad_{-X} Générateur infinitésimal du semi-groupe $(\phi_t)_*$;
- ad_X Générateur infinitésimal du semi-groupe $(\phi_{-t})_*$;
- $ad_X(Y) = [X, Y]$ Crochet de Lie ;
- $(\chi, [.,.])$ Est une algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, telle que : $\chi = \left\{ X = \sum_{i=1}^n a_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} \text{ tel que les } a_i \text{ sont de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^n \right\}$
- χ_0^∞ Une sous-algèbre de Lie de χ, des germes infiniment plats à l'origine telle que :

$$\chi_0^\infty = \Big\{ X \in \chi \ \textit{vérifiant} \ \forall m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n, \exists \delta_m > 0, \exists M_m > 0$$

$$\textit{tel que} \ \forall \ \| x \| \leq \delta_m \ \textit{on ait} \ \ \| D^m X(x) \| \leq M_m \| x \|^k, \forall k > 0 \Big\}$$

- $\sigma(L)$ Le spectre de l'opérateur L ;
- $\rho(L)$ l'ensemble résolvant de L ;
- $\Gamma(TM) = \chi(M)$ L'espace des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M une variété compacte Riemannienne.

Introduction

Les générateurs infinitésimaux (ad_X) du groupe à un paramètre t, $\gamma_t = \phi_{t*} = ((exptX)_*)_t$ d'un champ de vecteurs X sur une variété compacte Riemannienne M dans un espace de Fréchet de type hyperbolique $\chi(M) = E = \Gamma(TM)$, présentent des propriétés algébriques fondamentales dans les algèbres de Lie (cf [6]), et présentent également des propriétés dynamiques intéressantes dans l'analyse fonctionnelle [13, 17], dans la théorie des champs en physique [21], dans les systèmes dynamiques [1, 20, 12], et même des applications en finances [11].
Les opérateurs adjoints et la dérivée de Lie, sont des lois fondamentales dans la géométrie moderne, ont été largement étudiés sur l'espace de Banach des fonctions continues munies de la norme de la convergence uniforme, mais ils ont donné des résultats négatifs, car ils ne sont pas continus, ni bornés, par contre ses propriétés sont vraies dans les espaces de Fréchet E des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M.
L'objectif principal de cette thèse est de rapporter quelques nouveaux résultats concernant l'étude des propriétés spectrales de ces générateurs (les opérateurs ad_X et $I - \phi_*$, où ϕ_* est un difféomorphisme sur une variété Riemannienne compacte) dans l'espace de Fréchet de type hyperbolique. Nous nous sommes inspirés de nombreux et importants travaux consacrés aux propriétés spectrales de ce genre d'opérateurs et difféomorphismes, tels que les travaux de Zajtz [24], de Benalili [2] et de Lansari [15]. En effet, Zajtz a étudié les propriétés de la surjectivité de la dérivée directionnelle de la fonction exponentielle qui ont donné lieu à l'existence de l'inversibilité de la fonction exponentielle par l'intermédiaire du théorème de Nash-Moser où des résultats positifs ont été obtenu d'abord dans un espace de Fréchet et ensuite dans un espace de Fréchet de type hyperbolique en intégrant les difféomorphismes dans les flots opérant doucement. Benalili a étudié les propriétés spectrales des opérateurs adjoints induits par des perturbations appropriées de certains champs de vecteurs linéaires hyperboliques de la forme $Y_0 = X_0^+ + X_0^- + Z_0$ avec Z_0 k-plat dans la boule unité. Lansari a étudié les algèbres de Lie des germes de champs de vecteurs à l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$.
Nos efforts dans cette thèse présente, entre autres, une extension sur la base de ces travaux où nous étudierons les idéaux de codimension finie dans les algèbres de Lie-Fréchet à structure hyperbolique contenant des champs de vecteurs de la forme $Y_0 = X_0^+ + X_0^- + Z_0$, tel que $X_0(x, y) = A(x, y) = (A^-(x), A^+(y))$, avec A^-(respectivement A^+) une matrice symétrique ayant des valeurs propres $\lambda < 0$ (respectivement $\lambda > 0$) et Z_0 des germes infiniment plats à l'origine. Notre manuscrit est structuré comme suit :
- Nous exposerons, en premier chapitre, intitulé "Préliminaires", quelques concepts fondamentaux, notations, définitions, propositions et propriétés nécessaires pour la suite de la thèse tels que l'espace de Fréchet, les propriétés des groupes à un paramètre $\gamma_t = \phi_{t*} = ((exptX)_*)_t$, les propriétés des générateurs infinitésimaux ad_X, les opérateurs d'onde, les difféomorphismes d'Anosov, l'espace de Fréchet de type hyperbolique.
- Nous déterminons, dans le deuxième chapitre, le spectre et la résolvante des semi-

groupes de translation et de dilatation perturbé dans un espace de Fréchet hyperbolique. Ces résultats trouvent leurs applications directes dans les problèmes d'équivalences des systèmes dynamiques.
- Dans le troisième chapitre, nous étudierons les propriétés spectrales des générateurs infinitésimaux dans un espace de Fréchet, qui nous ont conduits à l'existence des séries de Fourier et à la résolution des problèmes aux limites de Sturm-Liouville engendrés par des champs de vecteurs dans une algèbre de Lie de Fréchet. C'est une généralisation des travaux de A. Zajtz (cf [23]). Ces résultats sont très importants en géométrie différentielle et en théorie des équations différentielles. Nous estimons que ces résultats peuvent faire l'objet à l'avenir d'une généralisation de la théorie des fonctions spéciales et des polynômes orthogonaux de champs de vecteurs dans un espace de Fréchet.
- En fin, dans le dernier chapitre, on va expliciter le spectre et la résolvante des opérateurs adjoints (de translation et de dilatation perturbés) dans une certaine algèbre de Lie-Fréchet admissible U de type hyperbolique. Nous procéderons ensuite d'abord à la preuve de la propriété de surjectivité de l'opérateur $\lambda I - ad_{X_0}; \forall\lambda \in \mathbb{C}$, sur une certaine algèbre de Lie de Fréchet admissible U de type hyperbolique. Nous déduisons ensuite l'existence des idéaux de codimensions finies dans cette algèbre admissible U. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication récente (voir [8]). C'est une généralisation des travaux de Benalili (cf [3], [4]) et de Lansari (cf [15]).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques concepts fondamentaux, notations, définitions, propositions et propriétés nécessaires pour la suite de la thèse.

1.1 Espaces de Fréchet

1.1.1 Définition

Définition 1. *[13] un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé, métrisable et complet.*

Propriété 1. *Les espaces de Fréchet vérifient les propriétés suivantes :*
1/ Un sous-espace fermé d'un espace de Fréchet est aussi un espace de Fréchet.
2/ La somme directe de deux espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.
3/ Si un espace de Fréchet admet une seule norme, alors tout sous-espace fermé admet cette norme aussi.

Démonstration. cf [13] □

1.1.2 Espace de Fréchet E des champs de vecteurs

Notons par $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et par $\|.\|$ la norme induite par ce produit scalaire.

Soit $E = \chi$ l'espace des champs de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \exists M_r > 0 \text{ tel que } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \\ |\alpha| + k \leq r \end{cases}$$

$$\text{Nous avons } \|D^\alpha X(x)\| \left(1 + \|x\|^2\right)^{k/2} \leqslant M_r.$$

On définit sur E une graduation de semi-normes :

$$\|X\|_r = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{sup} \ \underset{k+|\alpha| \leq r}{max} \|D^\alpha X(x)\| \left(1 + \|x\|^2\right)^{k/2}$$

alors $(E, \|...\|_r)$ est dit un espace de Fréchet (cf [13]).

1.1.3 Espace de Fréchet G des fonctions

Soit G l'espace de Schwartz, c'est l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisants :

$G = \{f \in C^\infty(\mathbb{R})^n / \forall p \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \; \exists C_p > 0 / \|D^\alpha f(x)\|(1+\|x\|^2)^p \leq C_p\}$
G est l'espace des fonctions où la transformée de Fourier existe avec son inverse.

On définit sur G une graduation de semi-normes :

$$\|f\|_r = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{k+|\alpha|\leq r} \|D^\alpha f(x)\| \left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}$$

alors $(G, \|...\|_r)$ est dit un espace de Fréchet (cf [13]).

1.2 Générateurs infinitésimaux et résolvante

1.2.1 Définition et propriétés du générateur infinitésimal

Définition 2. *Soit E un espace de Frêchet, on définit une famille d'opérateurs $(\gamma_t)_t$ linéaires continus sur E. Cette famille $(\gamma_t)_t$ est un semi-groupe si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} i)\ \gamma_0 = I \ (I \text{ c'est l'opérateur identité sur } E) \\ ii)\ \gamma_{s+t} = \gamma_t\gamma_s \text{ pour tout } t,\ s \geq 0 \ (resp\ t,\ s \in \mathbb{R}) \\ iii)\ LX = \lim_{t\to 0+} \frac{\gamma_t(X)-X}{t} = \left.\frac{d^+\gamma_t(X)}{dt}\right|_{t=0^+} \text{ existe et est finie pour tout } X \in E \end{cases}$$

L'opérateur linéaire $L : E \to E$ ainsi défini est le générateur infinitésimal associé à ce semi-groupe $(\gamma_t)_t$ sur l'espace de Frêchet E.

Propriété 2. *Soit L un générateur infinitésimal du semi-groupe $(\gamma_t)_t$ sur E alors :*

$$1)\ L\gamma_t = \gamma_t L \qquad 2)\ \frac{d}{dt}\gamma_t = L\gamma_t; \forall t \in \mathbb{R}$$

Démonstration. : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous allons montrer :

1) $L\gamma_t(x) = \gamma_t L(x)$, en effet

$$\begin{aligned} L\gamma_t(x) &= \left.\frac{d\gamma_s}{ds}\right|_{s=0} \gamma_t(x) \\ &= \left.\frac{d\gamma_{s+t}}{ds}(x)\right|_{s=0} \\ &= \left.\gamma_t \frac{d\gamma_s}{ds}(x)\right|_{s=0} \\ &= \gamma_t \cdot L(x) \end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dt}\gamma_t(x) = L\gamma_t(x)$, en effet

$$\begin{aligned} L\gamma_t(x) &= \frac{d\gamma_{s+t}}{ds}(x)\bigg|_{s=0} \\ &= \frac{d\gamma_\tau}{d\tau}(x)\cdot\frac{d\tau}{ds}\bigg|_{s=0,\tau=t} \text{ où } \tau = s+t \\ &= \frac{d\gamma_t}{dt}(x) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d\gamma_t}{dt}(x) = L\gamma_t(x)$$

□

1.2.2 Générateurs infinitésimaux ad_X et ad_ϕ

Générateur infinitésimal ad_X

Soit $X \in E$ engendrant un groupe à un paramètre $t, (\phi_t)_t$ solution du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi_t(x) = X \circ \phi_t(x) \\ \phi_0(x) = x \end{cases}$$

Définition 3. *[Difféomorphisme adjoint]*
Pour tout $X, Y \in E$ telle que $Y = \sum_{i=1}^n u_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ où $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, nous définissons les difféomorphismes adjoints ϕ_t^* et $(\phi_t)_*$ par :

$$\begin{cases} (\phi_t)^*Y = (exptX)^*.Y = ((D\phi_t)^{-1}.Y)\circ\phi_t = \sum\limits_{j=1}^n e^{-tX}.u_j\left(e^{tX}.x\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ (\phi_t)_*Y = (exptX)_*.Y = (D\phi_t.Y)\circ(\phi_t)^{-1} = \sum\limits_{j=1}^n e^{tX}.u_j\left(e^{-tX}.x\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \end{cases}$$

Propriété 3. *Pour tout $X \in E$, on associe le $X-$flot $\phi_t = exptX$ alors :*
i) ad_X (respectivement ad_{-X}) est un générateur infinitésimal du groupe à un paramètre ϕ_t^* (resp. $(\phi_t)_*$) sur E ; c'est à dire ϕ_t^* est une solution du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\phi_t)^*Y = (\phi_t)^*\cdot ad_X(Y) = \phi_t^*[X,Y] \\ (\phi_0)^*Y = Y \end{cases}$$

et respectivement $(\phi_t)_*$ est solution du :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\phi_t)_*Y = (\phi_t)_*\cdot ad_{-X}(Y) = (\phi_t)_*[Y,X] \\ (\phi_0)_*Y = Y \end{cases}$$

ii) $(\phi_t)_* = \phi_{-t}^*$; $\phi_t^* = (\phi_{-t})_*, \forall t > 0$
iii) $ad_X \circ \phi_t^* = \phi_t^* \circ ad_X$; $\quad ad_{-X}\circ\phi_{t*} = \phi_{t*}\circ ad_{-X}$

Démonstration. i) En effet

$$\frac{d}{dt}((\phi_t)_*Y)(x) = \frac{d}{dt}D[\phi_t(\phi_{-t}(x))]\cdot Y(\phi_{-t}(x)) + D\phi_t(\phi_{-t}(x))\cdot\frac{d}{dt}Y(\phi_{-t}(x))$$

Comme :

$$\frac{dD_x\phi_t(x)}{dt} = DX(\phi_t(x)).D(\phi_t(x))$$

alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\left(\phi_t\right)_* Y\right)(x) &= D_xX\left(\phi_t \circ \phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-t}(x)\right) \\
&\quad -D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\left(Y\left(\phi_{-t}(x)\right)\right) \cdot X \circ \phi_{-t}(x) \\
&= D_xX(x)\left(D\phi_t \cdot Y\right)\left(\phi_{-t}(x)\right) - \left(D\phi_t \cdot X\right)\left(\phi_{-t}(x)\right).D_yY(y) \quad \text{où } y = \phi_{-t}(x) \\
&= D_xX(x)\left(\left(\phi_t\right)_* .Y\right)(x) - \left(\left(\phi_t\right)_* .X\right)(x).D_yY(y) \\
&= \left(\phi_t\right)_* [Y, X](x) \\
&= \left(\phi_t\right)_* ad_{-X}(Y)(x)
\end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\frac{d}{dt}\left(\phi_t\right)_* Y = \left(\phi_t\right)_* [Y, X]$$

d'où

$$\frac{d}{dt}((\phi_t)_*Y)(x) \mid_{t=0^+} \quad = \quad [Y,\ X](x) = ad_{-X}(Y)(x)$$

Ce qui signifie que ad_{-X} est un générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $(\phi_t)_*$ sur E. Et par le même raisonnement, nous aurons : $\frac{d}{dt}\left(\phi_t\right)^* Y = \left(\phi_t\right)^* [X, Y]$
ii) Montrons que $(\phi_t)_* = \phi^*_{-t}$; on pose $y = \phi_{-t}(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\left(\phi_t\right)_* Y\right)(x) &= D_xX\left(\phi_t \circ \phi_{-t}(x)\right) \cdot D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot Y\left(\phi_{-t}(x)\right) \\
&\quad -D\phi_t\left(\phi_{-t}(x)\right) \cdot D\left(Y\left(\phi_{-t}(x)\right)\right) \cdot X \circ \phi_{-t}(x) \\
&= D_xX(x)\left(\left(D\phi_{-t}\right)^{-1} \cdot Y\right)\left(\phi_{-t}(x)\right) - \left(\left(D\phi_{-t}\right)^{-1} \cdot X\right)\left(\phi_{-t}(x)\right).D_yY(y) \\
&= D_xX(x)\left(\left(\phi_{-t}\right)^* .Y\right)(x) - \left(\left(\phi_{-t}\right)^* .X\right)(x).D_yY(y) \\
&= \left(\phi_{-t}\right)^* [Y, X](x) \\
&= \left(\phi_{-t}\right)^* ad_{-X}(Y)(x)
\end{aligned}$$

Or, d'après la propriété i) :

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\phi_t\right)_* Y\right)(x) = \left(\phi_t\right)_* ad_{-X}(Y)(x)$$

alors $\left(\phi_t\right)_* = \left(\phi_{-t}\right)^*$.

- Le même raisonnement pour le cas : $\phi_t^* = (\phi_{-t})_*$
iii) C'est une déduction de la propriété 2. □

Générateur infinitésimal ad_ϕ

Soit $G = Diff(M)$ le groupe des difféomorphismes de classes C^∞ sur une variété compacte riemannienne M, d'après Hamilton (cf [13]) , il a la structure d'un groupe de Fréchet de dimension infinie.

Proposition 1. *Soit $\phi \in$Diff (M) et $Y \in E$, on définit les opérateurs adjoints :*

$$Ad_\phi : E \to E$$
$$Y \to Ad_\phi(Y) = (\phi_* - I)Y \circ \phi$$

où $\phi_* = (D\phi \cdot Y) \circ \phi^{-1}$ *et pour tout* $f \in G$ *:*

$$A_\phi : G \to G$$
$$A_\phi : f \to A_\phi(f) = f^{-1}.\phi \circ f$$

Alors $Ad_\phi(Y)$ *est un générateur infinitésimal du groupe à un paramétre* $t, (A_\phi(\exp(tY)))_t$.

Démonstration. En effet :

Soit $\psi_t = \exp(tY)$ *le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs* Y *solution du système dynamique*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_t(x) = Y \circ \psi_t(x) \\ \psi_0(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A_\phi(\psi_t)|_{t=0^+} &= \frac{d}{dt}(\psi_t^{-1} \cdot \phi \circ \psi_t)|_{t=0^+} = -Y \circ \phi + D\phi \cdot Y \\ &= ((D\phi \cdot Y) \circ \phi^{-1} - Y) \circ \phi \\ &= (\phi_* - I)Y \circ \phi \\ &= Ad_\phi(Y) \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$Ad_\phi(Y) = \frac{d}{dt}A_\phi(\psi_t)\Big|_{t=0^+}$$

□

Donc $Ad_\phi(Y)$ *est un générateur infinitésimal du groupe à un paramètre t,* $(A_\phi(exptY))_t$.

1.2.3 Résolvante et spectre

Définition 4. *Soit* L *un générateur infinitésimal du groupe à un paramètre* γ_t *sur l'espace de Frêchet E, c'est à dire* $L = \frac{d}{dt}\gamma_t|_{t=0}$.

i) On définit le spectre de l'opérateur L par :

$$\sigma(L) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - L) \text{ n'est pas inversible}\}$$

ii) On définit l'ensemble résolvant de l'opérateur L par :

$$\rho(L) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - L) \text{ est inversible}\}$$

iii) Soit $\lambda \in \rho(L)$ *on définit la résolvante de l'opérateur L par*

$$R(\lambda,\ L) = (\lambda I - L)^{-1}$$

Proposition 2. *Soit* U' *le domaine de convergence uniforme de l'intégrale impropre :*

$$R_\lambda(X) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\gamma_t(X)dt; \quad \forall Re(\lambda) > 0$$

Alors pour tout $X \in U'$ nous avons :
1) $R_\lambda(LX) = L(R_\lambda(X))$
2) $R_\lambda(\lambda I - L)X = (\lambda I - L)R_\lambda(X) = X$
3) Si on pose $R_\lambda(X) \ = \ (\lambda I - L)^{-1}X = R(\lambda,\ L)X$, *nous aurons alors :*

$$R(\lambda,\ L)(LX) \ = \ L[R(\lambda,\ L)X]$$

Démonstration. 1) Montrons :

$$R_\lambda(LX) = L(R_\lambda(X))$$

Soit $X \in D \subset E$, nous avons :

$$\begin{aligned} R_\lambda(LX) &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\gamma_t(LX)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)L(\gamma_t X)dt \end{aligned}$$

Puisque pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, nous supposons que cette dernière intégrale convergence uniformement sur D, d'où :

$$R_\lambda(LX) \ = L\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)(\gamma_t X)dt = LR_\lambda(X)$$

2) Montrons que

$$R_\lambda(\lambda I - L)X = (\lambda I - L)R_\lambda(X) = X$$

Soit $X \in E, h > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_h - I}{h}R_\lambda(X) &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} (\gamma_h - I)\exp(-\lambda t)\gamma_t(X)dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)(\gamma_h - I)\gamma_t(X)dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)(\gamma_h\gamma_t(X) - \gamma_t(X)dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)(\gamma_{t+h}(X))dt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\gamma_t(X)dt \end{aligned}$$

On pose $s = t + h$ d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_h - I}{h}R_\lambda(X) &= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} \exp(-\lambda(s-h))\gamma_s(X)ds - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds \\ &= \frac{\exp(\lambda h)}{h}\int_h^{+\infty} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds \\ &= \frac{\exp(\lambda h)}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds - \frac{\exp(\lambda h)}{h}\int_0^{h} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds \\ &\quad -\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds \\ &= \frac{\exp(\lambda h) - 1}{h}\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds - \frac{\exp(\lambda h)}{h}\int_0^{h} \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds \end{aligned}$$

On remarque que si on pose $\eta = \dfrac{s}{h}$ on aura :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\exp(\lambda h)}{h}\int_0^h \exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(\lambda h)}{h}\int_0^1 \exp(-\lambda\eta h)\gamma_{\eta h}(X)hd\eta \\
&= \lim_{h\to 0}\exp(\lambda h)\int_0^1 \exp(-\lambda\eta h)\gamma_{\eta h}(X)d\eta \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \exp((1-\eta)\lambda h)\gamma_{\eta h}(X)d\eta \\
&= \int_0^1 \lim_{h\to 0}\exp((1-\eta)\lambda h)\gamma_{\eta h}(X)d\eta \\
&= \int_0^1 X d\eta \\
&= X
\end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\gamma_h - I}{h}R_\lambda(X) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(\lambda h)-1}{h}\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda s)\gamma_s(X)ds - X$$

Nous avons donc d'une part :

$$LR_\lambda(X) = \lambda R_\lambda(X) - X$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\lambda R_\lambda(X) - X &= \lim_{h\to 0}\frac{\gamma_h - I}{h}R_\lambda(X) \\
&= \frac{d\gamma_t}{dt}|_{t=0}R_\lambda(X) \\
&= LR_\lambda(X)
\end{aligned}$$

d'où : $(\lambda I - L)R_\lambda(X) = X$, et d'autre part, comme $X \in D \subset E$, alors

$$LR_\lambda(X) = \lambda R_\lambda(X) - X = R_\lambda(LX)$$

D'où

$$X = R_\lambda(\lambda I - L)(X) = (\lambda I - L)R_\lambda(X)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
R_\lambda(X) &= (\lambda I - L)^{-1}X \\
&= \int_0^{+\infty}\exp(-\lambda t)\gamma_t(X)dt = R(\lambda, L)X
\end{aligned}$$

3) $R(\lambda, L)(LX) = R_\lambda(LX) = LR_\lambda(X) = L[R(\lambda, L)X]$

1.3 Opérateur d'onde

1.3.1 Définition

Soient X et $Y = X + Z$ deux champs de vecteurs, Z étant une perturbation associée au champ de vecteurs X.

On associe respectivement leurs groupes à un paramètre t

$$\begin{cases} \phi_t(x) = (\exp tX)(x) \\ \psi_t(x) = (\exp t(X+Z))(x) \end{cases}$$

qui sont solutions des systèmes dynamiques :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi_t(x) = X \circ \phi_t(x) \\ \phi_0(x) = x \end{cases} \tag{1.3.1}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi_t(x) = X \circ \psi_t(x) + Z \circ \psi_t(x) \\ \psi_0(x) = x \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Par la méthode de la résolvante, le système (1.3.2) admet pour solution :

$$\psi_t(x) = \exp t(X+Z)(x) = \phi_t(x) + \int_0^t \phi_{t-s} \circ Z(\psi_s(x))ds$$

D'où

$$\phi_{-t} \circ \psi_t(x) = x + \int_0^t \phi_{-s}(Z \circ \psi_s(x))ds$$

On pose :

$$f_t(x) = \phi_{-t} \circ \psi_t(x)$$

D'où

$$f_t = I + \int_0^t \phi_{-s}(Z \circ \psi_s)ds$$

Définition 5. *Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi_{-s}(Z(\psi_s(x)))ds$ converge, alors on définit l'opérateur d'onde $f(x)$ par :*

$$f(x) = \lim_{t \to +\infty} f_t(x) = x + \int_0^{+\infty} \phi_{-s}(Z(\psi_s(x)))ds$$

Exemple : Soient : $X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y_1 = X_1 + Z_1$ avec Z_1 une perturbation. On associe respectivement leurs groupes à un paramètre $\phi_t^1 = \exp tX_1$ et $\psi_t^1 = \exp tY_1$ solutions des systèmes dynamique (1.3.1) et (1.3.2) d'où :

$$\begin{cases} \phi_t^1(x) = xe^{\alpha t} = (x_1 e^{\alpha_1 t}, ..., x_n e^{\alpha_n t}) \\ \psi_t^1(x) = xe^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} Z_1(\psi_s^1(x))ds \end{cases}$$

donc

$$f_t(x) = \phi_{-t}^1 \circ \psi_t^1(x) = x + \int_0^t e^{-\alpha s} \cdot Z_1 \circ \psi_s^1(x)ds$$

Si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s}(Z_1(\psi_s^1(x)))ds$ converge, alors l'opérateur d'onde

$$f(x) = \lim_{t \to +\infty} \phi_{-t}^1 \circ \psi_t^1(x) = x + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \cdot Z_1 \circ \psi_s^1(x)ds$$

1.3.2 Propriété

Propriété 4. *Soient les opérateurs d'ondes*

$$f_t = \phi_{-t} \circ \psi_t \text{ avec } f = \lim_{t\to+\infty} f_t$$

$$g_t = \psi_{-t} \circ \phi_t \text{ avec } g = \lim_{t\to+\infty} g_t$$

alors
1)

$$\phi_{-t} \circ f \circ \psi_t = f \qquad et \quad \psi_{-t} \circ g \circ \phi_t = g$$

2) Si de plus f est inversible, alors : $X = f_*(X+Z)$
3)

$$f'_t = (D\phi_{-t}.Z) \circ \psi_t$$

4)

$$\begin{cases} f'_t(x) = (\phi_t^* \cdot Z)(f_t(x)) \\ f_0(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} g'_t(x) = -(\Psi_{t_*} \cdot Z) \circ g_t(x) \\ g_0(x) = x \end{cases}$$

5)

$$f_t \circ g_t = g_t \circ f_t = I$$

f_t et g_t sont donc inversibles et $(f_t)^{-1} = g_t$
6)

$$f_t = I + \int_0^t (D\exp(-sX).Z) \circ \exp(s(X+Z))ds$$
$$g_t = I - \int_0^t (D\exp(-s(X+Z)).Z) \circ \exp(sX)ds$$

7) Si ces intégrales convergent lorsque t tend vers $+\infty$, alors

$$f = I + \int_0^{+\infty} (D\exp(-sX).Z) \circ exp(s(X+Z))ds$$
$$g = I - \int_0^{+\infty} (D\exp(-s(X+Z)).Z) \circ \exp(sX)ds$$

Démonstration. 1) On a

$$\begin{aligned} \phi_{-t} \circ f \circ \psi_t &= \lim_{s\to+\infty} \phi_{-t}(\phi_{-s} \circ \psi_s)\psi_t = \lim_{s\to+\infty} \phi_{-(t+s)} \circ \psi_{(t+s)} \\ &= \lim_{\tau\to+\infty} \phi_{-\tau} \circ \psi_\tau = f, \qquad \text{avec } \tau = t+s \end{aligned}$$

et

$$\psi_{-t} \circ g \circ \phi_t = \lim_{s\to+\infty} \psi_{-t}(\psi_{-s} \circ \phi_s)\phi_t = \lim_{s\to+\infty} \psi_{-(t+s)} \circ \phi_{(t+s)} = g$$

2) Si f est inversible, comme

$$f = \phi_{-t} \circ f \circ \psi_t$$

donc

$$f \circ \psi_t \circ f^{-1} = \phi_t \Rightarrow \frac{d\phi_t}{dt} = Df(\psi_t \circ f^{-1})\frac{d\psi_t}{dt}(f^{-1})$$

et

$$\begin{aligned} X &= \lim_{t\to 0}\frac{d\phi_t}{dt} = Df(\psi_0\circ f^{-1})\frac{d\psi_t}{dt}\bigg|_{t=0}(f^{-1}) \\ &= Df(f^{-1})\ .\ (X+Z)(f^{-1}) = f_*(X+Z) \end{aligned}$$

d'où

$$X = f_*(X+Z)$$

3) Comme $\phi_t(x) = (\exp tX)(x)$ alors

$$\frac{d\phi_t}{dt}(x) = D[(\exp tX)(x)].X = D\phi_t.X = X\circ\phi_t$$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$

$$f_t(x) = \phi_{-t}\circ\psi_t(x) = \phi(-t,\ \psi(t,\ x))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t}{\partial t}(x) &= -\frac{\partial\phi}{\partial t}(-t,\ \psi(t,\ x)) + \frac{\partial\phi}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}\ oy = \psi(t,\ x) \\ &= -X\circ\phi(-t,\ \psi(t,\ x)) + D_y\phi(-t,\ y)\ .\ (X+Z)\circ\psi(t,\ x) \\ &= -X\circ\phi_{-t}\circ\psi_t(x) + D_y\phi_{-t}\circ\psi_t(x).X\circ\psi_t(x) + D_y\phi_{-t}\circ\psi_t(x).Z\circ\psi_t(x) \\ &= -X\circ\phi_{-t}\circ\psi_t(x) + (D\phi_{-t}.X)\circ\psi_t(x) + (D\phi_{-t}.Z)\circ\psi_t(x) \\ &= -X\circ\phi_{-t}\circ\psi_t(x) + X\circ\phi_{-t}\circ\psi_t(x) + (D\phi_{-t}.Z)\circ\psi_t(x) \\ &= (D\phi_{-t}.Z)\circ\psi_t(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x) = (D\phi_{-t}.Z)\circ\psi_t(x) = ((D\phi_{-t}.Z)\circ\phi_t)\circ f_t(x) = \phi_t^*\cdot Z(f_t(x)) \qquad (1.3.3)$$

4) Soit $x\in\mathbb{R}^n$

$$g_t = \psi_{-t}(\phi_t(x)) = \psi(-t,\ \phi(t,\ x))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_t}{\partial t}(x) &= -\frac{\partial\psi}{\partial t}(-t,\ \phi(t,\ x)) + \frac{\partial\psi}{dz}.\frac{\partial z}{\partial t}\ o\ z = \phi(t,\ x) \\ &= -(X+Z)\circ\psi(-t,\ \phi(t,\ x)) + D\psi(-t,\ z).X\circ\phi(t,\ x) \\ &= -(X+Z)\circ\psi_{-t}\circ\phi_t(x) + (D\psi_{-t}.X)\circ\phi_t(x) \\ &= -D\psi_{-t}(X+Z)\circ\phi_t(x) + D\psi_{-t}(X)\circ\phi_t(x) \\ &= -D\psi_{-t}(Z)\circ\phi_t(x) \end{aligned}$$

Or on a :

$$\psi_{-t} = \exp[-t(X+Y)]$$

$$-\frac{d\psi_{-t}}{dt} = (X+Z)\circ\psi_{-t}(x) = D\psi_{-t}.\ (X+Z)$$

$$(X+Z)\circ\psi_{-t}(x) = D\psi_{-t}.(X+Z) \Rightarrow X\circ\psi_{-t}(x) + Z\circ\psi_{-t}(x) = D\psi_{-t}.X + D\psi_{-t}.Z$$

On remplace dans l'équation de g_t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_t}{\partial t}(x) &= -(X+Z)\circ\psi_{-t}\circ\phi_t(x) + (D\psi_{-t}.X)\circ\phi_t(x)\\ &= -(X+Z)\circ\psi_{-t}\circ\phi_t(x) + (X+Z)\circ\psi_{-t}\circ\phi_t(x) - (D\psi_{-t}.Z)\circ\phi_t(x)\\ &= -(D\psi_{-t}.Z)\circ\phi_t(x)\\ &= -(D\psi_{-t}.Z)\circ\psi_t\circ g_t(x)\\ &= -(\psi_{-t*}\cdot Z)g_t(x)\end{aligned}$$

$$\text{Donc } g_t' = -(D\psi_{-t}.Z)\circ\phi_t$$

5)

$$\begin{aligned}g_t\circ f_t &= \psi_{-t}\circ\phi_t\circ\phi_{-t}\circ\psi_t = I\\ f_t\circ g_t &= \phi_{-t}\circ\psi_t\circ\psi_{-t}\circ\phi_t = I\end{aligned}$$

d'où

$$f_t\circ g_t = g_t\circ f_t = I$$

i.e : f_t et g_t sont inversibles et $(f_t)^{-1} = g_t$ (resp. $f_t = (g_t)^{-1}$)

Par passage à la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} f_t = f$ donc f est inversible i.e $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$

6) On intègre les équations (1.3.3) et (1.3.2) sur l'interval $[0,\ t]$

$$f_t - I = \int_0^t (D\exp(-sX).Z)\circ\exp(s(X+Z))ds$$

donc

$$f_t = I + \int_0^t (D\exp(-sX).Z)\circ\exp(s(X+Z))ds$$

et

$$g_t = I - \int_0^t D\exp(-s(X+Z)).Z\circ\exp(sX)ds$$

7) Comme ces intégrales convergent lorsque t tend vers $+\infty$ alors on passe à la limite d'où :

$$\begin{aligned}f &= \lim_{t\to+\infty} f_t = I + \int_0^{+\infty}(D\exp(-sX).Z)\circ\exp(s(X+Z))ds\\ g &= \lim_{t\to+\infty} g_t = I - \int_0^{+\infty}(D\exp(-s(X+Z)).Z)\circ\exp(sX)ds\end{aligned}$$

□

1.4 Espace de Fréchet de type hyperbolique

1.4.1 Difféomorphisme d'Anosov

Soit $g : M \to M$ un C^1 difféomorphisme sur une variété riemannienne compacte M, et soit X un champs de vecteurs de $\Gamma(TM)$. Soit le système dynamique :

$$x' = X(x), \quad \forall x\in M$$

On fait un changement de variable par le difféomorphisme $g, y = g(x)$ d'où :

$$y' = (Dg.X)\circ g^{-1}(y) = (g_*X)(y))\,; \quad \forall y\in M$$

Nous allons étudier le spectre de l'opérateur linéaire $g_*X = (Dg.X) \circ g^{-1}$ *sur une sous-algèbre fermé* E *de* $\Gamma(TM)$ *(*g_* *est un redressement du champ* X*).*
Ce chapitre est une généralisation de quelques résultats de Mather [16] sur les difféomorphismes d'Anosov. D'abord nous citons ces résultats :

Définition 6. *[16]* f *est dite un difféomorphisme d'Anosov si et seulement si :*
i) Il existe une somme directe continue $TM = E_+ \oplus E_-$ *telle que* E_+ *et* E_- *sont invariants par* Df
ii) et telle que pour certains (et donc tous) les métriques riemanniennes $\|.\|$ *sur* M*, il existe des constantes* $C > 1$ *et* $0 < \lambda < 1$ *telles que :*

$$\begin{cases} \|Df^k(X)\| \leqq C\lambda^k \|X\| \text{ pour tout entier naturel } k, \forall X \in E_- \\ \|Df^k(X)\| \geqq C^{-1}\lambda^{-k}\|X\| \text{ pour tout entier naturel } k, \forall X \in E_+. \end{cases}$$

Où :

$$f^k(X) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}(X)$$

Soient $X = \Gamma(TM) \otimes_M \mathbb{C}$ *et* $L = f_* \otimes \mathbb{C} : X \to X$*. Alors* X *est un* $\mathbb{C}$*- espace vectoriel, et* L *est* $\mathbb{C}$*-linéaire, où* $\mathbb{C}$ *est le corps des nombres complexes. Rappelons que le spectre de* $L, \sigma(L)$ *, est défini comme l'ensemble de tous* $\lambda \in \mathbb{C}$ *telle que* $L - \lambda I : X \to X$ *n'est pas un automorphisme.*

Théorème 1. *cf [16] Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) $f_* - I$ *est un automorphisme sur* $\Gamma(TM)$*.*
b) $1 \notin \sigma(L)$
c) $\lambda \notin \sigma(L)$ *si* $|\lambda| = 1$*.*
d) f *est un difféomorphisme d'Anosov.*
e) Il existe une somme directe $TM = E_- \oplus E_+$ *telle que* E_+ *et* E_- *sont invariants par l'application tangente* Df*, et il existe une constante* λ *satisfaisant* $0 < \lambda < 1$ *telle que :*

$$\begin{cases} \|Df(X)\| \leqq \lambda\|X\|, \forall X \in E_- \\ \|Df(X)\| \geqq \lambda^{-1}\|X\|, \forall X \in E_+. \end{cases}$$

Ce théorème caractérise les difféomorphismes d'Anosov par leurs spectres. Ici l'opérateur adjoint f_* *est défini sur l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs continus sur* M*. Clairement, la condition a) ne peut être satisfaite dans un cas où* f_* *est générée par un champ de vecteurs car :*
Si $f_*X = X$ *donc* X *est un vecteur propre de* f_*

Définition 7. *Un ensemble spectral est un sous-ensemble* σ *de* $\sigma(T)$ *qui est ouvert et fermé dans* $\sigma(T)$*. On pose* $E_\sigma = P(\sigma)E$ *où* $P(\sigma)$ *est la projection associée à* σ *(cf [7], [9]).*
En particulier $E = E_1 \oplus E_2$ *où* $E_1 = P(\sigma)E$ *et* $E_2 = (I - P(\sigma))E$*.*

1.4.2 Difféomorphisme hyperbolique

Définition 8. *Soit* E *un sous-espace fermé de* $\chi(M)$*, un difféomorphisme* f_* *est hyperbolique sur* E *s'il existe une décomposition en somme directe de* $E = E_1 \oplus E_2$ *en* *sous-espaces fermés qui sont invariants par f_* et s'il existe une constante $\lambda \in]0,1[$ telle que*

$$\begin{aligned} \|f_*X\| &\leq \lambda \|X\|, \ \forall X \in E_1 \\ \|f_*X\| &\geq \lambda^{-1} \|X\|, \ \forall X \in E_2 \end{aligned}$$

Lemme 1. *Si f est un difféomorphisme hyperbolique sur E alors $f_* - I$ est automorphisme de E.*

Démonstration. Comme f est hyperbolique sur $E = E_1 \oplus E_2$, on pose $f_i = f_*|_{E_i}$ alors il existe une constante $\lambda \in]0,1[$ tel que :
i) Pour tout $X \in E_1$ on a :

$$\|f_1X\| \leq \lambda \|X\| \implies \frac{\|f_1X\|}{\|X\|} \leq \lambda < 1 \implies \|f_1\| < 1 \quad \text{avec } \|f_1\| = \sup_{\|X\|\neq 0} \frac{\|f_1X\|}{\|X\|}$$

donc la série $\sum\limits_{k\geq 0} f_1^k$ converge vers $(I - f_1)^{-1}$.
ii) De même pour tout $X \in E_2$ on a $\|f_2X\| \geq \lambda^{-1} \|X\|$, on pose $Y = f_2X \in E_2$ comme f_2^{-1}existe alors $X = f_2^{-1}Y$ d'où :

$$\|Y\| \geq \lambda^{-1} \left\|f_2^{-1}Y\right\| \implies \frac{\left\|f_2^{-1}Y\right\|}{\|Y\|} \leq \lambda < 1 \implies \left\|f_2^{-1}\right\| < 1$$

donc la série $\sum\limits_{k\geq 0} f_2^{-k}$ converge vers $\left(I - f_2^{-1}\right)^{-1}$.
On déduit que $(f_1 - I)^{-1}$ et $(f_2 - I)^{-1}$ existent, en effet

$$(f_2 - I)^{-1} = -f_2^{-1} \left(f_2^{-1} - I\right)^{-1}$$

Donc $(f_* - I)^{-1}$ existe, et par suite $f_* - I$ est un automorphisme de E. □

Proposition 3. *Soit f_* un opérateur adjoint qui laisse un sous-espace fermé E de $\chi(M)$ invariant. Si $1 \notin \sigma(f_*|_E)$ alors les points non périodiques de M par f sont denses dans M.*

Démonstration. voir J. Mather ([16])

□

Lemme 2. *Si μ est un point du bord de $\sigma(L)$ alors il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\|(L - \mu I)X\| \geq \varepsilon \|X\|, \forall X \in E$$

Démonstration. (cf [16]) Supposons par absurde que μ est un point du bord de $\sigma(L)$ et il existe un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\|(L - \mu I)X\| \geq \varepsilon \|X\|, \forall X \in E$$

C'est à dire $(L - \mu I)E$ est un sous-espace propre de E dans le sens qu'il est ni E ni $\{0\}$, il existe donc un $X \in E$ tel que la distance de X à $(L - \mu I)E$ est égale à une constante $\delta > 0$. Soit

$$B = \left\{Y \in E \text{ tel que } \|Y\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \|X\|\right\}$$

i) Si $\mid \alpha \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ alors $X \notin (L-(\alpha+\mu)I)(E-B)$ en effet :
si $X \in (L-(\alpha+\mu)I)(E-B)$ alors il existe un $Z \in E-B$ tel que $X+\alpha Z = (L-\mu I)(Z)$

$\varepsilon \parallel Z \parallel \leq \parallel (L-\mu I)(Z) \parallel = \parallel X+\alpha Z \parallel \leq \parallel X \parallel + \mid \alpha \mid \|Z\| \leq \parallel X \parallel + \frac{\varepsilon}{2} \|Z\|$
d'où

$$\|X\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \|Z\| \Rightarrow Z \in B$$

Contradiction car $Z \in E-B$.
ii) Si $\mid \alpha \mid < \frac{\varepsilon\delta}{2\|X\|}$ alors $X \notin (L-(\alpha+\mu)I)(B)$ en effet :
si $X \in (L-(\alpha+\mu)I)(B)$ alors il existe un $Y \in B$ tel que $X+\alpha Y = (L-\mu I)(Y)$ or $\delta = \underset{Z\in E}{inf} \|X-(L-\mu I)(Z)\|$ donc $\delta \leqslant \|X-(L-\mu I)(Z)\|, \forall Z \in E$. En particulier pour $Z = Y$.

$$\delta \leqslant \|X-(L-\mu I)(Y)\| = |\alpha| \, \|Y\| \leq |\alpha| \frac{2}{\varepsilon} \|X\| \Rightarrow |\alpha| \geq \frac{\varepsilon\delta}{2\|X\|}$$

Contradiction car $|\alpha| < \frac{\varepsilon\delta}{2\|X\|}$
iii) Si $\mid \alpha \mid < min\left\{\frac{\varepsilon\delta}{2\|X\|}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ alors $X \notin (L-(\alpha+\mu)I)(E)$ donc $\alpha+\mu \in \sigma(L)$ (i.e μ n'est pas un point du bord de $\sigma(L)$ contradiction. □

Proposition 4. *Supposons que le sous-espace $E \subset \chi(M)$ est un $C^1(M)$ - module et les points non périodiques de f sont denses dans M.*
Si $\mu \in \sigma(L), \lambda \in C$ tel que $|\lambda| = 1$ alors $\lambda\mu \in \sigma(L)$.

