

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de technologie



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTORAT 3^{ème} Cycle**

En : Génie mécanique

Spécialité : Défaillance et protection des ouvrages métalliques

Par : BAKHALED BRAHIM

Sujet

Comportement vibratoire des rotors fissurés

Soutenue publiquement, le 13/ 07/ 2021, devant le jury composé de :

CHEIKH Abdelmadjid	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
HADJOUI Abdelhamid	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
MEFTAH Khouane	Professeur	Univ. Tlemcen	Co-Directeur de thèse
BENACHOUR Mustapha	Professeur	Univ. Tlemcen	Examineur 1
BOUTCHICHA Djilali	Professeur	USTMB Oran	Examineur 2

Année universitaire 2020/2021

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

*Mes chers parents pour leurs sacrifices, leurs encouragements, et leurs
patiences tout au long de mes études.*

Mes chers frères et chères sœurs et à leurs enfants.

Ma femme et mes chers enfants.

Mes chers oncles et chères tantes.

Tous mes amis.

Tous ceux que j'ai connus de près ou de loin.

REMERCIEMENTS

*Louange à Allah de m'avoir guidé vers le bon chemin de la lumière
et du savoir.*

*Je tiens à remercier vivement monsieur le professeur **Abdelhamid
HADJOUI**, pour avoir dirigé ce travail et pour ses enseignements
très enrichissants.*

*Je remercie tous les membres de jury d'avoir accepté de lire ce
travail et d'apporter les critiques nécessaires à la mise en forme
finale de cet ouvrage.*

*Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues du laboratoire
IS2M de l'université de Tlemcen.*

Je remercie tous ceux qui ont aidés à la réalisation de ce travail.

SOMMAIRE

RÉSUMÉ.....	I
ABSTRACT	II
الملخص	III
LISTE DES SYMBOLES	IV
LISTE DES FIGURES	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	X

INTRODUCTION GENERALE	1
-----------------------------	---

CHAPITRE I

Recherche bibliographique sur la dynamique des rotors fissurés

I.1. Introduction.....	4
I.2. Dynamique des rotors	5
I.3. Dynamique des rotors fissurés	7
I.4. Modélisation de la flexibilité locale de la section fissurée	7
I.5. Mécanisme du comportement de la fissure.....	10
I.5.1. Modèle de fissure ouverte	11
I.5.2. Modèle de fissure respiratoire	12
I.6. Types des fissures	13
I.7. Méthodes d'identification des fissures	14
I.7.1. Identification basée sur la mesure des fréquences	15
I.7.2. Identification par mode propre ou par réponse	16
I.7.3. Identification basée sur l'excitation externe	17
I.7.4. Identification basée sur le couplage	18

I.7.5.	Identification basée sur des modèles	20
--------	--	----

CHAPITRE II

Mise en équation

II.1 :	Introduction	23
II.2 :	Hypothèses	23
II.3 :	Détermination des énergies des éléments de rotor	24
II.3.1.	Disque	25
II.3.2.	Arbre	27
II.3.2.1.	Energie cinétique	27
II.3.2.2.	Energie de déformation	28
II.3.3.	Balourd	30
II.3.4.	Paliers	31

CHAPITRE III

Modélisation du rotor par la version h de la méthode des éléments finis

III.1.	Introduction	34
III.2.	Expressions des énergies des éléments du rotor	34
III.2.1.	Energie de déformation d'un élément de rotor	35
III.2.2.	Energie cinétique d'un élément de rotor	36
III.3.	Formulation matricielle	36
III.3.1.	Formulation matricielle des équations du disque	36
III.3.2.	Formulation matricielle des équations de l'arbre	38
III.3.3.	L'énergie cinétique	40
III.3.4.	L'énergie de déformation	42
III.3.5.	Formulation matricielle des équations du palier	44
III.3.6.	Formulation matricielle des équations du balourd	44

III.3.7. Modélisation d'une fissure transversale	44
III.4. Equation dynamique du rotor fissuré	47

CHAPITRE IV

Résultats et interprétation

VI.1. Introduction	49
VI.2. Convergence et validation des résultats :	49
VI.2.1. Etude de convergence	49
VI.2.2. Validation des résultats	53
VI.3. Analyse fréquentielle par la méthode rigidité variable	55
VI.3.1. Modèle de fissure ouverte.....	55
VI.3.1.1. Rotor à l'état stationnaire ($\Omega = 0$)	55
VI.3.1.2. Rotor à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$).....	60
VI.3.2. Modèle de fissure respiratoire	65
VI.4. Nouvelle approche pour l'étude du comportement vibratoire d'un rotor fissuré	68
VI.4.1. Présentation de l'approche	68
VI.4.1.1. Modèle de fissure ouverte.....	68
VI.4.1.1.1. Rotor à l'état stationnaire ($\Omega = 0$).....	68
VI.4.1.1.2. Rotor à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$).....	73
VI.4.1.1.3. Estimation de la gravité de la fissure ouverte	78
VI.4.1.2. Modèle de fissure respiratoire	81
VI.4.1.2.1. Estimation de la gravité de la fissure respiratoire	83
VI.4.1.3. Réponse dynamique	84
VI.4.1.4. Influence du nombre des éléments	85
VI.4.1.5. Relation entre la profondeur de la fissure et le facteur α	87
CONCLUSION GENERALE	90
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	92

RÉSUMÉ

La détection des dommages dans les rotors a fait l'objet de beaucoup d'attention au cours des dernières décennies. Des amplitudes de vibration destructrices peuvent apparaître dans les arbres tournants en raison de la présence des fissures, ces amplitudes produisent une défaillance imprévue et un éventuel endommagement des composants de la machine. La surveillance des paramètres vibratoires des rotors est un outil de détection de la présence et de l'évolution de ces fissures.

La présence d'une fissure dans un arbre en rotation réduit sa rigidité, réduisant ainsi les fréquences propres du rotor, l'étude du comportement dynamique de rotor fissuré permet d'identifier la présence, l'emplacement et la profondeur de la fissure. Les principales techniques utilisées pour exprimer la variation de la rigidité de l'arbre sont la méthode de flexibilité locale et la méthode de la rigidité variable par rapport au temps (*time-varying stiffness*). La méthode de la flexibilité locale est la technique la plus utilisée pour formuler la matrice de rigidité d'un élément fissuré du rotor, cette méthode est basée sur le calcul du facteur d'intensité de contrainte au niveau de la zone fissuré, La méthode de rigidité variable se traduit par une réduction des moments d'inertie de la section droite de la fissure par rapport aux axes de rotation, cette variation des moments d'inertie conduit à une rigidité variable par rapport au temps.

L'influence d'une fissure transversale sur les paramètres modaux du rotor est abordée en utilisant la version h de la méthode des éléments finis. Les matrices globales de l'équation de mouvement du rotor fissuré sont déterminées par l'application de l'équation de Lagrange en tenant compte de la variation locale de la rigidité de l'arbre due à la fissure, la rigidité de l'élément fissuré de l'arbre est déterminée en utilisant la méthode de rigidité variable. Ainsi, qu'une nouvelle approche basée sur la théorie de la diminution de rigidité est présentée dans ce travail pour l'étude des rotors fissurés.

Un programme a été développé en MATLAB pour calculer les fréquences propres et tracer la réponse dynamique ainsi que les amplitudes d'un rotor fissuré et non fissuré. Après avoir présenté la convergence de la version h de la méthode des éléments finis, une étude détaillée sur l'influence de la fissure transversale ouverte et respiratoire sur les paramètres modaux du rotor est présentée.

Mots-clés : Rotor, MEF, Version h, Fissure transversale ouverte, Fissure transversale respiratoire, Rigidité variable, MATLAB.

ABSTRACT

Damage detection in rotors has been the subject of much attention in recent decades. Destructive vibration amplitudes occur in rotating shafts that are used in different industrial applications. These high amplitudes of vibrations, which appear due to cracks, produce an unforeseen failure and damage of the components of the machine. The monitoring of vibratory parameters is considered as a tool for detecting the presence and evolution of cracks.

The presence of a crack in the rotation shaft reduces the rigidity of the structure, thus reducing the natural frequencies of the uncracked original rotor; the study of the dynamic behavior of cracked rotor makes it possible to identify the presence, the location and depth of the crack. The main techniques used to express the variation of the rigidity of the shaft are the local flexibility method and the time-varying stiffness method, the local flexibility method is the most used technique to formulate the stiffness of a cracked element of the rotor, this method is based on the calculation of the stress intensity factor at the level of the cracked zone, The time-varying stiffness method results in a reduction of the moments of inertia of the cross-section of the crack with respect to the axes of rotation, this variation of the moments of inertia leads to a periodically variable stiffness with respect to time.

The influence of a transverse crack on rotor modal parameters is discussed using the h version of the MEF finite method. The global matrices of the equation of motion of the cracked rotor are determined by the application of the Lagrange equation taking into account the local variation of the stiffness of the tree due to the crack, the stiffness of the cracked element of the rotor is determined using the method of variable stiffness, and a new approach based on the decrease of rigidity is presented for the study of cracked rotors.

A program is developed in MATLAB to calculate eigen frequencies and plot the dynamic response as well as the amplitudes of a cracked and uncracked rotor. After showing the speed of the convergence of the h version, a detailed study on the influence of an open and respiratory transverse crack on the modal parameters of the rotor is presented.

Key words: Rotor, FEM, h version, Open crack, Breathing crack, Variable stiffness, MATLAB.

المخلص

كان اكتشاف الأضرار في الأنظمة الديناميكية الدوارة موضع اهتمام كبير في العقود الأخيرة. يمكن أن تحدث اهتزازات مدمرة في أعمدة الدوران التي يتم استخدامها في التطبيقات الصناعية المختلفة. تنتج هذه السعات العالية من الاهتزازات التي تظهر بسبب الشقوق عطلاً غير متوقع وتلفاً محتملاً لمكونات الجهاز ، وتعتبر مراقبة الاهتزازات أداة للكشف عن وجود الشقوق وتطورها.