Démonstration. (cf [16]) Montrons que $\forall \varepsilon > 0$ il existe un $Z \in E^C$ tel que $\|Z\| = 1$ et $\|LZ - \mu\lambda Z\| \leq \varepsilon$. Soit μ un point du bord de $\sigma(L)$, d'après le lemme précédent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $X \in E^C$ tel que $\|X\| = 1$ et $\|LX - \mu\lambda X\| \leq \varepsilon/4$. Pour ce X il existe des points m de M tels que $\parallel X(m) \parallel \geqslant \frac{1}{2}$. Par hypothèse les points non périodiques de f sont denses dans M alors par la continuité de X il existe un point x_0 non périodique de $f(f^n(x_0) \neq x_0$ pour tout n) tel que $\parallel X(x_0) \parallel \geqslant \frac{1}{2}$. Soit un entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{4 \mid \mu \mid}$$

Pour ce x_0 il existe U_0 un voisinage de x_0 tel que :

$$f^k(U_0) \cap f^l(U_0) = \emptyset \text{ pour } -n \leq k \leq n$$

Soit $\phi : M \longrightarrow [0,1], \phi$ une fonction de classe C^1 à support compact dans U_0 tel que $\phi(x_0) = 1$.
On définit $\psi : M \longrightarrow [0,1]$ par :

$$\psi = \begin{Bmatrix} \sum_{-n\leqslant k\leqslant n} \left(1-\frac{|k|}{n}\right) \lambda^{-k} \phi \circ f^{-k} & sur \underset{-n\leqslant k\leqslant n}{\cup} f^k(U_0) \\ \\ 0 & sur \quad M - \underset{-n\leqslant k\leqslant n}{\cup} f^k(U_0) \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$z = f^p(y) \text{ avec } y \in U_0 \text{ et } -n \leqslant p \leqslant n, p \text{ est fixé}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}(\psi\circ f^{-1}-\lambda\psi)(z) &= \sum_{-n\leqslant k\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\lambda^{-k}\phi\circ f^{-k-1}(z)-\sum_{-n\leqslant k\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\lambda^{1-k}\phi\circ f^{-k}(z)\\ &= \sum_{-n\leqslant k\leqslant n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\lambda^{-k}\phi\circ f^{-k-1}(z)-\sum_{-n\leqslant k\leqslant n-1}\left(1-\frac{|l+1|}{n}\right)\lambda^{-l}\phi\circ f^{-l-1}\\ &= \sum_{-n\leqslant k\leqslant n-1}\left(\frac{|k+1|}{n}-\frac{|k|}{n}\right)\lambda^{-k}\phi\circ f^{-k-1}(z)=\frac{\varepsilon(p)}{n}\lambda^{1-p}\phi(y)\text{ où }\varepsilon(p)=\pm 1\end{aligned}$$

car $f^k(U_0)\cap f^l(U_0)=\emptyset$ pour $-n\leqslant k\leqslant l\leq n$ d'où :

$$(\psi\circ f^{-1}-\lambda\psi)(z)=\frac{\varepsilon(p)}{n}\lambda^{1-p}\phi(y)\Longrightarrow\left\|\psi\circ f^{-1}-\lambda\psi\right\|\leq\frac{1}{n}$$

Comme E est un $C^1(M)$-module alors $Y=\psi.X\in E^C=E\otimes_R C$, d'où :

$$\|Y\|\geq\|Y(x_0)\|=|\psi(x_0)|\,\|X(x_0)\|\geq 1/2\,|\psi(x_0)|$$

or $|\psi(x_0)|=|\phi(x_0)|=1$ d'où $\|Y\|\geqslant 1/2$.

Comme :

$$LY=Df.Y\circ f^{-1}=Df.(\psi X)\circ f^{-1}=\psi\circ f^{-1}\left(Df.X\circ f^{-1}\right)$$

alors :

$$\begin{aligned}\|LY-\mu\lambda Y\|=\left\|\psi\circ f^{-1}LX-\mu\lambda\psi X\right\| &= \left\|\left(\psi\circ f^{-1}\right)(LX-\mu X)+\mu\left((\psi\circ f^{-1})X-\lambda\psi X\right)\right\|\\ &\leq \|LX-\mu X\|+|\mu|\left\|\psi\circ f^{-1}-\lambda\psi\right\|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\mu}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Soit $Z=\frac{Y}{\|Y\|}$ alors :

$$\|LZ-\mu\lambda Z\|\leq\varepsilon$$

Remarque Soit :
$S_1=\{\lambda\in C\ \textit{tel que}\ |\lambda|=1\}$. Ce lemme montre que :

$$si\ \lambda\in S_1\ et\ \mu\lambda\notin\sigma(L)\Rightarrow\mu\notin\sigma(L)$$

On pose $\mu\lambda=1$ et $\mu\in S_1$, on déduit que :

$$si\ 1\notin\sigma(L)\ et\ \mu\in S_1\Rightarrow\mu\notin\sigma(L)$$

□

Théorème 2. *Soit $f\in Diff^1(M)$ et E un sous-espace fermé de $\chi(M)$ invariant par rapport à f_*. Supposons qu'il y a une décomposition $E=E_1\oplus E_2$ avec les projections $P_if_*:E\to E_i$, $i=1,2$ tel que*
i) $f_{11}=p_1\,f_*|_{E_1}:E_1\to E_1$ est contractante.
ii) $f_{22}=p_2\,f_*|_{E_2}:E_2\to E_2$ est inversible et $\left\|f_{22}^{-1}\right\|<1$.
iii) $f_{ij}=P_if_*|_{E_j}:E_j\to E_i$, avec $i\neq j$ tel que :

$$\frac{\|f_{12}\|\,\|f_{21}\|}{(1-\|f_{11}\|)\left(1-\left\|f_{22}^{-1}\right\|\right)}<1$$

Alors le spectre de f_* est disjoint avec le cercle unité S_1.

Démonstration. Soit $\lambda \in S_1$ montrons que $(\lambda I - f_*)$ est inversible sur E.
On note par : $f_{ij} = p_i\, f_*|_{E_j}$. Par hypothèses $\|f_{11}\| < 1$ et $\left\|f_{22}^{-1}\right\| < 1$.
Si $\lambda \in S_1$ alors $(\lambda I - f_{11})$ et $\left(\lambda I - f_{22}^{-1}\right)$ sont inversibles et on a :

$$(\lambda I - f_{11})^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n\geq 0}\left(\lambda^{-1} f_{11}\right)^n \implies \left\|(\lambda I - f_{11})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|f_{11}\|}$$

$$\begin{aligned}(\lambda I - f_{22})^{-1} &= -f_{22}^{-1}\left(I - \lambda f_{22}^{-1}\right)^{-1} \\ &= -f_{22}^{-1}\sum_{n\geq 0}\left(\lambda f_{22}^{-1}\right)^n\end{aligned}$$

Comme $\left\|\lambda f_{22}^{-1}\right\| < 1$ alors la série converge, nous aurons alors :

$$\begin{aligned}\left\|(\lambda I - f_{22})^{-1}\right\| &\leq \left\|f_{22}^{-1}\right\|\sum_{n\geq 0}|\lambda|^n\left\|f_{22}^{-1}\right\|^n \\ &\leq \sum_{n\geq 0}\left\|f_{22}^{-1}\right\|^n\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\left\|(\lambda I - f_{22})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \left\|f_{22}^{-1}\right\|}$$

Il suffit de montrer que $(\lambda I - f_*)$ est inversible c'est-à-dire que pour tout $Y \in E$, l'équation $(\lambda I - f_*)\, X = Y$ admet une solution unique $X \in E$. Pour cela notons brièvement par

$$\begin{aligned}A &= \lambda I - f_{11}, \quad B = -f_{12} \\ D &= \lambda I - f_{22}, \quad C = -f_{21}\end{aligned}$$

et

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2 \in E = E_1 \oplus E_2$$

Alors cette équation $(\lambda I - f_*)\, X = Y$ sera notée par la projection :

$$\begin{cases} AX_1 + BX_2 = Y_1 \\ CX_1 + DX_2 = Y_2 \end{cases}$$

Comme A et D sont inversibles, par un calcul élémentaire on déduit que :

$$\begin{cases} \left(I - A^{-1}BD^{-1}C\right) X_1 = A^{-1}Y_1 + A^{-1}BD^{-1}Y_2 \\ \left(I - D^{-1}CA^{-1}B\right) X_2 = D^{-1}Y_2 + D^{-1}CA^{-1}Y_1 \end{cases}$$

or

$$\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|f_{11}\|} \quad \text{et} \quad \left\|D^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \left\|f_{22}^{-1}\right\|}$$

d'où

$$\left\|A^{-1}BD^{-1}C\right\| \leq \frac{\|f_{12}\|\,\|f_{21}\|}{(1 - \|f_{11}\|)\left(1 - \left\|f_{22}^{-1}\right\|\right)}$$

mais par hypothèse, le produit des normes $\|f_{12}\| \, \|f_{21}\|$ est suffisament petit, alors

$$\left\|A^{-1}BD^{-1}C\right\| < 1 \text{ de même } \left\|D^{-1}CA^{-1}B\right\| < 1$$

donc X_1 et X_2 existent et on obtient la transformée inverse $(\lambda I - f_*)^{-1}$ qui est linéaire et continue.

$$\sigma(L) \cap S_1 = \emptyset$$

□

Corollaire 1. *Soit $f \in Diff^1(M)$ et E un sous-espace fermé de $\chi(M)$ invariant par rapport à f_*. Supposons qu'il y a une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ avec les projections $P_i : E \to E_i$, $i = 1, 2$ tel que*
i) $f_{11} = p_1 \, f_*|_{E_1} : E_1 \to E_1$ est contractante ;
ii) $f_{22} = p_2 \, f_*|_{E_2} : E_2 \to E_2$ est inversible et $\left\|f_{22}^{-1}\right\| < 1.$;
iii) S'il existe $\varepsilon > 0$, et $f_{ij} = P_i f_*|_{E_j} : E_j \to B_\varepsilon \subset E_i, i \neq j$ i.e $\| \, f_{ij} \, \| < \varepsilon$ (tel que $\|f_{12}\| < \varepsilon$ et $\|f_{21}\| < \varepsilon$) alors f_* est un difféomorphisme hyperbolique sur E.

Le théorème suivant est une généralisation d'un résultat de Mather à une classe d'espace de champs de vecteurs soumis à l'action des opérateurs adjoints induits par des difféomorphismes.
On note $E_i^\varepsilon = E_i + B_\varepsilon$ avec $B_\varepsilon \subset E_j$ et $i \neq j$

Théorème 3. *Soit un sous-espace fermé E de $\chi(M)$ et soit f un C^1-difféomorphisme de M. Alors f est hyperbolique sur E si et seulement si $(f_* - I)$ est un automorphisme de E.*

Démonstration.
1) Supposons que $f_* - I$ est un automorphisme de E et montrons que f est hyperbolique sur E. Comme $1 \notin \sigma(L)$, on déduit du théorème 1 que le spectre $\sigma(L)$ est disjoint avec le cercle unité S_1
Soient

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(L) \text{ tel que } |\lambda| < 1\} \text{ et } \sigma_2 = \{\lambda \in \sigma(L) \text{ tel que } |\lambda| > 1\}$$

σ_1 et σ_2 sont des ensembles spectraux de $L = f_*$. Soit le sous-espace $\widetilde{E}_i = P(\sigma_i) E^C$, la projection de L sur $\widetilde{E}_i$ sera $L_i = P(\sigma_i) L|_{\widetilde{E}_i}$ ils ont respectivement les spectres σ_1 et σ_2. Soient r_1 le rayon spectrale de L_1 et r_2 le rayon spectrale de L_2^{-1} alors il satisfont à l'inégalité $0 < r_1, \, r_2 < 1$.
La décomposition correspondante $E^C = \widetilde{E}_1 \oplus \widetilde{E}_2$ par des sous-espaces fermés qui sont invariants par l'opérateur L. La propriété générale de complexification, c'est qu'il existe la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ qui préserve f_* tel que $\widetilde{E}_i = E_i \otimes_R C$.
2) La réciproque est déja prouvée par le lemme 1, ce qui prouve ce théorème. □

1.4.3 Espace de Fréchet de type hyperbolique

Définition 9. *(Flot opérant doucement) Nous dirons qu'un flot adjoint ϕ_t^* opère doucement sur E de degré r et de base b, si :*
i) ϕ_t^* préserve $E \, \forall t \geq 0$,
ii) pour tout entier $k \geq b$ il existe un entier $l_k = k + r$ et une fonction strictement positive, continue et décroissante $C_k(t)$ définie sur $[0, \infty)$ vérifiant :

$$\|\phi_t^* Z\|_k \leqslant C_k(t) \, \|Z\|_{l_k} \qquad (\forall t \geqslant 0; \forall Z \in E),$$

et avec l'intégrale impropre :

$$\int_0^\infty C_k(t)dt \qquad \text{converge} \quad \forall k \geq b.$$

Alternativement, ϕ_t^* *dans l'avant dernière équation, peut être remplacée par* $(\phi_t)_* = \phi_{-t}^*$ *conformément au comportement asymptotique de* ϕ_t *[24].*

Définition 10. *(Espace à structure hyperbolique)*
Soit $E = E_1 \oplus E_2$ *un espace de Fréchet fermé, et soit le flot* $\phi_{t*} : E \longrightarrow E$.
E *est dit ayant une structure hyperbolique douce pour le flot* ϕ_{t*} *ssi :* $\exists \varepsilon > 0/$
i) ϕ_{t*} *opère doucement sur* E_1^ε, *avec* $\phi_{t*} : E \longrightarrow E_1^\varepsilon$, $\forall t \geq 0$.
ii) ϕ_{-t*} *opère doucement sur* E_2^ε, *avec* $\phi_{-t*} : E \longrightarrow E_2^\varepsilon$, $\forall t \geq 0$.

Chapitre 2

Propriétés spectrales de certains semi-groupes dans un espace de Fréchet de type hyperbolique

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés spectrales pour deux types de semi-groupes particuliers, l'un engendré par un champ de vecteurs constants, et l'autre engendré par un champ de vecteurs linéaires perturbés. Nous allons montrer :
a) Le sous-espace de Fréchet $U \subseteq E$ *admet une structure hyperbolique avec le semi-groupe* $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ *;*
b) $(\lambda I - \gamma_t)$ *est doucement inversible ;* $\forall \lambda \in \mathbb{C}; \forall t \geq t_0 > 0$ *sur* $U \subseteq E$*.*

Lemme 3. $\forall Y \in U \subseteq E$*, soit* U *un sous-espace de Fréchet de* E *:*
a) si $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt} Y$ *converge* $\forall \lambda \in D \subseteq \mathbb{C}; \forall t \geq 0$ *alors*

$$(\lambda I - \gamma_t)^{-1}.Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt}.Y$$

b) si $\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt} Y$ *converge* $\forall \lambda \in D \subseteq \mathbb{C}; \forall t \geq 0$ *alors*

$$(\lambda I - \gamma_t)^{-1}.Y = -\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt}.Y$$

Démonstration. a) Supposons que $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt} Y$ converge, montrons alors que :

$$(\lambda I - \gamma_t)\left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt}.Y\right) = \left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt} Y\right)(\lambda I - \gamma_t) = Y$$

i) Première étape :

$$\begin{aligned}
(\lambda I - \gamma_t)\left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt}.Y\right) &= \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m}} \gamma_{mt}.Y - \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{(m+1)t}.Y \\
&= \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m}} \gamma_{mt}.Y - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda^{k}} \gamma_{kt}.Y \quad \text{avec } k = m+1 \\
&= Y
\end{aligned}$$

ii) Deuxième étape, par un même raisonnement :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt} Y\right)(\lambda I - \gamma_t) &= \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m}} \gamma_{mt}.Y - \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{(m+1)t}.Y \\
&= Y
\end{aligned}$$

donc

$$(\lambda I - \gamma_t)^{-1} Y = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \gamma_{mt}.Y$$

b) Supposons que $\sum_{m \geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt} Y$ converge, montrons alors que :

$$-(\lambda I - \gamma_t) \left(\sum_{m \geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt}.Y \right) = - \left(\sum_{m \geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt} Y \right) (\lambda I - \gamma_t) = Y$$

i) Première étape :

$$\begin{aligned} -(\lambda I - \gamma_t) \left(\sum_{m \geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt}.Y \right) &= - \sum_{m \geq 1} \lambda^m \gamma_{-mt}.Y + \sum_{m \geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{(-m+1)t}.Y \\ &= - \sum_{m \geq 1} \lambda^m \gamma_{-mt}.Y + \sum_{k \geq 0} \lambda^k \gamma_{-kt}.Y \quad \text{avec } k = m - 1 \\ &= Y \end{aligned}$$

ii) Deuxième étape, par un même raisonnement :

$$- \left(\sum_{m \geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt} Y \right) (\lambda I - \gamma_t) = Y$$

donc

$$(\lambda I - \gamma_t)^{-1} Y = - \sum_{m \geq 1} \lambda^{m-1} \gamma_{-mt}.Y$$

□

2.1 Spectres des semi-groupes de translations $\exp(tX_1)_*$ et $\exp(-tX_1)_*$

Soit E l'espace de Fréchet des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, et soit le champ de vecteurs $X_1 = v = (v_1, ..., v_n)$, constant et non nul dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|X_1\| = 1$. La forme vectorielle explicite du $X_1 - flot$, $\phi_t = \exp tX_1$, sera :

$$\phi_t(x) = (\exp tX_1)(x) = x + v.t = (x_1 + v_1.t, ..., x_n + v_n.t); \ \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où son estimation :

$$| \, \|x\| - |t| \, \|v\| \, | \leq \|\phi_t(x)\| \leq \|x\| + |t| \, \|v\| \, ; \ \forall t \in \mathbb{R}$$

et :

$$\forall Y \in E \quad (\phi_{t*} Y)(x) = D\phi_t. \left(\phi_{-t}(x) \right) .Y \left(\phi_{-t}(x) \right) = Y(x - tv)$$

2.1.1 Flots opérants doucement et structure hyperbolique

Lemme 4. *Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un espace de Fréchet contenant le champ de vecteurs X_1 de la forme $X_1(x) = v$; $\|v\| = 1$ et soient :*

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / < x, v > \leq 0\}$$
$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / < x, v > \geq 0\}$$

et $E_i = \{Y \in E$ tel que supp$Y \subset \Omega_i\}$ (avec $i = 1, 2$) alors :
a) $\forall Y^1 \in E_1; \forall t \in \mathbb{R}^+; \forall r \in \mathbb{N}$; nous avons :

$$\left\|(\phi_t)_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \tag{2.1.1}$$

et

$$\left\|(\phi_t)_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1} \underset{x\in\Omega_1}{sup}\left(\frac{1}{1+\|x-tv\|^2}\right) \ \forall r>0 \tag{2.1.2}$$

b) $\forall Y^2 \in E_2; \forall t \in \mathbb{R}^+; \forall r \in \mathbb{N}$ *; nous avons :*

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \tag{2.1.3}$$

et

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2} \underset{x\in\Omega_2}{sup}\left(\frac{1}{1+\|x+tv\|^2}\right) \ \forall r>0 \tag{2.1.4}$$

c) Pour tout compact $K_i \subset \Omega_i$ *:*
Il existe un $t_{K_i} > 0$*, pour tout* $t \geq t_0 = sup(t_{K_1}, t_{K_2}) > 0$*, nous avons :*

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^1\right\|_r^{K_1} \leq \left\|Y^1\right\|_r^{K_1}; \quad \forall Y^1 \in E_1 \tag{2.1.5}$$

$$\left\|(\phi_t)_* Y^2\right\|_r^{K_2} \leq \left\|Y^2\right\|_r^{K_2}; \quad \forall Y^2 \in E_2 \tag{2.1.6}$$

Démonstration. a) Soit $Y \in E$, alors :

$$\|Y\|_r = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup}\ \underset{k+|\beta|\leq r}{max}\left\|D_x^\beta Y(x)\right\|\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}$$

d'où $\forall k+|\beta| \leq r$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$; nous avons :

$$\left\|D_x^\beta Y(x)\right\| \leq \|Y\|_r\left(1+\|x\|^2\right)^{-k/2}$$

En remplaçant x par $(x-tv)$ nous aurons alors :

$$\left\|D_x^\beta Y(x-tv)\right\| \leq (1+\|x-tv\|^2)^{-k/2}.\ \|Y\|_r$$

Or $(\phi_t)_* Y(x) = Y(x-tv)$ et

$$\|(\phi_t)_* Y\|_r = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup}\ \underset{k+|\alpha|\leq r}{max}\|D_x^\alpha Y(x-tv)\|\left(1+\|x\|^2\right)^{k/2}$$

On déduit :
i)

$$\|(\phi_t)_* Y\|_r \leq \|Y\|_r \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup}\ \underset{k\leq r}{max}\left(\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x-tv\|^2}\right)^{k/2}$$

On remarque que pour tout $x \in \Omega_1$ alors $< x, v > \leq 0$ donc $\forall t \geq 0$ on a :
$t^2 - 2t < x, v > \geq 0$ d'où

$$\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x-tv\|^2}=\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x\|^2+t^2-2t<x,v>}\leq 1$$

On déduit que pour tout $Y^1 \in E_1 \subset E$:

$$\left\|(\phi_t)_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_r^{\Omega_1}$$

ii)Nous avons :

$$\|(\phi_t)_* Y\|_r \leq \|Y\|_r \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup} \underset{k\leq r}{max}\left(\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x-tv\|^2}\right)^{k/2}.\left(\frac{1+\|x-tv\|^2}{1+\|x-tv\|^2}\right)$$

On déduit que pour tout $Y^1 \in E_1 \subset E$:

$$\left\|(\phi_t)_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1}.\left(\frac{1}{1+\|x-tv\|^2}\right)$$

b) Le même raisonnement est valable pour la démonstration sur E_2 :
i)

$$\|(\phi_{-t})_* Y\|_r \leq \|Y\|_r \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup} \underset{k\leq r}{max}\left(\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x+tv\|^2}\right)^{k/2}$$

avec $(\phi_{-t})_* Y = Y(x+tv)$. On remarque que pour tout $x \in \Omega_2$ alors $<x,v>\geq 0$ donc $\forall t \geq 0$ on a $t^2+2t<x,v>\geq 0$ d'où

$$\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x+tv\|^2}=\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x\|^2+t^2+2t<x,v>}\leq 1$$

On déduit que pour tout $Y^2 \in E_2 \subset E$:

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_r^{\Omega_2}$$

ii)Nous avons :

$$\|(\phi_{-t})_* Y\|_r \leq \|Y\|_r \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup} \underset{k\leq r}{max}\left(\frac{1+\|x\|^2}{1+\|x+tv\|^2}\right)^{k/2}.\left(\frac{1+\|x+tv\|^2}{1+\|x+tv\|^2}\right)$$

On déduit que pour tout $Y^2 \in E_2 \subset E$:

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2}.\underset{x\in\Omega_2}{sup}\left(\frac{1}{1+\|x+tv\|^2}\right)$$

c) Soit $K_i > 0$ un compact de Ω_i tel que ; pour tout $t \geq t_0 = sup(t_{K_1}, t_{K_2}) > 0$.
- Comme $t^2+2t<x,v>\geq 0; \forall t \geq t_0 \geq t_{K_1} > 0$ alors :

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^1\right\|_r^{K_1} \leq \left\|Y^1\right\|_r^{K_1}$$

- Comme $t^2-2t<x,v>\geq 0; \forall t \geq t_0 \geq t_{K_2} > 0$ alors :

$$\left\|(\phi_t)_* Y^2\right\|_r^{K_2} \leq \left\|Y^2\right\|_r^{K_2}$$

Notations

Soit $\varepsilon_i \in [0,1[$, avec $i = 1,2$ on note :

$$\Omega_1^{\varepsilon_2} = \{x \in \mathbb{R}^n / < x, v > \leq \varepsilon_2\} = \Omega_1 + B_{\varepsilon_2} \ avec \ B_{\varepsilon_2} \subset \Omega_2$$

et

$$\Omega_2^{\varepsilon_1} = \{x \in \mathbb{R}^n / < x, v > \geq -\varepsilon_1\} = \Omega_2 + B_{\varepsilon_1} \ avec \ B_{\varepsilon_1} \subset \Omega_1$$

On suppose qu'il existe une plus petite boule $B_\delta \subset \mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon $\delta \in [0,1[$ qui recouvre la totalité des deux boules B_{ε_1} et B_{ε_2} :

$$B_\delta = \bigcup_{\varepsilon_i \in [0,\delta] \subset [0,1[} B_{\varepsilon_i}$$

On pose $E_i^\delta = \{Y \in E, / suppY \subset \Omega_i^\delta\}$; $\forall i = 1,2$ et :
$E = E_1 \oplus E_2 = E_1^\delta + E_2^\delta, \forall \delta \in [0,1[$.

Théorème 4. *Pour tout $t \geq 0$; le difféomorphisme $(\phi_t)_*$ opère doucement sur E_1^δ ; et respectivement, le difféomorphisme $(\phi_{-t})_*$ opère doucement sur E_2^δ*

Démonstration. Montrons d'abord que $(\phi_t)_*$ opère doucement sur E_1^δ.
On remarque que $\forall x \in \Omega_1^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n / < x, v > \leq \delta\}$ alors $< x, v > \leq \delta$ donc : $\forall t \geq 0; \|x - tv\|^2 =< x - tv, x - tv >= \|x\|^2 - 2t < x, v > +t^2 \geq (t-\delta)^2 - \delta^2$; et selon l'inégalité (2.1.2), c'est à dire :

$$\left\|(\phi_t)_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \quad \leq \quad \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1} \sup_{x\in\Omega_1} \left(\frac{1}{1 + \|x - tv\|^2}\right)$$

d'où :

$$\left\|(\phi_t)_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} \left(\frac{1}{1 - \delta^2 + (t-\delta)^2}\right) \quad \forall r > 0 \tag{2.1.7}$$

Nous posons :

$$C(t) = \frac{1}{1 - \delta^2 + (t-\delta)^2} = \frac{1}{t^2 - 2t\delta + 1}$$

Comme $\Delta' = \delta^2 - 1 < 0$ car $\delta \in [0,1[$ d'où $t^2 - 2t\delta + 1 > 0$; alors l'intégrale impropre :

$$J = \int_0^{+\infty} C(t)dt$$

est de première espèce, et comme $\lim_{t\to+\infty} t^2 C(t) = 1$, alors l'intégrale généralisée J converge.

d'où $(\phi_t)_*$ opère doucement sur $E_1^\delta, \forall t \geq 0$.

- Nous pouvons suivre le même raisonnement pour le cas $(\phi_{-t})_*$.
En effet, d'après l'inégalité (2.1.4), c'est à dire :

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2} \sup_{x\in\Omega_2} \left(\frac{1}{1 + \|x + tv\|^2}\right)$$

et puisque $\forall x \in \Omega_2^\delta$ alors $< x, v > \geq -\delta$ donc :

$$\forall t \geq 0; \|x + tv\|^2 =< x+tv, x+tv >= \|x\|^2 + 2t < x, v > +t^2 \geq \|x\|^2 - 2t\delta + t^2 \geq (t-\delta)^2 - \delta^2$$

d'où :

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(t-\delta)^2}\right) \quad \forall r>0, \tag{2.1.8}$$

d'après ce qui précède, nous concluons que $(\phi_{-t})_*$ opère doucement sur $E_2^\delta, \forall t \geq 0$. $\square$

Corollaire 2. *L'espace de Fréchet E admet une structure hyperbolique pour le semi-groupe ϕ_{t*}.*

2.1.2 Difféomorphismes doucement inversibles

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ l'espace de Fréchet de type Hyperbolique pour le $X_1 - flot$, alors il existe $\delta \in [0,1[$, tel que $E = E_1^\delta + E_2^\delta$ avec :
- $(\phi_t)_*$ un difféomorphisme opérant doucement sur E_1^δ
- $(\phi_{-t})_*$ un difféomorphisme opérant doucement sur E_2^δ.

Théorème 5. $\exists\delta \in [0,1[$ *tel que les difféomorphismes $(I-\phi_{t*})$ et $(I-(\phi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles sur $E, \forall t \geq t_0 > 0$.*

Démonstration. - 1er Pas : Soit $Y \in E_1 \oplus E_2$ alors $\exists! Y^i \in E_i / Y = Y^1 + Y^2$.
Montrons que la série : $\sum_{m\geq 0}(\phi_{mt})_* Y^1$ (respectivement $\sum_{m\geq 0}(\phi_{-mt})_* Y^2$) converge uniformément sur E_1^δ (respectivement sur E_2^δ) $\forall t \geq t_0 > 0$. Selon l'équation (2.1.7), nous avons :

$$\left\|(\phi_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(mt-\delta)^2}\right) = U_m(t) \quad \forall r>0,$$

Or $U_m(t) \sim \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} \frac{1}{m^2 t_0^2}; \forall t \geq t_0 > 0$ avec $\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2}$ converge donc d'après le critère d'équivalence, alors la série $\sum_{m\geq} U_m$ converge uniformément sur E_1^δ, d'où la série $\sum_{m\geq 0}\left\|(\phi_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1}$ convergence uniformément sur $E_1^\delta; \forall t \geq t_0 > 0$. Nous concluons que la série $\sum_{m\geq 0}(\phi_{mt})_* Y^1$ converge uniformément sur $E_1^\delta, \forall t \geq t_0 > 0$.
De même, selon l'estimation (2.1.8) la série $\sum_{m\geq 0}(\phi_{-mt})_* Y^2$ converge uniformément sur $E_2^\delta, \forall t \geq t_0 > 0$.

- 2ème pas : D'après le lemme 3, nous avons :

$$\begin{aligned}\left[(I-\phi_{t*})^{-1}Y\right](x) &= \sum_{m\geq 0}\left(\phi_{mt*}Y\right)(x)\\ &= -\sum_{m\geq 1}\left(\phi_{-mt*}Y\right)(x)\end{aligned}$$

et respectivement :

$$\begin{aligned}\left[(I-\phi_{-t*})^{-1}Y\right](x) &= \sum_{m\geq 0}\left(\phi_{-mt*}Y\right)(x)\\ &= -\sum_{m\geq 1}\left(\phi_{mt*}Y\right)(x)\end{aligned}$$

- 3ème pas : Montrons que $(I-(\phi_t)_*)$ et $(I-(\phi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles sur $E = E_1 \oplus E_2$.
Soit $Y \in E = E_1 \oplus E_2$ alors $\exists! Y^i \in E_i / Y = Y^1 + Y^2$, d'où :

$$(I-\phi_{t*})^{-1}Y = \sum_{m\geq 0}(\phi_{mt})_* Y^1 - \sum_{m\geq 1}(\phi_{-mt})_* Y^2$$

et respectivement :

$$(I-\phi_{-t*})^{-1}Y=\sum_{m\geq 0}(\phi_{-mt})_*Y^2-\sum_{m\geq 1}(\phi_{mt})_*Y^1$$

D'après le 1er pas, ces deux dernières séries sont convergentes, nous aurons alors :

$$\begin{aligned}\left\|(I-\phi_{t*})^{-1}Y\right\|_r &\leq \sum_{m\geq 0}\left\|(\phi_{mt})_*Y^1\right\|_r^{\Omega_1}+\sum_{m\geq 1}\left\|(\phi_{-mt})_*Y^2\right\|_r^{\Omega_2}\\ &\leq \sum_{m\geq 0}\frac{1}{1-\delta^2+(mt-\delta)^2}\left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}+\sum_{m\geq 1}\frac{1}{1-\delta^2+(mt-\delta)^2}\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\\ &\leq \left(\left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}+\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\right)\sum_{m\geq 0}\frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}\end{aligned}$$

La série :

$$\sum_{m\geq 0}\frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}$$

converge vers $S(t_0,\delta)$, d'où :

$$\left\|(I-(\phi_t)_*)^{-1}Y\right\|_r\leq S(t_0,\delta)\left\|Y\right\|_{r+2}$$

respectivement :

$$\left\|(I-(\phi_{-t})_*)^{-1}Y\right\|_r\leq S(t_0,\delta)\left\|Y\right\|_{r+2}$$

donc : $(I-(\phi_t)_*)$ et $(I-(\phi_{-t})_*)$ sont alors doucement inversibles sur E. □

2.1.3 Spectre et résolvante des semi-groupes de translation ϕ_{t*} et ϕ_{-t*}

Lemme 5. $\exists\delta\in[0,1[$, *et pour tout* $t\geq t_0>0$ *alors*
1) Les séries suivantes :

$$\sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y^1;\qquad et \qquad \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{(mt)})_*Y^2$$

convergent uniformément $\forall|\lambda|>1;\forall t\geq t_0>0$ *; sur* E_1^δ*, et respectivement sur* E_2^δ
2) Les séries suivantes :

$$\sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_*Y^1;\qquad et \qquad \sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{(-mt)})_*Y^2$$

convergent uniformément $\forall|\lambda|<1;\forall t\geq t_0>0$ *; sur* E_1^δ*, et respectivement sur* E_2^δ
3)Les séries suivantes :

$$\sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y^1;\qquad et \qquad \sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{(-mt)})_*Y^2$$

convergent uniformément pour $|\lambda|=1;\forall t\geq t_0>0$ *; sur* E_1^δ*, et respectivement sur* E_2^δ*.*

Démonstration. Soit $Y\in E=E_1\oplus E_2$; alors $\exists!Y^i\in E_i(i=1,2)$ telle que $Y=Y^1+Y^2$.
Nous posons :

$$\begin{cases}U_m^1(\lambda,t)=\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y^1\\ U_m^2(\lambda,t)=\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y^2\end{cases}$$

et respectivement :

$$\begin{cases} V_m^1(\lambda, t) = \lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_* Y^1 \\ V_m^2(\lambda, t) = \lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_* Y^2 \end{cases}$$

1) Si $|\lambda| > 1$; montrons que $\sum_{m \geq 0} U_m^1(\lambda, t)$ et $\sum_{m \geq 0} U_m^2(\lambda, t)$ convergent uniformément $\forall t \geq t_0 > 0$; sur E_1^δ et E_2^δ avec $\delta \in [0, 1[$
i) D'après l'inégalité (2.1.7) $\exists \delta \in [0, 1[$ tel que :

$$\left\| U_m^1 \right\|_r^{\Omega_1} \leq \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \frac{1}{1 - \delta^2 + (mt_0 - \delta)^2} \left\| Y^1 \right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} ; t \geq t_0 > 0$$

D'après le critère d'Alembert, la série $\sum_{m \geq 0} \left\| U_m^1 \right\|_r^{\Omega_1}$ converge $\forall |\lambda| \geq 1$ et pour tout $x \in \Omega_1^\delta$ et $\forall t \geq t_0 > 0$.
ii) Nous avons :

$$U_m^2(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt})_* Y^2 = \frac{1}{\lambda^{m+1}} Y^2(x - mtv)$$

Or, d'après l'inégalité (2.1.6), pour tout compacte $K_2 \subset \Omega_2$:

$$\left\| U_m^2(\lambda, t) \right\|_r^{K_2} \leq \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \left\| Y^2 \right\|_r^{K_2}$$

D'après le critère d'Alembert, la série $\sum_{m \geq 0} \left\| U_m^2(\lambda, t) \right\|_r^{\Omega_2}$ converge $\forall |\lambda| \geq 1$, et converge uniformément par rapport à tout $x \in \Omega_2^\delta$ et $\forall t \geq t_0$.

2) Si $|\lambda| < 1$
i) Montrons que la série $\sum_{m \geq 1} V_m^1(\lambda, t)$ converge $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$
Or, d'après l'inégalité (2.1.5), pour tout compacte $K_1 \subset \Omega_1$:

$$\left\| V_m^1(\lambda, t) \right\|_r^{K_1} \leq |\lambda|^{m-1} \left\| Y^1 \right\|_r^{K_1}$$

D'après le critère d'Alembert, la série $\sum_{m \geq 1} \left\| V_m^1(\lambda, t) \right\|_r^{\Omega_1}$ converge $\forall |\lambda| < 1$, et converge uniformément par rapport à tout $x \in \Omega_1^\delta$ et $\forall t \geq t_0$.
ii) Nous avons :

$$V_m^2(\lambda, t) = \lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_* Y^2 = \lambda^{m-1} Y^2(x + mtv)$$

Or, d'après l'inégalité (2.1.3), pour tout compacte $K_2 \subset \Omega_2$:

$$\left\| V_m^2(\lambda, t) \right\|_r^{\Omega_2} \leq |\lambda|^{m-1} \left\| Y^2 \right\|_r^{\Omega_2}$$

D'après le critère d'Alembert, la série $\sum_{m \geq 1} \left\| V_m^2(\lambda, t) \right\|_r^{\Omega_2}$ converge $\forall |\lambda| < 1$.