إن وجود صدع في عمود الدوران يقلل من صلابة الدوار ، وبالتالي يقلل من الترددات الطبيعية للدوار الأصلية غير المتشقة ، فإن دراسة السلوك الديناميكي للدوار المتصدع تجعل من الممكن تحديد الوجود ، موقع وعمق الشق. التقنيات الرئيسية المستخدمة للتعبير عن تباين صلابة الدوار هي طريقة المرونة المحلية وطريقة الصلابة المتغيرة بالنسبة للزمن، تعتبر طريقة المرونة المحلية هي الأسلوب

تمت مناقشة تأثير الشق العرضي على الخصائص الديناميكية للأعمدة الدوارة باستخدام الإصدار h من طريقة العناصر المنتهية . يتم تحديد المصفوفات لمعادلة الحركة للعمود الدوار المتصدع من خلال تطبيق معادلة لاجرانج مع مراعاة التغير المحلي في صلابة العمود الدوار بسبب الشق. لصياغة الصلابة للعنصر المشقوق في العمود الدوار ، تعتمد هذه الطريقة على حساب عامل شدة التوتر على مستوى المنطقة المتشقة ، وتستند طريقة الصلابة المتغيرة على مبدأ التغير في قيم عزوم الدوران من المقطع العرضي للشق بالنسبة لمحاور الدوران ، هذا التغير يؤدي إلى صلابة متغيرة بشكل دوري بالنسبة للزمن. تم تحديد صلابة العنصر المتشقق من العمود الدوار باستخدام طريقة الصلابة المتغيرة. تم تقديم طريقة جديدة تعتمد على مبدأ تناقص صلابة العمود لدراسة تأثير الشقوق العرضية على الخصائص الديناميكية للأعمدة الدوارة.

تم تطوير برنامج في MATLAB لحساب الترددات الخاصة ولرسم تخطيط الحركة بالإضافة إلى مدى الانتقالات العرضية بالنسبة للأعمدة الدوارة المتشقة وغير المتشقة. بعد إظهار تقارب الإصدار h من طريقة العناصر المنتهية ، يتم تقديم دراسة مفصلة حول تأثير الشق العرضي المفتوح و الشق المتنفس على العمود الدوار.

الكلمات المفتاحية: عمود دوار، طريقة العناصر المنتهية، الشق العرضي المفتوح، الشق العرضي المتنفس ، صلابة متغيرة بدلالة الزمن ,MATLAB.

LISTE DES SYMBOLES

u	Vecteur du déplacement additionnel
h	Profondeur de la fissure
P	Vecteur du chargement
C_{ij}	Les termes de la matrice de flexibilité locale
G	Taux de restitution de l'énergie
K_I, K_{II}, K_{III}	Facteurs d'intensité de contraintes
E', E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
R	Rayon de la section de l'arbre
ΔI	Diminution du moment d'inertie
I_0	Moment d'inertie de la section non fissurée
l	Longueur de l'élément fissuré
μ	Profondeur adimensionnelle de la fissure
$F(\mu)$	Fonction de souplesse
ΔK	Perte de rigidité périodique due à la fissure
ΔK_{max}	Valeur maximale correspondant à une fissure totalement ouverte
(Ωt)	Angle de rotation
N	Degré de liberté par nœud
L	Longueur d'un élément
D	Diamètre de la section de l'élément
T	Energie cinétique
U	Energie potentielle
q_i	Coordonnées généralisés
Q_i	Forces extérieures
$R_0(X, Y, Z)$	Repère fixe
$R(x, y, z)$	Repère tournant lié au disque
$\theta_z, \theta_x, \theta_y$	Angle de rotation autour des axes x, y, z
$\vec{\omega}_{R/R_0}^R$	Vecteur de rotation instantanée suivant x, y et z
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Composants du vecteur de rotation instantanée suivant x, y et z
m_d	Masse du disque
I_d	Tenseur d'inertie de disque
$I_{d_x}, I_{d_z}, I_{d_y}$	Moments d'inertie du disque suivant les axes x, y et z .
T_d	Energie cinétique du disque
T_d^{trans}	Energie cinétique de translation du disque
T_d^{rot}	Energie cinétique de rotation du disque
ρ_d	Masse volumique de disque
e_d	Epaisseur de disque
r	Rayon extérieur de disque
R	Rayon intérieur de disque (rayon de l'arbre)
Ω	Vitesse de rotation (tr/min)
ρ	Masse volumique de l'arbre
S	Section droite de l'arbre

I_a	Moment d'inertie de la section transversale de l'arbre
ε	Champ de déformation
σ	Champ de contrainte
u^*, w^*	Déplacements du centre géométrique de l'arbre par rapport au repère tournant $R(x,y,z)$
U_a	Energie de déformation de l'arbre
V	Volume d'un élément de l'arbre
m_u	Masse de balourd
d	Excentricité du balourd
T_{Bal}	Energie cinétique de balourd
δWp	Travail virtuel des forces extérieures des paliers
$k_{xx}, k_{xz}, k_{zz}, k_{zx}$	Raideurs des paliers
$c_{xx}, c_{xz}, c_{zz}, c_{zx}$	Amortissements des paliers
F_u, F_w	Forces généralisées des paliers
R_i	Fonction de dissipation
δ	Vecteur de coordonnées généralisées
d	Vecteur des déplacements nodaux
$N(y)$	Vecteur des fonctions de formes
$B(y)$	Matrice qui relie les déformations aux déplacements nodaux
$[D]$	Matrice qui relie les contraintes et les déformations
$[K]$	Matrice raideur d'un élément d'arbre
$[M]$	Matrice masse d'un élément d'arbre
u, w	Déplacements du centre géométrique de l'arbre par rapport au repère fixe $R_0(X, Y, Z)$
θ_x, θ_z	Angles de rotation de la section transversale de l'arbre par rapport au repère tournant $R(x,y,z)$
$[M_d]$	Matrice masse de disque
$[G_d]$	Matrice gyroscopique de disque
b_1, b_2, b_3, b_4	Les constantes du polynôme d'interpolation
N_1, N_2	Vecteurs des fonctions de formes
$[M_c]$	Matrice élémentaire classique de masse
$[M_r]$	Matrice élémentaire de l'effet secondaire de l'inertie de rotation
$[M_e]$	Matrice élémentaire de masse
$[G_e]$	Matrice élémentaire gyroscopique
$[K_e]$	Matrice élémentaire de rigidité
G	Module de cisaillement
S_r	Section réduite
$[K_p]$	Matrice de raideur des paliers
$[C_p]$	Matrice d'amortissement des paliers
φ	Angle initial de la fissure
t	Temps
$[K_{fissuré}]$	Matrice de rigidité de l'élément fissuré
$I_{\bar{x}}(t), I_{\bar{z}}(t)$	Moments d'inertie par rapport aux axes \bar{x} et \bar{z}
$I_x(t), I_z(t)$	Moments d'inertie par rapport aux axes X et Z
$I_{\bar{x}}, I_{\bar{z}}$	Moments d'inertie par rapport aux axes \bar{x} et \bar{z}
I_x, I_z	Moments d'inertie par rapport aux axes x et z
μ	Profondeur adimensionnelle de la fissure

$[M_g]$	Matrice globale de masse
$[G_g]$	Matrice gyroscopique globale
$[K_g]$	Matrice globale de rigidité
$\{F_{Bal}\}$	Vecteur des forces de balourd
L_{arbre}	Longueur de l'arbre du rotor
β	Angle de balourd
ω_b	Fréquence du mode indirect (backward)
ω_f	Fréquence du mode direct (forward)
N	Nombre d'éléments de l'arbre
$K_{non-fissuré}$	Rigidité d'un élément sain
$K_{fissuré}$	Rigidité d'un élément avec fissure ouverte
$\overline{K}_{fissuré}$	Rigidité d'un élément avec fissure respiratoire
$\overline{I}_X, \overline{I}_Z$	Moments d'inertie d'un élément avec fissure respiratoire par rapport aux axes \overline{X} et \overline{Z}
α	Facteur de diminution de rigidité
C_i	Variation relative des fréquences naturelles
$L_{fissure}$	Position de la fissure
H	Facteur qui a une relation avec α et μ

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Turbine à gaz.	4
Figure I.2: Turbine à expansion (Turbo-Expander).	5
Figure I.3: Compresseur centrifuge.	5
Figure I.4: Section transversale de la fissure.	8
Figure I.5: Mise en évidence du mécanisme de respiration de la fissure.	11
Figure I.6: Modèles de respiration de la fissure.	13
Figure I.7: Fissure transversale	13
Figure I.8: Fissure longitudinale.	14
Figure I.9: Fissure hélicoïdale.	14
Figure I.10: Fissure béante.	14
Figure II.1: Modèle d'un rotor avec un disque supporté par deux paliers.	24
Figure II.2: Repère fixe liée au support et repère tournant liée au disque.	25
Figure II.3: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor	29
Figure II.4: Masse de balourd.	30
Figure II.5: Modélisation de la distribution de balourd.	31
Figure II.6: Amortissement et raideur de palier.	32
Figure III.1: Degrés de liberté du disque.	37
Figure III.2: Degrés de liberté d'un élément de l'arbre	38
Figure III.3: Section transversale de l'élément fissuré (-a- Avant la rotation, -b- Après la rotation)	45
Figure III.4: Modèle élément finis d'un rotor.	47
Figure IV.1: Modèle du rotor étudié.	50
Figure IV.2: Courbe de convergence du premier mode de flexion (indirect) en fonction du nombre d'éléments.	51
Figure IV.3: Courbe de convergence du premier mode de flexion (direct) en fonction du nombre d'éléments.	51
Figure IV.4: Courbe de convergence du deuxième mode de flexion (indirect) en fonction du nombre d'éléments.	52
Figure IV.5: Courbe de convergence du deuxième mode de flexion (direct) en fonction du nombre d'éléments.	52
Figure IV.6: Modèle éléments finis du rotor étudié.	53
Figure IV.7: Variation des fréquences propres du premier mode dans le cas où le premier élément est fissuré.	56
Figure IV.8: Variation des fréquences propres du deuxième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.	56
Figure IV.9: Variation des fréquences propres du troisième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.	57
Figure IV.10: Variation des fréquences propres du premier mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	58
Figure IV.11: Variation des fréquences propres du deuxième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	58
Figure IV.12: Variation des fréquences propres du troisième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	58
Figure IV.13: Variation des fréquences propres du premier mode dans le cas où le	59