3) Pour $|\lambda| = 1$, nous avons :

$$U_m^1(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt})_* Y^1$$

i) D'après l'inégalité (2.1.7) $\exists \delta \in [0, 1[$ tel que :

$$\left\| U_m^1(\lambda, t)) \right\|_r^{\Omega_1} \leq \frac{1}{1 - \delta^2 + (mt_0 - \delta)^2} \left\| Y^1 \right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} \sim \frac{\left\| Y^1 \right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}}{m^2 t_0^2} = \Delta_m$$

D'après le critère d'équivalence et de comparaison, la série $\sum_{m\geq 0}\left\|U_m^1(\lambda,t)\right\|_r^{\Omega_1}$ converge uniformément $\forall t \geq t_0 > 0$.
ii) et de même, nous avons :

$$V_m^2(\lambda,t) = \lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_* Y^2$$

D'après l'estimation (2.1.8) $\exists\delta \in [0,1[$ tel que :

$$\left\|V_m^2(\lambda,t))\right\|_r^{\Omega_2} \leq \frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta} \sim \frac{\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}}{m^2t_0^2}$$

D'après le critère d'équivalence et de comparaison, la série $\sum\left\|V_m^2(\lambda,t)\right\|_r^{\Omega_2}$ converge uniformément $\forall t \geq t_0 > 0$.

□

Théorème 6. $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, *nous avons :*
a) $\exists\delta \in [0,1[$, *tel que l'opérateur* $(\lambda I-(\phi_t)_*)$ *(respectivement* $(\lambda I-(\phi_{-t})_*)$*) est doucement inversible sur* E_1^δ *(respectivement, sur* E_2^δ*) et sur* $E = E_1 \oplus E_2$.
b) La résolvante existe, et nous avons :

$$R(\lambda,(\phi_t)_*)Y = (\lambda I-(\phi_t)_*)^{-1}Y = \begin{cases} \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y; & si\,|\lambda| > 1 \\ \\ -\sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_*Y; & si\,|\lambda| < 1 \end{cases}$$

et

$$R(\lambda,(\phi_t)^*)Y = (\lambda I-(\phi_t)^*)^{-1}Y = \begin{cases} \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})^*Y; & si\,|\lambda| > 1 \\ \\ -\sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{mt})_*Y; & si\,|\lambda| < 1 \end{cases}$$

- Pour $|\lambda| = 1, \forall Y \in E = E_1 \oplus E_2; \exists! Y^i \in E_i (i = 1,2)$ *tel que* $Y = Y^1 + Y^2$

$$\begin{aligned} R(\lambda,(\phi_t)_*)Y &= (\lambda I-(\phi_t)_*)^{-1}Y = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y^1 - \sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_*Y^2 \\ R(\lambda,(\phi_{-t})_*)Y &= (\lambda I-(\phi_{-t})_*)^{-1}Y = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{-mt})_*Y^2 - \sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{mt})_*Y^1 \end{aligned}$$

Démonstration. a) $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, et $\forall t \geq t_0 > 0$, montrons que l'opérateur $(\lambda I-(\phi_t)_*)$ (respectivement, $(\lambda I-(\phi_{-t})_*)$ est doucement inversible sur E_1^δ (respectivement, sur E_2^δ).
En effet :

$$(\lambda I-(\phi_t)_*)^{-1}Y^1 = \begin{cases} \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y^1; & si|\lambda| \geq 1 \\ ou \\ -\sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_*Y^1; & si|\lambda| < 1 \end{cases}$$

de même :

$$(\lambda I-(\phi_{-t})_*)^{-1}Y^2 = \begin{cases} \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{-mt})_*Y^2; & si|\lambda| \geq 1 \\ ou \\ -\sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{mt})_*Y^2; & si|\lambda| < 1 \end{cases}$$

Montrons que : $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $(\lambda I - (\phi_t)_*)$ (respectivement $(\lambda I - (\phi_{-t})_*)$) est doucement inversible sur $E = E_1 \oplus E_2$.
Soit $Y \in E = E_1 \oplus E_2$ alors $\exists! Y^i \in E_i / Y = Y^1 + Y^2$, alors :

$$(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y = (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y^1 + (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y^2$$

i) Si $|\lambda| > 1$

$$\left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r \leq \sum_{m\geq 0} \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \left\|(\phi_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} + \sum_{m\geq 0} \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \left\|(\phi_{mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2}$$

D'après le lemme 4, nous déduisons que pour tout compact $K_2 \subset \Omega_2$ dans $\mathbb{R}^n$, $\exists t_0 > 0 / \forall t \geq t_0$; les deux séries convergent pour $|\lambda| > 1$, alors ils existent un $\delta \in [0, 1[$ et des constantes C_1, C_2 telles que :

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r &\leq C_1 \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} + C_2 \left\|Y^2\right\|_r^{K_2} \\ &\leq C \left\|Y\right\|_{r+2} \qquad \textit{où } C = sup(C_1, C_2) \end{aligned}$$

Donc, pour $|\lambda| > 1$, $(\lambda I - (\phi_t)_*)$ est doucement inversible sur E.
ii) Si $|\lambda| < 1$

$$\left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r \leq \sum_{m\geq 1} |\lambda|^{m-1} \left\|(\phi_{-mt})_* Y^1\right\|_r^{K_1} + \sum_{m\geq 1} |\lambda|^{m-1} \left\|(\phi_{-mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2}$$

D'après le lemme 4, nous déduisons que pour tout compact $K_1 \subset \Omega_1$ dans $\mathbb{R}^n$, $\exists t_0 > 0 / \forall t \geq t_0$; les deux séries convergent pour $|\lambda| < 1$, alors ils existent un $\delta \in [0, 1[$ et des constantes C_3, C_4 telles que :

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r &\leq C_3 \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{K_1} + C_4 \left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta} \\ &\leq C' \left\|Y\right\|_{r+2} \qquad \textit{où } C' = sup(C_3, C_4) \end{aligned}$$

Donc, pour $|\lambda| < 1$, $(\lambda I - (\phi_t)_*)$ est doucement inversible sur E.

iii) Si $|\lambda| = 1$

$$(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt})_* Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi_{-mt})_* Y^2$$

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r &\leqslant \sum_{m\geq 0} \left\|(\phi_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1^\delta} + \sum_{m\geq 1} \left\|(\phi_{-mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2^\delta} \\ &\leqslant \left(\left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} + \left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\right) \sum_{m\geq 0} \frac{1}{1 - \delta^2 + (mt_0 - \delta)^2} \end{aligned}$$

La série :

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{1 - \delta^2 + (mt_0 - \delta)^2}$$

converge vers $S(t_0, \delta)$, d'où :

$$\left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r \leq S(t_0, \delta) \left\|Y\right\|_{r+2}$$

donc : $(\lambda I - (\phi_t)_*)$ est alors doucement inversible sur E pour $|\lambda| = 1$.

3ème étape : Respectivement, par un même raisonnement nous pouvons démontrer que $(\lambda I - (\phi_{-t})_*)$ est alors doucement inversible sur E.

Nous concluons donc que les opérateurs : $(\lambda I-(\phi_t)_*)$ et $(\lambda I-(\phi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles sur E, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall t \geq t_0 > 0$. $\square$

Remarque : Comme nous avons :

$$(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1}Y = (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1}Y^1 + (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1}Y^2$$

alors :

$$(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1}Y = \begin{cases} \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_* Y^1 + \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_* Y^2; & si\ |\lambda| > 1 \\ \\ -\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_* Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_* Y^2; & si\ |\lambda| < 1 \\ \\ \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_* Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\phi_{-mt})_* Y^2; & si\ |\lambda| = 1 \end{cases}$$

et respectivement :

$$(\lambda I - (\phi_{-t})_*)^{-1}Y = \begin{cases} \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})^* Y^1 + \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_* Y^2; & si\ |\lambda| > 1 \\ \\ -\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\phi_{mt})_* Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\phi_{mt})_* Y^2; & si\ |\lambda| < 1 \\ \\ \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{-mt})_* Y^2 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\phi_{mt})_* Y^1; & si\ |\lambda| = 1 \end{cases}$$

Corollaire 3. *Le spectre et la résolvante des semi-groupes de translation $(\phi_t)_*$ et $(\phi_{-t})_*$ sont : $\sigma((\phi_t)_*) = \sigma((\phi_{-t})_*) = \varnothing; \rho((\phi_t)_*) = \rho((\phi_{-t})_*) = \mathbb{C}$.*

2.2 Spectres des semi-groupes de dilatations $\exp(tX_0)_*$ et $\exp(-tX_0)_*$

Soit X_0 un champ de vecteurs de E tel que :

$$X_0.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^- & 0 \\ 0 & A^+ \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^- x \\ A^+ y \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in K \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n$$

A^- (respectivement A^+) est une matrice symétrique réelle de type $(k \times k)$ (respectivement $l \times l$) avec $k + l = n$, ayant des valeurs propres strictement négatives (respectivement strictement positives).
La matrice A^- vérifie : $\forall m \geq 2, \forall i = 1, k : \exists a_R, a_L, \rho_1 > 0$, telle que :

$$\begin{cases} -a_L \leq \lambda_i \leq -a_R \ < 0 \\ \\ m.a_R - a_L \geq \rho_1 > 1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Et respectivement pour A^+ : $\forall m \geq 2, \forall i = 1, l : \exists b_R, b_L, \rho_2 > 0$ telle que :

$$\begin{cases} 0 < b_L \leq \lambda_i \leq b_R \\ \\ m.b_L - b_R \geq \rho_2 > 1 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Nous posons $E = E_1 \oplus E_2$ et $E_i = \{Y \in E/suppY \subset \Omega_i\}$ avec $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l / Y(x,y) = (Y^1(x), 0)\right\} \\ \Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l / Y(x,y) = (0, Y^2(y))\right\} \end{cases}$$

.

Nous adoptons dans la suite la notation suivante :

$$X_0 = X_0^- + X_0^+; \quad X_0\,(x,y) = \left(X_0{}^-\,(x)\,, X_0^+\,(y)\right) = \left(A^-.x, A^+.y\right) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$$

D'où :

$$(\exp tX_0)\,(x,y) = \left(\left(\exp tX_0^-\right)(x), \left(\exp tX_0^+\right)(y)\right); \forall (x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$$

2.2.1 Estimation du flot $(exptX_0)$

Lemme 6. *Le X_0^+ -flot a pour estimation, pour tout $t \geqslant 0$:*

$$\begin{cases} \| \, y \, \| \, e^{b_L t} \leqslant \| \, (\exp tX_0^+)\,(y) \, \| \leqslant \| \, y \, \| \, e^{b_R t} \\ \| \, y \, \| \, e^{-b_R t} \leqslant \| \, (\exp -tX_0^+)\,(y) \, \| \leqslant \| \, y \, \| \, e^{-b_L t} \end{cases} \quad (\forall y \in \mathbb{R}^l)$$

respectivement pour le X_0^- -flot :

$$\begin{cases} \| \, x \, \| \, e^{-a_L t} \leqslant \| \, (\exp tX_0^-)\,(x) \, \| \leqslant \| \, x \, \| \, e^{-a_R t} \\ \| \, x \, \| \, e^{a_R t} \leqslant \| \, (\exp -tX_0^-)\,(x) \, \| \leqslant \| \, x \, \| \, e^{a_L t} \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k)$$

Démonstration. On pose $\phi_t^+\,(y) = (\exp tX_0^+)\,(y)$, d'où :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \, \phi_t^+\,(y) \, \|^2 = \langle \phi_t^+\,(y)\,, X_0^+ \circ \phi_t^+\,(y) \rangle$$

D'après le théorème de Wintner [22], $\langle y, A^+ y \rangle \leq d \mid y \mid^2$, $y \in \mathbb{R}^l$, où la constante d est la plus grande des valeurs propres de la matrice symétrique A^+. Nous obtenons :

$$\inf_{i=1,..,l} \lambda_i . \| \, \phi_t^+\,(y) \, \|^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \, \phi_t^+\,(y) \, \|^2 \leqslant \sup_{i=1,..,l} \lambda_i . \| \, \phi_t^+\,(y) \, \|^2$$

Nous aurons finalement :

$$\| \, y \, \| \, e^{b_L t} \leqslant \| \, \phi_t^+\,(y) \, \| \leqslant \| \, y \, \| \, e^{b_R t}$$

Il en est de même pour ϕ_{-t}^+ en remplaçant t par $(-t)$:

$$\| \, y \, \| \, e^{-b_R t} \leqslant \| \, \phi_{-t}^+\,(y) \, \| \leqslant \| \, y \, \| \, e^{-b_L t}$$

Par le même raisonnement concernant X_0^--flot nous aboutissons à :

$$\begin{cases} \| \, x \, \| \, e^{-a_L t} \leqslant \| \, \phi_t^-\,(x) \, \| \leqslant \| \, x \, \| \, e^{-a_R t} \\ \| \, x \, \| \, e^{a_R t} \leqslant \| \, \phi_{-t}^-\,(x) \, \| \leqslant \| \, x \, \| \, e^{a_L t} \end{cases}$$

□

2.2.2 Algèbre admissible de type hyperbolique et estimations de $(exptX_0)_*$

Définition 11. *Algèbre admissible : Soit U une sous-algèbre de Lie-Fréchet de E. U est dite admissible par rapport au champ de vecteurs $Y_0 = X_0 + Z_0$ si et seulement elle satisfait aux conditions suivantes :*
i) Il existe U_1 (respectivement U_2) une sous-algèbre de Lie-Frêchet de E contenant le champ de vecteurs :
$Y_0^- = X_0^- + Z_0^-$ (resp. $Y_0^+ = X_0^+ + Z_0^+$) tel que :

$$U = U_1 \oplus U_2$$

avec :

$$Z_0(x, y) = \left(Z_0^-(x), Z_0^+(y)\right) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n; \forall (x, y) \in K \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$$

Z_0^- (respectivement Z_0^+) est un germe infiniment plat à l'origine, i.e satisfaisant l'estimation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} \forall \alpha = (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{cases}$$

il existe $M_\alpha > 0$ tel que :

$$||D^\alpha Z_0^-(x)|| \leq M_\alpha. \ ||x||^{k_1}, \ \forall k_1 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

(resp

$$||D^\alpha Z_0^+(y)|| \leq M_\alpha. \ ||y||^{k_2}, \ \forall k_2 > 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^l)$$

ii) $\forall Y \in U; \exists! Y^i \in U_i (i = 1, 2)$ tel que $Y = Y^1 + Y^2$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n = \Omega_1 \cup \Omega_2$, nous avons :

$$Y(x, y) = \left(Y^1(x), Y^2(y)\right) \in \Omega_1 \cup \Omega_2;$$

$$(exptY_0)_* Y(x, y) = \left((exptY_0^-)_* Y^1(x), (exptY_0^+)_* Y^2(y)\right) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$$

.

iii) Il existe $\delta > 0$ tel que $U_i^\delta = \left\{Y^i \in U_i / suppY^i \subseteq \Omega_i^\delta\right\}$ avec $\Omega_i^\delta = \Omega_i + B_\delta$ et $B_\delta \subset \Omega_j, i \neq j$, et $U = U_1^\delta + U_2^\delta$.

4i) U est localement fermé, c'est à dire, pour toute suite $(X_m^i)_{m \geq 0}$ dans U_i tel que $suppX_m^i \subset \Omega_i$ converge vers X^i dans Ω_i.

Définition 12. *(Absorbants N_1^+ et N_2^+) Un sous-ensemble fermé N_i^+ est dit un absorbant positif du flot ϕ_t, si et seulement si : pour tout compact K_i dans Ω_i, il existe une constante $t_{K_i} > 0$ tel que : $\phi_t(K_i) \subset N_i^+$; et respectivement, un sous-ensemble fermé N_i^- est dit un absorbant négatif du flot ϕ_t, si et seulement si : pour tout compact K_i dans Ω_i, il existe une constante $t_{K_i} > 0$ tel que : $\phi_{-t}(K_i) \subset N_i^-$*

Exemples : Soit K_i un compact de $\Omega_i, (i = 1, 2)$, alors $\exists \delta > 0$, tel que, $\delta = \underset{x \in K_i}{min} \|x\|$, nous pouvons alors avoir les absorbants suivants :

1. L'absorbant positif N_1^+ :

$$N_1^+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l / Y(x, y) = (Y^1(x), 0) \text{ et } \|x\| \geq \delta\right\} \subset \Omega_1$$

N_1^+ est un absorbant positif pour ϕ_{-t}^- car :

$$\left\|\phi_{-t}^-(x)\right\| \geq \|x\| \, e^{a_R.t} \geq \|x\| \geq \delta$$

2. L'absorbant positif N_2^+ :

$$N_2^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l / Y(x,y) = (0, Y^2(y)) \text{ et } \|y\| \geq \delta\right\} \subset \Omega_2$$

N_2^+ est un absorbant positif pour ϕ_t^+ car :

$$\left\|\phi_t^+(y)\right\| \geq \|y\| \, e^{b_L.t} \geq \|y\| \geq \delta$$

3. L'absorbant négatif N_1^- :

$$N_1^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l / Y(x,y) = (Y^1(x), 0) \text{ et } \|x\| \leq \delta\right\} \subset \Omega_1$$

N_1^- est un absorbant négatif pour ϕ_t^- car :

$$\left\|\phi_t^-(x)\right\| \leq \|x\| \, e^{-a_R.t} \leq \|x\| \leq \delta$$

4. L'absorbant négatif N_2^- :

$$N_2^- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l / Y(x,y) = (0, Y^2(y)) \text{ et } \|y\| \leq \delta\right\} \subset \Omega_2$$

N_2^- est un absorbant négatif pour ϕ_{-t}^+ car :

$$\left\|\phi_{-t}^+(y)\right\| \leq \|y\| \, e^{-b_L.t} \leq \|y\| \leq \delta$$

Lemme 7. *Le difféomorphisme $(\phi_t^-)_*$ (respectivement $(\phi_{-t}^+)_*$) opère doucement sur U_1 (respectivement sur U_2), en d'autres termes :*
- Pour toute constante ρ_1' arbitraire et positive, ils existent des constantes :
$m_1 = \left[r.\frac{a_L}{a_R}\right] + \rho_1' > 0$ et $C_1 > 0$ telle que :

$$||(\exp tX_0^-)_*.Y^1||_r^{\Omega_1} \leq C_1.e^{-t.\rho_1' a_R}.\left\|Y^1\right\|_{r+m_1}^{\Omega_1} \qquad \forall Y^1 \in U_1 \tag{2.2.3}$$

- Pour toute constante ρ_2' arbitraire et positive, ils existent des constantes :
$m_2 = \left[r.\frac{b_R}{b_L}\right] + \rho_2' > 0$ et $C_2 > 0$ telle que :

$$||(exp{-t}X_0^+)_*.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq C_2.e^{-t\rho_2'.b_L}.\left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{\Omega_2} \qquad \forall Y^2 \in U_2 \tag{2.2.4}$$

Démonstration. *i*) Soit $Y^1 \in U_1$, telle que :

$$Y^1 = \sum_{j=1}^{k} u_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \in U_1$$

Considérons le difféomorphisme suivant :

$$(\phi_t^-)_*.Y^1 = (D\phi_t^-.Y^1) \circ (\phi_t^-)^{-1}$$

$$(\phi_t^-)_*.Y^1 = \sum_{j=1}^{k} e^{tX_0^-} \left[u_j\left(e^{-\mathrm{t}X_0^-}.x\right)\right] \frac{\partial}{\partial x_j}; \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

Pour tout entier $r \geq 0$ et tout multi-indice $\beta = (\beta_1 \ldots, \beta_k) \in \mathbb{N}^k$ de module : $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_k$, nous obtenons pour $x \in \mathbb{R}^k$:
$D_x^\beta(\phi_t^-)_*.Y^1(x) = (D_x^\beta e^{tX_0^-}.u_1(e^{-tX_0^-}.x), \ldots, D_x^\beta e^{tX_0^-}.u_k(e^{-tX_0^-}.x))$

Nous aurons :

$$||(D_x^\beta(\phi_t^-)_*.Y^1(x))|| \ \leq e^{-a_R\mathrm{t}} \sup_{j=1\ldots k} \left\| D_x^\beta u_j(e^{-tX_0^-}.x) \right\|$$

Puisque $||\phi_{-t}^-(x)|| \leq ||x||e^{a_L t}$, et en posant $z = e^{-tX_0^-}x$, alors

$$||(D_x^\beta(\phi_t^-)_*.Y^1(x))|| \leq e^{-a_R t}.e^{t|\beta|a_L}. \sup_{j=1\ldots k} \left\| D_z^\beta.u_j(z) \right\|$$

d'où :

$$||(\phi_t^-)_*.Y^1||_r^{\Omega_1} \leq e^{-t(-ra_L+a_R)} \left\| Y^1 \right\|_r^{\phi_{-t}^-(\Omega_1)}, \forall r \in \mathbb{N}$$

Soit ρ_1' une constante arbitraire et positive, alors il existe $m_1 = \left[r.\frac{a_L}{a_R}\right] + \rho_1' > 0$, nous aurons :

$$||(\phi_t^-)_*.Y^1||_r^{\Omega_1} \leq e^{-t(a_R-ra_L)}.\ ||Y^1||_{r+m_1}^{\phi_{-t}^-(\Omega_1)}. \sup_{x\in\mathbb{R}^k} \left(\frac{1}{1+\left\|\phi_{-t}^-(x)\right\|^2} \right)^{\frac{m_1}{2}}$$

D'après le lemme 6 :

$$\| \ x \ \| \ e^{a_R t} \leqslant \| \ \phi_{-t}^- \ (x) \ \|$$

il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$||(\phi_t^-)_*.Y^1||_r^{\Omega_1} \leq C_1.e^{-t.\rho_1' a_R}. \left\| Y^1 \right\|_{r+m_1}^{N_1^+}$$

Et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t\rho_1' a_R} dt$ est convergente, par conséquent, $(\phi_t^-)_*$ opère doucement sur U_1.

ii) Nous avons, respectivement :

Pour tout champ de vecteurs $Y^2 \in U_2$, avec : $Y^2 = \sum_{j=1}^{l} v_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}$. Nous considérons :

$$(\phi_{-t}^+)_*.Y^2 = \sum_{j=1}^{l} e^{-tX_0^+} \left[v_j \left(e^{\mathrm{t}X_0^+}.y \right) \right] \frac{\partial}{\partial y_j}; \quad \forall y \in \mathbb{R}^l$$

Pour tout entier $r \geq 0$ et tout multi-indice :
$\beta' = (\beta_1' \ldots, \beta_l') \in \mathbb{N}^l$ de module $|\beta'| = \beta_1' + \ldots + \beta_l'$, nous obtenons :
$D_y^{\beta'}(\phi_{-t}^+)_*.Y^2(y) = (D_y^{\beta'} e^{-tX_0^+}.v_1(e^{tX_0^+}.y), \ldots, D_y^{\beta'} e^{-tX_0^+}.v_l(e^{tX_0^+}.y))$
Nous aurons :

$$||(D_y^{\beta'}(\phi_{-t}^+)_*.Y^2(y))|| \leq e^{-b_L\mathrm{t}} \sup_{j=1\ldots l} \left\| D_y^{\beta'} v_j(e^{tX_0^+}.y) \right\|$$

Puisque $||\phi_t^+(y)|| \leq ||y||e^{b_R t}$, et en posant $z' = e^{tX_0^+}.y$ alors :

$$||(D_y^{\beta'}(\phi_{-t}^+)_*.Y^2(y))|| \leq e^{-b_L t}.e^{t|\beta'|b_R}. \sup_{j=1\ldots l} \left\| D_{z'}^{\beta'}.v_j(z') \right\|$$

D'où

$$||(\phi_{-t}^+)_*.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq e^{-t(-rb_R+b_L)} \left\| Y^2 \right\|_r^{\phi_t^+(\Omega_2)}$$

Soit ρ'_2 une constante arbitraire et positive, alors il existe $m_2 = \left[r.\frac{b_R}{b_L}\right] + \rho'_2 > 0$, nous aurons :

$$||(\phi^{+}_{-t})_{*}.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq e^{-t(b_L - rb_R)}.||Y^2||_{r+m_2}^{\phi_t^+(\Omega_2)}.\sup_{y\in\mathbb{R}^l}\left(\frac{1}{1+\left\|\phi_t^+(y)\right\|^2}\right)^{\frac{m_2}{2}}$$

D'après le lemme 6 :

$$\| y \| e^{b_L t} \leqslant \| \phi_t^+ (y) \|$$

il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$||(\phi^{+}_{-t})_{*}.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq C_2.e^{-t\rho'_2.b_L}.\left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{N_2^+}$$

Et comme l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t(\rho'_2.b_L)}dt$ est convergente, par conséquent, $(\phi^{+}_{-t})_{*}$ opère doucement sur U_2.

□

Lemme 8. *i) $(\phi_t)_*$ est invariant sur $U; \forall t \in \mathbb{R}$*
ii) $(\phi_t)_*$ opère doucement sur U_1 et $(\phi_{-t})_*$ opère doucement sur U_2 pour tout $t \geq 0$. C'est à dire, $\forall t \geq 0$, nous avons :

$$||(\exp tX_0)_*.Y||_r^{\Omega_1} \leq e^{-\omega t}.||Y||_{r+m_1}^{\Omega_1} \quad \omega \in \mathbb{R}^{*+}, \forall Y \in U$$

et

$$||(\exp -tX_0)_*.Y||_r^{\Omega_2} \leq e^{-\omega' t}.||Y||_{r+m_2}^{\Omega_2} \quad \omega' \in \mathbb{R}^{*+}, \forall Y \in U$$

Démonstration. i) $\forall Y \in U$, nous allons montrer que $(\phi_t)_* Y \in U, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$(\phi_t)_* Y(x,y) = \Big((\phi_t^-)_* Y^1(x), (\phi_t^+)_* Y^2(y)\Big)$$

-On fait la projection de $(\phi_t)_* Y$ sur U_1, alors :

$$(\phi_t)_* Y(x,y) = \Big((\phi_t^-)_* Y^1(x), 0\Big)$$

D'où $(\phi_t)_* Y \in U$

- De même, on fait la projection de $(\phi_t)_* Y$ sur U_2, alors :

$$(\phi_t)_* Y(x,y) = \Big(0, (\phi_t^+)_* Y^2(x)\Big)$$

D'où $(\phi_t)_* Y \in U$

On en déduit que $(\phi_t)_*$ est invariant sur $U, \forall t \in \mathbb{R}$

ii) Montrons d'abord que $(\phi_t)_*$ opère doucement sur $U_1; \forall t > 0$:

$$\begin{aligned} ||(\phi_t)_*.Y||_r^{\Omega_1} &= ||(\phi_t^-)_*.Y^1||_r^{\Omega_1} \\ &\leq C_1.e^{-t\rho'_1 a_R}.||Y^1||_{r+m_1}^{\Omega_1} \quad \text{(voir le lemme 7)} \end{aligned}$$

et donc :

$$||(\phi_t)_*.Y||_r^{\Omega_1} \leq C_1.e^{-\omega t}||Y||_{r+m_1}^{\Omega_1} \text{ avec } \omega = \rho'_1.a_R$$

Ensuite, nous montrons $(\phi_{-t})_*$ opère doucement sur $U_2; \forall t > 0$:

$$\begin{aligned}||(\phi_{-t})_*.Y||_r^{\Omega_2} &= ||(\phi_{-t}^+)_*.Y^2||_r^{\Omega_2} \\ &\leq C_2.e^{-t\rho_2' b_L}.||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2} \quad \text{(voir le lemme 7)} \\ &\leq C_2.e^{-\omega' t}||Y||_{r+m_2}^{\Omega_2} \qquad \text{avec } \omega' = \rho_2'.b_L\end{aligned}$$

□

Théorème 7. *L'espace de Fréchet U admet une structure hyperbolique pour le semi-groupe ϕ_{t*}.*

2.2.3 Spectre des semi-groupes de dilatations $\exp(tX_0)_*$ et $\exp(-tX_0)_*$

Lemme 9. *Soit E une algèbre de Lie-Fréchet, et U une sous-algèbre admissible de E. Soient $(\phi_t^-)_*$ et $(\phi_{-t}^+)_*$ deux difféomorphismes opérant doucement respectivement sur U_1 et U_2, alors $(I - \phi_{t*})$ et $(I - (\phi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles sur U.*

Démonstration. a) Montrons que $(I - \phi_{t*}^-)$ et $(I - (\phi_{-t})_*^+)$ sont inversibles.
Selon l'inégalité (2.2.3), nous avons :

$$||(\phi_{mt}^-)_*.Y^1||_r^{\Omega_1} \leq \left(C_1.e^{-t_0\rho_1' a_R}\right)^m.||Y^1||_{r+m_1}^{\Omega_1} = V_m$$

La série géométrique $\sum_m V_m$ converge, $\forall t \geq t_0 > 0, \forall \rho_1' > 0$.
D'après le critère de Weierstrass, nous concluons que la série $\sum_{m\geq 0}(\phi_{mt}^-)_* Y^1$ converge uniformément sur $U_1, \forall t \geq t_0 > 0$.
Par un même raisonnement, et d'après l'inégalité (2.2.4) nous avons :

$$||(\phi_{-mt}^+)_*.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq \left(C_2.e^{-t_0\rho_2' b_L}\right)^m.||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2}$$

On déduit que la série $\sum_{m\geq 1}(\phi_{-mt}^+)_* Y^2$ converge uniformément sur $U_2, \forall t \geq t_0 > 0$.
b) Montrons que $(I - \phi_{t*})$ et $(I - (\phi_{-t})_*)$ sont inversibles.
Comme :

$$(I - \phi_{mt_*}) \sum_{m\geq 0} \phi_{mt_*} Y = \left(\sum_{m\geq 0} \phi_{mt_*}\right).(I - \phi_{mt_*}).Y = Y$$

et respectivement

$$(I - \phi_{mt_*}) \left(-\sum_{m\geq 1} \phi_{-mt_*}\right).Y = -\left(\sum_{m\geq 1} \phi_{-mt_*}\right).(I - \phi_{mt_*}).Y = Y$$

alors $(I - \phi_{t*})Y$ est inversible, d'où :

$$\begin{aligned}\Big[(I - \phi_{t*})^{-1}Y\Big](x) &= \sum_{m\geq 0}\Big(\phi_{mt*}Y\Big)(x) \\ &= -\sum_{m\geq 1}\Big(\phi_{-mt*}Y\Big)(x)\end{aligned}$$

respectivement :

$$\begin{aligned}\Big[(I - \phi_{-t*})^{-1}Y\Big](x) &= \sum_{m\geq 0}\Big(\phi_{-mt*}Y\Big)(x) \\ &= -\sum_{m\geq 1}\Big(\phi_{mt*}Y\Big)(x)\end{aligned}$$

c) Calculons $(I-\phi_{t*})^{-1}$ et $(I-(\phi_{-t})_*)^{-1}$.
Comme $U = U_1 \oplus U_2$; alors $\forall Y \in U; \exists! Y^i \in U_i / Y = Y^1 + Y^2$, d'où :

$$(I-\phi_{t_*})^{-1}Y = \sum_{m\geq 0}\left(\phi^-_{mt_*}Y^1\right) - \sum_{m\geq 1}\left(\phi^+_{-mt_*}Y^2\right)$$

respectivement :

$$(I-\phi_{-t_*})^{-1}Y = \sum_{m\geq 0}\left(\phi^+_{-mt_*}Y^2\right) - \sum_{m\geq 1}\left(\phi^-_{-mt_*}Y^1\right)$$

d) Montrons que $(I-\phi_{t*})$ et $(I-(\phi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles. nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|(I-\phi_{t*})^{-1}Y\right\|_r &\leq \sum_{m\geq 0}\left\|(\phi_{mt})^-_*Y^1\right\|_r^{\Omega_1} + \sum_{m\geq 1}\left\|(\phi_{-mt})^+_*Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \\ &\leq C_1\sum_{m\geq 0}\left(e^{-t_0\rho_1' a_R}\right)^m.||Y^1||^{\Omega_1}_{r+m_1} + C_2.\sum_{m\geq 1}\left(e^{-t_0\rho_2' b_L}\right)^m.||Y^2||^{\Omega_2}_{r+m_2}\end{aligned}$$

Ces deux séries géométriques sont convergentes, nous aurons alors :

$$\left\|(I-\phi_{t*})^{-1}Y\right\|_r \leq \frac{C_1}{1-e^{-t_0\rho_1' a_R}}.||Y^1||^{\Omega_1}_{r+m_1} + \frac{C_2.e^{-t_0\rho_2' b_L}}{1-e^{-t_0\rho_2' b_L}}.||Y^2||^{\Omega_2}_{r+m_2}$$

Soit $m = sup(m_1, m_2)$ alors $\exists C > 0$ tel que :

$$\left\|(I-\phi_{t*})^{-1}Y\right\|_r \leq C\left(||Y^1||^{\Omega_1}_{r+m_1} + ||Y^2||^{\Omega_2}_{r+m_2}\right) = C||Y||_{r+m}$$

$(I-(\phi_t)_*)$ est alors doucement inversible sur U.
Par un même raisonnement pour $(I-(\phi_{-t})_*)$:

$$(I-\phi_{-t_*})^{-1}Y = \sum_{m\geq 0}\left(\phi^+_{-mt_*}Y^2\right) - \sum_{m\geq 1}\left(\phi^-_{mt_*}Y^1\right)$$

$(I-(\phi_{-t})_*)$ est alors doucement inversible sur U. □

Lemme 10. *Pour tout $t \geq t_0 \geqslant 0$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ alors :*

a) Les séries suivantes :

$$\sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\phi_{mt})_*Y; \qquad \sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\phi_{(-mt)})_*Y$$

convergent uniformément dans U ;
b) Les opérateurs $(\lambda I-(\phi_t)_*)$ et $(\lambda I-(\phi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles dans U.

Démonstration. a) i) Montrons que $(\lambda I-(\phi_t^-)_*)$ est inversible ; $\forall\lambda \in \mathbb{C}^*$. Nous posons :

$$U_m(\lambda,t) = \frac{1}{\lambda^{m+1}}\phi^-_{mt_*}Y^1; \quad \lambda \neq 0$$

d'après l'inégalité (2.2.3) :

$$\|U_m(\lambda,t)\|^{\Omega_1}_r \leq \frac{C_1}{|\lambda|}\left(\frac{e^{-t_0\rho_1' a_R}}{|\lambda|}\right)^m ||Y^1||^{\Omega_1}_{r+m_1} = V_m$$

Comme ρ_1' est arbitraire alors : $\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \quad \exists \rho_{1,\lambda}' > 0$ tel que :

$$q = \frac{e^{-t_0 \rho_{1,\lambda}' a_R}}{|\lambda|} < 1, \qquad c\textit{'est à dire } \rho_{1,\lambda}' > \frac{-ln\,|\lambda|}{t_0.a_R}$$

La série géométrique $\sum_{m>0} V_m$ converge, $\forall t \geq t_0 > 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, d'où la série $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt}^-)_* Y^1$ converge uniformément sur $U_1, \forall t \geq t_0 > 0$.

ii) Montrons que $(\lambda I - (\phi_t^+)_*)$ est inversible ; $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.
Par un même raisonnement, et d'après l'inégalité (2.2.4) nous avons :

$$\left\| \lambda^{m-1} (\phi_{-mt}^+)_* Y^2 \right\|_r^{\Omega_2} \leq \frac{C_2}{|\lambda|} \left(e^{-t_0 \rho_2' b_L} |\lambda| \right)^m ||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2}$$

Comme ρ_2' est arbitraire alors : $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{2,\lambda}' > 0$ tel que :

$$e^{-t_0 \rho_{2,\lambda}' b_L} |\lambda| < 1$$

d'où la série $\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi_{-mt}^+)_* Y^2$ converge uniformément sur $U_2, \forall t \geq t_0 > 0$.
b) i) Calculons l'inverse de $(\lambda I - (\phi_t)_*)$
Comme :

$$(\lambda I - (\phi_t)_*) \left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt})_* \right) .Y = \left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt})_* \right) (\lambda I - (\phi_t)_*).Y = Y$$

d'après le lemme 3, alors :

$$(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt})_*.Y$$

De même, d'après le lemme 3, nous avons :

$$(\lambda I - (\phi_t)_*) \left(- \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi_{-mt})_* \right) .Y = - \left(\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi_{-mt})_* \right) (\lambda I - (\phi_t)_*).Y = Y$$

d'où

$$(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y = - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi_{-mt})_*.Y$$

Par un même raisonnement pour déterminer :

$$(\lambda I - (\phi_{-t})_*)^{-1} Y$$

Or $\forall Y \in U = U_1 \oplus U_2$, alors $\exists ! Y^i \in U_i / Y = Y^1 + Y^2$; on a :

$$\begin{aligned} (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y &= (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y^1 + (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y^2 \\ &= \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{mt}^-)_*.Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi_{-mt}^+)_*.Y^2 \end{aligned}$$

et, respectivement :

$$(\lambda I - (\phi_{-t})_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi_{-mt}^+)_*.Y^2 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi_{mt}^-)_*.Y^1$$

ii) Montrons que $(\lambda I - (\phi_t)_*)$ est doucement inversible sur U, et respectivement que $(\lambda I - (\phi_{-t})_*)$ est doucement inversible sur U,

Nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r &\leq \sum_{m\geq 0} \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \left\|(\phi^-_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} + \sum_{m\geq 1} |\lambda|^{m-1} \left\|(\phi^+_{-mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \\ &\leq \frac{C_1}{|\lambda|} \sum_{m\geq 0} \left(\frac{e^{-t_0\rho_1' a_R}}{|\lambda|}\right)^m .||Y^1||_{r+m_1}^{\Omega_1} + \frac{C_2}{|\lambda|} \sum_{m\geq 1} \left(e^{-t_0\rho_2' b_L}|\lambda|\right)^m .||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2}\end{aligned}$$

Comme ρ_1' et ρ_2' sont arbitraires, alors : $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$\exists \rho_\lambda' > sup\left(\frac{-ln|\lambda|}{t_0.a_R}, \frac{ln|\lambda|}{t_0.b_L}\right) > 0$$

tel que :

$$\begin{cases} \frac{e^{-t_0\rho_1' a_R}}{|\lambda|} < 1 \\ et \\ |\lambda| e^{-t_0\rho_2' b_L} < 1 \end{cases}$$

Les deux séries géométriques convergent $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, d'où il existe $m = max(m_1, m_2)$ et une constante $C > 0$ telle que :

$$\left\|(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r \leq C \left\|Y\right\|_{r+m}$$

□

Remarque : Si $\lambda = 0$, alors $(\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y = -(\phi_{-t})_* Y$ existe.

Par conséquent, l'opérateur $(\lambda I - (\phi_t)_*)$ est doucement inversible sur $U, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Le même raisonnement est valable pour démonter que l'opérateur $(\lambda I - (\phi_{-t})_*)$ est également doucement inversible sur U, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Théorème 8. *Pour tout $t \geq t_0 > 0$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*
a) $Y \in U = U_1 \oplus U_2$; alors $\exists! Y^i \in U_i (i = 1, 2)$ telle que $Y = Y^1 + Y^2$, nous avons alors la résolvante :

$$\begin{cases} R(\lambda, (\phi_t)_*)Y &= (\lambda I - (\phi_t)_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi^-_{mt})_* Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi^+_{-mt})_* .Y^2 \\ R(\lambda, (\phi_{-t})_*)Y &= (\lambda I - (\phi_{-t})_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\phi^+_{-mt})_* Y^2 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\phi^-_{mt})_* .Y^1 \end{cases}$$

b) Le spectre et la résolvante des semi-groupes de dilatation ϕ_{t*} et ϕ_{-t*}, pour tout $t \geq t_0 > 0$

$$\sigma(\phi_{t*}) = \sigma(\phi_{-t*}) = \varnothing \qquad \rho(\phi_{t*}) = \rho(\phi_{-t*}) = \mathbb{C}, \forall t \geq t_0 > 0$$

Démonstration. C'est évident □

2.3 Spectres des opérateurs $\exp(tY_0)_*$ et $\exp(-tY_0)_*$

Soit $Y_0 \in E$ telle que $Y_0(0) = 0$ et $DY_0(0) \neq 0$. La formule de Taylor associée au champs $Y_0(x)$ au voisinage de 0 sera :

$$Y_0(x) = DY_0(0).x + Z_0(x)$$

Nous posons $DY_0(0) = X_0$. Le reste Z_0 de la formule de Taylor se comporte comme une perturbation.
Soit :

$$\phi_t = exptX_0$$
$$\psi_t = exptY_0$$

Le passage du champ X_0 au champ Y_0 sera par l'existence d'un difféomorphisme f_*, c'est l'opérateur de vague.

$$f = \lim_{t\to\infty} f_t \qquad avec\ f_t = \phi_{-t} \circ \psi_t$$

d'où, et selon la proposition 4 du chapitre 1, nous aurons :

$$f^* X_0 = X_0 + Z_0 \quad et \quad f_*(X_0 + Z_0) = X_0$$

2.3.1 Estimation du $Y_0 - flot$

On pose $Y_0^- = X_0^- + Z_0^-$ (resp. $Y_0^+ = X_0^+ + Z_0^+$), où $Z_0 = Z_0^- + Z_0^+$ une perturbation de X_0 tel que :

$$Z_0(x, y) = \left(Z_0^-(x), Z_0^+(y)\right) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n; \forall (x, y) \in K \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$$

Z_0^- (respectivement Z_0^+) est un germe infiniment plat à l'origine, i.e satisfaisant l'estimation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} \forall \alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{cases}$$

il existe $M_\alpha > 0$ tel que :

$$||D^\alpha Z_0^-(x)|| \le M_\alpha.\ ||x||^{k_1},\ \forall k_1 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

(resp

$$||D^\alpha Z_0^+(y)|| \le M_\alpha.\ ||y||^{k_2},\ \forall k_2 > 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^l)$$

alors la forme vectorielle de $Y_0^- - flot$ (resp. $Y_0^+ - flot$) sera :

$$\psi_t^-(x) = exp.t(X_0^- + Z_0^-)(x) = \phi_t^-(x) + \int_0^t \phi_{t-s}^- \circ Z_0^-(\psi_s^-(x))ds \qquad (2.3.1)$$

(respectivement

$$\psi_t^+(y) = exp.t(X_0^+ + Z_0^+)(y) = \phi_t^+(y) + \int_0^t \phi_{t-s}^+ \circ Z_0^+(\psi_s^+(y))ds$$

solution du système dynamique :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_t^-(x) = X_0^- \circ \psi_t^-(x) + Z_0^- \circ \psi_t^-(x) \\ \psi_0^-(x) = x \end{cases}$$

(respectivement

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_t^+(y) = X_0^+ \circ \psi_t^+(y) + Z_0^+ \circ \psi_t^+(y) \\ \psi_0^+(y) = y \end{cases}$$

Lemme 11. *Si la perturbation Z_0^- (resp Z_0^+) est infiniment plate à l'origine 0, alors le champ de vecteurs Y_0^- (resp. Y_0^+) est complet, et le flot ψ_t^- (resp ψ_t^+) satisferait les estimations suivantes :*

$$\begin{cases} \| x \| .e^{-a_L t} \leqslant \| \left(\exp tY_0^-\right)(x) \| \leqslant \| x \| .e^{-a_R t} \\ \| x \| .e^{a_R t} \leqslant \| \left(\exp -tY_0^-\right)(x) \| \leqslant \| x \| .e^{a_L t} \end{cases} ;\ \forall t \geqslant 0$$

(resp

$$\left(\begin{cases} \| y \| .e^{b_L t} \leqslant \| \left(\exp tY_0^+\right)(y) \| \leqslant \| y \| .e^{b_R t} \\ \| y \| .e^{-b_R t} \leqslant \| \left(\exp -tY_0^+\right)(y) \| \leqslant \| y \| .e^{-b_L t} \end{cases} ;\ \forall t \geqslant 0 \right)$$

Démonstration. Considérons l'équation

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \psi_t^-(x) \|^2 = \langle \psi_t^-(x), X_0^-\left(\psi_t^-(x)\right) + Z_0^-\left(\psi_t^-(x)\right)\rangle$$

En prenant $\zeta = \| \psi_t^-(x) \|$, on en déduit que :

$$\begin{cases} -a_L\zeta^2 - M_0\zeta^{k_1+1} \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\zeta^2 \leqslant -a_R\zeta^2 + M_0\zeta^{k_1+1} \\ \zeta(0) = \| x \| \end{cases}$$

Alors

$$-a_L\zeta^{1-k_1} - M_0 \leqslant \zeta^{-k_1}\frac{d}{dt}\zeta \leqslant -a_R\zeta^{1-k_1} + M_0$$

Si nous posons $z = \zeta^{1-k_1}$, nous aurons donc :
$dz = (1-k_1)\,\zeta^{-k_1}d\zeta$ et le système devient :

$$-a_L z - M_0 \leqslant \frac{1}{1-k_1}\frac{d}{dt}z \leqslant -a_R z + M_0$$

qui a pour solutions

$$b_1 e^{-a_R(1-k_1)t} + \frac{M_0}{a_L} \leqslant z \leqslant b_2 e^{-a_L(1-k_1)t} - \frac{M_0}{a_R}$$

telles que b_1, b_2, deux fonctions en x et comme $a_L, a_R > 0$, alors :

$$b_1 e^{-a_R(1-k_1)t} \leqslant z \leqslant b_2 e^{-a_L(1-k_1)t}$$

Comme $1 - k_1 < 0$, alors

$$b_3 e^{-a_L t} \leqslant \zeta \leqslant b_4 e^{-a_R t}$$

Où b_3, b_4 également deux fonctions dépendant de x.
D'où :

$$\| x \| .e^{-a_L t} \leqslant \| \psi_t^-(x) \| \leqslant \| x \| .e^{-a_R t}$$

De même, nous aurons :

$$\| x \| .e^{a_R t} \leqslant \| \psi_{-t}^-(x) \| \leqslant \| x \| .e^{a_L t}$$

Et par un raisonnement similaire, nous aboutissons à

$$\begin{cases} \| y \| .e^{b_L t} \leqslant \| \psi_t^+(y) \| \leqslant \| y \| .e^{b_R t} \\ \| y \| .e^{-b_R t} \leqslant \| \psi_{-t}^+(y) \| \leqslant \| y \| .e^{-b_L t} \end{cases} ;\ \forall t \geqslant 0$$

□

i) Estimation de la première dérivée de Y_0-flot :

Notons par $\eta^-(t,x,\upsilon_1) = D\psi_t^-(x)\,\upsilon_1$ et $\eta^+(t,y,\upsilon_2) = D\psi_t^+(y)\,\upsilon_2$ où $\upsilon_1,\upsilon_2 \in \mathbb{R}^k$. La première dérivée par rapport à x de Y_0^--flot (resp Y_0^+-flot), est solution du système dynamique :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta^-(t,x,\upsilon_1) = \left(D_{\xi_1}X_0^- + D_{\xi_1}Z_0^-\right)\cdot\eta^-(t,x,\upsilon_1) \\ \eta^-(0,x,\upsilon_1) = \upsilon_1 \end{cases}$$

avec $\xi_1 = \psi_t^-(x)$ et, respectivement

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta^+(t,y,\upsilon_2) = \left(D_{\xi_2}X_0^+ + D_{\xi_2}Z_0^+\right)\cdot\eta^+(t,y,\upsilon_2) \\ \eta^+(0,y,\upsilon_2) = \upsilon_2 \end{cases}$$

avec $\xi_2 = \psi_t^+(y)$.

Lemme 12. *La dérivée de Y_0^--flot (resp de Y_0^+-flot) a les estimations suivantes pour tout $t \geqslant 0$:*

$$\begin{cases} e^{-a_Lt} \leqslant \parallel \left(D\exp tY_0^-\right)(x) \parallel \leqslant e^{-a_Rt} \\ e^{a_Rt} \leqslant \parallel \left(D\exp -tY_0^-\right)(x) \parallel \leqslant e^{a_Lt} \end{cases}$$

(resp

$$\left(\begin{cases} e^{b_Lt} \leqslant \parallel \left(D\exp tY_0^+\right)(y) \parallel \leqslant e^{b_Rt} \\ e^{-b_Rt} \leqslant \parallel \left(D\exp -tY_0^+\right)(y) \parallel \leqslant e^{-b_Lt} \end{cases}\right)$$

Démonstration. Posons : $z_1 = \parallel \eta^-(t,x,v) \parallel$ et considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}z_1^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \eta^-(t,x,\upsilon_1) \parallel^2 = \left\langle \eta^-(t,x,\upsilon_1), \left(D_{\xi_1}X_0^- + D_{\xi_1}Z_0^-\right)\cdot\eta^-(t,x,\upsilon_1)\right\rangle \\ z_1(0) = \parallel \upsilon_1 \parallel \end{cases}$$

Nous aurons :

$$\begin{cases} z_1^2\left(-a_L - M_1e^{-a_Ltk_1}\right) \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}z_1^2 \leqslant {z_1}^2.\left(-a_R + M_1e^{-a_Rtk_1}\right) \\ z_1(0) = \parallel \upsilon_1 \parallel \end{cases}$$

Alors :

$$\left(-a_L - M_1e^{-a_Ltk_1}\right)dt \leqslant \frac{dz_1}{z_1} \leqslant \left(-a_R + M_1e^{-a_Rtk_1}\right)dt$$

Nous aurons ensuite :

$$-a_Lt + \tfrac{M_1}{a_Lk_1}e^{-a_Ltk_1} + b_6 \leqslant lnz_1 \leqslant -a_R.t - \tfrac{M_1}{a_Rk_1}e^{-a_Rtk_1} + b_5$$

telles que b_5, b_6 deux fonctions dépendant de x.

Où $-a_Lt + b_6 \leqslant lnz_1 \leqslant -a_R.t + b_5$ alors : $\|\upsilon_1\|.e^{-a_L.t} \leq z_1 \leq \|\upsilon_1\|.e^{-a_R.t}$. En prenant $\|\upsilon_1\| = 1$, nous obtenons :

$$e^{-a_Lt} \leqslant \parallel D\psi_t^-(x) \parallel \leqslant e^{-a_Rt} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall t > 0$$

Nous pouvons, facilement déduire :

$$e^{a_Rt} \leqslant \parallel D\psi_{-t}^-(x) \parallel \leqslant e^{a_Lt}$$

Par le même raisonnement nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{c} e^{b_L t} \leqslant \| D\psi_t^+(y) \| \leqslant e^{b_R t} \\ e^{-b_R t} \leqslant \| D\psi_{-t}^+(y) \| \leqslant e^{-b_L t} \end{array} \right)$$

□

ii) L'estimation finale de la l'^{ime} *dérivée de* Y_0- *flot*

Lemme 13. *La* l'^{ime} *dérivée de* Y_0^- *-flot (resp de* Y_0^+*-flot) a les estimations suivantes pour tout* $t \geqslant 0, \forall l' \in \mathbb{N}$ *:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \| D^{l'}\psi_t^-(x) \| \leqslant M_l'' e^{-a_R t} \\ \| D^{l'}\psi_{-t}^-(x) \| \leqslant M_l'' e^{a_L t} \end{array} \right. \qquad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} \| D^{l'}\psi_t^+(y) \| \leqslant M_l'' e^{b_R t} \\ \| D^{l'}\psi_{-t}^+(y) \| \leqslant M_l'' e^{-b_L t} \end{array} \right. \qquad \forall y \in \mathbb{R}^l$$

Démonstration. Nous généralisons le résultat précédent à l'aide d'un raisonnement par récurrence :
1)Pour $j = 0, 1$, le résultat est vérifié.
2) Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $(j-1)$, i.e

$$\| D^{l'}\psi_t^-(x) \| \leqslant M_{l'}' e^{-a_R t}; \qquad \forall l' \leq j-1$$

3) Montrons que cette dernière propriété est vraie à l'ordre j. Soit la j^{ime} dérivation du Y_0^- *flot*

$$\eta_j^-(t,x,v) = D^j\psi_t^-(x)\, v^j \quad , \forall v \in \mathbb{R}^n$$

solution du système dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}\eta_j^-(t,x,v) = D_{\xi_1}Y_0^- \cdot \eta_j^-(t,x,v) + G_j^-(t,x,v) \\ \eta_j^-(0,x,v,...,v) = v \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} G_j^-(t,x,v) = \sum\limits_{k'=2}^{j} D_{\xi_1}^{k'} Z_0^-(\xi_1) \sum\limits_{\substack{i_1+i_2+...+i_{k'}=j \\ i_{k'}>0 \\ \xi_1=\psi_t^-(x)}} D_x^{i_1}\psi_t^-(x)\, v^{i_1} ... D_x^{i_{k'}}\psi_t^-(x)\, v^{i_{k'}} \end{array} \right.$$

En utilisant la méthode de la résolvante exposée, par exemple dans [5] ; ensuite Y. Domar la utilisé pour étudier les idéaux fermés dans certaines algèbres de Banach[10]), nous déduisons que :

$$\eta_j^-(t,x,v,...,v) = D\psi_t^-(x)\, v + \int_0^t D\psi_{t-s}^-\left(\psi_s^-(x)\right) G_j^-(s,x,v)\, ds$$

L'intégrale dans l'expression précédente est bien définie au point $s = 0$ parce que :

$$\lim_{s\to 0^+} D\psi_{t-s}^-\left(\psi_s^-(x)\right) = D\psi_t^-(x)$$

et il existe des constantes $A_l > 0$ tel que :

$$\lim_{s\to 0^+} G_j^-(s,x,v) = \sum_{k''=2}^{m} A_{k'} D_{\xi_1}^{k'} Z_0^-(\xi_1)\, v^{k'}$$

Comme v est arbitraire, nous choisissons $\| v \|= 1$, et posons :

$$I_j = \int_0^t \| D\psi_{t-s}^- \left(\psi_s^- (x)\right) \| . \| G_j^- (s, x, v) \| ds$$

Soit $K \subset \mathbb{R}^k$ un ensemble compact, montrons alors que I_j converge uniformément quand t tend vers $+\infty$ pour tout $x \in K$.

Comme :

$$\| D^{k'} Z_0^- (x) \|^K \leqslant M_{k'} \quad , \ \forall k' \geqslant 1 \ \text{, et } \forall x \in \mathbb{R}^k$$

et en utilisant les hypothèses de récurrence, nous aboutissons à :

$$I_j \leqslant \sum_{k'=2}^{j} M_{k'} \sum_{i_1+i_2+..+i'_k=j} M'_{i_1}...M'_{i'_k} \int_0^t e^{-\left(t-s+sk'\right)a_R} ds \leqslant M'{}_j e^{-a_R t}$$

L'intégrale I_j est alors uniformément convergente par rapport à x quand t tend vers $+\infty$.

Par conséquent, ils existent des constantes $M_j^{''} = sup(1, M'_j) > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \| \quad \eta_j^- \| &\leqslant \| D\psi_t^- (x) v \| + \int_0^{+\infty} \| D\psi_{t-s}^- \left(\psi_s^- (x)\right) \| . \| G_j^- (s, x, v) \| ds \\ &\leqslant \ M_j^{''} e^{-a_R t} \end{aligned}$$

4) Conclusion :

$$\| D^{l'} \psi_t^- (x) \| \leqslant M_l'' e^{-a_R t}, \forall l' \in \mathbb{N}; \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

Par un raisonnement similaire, nous aurons :

$$\| D^{l'} \psi_{-t}^- (x) \| \leqslant M_l'' e^{a_L t}$$

et

$$\begin{cases} \| D^{l'} \psi_t^+ (y) \| \leqslant M_l'' e^{b_R t} \\ \| D^{l'} \psi_{-t}^+ (y) \| \leqslant M_l'' e^{-b_L t} \end{cases} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^l$$

□

2.3.2 Structure hyperbolique

i) Les opérateurs d'onde

Soit :

$$\begin{array}{rcl} \phi_t^- & = & \exp tX_0^- \quad \textit{et} \quad \psi_t^- = \exp tY_0^- \\ (\textit{ resp } \phi_t^+ & = & \exp tX_0^+ \quad \textit{et} \quad \psi_t^+ = \exp tY_0^+ \ ) \end{array}$$

et le difféomorphisme $f_t^- (x) = \left(\phi_{-t}^- \circ \psi_t^-\right)(x)$. *D'après l'expression (2.3.1) de* $\psi_t^-(x)$, *le difféomorphisme* f_t^- *devient :*

$$f_t^- (x) = x + \int_0^t \phi_{-s}^-(Z_0^- \circ \psi_s^-)(x) ds$$

(respectivement

$$f_{-t}^+ (y) = y - \int_0^t \phi_s^+(Z_0^+ \circ \psi_{-s}^+)(y) ds$$

L'opérateur d'onde est défini par :

$$f^- = \lim_{t\to+\infty} \phi^-_{-t} \circ \psi^-_t \quad (resp\ f^+ = \lim_{t\to+\infty} \phi^+_{-t} \circ \psi^+_t)$$

Pour tout Z_0, il existe un difféomorphisme f_*, tel que :

$$f_* X_0 = X_0 + Z_0 = Y_0$$

Lemme 14. *a) f^-_t, $D^r f^-_t$ (respectivement f^+_{-t}, $D^r f^+_{-t}$), f^-_{-t} et $D^r f^-_{-t}$ (respectivement f^+_t et $D^r f^+_t$) sont globalement uniformément bornés à l'ordre infini $\forall t > 0, \forall r \in \mathbb{N}$.*
b) Pour tout compact $K_1 \subseteq \Omega_1$ (respectivement $K_2 \subseteq \Omega_2$) il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$\| f^-_{-t} - I \|_r^{K_1} \leq \varepsilon \ et \ \| f^+_t - I \|_r^{K_2} \leq \varepsilon$$

Démonstration. a) Montrons que f^-_t et $D^r f^-_t$ (respectivement f^+_{-t} et $D^r f^+_{-t}$) sont globalement bornés uniformément à l'ordre infini $\forall t > 0, \forall r \in \mathbb{N}$.
Soit

$$f^-_t(x) = x + \int_0^t \phi^-_{-s}(Z^-_0 \circ \psi^-_s)(x) ds$$

alors, pour tout $r \in \mathbb{N}; \forall v \in \mathbb{R}^n$ telle que $\|v\| = 1$, nous avons :

$$D^r_x \left(f^-_t - I \right)(x)\, v^r = \int_0^t e^{-A^- s} D^r_x (Z^-_0 \circ \psi^-_s(x)).v^r ds$$

Comme

$$D^r_x (Z^-_0 \circ \psi^-_s(x)).v^r = \sum_{\gamma=1}^{r} D^\gamma_\xi Z^-_0(\xi) \sum_{l_1+\dots l_\gamma = r} D^{l_1} \psi^-_s(x).v^{l_1} \dots D^{l_\gamma} \psi^-_s(x).v^{l_\gamma}$$

où $\xi = \psi^-_s(x)$.
Selon le lemme 11, il existe des constantes $M_i > 0$ telles que $\| \ \psi^-_s(x) \ \|^{K_1} \leq M_1 e^{-s a_R}$ avec K_1 un compact inclus dans Ω_1 et $\forall k_1 > 1$; nous aurons alors :

$$\| \ D^\gamma_\xi Z^-_0(\xi) \ \| \leq M_\gamma \ \| \ \xi \ \|^{k_1} = M_\gamma \| \psi^-_s(x) \|^{k_1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \| D^r_x \left(f^-_t - I \right)(x) \|^{K_1} &\leq M_2 \int_0^t e^{s a_L} \| \psi^-_s(x) \|^{k_1} ds \\ &\leq M_3 \int_0^t e^{s a_L} . e^{-s a_R k_1} ds \\ &\leq M_3 \int_0^t e^{-s[k_1 a_R - a_L]} ds \end{aligned}$$

De l'hypothèse (2.2.1), $\exists \rho_1 > 1/k_1 a_R - a_L \geq \rho_1 > 1$ alors :

$$\| D^r_x \left(f^-_t - I \right)(x) \|^{K_1} \leq M_3 \int_0^t e^{-s \rho_1} ds \leq \frac{M_3}{\rho_1}$$

d'où :

$$\| \left(f^-_t - I \right)(x) \|_r^{K_1} \leq \frac{M_3}{\rho_1}; \qquad \forall t > 0$$

Il en résulte que : f^-_t et $D f^-_t$ sont uniformément bornés à l'infini $\forall t > 0; \forall r \in \mathbb{N}$.

- et par un raisonnement similaire, avec K_2 un compact inclus dans Ω_2 ; et avec l'hypothèse (2.2.2), $\exists\rho_2 > 1/k_2 b_L - b_R \geq \rho_2 > 1$ nous pouvons démontrer que :

$$\|\left(f_{-t}^{+} - I\right)(y)\|_r^{K_2} \leq \frac{M_4}{\rho_2}$$

d'où f_{-t}^{+} est globalement bornée à l'infini $\forall t \geqslant 0$, i.e :

$$\|D_y^r\left(f_{-t}^{+} - I\right)(y)\|^{K_2} \leqslant M_4 \int_0^t e^{-s(k_2 b_L - b_R)} ds \leq M_4 \int_0^t e^{-s\rho_2} ds = M_4 \frac{1 - e^{-t\rho_2}}{\rho_2} \leq \frac{M_4}{\rho_2}$$

où $k_2.b_L - b_R \geq \rho_2 > 1; k_2 > 1$

Montrons que f_{-t}^{-} et $D^r f_{-t}^{-}$ (respectivement f_t^{+} et $D^r f_t^{+}$) sont globalement uniformément bornés à l'ordre infini $\forall t > 0, \forall l' \in \mathbb{N}$.
Let

$$f_{-t}^{-}(x) = x - \int_0^t \phi_s^{-}(Z_0^{-} \circ \psi_{-s}^{-})(x) ds$$

alors, pour tout $r \in \mathbb{N}; \forall v \in \mathbb{R}^n$ telle que $\|v\| = 1$, nous avons :

$$D_x^r\left(f_{-t}^{-} - I\right)(x)\, v^r = -\int_0^t e^{A^{-}s} D_x^r(Z_0^{-} \circ \psi_{-s}^{-}(x)).v^r ds$$

Or

$$D_x^r(Z_0^{-} \circ \psi_{-s}^{-}(x)).v^r = \sum_{\gamma=1}^{r} D_{\xi'}^{\gamma} Z_0^{-}(\xi') \sum_{l_1+\ldots l_\gamma = r} D^{l_1}\psi_{-s}^{-}(x).v^{l_1} \ldots D^{l_\gamma}\psi_{-s}^{-}(x).v^{l_\gamma}$$

où $\xi' = \psi_{-s}^{-}(x)$
Selon le lemme 11, $\| \psi_{-s}^{-}(x) \|^{K_1} \leq M e^{s a_L}$; on en déduit qu'il existe une constante $M' > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}
\|D_x^r\left(f_{-t}^{-} - I\right)(x)\|^{K_1} &\leq M' \int_0^t e^{-s a_R} \|Z_0^{-}\|_{r+m_1'}^{\psi_{-s}^{-}(K_1)} \sup_{x \in K_1} \left(\frac{1}{1 + \| \psi_{-s}^{-}(x) \|^2}\right)^{m_1'/2} e^{r s a_L} ds \\
&\leq M' \int_0^t e^{-s[(1+m_1')a_R - (k_1+r)a_L]} ds
\end{aligned}$$

On choisit :

$$m_1' = (r + k_1).\left[\frac{a_L}{a_R} + 1\right] + \rho > 0$$

avec ρ une constante positive quelconque.

$$\|D_x^r\left(f_{-t}^{-} - I\right)(x)\|^{K_1} \leq M' \int_0^t e^{-s(\rho+1)a_R} ds = M' \frac{1 - e^{-t(\rho+1)}}{(\rho+1)a_R}$$

Comme ρ est arbitraire, alors $\forall \varepsilon_1 >, \exists \rho_{\varepsilon_1} > 0$ telle que :

$$\|D_x^r\left(f_{-t}^{-} - I\right)(x)\|^{K_1} \leq \varepsilon_1; \quad \forall t > 0 \qquad (2.3.2)$$

Il en résulte que : f_{-t}^{-} et $D^r f_{-t}^{-}$ sont uniformément bornés à l'infini $\forall t > 0; \forall r \in \mathbb{N}$.

- et par un raisonnement similaire, il existe une constante $M'' > 0$ telle que :

$$\|D_y^r\left(f_t^{+} - I\right)(y)\|^{K_2} \leqslant M'' \int_0^t e^{-s\left((m_2'+1)b_L - (r+k_2)b_R\right)} ds$$

On choisit :

$$m_2' = (r + k_2).\left[\frac{b_R}{b_L} + 1\right] + \rho' > 0$$

avec ρ' une constante arbitraire quelconque, nous déduisons que :

$$\| D_y^r \left(f_t^+ - I \right)(y) \|^{K_2} \leq M'' \int_0^t e^{-s(\rho'+1)b_R} ds$$

Comme ρ' est arbitraire, alors $\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \rho'_{\varepsilon_2} > 0$ tels que :

$$\| D_y^r \left(f_t^+ - I \right)(y) \|^{K_2} \leq \varepsilon_2 \qquad (2.3.3)$$

d'où f_t^+ et $D^r f_t^+$ sont globalement bornés à l'infini $\forall t \geqslant 0$. □

b) des équations (2.3.2) *et* (2.3.3), $\forall t > 0; \exists \varepsilon = max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ *telle que nous aurons :*

$$\| f_{-t}^- - I \|_r^{K_1} \leq \varepsilon; \qquad et \qquad \| f_t^+ - I \|_r^{K_2} \leq \varepsilon$$

ii) Flot opérant doucement $(exptY_0)_*$

Soit $B_\varepsilon = B(0, \varepsilon)$ *la boule centrée sur l'origine ayant comme rayon un certain* $\varepsilon > 0$.

Lemme 15. *Pour tout* $Y^i \in U_i$ *et* $\forall t \geq 0$, *il existe* C', C'' *deux constantes positives telles que :*

$$||(\exp tY_0^-)_*.Y^1||_r^{\Omega_1} \leq C'.e^{-t\rho_1'.a_R}.\left\|Y^1\right\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \qquad (2.3.4)$$

et respectivement :

$$||(\exp -tY_0^+)_*.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq C''.e^{-t\rho_2'.b_L}.\left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \qquad (2.3.5)$$

Démonstration. Soit $Y^1 \in U_1$ et $\forall t \geq 0$ nous avons :

$$\begin{aligned}
(\exp tY_0^-)_*.Y^1 &= (\psi_t^-)_*Y^1 = (\phi_t^- \circ f_t^-)_*.Y^1 \\
&= (D(\phi_t^- \circ f_t^-).Y^1) \circ (\phi_t^- \circ f_t^-)^{-1} \\
&= D\phi_t^-(f_t^- \circ (f_t^-)^{-1} \circ \phi_{-t}^-).Y^1((f_t^-)^{-1} \circ \phi_{-t}^-).Df_t^-((f_t^-)^{-1} \circ \phi_{-t}^-) \\
&= D\phi_t^-(\phi_{-t}^-).Y^1(\psi_{-t}^-).Df_t^-(\psi_{-t}^-) \\
&= D\phi_t^-(\phi_{-t}^-).Y^1(\phi_{-t}^- \circ f_{-t}^-).Df_t^-(\phi_{-t}^- \circ f_{-t}^-)
\end{aligned}$$

Soit K_1 un compact de Ω_1, on en déduit ensuite l'estimation suivante :

$$\| (\exp tY_0^-)_*.Y^1 \|^{K_1} \leq \| D\phi_t^-(\phi_{-t}^-).Y^1(\phi_{-t}^- \circ f_{-t}^-) \|^{K_1} . \| Df_t^-(\phi_{-t}^- \circ f_{-t}^-) \|^{K_1}$$

D'après le lemme de la section a, Df_t^- et f_{-t}^- sont uniformément bornés, alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\| (\exp tY_0^-)_*.Y^1 \|_r^{K_1} \leq C \| (\phi_t^-)_*.Y^1 \|_r^{f_{-t}^-(K_1)} \qquad \forall r \geq 0 \qquad (2.3.6)$$

Or :

$$\left| \left\| f_{-t}^- \right\|^{K_1} - \|I\|^{K_1} \right| \leqslant \left\| f_{-t}^- - I \right\|^{K_1} \leqslant \varepsilon$$

alors :

$$\|I\|^{K_1} - \varepsilon \leqslant \left\| f_{-t}^- \right\|^{K_1} \leqslant \|I\|^{K_1} + \varepsilon$$

Par conséquent :

$$K_1 - B_\varepsilon \subseteq f^-_{-t}(K_1) \subseteq K_1 + B_\varepsilon \tag{2.3.7}$$

A partir des équations (2.3.6) et (2.3.7), et pour tout $r > 0, \rho'_1 > 0$, $\exists m_1 = \left[r.\frac{a_L}{a_R}\right] + \rho'_1 > 0$, nous avons :

$$\| (\exp tY_0^-)_*.Y^1 \|_r^{K_1} \leq C' e^{-a_R t \rho'_1} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Phi^-_{-t}(f^-_{-t}(K_1))} \leq C' e^{-a_R t \rho'_1} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Phi^-_{-t}(K_1+B_\varepsilon)}$$

comme :

$$\Phi^-_{-t}\left(f^-_{-t}(K_1)\right) \subseteq \Omega_1^\varepsilon$$

Nous pouvons écrire donc :

$$\| (\exp tY_0^-)_*.Y^1 \|_r^{K_1} \leq C' e^{-a_R t \rho'_1} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon}$$

Et comme K_1 est arbitraire sur Ω_1, alors :

$$\| (\exp tY_0^-)_*.Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq C' e^{-a_R t \rho'_1} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon}$$

Nous procédons de la même manière pour démontrer :

$$||(\exp -tY_0^+)_*.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq C''.e^{-t\rho'_2.b_L}.\left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon}$$

□

Lemme 16. *i) $(\psi_t)_*$ est invariant sur $U, \forall t \in \mathbb{R}$*
ii) Le difféomorphisme $(\psi_t)_*$ opère doucement sur U_1^ε et $(\psi_{-t})_*$) opère doucement sur U_2^ε, on a : $\forall t \geq 0, \forall \rho'_i > 0, \exists m_i$, tel que : $m_1 = \left[r.\frac{a_L}{a_R}\right] + \rho'_1 > 0$ et $m_2 = \left[r.\frac{b_R}{b_L}\right] + \rho'_2 > 0$

$$||(\psi_t)_*.Y||_r^{\Omega_1} \leq e^{-\omega t}.||Y||_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \qquad \textit{avec } \omega = \rho'_1 a_R$$

respectivement

$$||(\psi_{-t})_*.Y||_r^{\Omega_2} \leq e^{-\omega' t}.||Y||_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \qquad \textit{avec } \omega' = \rho'_2 b_L$$

Démonstration. Soit $Y \in U = U_1 \oplus U_2$; alors $\exists! Y^i \in U_i (i = 1, 2)$ telle que $Y = Y^1 + Y^2$. Soit $t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$$(\psi_t)_* Y(x, y) = \left((\psi_t^-)_* Y^1(x), (\psi_t^+)_* Y^2(y)\right)$$

i) Nous allons montrer que $(\psi_t)_* Y \in U, \forall t \geq 0$.
- Nous projetons sur $U_1 \Rightarrow Y(x, y) = (Y^1(x), 0)$
Alors :

$$(\psi_t)_* Y(x, y) = \left((\psi_t^-)_* Y^1(x), 0\right)$$

D'où $(\psi_t)_* Y \in U$
- De la même façon, si nous projetons sur $U_2 \Rightarrow Y(x, y) = (0, Y^2(x))$
Alors :

$$(\psi_t)_* Y(x, y) = \left(0, (\psi_t^+)_* Y^2(x)\right)$$

D'où $(\psi_t)_* Y \in U$. On déduit que $(\psi_t)_*$ est invariant sur $U, \forall t \in \mathbb{R}$

ii) On remarque que :

$$\begin{array}{rcl} \|(\psi_t)_*.Y\|_r^{\Omega_1} & = & \|(\psi_t^-)_*.Y^1\|_r^{\Omega_1} \\ & \leq & C'.e^{-t\rho_1'.a_R}.\|Y^1\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \qquad \text{(cf lemme 15)} \end{array}$$

$$\|(\psi_t)_*.Y\|_r^{\Omega_1} \leq C_1'.e^{-\omega t}\|Y\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \quad \text{avec } \omega = \rho_1'.a_R$$

Ceci signifie que $(\psi_t)_*$ opère doucement sur U_1^ε.

- De même :

$$\begin{array}{rcl} \|(\psi_{-t})_*.Y\|_r^{\Omega_2} & = & \|(\psi_{-t}^+)_*.Y^2\|_r^{\Omega_2} \\ & \leq & C''.e^{-t\rho_2'.b_L}.\|Y^2\|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \qquad \text{(cf lemme 15)} \\ & \leq & C_2''.e^{-\omega' t}.\|Y\|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \qquad \text{avec } \omega' = \rho_2'.b_L \end{array}$$

On en déduit que $(\psi_{-t})_*$ opère doucement sur U_2^ε. □

iii) La structure hyperbolique douce

Définition 13. *Soit E un espace de Fréchet de champs de vecteurs, $X \in E = E_1 \oplus E_2$ et le $X-$flot $\psi_t = exptX$. E a une structure hyperbolique douce pour $(\psi_t)_*$ si et seulement si $\exists \varepsilon > 0$ /*
i) ψ_{t*} est invariant sur $E; \forall t \in \mathbb{R}$;
ii) $(\psi_t)_*$ opère doucement sur $E_1^\varepsilon; \forall t \geq 0$
iii) $(\psi_{-t})_*$ opère doucement sur $E_2^\varepsilon; \forall t \geq 0$.

Où $E_i^\varepsilon = \{Z \in E / suppZ \subset \Omega_i^\varepsilon\}$ avec $\Omega_i^\varepsilon = \Omega_i + B_\varepsilon$, et $E = E_1 \oplus E_2 = E_1^\delta + E_2^\delta$; où $0 < \delta < \varepsilon$ (cf [24])

Théorème 9. *L'algèbre admissible U admet une structure hyperbolique pour le flot ψ_{t*}.*

Démonstration. Selon le lemme 16, on en déduit que U a une structure hyperbolique pour $\psi_{t\,*}$. □

2.3.3 Spectre des opérateurs $\exp(tY_0)_*$ et $\exp(-tY_0)_*$

Soit $U = U_1 \oplus U_2$ le sous-algèbre de Fréchet de type hyperbolique pour le Y_0-flot, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $U = U_1^\varepsilon + U_2^\varepsilon$.

Lemme 17. *Soit E une algèbre de Lie-Fréchet, et U une sous-algèbre admissible de E. Soient $(\psi_t^-)_*$ et $(\psi_{-t}^+)_*$ deux difféomorphismes opérant doucement respectivement sur U_1^ε et U_2^ε, alors $(I - \psi_{t*})$ et $(I - (\psi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles sur U.*

Démonstration. a) Montrons que $(I - \psi_{t*}^-)$ et $(I - (\psi_{-t})_*^+)$ sont inversibles.
Selon l'inégalité (2.3.4), nous avons :

$$\|(\psi_{mt}^-)_*.Y^1\|_r^{\Omega_1} \leq \left(C'.e^{-t_0\rho_1' a_R}\right)^m.\|Y^1\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} = W_m$$

La série géométrique $\sum_m W_m$ converge, $\forall t \geq t_0 > 0, \forall \rho_1' > 0$.
D'après le critère de Weierstrass, nous concluons que la série $\sum_{m\geq 0}(\psi_{mt}^-)_* Y^1$ converge

uniformément sur $U_1^{\varepsilon}, \forall t \geq t_0 > 0$.
Par un même raisonnement, et en considérant l'inégalité (2.3.5), nous aurons :

$$||(\psi^+_{-mt})_*.Y^2||_r^{\Omega_2} \leq \left(C''.e^{-t_0\rho_2' b_L}\right)^m .||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2^{\varepsilon}}$$

On déduit que la série $\sum_{m\geq 1}(\psi^+_{-mt})_* Y^2$ converge uniformément sur $U_2^{\varepsilon}, \forall t \geq t_0 > 0$.
b) Montrons que $(I - \psi_{t*})$ et $(I - (\psi_{-t})_*)$ sont inversibles.
Comme, d'après le lemme 3 :

$$(I - \psi_{mt_*}) \sum_{m\geq 0} \psi_{mt_*} Y = \left(\sum_{m\geq 0} \psi_{mt_*}\right).(I - \psi_{mt_*}).Y = Y$$

et respectivement

$$(I - \psi_{mt_*}) \left(- \sum_{m\geq 1} \psi_{-mt_*}\right).Y = - \left(\sum_{m\geq 1} \psi_{-mt_*}\right).(I - \psi_{mt_*}).Y = Y$$

alors $(I - \psi_{t*})Y$ est inversible, d'où :

$$\begin{aligned} \Big[(I - \psi_{t*})^{-1}Y\Big](x) &= \sum_{m\geq 0} \Big(\psi_{mt*}Y\Big)(x) \\ &= - \sum_{m\geq 1} \Big(\psi_{-mt*}Y\Big)(x) \end{aligned}$$

respectivement :

$$\begin{aligned} \Big[(I - \psi_{-t*})^{-1}Y\Big](x) &= \sum_{m\geq 0} \Big(\psi_{-mt*}Y\Big)(x) \\ &= - \sum_{m\geq 1} \Big(\psi_{mt*}Y\Big)(x) \end{aligned}$$

c) Calculons $(I - \psi_{t*})^{-1}$ et $(I - (\psi_{-t})_*)^{-1}$
Comme $U = U_1 \oplus U_2$; alors $\forall Y \in U; \exists! Y^i \in U_i / Y = Y^1 + Y^2$, d'où :

$$\begin{aligned} (I - \psi_{t_*})^{-1}Y &= (I - \psi_{t_*})^{-1}Y^1 + (I - \psi_{t_*})^{-1}Y^2 \\ &= \sum_{m\geq 0} \left(\psi^-_{mt_*}Y^1\right) - \sum_{m\geq 1} \left(\psi^+_{-mt_*}Y^2\right) \end{aligned}$$

respectivement :

$$(I - \psi_{-t_*})^{-1}Y = \sum_{m\geq 0} \left(\psi^+_{-mt_*}Y^2\right) - \sum_{m\geq 1} \left(\psi^-_{-mt_*}Y^1\right)$$

d) Montrons que $(I - \psi_{t*})$ et $(I - (\psi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles sur U.
Nous avons :

$$\begin{aligned} \left\|(I - \psi_{t*})^{-1}Y\right\|_r &\leq \sum_{m\geq 0} \left\|(\psi_{mt})_*^- Y^1\right\|_r^{\Omega_1} + \sum_{m\geq 1} \left\|(\psi_{-mt})_*^+ Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \\ &\leq C' \sum_{m\geq 0} \left(e^{-t_0\rho_1' a_R}\right)^m .||Y^1||_{r+m_1}^{\Omega_1^{\varepsilon}} + C''. \sum_{m\geq 1} \left(e^{-mt_0\rho_2' b_L}\right)^m .||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2^{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Ces deux dernières séries géométriques sont convergentes, nous aurons alors :

$$\left\|(I-\psi_{t*})^{-1}Y\right\|_r \leq \frac{C'}{1-e^{-t_0\rho_1' a_R}}.||Y^1||_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} + \frac{C''.e^{-t_0\rho_2' b_L}}{1-e^{-t_0\rho_2' b_L}}.||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon}$$

Soit $m = sup(m_1, m_2)$ alors $\exists C > 0$ tel que :

$$\left\|(I-\psi_{t*})^{-1}Y\right\|_r \leq C\left(||Y^1||_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} + ||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon}\right) = C||Y||_{r+m}$$

$(I-(\psi_t)_*)$ est alors doucement inversible sur U.
Par un même raisonnement pour $(I-(\psi_{-t})_*)$:

$$(I-\psi_{-t_*})^{-1}Y = -\sum_{m\geq 1}\psi^-_{mt_*}Y^1 + \sum_{m\geq 0}\psi^+_{-mt_*}Y^2$$

$(I-(\psi_{-t})_*)$ est alors doucement inversible sur U. □

Lemme 18. *Pour tout $t \geq t_0 \geqslant 0$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$:*

a) alors les séries suivantes :

$$\sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\psi_{mt})_*Y; \qquad \sum_{m\geq 1}\lambda^{m-1}(\psi_{(-mt)})_*Y$$

convergent uniformément dans U ;
b) Les opérateurs $(\lambda I-(\psi_t)_*)$ et $(\lambda I-(\psi_{-t})_*)$ sont doucement inversibles dans U.