troisième élément est fissuré.	
Figure IV.14: Variation des fréquences propres du deuxième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.	59
Figure IV.15: Variation des fréquences propres du troisième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.	60
Figure IV.16: Variation des fréquences critiques du premier mode dans le cas où le premier élément est fissuré.	61
Figure IV.17: Variation des fréquences critiques du deuxième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.	61
Figure IV.18: Variation des fréquences critiques du troisième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.	62
Figure IV.19: Variation des fréquences critiques du premier mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	62
Figure IV.20: Variation des fréquences critiques du deuxième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	63
Figure IV.21: Variation des fréquences critiques du troisième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	63
Figure IV.22: Variation des fréquences critiques du premier mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.	64
Figure IV.23: Variation des fréquences critiques du deuxième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.	64
Figure IV.24: Variation des fréquences critiques du troisième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.	64
Figure IV.25: Variation de la rigidité de l'arbre en présence d'une fissure transversale respiratoire.	66
Figure IV.26: Variation de fréquence de premier mode (indirect) en fonction de l'angle de rotation et la profondeur de la fissure.	67
Figure IV.27: Variation de fréquence de premier mode (direct) en fonction de l'angle de rotation et la profondeur de la fissure.	67
Figure IV.28: Variation des fréquences propres du premier mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	69
Figure IV.29: Variation des fréquences propres du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	69
Figure IV.30: Variation des fréquences propres du troisième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	70
Figure IV.31: Variation des fréquences propres du premier mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	70
Figure IV.32: Variation des fréquences propres du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	71
Figure IV.33: Variation des fréquences propres du troisième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	71
Figure IV.34: Variation des fréquences propres du premier mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	72
Figure IV.35: Variation des fréquences propres du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	72
Figure IV.36: Variation des fréquences propres du troisième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	72
Figure IV.37: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	74

Figure IV.38: Variation des fréquences critiques du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	74
Figure IV.39: Variation des fréquences critiques du troisième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	74
Figure IV.40: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	75
Figure IV.41: Variation des fréquences critiques du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	75
Figure IV.42: Variation des fréquences critiques du troisième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	76
Figure IV.43: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	76
Figure IV.44: Variation des fréquences critiques du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	77
Figure IV.45: Variation des fréquences critiques du troisième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	77
Figure IV.46: Variation relative des fréquences naturelles du premier mode (indirecte).	79
Figure IV.47: Variation relative des fréquences naturelles du premier mode (directe).	79
Figure IV.48: Variation relative des fréquences naturelles du deuxième mode (indirecte).	80
Figure IV.49: Variation relative des fréquences naturelles du deuxième mode (directe).	80
Figure IV.50: Variation relative des fréquences naturelles du troisième mode (indirecte).	80
Figure IV.51: Variation relative des fréquences naturelles du troisième mode (directe).	81
Figure IV.1: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de l'angle de rotation (Ωt) dans le cas où le troisième élément est fissuré et $\alpha=0.3$.	82
Figure IV.53: Variation relative des fréquences propres du premier mode en fonction de facteur α et l'angle de rotation (Ωt).	83
Figure IV.54: Variation relative des fréquences propres du deuxième mode en fonction de facteur α et l'angle de rotation (Ωt).	83
Figure IV.55: Variation relative des fréquences propres du troisième mode en fonction de facteur α et l'angle de rotation (Ωt).	84
Figure IV.56: Réponse dynamique d'un rotor sain et fissuré.	85
Figure IV.57: Evolution des amplitudes en fonction du pourcentage de diminution de rigidité α .	85
Figure IV.58: Modèle éléments finis du rotor étudié discrétisé en 12 éléments.	86
Figure IV.59: Variation d'amplitude en fonction de la vitesse de rotation et le nombre de discrétisation.	87
Figure IV.60: Variation de la première fréquence critique (indirecte) en fonction du facteur H.	88
Figure IV.61: Variation de la première fréquence critique (directe) en fonction du facteur H.	89

LISTE DES TABLEAUX

Tableau IV.1: Paramètres physiques du rotor étudié.	50
Tableau IV.2: Convergence des fréquences propres des deux premiers modes en fonction du nombre d'éléments.	51
Tableau IV.3: Validation des fréquences et vitesses critiques dans le cas d'un rotor sain.	54
Tableau IV.4: Validation des fréquences et vitesses critiques dans le cas où la fissure est située au niveau de deuxième élément et $\mu = 0.46$.	54
Tableau IV.5: Validation des fréquences et vitesses critiques dans le cas où la fissure est située au niveau de troisième élément et $\mu = 0.46$.	55
Tableau IV.6: Variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le premier élément est fissuré.	56
Tableau IV.7: Variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	57
Tableau IV.8: Variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le troisième élément est fissuré.	59
Tableau IV.9: Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le premier élément est fissuré.	61
Tableau IV.10: Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	62
Tableau IV.11: Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le troisième élément est fissuré.	63
Tableau IV.12: Variation des fréquences propres en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	69
Tableau IV.13: Variation des fréquences propres en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	70
Tableau IV.14: Variation des fréquences propres en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	71
Tableau IV.15: Variation des fréquences critiques en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	73
Tableau IV.16: Variation des fréquences critiques en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	75
Tableau IV.17: Variation des fréquences critiques en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	76
Tableau IV.18: Variation relative des fréquences en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.	78
Tableau IV.19: Variation relative des fréquences en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.	78
Tableau IV.20: Variation relative des fréquences en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.	79
Tableau IV.21: Variation des fréquences critiques par rapport à α cas rotor fissure située au niveau de l'élément 3 pour un rotor discrétisé en 12 éléments.	86

INTRODUCTION GENERALE

Les rotors sont définis comme tout élément tournant autour d'un axe. Donc le champ des rotors est vaste. On les trouve dans plusieurs domaines d'applications industrielles: l'aéronautique, l'automobile, le nucléaire, ainsi que l'industrie pétrolière... etc.

Les machines tournantes peuvent présenter des problèmes d'équilibrage (dus au balourd), de fissure et contact rotor-stator; L'influence d'une fissure sur le comportement dynamique associé a attiré l'attention de nombreux chercheurs. La présence d'une fissure peut conduire à un effet dangereux et catastrophique sur le comportement dynamique des structures tournantes et cause des graves dommages aux machines tournantes. Par conséquent, la détection rapide d'une fissure de rotor pourrait potentiellement éviter ces dommages et les réparations coûteuses en raison de la défaillance des machines tournantes, ainsi que d'assurer la sécurité du personnel.

Des fissures de différentes configurations et de différentes sévérités peuvent être développées au niveau de l'arbre de la machine tournante lors du fonctionnement. Ces fissures sont classées selon leur orientation par rapport à l'axe de l'arbre et se sont : fissures transversales, fissures longitudinales et fissures obliques. Parmi ces types de fissures, la fissure transversale est restée le type de fissure le plus dangereux et le plus important.

Plusieurs techniques de surveillance non destructive, telles que le test de vibration, la thermographie, l'inspection visuelle, la surveillance par ultrasons, sont utilisées pour diagnostiquer et surveiller le comportement dynamique des machines tournantes. Parmi ces techniques de maintenance prédictive, l'analyse des vibrations est la technique la plus utilisée.

Depuis 1960, les rotors fissurés ont fait l'objet de plusieurs études et exploitations. Des recherches importantes ont été réalisées au cours de ces années. Actuellement, le nombre total des travaux sur les rotors fissurés dépasse 1000 et continue d'augmenter.

Les travaux théoriques et expérimentaux sur les rotors fissurés ont montré que la présence d'une fissure dans un rotor induit une modification de la rigidité de l'arbre, ce qui entraîne des modifications détectables dans la réponse dynamique de rotor, Parmi les techniques les plus utilisées pour déterminer la rigidité d'un arbre fissuré en utilisant la MEF, nous avons la méthode de flexibilité locale et la méthode de rigidité variable par rapport au temps (time-varying stiffness). La méthode de flexibilité locale est la méthode la plus utilisée, cette méthode est basée sur le calcul du facteur d'intensité de contrainte au niveau de la zone

fissurée. La méthode de rigidité variable est traduite par la variation des moments d'inertie de l'élément fissuré en fonction de l'angle de rotation, ce qui conduit à une rigidité variable par rapport au temps.

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la modélisation du comportement dynamique en flexion des rotors fissurés à l'aide de la version h des éléments finis.

Cette thèse est développée en quatre chapitres.

- Dans le premier chapitre une étude bibliographique est présentée sur la dynamique des rotors fissurés.
- Le deuxième chapitre concerne la mise en équation du rotor. Les caractéristiques des différents éléments qui composent un rotor sont présentées tel que l'énergie cinétique et énergie de déformation d'un arbre, énergie cinétique d'un disque et l'énergie cinétique d'un balourd.
- Le troisième chapitre représente le développement de l'équation du mouvement avec la modélisation par la version h des éléments finis.
- L'étude de convergence, validation, les résultats et discussions sont présentés dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE I

Recherche bibliographique sur la dynamique des rotors fissurés

Table des matières

I.1.	Introduction	4
I.2.	Dynamique des rotors.....	5
I.3.	Dynamique des rotors fissurés	7
I.4.	Modélisation de la flexibilité locale de la section fissurée	7
I.5.	Mécanisme du comportement de la fissure	10
I.5.1.	Modèle de fissure ouverte	11
I.5.2.	Modèle de fissure respiratoire	12
I.6.	Types des fissures.....	13
I.7.	Méthodes d'identification des fissures	14
I.7.1.	Identification basée sur la mesure des fréquences.....	15
I.7.2.	Identification par mode propre ou par réponse.....	16
I.7.3.	Identification basée sur l'excitation externe	17
I.7.4.	Identification basée sur le couplage	18
I.7.5.	Identification basée sur des modèles	20

I.1. Introduction

Les rotors sont définis comme tout élément tournant autour d'un axe fixe. Le terme rotor est utilisé dans plusieurs domaines. Le plus souvent, il désigne la partie en rotation d'une machine, mécanique ou électrique, qui interagit avec la partie fixe appelée le « Stator ». Les machines tournantes jouent un rôle essentiel dans l'industrie, tels que les turbines, moteurs, pompes. Les figures ci-dessous représentent quelques utilisations des rotors dans divers domaines.