Démonstration. a) i) Montrons que $(\lambda I-(\psi_t^-)_*)$ est inversible ; $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*$. Nous posons :

$$V_m(\lambda,t) = \frac{1}{\lambda^{m+1}}\psi^-_{mt_*}Y^1; \quad \lambda\neq 0$$

d'après l'inégalité (2.3.4) :

$$\|V_m(\lambda,t)\|_r^{\Omega_1} \leq \frac{C_1'}{|\lambda|}\left(\frac{e^{-t_0\rho_1' a_R}}{|\lambda|}\right)^m ||Y^1||_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} = W_m$$

Comme ρ_1' est arbitraire alors : $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*\quad \exists\rho_{1,\lambda}' > 0$ tel que :

$$q = \frac{e^{-t_0\rho_{1,\lambda}' a_R}}{|\lambda|} < 1, \qquad c'est\ à\ dire\ \rho_{1,\lambda}' > \frac{-ln\,|\lambda|}{t_0.a_R}$$

La série géométrique $\sum_{m>0}W_m$ converge, $\forall t\geq t_0 > 0, \forall\lambda\in\mathbb{C}^*$, d'où la série $\sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}(\psi^-_{mt})_*Y^1$ converge uniformément sur $U_1^\varepsilon, \forall t\geq t_0 > 0$.

ii) Montrons que $(\lambda I-(\psi^+_{-t})_*)$ est inversible ; $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*$.
Par un même raisonnement, et d'après l'équation (2.3.5) nous avons :

$$\left\|\lambda^{m-1}(\psi^+_{-mt})_*Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \frac{C_2'}{|\lambda|}\left(e^{-t_0\rho_2' b_L}|\lambda|\right)^m ||Y^2||_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon}$$

Comme ρ_2' est arbitraire alors : $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*\quad\exists\rho_{2,\lambda}' > 0$ tel que :

$$e^{-t_0\rho_{2,\lambda}' b_L}|\lambda| < 1$$

On en déduit que la série $\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\psi^{+}_{-mt})_* Y^2$ converge uniformément sur $U_2^{\varepsilon}, \forall t \geq t_0 > 0; \forall \varepsilon > 0$.

b) i) Calculons l'inverse de $(\lambda I - (\psi_t)_*)$
Comme :

$$(\lambda I - (\psi_t)_*)\left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\psi_{mt})_*\right).Y = \left(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\psi_{mt})_*\right)(\lambda I - (\psi_t)_*).Y = Y$$

d'après le lemme 3, alors :

$$(\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\psi_{mt})_*.Y$$

De même, d'après le lemme 3, nous avons :

$$(\lambda I - (\psi_t)_*)\left(-\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\psi_{-mt})_*\right).Y = -\left(\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\psi_{-mt})_*\right)(\lambda I - (\psi_t)_*).Y = Y$$

d'où :

$$(\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y = -\sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\psi_{-mt})_*.Y$$

Par un même raisonnement pour déterminer :

$$(\lambda I - (\psi_{-t})_*)^{-1} Y$$

Or $\forall Y \in U = U_1 \oplus U_2$, alors $\exists ! Y^i \in U_i / Y = Y^1 + Y^2$; on a :

$$\begin{aligned} (\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y &= (\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y^1 + (\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y^2 \\ &= \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\psi^{-}_{mt})_*.Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\psi^{+}_{-mt})_*.Y^2 \end{aligned}$$

et, respectivement :

$$(\lambda I - (\psi_{-t})_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}}(\psi^{+}_{-mt})_*.Y^2 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1}(\psi^{-}_{mt})_*.Y^1$$

ii) Montrons que $(\lambda I - (\psi_t)_*)$ est doucement inversible sur U, et respectivement que $(\lambda I - (\psi_{-t})_*)$ est doucement inversible sur U,

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y\right\|_r &\leq \sum_{m\geq 0} \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \left\|(\psi^{-}_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} + \sum_{m\geq 1} |\lambda|^{m-1} \left\|(\psi^{+}_{-mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \\ &\leq \frac{C'}{|\lambda|} \sum_{m\geq 0} \left(\frac{e^{-t_0\rho'_1 a_R}}{|\lambda|}\right)^m .||Y^1||^{\Omega_1^{\varepsilon}}_{r+m_1} + \frac{C''}{|\lambda|} \sum_{m\geq 1} \left(e^{-t_0\rho'_2 b_L}|\lambda|\right)^m .||Y^2||^{\Omega_2^{\varepsilon}}_{r+m_2} \end{aligned}$$

Comme ρ'_1 et ρ'_2 sont arbitraires, alors : $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$\exists \rho'_\lambda > sup\left(\frac{-ln|\lambda|}{t_0.a_R}, \frac{ln|\lambda|}{t_0.b_L}\right) > 0$$

tel que :

$$\begin{cases} \frac{e^{-t_0\rho_1' a_R}}{|\lambda|} < 1 \\ et \\ |\lambda| e^{-t_0\rho_2' b_L} < 1 \end{cases}$$

Les deux séries géométriques convergent $\forall\lambda \in \mathbb{C}^*$, d'où il existe $m = max(m_1, m_2)$ et une constante $C > 0$ telle que :

$$\left\| (\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y \right\|_r \leq C \left\| Y \right\|_{r+m}$$

$\square$

Remarque : *Si $\lambda = 0$, alors $(\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y = -(\psi_{-t})_* Y$ existe.*
Par conséquent, l'opérateur $(\lambda I - (\psi_t)_*)$ est doucement inversible sur $U, \forall\lambda \in \mathbb{C}$.
Le même raisonnement est valable pour démonter que l'opérateur $(\lambda I - (\psi_{-t})_*)$ est également doucement inversible sur $U, \forall\lambda \in \mathbb{C}$.

Théorème 10. *Pour tout $t \geq t_0 > 0$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*
a) $Y \in U = U_1 \oplus U_2$; alors $\exists! Y^i \in U_i (i = 1, 2)$ telle que $Y = Y^1 + Y^2$, nous avons alors la résolvante :

$$\begin{cases} R(\lambda, (\psi_t)_*)Y & = (\lambda I - (\psi_t)_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\psi_{mt}^-)_* Y^1 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\psi_{-mt}^+)_* . Y^2 \\ R(\lambda, (\psi_{-t})_*)Y & = (\lambda I - (\psi_{-t})_*)^{-1} Y = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} (\psi_{-mt}^+)_* Y^2 - \sum_{m\geq 1} \lambda^{m-1} (\psi_{mt}^-)_* . Y^1 \end{cases}$$

b) Le spectre et la résolvante de ψ_{t*} et ψ_{-t*}, pour tout $t \geq t_0 > 0$

$$\sigma(\psi_{t*}) = \sigma(\psi_{-t*}) = \varnothing$$

$$\rho(\psi_{t*}) = \rho(\psi_{-t*}) = \mathbb{C}$$

Démonstration. C'est évident $\square$

Chapitre 3

Propriétés spectrales de certains générateurs infinitésimaux dans un espace de Fréchet et applications

On va d'abord exposer en général quelques propriétés d'un générateur infinitésimal $L = \frac{d}{dt}\gamma_t|_{t=0}$ sur un espace de Fréchet E, où $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ une famille de semi-groupes sur E. $\forall t \geq 0$, γ_t est solution du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_t(Y) & = L \circ \gamma_t(Y) = \gamma_t \circ L(Y) \\ & \\ \gamma_t(Y) & = Y \end{cases} \qquad \forall Y \in E, \forall t \geq 0$$

Par un corollaire fondamental, nous déduisons l'existence de la résolvante de L avec son spectre.

Corollaire 4. *Si $\forall t > 0; \forall \lambda \in D \subseteq \mathbb{C}$, le difféomorphisme $(e^{\lambda t}.I - \gamma_t)$ est injectif et l'opérateur $(\lambda I - L)$ est surjectif sur $U \subseteq E$, alors $\forall \lambda \in D \subseteq \mathbb{C}; \forall Y \in U \subset E$:*
a) $(\lambda I - L)$ est inversible sur U
b)

$$R(\lambda I, L)(Y) = (\lambda I - L)^{-1}Y$$

c) Le spectre de L : $\sigma(L) \subseteq \mathbb{C} - D$ et l'ensemble résolvant de L ; $\rho(L) \supseteq D$

3.1 Propriétés Spectrales d'un générateur infinitésimal L dans un espace de Fréchet

3.1.1 Propriétés d'un générateur infinitésimal L

Soit L un générateur infinitésimal de la famille de semi-groupes $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ sur l'espace de Fréchet E, alors γ_t est solution du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_t X & = L \circ \gamma_t(X) = \gamma_t \circ L(X) \\ & \\ \gamma_0.X & = X \end{cases} \qquad \forall X \in E, \forall t \geq 0$$

Lemme 19. *Soit L un générateur infinitésimal du groupe à un paramètre γ_t, nous posons :*

$$B_\lambda(t)X = \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s(X)ds$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in E$ et pour tout $t \geq 0$ alors :
1)

$$(\lambda I - L) \circ B_\lambda(t)X = B_\lambda(t) \circ (\lambda I - L)X = \left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)(X)$$

2) Si $(\lambda I - L)$ et $B_\lambda(t)$ sont inversibles sur E, alors $\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)$ l'est aussi.
3) Soit Λ un sous-espace fermé de E et $\forall t \geq 0$, $\gamma_t(\Lambda) \subset \Lambda$, alors $(\lambda I - L)$ et $B_\lambda(t)$ restent invariantes sur Λ
4) a- Si $X \in ker(\lambda I - L)$ alors $B_\lambda(t)X = t.e^{\lambda t}X$
b- Si $X \in KerB_\lambda(t)$ alors $X \in ker\left(Ie^{\lambda t} - \gamma_t\right)$

Ce lemme est une généralisation des travaux de Zajtz [23]

Démonstration. 1) Pour montrer :

$$(\lambda I - L) \circ B_\lambda(t)X = B_\lambda(t) \circ (\lambda I - L)X = \left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)(X)$$

nous allons procéder en deux étapes (cf : [18]) :
i) Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in E$ et pour tout $t \geq 0$ nous avons :

$$(\lambda I - L) \circ B_\lambda(t)X = e^{\lambda t}X - \gamma_t(X) \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda I - L) \circ B_\lambda(t)X &= (\lambda I - L)\int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s(X)ds \\
&= \lambda B_\lambda(t)X - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s\left(\frac{d\gamma_\tau}{d\tau}\mid_{\tau=0}\right)Xds \\
&= \lambda B_\lambda(t)X - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}.\frac{d\gamma_{\tau+s}}{d\tau}\mid_{\tau=0} Xds \\
&= \lambda B_\lambda(t)X - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}.\frac{d\gamma_s}{ds}Xds \\
&= \lambda B_\lambda(t)X - [e^{(t-s)\lambda}\gamma_s X]_0^t - \lambda\int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s Xds \\
&= \lambda B_\lambda(t)X - [\gamma_t(X) - e^{\lambda t}X] - \lambda B_\lambda(t)X \\
&= e^{\lambda t}X - \gamma_t(X)
\end{aligned}$$

ii) Par le même procédé, nous montrons que :

$$B_\lambda(t)(\lambda I - L)X = e^{\lambda t}X - \gamma_t(X)$$

$$\begin{aligned}
B_\lambda(t)(\lambda I - L)X &= \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s((\lambda I - L)X)ds \\
&= \lambda B_\lambda(t)X - \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s\left(\frac{d\gamma_\tau}{d\tau}\mid_{\tau=0}\right)Xds \\
&= e^{\lambda t}X - \gamma_t(X)
\end{aligned}$$

2) Nous supposons que $(\lambda I - L)$ et $B_\lambda(t)$ sont inversibles sur E, alors d'après (3.1.1) nous avons : $B_\lambda(t) \circ (\lambda I - L) = e^{\lambda t} I - \gamma_t$ et donc $e^{\lambda t} I - \gamma_t$ est aussi inversible sur E.
3) Soit Λ un sous-espace fermé de E tel que $\gamma_t X \in \Lambda; \forall t \geq 0, \forall X \in \Lambda$ alors :

$$(\lambda I - L)(X) = \lambda X - \left(\frac{d\gamma_t}{dt}\,|_{t=0}\right)(X) \in \overline{\Lambda} = \Lambda$$

de même :

$$B_\lambda(t)X = \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s(X)ds \in \Lambda$$

Les opérateurs $(\lambda I - L)$ et $B_\lambda(t)$ restent donc invariants sur $\Lambda \subset E$
4) a) Soit $X \in ker(\lambda I - L)$ alors d'après l'égalité (3.1.1) et $e^{\lambda t} X - \gamma_t(X) = 0$ alors $\gamma_t(X) = e^{\lambda t} X$

$$\begin{aligned} B_\lambda(t)(X) &= \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\gamma_s(X)ds \\ &= \int_0^t e^{(t-s)\lambda}e^{\lambda s}Xds \\ &= \int_0^t e^{\lambda t}Xds \\ &= t.e^{\lambda t}X \end{aligned}$$

b) Soit $X \in ker(B_\lambda(t))$ alors d'après l'égalité (3.1.1) et $B_\lambda(t)X = 0$ alors $\gamma_t(X) = e^{\lambda t}X$, d'où $X \in ker\left(e^{\lambda t}.I - \gamma_t\right)$. □

Théorème 11. *Pour tout* $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$ *et pour tout* $t \geq 0$ *nous avons :*

$$Ker(\lambda I - L) \oplus Ker(B_\lambda(t)) = Ker\left(e^{\lambda t} I - \gamma_t\right)$$

Démonstration. i) Montrons que : Pour tout $\lambda \in D$ et pour tout $t \geq 0$ nous avons :

$$K = Ker(\lambda I - L) \cap Ker(B_\lambda(t)) = \{0\}$$

On remarque que :$0 \in K$, montrons alors que si $X \in K$ alors $X = 0$.
Supposons que, par un raisonnement par absurde qu'il existe $X \in K$ tel que $X \neq 0$. Nous avons :

$$X \in Ker(\lambda I - L) \cap Ker(B_\lambda(t))$$

D'après l'égalité (3.1.1), nous avons, pour $\forall t > 0$:

$$e^{\lambda t}X - \gamma_t(X) = 0 \Rightarrow \gamma_t(X) = e^{\lambda t}X$$

d'où

$$0 = B_\lambda(t)(X) = \int_0^t e^{(t-s)\lambda}e^{\lambda s}Xds = t.e^{\lambda t}X$$

et comme $t.e^{\lambda t} \neq 0$, alors $X = 0$, d'où la contradiction avec l'hypothèse de départ. On en conclue :

$$Ker(\lambda I - L) \cap Ker(B_\lambda(t)) = \{0\}$$

ii) Montrons que :

$$Ker\left(e^{\lambda t} I - \gamma_t\right) \subset Ker(\lambda I - L) \oplus Ker(B_\lambda(t))$$

Soit $X \in Ker\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)$ et $X \neq 0$ Or.

$$\begin{aligned} Ker\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right) &= Ker\left[(\lambda I - L) \circ B_\lambda(t)\right] \\ &= Ker\left[B_\lambda(t) \circ (\lambda I - L)\right) \end{aligned}$$

d'après (3.1.1), nous aurons : alors :

$$\begin{cases} (\lambda I - L) \circ B_\lambda(t)(X) = 0 \\ et \\ B_\lambda(t) \circ (\lambda I - L)(X) = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} X \in KerB_\lambda(t) \\ ou \\ X \in Ker(\lambda I - L)(X) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$X \in KerB_\lambda(t) \cup Ker(\lambda I - L)$$

Or $X = X + 0 = 0 + X$, on aura donc :

$$X \in Ker(B_\lambda(t)) \oplus Ker(\lambda I - L)$$

C'est à dire :

$$Ker\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right) \subset Ker(\lambda I - L) \oplus Ker(B_\lambda(t))$$

iii) Montrons que $Ker(\lambda I - L) \oplus Ker(B_\lambda(t)) \subseteq Ker\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)$.
Soit $X \in Ker(\lambda I - L) \oplus ker(B_\lambda(t))$, alors $\exists! X_1 \in Ker(\lambda I - L)$ et $\exists! X_2 \in Ker(B_\lambda(t))$ tel que $X = X_1 + X_2$. D'après (3.1.1), alors :

$$\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)(X) = B_\lambda(t) \circ (\lambda I - L)(X_1) + (\lambda I - L) \circ B_\lambda(t)(X_2)$$

Or $(\lambda I - L)(X_1) = 0$ et $B_\lambda(t)(X_2) = 0$, d'où : $\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)(X) = 0 \Rightarrow X \in ker\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)$ donc :

$$Ker(\lambda I - L) \oplus Ker(B_\lambda(t)) \subseteq Ker\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)$$

Nous concluons alors :

$$Ker(\lambda I - L) \oplus Ker(B_\lambda(t)) = Ker\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)$$

□

Corollaire 5. *On définit l'opérateur moyen adjoint par :*

$$A_t(X) = \int_0^t \gamma_s(X)ds = B_0(t)X$$

alors :
1) $\forall t > 0 \quad L \circ A_t = A_t \circ L = ((\gamma_t) - I)$
2) Si L *et* A_t *sont inversibles, alors* $(\gamma_t - I)$ *est aussi inversible.*
3) Si Λ *est un sous-espace fermé de* E *et* $(\gamma_t)(\Lambda) \subset \Lambda$ *alors* L *et* A_t *sont invariants sur* Λ.
4) $\frac{1}{t}A_t = I_{KerL}$
5) $Ker(I - (\gamma_t) = Ker(L) \oplus Ker(A_t)$

Démonstration. Voir [23]. □

3.1.2 Propriétés d'un générateur adjoint ad_X

Théorème 12. *Soit ad_{-X} (respectivement ad_X) le générateur infinitésimal de la famille de semi-groupes $(\phi_{t_*} = (exptX)_*)_{t\geq 0}$ (respectivement $(\phi_t^* = (exptX)^*)_{t\geq 0}$). On pose : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Y \in E$ et pour tout $t \geq 0$ et :*

$$B_\lambda(t)Y = \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\phi_{s*}Yds$$

et respectivement :

$$A_\lambda(t)Y = \int_0^t e^{(t-s)\lambda}\phi_s^*Yds$$

Alors : 1)

$$(\lambda I - ad_{-X}) \circ B_\lambda(t) = B_\lambda(t) \circ (\lambda I - ad_{-X}) = \left(e^{\lambda t}I - \phi_{t_*}\right)$$

$$(\lambda I - ad_X) \circ A_\lambda(t) = A_\lambda(t) \circ (\lambda I - ad_X) = \left(e^{\lambda t}I - \phi_t^*\right)$$

2) Si $(\lambda I - ad_X)$ et $A_\lambda(t)$ sont inversibles sur E, alors $\left(e^{\lambda t}I - \phi_t^*\right)$ est aussi inversible sur E. Respectivement Si $(\lambda I - ad_{-X})$ et $B_\lambda(t)$ sont inversibles sur E, alors $\left(e^{\lambda t}I - \phi_{t*}\right)$ est aussi inversible sur E.
3) Soit Λ un sous-espace fermé de E et $\forall t \geq 0$, $\phi_{t*}(\Lambda) \subset \Lambda$ (respectivement $\phi_t^*(\Lambda) \subset \Lambda$), alors $(\lambda I - ad_{-X})$ et $B_\lambda(t)$ (respectivement $(\lambda I - ad_X)$ et $A_\lambda(t)$) restent invariantes sur Λ
4) Si $Y \in ker(\lambda I - ad_X)$ alors $A_\lambda(t)Y = t.e^{\lambda t}(Y)$, et respectivement, si : $Y \in ker(\lambda I - ad_{-X})$, alors $B_\lambda(t)Y = t.e^{\lambda t}(Y)$.
5)

$$Ker(\lambda I - ad_X) \oplus Ker(A_\lambda(t)) = Ker\left(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*}\right)$$

et

$$Ker(\lambda I - ad_{-X}) \oplus Ker(B_\lambda(t)) = Ker\left(e^{\lambda t}I - \phi_{t*}\right)$$

3.1.3 Injectivité d'un générateur L et ad_X

Théorème 13. *Pour tout $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$ et pour tout $t > 0$, si l'opérateur $\left(e^{\lambda t}I - \gamma_t\right)$ est injectif sur $U \subseteq E$, alors $(\lambda I - L)$ et $B_\lambda(t)$ sont aussi injectifs sur $U \subseteq E$, c'est à dire : si $ker\left(Ie^{\lambda t} - \gamma_t\right) = \{0\}, \forall\lambda \in D \subset \mathbb{C}$ et $\forall t > 0$, alors $ker(\lambda I - L) = kerB_\lambda(t) = \{0\}$, $\forall\lambda \in D \subset \mathbb{C}$ et $\forall t > 0$.*

Démonstration. Déduction du théorème 11 □

Corollaire 6. *a) pour tout $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$ et pour tout $t > 0$, si l'opérateur $\left(e^{\lambda t}I - \phi_{t*}\right)$ est injectif, alors $(\lambda I - ad_{-X})$ est aussi injectif pour tout $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$.*
b) pour tout $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$ et pour tout $t > 0$, si l'opérateur $\left(e^{\lambda t}I - \phi_t^*\right)$ est injectif, alors $(\lambda I - ad_X)$ est aussi injectif pour tout $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$.

Remarque : Par la contraposée du théorème, on déduit que si $ker(\lambda I - L) \neq \{0\}$ c'est à dire $(\lambda I - L)$ est non injectif, alors $\exists T > 0/ \left(e^{\lambda T}I - \gamma_T\right)$ est non injectif.

Corollaire 7. *si $ker(\lambda I - L) \neq \{0\}$ et $\exists T > 0/e^{\lambda T} = 1$, c'est à dire $(\lambda_k = \frac{2ik\pi}{T} = ik\omega)$, alors :*
a) $\forall X \in ker(I - \gamma_T), X \neq 0$, $\gamma_t(X)$ est de période T ; $\forall t \geq 0$;
b) $\forall k \in \mathbb{Z}, Y_k \in ker(\lambda I - L); \lambda_k$ sera une valeur propre associée au vecteur propre Y_k par le générateur infinitésimal L telle que : $LY_k = \lambda_k Y_k$; $\forall k \in \mathbb{Z}$

Démonstration. a) Soit $X \in ker(I - \gamma_T) \neq \{0\}$; montrons que $\gamma_t(X)$ est de période $T; \forall t \geq 0$.
En effet, comme $\gamma_T X = X \neq 0$, alors $\forall t > 0, \gamma_t \circ \gamma_T(X) = \gamma_t(X)$, soit donc :

$$\gamma_{t+T}(X) = \gamma_t(X)$$

d'où $\gamma_t(X)$ est de période T, $\forall X \in ker(I - \gamma_T)$.
b) Comme $e^{\lambda T} = 1$, alors $\lambda T = 2ik\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $\lambda_k = \frac{2ik\pi}{T} = ik\omega)$; valeurs propres de L. On a $\forall Y_k \in ker(\lambda_k I - L) \neq \{0\}$, alors $LY_k = \lambda_k Y_k$, c'est à dire λ_k sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres Y_k par le générateur infinitésimal L. □

Corollaire 8. *si $ker(\lambda I - ad_{-X}) \neq \{0\}$ (respectivement $ker(\lambda I - ad_X) \neq \{0\}$) et $\exists T > 0 / e^{\lambda T} = 1$ c'est à dire ($\lambda_k = \frac{2ik\pi}{T}$), alors :*
a) $\forall X \in ker(I - \phi_{T_*}) \neq \{0\}$, $\phi_{t_*}X$ est de période T ; $\forall t \geq 0$;
(respectivement $\forall X \in ker(I - \phi_T^*) \neq \{0\}$; $\phi_t^* X$ est de période T ; $\forall t \geq 0$)
b)

$$ker\,(\lambda_k I - ad_{-X}) = \left\{ Y_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{-2ik\pi}{T}.s}.\phi_{s*}.Y ds, \quad \forall Y \in ker(I - \phi_{T_*}) \right\}$$

et respectivement :

$$ker\,(\lambda_k I - ad_X) = \left\{ Y_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{-2ik\pi}{T}.s}.(\phi_s)^*.Y ds, \quad \forall Y \in ker(I - (\phi_T)^*) \right\}$$

3.2 Série de Fourier

Si $\exists t > 0 / (I - \gamma_t)$ est périodique, alors $\sigma(L) \neq \emptyset$ et on a l'existence des séries de Fourier.

3.2.1 Définition et exemples

Définition 14. *Soient Y un champ de vecteurs dans l'espace de Frêchet $E = \chi(M)$ et*

$$\gamma : \mathbb{R} \times E \to Diff(M)$$

$$(t,\ Y) \mapsto \gamma(t,\ Y) = \gamma_t(Y)$$

où $\gamma_t(Y)$ est périodique par rapport à t, de période T :

$$\gamma_{t+T}(Y) = \gamma_t(Y), \forall t \in \mathbb{R}, \forall Y \in E$$

, alors :
a) dans le corps des complexes, la série de Fourier associée à $\gamma_t(Y)$ est définie par :

$$S(t,\ \gamma_t(Y)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(\gamma_t(Y)) \cdot \exp(i\omega kt)$$

avec

$$C_k(\gamma_t(Y)) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-i\omega ks)\gamma_s(Y) ds$$

b) dans le corps des réels, la série de Fourier est définie par :

$$S(t,\ \gamma_t(Y)) = \frac{A_0(\gamma_t(Y))}{2} + \sum_{n\geq 1} [A_n(\gamma_t(Y)) \cdot \cos(n\omega t) + B_n(\gamma_t(Y)) \cdot \sin(n\omega t)]$$

avec, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} A_n(\gamma_t(Y)) = \frac{2}{T}\int_0^T \gamma_s(Y)\cos(n\omega s)ds \\ B_n(\gamma_t(Y)) = \frac{2}{T}\int_0^T \gamma_s(Y)\sin(nws)ds \end{cases}$$

Exemple 1 *Soit* $\gamma_t(Y) = (\phi_t)_*Y$, *de période* $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *alors la série de Fourier associée à cette fonction sera :*
a) Dans le corps des complexes

$$S(t,\ (\phi_t)_*Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \exp(i\omega kt)$$

avec pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ks)(\phi_s)_*Y ds$$

b) Dans le corps des réels

$$S(t,\ (\phi_t)_*Y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(A_n\cos(n\omega t) + B_n\sin(n\omega t))$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T (\phi_s)_*Y ds\ ,\ A_n = \frac{2}{T}\int_0^T (\phi_s)_*Y\cos(n\omega s)ds$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T (\phi_s)_*Y\sin(n\omega s)ds$$

Exemple 2 :
Soit le problème aux limites suivant :
$\forall Y \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$, avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{cases} \gamma_t'(Y) = i\omega k \cdot \gamma_t(Y) \\ \gamma_0(Y) = Y_k \\ \gamma_{t+T}(Y) = \gamma_t(Y); \end{cases}$$

Ce problème admet pour solution :

$$\gamma_t(Y) = Y_k \exp(i\omega kt)$$

Exemple 3 : Soit le problème aux limites suivant :
$\forall Y \in E, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \gamma_t''(Y) + \gamma_t(Y) = g_t(Y) \\ \gamma'_{t+T}(Y) = \gamma'_t(Y) \\ \gamma_{t+T}(Y) = \gamma_t(Y) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

on pose

$$C_n(\gamma_t(Y)) = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_t(Y)e^{-in\omega t}dt$$

alors

$$\begin{aligned}
C_n(\gamma_t''(Y)) &= \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_t''(Y)e^{-in\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}([\gamma'_t(Y)e^{-in\omega t}]_0^T + in\omega\int_0^T \gamma'_t(Y)e^{-in\omega t}dt) \\
&= \frac{1}{T}\left([\gamma'_T(Y) - \gamma'_0(Y)] + in\omega\left[\gamma_t(Y)e^{-in\omega t}\right]_0^T + (in\omega)^2\int_0^T \gamma_t(Y)e^{-in\omega t}dt\right) \\
&= (in\omega)^2 C_n(\gamma_t(Y)) \\
&= -n^2\omega^2 C_n(\gamma_t(Y))
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
g_t(Y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(g_t(Y))e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(\gamma_t''(Y) + \gamma_t(Y))e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty}[C_n(\gamma_t''(Y)) + C_n(\gamma_t(Y))]e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty}[-n^2\omega^2 C_n(\gamma_t(Y) + C_n(\gamma_t(Y))]e^{in\omega t} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty}(1-n^2\omega^2)C_n(\gamma_t(Y))e^{in\omega t}
\end{aligned}$$

Donc

$$C_n(g_t(Y)) = (1-n^2\omega^2)C_n(\gamma_t(Y)$$

d'où

$$C_n(\gamma_t(Y)) = \frac{C_n(g_t(Y))}{(1-n^2\omega^2)}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_t(Y) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(\gamma_t(Y))\exp i\omega nt \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_n(g_t(Y))}{(1-n^2\omega^2)}\exp i\omega nt \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g_s(Y)e^{-in\omega s}ds \cdot \frac{\exp i\omega nt}{1-n^2\omega^2} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-n^2\omega^2}\int_0^T g_s(Y)e^{-in\omega(s-t)}ds
\end{aligned}$$

Donc le problème (3.2.1) admet pour solution :

$$\gamma_t(Y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{in\omega t}}{1-n^2\omega^2}.C_n\Big(g_t(Y)\Big)$$

Par exemple, si on prend

$$g_t(Y) = (\phi_t)_*Y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k\exp(i\omega kt)$$

alors

$$\gamma_t(Y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n((\phi_t)_* Y)}{(1-n^2\omega^2)} e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\omega t}}{1-n^2\omega^2}.Y_n$$

d'où la solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \gamma_t(Y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y_n}{(1-n^2\omega^2)} e^{in\omega t} \\ Y_n = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ns)(\phi_s)_* Y ds \end{cases}$$

3.2.2 Relation de Plancherel et Parseval

a-Relation de Plancherel

Propriété 5. *Soit Y un champ de vecteurs dans l'espace de Frêchet $E = \chi(M)$*

Soient $\gamma_t(Y)$ et $\Upsilon_t(Y)$ deux fonctions de période T qui vérifient les conditions de Dirichlet par rapport à $t \in \mathbb{R}$, pour tout $Y \in E$

i) Dans le champ complexe, la formule de Plancherel est définie par :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_s(Y)\overline{\Upsilon s(Y)} ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\gamma_t(Y)) \cdot \overline{C_n(\Upsilon_t(Y))}$$

avec

$$c_n(\gamma_t(Y)) = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ns)\gamma_s(Y) ds$$

$$C_n(\Upsilon_t(Y)) = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ns)\Upsilon s(Y) ds$$

ii) Dans le corps des réels, la formule de Plancherel est définie par :

$$\frac{2}{T}\int_0^T \gamma_t(Y)\Upsilon_t(Y) dt =$$

$$= \frac{a_0(\gamma_t(Y)) \cdot A_0(\Upsilon_t(Y))}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(\gamma_t(Y)) \cdot A_n(\Upsilon_t(Y)) + b_n(\gamma_t(Y)) \cdot B_n(\Upsilon_t(Y)))$$

avec, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_n(\gamma_t(Y)) = \frac{2}{T}\int_0^T \gamma_s(Y).cos(n\omega s) ds \\ b_n(\gamma_t(Y)) = \frac{2}{T}\int_0^T \gamma_s(Y).sin(n\omega s) ds \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_n(\Upsilon_t(Y)) = \frac{2}{T}\int_0^T \Upsilon s(Y).cos(n\omega s) ds \\ B_n(\Upsilon_t(Y)) = \frac{2}{T}\int_0^T \Upsilon s(Y).sin(n\omega s) ds \end{cases}$$

b-Relation de Parseval

Propriété 6. *Soit Y un champ de vecteurs dans l'espace de Frêchet $E = \chi(M)$*

Soit $\gamma_t(Y)$ une fonction de période T qui vérifie les conditions de Dirichlet par rapport à $t \in \mathbb{R}$ pour tout $Y \in E$

i) Dans le champ complexe, la formule de Parseval est définie par :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\gamma_t(Y)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |C_k(\gamma_t(Y))|^2$$

avec

$$C_k(\gamma_t(Y)) = \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-i\omega ks)\gamma_s(Y)ds$$

ii) Dans le corps des réels la formule de Parseval est définie par :

$$\frac{2}{T}\int_0^T |\gamma_t(Y)|^2 dt = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}[(A_n(\gamma_t(Y))^2 + (B_n(\gamma_t(Y))^2]$$

3.2.3 Développement en série de Fourier du semi-groupe

Théorème 14. *1) Si $\lambda_k = ik\omega = \frac{2ik\pi}{T}; \forall k \in \mathbb{Z}$, alors :*
a)

$$ker\,(\lambda_k I - L) = \left\{ Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k . s}.\gamma_s(Y)ds \quad \forall Y \in ker(I - \gamma_T) \right\}$$

b) $\gamma_t(Y)$ est développable en série de Fourier de la forme :

$$\forall Y \in ker\,(I - \gamma_T)\,; \gamma_t(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \exp(\lambda_k t)$$

avec

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k . s}.\gamma_s(Y)ds$$

2) Si $\lambda \neq \lambda_k = ik\omega$ et $\exists T > 0 / ker\left(e^{\lambda T} I - \gamma_T\right) \neq \{0\}$; alors $\forall Y \in ker\left(e^{\lambda T} I - \gamma_T\right)$; $\gamma_t(Y)$ est développable en série de Fourier généralisée de la forme :

$$\gamma_t(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k e^{(\lambda - \lambda_k)t}$$

où :

$$Z_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-(\lambda - \lambda_k)t}.\gamma_t(Y)dt$$

Démonstration. 1) Si $\lambda_k = ik\omega = \frac{2ik\pi}{T}; \forall k \in \mathbb{Z}$, alors :
a) Soit

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k . s}.\gamma_s(Y)ds \quad avec\ Y \in ker(I - \gamma_T)$$

Montrons que $Y_k \in ker(\lambda_k I - L)$, i.e $LY_k = \lambda_k . Y_k$.

$$\begin{aligned} LY_k &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k . s} L \circ \gamma_s(Y)ds \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k . s}\frac{d}{ds}\gamma_s(Y)ds \\ &= \frac{1}{T}\left[e^{-\lambda_k . s}\gamma_s(Y)\right]_0^T + \lambda_k \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k . s}\gamma_s(Y)ds}_{Y_k} \end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{cases} e^{-\lambda_k . T} = e^{-2ik\pi} = 1 \\ \qquad et \\ Y \in ker(I - \gamma_T) \Rightarrow \gamma_T Y = Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[e^{-\lambda_k.s}\gamma_s(Y)\right]_0^T = 0$$

d'où $LY_k = \lambda_k Y_k \Leftrightarrow Y_k \in ker(\lambda_k I - L)$
b) On pose

$$\gamma_t(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{\lambda_k t}$$

Montrons que :

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k.t}.\gamma_t(Y)dt$$

Soit :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k.t}\gamma_t(Y)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k.t}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{\lambda_l t}\right)dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l \int_0^T e^{(\lambda_l-\lambda_k).t}dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l.\delta_k^l = Y_k \end{aligned}$$

avec :

$$\delta_k^l = \begin{cases} 0 & si\ \lambda_k \neq \lambda_l \\ 1 & si\ \lambda_k = \lambda_l \end{cases}$$

En effet : - Si $\lambda_k \neq \lambda_l$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T e^{(\lambda_l-\lambda_k)t}dt & \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{(\lambda_l-\lambda_k)t}}{\lambda_l-\lambda_k}\right]_0^T \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{\frac{2i\pi}{T}(l-k)t}}{\frac{2i\pi}{T}(l-k)}\right]_0^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Si $\lambda_k = \lambda_l$

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{(\lambda_l-\lambda_k)t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T dt = \frac{1}{T}.T = 1$$

d'où :

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k.t}.\gamma_t(Y)dt \qquad \forall Y \in ker(I-\gamma_T)$$

2) Si $\lambda \neq \lambda_k = ik\omega$
Comme $\exists T > 0/ker\left(e^{\lambda T}I - \gamma_T\right) \neq \{0\}$; donc $\left(I - e^{-\lambda T}\gamma_T\right)$ est non injectif.
On pose :

$$\Upsilon_t = e^{-\lambda t}\gamma_t$$

d'après la première partie, $\forall Y \in ker\left(I - e^{-\lambda T}\gamma_T\right) \neq \{0\}$; $\Upsilon_t(Y)$ est développable en série de Fourier généralisée de la forme :

$$\Upsilon_t(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k e^{-\lambda_k t}$$

où :

$$Z_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\lambda_k s}.\Upsilon_s(Y)ds$$

d'où

$$\gamma_t(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k e^{(\lambda-\lambda_k)t}$$

où :

$$Z_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-(\lambda-\lambda_k)t}.\gamma_t(Y)dt$$

avec

$$\Upsilon_t(Y) = e^{-\lambda t}\gamma_t$$

□

3.3 Applications

3.3.1 Application aux séries de Fourier dans $\mathbb{C}$

Soit R une fonction de classe C^1 sur $[0, T]$ de période T, et g une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et soit L le générateur infinitésimal du semi-groupe $(\gamma_t)_{t\geq 0}$. On pose, pour tout $Y \in ker\,(I - \gamma_T) \neq \{0\}$:

$$F(Y) = \frac{1}{T}\int_0^T R(t)\gamma_t(Y)dt$$
$$G(Y) = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\gamma_t(Y)dt$$

Lemme 20. *Considérons le problème aux limites de Sturm-Liouville suivant :*

$$\begin{cases} (\lambda I - L)F(Y) = G(Y) \\ \gamma_T(Y) = Y \end{cases} \tag{3.3.1}$$

est équivalent presque partout au problème aux limites de Dirichlet classique sur le corps des réels $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} R'(t) + \lambda R(t) = g(t) \\ \\ R(T) = R(0) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.3.2}$$

Démonstration. Nous avons par définition :

$$\begin{aligned} L(F(Y)) &= \frac{1}{T}\int_0^T R(t)(L\circ\gamma_t)(Y)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T R(t)\frac{d}{dt}\gamma_t(Y)dt \\ &= \frac{1}{T}[R(t)\gamma_t(Y)]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T R'(t)\gamma_t(Y)dt \end{aligned}$$

Comme $R(T) = R(0)$, et $\gamma_T(Y) = Y$; alors : $[R(t)\gamma_t(Y)]_0^T = 0$ d'où :

$$\begin{aligned}(\lambda I - L)F(Y) &= \frac{1}{T}\int_0^T (\lambda R(t) + R'(t))\,\gamma_t(Y)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\gamma_t(Y)dt\end{aligned}$$

Le problème (3.3.1) est donc équivalent presque partout au problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} R'(t) + \lambda R(t) = g(t) \\ R(T) = R(0) \qquad \textit{avec} \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

□

Théorème 15. *Le problème de Sturm-Liouville suivant dans E :*

$$\begin{cases} (\lambda I - L)F(Y) = G(Y) \\ \gamma_T(Y) = Y \end{cases}$$

admet pour solution :
a) Si $\lambda \neq \lambda_k = ik\omega = \frac{2ik\pi}{T}; \forall k \in \mathbb{Z}$, alors le problème (3.3.1) admet pour solution :

$$F(Y) = (\lambda I - L)^{-1}G(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k} Y_k$$

avec :

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\lambda_k t} g(t)dt$$

et

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k t}\gamma_t(Y)dt$$

b) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$ et $\int_0^T e^{\lambda_{k_0} t} g(t)dt = 0$ alors :

$$F(Y) = (\lambda_{k_0} I - L)^{-1}G(Y) = \sum_{k \neq k_0} \frac{b_k}{\lambda_{k_0} - \lambda_k} Y_k + CY_{k_0}$$

telle que C est une constante arbitraire.

c) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$ et $\int_0^T e^{\lambda_{k_0} t} g(t)dt \neq 0$; alors le problème (3.3.1) n'admet pas de solution.