Dans ce chapitre, on présente une recherche bibliographique des principaux travaux sur les rotors fissurés, les différentes méthodes qui permettent l'identification, ainsi que les méthodes d'approche de la rigidité de l'arbre due à la présence des fissures. Ensuite, les différents modèles qui représentent le comportement d'une fissure transversale pendant la rotation de l'arbre, les méthodes de détection des fissures seront aussi présentés.

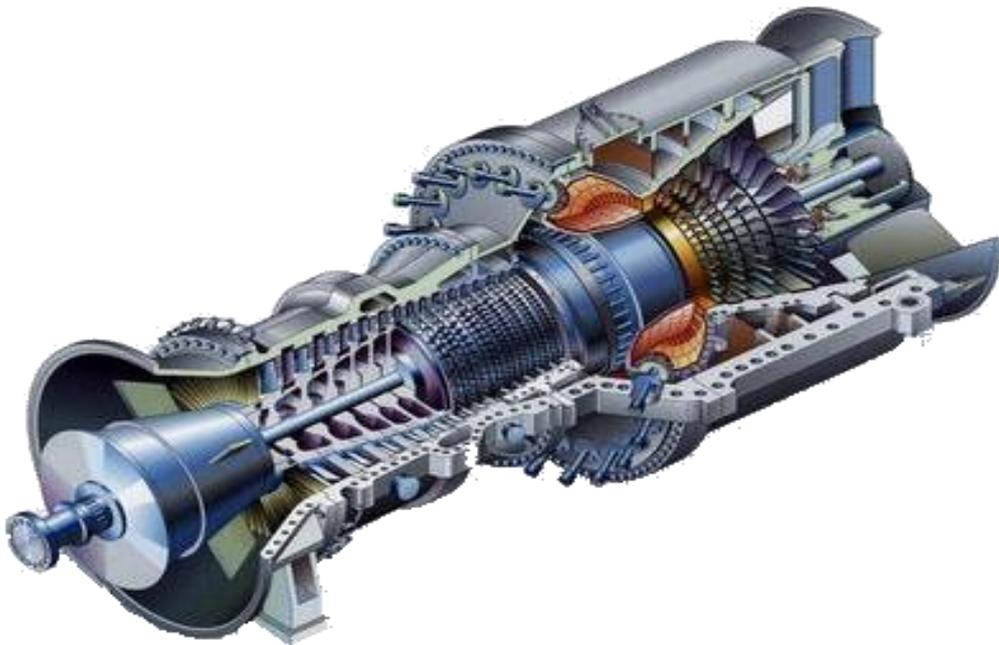


Figure I.1 : Turbine à gaz.

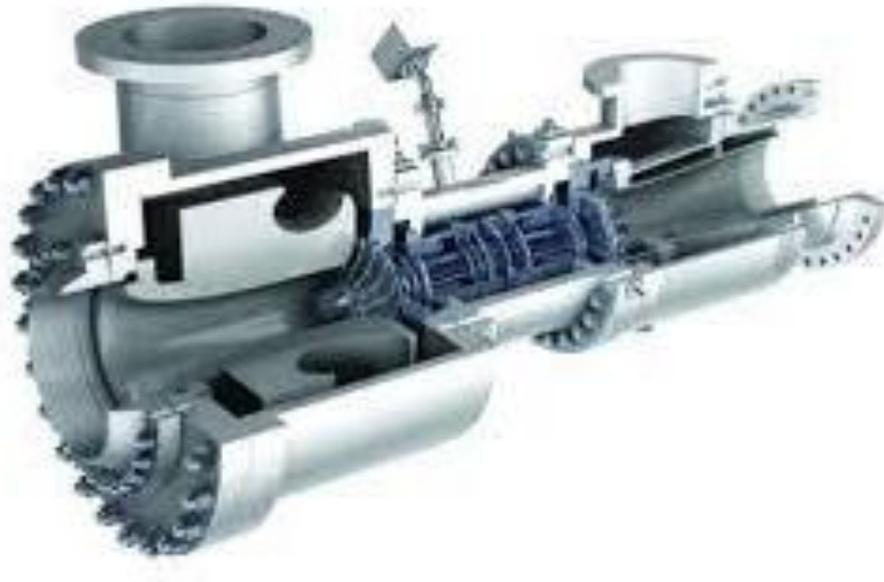


Figure I. 2: Turbine à expansion (Turbo-Expander).

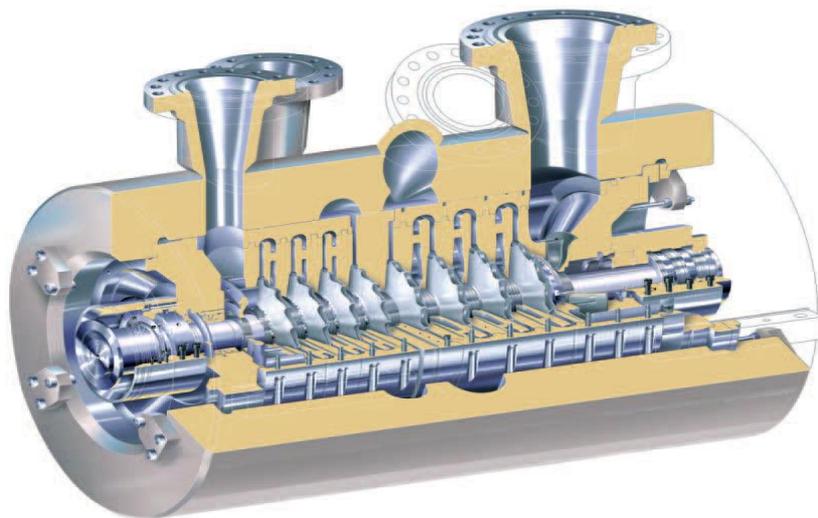


Figure I. 3: Compresseur centrifuge.

I.2. Dynamique des rotors

L'histoire de la dynamique des rotors est intéressante, en raison de l'effet entre ses théories et ses applications. De ce fait, on déduit que la dynamique des rotors a été conduite dans la plupart des cas par ses applications et par ses théories, les références [1-2] passent en revue l'histoire des débuts de la dynamique des rotors.

L'étude du comportement dynamique des rotors date depuis de nombreuses années. La première analyse d'un arbre tournant a été étudiée par Rankine [3], où il a prévu une certaine

vitesse de rotation avec un modèle infortuné, tout en ajoutant le terme tourbillonnant "whirling" au vocabulaire de la dynamique des rotors.

S. Dunkerley [4] a fait une étude concernant la vibration des arbres embarqués par des poulies, il a montré qu'à une vitesse particulière, et avec une déflexion limitée, le rotor pourrait même se casser, cette vitesse particulière ou vitesse critique dépend de la façon de laquelle l'arbre est soutenu, de ses caractéristiques géométriques et mécaniques ainsi que les positions de tous les disques qu'il supporte.

Foeppl [5] a utilisé un meilleur modèle et expliqua analytiquement que le mouvement normal au-delà de la vitesse critique est possible. Il a réussi à réaliser le mouvement stable à sept fois la vitesse critique. Kerr [6] a publié une autre contribution expérimentale montrant qu'une deuxième vitesse critique pouvait être atteinte si l'on dépassait en toute sécurité la première. Jeffcott [7] a écrit le premier rapport sur la théorie fondamentale de la dynamique des rotors. Les exploits scientifiques de Jeffcott sont encore très appréciés et c'est pour cette raison que leurs noms sont associés au modèle de base d'un rotor (un disque au milieu d'un arbre).

Stodola [8] a présenté un travail intéressant où il a détaillé les développements font sur la dynamique des rotors. Dans son travail il a introduit l'effet gyroscopique et confirma que les solutions super critiques étaient stabilisées par les accélérations de Coriolis. Smith [9] était le premier à étudier les systèmes symétriques et asymétriques.

Les méthodes des éléments finis et matrices de transfert sont utilisées pour déterminer les fréquences naturelles, les modes et les réponses forcées au déséquilibre dans les systèmes à rotor complexes. Durant les années 60, plusieurs chercheurs ont développés les systèmes multi-rotors avec paliers en utilisant la méthode de matrices de transfert. Par contre, la méthode des éléments finis a été améliorée en premier dans le domaine de la dynamique des structures.

Le modèle le plus utilisé dans ces dernières années, est développé à partir de la méthode des éléments finis [10,11]. Cette méthode nous permet de déterminer avec précision les fréquences propres et les facteurs d'amortissement ainsi que la réponse à diverses excitations. De plus, cette dernière est modulaire car chaque élément du rotor est défini séparément. Des éléments peuvent être ajoutés ou retirés selon les phénomènes qui sont mis en évidence. Ainsi La méthode des éléments finis a été exploitée pour étudier les phénomènes d'amortissement en dynamique des rotors [12] et pour l'étude de l'influence d'un couple axial sur le comportement des rotors [13].

I.3. Dynamique des rotors fissurés

L'étude de la dynamique des rotors fissurés est un problème délicat recouvrant plusieurs parties techniques et mathématiques. Une modélisation spéciale est nécessaire pour l'analyse d'un tel système à l'exemple des arbres fissurés.

L'étude du comportement vibratoire d'un arbre fissuré fait l'objet d'études et de recherches depuis les années soixante. Beaucoup d'articles concernant les structures fissurées ont été publiés [14]. Il semblerait que le premier article des structures fissurées a été publié en 1957. La connaissance du comportement dynamique des rotors fissurés a permis de reconnaître leur présence à temps avant la défaillance de la machine tournante.

L'endommagement du rotor résulte des coûts très élevés pour la reconstruction des machines et de l'installation complète, ce qui implique aussi une perte de production à long durée. Lorsqu'une fissure est découverte à temps avant, le rotor peut être remplacé par un autre de secours en quelques jours ou quelques semaines, avec des effets économiques acceptable et abordables. Cette situation explique l'intérêt croissant pour le l'étude du comportement des fissures en général et des arbres en particulier. Les accidents dus aux fissures dans les turbogénérateurs ont été signalés depuis les années cinquante, mais les études théoriques et numériques sur les caractéristiques de vibration des rotors fissurés ont commencé à partir des années soixante-dix. Depuis les années quatre-vingt, des chercheurs du monde entier ont rédigé des articles sur différents sujets liés aux rotors fissurés. De nombreux chercheurs ont étudié les caractéristiques de vibration des rotors fissurés, afin de développer un système de surveillance des vibrations qui permet de détecter une fissure pendant le fonctionnement.

La modélisation des rotors fissurés se base sur deux principes fondamentaux [15] :

- ✓ La section fissurée représentée par une flexibilité locale.
- ✓ La prise en compte du mécanisme d'ouverture-fermeture de la fissure.

I.4. Modélisation de la flexibilité locale de la section fissurée

La présence d'une fissure dans une structure conduit à une concentration de contraintes au voisinage des lèvres de la fissure et introduit à une flexibilité locale caractérisée par une diminution de rigidité de la structure.

Kirmsher et Thomson [16,17] ont étudié la réponse vibratoire d'une structure en présence d'une discontinuité où ils ont modélisé la discontinuité par un moment de flexion additionnel

et par une réduction locale de la section transversale de la partie discontinue en se basant sur des résultats expérimentaux.

Irwin [18, 19] Bueckner [20, 21], Westmann [22] font les premiers essais pour analyser et calculer la flexibilité locale de l'élément fissuré de la structure à l'aide de la relation entre la flexibilité et le facteur d'intensité de contrainte.

Le théorème de Castigliano permet de calculer en tout point d'une structure le vecteur du déplacement additionnel u dû à la présence d'une fissure de profondeur a sous l'action du vecteur du chargement P par :

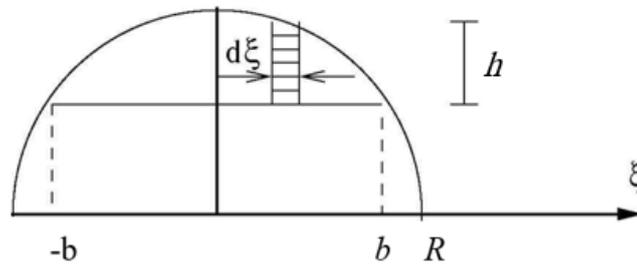


Figure I. 4: Section transversale de la fissure.

$$u = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^a G(a) da \quad (\text{I-1})$$

Les termes de la matrice de flexibilité locale C_{ij} sont calculés par la formule suivante :

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a G(a) da, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \text{ et } j = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{I-2})$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique et des petites perturbations, le taux de restitution de l'énergie G et les facteurs d'intensité de contraintes (K_I , K_{II} et K_{III}) sont reliés par la formule d'Irwin [18,19] :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{I-3})$$

En hypothèse de déformations planes, on a $E' = E$ et en hypothèse des contraintes $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ planes, sachant que :

E : Module de Young

ν : coefficient de Poisson.

Pour différentes géométries de fissures et de structures, les efforts se sont multipliés pour évaluer les coefficients d'intensité de contraintes. On trouve de nombreuses solutions

analytiques ou semi-analytiques pour les solides fissurés infinis ou de forme extérieure simple compilées dans des recueils comme celui de Tada et al [23].

Les effets de la présence d'une rainure sur la stabilité ont été examinés par Liebowitz et al [24, 25] et Okamura et al [26], ces résultats ont été vérifiés expérimentalement avec Brown et al [27], où ils ont proposé une formule pour l'identification de la flexibilité locale d'une poutre de section rectangulaire fissurée en flexion. Anifantis [28] a exploité la même formulation pour l'examen de stabilité des colonnes fissurées. Dimarogonas et Anifantis [29, 30, 31] ont suivi la même méthodologie pour la stabilité des anneaux et des tubes comportant des fissures longitudinales.

Gross et Srawley [32, 33] publient deux notes techniques à la NASA sur l'identification des coefficients d'intensité de contraintes et les termes de la matrice de flexibilité locale pour des éléments fissurés soumis à des efforts de flexion et de traction. De même, Rice et Levy [34] ont examiné ce couplage dans leur étude des plaques élastiques fissurées. Dimarogonas [35, 36, 37, 38], Anifantis et Dimarogonas [39] ont introduit la matrice de flexibilité (6 x 6) d'une section fissurée. Ils ont constaté qu'elle contient des termes extra-diagonaux conduisant au couplage des vibrations longitudinale et transversale. En négligeant les effets de la torsion, ils ont évalué les termes de cette matrice (5 x 5) pour une section rectangulaire possédant une fissure transversale. Les termes de la matrice (6 x 6) d'une section de poutre de Timoshenko fissurée pour tout cas de chargement ont tous été évalués par Papadopoulos et Dimarogonas [40, 41, 42], Ostachowicz et Krawczuk [43].

Dimarogonas et Paipetis [35] a discrétisé la surface fissurée en un ensemble d'éléments indépendants pour la raison que l'expression analytique de facteur d'intensité de contraintes n'existe pas dans le cas d'une géométrie cylindrique telle que celle des rotors de turbines. Les coefficients d'intensité de contraintes peuvent être approchés par des formules analytiques sur chacune de ces surfaces élémentaires, par la suite le taux de restitution d'énergie est déterminé par intégration, (figure I.4).

L'équation I-2 devient :

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a \int_{-b}^b G(a, \xi) d\xi da \quad (I-4)$$

Les flexibilités locales dues à la présence d'une fissure de fatigue ont été identifiées expérimentalement sur des éprouvettes en verre-époxy par Dimarogonas [44, 45], et les résultats ont concordé avec la démarche décrite ci-dessus. Cette méthode n'en reste pas moins une approximation même si elle offre l'avantage d'être facilement applicable dans un

algorithme numérique, et ce malgré que sa précision n'est pas établie [46]. D'autre part, on trouve des problèmes de convergence de la procédure d'intégration lorsque la profondeur de la fissure dépasse le rayon de la section du rotor [47, 48]. Papadopoulos [49] a proposé une solution qui permet de surmonter cette difficulté. Lorsque la profondeur de la fissure dépasse le rayon de la section du rotor on calcule de façon approchée l'intégrale double de l'équation (1.4) en considérant des valeurs de ξ tel que $0.90b \leq |\xi| \leq 0.95b$.

La généralisation de cette démarche à toute géométrie de section fissurée est complexe ou impossible dans certains cas où la fissure n'est pas connexe.

En conclusion, les solutions apportées par la mécanique de rupture pour le calcul des flexibilités locales résultant à la présence de fissures appliquées à des structures géométriques complexes ne permettent que des approximations plus ou moins grossières [50]. Il faut, de ce fait, recourir aux méthodes numériques.

Plusieurs tentatives ont été faites pour l'identification numérique des coefficients de flexibilité locale dus à la présence d'une fissure. Une modélisation par éléments finis tridimensionnels avec un comportement élastique a été faite par Dirr et Schmalhorst [51], et Imam et al. [52]. Les éléments triangulaires avec un comportement élastoplastique du matériau ont été utilisés par Ostachowics et al [53]. La méthode des éléments finis pour modélisation de la variation des contraintes en fond de fissure nécessitant des maillages très raffinés et des temps de calculs importants tant la procédure converge lentement a été instauré par Go et Lin [54]. Pour aboutir à des coûts de calculs plus faibles, d'autres types d'éléments plus appropriés ont été présentés.

I.5. Mécanisme du comportement de la fissure

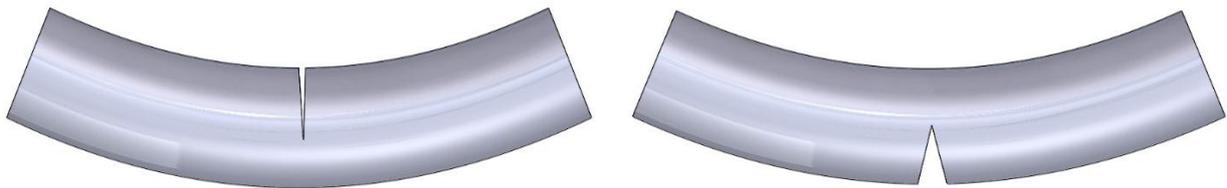
La prise en compte du mécanisme d'ouverture et de fermeture de la fissure est le deuxième principe de la modélisation des structures fissurées. Pour mettre en évidence ce mécanisme On considère une poutre à section circulaire simplement appuyée soumise à l'effet de son propre poids, tournant à une vitesse de rotation faible autour de son axe. Une section fissurée se trouve au milieu de la longueur de la poutre. Quand la poutre tourne la partie fissurée passe périodiquement de zones tendues (lorsqu'elle est en bas) à des zones comprimées (lorsqu'elle est en haut), et en conséquent elle s'ouvre et se ferme périodiquement et on dit qu'elle respire, (figure I.5).

En fonction de la position angulaire de la fissure, On trouve trois situations concernant le mécanisme de respiration qui sont : la position fermée (cas de compression), ouverte (cas de tension) et enfin dans une situation intermédiaire ce qui l'amène à être partiellement ouverte ou bien partiellement fermée, ce mécanisme de respiration générée entraîne un comportement vibratoire spécial.

Cependant, la modélisation du comportement vibratoire de la fissure dans les rotors montre qu'on peut distinguer deux types de modèles de fissures :

Le premier modèle est la fissure qui reste toujours ouverte durant la rotation. Ce modèle est connu sous le nom de modèle de fissure ouverte (Open crack).

Le deuxième modèle est la fissure respiratoire (Breathing crack), dans ce cas la fissure s'ouvre et se ferme durant la rotation de la structure en fonction l'angle de rotation.