Démonstration. Considérons le problème aux limites homogènes suivant :

$$\begin{cases} R'(t) + \lambda R(t) = 0 \\ R(T) = R(0) \end{cases}$$

$R(t) = Ce^{-\lambda t}$ et comme $R(T) = R(0)$, alors $e^{-\lambda T} = 1$, d'où les valeurs propres sont :

$$\lambda_k = \frac{2ik\pi}{T} = ik\omega$$

et les fonctions propres :

$$R_k(t) = e^{-\lambda_k t} = e^{-ik\omega t}$$

forment un système orthonormé avec le produit scalaire :

$$< f,\ g >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$$

Comme c'est une famille totale dans $L^2(0,T)$ alors :

$$R(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{-\lambda_k t}$$

avec :

$$C_k =< R(t), e^{-\lambda_k t} >= \frac{1}{T}\int_0^T R(t)e^{\lambda_k t}dt$$

a) Si $\lambda \neq \lambda_k$, nous avons :

$$g(t) = R'(t) + \lambda R(t)$$

or

$$R(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{-\lambda_k t}$$

donc :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(\lambda - \lambda_k)e^{-\lambda_k t}$$

On pose

$$\begin{aligned} b_k &= C_k(\lambda - \lambda_k) \\ &= < g(t), e^{-\lambda_k t} > \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{\lambda_k t}dt \end{aligned}$$

d'où la solution du problème (3.3.2) :

$$R(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda_k t}$$

et

$$F(Y) = \frac{1}{T}\int_0^T R(t)\gamma_t(Y)dt$$

Or $F(Y) = (\lambda I - L)^{-1}G(Y)$ donc :

$$F(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k}.\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k t}\gamma_t(Y)dt\right)$$

On pose

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k t}\gamma_t(Y)dt$$

d'où la solution du problème (3.3.1) :

$$F(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k}.Y_k$$

b) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$ et $\int_0^T g(t)e^{\lambda_{k_0}t}dt = 0$; on a :

$$g(t) = R'(t) + \lambda_{k_0}R(t)$$

or

$$R(t) = \sum_{k\neq k_0} C_k e^{-\lambda_k t} + Ce^{-\lambda_{k_0}t}$$

donc :

$$g(t) = \sum_{k\neq k_0} C_k(\lambda_{k_0} - \lambda_k)e^{-\lambda_k t}$$

avec

$$\begin{aligned} b_k &= C_k(\lambda_{k_0} - \lambda_k) \\ &= < g(t), e^{-\lambda_k t} > \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{\lambda_k t}dt \end{aligned}$$

d'où :

$$R(t) = \sum_{k\neq k_0} \frac{b_k}{\lambda_{k_0} - \lambda_k} e^{-\lambda_k t} + Ce^{-\lambda_{k_0}t}$$

et

$$F(Y) = \frac{1}{T}\int_0^T R(t)\gamma_t(Y)dt$$

donc :

$$F(Y) = \sum_{k\neq k_0} \frac{b_k}{\lambda_{k_0} - \lambda_k}.Y_k + CY_{k_0}$$

avec

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k t}\gamma_t(Y)dt$$

c) Montrons la condition d'orthogonalité :

$$\int_0^T R_{k_0}(t)g(t)dt = 0$$

Soit $R(t) = \sum_{k\neq k_0} C_k R_k(t)$ une solution particulière de l'équation avec second membre et $R_{k_0}(t)$ solution de l'équation homogène ; alors :

$$\begin{cases} R'(t) + \lambda_{k_0}R(t) = g(t) \\ R'_{\lambda_{k_0}}(t) + \lambda_{k_0}R_{k_0}(t) = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $R_{k_0}(t)$, la deuxième par $R(t)$ et faisons la somme membre à membre, nous obtenons :

$$R_{k_0}(t)R'(t) + R(t)R'_{\lambda_{k_0}}(t) + 2.\lambda_{k_0}.R(t)R_{k_0}(t) = g(t).R_{k_0}(t)$$

Comme :

$$\int_0^T R_{k_0}(t)R'(t)dt = \underbrace{[R_{k_0}(t)R(t)]_0^T}_{=0} - \int_0^T R'_{k_0}(t)R(t)dt$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^T R_{k_0}(t)g(t)dt &= 2.\lambda_{k_0}\int_0^T R(t)R_{k_0}(t)dt \\ &= 2.\lambda_{k_0}\sum_{k\neq k_0} C_k \int_0^T R_k(t)R_{k_0}(t)dt = 0\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\int_0^T R_{k_0}(t)g(t)dt = 0$$

□

Corollaire 9. *Soit R une fonction de classe $C^1[0,T] \to \mathbb{R}$ avec $R(T) = R(0)$, et g est une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
On pose :

$$F(Y) = \frac{1}{T}\int_0^T R(t)\phi_{t*}(Y)dt$$
$$G(Y) = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\phi_{t*}(Y)dt$$

avec $(\phi_t)_*Y$ est de période T.

Le problème aux conditions aux limites homogènes suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda I - ad_{-X})F(Y) = G(Y)\\ (\phi_T)_*Y = Y\end{array}\right. \tag{3.3.3}$$

est équivalent au problème aux limites de Dirichlet classique sur le corps des réels $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ll}R'(t) + \lambda R(t) = g(t) & 0 \leq t \leq T\\ R(T) = R(0)\end{array}\right.$$

b) Si $\lambda \neq \lambda_k$, alors :

$$F(Y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k} Y_k$$

avec :

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\lambda_k t} g(t)dt$$

et

$$Y_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda_k t}(\phi_t)_* Y dt$$

c) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$, avec la condition suivante d'orthogonalité :

$$\int_0^T e^{\lambda_{k_0} t}.g(t)dt = 0$$

alors $F(Y) = (\lambda_{k_0} I - ad_{-X})^{-1} G(Y)$

$$F(Y) = \sum_{k\neq k_0} \frac{b_k}{\lambda_{k_0} - \lambda_k} Y_k + C.Y_{k_0} \qquad \textit{avec } C \textit{ une constante arbitraire}$$

d) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$, avec $\int_0^T e^{\lambda_{k_0} t}.g(t)dt \neq 0$; Alors le problème 3.3.3 n'admet pas de solution.

3.3.2 Application sur les séries de Fourier dans $\mathbb{R}$

Soient $X, Y \in E = \Gamma(TM)$, où M est une variété, et $\gamma_t = exp(tX)$ le X-flot, tel que :

$$\begin{gathered}\gamma : \Gamma(TM) \times M \times \mathbb{R} \to M \\ (X, x, t) \to (\gamma_t)(X).\end{gathered}$$

avec $(\gamma_T)_* Y = Y$ et $R : I = [0, T] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur I, et g continue sur I. Nous posons :

$$F(Y) = \frac{2}{T} \int_0^T R(t)(\gamma_t).Y dt$$

et

$$G(Y) = \frac{2}{T} \int_0^T g(t)(\gamma_t).Y dt$$

Lemme 21. *Soit $Y \in E$ et le problème de Sturm-Liouville avec second membre aux conditions aux limites homogènes :*

$$\begin{cases} (L^2 + \lambda^2)F(Y) = G(Y) \\ \gamma_T(Y) = Y \end{cases} \tag{3.3.4}$$

est équivalent presque partout au le problème de Sturm-Liouville dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} R''(t) + \lambda^2 R(t) = g(t) \\ R(T) = R(0) \\ R'(T) = R'(0) \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Démonstration. Nous avons l'équation :

$$(L^2 + \lambda^2)F(Y) = G(Y)$$

Nous posons :

$$F(Y) = \frac{2}{T} \int_0^T R(t)(\gamma_t) Y dt$$

Or

$$\begin{aligned} L(F(Y)) &= \frac{2}{T} \int_0^T R(t)(L \circ \gamma_t)(Y) dt \Big) \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T R(t) \frac{d}{dt} \gamma_t(Y) dt \\ &= \frac{2}{T} [R(t)(\gamma_t)(Y)]_0^T - \frac{2}{T} \int_0^T R'(t) \gamma_t(Y) dt \end{aligned}$$

Or $[R(t)\gamma_t(Y)]_0^T = 0$ car $R(T) = R(0)$ et $\gamma_T(Y) = Y$, d'où :

$$L(F(Y)) = -\frac{2}{T} \int_0^T R'(t) \gamma_t(Y) dt = H(Y)$$

$$\begin{aligned} L^2(F(Y)) = L(H(Y)) &= -\frac{2}{T} \int_0^T R'(t)(L \circ \gamma_t)(Y) dt \Big) \\ &= -\frac{2}{T} \int_0^T R'(t) \frac{d}{dt} \gamma_t(Y) dt \\ &= -\frac{2}{T} [R'(t)(\gamma_t)(Y)]_0^T + \frac{2}{T} \int_0^T R''(t) \gamma_t(Y) dt \end{aligned}$$

Or $[R'(t)\gamma_t(Y)]_0^T = 0$ car $R'(T) = R'(0)$ et $\gamma_T(Y) = Y$, d'où :

$$L^2(F(Y)) = \frac{2}{T}\int_0^T R''(t)\gamma_t(Y)dt$$

$$(L^2 + \lambda^2)F(Y) = \frac{2}{T}\int_0^T \left[R''(t) + \lambda^2 R(t)\right]\gamma_t(Y)dt$$

Or

$$(L^2 + \lambda^2)F(Y) = G(Y) = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\gamma_t(Y)dt$$

Par identification, nous aurons le problème de Sturm-Liouville homogène aux conditions aux limites homogènes suivant :

$$\begin{cases} R''(t) + \lambda^2 R(t) = g(t) \\ R(T) = R(0) \\ R'(T) = R'(0) \end{cases}$$

□

Théorème 16. *Le problème de Sturm-Liouville (3.3.4) :*

$$\begin{cases} (L^2 + \lambda^2)F(Y) = G(Y) \\ \gamma_t(Y) = Y \end{cases}$$

admet pour solution : i) Si $\lambda \neq k\omega; \forall k \in \mathbb{Z}$

$$F(Y) = \frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}A_0\right) + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{A_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}a_k + \frac{B_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}b_k\right).$$

Où :

$$\begin{cases} a_k =< g(t), cosk\omega t >= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)cos(k\omega t)dt \\ b_k =< g(t), sink\omega t >= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)sin(k\omega t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_k =< cosk\omega t, \gamma_t >= \frac{2}{T}\int_0^T (cos(k\omega t))\gamma_t(Y)dt \\ B_k =< sink\omega t, \gamma_t >= \frac{2}{T}\int_0^T (sin(k\omega t))\gamma_t(Y)dt \end{cases}$$

ii) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$ *et si :*

$$\int_0^T g(t)cos(k_0\omega t)dt = \int_0^T g(t)sin(k_0\omega t)dt = 0$$

alors :

$$F(Y) = \frac{A_0.a_0}{2\lambda^2} + \sum_{k\neq k_0}\left(\frac{A_k.a_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)} + \frac{B_k.b_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)}\right) + C_2.A_{k_0} + C_3.B_{k_0}$$

Démonstration. - Résolution de l'équation sans second membre :

$$R'' + \lambda^2 R = 0$$

$$R(t) = C_1cos(\lambda t) + C_2sin(\lambda t)$$
$$et\ \ R'(t) = -C_1\lambda sin(\lambda t) + C_2\lambda cos(\lambda t)$$

Vérification des conditions aux limites homogènes :

$$\begin{cases} R(T) = R(0) \\ R'(T) = R'(0) \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} C_1 cos(\lambda T) + C_2 sin(\lambda T) = C_1 \\ C_1 \lambda sin(\lambda T) + C_2 \lambda cos(\lambda T) = C_2 \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(cos(\lambda T) - 1) + C_2 sin(\lambda T) = 0 \\ C_1 \lambda sin(\lambda T) + C_2 \lambda (1 - cos(\lambda T)) = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons le déterminant de ce dernier système :

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} cos(\lambda T) - 1 & sin(\lambda T) \\ \lambda sin(\lambda T) & -\lambda(cos(\lambda T) - 1) \end{vmatrix} = -2\lambda(1 - cos(\lambda T))$$

$\triangle(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(1 - cos(\lambda T)) = 0$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda = 0 \ \vee \ \lambda_k = \frac{2k\pi}{T} = k\omega$$

et les fonctions propres associées seront :

$$\{\frac{1}{2}, \ cosk\omega t, \ sink\omega t\}_{k \geq 1}$$

C'est système orthonormé de fonctions propres, et il est dense dans $L^2(0, T)$ avec le produit scalaire :

$$< f, g >= \frac{2}{T} \int_0^T f(s)g(s)ds$$

- Résolution du problème 3.3.5 de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} R'' + \lambda^2 R = g(s) \\ R(T) = R(0) \\ R'(T) = R'(0) \end{cases}$$

Comme le système orthonormé de fonctions propres formant une base totale :

$$\overline{\{\frac{1}{2}, \ cosk\omega t, \ sink\omega t\}} = L^2(0, \ T)$$

Or R et $g \in L^2(0, \ T)$, nous avons alors :

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k cosk\omega t + b_k sink\omega t)$$

Où :

$$\begin{cases} a_k =< g(s), cosk\omega s >= \frac{2}{T} \int_0^T g(s) cosk\omega s ds \\ b_k =< g(s), sink\omega s >= \frac{2}{T} \int_0^T g(s) sink\omega s ds \end{cases}$$

La solution du problème avec second membre :

$$\begin{cases} R'' + \lambda^2 R = g(s) \\ R(T) = R(0) \\ R'(T) = R'(0) \end{cases}$$

sera donc :

$$R(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k\geq 1}(\alpha_k cosk\omega t + \beta_k sink\omega t)$$

Où :

$$\begin{cases} \alpha_k =< R(s),\ cosk\omega s > \\ \beta_k =< R(s),\ sink\omega s > \end{cases}$$

Nous essayons de déterminer les coefficients $(\alpha_k,\ \beta_k)$

$$\begin{cases} R'' = -\lambda^2 R + g(s) \\ (cos\ (k\omega s))'' = -(k\omega)^2 cos(k\omega s) \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $cos(k\omega s)$, la deuxième par R, et en effectuant la soustraction, nous obtenons :

$$cos(k\omega s)R'' - R(cos(k\omega s))'' = \frac{d}{ds}(W(s, cosk\omega s, R(s)))$$

Après intégration, nous obtenons :

$$[W(s, cosk\omega s, R(s))]_0^T = R'(T) - R'(0) = 0$$

d'où :

$$(k^2\omega^2 - \lambda^2)\underbrace{\int_0^T R(s)cos(k\omega s)ds}_{\alpha_k} + \underbrace{\int_0^T g(s)cos(k\omega s)ds}_{a_k} = 0$$

- Si $\lambda \neq k\omega$ nous aurons

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda^2 - k^2\omega^2}a_k$$

Il est de même pour les coefficients $\beta_k =< R(s), sink\omega s >$

$$\begin{cases} R'' = -\lambda^2 R + g(s) \\ (sin(k\omega s))'' = -k^2\omega^2 sin(k\omega s) \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $sin(k\omega s)$, la deuxième par R, et en effectuant la soustraction, nous obtenons :

$$[sin(k\omega s)R'' - R(sin(k\omega s))'']_0^T = 0 \Leftrightarrow (k^2\omega^2-\lambda^2)\underbrace{\int_0^T R(s)sin(k\omega s)ds}_{\beta_k} + \underbrace{\int_0^T g(s)sin(k\omega s)ds}_{b_k} = 0$$

d'où :

$$\beta_k = \frac{1}{\lambda^2 - k^2\omega^2}b_k$$

D'où, la solution du problème (3.3.5) est :

$$R(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k\geqslant 1}(\alpha_k cosk\omega t + \beta_k sink\omega t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}a_0\right) + \\ + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{a_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}cosk\omega t + \frac{b_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}sink\omega t\right).$$

Pour le problème (3.3.4), nous avons :

$$\gamma_t Y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k\geqslant 1}(A_k cosk\omega t + B_k sink\omega t)\,, \text{où}$$

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{T}\int_0^T \gamma_t Y coskwtdt \\ \\ B_k = \frac{2}{T}\int_0^T \gamma_t Y sinkwtdt \end{cases}$$

La solution du problème (3.3.4) sera donc :

$$\begin{aligned} F(Y) &= \frac{2}{T}\int_0^T R(t)\gamma_t Y dt \\ &= \frac{2}{T}\int_0^T \left[\frac{a_0}{2\lambda^2} + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{a_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}cosk\omega t + \frac{b_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}sink\omega t\right)\right]\gamma_t Y dt \\ &= \frac{A_0.a_0}{2\lambda^2} + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{A_k.a_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2} + \frac{B_k.b_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}\right) \end{aligned}$$

- Si $\lambda = k_0\omega$, la solution du problème (3.3.5) s'écrira alors :

$$\begin{aligned} R(t) = \frac{a_0}{2.\lambda^2} + \sum_{k\neq k_0}\left(\frac{a_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)}cosk\omega t + \frac{b_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)}sink\omega t\right) + \\ +C_2.cos(k_0\omega t) + C_3.sin(k_0\omega t), \end{aligned}$$

avec C_2, C_3 des constantes arbitraires. et pour le problème (3.3.4) :

$$\gamma_t Y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k\geq 1}(A_k cosk\omega t + B_k sink\omega t)$$

La solution finale sera :

$$F(Y) = \frac{A_0.a_0}{2\lambda^2} + \sum_{k\neq k_0}\left(\frac{A_k.a_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)} + \frac{B_k.b_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)}\right) + C_2.A_{k_0} + C_3.B_{k_0}$$

Conditions d'orthogonalité : Montrons la condition d'orthogonalité :

$$\int_0^T R_{k_0}(t)g(t)dt = 0$$

Nous avons :

$$\begin{cases} R''(t) + \lambda_{k_0}^2 R(t) = g(t) \\ R''_{\lambda_{k_0}}(t) + \lambda_{k_0}^2 R_{k_0}(t) = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $R_{k_0}(t)$, la deuxième par $R(t)$ et faisons la somme membre à membre, nous obtenons :

$$R_{k_0}(t)R''(t) - R(t)R''_{k_0}(t) = g(t).R_{k_0}(t) \tag{3.3.6}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} (R'(t)R_{k_0}(t) - R(t)R'_{k_0}(t))' &= R''(t)R_{k_0}(t) + \cancel{R'(t)R'_{k_0}(t)} - \cancel{R'(t)R'_{k_0}(t)} - R(t)R''_{k_0}(t) \\ &= R''(t)R_{k_0}(t) - R(t)R''_{k_0}(t) \\ &= R_{k_0}(t).g(t) \qquad\qquad d'après\ (3.3.6) \end{aligned}$$

alors :

$$\int_0^T R_{k_0}(t)g(t)dt = \underbrace{\left[R_{k_0}(t)R(t) - R(t)R'_{k_0}(t)\right]_0^T}_{=0}$$

car $R'(T) = R'(0)$ et $R(T) = R(0)$; donc :

$$\int_0^T R_{k_0}(t)g(t)dt = 0$$

$\square$

Corollaire 10. *Soit une fonction R de classe C^2 sur $[0,T]$; $R : [0,T] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $R(T) = R(0)$ et $R'(T) = R'(0)$. Nous posons :*

$$F(Y) = \frac{2}{T}\int_0^T R(t)(\phi_t)_* Y dt$$
$$G(Y) = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)(\phi_t)_* Y dt$$

avec $(\phi_t)_* Y$ est de période T.
a) Le problème suivant :

$$\begin{cases} (ad_{-X})^2(F(Y)) + \lambda^2 F(Y) = G(Y) \\ \phi_{T*}Y = Y \end{cases}$$

est équivalent presque partout au le problème de Sturm-Liouville dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} R''(t) + \lambda^2 R(t) = g(t) \\ R(T) = R(0) & \qquad 0 \leq t \leq T \\ R'(T) = R'(0) \end{cases}$$

b) Si $\lambda \neq \lambda_k = k\omega; \forall k \in \mathbb{Z}$

$$F(Y) = \frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}A_0\right) + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{A_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}a_k + \frac{B_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2}b_k\right).$$

Où :

$$\begin{cases} a_k =< g(t), cosk\omega t >= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)cos(k\omega t)dt \\ b_k =< g(t), sink\omega t >= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)sin(k\omega t)dt \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_k =< cosk\omega t, \phi_{t_*} >= \frac{2}{T}\int_0^T (cos(k\omega t))\, \phi_{t_*}(Y)dt \\ B_k =< sink\omega t, \phi_{t_*} >= \frac{2}{T}\int_0^T (sin(k\omega t))\, \phi_{t_*}(Y)dt \end{cases}$$

c) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$ et si :

$$\int_0^T g(t)cos(k_0\omega t)dt = \int_0^T g(t)sin(k_0\omega t)dt = 0$$

alors :

$$F(Y) = \frac{A_0.a_0}{2\lambda^2} + \sum_{k\neq k_0}\left(\frac{A_k.a_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)} + \frac{B_k.b_k}{\omega^2(k_0^2 - k^2)}\right) + C_2.A_{k_0} + C_3.B_{k_0}$$

3.3.3 Application aux problèmes de Sturm-Liouville

a) Développement du semi-groupe en série de fonctions propres

Considérons le problème aux limites de Sturm-Liouville classique suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(P(t)R'(t)\right) + q(t)R(t) - \lambda r(t)R(t) = 0 \\ R(a) = R(b) & a \leq t \leq b \\ P(a)R'(a) = P(b)R'(b) \end{cases}$$

Alors $(R_k(t))_k$ forment un système orthonormé de fonctions propres avec le produit scalaire :

$$< f, g >= \int_a^b r(t)f(t)g(t)dt$$

et :

$$\overline{(R_k(t))_k} = L^2(a,b) \ni \gamma_t(Y)(x)$$

$\gamma_t(Y)$ est donc développable en série de fonctions propres $(R_k(t))_k$ telle que :

$$\gamma_t(Y) = \sum_k C_k R_k(t)$$

avec :

$$C_k(Y) = \int_0^T r(t)\gamma_t(Y)R_k(t)dt$$

b) Résolution d'un problème aux limites de Sturm-Liouville

Considérons le problème aux limites de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(P(t)\frac{d}{dt}\gamma_t(Y)\right) + q(t)\gamma_t(Y) - \lambda r(t)\gamma_t(Y) = g_t(Y) \\ \gamma_a(Y) = \gamma_b(Y) \\ P(a)\gamma'_a(Y) = P(b)\gamma'_b(Y) \end{cases} \tag{3.3.7}$$

i) Si $\lambda \neq \lambda_k$, alors le problème homogène (3.3.7) admet pour solution :

$$\gamma_t(Y) = \sum_k \frac{b_k(Y)}{\lambda_k - \lambda} R_k(t)$$

avec :

$$b_k(Y) = \int_0^T R_k(t)g_t(Y)dt$$

En effet :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(P(t)\gamma'_t(Y)\right) + q(t)\gamma_t(Y) - \lambda r(t)\gamma_t(Y) = g_t(Y) \\ \frac{d}{dt}\left(P(t)R'_k(t)\right) + q(t)R_k(t) - \lambda_k r(t)R_k(t) = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $R_k(t)$, et la deuxième par $\gamma_t(Y)$, et en additionnant les deux équations membre à membre, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\left[P(t).W(t, R_k(t), \gamma_t(Y))\right] + (\lambda_k - \lambda)r(t)\gamma_t(Y)R_k(t) = g_t(Y)R_k(t)$$

et en intégrant entre a et b on obtient :

$$\underbrace{\left[P(t).W(t, R_k(t), \gamma_t(Y))\right]_a^b}_{=0} + (\lambda_k - \lambda)\underbrace{\int_a^b r(t)\gamma_t(Y)R_k(t)dt}_{C_k(Y)} = \underbrace{\int_a^b g_t(Y)R_k(t)dt}_{b_k(Y)}$$

Nous aurons donc :

$$C_k(Y) = \int_a^b r(t)\gamma_t(Y)R_k(t)dt = \frac{b_k(Y)}{\lambda_k - \lambda}$$

et

$$\gamma_t(Y) = \sum_k \frac{b_k(Y)}{\lambda_k - \lambda} R_k(t)$$

ii) Si $\lambda = \lambda_{k_0}$, avec $\int_a^b g_t(Y) R_{k_0}(t)dt = 0$
Nous avons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(P(t)\gamma_t'(Y)\right) + q(t)\gamma_t(Y) - \lambda_{k_0} r(t)\gamma_t(Y) = g_t(Y) \\ \frac{d}{dt}\left(P(t)R_{k_0}'(t)\right) + q(t)R_{k_0}(t) - \lambda_{k_0} r(t)R_{k_0}(t) = 0 \end{cases}$$

Alors $\gamma_t(Y) = C(Y)R_{k_0}(t)$, où $C(Y)$ une constante arbitraire dépendant de Y. Nous aurons donc :

$$\gamma_t(Y) = \sum_{k \neq k_0} \frac{b_k(Y)}{\lambda_k - \lambda_{k_0}} R_k(t) + C(Y)R_{k_0}(t)$$

iii) Vérification de la condition d'orthogonalité

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(P(t)\gamma_t'(Y)\right) + q(t)\gamma_t(Y) - \lambda_{k_0} r(t)\gamma_t(Y) = g_t(Y) \\ \frac{d}{dt}\left(P(t)R_{k_0}'(t)\right) + q(t)R_{k_0}(t) - \lambda_{k_0} r(t)R_{k_0}(t) = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $R_{k_0}(t)$, et la deuxième par $\gamma_t(Y)$, et en additionnant les deux équations membre à membre, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\left[P(t).W(t, R_{k_0}(t), \gamma_t(Y))\right] + (\lambda_{k_0} - \lambda_{k_0}) r(t)\gamma_t(Y)R_{k_0}(t) = g_t(Y)R_{k_0}(t)$$

et en intégrant entre a et b on obtient :

$$\underbrace{\left[P(t).W(t, R_{k_0}(t), \gamma_t(Y))\right]_a^b}_{=0} + \cancel{(\lambda_{k_0} - \lambda_{k_0})} \int_a^b r(t)\gamma_t(Y)R_{k_0}(t)dt = \int_a^b g_t(Y)R_{k_0}(t)dt$$

Nous aurons donc :

$$\int_a^b g_t(Y)R_{k_0}(t)dt = 0$$

Remarques

a) Concernant le développement du semi-groupe en série de fonctions propres.
Si $\gamma_t(Y) = \phi_{t_*}Y$, alors :

$$\phi_{t_*}Y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(Y)R_k(t)$$

avec :

$$C_k(Y) = \int_0^T r(t)\phi_{t_*}(Y)R_k(t)dt$$

b) Concernant la résolution d'un problème aux limites de Sturm-Liouville.
Si $\gamma_t(Y) = \phi_{t_*}Y$, alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(P(t)\frac{d}{dt}\phi_{t_*}(Y)\right) + q(t)\phi_{t_*}(Y) - \lambda r(t)\phi_{t_*}(Y) = g_t(Y) \\ \phi_{a*}(Y) = \phi_{b*}(Y) \\ P(a)\phi_{a*}'(Y) = P(b)\phi_{b*}'(Y) \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq \lambda_k$, alors :

$$\phi_{t_*}(Y) = \sum_k \frac{b_k(Y)}{\lambda_k - \lambda} R_k(t)$$

avec :

$$b_k(Y) = \int_0^T R_k(t) g_t(Y) dt$$

- Si $\lambda = \lambda_{k_0}$, avec :

$$\int_0^T g_t(Y) R_{k_0}(t) dt = 0$$

Nous aurons :

$$\phi_{t_*}(Y) = \sum_{k \neq k_0} \frac{b_k(Y)}{\lambda_k - \lambda_{k_0}} R_k(t) + C(Y) R_{k_0}(t)$$

Chapitre 4

Propriétés spectrales des opérateurs adjoints dans un espace de Fréchet de type hyperbolique et applications

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux propriétés spectrales de deux types d'opérateurs adjoints dans un espace de Fréchet de type hyperbolique, le premier est l'opérateur de translation X_1-flot, et la deuxième est de dilatation X_0-flot.

Lemme 22. *$\forall Y \in E$:*
a) si $\sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}Y$ converge $\forall\lambda \in \mathbb{C}; \forall t \geq 0$ alors

$$(e^{\lambda t}I - \gamma_t)^{-1}.Y = \sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}.Y$$

b) si $\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\gamma_{-mt}Y$ converge $\forall\lambda \in \mathbb{C}; \forall t \geq 0$ alors

$$(e^{\lambda t}I - \gamma_t)^{-1}.Y = -\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\gamma_{-mt}.Y$$

Démonstration. a) Supposons que $\sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}Y$ converge, montrons alors que :

$$(e^{\lambda t}I - \gamma_t)\left(\sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}.Y\right) = \left(\sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}Y\right).(e^{\lambda t}I - \gamma_t) = Y$$

i) Première étape :

$$\begin{aligned}(e^{\lambda t}I - \gamma_t)\left(\sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}.Y\right) &= \sum_{m\geq 0} e^{-\lambda mt}\gamma_{mt}.Y - \sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{(m+1)t}.Y \\ &= \sum_{m\geq 0} e^{-\lambda mt}\gamma_{mt}.Y - \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda kt}\gamma_{kt}.Y \quad \text{avec } k = m+1 \\ &= Y\end{aligned}$$

ii) Deuxième étape, par un même raisonnement :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}Y\right)(e^{\lambda t}I - \gamma_t) &= \sum_{m\geq 0} e^{-\lambda mt}\gamma_{mt}.Y - \sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{(m+1)t}.Y \\ &= Y\end{aligned}$$

donc

$$(e^{\lambda t}I - \gamma_t)^{-1}Y = \sum_{m\geq 0} e^{-\lambda(m+1)t}\gamma_{mt}.Y$$

b) i) Supposons que $\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\gamma_{-mt}Y$ converge,nous avons alors :

$$\begin{aligned}
-(e^{\lambda t}I-\gamma_t)\left(\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\gamma_{-mt}.Y\right) &= -\left(\sum_{m\geq 1} e^{\lambda mt}\gamma_{-mt}Y\right)+\left(\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\gamma_{-(m-1)t}Y\right)\\
&= -\sum_{m\geq 1} e^{\lambda^m t}\gamma_{-mt}.Y+\sum_{k\geq 0} e^{\lambda kt}\gamma_{-kt}.Y \quad \text{avec } k=m-1\\
&= Y
\end{aligned}$$

ii) Par un même raisonnement :

$$\left(-\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\gamma_{-mt}Y\right)(e^{\lambda t}I-\gamma_t)=Y$$

donc

$$(e^{\lambda t}I-\gamma_t)^{-1}Y=-\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\gamma_{-mt}.Y$$

□

4.1 Spectre des opérateurs ad_{X_1} et ad_{-X_1} dans un espace de type hyperbolique

4.1.1 Injectivité de $\lambda I - ad_{X_1}$

Soit $E=E_1\oplus E_2$ l'espace de Fréchet de type Hyperbolique pour le X_1-flot, où X_1 un champ constant, alors il existe $\delta\in[0,1[$, tel que $E=E_1^\delta+E_2^\delta$.

Lemme 23. *Il existe $\delta\in[0,1[$, tel que $\forall t\geq t_0>0\,;\forall\lambda\in\mathbb{C};\left(e^{\lambda t}I-\phi_{t*}\right)$ (respectivement $\left(e^{\lambda t}I-\phi_{-t*}\right)$) est doucement inversible sur E_1^δ (respectivement sur E_2^δ) et sur $E=E_1\oplus E_2=E_1^\delta+E_2^\delta,\forall t\geq t_0>0$.*

Démonstration. - Première Partie : Montrons que $(e^{\lambda t}I-\phi_{t_*})$ est doucement inversible sur $E;\forall\lambda\in\mathbb{C}$.

a) Si $Re(\lambda)<0$; montrons d'abord que la série : $\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}(\phi_{-mt})_*Y^1$ (et respectivement la série $\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}(\phi_{-mt})_*Y^2$) converge uniformément sur E_1 (respectivement sur E_2^δ) $\forall t\geq t_0>0$.
Selon le lemme 4, nous avons $\forall K_1$ compact de Ω_1 ; alors $\exists t_0>0/\forall t\geq t_0$. Nous avons :

$$\left\|e^{\lambda(m-1)t}\phi_{-mt*}Y^1\right\|_r^{K_1}\leq\left(e^{t_0.Re\lambda}\right)^{m-1}.\left\|Y^1\right\|_r^{K_1}=V_m^1$$

et

$$\left\|e^{\lambda(m-1)t}\phi_{-mt*}Y^2\right\|_r^{\Omega_2}\leq\left(e^{t_0.Re\lambda}\right)^{m-1}.\left\|Y^2\right\|_r^{\Omega_2}=V_m^2$$

Comme $Re\lambda<0$, alors les deux séries $\sum_{m\geq 1} V_m^1$ et $\sum_{m\geq 1} V_m^2$ convergent, d'où $\sum_{m\geq 1}\left\|e^{\lambda(m-1)t}\phi_{-mt*}Y^1\right\|_r^{K_1}$ et $\sum_{m\geq 1}\left\|e^{\lambda(m-1)t}\phi_{-mt*}Y^2\right\|_r^{\Omega_2}$ convergent uniformément sur $E_1;\forall t\geq t_0>0$, et sur E_2 respectivement. Nous concluons que la série $\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\phi_{-mt*}Y^1$ (et respectivement la série $\sum_{m\geq 1} e^{\lambda(m-1)t}\phi_{-mt*}Y^2$) converge normalement sur $E_1,\forall t\geq t_0>0$ (respectivement sur E_2). D'après le lemme 22

$\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^1\right]$ et $\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^2\right]$ existent sur E_1 et E_2 respectivement. En effet Si $Re(\lambda)<0, \forall i=1,2$ nous avons :

$$\begin{aligned}\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^i\right] &= \left[\phi_{t*}(e^{\lambda t}\phi_{-t*}-I)\right]^{-1}Y^i \\ &= -\phi_{-t*}\sum_{m\geq 0}\left(e^{\lambda t}\phi_{-t*}\right)^m Y^i \\ &= -\sum_{m\geq 0} e^{\lambda m t}\phi_{-(m+1)t*}Y^i\end{aligned}$$

donc :

$$\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^i\right] = -\sum_{k\geq 1} e^{\lambda(k-1)t}\phi_{-kt*}Y^i \qquad \textit{avec } k=m+1$$

Soit $Y\in E=E_1\oplus E_2$ alors $\exists ! Y^i\in E_i/Y=Y^1+Y^2$, d'où :

$$\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y\right]=\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^1\right]+\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^2\right]$$

existe sur E. Montrons alors que $(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})$ est doucement inversible sur E pour $Re(\lambda)<0$ et $\forall t\geq t_0>0$.

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{\lambda t}I-\phi_{t*}\right)^{-1}Y\right\| &\leq \sum_{m\geq 1}\left(e^{t_0 Re\lambda}\right)^{m-1}\left(\left\|Y^1\right\|_r+\left\|Y^2\right\|_r\right) \\ &\leq C\left\|Y\right\|_r\end{aligned}$$

D'où $(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})$ est doucement inversible sur $E, \forall Re(\lambda)<0$ et $\forall t\geq t_0>0$.
b) Si $Re(\lambda)>0$; montrons d'abord que la série : $\sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{mt})_* Y^1$ (et respectivement la série $\sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{mt})_* Y^2$) converge uniformément sur E_1 (respectivement sur E_2) $\forall t\geq t_0>0$.
Nous savons que :

$$\left\|e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^1\right\|_r^{\Omega_1}\leq\left(e^{-t_0.Re\lambda}\right)^{m+1}.\left\|Y^1\right\|_r^{\Omega_1}=W_m^1$$

Selon le lemme 4, nous avons $\forall K_2$ compact de Ω_2 ; alors $\exists t_0>0/\forall t\geq t_0$. Nous avons :

$$\left\|e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^2\right\|_r^{K_2}\leq\left(e^{-t_0.Re\lambda}\right)^{m+1}.\left\|Y^2\right\|_r^{K_2}=W_m^2$$

Comme $Re\lambda>0$, alors les séries $\sum_{m\geq 0}W_m^i$ convergent, d'où $\sum_{m\geq 0}\left\|e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^1\right\|_r^{\Omega_1}$ et $\sum_{m\geq 0}\left\|e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^2\right\|_r^{K_2}$ convergent uniformément sur $E_1; \forall t\geq t_0>0$, et sur E_2 respectivement. Nous concluons que la série $\sum_{m\geq 0}e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^1$ et $\sum_{m\geq 0}e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^2$ convergent normalement sur $E_1, \forall t\geq t_0>0$ (respectivement sur E_2).
D'après le lemme 22 $\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^1\right]$ et $\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^2\right]$ existent sur E_1 et E_2 respectivement. En effet
Si $Re(\lambda)>0, \forall i=1,2$ nous avons :

$$\begin{aligned}\left[(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y^i\right] &= \left[e^{\lambda t}(I-e^{-\lambda t}\phi_{t*})\right]^{-1}Y^i \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{m\geq 0}\left(e^{-\lambda t}\phi_{t*}\right)^m Y^i \\ &= \sum_{m\geq 0}e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^i\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{\lambda t}I-\phi_{t*}\right)^{-1}Y\right\|_r &\le \sum_{m\ge 0}\left(e^{-t_0 Re\lambda}\right)^{m+1}\left(\left\|Y^1\right\|_r+\left\|Y^2\right\|_r\right)\\ &\le C\left\|Y\right\|_r\end{aligned}$$

D'où $(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})$ est doucement inversible sur $E, \forall Re(\lambda)>0$ et $\forall t\ge t_0>0$.
c) Si $Re(\lambda)=0$
Montrons d'abord que la série : $\sum_{m\ge 0}e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{mt})_*Y^1$ (et respectivement la série $\sum_{m\ge 1}e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{-mt})_*Y^2$) converge uniformément sur E_1^δ (respectivement sur E_2^δ) $\forall t\ge t_0>0$.

D'après le lemme 4, $\exists\delta\in[0,1[;\forall t\ge t_0>0$

$$\left\|(\phi_t)_*Y^1\right\|_r^{\Omega_1}\le\left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(t-\delta)^2}\right)\quad\forall r>0$$

et

$$\left\|(\phi_{-t})_*Y^2\right\|_r^{\Omega_2}\le\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(t-\delta)^2}\right)\quad\forall r>0$$

Donc :

$$\left\|e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{mt*}Y^1\right\|_r^{\Omega_1}\le\left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}\right)\simeq\frac{\left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}}{m^2t_0^2}\quad\forall r>0$$

et respectivement

$$\left\|e^{\lambda(m-1)t}\phi_{-mt*}Y^2\right\|_r^{\Omega_2}\le\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}\right)\simeq\frac{\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}}{m^2t_0^2}\quad\forall r>0$$

D'après le critère d'équivalence et de comparaison, ces séries convergent, alors la série $\sum_{m\ge 0}e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{mt})_*Y^1$ (et respectivement la série $\sum_{m\ge 1}e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{-mt})_*Y^2$) converge uniformément sur E_1^δ (respectivement sur E_2^δ) $\forall t\ge t_0>0$.

Comme $Re(\lambda)=0$, nous aurons :

$$\left(e^{\lambda t}I-\phi_{t*}\right)^{-1}Y=\sum_{m\ge 0}e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{mt})_*Y^1-\sum_{m\ge 1}e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{-mt})_*Y^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{\lambda t}I-\phi_{t*}\right)^{-1}Y\right\|_r &\le \sum_{m\ge 0}\frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}\left(\left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}+\left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\right)\\ &\le C\left\|Y\right\|_{r+2}\end{aligned}$$

On en déduit que $(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})^{-1}Y$ existe, et est doucement inversible sur $E;\forall Re(\lambda)=0$ et $\forall t\ge t_0>0$.
Conclusion :
$\forall\lambda\in\mathbb{C}(e^{\lambda t}I-\phi_{t*})$ est doucement inversible sur E_1^δ, et sur E_2^δ et donc sur $E=E_1\oplus E_2$.

- 2ème partie : Montrons que $(e^{\lambda t}I - \phi_t^*)$ est doucement inversible sur $E; \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
On pose :

$$B = \left(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*}\right)^{-1} Y = \left(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*}\right)^{-1} Y^1 + \left(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*}\right)^{-1} Y^2$$

Par un même raisonnement, nous aurons :

a) Pour $Re(\lambda) < 0$ et $\forall t \geq t_0$

$$B = -\sum_{m\geq 1} e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{mt})_* Y^1 - \sum_{m\geq 1} e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{mt})_* Y^2$$

or

$$\left\|(\phi_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq M_1$$

et

$$\left\|(\phi_{mt})_* Y^2\right\|_r^{K_2} \leq \left\|Y^2\right\|_r^{K_2} \leq M_2$$

d'où

$$\sum_{m\geq 1} \left\|e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{mt})_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1}$$

et respectivement :

$$\sum_{m\geq 1} \left\|e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2}$$

Converge pour tout $Re(\lambda) < 0$ sur E_1 (respectivement sur E_2), d'où $(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*})$ est doucement inversible sur $E; \forall Re(\lambda) < 0$.

b) Pour $Re(\lambda) > 0$ et $\forall t \geq t_0$

$$B = \sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{-mt})_* Y^1 + \sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{-mt})_* Y^2$$

or

$$\left\|(\phi_{-mt})_* Y^1\right\|_r^{K_1} \leq \left\|Y^1\right\|_r^{K_1} \leq M_1$$

et

$$\left\|(\phi_{-mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq M_2$$

d'où

$$\sum_{m\geq 0} \left\|e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{-mt})_* Y^1\right\|_r^{K_1}$$

et respectivement :

$$\sum_{m\geq 0} \left\|e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{-mt})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2}$$

Converge pour tout $Re(\lambda) > 0$ sur E_1 (respectivement sur E_2), d'où $(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*})$ est doucement inversible sur $E; \forall Re(\lambda) > 0$.

c) Pour $Re(\lambda) = 0$; $\exists \delta \in [0, 1[; \forall t \geq t_0 > 0$ nous avons

$$\left\|(\phi_t)_* Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\|Y^1\right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} \left(\frac{1}{1 - \delta^2 + (t_0 - \delta)^2}\right) \quad \forall r > 0$$

et

$$\left\|(\phi_{-t})_* Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\|Y^2\right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta} \left(\frac{1}{1 - \delta^2 + (t_0 - \delta)^2}\right) \quad \forall r > 0$$

Nous posons :

$$B = -\sum_{m\geq 1} e^{(m-1)\lambda t}(\phi_{mt})_* Y^1 + \sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\phi_{-mt})_* Y^2$$

$$\left\| e^{\lambda(m-1)t}\phi_{mt*}Y^1 \right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\| Y^1 \right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}\right) \simeq \frac{\left\| Y^1 \right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta}}{m^2t_0^2} \quad \forall r > 0$$

et respectivement

$$\left\| e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{-mt*}Y^2 \right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\| Y^2 \right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}\left(\frac{1}{1-\delta^2+(mt_0-\delta)^2}\right) \simeq \frac{\left\| Y^2 \right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta}}{m^2t_0^2} \quad \forall r > 0$$

Donc la série $\left\| e^{\lambda(m-1)t}\phi_{mt*}Y^1 \right\|_r^{\Omega_1}$ (respectivement $\left\| e^{-\lambda(m+1)t}\phi_{-mt*}Y^2 \right\|_r^{\Omega_2}$) converge sur E_1^δ (respectivement sur E_2^δ) pour tout $Re\lambda = 0$.

On en déduit que $(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*})^{-1}Y$ existe, et est doucement inversible sur E ; $\forall Re(\lambda) = 0$ et $\forall t \geq t_0 > 0$.
Conclusion :
$(e^{\lambda t}I - \phi_{-t*})$ est doucement inversible sur E pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

□

Théorème 17. *$\forall\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $(\lambda I - ad_{X_1})$ (respectivement $(\lambda I - ad_{-X_1})$) est injectif sur E, d'après le corollaire 5.*

4.1.2 Surjectivité des opérateurs $(\lambda I - ad_{-X_1})$ et $(\lambda I - ad_{X_1})$

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ l'espace de Fréchet de type Hyperbolique pour le $X_1 - flot$, alors il existe $\delta \in [0,1[$, tel que $E = E_1^\delta + E_2^\delta$ avec :
- $(\phi_t)_*$ un difféomorphisme opérant doucement sur E_1^δ
- $(\phi_{-t})_*$ un difféomorphisme opérant doucement sur E_2^δ.

Théorème 18. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et pour tout $\delta \in [0,1[$, l'opérateur $(\lambda I - ad_{-X_1})$ (respectivement $(\lambda I - ad_{X_1})$) est surjectif sur E_1^δ (respectivement sur E_2^δ) et dans E.*

Démonstration. Soit $Y \in E = E_1 \oplus E_2$ alors $\exists! Y^i \in E_i / Y = Y^1 + Y^2$. Cherchons W un champs de vecteurs tel que $W = W_1 + W_2 \in E = E_1 \oplus E_2$ tel que :

$$(\lambda I - ad_{-X_1})W = Y$$

D'abord montrons $W_i \in E_i$ tel que :

$$(\lambda I - ad_{-X_1})W_i = Y^i \qquad i = 1,2.$$

Nous posons :

$$W_i = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\phi_{t*}Y^i dt & si\ Re\lambda > 0 \\ \\ -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\phi_{-t*}Y^i dt & si\ Re\lambda < 0 \end{cases}$$

-Premier pas : Montrons que ces intégrales impropres convergent.
a) Si $Re\lambda > 0$
Nous posons :

$$W_i(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_{t*}Y^i)(x)dx \qquad i = 1,2.$$

Nous avons :
$$\lim_{t\to 0} e^{-\lambda t}(\phi_{t*}Y^i) = Y^i$$
Donc l'intégrale est bien définie au point $t = 0$; c'est une intégrale de première espèce.
i) Nous avons d'après l'inégalité (2.1.1) :
$$\left\| e^{-\lambda t}(\phi_{t*}Y^1)\right\|_r^{\Omega_1} \leq e^{-(Re\lambda)t}\left\|Y^1\right\|_r^{\Omega_1} \qquad \forall t \geq t_0$$
et puisque :
$$\int_{t_0}^{+\infty} e^{-(Re\lambda)t}\left\|Y^1\right\|_r^{\Omega_1} dt$$
est convergente, alors, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_{t*}Y^1)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}Y^1(x-tv)dt$$
converge, d'où $W_1 \in E$

ii) Nous avons également :
$$\left\| e^{-\lambda t}(\phi_{t*}Y^2)\right\|_r^{K_2} \leq e^{-(Re\lambda)t}\left\|Y^2\right\|_r^{K_2} \qquad \forall t \geq t_0$$
et puisque :
$$\int_{t_0}^{+\infty} e^{-(Re\lambda)t}\left\|Y^2\right\|_r^{K_2} dt$$
est convergente, alors, l'intégrale
$$W_2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_{t*}Y^2)(x)dt \in E_2$$
est également convergente.
On en déduit de i) et ii) $W = W_1 + W_2 \in E$

b) Si $Re\lambda < 0$
Nous posons :
$$W_i(x) = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_{-t*}Y^i)(x)dx \qquad i = 1, 2.$$
Nous avons :
$$\lim_{t\to 0} e^{\lambda t}(\phi_{-t*}Y^i) = Y^i$$
Donc l'intégrale est bien définie au point $t = 0$; c'est une intégrale de première espèce.
i) Nous avons :
$$\left\| e^{\lambda t}(\phi_{-t*}Y^1)\right\|_r^{K_1} \leq e^{-(Re\lambda)t}\left\|Y^1\right\|_r^{K_1} \qquad \forall t \geq t_0$$
et puisque :
$$\int_{t_0}^{+\infty} e^{(Re\lambda)t}\left\|Y^1\right\|_r^{K_1} dt$$
est convergente, alors, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_{-t*}Y^1)dt = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}Y^1(x+tv)dt$$
converge, d'où $W_1 \in E_1$

ii) Nous avons également :

$$\left\| e^{\lambda t}(\phi_{-t*}Y^2) \right\|_r^{\Omega_2} \leq e^{(Re\lambda)t} \left\| Y^2 \right\|_r^{\Omega_2} \qquad \forall t \geq t_0$$

On en déduit, selon le raisonnement précédent $W_2 \in E_2$ alors de i) et ii) $W = W_1 + W_2 \in E = E_1 \oplus E_2$

c) Si $Re\lambda = 0$

comme $\exists \delta \in [0,1[$ tel que :

$$\left\| (\phi_t)_* Y^1 \right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\| Y^1 \right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} \left(\frac{1}{1-\delta^2+(t-\delta)^2} \right) \ \ \forall r > 0$$

et

$$\left\| (\phi_{-t})_* Y^2 \right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\| Y^2 \right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta} \left(\frac{1}{1-\delta^2+(t-\delta)^2} \right) \ \ \forall r > 0$$

Alors

$$W = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \phi_{t_*} Y^1 dt}_{W_1} - \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \phi_{-t_*} Y^2 dt}_{W_2}$$

$$\left\| e^{-\lambda t} \phi_{t*} Y^1 \right\|_r^{\Omega_1} \leq \left\| Y^1 \right\|_{r+2}^{\Omega_1^\delta} \left(\frac{1}{1-\delta^2+(t-\delta)^2} \right) \quad \forall r > 0$$

et

$$\left\| e^{\lambda t} \phi_{-t*} Y^2 \right\|_r^{\Omega_2} \leq \left\| Y^2 \right\|_{r+2}^{\Omega_2^\delta} \left(\frac{1}{1-\delta^2+(t-\delta)^2} \right) \quad \forall r > 0$$

Donc $W_i \in E_i^\delta, (i = 1,2)$; On en déduit $W \in E = E_1^\delta + E_2^\delta$

-Deuxième pas : Montrons que $(\lambda I - ad_{\mp X_1})W_i = Y^i$ admet une solution sur E_i pour $i = 1,2$

a) Si $Re\lambda > 0$

i) Nous posons :

$$W_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\phi_t)_* Y^1 dt$$

Montrons que W_1 est une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{-X_1})W_i = Y^1$$

$$\begin{aligned} ad_{-X_1}(W_1) &= \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} (\phi_s)_* \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\phi_t)_* Y^1 dt \\ &= \lim_{s \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{ds} \left(\phi_{s+t} \right)_* Y^1 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{d}{d\tau} \left(\phi_\tau \right)_* Y^1 d\tau \qquad avec\, \tau = s+t \\ &= \left[e^{-\lambda \tau} (\phi_\tau)_* Y^1 \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (\phi_\tau)_* Y^1 \frac{d}{d\tau} \left(e^{-\lambda \tau} \right) d\tau \end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \| e^{-\lambda\tau}(\phi_\tau)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leqslant \lim_{\tau\to+\infty} e^{-Re(\lambda)\tau} \| Y^1 \|_r^{\Omega_1^\delta} = 0 \ avec \ Re(\lambda) \geqslant 0$$

alors :

$$\lim_{\tau\to+\infty} e^{-\lambda\tau}(\phi_\tau)_* Y^1 = 0$$

d'où :

$$ad_{-X_1}(W_1) = -Y^1 + \lambda W_1$$

D'où nous aurons :

$$\Big(\lambda I - ad_{-X_1}\Big)W_1 = Y^1$$

Nous concluons que W_1 est une solution de l'équation :

$$(\lambda I - ad_{-X_1})W_1 = Y^1$$

ii) Nous posons :

$$W_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_t)_* Y^2 dt$$

Par un même raisonnement que dans i) nous montrons que W_2 est une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{-X_1})W_2 = Y^2$$

b) Si $Re\lambda < 0$

i) Nous posons :

$$W_1 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_{-t})_* Y^1 dt$$

Montrons que W_1 est une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{-X_1})W_1 = Y^1$$

$$\begin{aligned} ad_{-X_1}(W_1) &= -\lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\phi_s)_* \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_{-t})_* Y^1 dt \\ &= -\lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \frac{d}{ds}\Big(\phi_{s-t}\Big)_* Y^1 dt \end{aligned}$$

Après deux changements de variable, en posant $\tau = s - t$ et $\xi = -\tau$

$$\begin{aligned} ad_{-X_1}(W_1) &= \int_0^{+\infty} e^{\lambda\xi} \frac{d}{d\xi}\Big(\phi_{-\xi}\Big)_* Y^1 d\xi \\ &= \Big[e^{\lambda\xi}(\phi_{-\xi})_* Y^1\Big]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} (\phi_{-\xi})_* Y^1 \Big(e^{\lambda\xi}\Big) d\xi \end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{\xi\to+\infty} \| e^{\lambda\xi}(\phi_{-\xi})_* Y^1 \|_r^{K_1} \leqslant \lim_{\xi\to+\infty} e^{Re(\lambda)\xi} \| Y^1 \|_r^{K_1} = 0$$

alors :

$$\lim_{\xi\to+\infty} \Big\| e^{\lambda\xi}(\phi_{-\xi})_* Y^1 \Big\|_r^{K_1} = 0$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} e^{\lambda\xi}(\phi_{-\xi})_* Y^1 = 0$$

d'où :

$$ad_{-X_1}(W_1) = -Y^1 + \lambda W_1$$

D'où nous aurons :

$$\Big(\lambda\, I - ad_{-X_1}\Big) W_1 = Y^1$$

Nous concluons que W_1 est une solution de l'équation :

$$(\lambda\, I - ad_{-X_1}) W_1 = Y^1$$

ii) Nous posons :

$$W_2 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} (\phi_{-t})_* Y^2 dt$$

Par un même raisonnement que dans i) nous concluons que W_2 est une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda\, I - ad_{-X_1}) W_2 = Y^2$$

Conclusion :
$\forall \lambda \in \mathbb{C}$; l'opérateur $\lambda\, I - ad_{-X_1}$ est surjectif sur E_1^δ et E_2^δ.

- 3ème pas : Montrons que $(\lambda\, I - ad_{-X_1})$ est surjectif sur $E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
i) Soit $Y \in E$, et cherchons un champs de vecteur $W \in E$ tel que :

$$(\lambda\, I - ad_{-X_1}) W = Y$$

Comme les W_i existent et sont bien des solutions des équations :

$$(\lambda\, I - ad_{-X_1}) W_1 = Y^1$$

et

$$(\lambda\, I - ad_{-X_1}) W_2 = Y^2$$

Alors $(\lambda\, I - ad_{-X_1})$ est inversible sur E_1^δ et $(\lambda\, I - ad_{-X_1})$ est inversible surE_2^δ, d'où :

$$Y = (\lambda\, I - ad_{-X_0}) W = (\lambda\, I - ad_{-X_0}) W_1 + (\lambda\, I - ad_{-X_0}) W_2$$

existe, et :

$$W = (\lambda\, I - ad_{-X_0})^{-1} Y = W_1 + W_2 \in E ; \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$(\lambda\, I - ad_{-X_1})$ est alors surjectif sur $E; \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

b) Par un même raisonnement, nous pouvons vérifier également que $(\lambda\, I - ad_{X_1})$ est surjectif sur E_1^δ, sur E_2^δ ; et sur E, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. □

4.1.3 Résolvantes et spectres de ad_{-X_1} et de ad_{X_1}

Le corollaire suivant est le résultat de la démonstration précédente.

Corollaire 11. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, *nous avons les résolvantes suivantes :*

a) $$R(\lambda, ad_{-X_1}) Y = (\lambda\, I - ad_{-X_1})^{-1} Y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \phi_{t*} Y dt & si\ Re\lambda > 0 \\ -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \phi_{-t*} Y dt & si\ Re\lambda < 0 \\ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \phi_{t*} Y^1 dt - \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \phi_{-t*} Y^2 dt & si\ Re\lambda = 0 \end{cases}$$

b) $$R(\lambda, ad_{X_1}).Y = (\lambda\, I - ad_{X_1})^{-1} Y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \phi_{-t*} Y dt & si\ Re\lambda > 0 \\ -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \phi_{t*} Y dt & si\ Re\lambda < 0 \\ -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \phi_{t*} Y^1 dt + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \phi_{-t*} Y^2 dt & si\ Re\lambda = 0 \end{cases}$$

c)$\sigma(ad_{-X_1}) = \sigma(ad_{X_1}) = \varnothing$
et $\rho(ad_{-X_1}) = \rho(ad_{X_1}) = \mathbb{C}$

4.2 Spectre des opérateurs ad_{X_0} et ad_{-X_0} dans un espace de Fréchet de type hyperbolique

4.2.1 Injectivité de $\lambda I - ad_{\pm X_0}$

Lemme 24. *$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall t \geq t_0 > 0$, $(e^{\lambda t} I - \phi_{t*})$ et $(e^{\lambda t} I - \phi_t^*)$ sont doucement inversibles sur l'algèbre admissible U.*

Démonstration. - Premier Pas : Montrons que $(e^{\lambda t} I - \phi_{t*})$ est inversible sur U.
a) Montrons que la série :

$$\sum_{m \geq 0} e^{-(m+1)\lambda t} (\phi_{mt})_*^- Y^1$$

converge sur $U_1, \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\| e^{-(m+1)\lambda t} (\phi_{mt})_*^- Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq e^{-Re\lambda(m+1)t} \| (\phi_{mt})_*^- Y^1 \|_r^{\Omega_1}$$

D'après l'estimation (2.2.3), nous avons :

$$\forall \rho_1' > 0 \quad \exists m_1 = \left[r . \frac{a_L}{a_R} \right] + \rho_1' > 0$$

et $\forall t \geq t_0$ nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \| e^{-(m+1)\lambda t} (\phi_{mt}^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} & \leq & e^{-mt_0 \rho_1' a_R} . e^{-Re\lambda(m+1)t_0} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1} \\ & \leq & \left[e^{-t_0(\rho_1' a_R + Re\lambda)} \right]^m . e^{-Re\lambda t_0} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1} \end{array}$$

Comme ρ_1' est arbitraire alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{1,\lambda}' > 0 / Re\lambda + \rho_{1,\lambda}' a_R > 0$$

alors :

$$(e^{\lambda t} I - (\phi_t^-)_*)^{-1} Y^1 = \sum_{m \geq 0} e^{-(m+1)\lambda t} (\phi_{mt})_*^- Y^1$$

d'où $(e^{\lambda t} I - (\phi_t^-)_*)$ est inversible sur $U_1, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
b) Montrons que la série :

$$\sum_{m \geq 1} e^{(m-1)\lambda t} (\phi_{-mt})_*^+ Y^2$$

converge sur $U_2, \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\| e^{(m-1)\lambda t} (\phi_{-mt})_*^+ Y^2 \|_r^{\Omega_2} \leq e^{Re\lambda(m-1)t} \| (\phi_{-mt})_*^+ Y^2 \|_r^{\Omega_2}$$

D'après l'estimation (2.2.4), nous avons :

$$\forall \rho_2' > 0 \quad \exists m_2 = \left[r . \frac{b_R}{b_L} \right] + \rho_2' > 0$$

et $\forall t \geq t_0$ nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \| e^{(m-1)\lambda t} (\phi_{-mt}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2} & \leq & e^{-mt_0 \rho_2' b_L} . e^{Re\lambda(m-1)t_0} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2} \\ & \leq & \left[e^{-t_0(\rho_2' b_L - Re\lambda)} \right]^m . e^{-Re\lambda t_0} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2} \end{array}$$

Comme ρ'_2 est arbitraire alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho'_{2,\lambda} > 0 / -Re\lambda + \rho'_{2,\lambda} b_L > 0$$

alors :

$$\sum_{m\geq 1} \| e^{(m-1)\lambda t} (\phi^+_{-mt})_* Y^2 \|_r^{\Omega_2}$$

converge $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$(e^{\lambda t} I - (\phi^+_t)_*)^{-1} Y^2 = -\sum_{m\geq 1} e^{(m-1)\lambda t} (\phi_{-mt})^+_* Y^2$$

d'où $(e^{\lambda t} I - (\phi^+_t)_*)$ est inversible sur $U_2, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

c) Montrons que $(e^{\lambda t} I - \phi_{t*})$ est doucement inversible sur $U = U_1 \oplus U_2$.

Soit $Y \in U = U_1 \oplus U_2$ alors $\exists ! Y^i \in E_i$ telle que : $Y = Y^1 + Y^2$; nous aurons alors :

$$(e^{\lambda t} I - \phi_{t_*})^{-1} Y = (e^{\lambda t} I - \phi^-_{t_*})^{-1} Y^1 + (e^{\lambda t} I - \phi^+_{t_*})^{-1} Y^2$$

$$\begin{aligned}
\left\|(e^{\lambda t} I - \phi_{t_*})^{-1} Y\right\|_r &\leq \left\|(e^{\lambda t} I - \phi^-_{t_*})^{-1} Y^1\right\|_r^{\Omega_1} + \left\|(e^{\lambda t} I - \phi^+_{t_*})^{-1} Y^2\right\|_r^{\Omega_2} \\
&\leq C \left(\left\|Y^1\right\|_{r+m_1}^{\Omega_1} + \left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{\Omega_2} \right) \\
&\leq C_1 \left\|Y\right\|_{r+m} \qquad \textit{avec } m = supp(m_1, m_2)
\end{aligned}$$

donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists \rho_\lambda = supp\left(-\frac{Re\lambda}{a_R}, \frac{Re\lambda}{b_L}\right)$$

$(e^{\lambda t} I - \phi_{t_*})$ est inversible sur U ; d'où $(e^{\lambda t} I - \phi_{t_*})$ est doucement inversible sur $U, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

- Deuxième pas, par un même raisonnement :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists \rho'_\lambda = supp\left(\frac{Re\lambda}{a_R}, \frac{-Re\lambda}{b_L}\right)$$

$(e^{\lambda t} I - \phi_{-t_*})$ est doucement inversible sur $U, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(e^{\lambda t} I - \phi_{-t_*})^{-1} Y &= (e^{\lambda t} I - \phi^-_{-t_*})^{-1} Y^1 + (e^{\lambda t} I - \phi^+_{-t_*})^{-1} Y^2 \\
&= -\sum_{m\geq 1} e^{(m-1)\lambda t} (\phi_{mt})^-_* Y^1 + \sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t} (\phi_{-mt})^+_* Y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|(e^{\lambda t} I - \phi_{-t_*})^{-1} Y\right\|_r &\leq C' \left(\left\|Y^1\right\|_{r+m_1}^{\Omega_1} + \left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{\Omega_2} \right) \\
&\leq C'_1 \left\|Y\right\|_{r+m} \qquad \textit{avec } m = supp(m_1, m_2)
\end{aligned}$$

d'où $(e^{\lambda t} I - \phi_{-t_*})$ est doucement inversible sur $U, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
Nous concluons que $\lambda I - ad_{X_0}$ est injectif d'après le corollaire 5.

□

4.2.2 Surjectivité de $(\lambda I - ad_{\pm X_0})$

Théorème 19. *Soit $X_0 \in U = U_1 \oplus U_2$ une algèbre admissible de type hyperbolique : $X_0(x,y) = \left(X_0^-(x), X_0^+(y)\right)$ tel que : $X_0^-(x) = A^-x; \forall x \in \mathbb{R}^k$ (respectivement $X_0^+(y) = A^+y; \forall y \in \mathbb{R}^l$) ; avec $k + l = m$ alors :*

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $(\lambda I - ad_{\pm X_0^-})$ (respectivement $(\lambda I - ad_{\pm X_0^+})$) est surjectif sur U_1 (respectivement sur U_2).
b) L'opérateur $(\lambda I - ad_{\pm X_0})$ est surjectif dans l'algèbre admissible U de Lie-Fréchet.

Démonstration. a) Première étape
Soit $Y \in U$; cherchons un champ de vecteurs $V \in U$ solution de l'équation :

$$Y = (\lambda I - ad_{X_0})V$$

On pose :

$$V_1 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_t^-)_* Y^1 dt$$

et

$$V_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_{-t}^+)_* Y^2 dt$$

Comme $Y \in U = U_1 \oplus U_2$, alors $\exists! Y^i \in U_i$ telle que : $Y = Y^1 + Y^2$.
Montrons la convergence des intégrales impropres. D'après l'estimation (2.2.3), nous avons :

$$\| e^{\lambda t}(\phi_t^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq e^{Re\lambda t} e^{-\rho_1' a_R t} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1} \leq e^{-(\rho_1' a_R - Re\lambda)t} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{1,\lambda}' > 0 / \rho_{1,\lambda}' a_R - Re\lambda > 0 \quad i.\ e\ \ \rho_{1,\lambda}' > \frac{Re\lambda}{a_R}.$$

Donc l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\rho_{1,\lambda}' a_R - Re\lambda)t} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1} dt$$

converge, d'où

$$V_1 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_t^-)_* Y^1 dt$$

existe.

D'après l'estimation (2.2.4), nous avons :

$$\| e^{-\lambda t}(\phi_{-t}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2} \leq e^{-Re\lambda t} e^{-\rho_2' b_L t} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{2,\lambda}' > 0 / \rho_{2,\lambda}' b_L + Re\lambda > 0 \quad i.\ e\ \ \rho_{2,\lambda}' > \frac{-Re\lambda}{b_L}.$$

Donc l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\rho_{2,\lambda}' b_L + Re\lambda)t} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2} dt$$

converge.

d'où l'intégrale :

$$V_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_{-t}^+)_* Y^2 dt$$

est convergente.

$$\forall\lambda \in \mathbb{C} \quad \exists\rho_\lambda > Sup\left(\frac{-Re\lambda}{b_L}, \frac{Re\lambda}{a_R}\right) > 0$$

V_1 et V_2 existent, nous posons $V = V_1 + V_2$

- Deuxième étape : Montrons que V_i et W_i, sont bien des solutions des équations suivantes :

$$Y^1 = (\lambda I - ad_{X_0^-})V_1; \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C}$$
$$Y^2 = (\lambda I - ad_{X_0^+})V_2; \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C}$$

(respectivement

$$Y^1 = (\lambda I - ad_{-X_0^-})W_1; \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C}$$
$$Y^2 = (\lambda I - ad_{-X_0^+})W_2; \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C} \quad)$$

i) Montrons que :

$$V_1 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_t^-)_* Y^1 dt$$

est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{X_0^-})V_1 = Y^1, \quad \textit{tel que } Y^1 \in U_1$$

$$\begin{aligned}
ad_{X_0^-}(V_1) &= -\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}(\phi_{-s}^-)_*\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_t^-)_* Y^1 dt \\
&= -\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\frac{d}{ds}\left(\phi_{t-s}^-\right)_* Y^1 dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{\lambda\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\phi_\tau^-\right)_* Y^1 d\tau \qquad avec\, \tau = t - s \\
&= \left[e^{\lambda\tau}(\phi_\tau^-)_* Y^1\right]_0^{+\infty} - \lambda\int_0^{+\infty}(\phi_\tau^-)_* Y^1 e^{\lambda\tau} d\tau
\end{aligned}$$

d'après l'estimation (2.2.3) ; on déduit :

$$\forall\rho_1' > 0 \quad \exists m_1 = \left[r.\frac{a_L}{a_R}\right] + \rho_1' > 0$$

et $C_1 > 0$ telle que :

$$\| (\phi_\tau^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq C_1 e^{-t\rho_1' a_R} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1}$$

Comme ρ_1' est arbitraire alors :

$$\forall\lambda \in \mathbb{C} \quad \exists\rho_{1,\lambda}' > 0 / - Re\lambda + \rho_{1,\lambda}' a_R > 0$$

alors :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \| e^{\lambda\tau}(\phi_\tau^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq \lim_{\tau\to+\infty} e^{-(-Re\lambda+\rho_{1,\lambda}' a_R)\tau} C_1 \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1} \qquad sur\ \Omega_1 \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\tau\to+\infty} e^{\lambda\tau}(\phi_\tau^-)_* Y^1 = 0$$

d'où nous aurons $ad_{X_0^-}(V_1) = -Y^1 + \lambda V_1$. C'est à dire :

$$\big(\lambda\, I - ad_{X_0^-}\big)V_1 = Y^1$$

Nous concluons que V_1 est une solution de l'équation :

$$(\lambda I - ad_{X_0^-})V_1 = Y^1$$

ii) Soit $Y^2 \in U_2$, et :

$$V_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_{-t}^+)_* Y^2 dt$$

Montrons que V_2 est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{X_0^+})V_2 = Y^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
ad_{X_0^+}(V_2) &= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\phi_{-s}^+)_* \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_{-t}^+)_* Y^2 dt \\
&= \lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{ds}\big(\phi_{-(s+t)}^+\big)_* Y^2 dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{d}{d\tau}\big(\phi_{-\tau}^+\big)_* Y^2 d\tau \qquad avec\, \tau = s+t \\
&= \Big[e^{-\lambda\tau}(\phi_{-\tau}^+)_* Y^2\Big]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} (\phi_{-\tau}^+)_* Y^2 e^{-\lambda\tau} d\tau
\end{aligned}$$

d'après l'estimation (2.2.4) ; on déduit :

$$\forall \rho_1' > 0 \quad \exists m_2 = \left[r.\frac{b_R}{b_L}\right] + \rho_2' > 0$$

et $C_2 > 0$ telle que :

$$\| (\phi_{-\tau}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2} \leq C_2 e^{-t\rho_2' b_L} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2}$$

Comme ρ_2' est arbitraire alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{2,\lambda}' > 0 / Re\lambda + \rho_{2,\lambda}' b_L > 0$$

alors :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \| e^{-\lambda\tau}(\phi_{-\tau}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2} \leq \lim_{\tau\to+\infty} e^{-(Re\lambda + \rho_{2,\lambda}' b_L)\tau} C_2 \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2} \qquad sur\ \Omega_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\tau\to+\infty} e^{-\lambda\tau}(\phi_{-\tau}^+)_* Y^2 = 0$$

d'où nous aurons $ad_{X_0^+}(V_2) = -Y^2 + \lambda V_2$. C'est à dire :

$$\big(\lambda\, I - ad_{X_0^+}\big)V_2 = Y^2$$

Nous concluons que V_2 est une solution de l'équation :

$$(\lambda I - ad_{X_0^+})V_2 = Y^2$$

iii) Montrons que :

$$W_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_t^-)_* Y^1 dt$$

est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{-X_0^-})W_1 = Y^1, \qquad tel\ que\ \ Y^1 \in U_1$$

$$\begin{aligned} ad_{-X_0^-}(W_1) &= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\phi_s^-)_* \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\phi_t^-)_* Y^1 dt \\ &= \lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{ds}\Big(\phi_{s+t}^-\Big)_* Y^1 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \frac{d}{d\tau}\Big(\phi_\tau^-\Big)_* Y^1 d\tau \qquad avec\ \tau = s+t \end{aligned}$$

d'où nous aurons $ad_{-X_0^-}(W_1) = -Y^1 + \lambda W_1$. C'est à dire que W_1 est bien solution de l'équation

$$\Big(\lambda\, I - ad_{-X_0^-}\Big)W_1 = Y^1$$

iv) Montrons que :

$$W_2 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_{-t}^+)_* Y^2 dt$$

est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{-X_0^+})W_2 = Y^2, \qquad tel\ que\ \ Y^2 \in U_2$$

$$\begin{aligned} ad_{-X_0^+}(W_2) &= -\lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\phi_s^+)_* \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\phi_{-t}^+)_* Y^2 dt \\ &= -\lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \frac{d}{ds}\Big(\phi_{s-t}^+\Big)_* Y^2 dt \end{aligned}$$

Après un changement de variable en posant $\xi = t - s$, nous aurons :

$$ad_{-X_0^+}(W_2) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda\xi} \frac{d}{d\xi}\Big(\phi_{-\xi}^+\Big)_* Y^2 d\xi$$

d'où nous aurons $ad_{-X_0^+}(W_2) = -Y^2 + \lambda W_2$. C'est à dire que W_2 est bien solution de l'équation

$$\Big(\lambda\, I - ad_{-X_0^+}\Big)W_2 = Y^2$$

b) Montrons que $\Big(\lambda\, I - ad_{X_0}\Big)$ est surjectif sur U. Soit $Y \in U$, cherchons un champ de vecteurs $V \in U$ tel que $Y = \Big(\lambda\, I - ad_{X_0}\Big)V$. Comme les V_i existent et sont bien des solutions des équations :

$$\Big(\lambda\, I - ad_{X_0^-}\Big)V_1 = Y^1$$

et

$$\Big(\lambda\, I - ad_{X_0^+}\Big)V_2 = Y^2$$

alors $\Big(\lambda\, I - ad_{X_0^-}\Big)$ est inversible sur U_1, et respectivement $\Big(\lambda\, I - ad_{X_0^+}\Big)$ est inversible sur U_2, d'où $Y = \Big(\lambda\, I - ad_{X_0}\Big)V = \Big(\lambda\, I - ad_{X_0^-}\Big)V_1 + \Big(\lambda\, I - ad_{X_0^+}\Big)V_2$ existe et $V = \Big(\lambda\, I - ad_{X_0}\Big)^{-1} Y = V_1 + V_2$.

Le même raisonnement reste valable pour démontrer la surjectivité de $\Big(\lambda\, I - ad_{-X_0}\Big)$ sur U. □

4.2.3 Résolvante et spectre de ad_{X_0}

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, la résolvante existe telle que :
a)

$$\begin{aligned} R(\lambda, ad_{X_0})Y &= (\lambda I - ad_{X_0})^{-1}Y \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\phi_{t_*}^{-}Y^1 dt + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\phi_{-t_*}^{+}Y^2 dt \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} R(\lambda, ad_{-X_0})Y &= (\lambda I - ad_{-X_0})^{-1}Y \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\phi_{t_*}^{-}Y^1 dt - \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\phi_{-t_*}^{+}Y^2 dt \end{aligned}$$

c) $\sigma(ad_{-X_0}) = \sigma(ad_{X_0}) = \varnothing$ et $\rho(ad_{-X_0}) = \rho(ad_{X_0}) = \mathbb{C}$

4.3 Spectre des opérateurs ad_{Y_0} et ad_{-Y_0} dans un espace de Fréchet de type hyperbolique

4.3.1 Injectivité de $\lambda I - ad_{\pm Y_0}$

Lemme 25. *$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(e^{\lambda t}I - \psi_{t*})$ et $(e^{\lambda t}I - \psi_t^*)$ sont doucement inversibles sur l'algèbre admissible U.*

Démonstration. - Premier Pas : Montrons que $(e^{\lambda t}I - \psi_{t*})$ est inversible sur U.
a) Montrons que la série :

$$\sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\psi_{mt})_*^{-}Y^1$$

converge sur $U_1^{\varepsilon}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\| e^{-(m+1)\lambda t}(\psi_{mt})_*^{-}Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq e^{-Re\lambda(m+1)t} \| (\psi_{mt})_*^{-}Y^1 \|_r^{\Omega_1}$$

D'après l'estimation (2.3.4), nous avons :

$$\forall \rho_1' > 0 \quad \exists m_1 = \left[r.\frac{a_L}{a_R} \right] + \rho_1' > 0$$

et $\forall t \geq t_0$ nous avons :

$$\begin{aligned} \| e^{-(m+1)\lambda t}(\psi_{mt}^{-})_*Y^1 \|_r^{\Omega_1} &\leq e^{-mt_0\rho_1' a_R}.e^{-Re\lambda(m+1)t_0} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1^{\varepsilon}} \\ &\leq \left[e^{-t_0(\rho_1' a_R + Re\lambda)} \right]^m .e^{-Re\lambda t_0} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1^{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Comme ρ_1' est arbitraire alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{1,\lambda}' > 0 / Re\lambda + \rho_{1,\lambda}' a_R > 0$$

alors :

$$(e^{\lambda t}I - (\psi_t^{-})_*)^{-1}Y^1 = \sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\psi_{mt})_*^{-}Y^1$$

d'où $(e^{\lambda t}I - (\psi_t^{-})_*)$ est inversible sur $U_1^{\varepsilon}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
b) Montrons que la série :

$$\sum_{m\geq 1} e^{(m-1)\lambda t}(\psi_{-mt})_*^{+}Y^2$$

converge sur $U_2^\varepsilon, \forall\lambda \in \mathbb{C}$

$$\| e^{(m-1)\lambda t}(\psi_{-mt})_*^+ Y^2 \|_r^{\Omega_2} \leq e^{Re\lambda(m-1)t} \| (\psi_{-mt})_*^+ Y^2 \|_r^{\Omega_2}$$

D'après l'estimation (2.3.5), nous avons :

$$\forall \rho_2' > 0 \quad \exists m_2 = \left[r.\frac{b_R}{b_L} \right] + \rho_2' > 0$$

et $\forall t \geq t_0$ nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \| e^{(m-1)\lambda t}(\psi_{-mt}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2} & \leq & e^{-mt_0\rho_2' b_L}.e^{Re\lambda(m-1)t_0} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \\ & \leq & \left[e^{-t_0(\rho_2' b_L - Re\lambda)} \right]^m .e^{-Re\lambda t_0} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \end{array}$$

Comme ρ_2' est arbitraire alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{2,\lambda}' > 0 / - Re\lambda + \rho_{2,\lambda}' b_L > 0$$

alors :

$$\sum_{m \geq 1} \| e^{(m-1)\lambda t}(\psi_{-mt}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2}$$

converge $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$(e^{\lambda t} I - (\psi_t^+)_*)^{-1} Y^2 = - \sum_{m \geq 1} e^{(m-1)\lambda t} (\psi_{-mt})_*^+ Y^2$$

d'où $(e^{\lambda t} I - (\psi_t^+)_*)$ est inversible sur $U_2^\varepsilon, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

c) Montrons que $(e^{\lambda t} I - \psi_{t*})$ est doucement inversible sur U.