(a) Fissure en zone comprimée

(b) Fissure en zone tendue

Figure I. 5 : Mise en évidence du mécanisme de respiration de la fissure.

I.5.1. Modèle de fissure ouverte

Pour ce modèle, la fissure reste totalement ouverte durant la vibration, ce modèle est utilisé pour éviter les non-linéarités introduites par la respiration de la fissure. Certains travaux représentent la partie fissurée de la poutre par un ressort équivalent qui reste constant quelle que soit la direction du chargement [14].

Ce modèle est simple car la rigidité de l'arbre du rotor reste constante au cours de la rotation et la fissure est décrite par une diminution de rigidité de l'arbre.

Pour ce modèle, la rigidité de l'arbre peut se modéliser par la variation des moments d'inertie pour les deux directions principales de la section en fonction de la profondeur de la fissure.

La solution exacte de la réponse vibratoire de ce modèle a été développée par Tondl [55].

D'autre part Dimentberg [56] a étudié la réponse vibratoire d'un rotor dissymétrique et a remarqué des variations dans les composantes sub et sous-harmoniques de la vitesse critique.

Dimarogonas [44, 45] a utilisé les travaux de Dimentberg [56] pour le développement de la

méthode de détection des fissures basée sur la seconde harmonique. Pafelias [57] a suivi les travaux de Dimarogonas et a développé une stratégie de détection de fissures basée sur la seconde harmonique.

Gudmundson [58, 59] a vérifié les résultats obtenus expérimentalement par Wendtland [60] pour des poutres fissurées de faible profondeur au voisinage des fréquences de résonances.

I.5.2. Modèle de fissure respiratoire

Henry et Okah-Avae [61], Gasch [62], et Mayes et Davies [63] ont décrit un modèle simple pour le mécanisme d'ouverture-fermeture de la fissure pour des fissures peu profondes. Ce modèle était appelé le modèle switching ou "hinge model", pour ce modèle, la fissure est soit totalement ouverte ou totalement fermée. Mayes et Davies [63] étaient les premiers à exposer des résultats expérimentaux pour la validation de leur modèle. Henry et Okah-Avae [61], et Gasch [62] ont obtenu l'équation différentielle linéaire à coefficients périodiques par le passage du repère tournant au repère fixe. Ziebarth et al [64, 65] ont présenté des résultats identiques aux résultats de Henry et Okah-Avae [61] et Gasch [62].

Mayes et Davies [66] ont étudié analytiquement et expérimentalement l'effet de la propagation de la fissure sur la réponse vibratoire d'une machine tournante.

En 1984, Mayes et Davies [67, 68] ont étudié le cas de système à multi-rotors en modélisant la fissure par une réduction des moments d'inertie tenant en compte la variation périodique de la rigidité et le mécanisme de respiration de la fissure et ils ont développé la formule suivante :

$$\frac{\frac{\Delta I}{I_0}}{1 - \frac{\Delta I}{I_0}} = \frac{R}{l} (1 - \nu^2) F(\mu) \quad (I-5)$$

Où ΔI est la diminution du moment d'inertie de la section transversale de rayon R due à la fissure de profondeur a . I_0 désigne le moment d'inertie de la section non fissurée et l la longueur de l'élément fissuré et $\mu = \frac{a}{R}$ est la profondeur adimensionnelle de la fissure. $F(\mu)$ désigne la fonction de souplesse (sans dimension) mesurant la perte relative en moment d'inertie due à la présence de la fissure.

Ce modèle de Mayes et Davies [67, 68] est en bonne concordance avec les résultats expérimentaux de Bush [69] et les calculs numériques de Henry [70].

Mayes et Davies [67] ont observé une fermeture partielle de la fissure, figure I.6(b), contrairement au switching modèle figure I.6(a) où $\Delta K(\Omega t)$ désigne la perte de rigidité

périodique due à la fissure et ΔK_{max} sa valeur maximale correspondant à une fissure totalement ouverte.

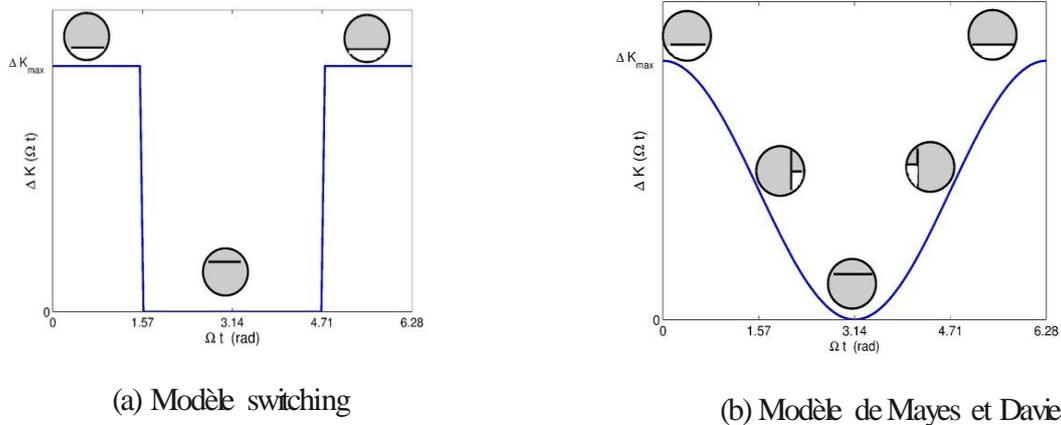


Figure I. 6: Modèles de respiration de la fissure.

Al-Shudeifat et al [71-74] ont étudié théoriquement et expérimentalement l'effet des deux modèles de la fissure sur les fréquences propres, les amplitudes et les orbites ainsi que la stabilité d'un rotor a deux disques et ont développé deux nouvelles fonctions pour la variation des moments d'inertie de la section fissurée et ils ont prouvé expérimentalement que les nouvelles fonctions sont plus précises de celles de Mayes et Davies [67, 68].

I.6. Types des fissures

Sur la base de l'orientation de la fissure par rapport à l'axe de l'arbre de rotor, les fissures sont classées en trois groupes.

- **Fissure transversale** : Ce type des fissures est perpendiculaire à l'axe de l'arbre (Figure.I.7), il se développe si l'arbre est uniquement soumis à des contraintes de flexion, La fissure transversale est le défaut le plus grave et le plus courant qui entraîne des dommages importants aux rotors. Ainsi, ce type est largement étudié par les chercheurs.

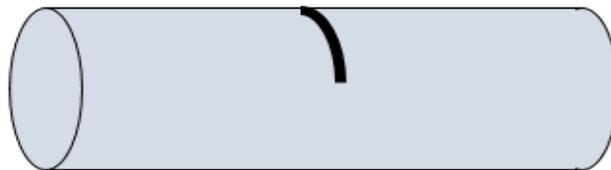


Figure I. 7: Fissure transversale

- **Fissure longitudinale** : Ce type de fissure est parallèle à l'axe de l'arbre et relativement rare et moins grave (Figure.I.8).

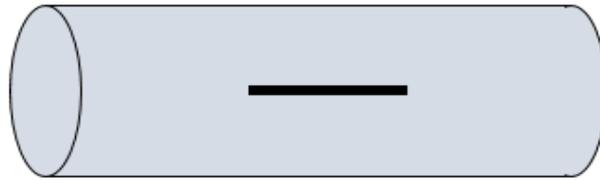


Figure I. 8: Fissure longitudinale.

- **Fissure oblique** : ce type de fissure fait un angle avec l'axe de l'arbre (Figure.I.9) sous l'effet de la torsion et il est identique aux fissures hélicoïdales [75]. Sekhar et al [76] ont conclu que l'effet de la fissure oblique sur la vibration des rotors est inférieur à celui d'une fissure transversale.

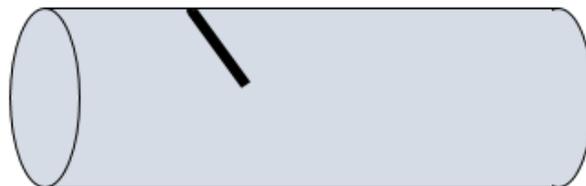


Figure I. 9: Fissure hélicoïdale.

Les fissures qui restent toujours ouvertes sont appelées fissures « béantes ». Ils sont plus correctement appelés « entailles » (Figure I.10). Les fissures sont faciles à imiter dans un laboratoire et la plupart des travaux expérimentaux portent donc sur ce type de fissure

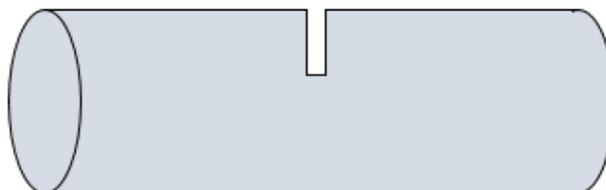


Figure I. 10: Fissure béante.

I.7. Méthodes d'identification des fissures

L'identification des fissures dans les rotors pourrait être réalisée en appliquant des méthodes basées sur la vibration ou sur le modèle. Les méthodes de vibration sont basées sur des mesures de signal directes telles que la réponse ou les fréquences propres ; la modification de

ces mesures aurait pu être attribuée à la fissure. Les méthodes basées sur un modèle prennent en compte, à la place de la fissure ou d'autres défauts, des charges équivalentes donnant le même résultat que la fissure ou les défauts. Sabnavis et al. [77] a publié une revue de littérature en 2004 où ils se sont concentrés sur la détection des fissures en utilisant :

- a) Méthodes basées sur la vibration (signal ou modèle)
- b) Test du model (modifications des modes propres ou des fréquences propres, réponse à une excitation spécifiquement appliquée)
- c) Méthodes non traditionnelles (réseaux de neurones, logique floue, etc.).