Soit $Y \in U = U_1 \oplus U_2$ alors $\exists Y^i \in U_i$ telle que : $Y = Y^1 + Y^2$; nous aurons alors :

$$(e^{\lambda t} I - \psi_{t_*})^{-1} Y = (e^{\lambda t} I - \psi_{t_*}^-)^{-1} Y^1 + (e^{\lambda t} I - \psi_{t_*}^+)^{-1} Y^2$$

$$\begin{array}{rcl} \left\| (e^{\lambda t} I - \psi_{t_*})^{-1} Y \right\|_r & \leq & \left\| (e^{\lambda t} I - \psi_{t_*}^-)^{-1} Y^1 \right\|_r^{\Omega_1} + \left\| (e^{\lambda t} I - \psi_{t_*}^+)^{-1} Y^2 \right\|_r^{\Omega_2} \\ & \leq & C \left(\left\| Y^1 \right\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} + \left\| Y^2 \right\|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \right) \\ & \leq & C_1 \left\| Y \right\|_{r+m} \qquad \qquad avec\ m = supp(m_1, m_2) \end{array}$$

donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists \rho_\lambda = supp \left(-\frac{Re\lambda}{a_R}, \frac{Re\lambda}{b_L} \right)$$

$(e^{\lambda t} I - \psi_{t_*})$ est inversible sur U ; d'où $(e^{\lambda t} I - \psi_{t_*})$ est doucement inversible sur $U, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

- Deuxième pas, par un même raisonnement :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists \rho_\lambda' = supp \left(\frac{Re\lambda}{a_R}, \frac{-Re\lambda}{b_L} \right)$$

$(e^{\lambda t} I - \psi_{-t_*})$ est doucement inversible sur $U, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(e^{\lambda t}I - \psi_{-t_*})^{-1}Y &= (e^{\lambda t}I - \psi^-_{-t_*})^{-1}Y^1 + (e^{\lambda t}I - \psi^+_{-t_*})^{-1}Y^2 \\
&= -\sum_{m\geq 1} e^{(m-1)\lambda t}(\psi_{mt})^-_* Y^1 + \sum_{m\geq 0} e^{-(m+1)\lambda t}(\psi_{-mt})^+_* Y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|(e^{\lambda t}I - \psi_{-t_*})^{-1}Y\right\|_r &\leq C'\left(\left\|Y^1\right\|^{\Omega_1^\varepsilon}_{r+m_1} + \left\|Y^2\right\|^{\Omega_2^\varepsilon}_{r+m_2}\right) \\
&\leq C'_1 \left\|Y\right\|_{r+m} \qquad \textit{avec } m = supp(m_1, m_2)
\end{aligned}$$

d'où $(e^{\lambda t}I - \psi_{-t_*})$ est doucement inversible sur $U, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
Nous concluons que $\lambda I - ad_{\pm Y_0}$ est injectif $\forall \lambda \in \mathbb{C}$; d'après le corollaire 5.

□

4.3.2 Surjectivité de $(\lambda I - ad_{\pm Y_0})$

Théorème 20. *Soit $Y_0 \in U = U_1 \oplus U_2$ une algèbre admissible de type hyperbolique ; alors $\exists \varepsilon > 0/U = U_1^\varepsilon + U_2^\varepsilon$, $Y_0(x,y) = \left(Y_0^-(x), Y_0^+(y)\right)$ tel que : $Y_0^-(x) = A^-x + Z_0^-(x); \forall x \in \mathbb{R}^k$ (respectivement $Y_0^+(y) = A^+y + Z_0^+(y); \forall y \in \mathbb{R}^l$) ; avec $k + l = m$ alors :*

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $(\lambda I - ad_{\pm Y_0^-})$ (respectivement $(\lambda I - ad_{\pm Y_0^+})$) est surjectif sur U_1^ε (respectivement sur U_2^ε).
b) L'opérateur $(\lambda I - ad_{\pm Y_0})$ est surjectif dans l'algèbre admissible U de Lie-Fréchet.

Démonstration. a) Première étape
Soit $Y \in U$; cherchons un champ de vecteurs $V \in U$ solution de l'équation :

$$Y = (\lambda I - ad_{Y_0})V$$

On pose :

$$V_1 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\psi_t^-)_* Y^1 dt$$

et

$$V_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\psi_{-t}^+)_* Y^2 dt$$

Comme $Y \in U = U_1 \oplus U_2$, alors $\exists ! Y^i \in U_i$ telle que : $Y = Y^1 + Y^2$.
Montrons la convergence des intégrales impropres. D'après l'estimation (2.3.4), nous avons :

$$\begin{aligned}
\| e^{\lambda t}(\psi_t^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} &\leq e^{Re\lambda t}e^{-\rho'_1 a_R t} \| Y^1 \|^{\Omega_1^\varepsilon}_{r+m_1} \\
&\leq e^{-(\rho'_1 a_R - Re\lambda)t} \| Y^1 \|^{\Omega_1^\varepsilon}_{r+m_1}
\end{aligned}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho'_{1,\lambda} > 0/\rho'_{1,\lambda} a_R - Re\lambda > 0 \qquad i.\ e\ \ \rho'_{1,\lambda} > \frac{Re\lambda}{a_R}.$$

Donc l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\rho'_{1,\lambda} a_R - Re\lambda)t} \| Y^1 \|^{\Omega_1^\varepsilon}_{r+m_1} dt$$

converge, d'où

$$V_1 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\psi_t^-)_* Y^1 dt$$

existe.

D'après l'estimation (2.3.5), nous avons :

$$\| e^{-\lambda t}(\psi_{-t}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2} \leq e^{-Re\lambda t} e^{-\rho_2' b_L t} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{2,\lambda}' > 0 / \rho_{2,\lambda}' b_L + Re\lambda > 0 \qquad i.\ e\ \ \rho_{2,\lambda}' > \frac{-Re\lambda}{b_L}.$$

Donc l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\rho_{2,\lambda}' b_L + Re\lambda)t} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} dt$$

converge.

d'où l'intégrale :

$$V_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\psi_{-t}^+)_* Y^2 dt$$

est convergente.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_\lambda > Sup\left(\frac{-Re\lambda}{b_L}, \frac{Re\lambda}{a_R}\right) > 0$$

V_1 et V_2 existent, nous posons $V = V_1 + V_2$

- Deuxième étape : Montrons que V_i et W_i, sont bien des solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned} Y^1 &= (\lambda I - ad_{Y_0^-})V_1; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ Y^2 &= (\lambda I - ad_{Y_0^+})V_2; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

(respectivement

$$\begin{aligned} Y^1 &= (\lambda I - ad_{-Y_0^-})W_1; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ Y^2 &= (\lambda I - ad_{-Y_0^+})W_2; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad) \end{aligned}$$

i) Montrons que :

$$V_1 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\psi_t^-)_* Y^1 dt$$

est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{Y_0^-})V_1 = Y^1$$

$$\begin{aligned} ad_{Y_0^-}(V_1) &= -\lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\psi_{-s}^-)_* \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\psi_t^-)_* Y^1 dt \\ &= -\lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \frac{d}{ds}\left(\psi_{t-s}^-\right)_* Y^1 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{\lambda\tau} \frac{d}{d\tau}\left(\psi_\tau^-\right)_* Y^1 d\tau \qquad avec\, \tau = t - s \\ &= \left[e^{\lambda\tau}(\psi_\tau^-)_* Y^1\right]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} (\psi_\tau^-)_* Y^1 e^{\lambda\tau} d\tau \end{aligned}$$

d'après l'estimation (2.3.4) ; on déduit :

$$\forall \rho_1' > 0 \quad \exists m_1 = \left[r.\frac{a_L}{a_R} \right] + \rho_1' > 0$$

et $C_1 > 0$ telle que :

$$\| (\psi_\tau^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq C_1 e^{-t\rho_1' a_R} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon}$$

Comme ρ_1' est arbitraire alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{1,\lambda}' > 0 / - Re\lambda + \rho_{1,\lambda}' a_R > 0$$

alors :

$$\lim_{\tau \to +\infty} \| e^{\lambda \tau} (\psi_\tau^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq \lim_{\tau \to +\infty} e^{-(-Re\lambda + \rho_{1,\lambda}' a_R)\tau} C_1 \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \qquad sur\ \Omega_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\tau \to +\infty} e^{\lambda \tau} (\psi_\tau^-)_* Y^1 = 0$$

d'où nous aurons $ad_{Y_0^-}(V_1) = -Y^1 + \lambda V_1$. C'est à dire :

$$\left(\lambda\, I - ad_{Y_0^-} \right) V_1 = Y^1$$

Nous concluons que V_1 est une solution de l'équation :

$$(\lambda I - ad_{Y_0^-}) V_1 = Y^1$$

ii) Soit $Y^2 \in U_2^\varepsilon$, et :

$$V_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\psi_{-t}^+)_* Y^2 dt$$

Montrons que V_2 est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{Y_0^+}) V_2 = Y^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
ad_{Y_0^+}(V_2) &= \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} (\psi_{-s}^+)_* \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\psi_{-t}^+)_* Y^2 dt \\
&= \lim_{s \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{ds} \left(\psi_{-(s+t)}^+ \right)_* Y^2 dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \tau} \frac{d}{d\tau} \left(\psi_{-\tau}^+ \right)_* Y^2 d\tau \qquad avec\, \tau = s + t \\
&= \left[e^{-\lambda \tau} (\psi_{-\tau}^+)_* Y^2 \right]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} (\psi_{-\tau}^+)_* Y^2 e^{-\lambda \tau} d\tau
\end{aligned}$$

d'après l'estimation (2.3.5) ; on déduit :

$$\forall \rho_1' > 0 \quad \exists m_2 = \left[r.\frac{b_R}{b_L} \right] + \rho_2' > 0$$

et $C_2 > 0$ telle que :

$$\| (\psi_{-\tau}^+)_* Y^2 \|_r^{\Omega_2} \leq C_2 e^{-t\rho_2' b_L} \| Y^2 \|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon}$$

Comme ρ_2' est arbitraire alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists \rho_{2,\lambda}' > 0 / Re\lambda + \rho_{2,\lambda}' b_L > 0$$

alors :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \parallel e^{-\lambda\tau}(\psi^{+}_{-\tau})_* Y^2 \parallel_r^{\Omega_2} \leq \lim_{\tau\to+\infty} e^{-(Re\lambda+\rho'_{2,\lambda}b_L)\tau} C_2 \parallel Y^2 \parallel_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \qquad sur\ \Omega_2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\tau\to+\infty} e^{-\lambda\tau}(\psi^{+}_{-\tau})_* Y^2 = 0$$

d'où nous aurons $ad_{Y_0^+}(V_2) = -Y^2 + \lambda V_2$. C'est à dire :

$$\left(\lambda\, I - ad_{Y_0^+}\right)V_2 = Y^2$$

Nous concluons que V_2 est une solution de l'équation :

$$(\lambda I - ad_{Y_0^+})V_2 = Y^2$$

iii) Montrons que :

$$W_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\psi^{-}_{t})_* Y^1 dt$$

est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{-Y_0^-})W_1 = Y^1, \qquad tel\ que\ \ Y^1 \in U_1$$

$$\begin{aligned} ad_{-Y_0^-}(W_1) &= \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}(\psi^{-}_{s})_* \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\psi^{-}_{t})_* Y^1 dt \\ &= \lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{d}{ds}\left(\psi^{-}_{s+t}\right)_* Y^1 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\psi^{-}_{\tau}\right)_* Y^1 d\tau \qquad avec\ \tau = s+t \end{aligned}$$

d'où nous aurons $ad_{-Y_0^-}(W_1) = -Y^1 + \lambda W_1$. C'est à dire que W_1 est bien solution de l'équation

$$\left(\lambda\, I - ad_{-Y_0^-}\right)W_1 = Y^1$$

iv) Montrons que :

$$W_2 = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\psi^{+}_{-t})_* Y^2 dt$$

est bien une solution de l'équation suivante :

$$(\lambda I - ad_{-Y_0^+})W_2 = Y^2$$

$$\begin{aligned} ad_{-Y_0^+}(W_2) &= -\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}(\psi^{+}_{s})_* \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}(\psi^{+}_{-t})_* Y^2 dt \\ &= -\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\frac{d}{ds}\left(\psi^{+}_{s-t}\right)_* Y^2 dt \end{aligned}$$

Après un changement de variable en posant $\xi = t - s$, nous aurons :

$$ad_{-Y_0^+}(W_2) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\psi^{+}_{-\xi}\right)_* Y^2 d\xi$$

d'où nous aurons $ad_{-Y_0^+}(W_2) = -Y^2 + \lambda W_2$. C'est à dire que W_2 est bien solution de l'équation

$$\left(\lambda I - ad_{-Y_0^+}\right)W_2 = Y^2$$

b) Montrons que $\left(\lambda I - ad_{Y_0}\right)$ est surjectif sur U. Soit $Y \in U$, cherchons un champ de vecteurs $V \in U$ tel que $Y = \left(\lambda I - ad_{Y_0}\right)V$. Comme les V_i existent et sont bien des solutions des équations :

$$\left(\lambda I - ad_{Y_0^-}\right)V_1 = Y^1$$

et

$$\left(\lambda I - ad_{Y_0^+}\right)V_2 = Y^2$$

alors $\left(\lambda I - ad_{Y_0^-}\right)$ est inversible sur U_1^ε, et respectivement $\left(\lambda I - ad_{Y_0^+}\right)$ est inversible sur U_2^ε d'où, $Y = \left(\lambda I - ad_{Y_0}\right)V = \left(\lambda I - ad_{Y_0^-}\right)V_1 + \left(\lambda I - ad_{Y_0^+}\right)V_2$ existe et
$V = \left(\lambda I - ad_{Y_0}\right)^{-1}Y = V_1 + V_2$.
Le même raisonnement reste valable pour démontrer la surjectivité de $\left(\lambda I - ad_{-Y_0}\right)$ sur U.

4.3.3 Résolvante et spectre de ad_{Y_0}

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, la résolvante existe telle que :
a)

$$\begin{aligned} R(\lambda, ad_{Y_0})Y &= (\lambda I - ad_{Y_0})^{-1}Y \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\psi_{t*}^{-}Y^1 dt + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\psi_{-t*}^{+}Y^2 dt \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} R(\lambda, ad_{-Y_0})Y &= (\lambda I - ad_{-Y_0})^{-1}Y \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\psi_{t*}^{-}Y^1 dt - \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\psi_{-t*}^{+}Y^2 dt \end{aligned}$$

c) $\sigma(ad_{-Y_0}) = \sigma(ad_{Y_0}) = \varnothing$ et $\rho(ad_{-Y_0}) = \rho(ad_{Y_0}) = \mathbb{C}$

4.4 Application à une sous-algèbre de codimension finie de l'espace de Fréchet de type hyperbolique

Les idéaux de codimension finie dans les algèbres de Lie de champs de vecteurs ont reçu beaucoup d'attention au cours de ces dernières années. Certains auteurs comme L. E. Pursel et M.E. Shanks [19], en étudiant l'inversibilité du crochet de Lie $[X, Y] = ad_X(Y)$ qui est un générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre t, $\gamma_t = (\exp tX)^*$, dans les algèbres de Lie contenant un germe de champs de vecteurs X ne s'annulant pas à l'origine O, ont traité les idéaux de codimension finie de ces algèbres. Ce résultat a été prolongé dans les algèbres de Lie de Banach de champs de vecteurs infiniment plats en 0 contenant des germes qui s'annulent à l'origine de la forme $X_0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i.x_i + Z_0(x)$ où α_i sont de signes constants (cf [3], [4] et [15]).
Parmi les motivations et les applications éventuelles de ces résultats :
- Les propriétés de l'injectivité de la fonction exponentielle d'un champ de vecteurs ont donné lieu à l'existence des séries de Fourier (cf [23]).
- Boris Kolev dans [14] a étudié le cas particulier d'une structure Lie-Poisson canonique.

- M. BENALILI dans [2] a étudié les propriétés spectrales des opérateurs adjoints induits par des perturbations appropriées de certains champs de vecteurs linéaires hyperboliques de la forme $Y_0 = X_0^+ + X_0^- + Z_0$ avec Z_0 k-plat dans la boule unité.
Nous présentons une extension sur la base de ces travaux où nous étudierons les idéaux de codimension finie dans les algèbres de Lie-Fréchet à structure hyperbolique contenant des champs de vecteurs de la forme $Y_0 = X_0^+ + X_0^- + Z_0$, tel que $X_0\left(x,y\right) = A\left(x,y\right) = \left(A^-\left(x\right), A^+\left(y\right)\right)$, avec A^-(respectivement A^+) une matrice symétrique ayant des valeurs propres $\lambda < 0$ (respectivement $\lambda > 0$) et Z_0 des germes infiniment plats à l'origine, i.e $Z_0 \in \chi_0^\infty$.

Nous montrerons que l'algèbre admissible U s'étend sur tout l'espace E, et ce en utilisant le lemme fondamental suivant :

Lemme 26. *Lemme fondamental : ([15]) Soit V un sous-espace de codimension finie de $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E et un endomorphisme ψ sur E tel que :*

1. *$\psi(V) \subset V$;*
2. *$\psi + b.I$ est surjectif sur V pour tout $b \in \mathbb{R}$;*
3. *Pour tout nombres $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$, l'operateur $\psi^2 + b\psi + c.I$ est surjectif sur V.*

alors $V = E$.

Pour cela vérifions les hypothèses de ce lemme.

4.4.1 Surjectivité de l'opérateur $ad_{Y_0} + bI$

Dans cette section, nous étudions la surjectivité de certains opérateurs linéaires. Notons par :
$\varphi = (ad_{-Y_0^-}, ad_{Y_0^+})$ où $ad_{-Y_0^-} = \varphi_1$ et $ad_{Y_0^+} = \varphi_2$ deux endomorphismes adjoints et I l'application identité.

Lemme 27. *: Pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\varphi_1 + b.I_{\mathbb{R}^k}$ (respectivement $\varphi_2 + b.I_{\mathbb{R}^l}$) est surjectif sur U_1^ε (respectivement sur U_2^ε).*

Démonstration. Soit : $Y^i \in U_i (i = 1, 2)$ tel que :

$$\begin{cases} Y^1 = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \in U_1 \\ Y^2 = \sum\limits_{j=1}^{l} g_j\left(y\right) \frac{\partial}{\partial y_j} \in U_2 \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{cases} W_1 = \int_0^{+\infty} R(t)(\psi_t^-)_* Y^1 dt \in \mathrm{U}_1^\varepsilon \\ W_2 = \int_0^{+\infty} R(t)(\psi_{-t}^+)_* Y^2 dt \in \mathrm{U}_2^\varepsilon \end{cases}$$

- 1ère étape : Montrons que W_i est une solution de l'équation :

$$(\varphi_i + b.I)(W_i) = Y^i, (i = 1, 2), \forall b \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
ad_{-Y_0^-}(W_1) &= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\psi_s^-)_* \left(\int_0^{+\infty} R(t)(\psi_t^-)_* Y^1 dt \right) \\
&= \lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} R(t) \frac{d}{ds} \left(\psi_{(t+s)}^-\right)_* Y^1 dt \\
&= \int_0^{+\infty} R(\tau) \frac{d}{d\tau}(\psi_\tau^-)_* Y^1 d\tau, \qquad \text{où } \tau = t+s \\
&= R(\tau)(\psi_\tau^-)_* . Y^1|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (\psi_\tau^-)_* Y^1 \frac{d}{d\tau} R(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

$$
ad_{-Y_0^-}(W_1) + bW_1 = R(\tau)(\psi_\tau^-)_* Y^1|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (bR(\tau) - R'(\tau))(\psi_\tau^-)_* Y^1 d\tau
$$

on pose :

$$
\begin{cases} R'(\tau) - bR(\tau) = 0 \\ \\ R(0) = -1 \end{cases} \qquad \textit{alors} \quad R(\tau) = -e^{b\tau}
$$

d'après l'estimation (2.3.4) ; on déduit :

$$
\forall \rho_1' > 0 \quad \exists m_1 = \left[r . \frac{a_L}{a_R} \right] + \rho_1' > 0
$$

et $C_1' > 0$ telle que :

$$
\| (\psi_t^-)_* Y^1 \|_r^{\Omega_1} \leq C_1' e^{-t\rho_1' a_R} \| Y^1 \|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau \to +\infty} \| R(\tau)(\psi_\tau^-)_* . Y^1 \|_r^{\Omega_1} &\leq C' \lim_{\tau\to+\infty} e^{b\tau} . e^{-\tau \rho_1' a_R} . \left\| Y^1 \right\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \\
&\leq C' \lim_{\tau\to+\infty} e^{-\tau[-b+\rho_1' a_R]} . \left\| Y^1 \right\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon}
\end{aligned}
$$

ρ_1' étant arbitraire, alors :

$$
\forall b \in \mathbb{R}, \exists \rho_{1,b}' > 0 / -b + \rho_{1,b}' . a_R > 0,
$$

alors :

$$
\lim_{\tau\to+\infty} \| R(\tau)(\psi_\tau^-)_* . Y^1 \|_r = 0
$$

d'où finalement :

$$
ad_{-Y_0^-}(W_1) + bW_1 = R(\tau) \left(\psi_\tau^-\right)_* Y^1|_0^{+\infty} = Y^1
$$

De même :

$$
\begin{aligned}
ad_{Y_0^+}(W_2) &= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\psi_{-s}^+)_* \left(\int_0^{+\infty} R(t)(\psi_{-t}^+)_* Y^2 dt \right) \\
&= \lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} R(t) \frac{d}{ds} \left((\psi_{-s-t}^+)_*\right) Y^2 dt \\
&= \int_0^{+\infty} R(\tau) \frac{d}{d\tau}(\psi_{-\tau}^+)_* Y^2 d\tau, \qquad \text{où } \tau = s+t \\
&= R(\tau)(\psi_{-\tau}^+)_* . Y^2|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left((\psi_{-\tau}^+)_* . Y^2\right) \frac{d}{d\tau} R(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

En ajoutant bW_2 dans les deux membres, nous aurons :

$$ad_{Y_0^+}(W_2) + bW_2 = R(\tau)(\psi_{-\tau}^+)_* Y^2|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}(-R'(\tau) + bR(\tau))(\psi_{-\tau}^*)_*.Y^2 d\tau$$

on pose :

$$\begin{cases} -R'(\tau) + bR(\tau) = 0 \\ \\ R(0) = -1 \end{cases} \qquad alors \quad R(\tau) = -e^{b\tau}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \to +\infty} \parallel R(\tau)(\psi_{-\tau}^+)_*.Y^2 \parallel_r^{\Omega_2} &\leq C'' \lim_{\tau \to +\infty} e^{b\tau}.e^{-\tau\rho_2' b_L}.\left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \\ &\leq C'' \lim_{\tau \to +\infty} e^{-\tau[-b+\rho_2' b_L]}.\left\|Y^2\right\|_{r+m_2}^{\Omega_2^\varepsilon} \end{aligned}$$

ρ_2' étant arbitraire, alors :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exists \rho_{2,b}' > 0 / -b + \rho_{2,b}'.b_L > 0,$$

d'où :

$$\lim_{\tau \to +\infty} \parallel R(\tau)(\psi_{-\tau}^+)_*.Y^2 \parallel_r = 0$$

Par conséquent :

$$ad_{Y_0^+}(W_2) + bW_2 = R(\tau)\left((\psi_{-\tau}^+)_*\right)Y^2|_0^{+\infty} = Y^2$$

- 2ème étape : Montrons que W_1 est de classe C^∞ sur tout compact. Soit K_1 un compact de Ω_1, et comme :

$$W_1 = \int_0^{+\infty} R(t)(\psi_t^-)_* Y^1 dt$$

alors d'après l'estimation (2.3.4), nous aurons :

$$\parallel R(t)(exptY_0^-)_*.Y^1 \parallel_r^{K_1} \leq C' e^{-t(-b+\rho_1'.a_R)} \parallel Y^1 \parallel_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon}$$

ρ_1' étant arbitraire, alors :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exists \rho_{1,b}' > 0 / -b + \rho_{1,b}'.a_R > 0,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(-b+\rho_{1,b}'.a_R)} dt \qquad \text{converge } \forall b \in \mathbb{R}$$

Il en résulte que : W_1 converge uniformément, $\forall x \in \Omega_1$, d'où finalement W_1 est de classe C^∞ sur tout compact de Ω_1. Le même raisonnement est valable pour montrer que W_2 est de classe C^∞ sur tout compact de Ω_2. □

Lemme 28. *Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\varphi + b.I$ est surjectif sur U.*

Démonstration. Soit $Y \in U$, cherchons un $W \in U$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n; Y(x, y) = (\varphi + b.I)W(x, y), \forall b \in \mathbb{R}$$

Comme $Y \in U = U_1 \oplus U_2$ alors $\exists! Y^i \in U_i$ telle que :

$$Y(x, y) = (Y^1(x), Y^2(y)) = (\varphi_1 W_1(x) + bW_1(x), \varphi_2 W_2(y) + bW_2(y))$$

On projecte sur U_i :
- Sur U_1, nous avons $Y(x,y) = (Y^1(x),0) = (\varphi_1 W_1(x) + bW_1(x), 0)$, et selon le lemme 27, $\exists\varepsilon > 0$ et W_1, telle que $W_1(x) = -\int_0^{+\infty} e^{bt}(\psi_t^-)_* Y^1(x)dt \in \Omega_1^\varepsilon; \forall x \in \Omega_1$.
- Sur U_2, nous avons $Y(x,y) = (0, Y^2(y)) = (0, \varphi_2 W_2(y) + bW_2(y))$, et selon le lemme 27, $\exists\varepsilon > 0$ et W_2, telle que $W_2(y) = -\int_0^{+\infty} e^{bt}(\psi_{-t}^+)_* Y^2(y)dt \in \Omega_2^\varepsilon; \forall y \in \Omega_2$
Il en résulte que :

$$W_i \in U_i^\varepsilon$$

On pose $W(x,y) = (W_1(x), W_2(y)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n$.
Comme $W = W_1 + W_2 \in U_1^\varepsilon + U_2^\varepsilon = U$; alors $\varphi + b.I$ est surjectif sur U, pour tout $b \in \mathbb{R}$. □

4.4.2 Surjectivité de l'opérateur $(ad_{Y_0})^2 + b.ad_{Y_0} + cI$

Lemme 29. *Pour tout nombres $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$, l'opérateur $\varphi_1^2 + b\varphi_1 + c.I_{\mathbb{R}^k}$, (respectivement $\varphi_2^2 + b\varphi_2 + c.I_{\mathbb{R}^l}$) est surjectif sur U_1^ε (respectivement sur U_2^ε).*

Démonstration. Soit $Y^i \in U_i$ telle que :

$$Y^1 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \in U_1$$

$$Y^2 = \sum_{i=1}^{l} g_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \in U_2$$

telle que : $(\varphi_1^2 + b\varphi_1 + cI_{\mathbb{R}^k})W_1 = [-Y_0^-, [-Y_0^-, W_1]] + b[-Y_0^-, W_1] + cW_1$
et $(\varphi_2^2 + b\varphi_2 + cI_{\mathbb{R}^l})W_2 = [-Y_0^+, [-Y_0^+, W_2]] + b[-Y_0^+, W_2] + cW_2$

$$\begin{cases} W_1 = \int_0^\infty R(t)(\psi_t^-)_* Y^1 dt \in U_1^\varepsilon \\ W_2 = \int_0^\infty R(t)(\psi_{-t}^+)_* Y^2 dt \in U_2^\varepsilon \end{cases}$$

Avec :

$$R(t) = \frac{2exp(\frac{b}{2}t)}{\sqrt{4c - b^2}}.\sin(\sqrt{4c - b^2}/2)t$$

- Première étape : Montrons que W_i est une solution de l'équation:
$(\varphi_i^2 + b\varphi_i + cI)W_i = Y^i$.
Si nous posons : $Z_1 = [-Y_0^-, W_1] = ad_{-Y_0^-}(W_1)$ alors :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}(\psi_s^-)_* \left(\int_0^{+\infty} R(t)(\psi_t^-)_* Y^1 dt \right) \\ &= R(\tau)(\psi_\tau^-)_*.Y^1|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (\psi_\tau^-)_* Y^1 \frac{d}{d\tau} R(\tau) d\tau \\ Z_1 &= R(\tau)(\psi_\tau^-)_* Y^1|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} R'(\tau)(\psi_\tau^-)_* Y^1 d\tau \end{aligned}$$

Comme $R(t) = \dfrac{2exp(\frac{b}{2}t)}{\sqrt{4c - b^2}}.\sin(\sqrt{4c - b^2}/2)t$ et

$$\begin{aligned} \| R(\tau)(\psi_\tau^-)_*.Y^1 \|_r^{\Omega_1} &\leq C' e^{\frac{b}{2}\tau}.e^{-\tau\rho_1' a_R}. \left\| Y^1 \right\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \\ &\leq C' e^{-\tau[-b/2 + \rho_1' a_R]}. \left\| Y^1 \right\|_{r+m_1}^{\Omega_1^\varepsilon} \end{aligned}$$

ρ'_1 étant arbitraire, alors $\forall b \in \mathbb{R}, \exists \rho'_{1,b} > 0 / -b/2 + \rho'_{1,b}.a_R > 0$, d'où finalement :

$$\lim_{\tau \to +\infty} \| R(\tau)(\psi_\tau^-)_*.Y^1 \|_r = 0$$

alors le premier membre s'annule et Z_1 devient donc :

$$Z_1 = -\int_0^{+\infty} R'(\tau)(\psi_\tau^-)_* Y^1 d\tau$$

Nous aurons donc :

$$\begin{aligned}
\varphi_1^2(W_1) = [-Y_0^-, [-Y_0^-, W_1]] &= [-Y_0^-, Z_1] \\
&= -\lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}(\psi_s^-)_* \int_0^{+\infty} R'(\tau)(\psi_\tau^-)_* Y^1 d\tau \\
&= -\lim_{s \to 0} \int_0^{+\infty} R'(\tau) \frac{d}{ds}(\psi_{s+\tau}^-)_* Y^1 d\tau \\
&= -\Big[R'(t)(\psi_t^-)_* Y^1\Big]_0^\infty + \int_0^{+\infty} R''(t)(\psi_t^-)_* Y^1 dt \qquad \text{où } t = s + \tau \\
&= Y^1 + \int_0^{+\infty} R''(t)(\psi_t^-)_* Y^1 dt
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
(\varphi_1^2 + b\varphi_1 + cI_{\mathbb{R}^k})W_1 &= [-Y_0^-, [-Y_0^-, W_1]] + b[-Y_0^-, W_1] + cW_1 \\
&= Y^1 + \int_0^{+\infty} (R''(t) - bR'(t) + cR(t))(\psi_t^-)_* Y dt \\
&= Y^1
\end{aligned}$$

Où $R(t) = \dfrac{2exp(\frac{b}{2}t)}{\sqrt{4c - b^2}}.\sin(\sqrt{4c - b^2}/2)t$ est bien une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} R''(t) - bR'(t) + cR(t) = 0 \\ R(0) = 0 \\ R'(0) = 1 \end{cases}$$

L'opérateur $\varphi_1^2 + b\varphi_1 + c.I_{\mathbb{R}^k}$ est donc surjectif dans U_1^ε.
La démonstration de la surjectivité de l'opérateur $\varphi_2^2 + b\varphi_2 + c.I_{\mathbb{R}^l}$ sur U_2^ε se fait de la même façon.
- Deuxième étape : D'après le lemme précédent, $W_i, (i = 1, 2)$ sont de classe C^∞ sur tout compact. □

Lemme 30. *: Pour tout $b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4.c < 0$ l'opérateur $\varphi^2 + b.\varphi + c.I$ est surjectif sur U.*

Démonstration. Soit $Y \in U$, cherchons un $W \in U$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, Y(x, y) = (\varphi^2 + b.\varphi + c.I)W(x, y), \textit{ pour tout } b, c \in \mathbb{R}, \text{ avec } b^2 - 4.c < 0$$

Comme $Y \in U = U_1 \oplus U_2$ alors $\exists! Y^i \in U_i$ telle que :

$$Y(x, y) = (Y^1(x), Y^2(y)) = \Big(\varphi_1^2 W_1(x) + b.\varphi_1 W_1(x) + c.W_1(x), \varphi_2^2 W_2(y) + b.\varphi_2 W_2(y) + c.W_2(y)\Big)$$

On projète sur U_i :
- Sur U_1, nous avons $Y(x,y) = (Y^1(x), 0) = \Big(\varphi_1^2 W_1(x) + b.\varphi_1 W_1(x) + c.W_1(x), 0\Big)$, et selon le lemme 29, $\exists \varepsilon > 0$ et W_1, telle que $W_1(x) = \int_0^{+\infty} R(t)(\psi_t^-)_* Y^1(x)dt \in \Omega_1^\varepsilon$ avec

$$R(t) = \frac{2exp(\dfrac{b}{2}t)}{\sqrt{4c-b^2}}.\sin(\sqrt{4c-b^2}/2)t$$

- Sur U_2, nous avons $Y(x,y) = (0, Y^2(y)) = \Big(0, \varphi_2^2 W_2(y) + b.\varphi_2 W_2(y) + c.W_2(y)\Big)$, et selon le lemme 29, $\exists \varepsilon > 0$ et W_2 telle que $W_2(y) = \int_0^{+\infty} R(t)(\psi_{-t}^+)_* Y^2(y)dt \in \Omega_2^\varepsilon$ avec

$$R(t) = \frac{2exp(\dfrac{b}{2}t)}{\sqrt{4c-b^2}}.\sin(\sqrt{4c-b^2}/2)t$$

d'où :

$$W_i \in U_i^\varepsilon$$

Nous posons $W(x,y) = (W_1(x), W_2(y)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n$.
Or $W = W_1 + W_2 \in U_1^\varepsilon + U_2^\varepsilon = U$. Par conséquent $\varphi^2 + b.\varphi + c.I$ est surjectif sur U, pour tout $b, c \in \mathbb{R}$, avec $b^2 - 4.c < 0$.

□

4.4.3 Idéaux de codimension finie dans une sous-algèbre de type hyperbolique

Théorème 21. *Soit U une sous-algèbre admissible ayant une structure hyperbolique pour le flot :*
$(\psi_t)_* = (exptY_0)_* = (expt(X_0 + Z_0))_*$ dans l'espace de Fréchet E. Si $dim(E-U)$ est finie, et $\varphi = (ad_{-Y_0^-}, ad_{Y_0^+})$ un endomorphisme sur U, tels que :
i) $\varphi(U) \subset U$,
ii) $\varphi + b.I_{\mathbb{R}^n}$ est surjectif sur U ; $\forall b \in \mathbb{R}$,
iii) $\varphi^2 + b\varphi + c.I_{\mathbb{R}^n}$ est surjectif sur U ; $\forall b, c \in \mathbb{R}/b^2 - 4c < 0$.
Alors : $U = E$

Démonstration. Les hypothèses du lemme fondamental étant satisfaites grâce aux lemmes 30, 28 et 16, et, si en plus nous avons $dim(E-U)$ finie, nous déduisons alors :

$$U = E$$

□

Corollaire 12. *Soit U la sous-algèbre de Lie de Fréchet de type hyperbolique.*
Si $I = U \cap \chi_0^\infty$ est un idéal de U et la codimension de $\chi_0^\infty < +\infty$ tels que :
i) $\varphi(I) \subset I$,
ii) $\varphi + b.I_{\mathbb{R}^n}$ est surjectif sur I ; $\forall b \in \mathbb{R}$,
iii) $\varphi^2 + b\varphi + c.I_{\mathbb{R}^n}$ est surjectif sur I ; $\forall b, c \in \mathbb{R}, b^2 - 4c < 0$.

Alors : $I = U$

Conclusions
et Perspectives

Nous avons apporter dans cette étude quelques nouveaux résultats concernant -d'une part- les propriétés spectrales des générateurs infinitésimaux dans un espace de Fréchet, dans le cas $(\lambda I - L)$ est surjective et non injective, ce qui nous a conduit à l'existence des séries de Fourier et à la résolution des problèmes aux limites de Sturm-Liouville engendrés par des champs de vecteurs dans une algèbre de Lie de Fréchet. C'est une généralisation des travaux de A. Zajtz. Ces résultats sont très importants en géométrie différentielle et en théorie des équations différentielles. Nous estimons que ces résultats peuvent faire l'objet à l'avenir d'une généralisation de la théorie des fonctions spéciales et des polynômes orthogonaux de champs de vecteurs dans un espace de Fréchet.
D'autre part, nous nous sommes intéressés aux propriétés spectrales des semi-groupes de translation et de dilatation perturbés dans un espace de Fréchet de type hyperbolique, dans la cas $(\lambda I - L)$ est bijective, ce qui nous a conduit à l'existence des idéaux de co-dimension finie. C'est une généralisation des travaux de M. Benalili et de A. Lansari. Ces résultats sont très importants dans l'analyse fonctionnelle, dans la théorie des champs en physique, dans les systèmes dynamiques, et trouvent même des applications en finances. Les travaux futurs immédiats incluront l'étude du cas $(\lambda I - L)$ non surjective.

Bibliographie

[1] Bayart, F., Matheron, E. : Dynamics of Linear Operators. Cambridge Tracts in Mathematics, **175** (2009).

[2] Benalili, M. : Linearization of vector fields and embedding of diffeomorphisms in flows via nash -moser theorem. Journal of geometry and physics, **61**, 62–76 (2011).

[3] Benalili, M., Lansari, A. : Ideals of finite codimension in contact lie algebra. Journal of Lie Theory, **11(1)**, 129–134 (2001).

[4] Benalili, M., Lansari, A. : Une propriété des idéaux de codimension finie des algèbres de Lie de champs de vecteurs. Journal of Lie Theory, **15(1)**, 13–25 (2005).

[5] Borichev A., Hedenmalm, H. : Completeness of translates in weighted spaces on the half-line. Acta Math, **174**, 1–84 (1995).

[6] Bourbaki, N : Elements de mathématiques. **Fascicule XXVI**. Groupes et algèbres de Lie, Hermann, Paris (1971).

[7] Brézis, H. : Analyse fonctionnelle : théorie et applications. Dunod, Paris (2011).

[8] Cherifi Hadjiat, A., Lansari, A. : Surjectivity of certain adjoint operators and applications, Arab. J. Math. **9**, 567–588 (2020). https ://doi.org/10.1007/s40065-020-00294-x

[9] Di Francesco, M. : Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering, University of LAquila, Italy (2019).

[10] Domar, Y. : On the analytic transform of bounded linear functionals on certain banach algebras. Studia Math, **53**, 203–224 (1975).

[11] Emamirad, H., Goldstein, G. R., Goldstein, J.A. : Chaotic solution for the Black-Scholes equation, Proc. Amer. Math. Soc., **no. 6**, 2043–2052 (2012).

[12] Grosse-Erdmann, K-G., Manguillot, A. P. : Linear Chaos, Springer Universitex (2011).

[13] Hamilton, R. S. : The inverse function theorem of Nash and Moser. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, **7(1)**, 65–222 (1982).

[14] Kolev, B. : Bi-hamiltonian systems on the dual of the lie algebra of vector fields of the circle and periodic shallow water equations. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., **365**, 2333–2357 (2007).

[15] Lansari, A. : Idéaux de codimension finie en algèbres de Lie de champs de vecteurs. Demonstratio Mathematica, **XXV,3**, 457–468 (1992).

[16] Mather, J. : Characterization of Anosov diffeomorphisms. Indag. Math., **30.5**, 479-483 (1968).

[17] Neeb, K-H. : Infinite Dimensional Lie Groups. Monastir Summer School Lectures, Lecture Notes January 2006.

[18] Pazy, A. : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, **VIII**, 279 S (1983).

[19] Pursell, L. E., Shanks, M. E. : The Lie algebra of smooth manifolds. Proc. Am. Math. Soc., **5**, 468–472 (1954).

[20] Shkarin, S. : Remarks on common hypercycclic vectors. J. Funct. Anal., **258**, 132–160 (2010).

[21] Smolentsev, N.K. : Spaces of Riemannian metrics. Journal of Mathematical Sciences, **142(5)**, 2436–2519 (2007).

[22] Wintner, E. : Bounded matrices and linear differential equations. Amer. J. Math., **79**, 139–151 (1957).

[23] Zajtz, A. : Calculus of flows on convenient manifolds. Archivum Mathematicum, **32,4**, 355–372 (1996).

[24] Zajtz, A. : Embedding diffeomorphisms in a smooth flow. Proceedings of The International Conference dedicated to the 90th anniversary of the birth of G.F. Laptev, In M. G. U. Moscow, editor, 77–89 (2001).