I.7.1. Identification basée sur la mesure des fréquences

Lorsqu'une fissure existe dans une poutre ou un arbre, la rigidité est réduite et par conséquent les fréquences propres du système diminuent. Mesurer ces différences peut aider à identifier la fissure. Nikolakopoulos et Papadrakakis [78,79] ont examiné le problème de l'identification de la profondeur et de la position de la fissure dans des structures en utilisant des mesures de fréquences propres. La méthode de base consistait à présenter, via un graphique de contour, la dépendance des deux premières fréquences propres structurelles en fonction de la profondeur et de l'emplacement de la fissure, à l'aide de la méthode des éléments finis. Pour identifier l'emplacement et la profondeur d'une fissure dans une structure, il suffit de déterminer le point d'intersection des contours superposés qui correspond aux variations de fréquence propre mesurées et causées par la présence de la fissure.

Lee et Chung [80] ont présenté une procédure d'évaluation non destructive permettant d'identifier une fissure dans une structure de type poutre monodimensionnel en utilisant des données de fréquence naturelle et MEF. Lele et Maiti [81] ont présenté le problème direct (détermination des fréquences des poutres connaissant les paramètres de la fissure) et indirect (détermination de l'emplacement de la fissure connaissant les fréquences naturelles) dans une poutre de Timoshenko tout en représentant la fissure par un ressort.

Ratan et al [82] ont mesurés les amplitudes aux pics de la transformée de Fourier afin de les utiliser dans un vecteur " résidu " pour identifier et localiser la fissure. Les contours de fréquence relatifs aux profondeurs et aux emplacements des fissures peuvent être utilisés pour identifier la fissure [83].

I.7.2. Identification par mode propre ou par réponse

Les modes propres sont également modifiés dans les structures vibrantes fissurées. Dans ce cas, les mesures de vibration en différents points peuvent être utilisées pour identifier les fissures. Afin d'identifier l'emplacement et la profondeur d'une fissure dans une poutre, Rizos et al. [84] ont utilisé deux mesures à deux positions différentes de la poutre vibrante près de la première valeur de résonance ; une solution analytique de la réponse dynamique est également utilisée.

Un système de détection et de surveillance en ligne des fissures de rotor a été rapporté par Imam et al [51]. Le système est également capable de détecter des fissures lors du démarrage ou de l'arrêt de la machine. Cette technique est basée sur l'approche d'analyse de vibration et sur la modélisation analytique de la dynamique du rotor. Il est capable de détecter des fissures aussi petites que 1% ou 2% du diamètre ou le rotor soumis à une charge de flexion. La validation expérimentale de la technique proposée est également incluse dans ce rapport circonstanciel. Cette technologie est appliquée avec succès sur de nombreux systèmes turbogénérateurs ainsi que sur les pompes de refroidissement verticales de réacteurs nucléaires.

Seibold et Weinert [85] ont présenté la localisation des fissures dans les machines tournantes en fonction des vibrations mesurées. La méthode utilisée est un algorithme d'identification dans le domaine temporel : le filtre de Kalman étendu (EKF). La localisation est réalisée en concevant une banque d'EKF dans laquelle chaque filtre est réglé sur une hypothèse de dommage différente : c'est-à-dire, dans ce cas, l'emplacement spécifique de la fissure. En calculant les probabilités des différentes hypothèses, la fissure peut être localisée et sa profondeur peut être déterminée. La procédure est appliquée à un rotor simulé et à un banc d'essai de rotor.

Dong et al. [86] ont utilisé un modèle continu d'analyse des vibrations et d'identification des paramètres d'un rotor statique (non rotatif) à fissure ouverte, fondé sur deux hypothèses : le rotor fissuré est une poutre d'Euler-Bernoulli à section transversale circulaire, et que la région fissurée est modélisée comme une flexibilité locale avec les méthodes de la mécanique de rupture. En mesurant la flexion en deux points symétriques et en utilisant la méthode d'identification par contour, l'emplacement et la profondeur de la fissure sont prédits.

Karthikeyan et al. [87] identifient la fissure dans une poutre à partir de mesures à réponses libre et forcée.

Gounaris et Papadopoulos [88] ont utilisé une méthode basée sur l'observation selon laquelle les fréquences propres de toute structure fissurée sont différentes de ceux de la structure non fissurée. Les différences sont dues à l'arrêt de la pente des modes propres de vibration à l'emplacement de la fissure. La prémisse de base dans cette section est de corrélérer les différences de mode avec la profondeur et l'emplacement de la fissure. Ces différences corrélées sont choisies pour être :

- (a) le rapport de deux mesures d'amplitude dans deux positions ;
- (b) La distance entre le nœud du mode de vibration et l'extrémité gauche lorsque la structure vibre sous excitation harmonique en condition de résonance.

I.7.3. Identification basée sur l'excitation externe

Une fissure respiratoire dans un arbre en rotation provoque un comportement dynamique non linéaire. Ce comportement peut être observé en mesurant l'amplitude de la vibration en fonction de la vitesse angulaire lors du démarrage ou de l'arrêt de la machine tournante. Bien entendu, il est très intéressant d'identifier les fissures lorsque l'arbre fonctionne à vitesse angulaire constante.

Ishida et al. [89-92] ont utilisé des excitations externes d'arbres fissurés en rotation, provoquant ainsi l'excitation de caractéristiques non linéaires de la fissure afin de l'identifier. De cette façon, la fissure peut être détectée à la vitesse de rotation opérationnelle.

Au lieu de MEF, la méthode de la matrice de transfert peut être utilisée pour modéliser un arbre de Timoshenko fissuré. La solution du problème est donnée uniquement par la multiplication de la matrice $N \times N$ ($N =$ degré de liberté par nœud). Dans le cas de MEF, la dimension de la matrice caractéristique est $N \times$ nombre des nœuds [93].

L'idée des Hwang et Kim [94] était de minimiser les données FFR (few frequency response) mesurées et calculées afin d'identifier les fissures dans les pales du rotor d'hélicoptère.

En utilisant la méthode des éléments finis, Sekhar et Prabhu [95] ont trouvé des modifications dans les fréquences propres où ils ont utilisé ces différences pour détecter la fissure. Ils ont constaté que les changements de fréquences naturelles dus à une fissure sont appréciables avec un faible rapport L / D .

Saavedra et Cuitino [96, 97] ont calculé la matrice de flexibilité locale, puis un modèle d'éléments finis de l'élément fissuré, et l'ont utilisé pour détecter les poutres et le rotor fissurés.

Les pics de vibration se produisant à des fractions rationnelles de la vitesse critique fondamentale de rotation, appelée ici résonances locales, facilitent la détection des arbres fissurés lors de l'arrêt de la machine. Un rotor de Jeffcott modifié sur les roulements de tourillon est utilisé, prenant en compte les effets de la gravité et oscillant autour de points d'équilibre non rival. La sélection de paramètres modaux permet à ce modèle linéaire de représenter les caractéristiques de premier mode de machines réelles. L'évolution des orbites et les schémas vibratoires sont analysés, donnant des résultats utiles. Les résultats de la détection des fissures indiquent qu'au lieu des composants $1X$ et $2X$ de la vitesse critique, l'analyse des résonances locales restantes doit être prioritaire ; cela est dû à une interaction entre le déséquilibre résiduel dans les fissures et à de multiples origines induites. Par conséquent, les résonances locales et les évolutions orbitales autour de $1/2$, $1/3$ et $1/4$ de la vitesse critique sont mises en évidence pour différentes orientations de déséquilibre des fissures.

I.7.4. Identification basée sur le couplage

Lorsqu'une fissure superficielle transversale existe sur un arbre, il existe un couplage entre différents modes de vibration. Ce phénomène a été signalé pour la première fois pour les vibrations longitudinales et de flexion par Papadopoulos et Dimarogonas [98], puis pour les vibrations de flexion et de torsion.

Dans le travail de Wauer J. [99], les équations de champ régissant un arbre en rotation de Timoshenko ont été dérivées, y compris les vibrations axiales et en torsion ainsi que les conditions aux limites. Le couplage flexion-torsion et flexion-longitudinale est également démontré.

Les termes non diagonaux de la matrice de compliance qui modélisent une fissure permettent d'exprimer numériquement les observations relatives à l'existence d'un couplage entre différents modes de vibrations. L'existence du couplage est également proposée comme indication de la fissure, même si le couplage existe également en raison d'asymétries ou en raison déséquilibré [100]. Le couplage dû à une fissure introduit dans le spectre de vibration de nouvelles caractéristiques discrètes qui auraient pu être attribuées uniquement à une fissure [101].

Gounaris et al. [102] ont utilisé le phénomène de couplage comme outil d'identification pour la détermination de la profondeur et de la localisation d'une fissure transversale à la surface d'une poutre de Timoshenko. Une force harmonique est utilisée pour exciter la poutre. Deux

méthodes de réponse en un point sont requises par la méthode. La première mesure est prise dans le sens de l'excitation, la seconde dans la direction où se produit l'effet de couplage dû à la fissure. Il sera démontré que l'identification de l'existence de la fissure est réalisable s'il existe une réponse avec un degré de liberté autre que celui de l'excitation. Cette méthode peut être appliquée dans structures dans l'air aussi bien que sous l'eau.

Gounaris et Papadopoulos [103] ont utilisé la propriété des vibrations couplées introduites par une fissure afin d'identifier une fissure dans un arbre fissuré en rotation. L'arbre a été modélisé comme une poutre Timoshenko en rotation, incluant l'effet gyroscopique et les vibrations axiales dues au couplage. La méthode utilisée était basée sur les mesures de la réponse en vibration axiale due à différentes fréquences d'excitation et à différentes révolutions de l'arbre.

Le modèle simple de rotor Jeffcott est considéré par Darpe et al. [104], analysant la réponse d'un rotor à vitesse angulaire constante sous excitation axiale de fréquences différentes. Cette impulsion axiale périodique est transmise aux rotors fissurés et non fissurés et les spectres de vibration présentent des différences nettes indiquant l'existence d'une fissure. Poursuivant cet effort, Darpe et al. [105] ont examiné ce phénomène à titre expérimental. Ils ont fourni les résultats analytiques ci-dessus pour les arbres rotatifs et non rotatifs, en les excitants par une excitation axiale de fréquences différentes. Plus tard en 2004, Darpe et al. [105] ont également étudié le couplage entre les vibrations longitudinales, latérales et torsionnelles d'un arbre fissuré en rotation en utilisant un modèle de fissure respiratoire non linéaire dépendant de la réponse. Ils ont signalé la présence de sommes ou / et différences de fréquences dans les spectres de vibration attribuées à la non-linéarité due au modèle de fissure respiratoire. Ils ont proposé la coexistence de fréquences d'autres modes dans les spectres de fréquences d'un mode particulier et la présence de fréquences de somme et de différence autour des fréquences d'excitation et de leurs harmoniques comme indicateurs utiles pour le diagnostic des fissures.

Dado et Abuzeid [106] ont présenté le comportement vibratoire d'une poutre de section transversale rectangulaire supportant une masse d'extrémité et une inertie rotative. Ils ont étudié le couplage entre les vibrations longitudinales et de flexion et modélisé la fissure à l'aide de la matrice de conformité pour les charges axiales et de flexion.

Al-Said et al. [107] ont proposé un modèle simple décrivant les caractéristiques de vibration en flexion d'une poutre de Timoshenko en rotation et fissuré. La poutre fissurée est modélisée à l'aide de deux segments uniformes reliés par un ressort de torsion sans masse à

l'emplacement de la fissure. L'équation du mouvement est déterminée en utilisant la méthode de Lagrange en conjonction avec la méthode en mode supposé. Le modèle proposé est utilisé pour étudier l'effet de la profondeur de la fissure, de la déformation en cisaillement et de la vitesse de rotation sur les caractéristiques dynamiques de la poutre, et pour comparer les résultats avec ceux obtenus à l'aide du modèle de poutre Euler-Bernoulli largement utilisé. On montre que pour une même profondeur de fissure, le modèle proposé présente une réduction de fréquence plus élevée que celle de la poutre d'Euler-Bernoulli. La vérification du modèle est effectuée à l'aide d'une analyse par éléments finis tridimensionnels, qui montre un bon accord avec les résultats supposés pour le mode.

I.7.5. Identification basée sur des modèles

Dans l'identification basée sur un modèle, le changement induit par la défaillance du système de rotor est pris en compte par des charges équivalentes dans le modèle mathématique. Ces charges équivalentes sont des forces et moments virtuels agissant sur le système linéaire non endommagé pour générer un comportement dynamique identique à celui mesuré dans le système endommagé. La méthode a été présentée pour la première fois par Isermann [108] pour la détection de défauts de processus techniques. Cette méthode a été appliquée sur la base des informations extraites de signaux mesurés directement, de modèles de signaux et de modèles de processus.

Seibold et Weinert [85] ont utilisé un algorithme d'identification dans le domaine temporel afin de localiser les fissures dans les machines tournantes.

Bachschnid et Dellupi [109] ont utilisé une procédure basée sur un modèle pour identifier les forces non linéaires de films d'huile linéaires et non linéaires dans des roulements.

Bachschnid et al. [110] ont utilisé une approche de diagnostic basée sur la méthode des moindres carrés dans le domaine fréquentiel pour identifier la position et la profondeur d'une fissure transversale le long du rotor. La profondeur de la fissure est calculée en comparant le moment de flexion statique, dû au poids du rotor et aux conditions d'alignement des roulements, au moment de flexion périodique « équivalent » identifié, qui simule la fissure.

La méthode basée sur un modèle a également été présentée par Markert et al. [111] pour résoudre l'identification en ligne des dysfonctionnements dans les systèmes à rotor. Le changement induit par la panne dans le système de rotor est pris en compte par des charges équivalentes. La méthode d'identification est basée sur des algorithmes d'ajustement des moindres carrés dans le domaine temporel.

Dharmaraju et al. [112,113] ont appliqué des techniques d'ingénierie indirectes pour estimer les paramètres de modèle du système à partir des mesures expérimentales force-réponse. Dans ce travail, un algorithme d'identification général a été développé pour estimer les coefficients de flexibilité de la fissure et la profondeur de la fissure sur la base des informations force-réponse. La fissure de surface transversale est considérée comme restant ouverte. La fissure a été modélisée par une matrice de flexibilité locale à quatre degrés de liberté et contient des termes diagonaux et non diagonaux.

Sekhar [114,115] a modélisé à l'aide de MEF un système de roulement de rotor, la fissure est prise en compte par le changement de flexibilité local. La fissure a été identifiée quant à sa profondeur et à son emplacement sur la structure. La nature et les symptômes de la fissure, sont déterminés à l'aide de la transformée de Fourier rapide. En 2005 [114], il a examiné le problème des rotors multi-endommagés (balourd et fissure) utilisant à la fois une expansion modale et une expansion dynamique de base réduite.

Pennacchi et al. [116] ont présenté une méthode d'identification par modèle adaptée aux machines industrielles. La méthode d'identification et la théorie relative sont brièvement présentées, tandis que trois types de fissures sont considérés : le premier est une entaille et il n'y a pas réellement de fissure car il n'a pas de comportement respiratoire typique, le second est une petite fissure (14% des diamètres) et le troisième une fissure profonde (47% du diamètre). L'excellente précision obtenue dans l'identification de la position et de la profondeur de différentes fissures prouve l'efficacité et la fiabilité de la méthode proposée.

CHAPITRE II

Mise en équation

Table des matières

II.1 : Introduction	23
II.2 : Hypothèses	23
II.3 : Détermination des énergies des éléments de rotor	24
II.3.1. Disque	25
II.3.2. Arbre	27
II.3.2.1. Energie cinétique	27
II.3.2.2. Energie de déformation	28
III.3.3. Balourd	30
II.3.4. Paliers.....	32

II.1 : Introduction

Ce chapitre a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor. Les caractéristiques de chaque élément composant le rotor sont d'abord développées pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation. On utilise un repère tournant principalement pour l'étude des disques. Dans le contexte qui nous intéresse, celui de la dynamique d'ensemble, le repère fixe est plus adapté.

Lors de la mise en équation, on utilise les angles d'Euler pour d'écrire le mouvement d'un élément de rotor, comme pour le mouvement général de tout solide. On suppose que la vitesse de rotation est constante, ou tout au moins qu'il s'agit d'une fonction connue du temps. Les vibrations axiales et de torsion se trouvent de plus découplées des vibrations de flexion, auxquelles on s'intéresse plus particulièrement en dynamique d'ensemble.

Dans cette partie on va mettre en équation le rotor afin de développer l'équation de mouvement à partir de la méthode de l'équation de Lagrange.

II.2 : Hypothèses

Le rotor est composé généralement d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Dans cette étude, les sollicitations prises en compte sont le balourd et les déplacements imposés du support supposé rigide. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des énergies cinétiques et de déformation des différents composants du rotor en appliquant les équations de Lagrange. La démarche utilisée est identique à celle développée par Lalanne et Ferraris [118].

Les hypothèses suivantes sont retenues :

- L'arbre est déformable.
- Les disques sont rigides.
- Le rotor tourbillonne à une vitesse constante.
- Les possibles asymétries de l'arbre et des disques ne sont pas prises en compte.

Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels.

L'établissement des équations du mouvement nécessite les étapes suivantes :

- Calcul des différentes énergies des composants du système : énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd, énergie de déformation de l'arbre, et travail virtuel des forces extérieures.
- Application des équations de Lagrange qui sont de la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (\text{II-1})$$

Où N ($1 \leq i \leq N$) est le nombre de degrés de liberté, les q_i sont les coordonnées généralisées et les Q_i sont les forces extérieures. Le symbole $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée par rapport au temps.

II.3 : Détermination des énergies des éléments de rotor

L'arbre est modélisé par une poutre de type Euler-Bernoulli. Le disque est modélisé par une masse concentrée et d'inertie en rotation. Le rotor est supporté par des paliers représentés par des raideurs et des amortissements ponctuels.

En plus de la rotation autour de son axe longitudinal y , l'arbre a deux translations orthogonales $u(x, t)$ et $w(z, t)$ dans le plan du disque.

Pour l'expression des énergies cinétiques de l'arbre et du disque, le vecteur de vitesse et rotation du repère R par rapport au repère R_0 doivent être calculés.

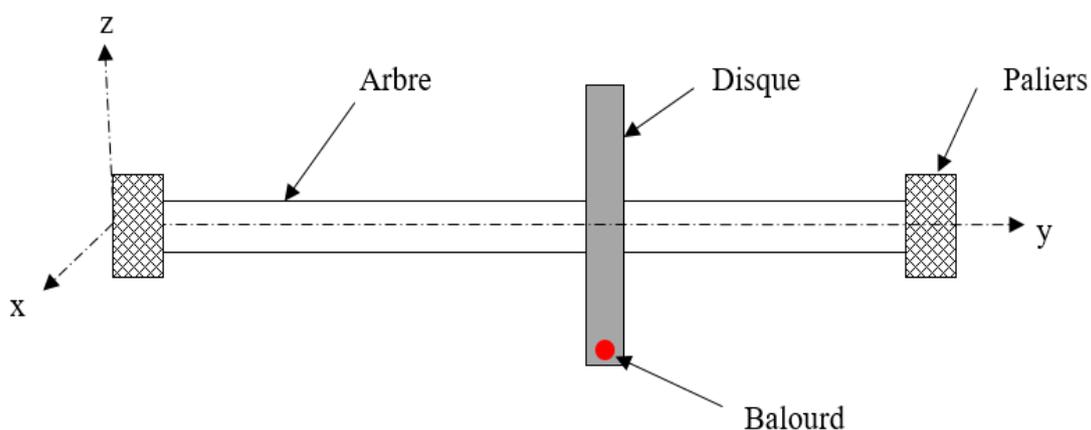


Figure II. 1: Modèle d'un rotor avec un disque supporté par deux paliers.

II.3.1. Disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient $R_0 (X, Y, Z)$ repère fixe et $R(x,y,z)$ un repère tournant lié au disque (Figure. II.2). Le système de coordonnées x, y et z , est relié au système de coordonnées X, Y et Z par l'intermédiaire des angles θ_z, θ_x et θ_y pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle θ_z autour de l'axe Z puis d'un angle θ_x autour du nouvel axe x , noté x_1 , enfin d'un angle θ_y autour de l'axe de rotation propre du disque y .

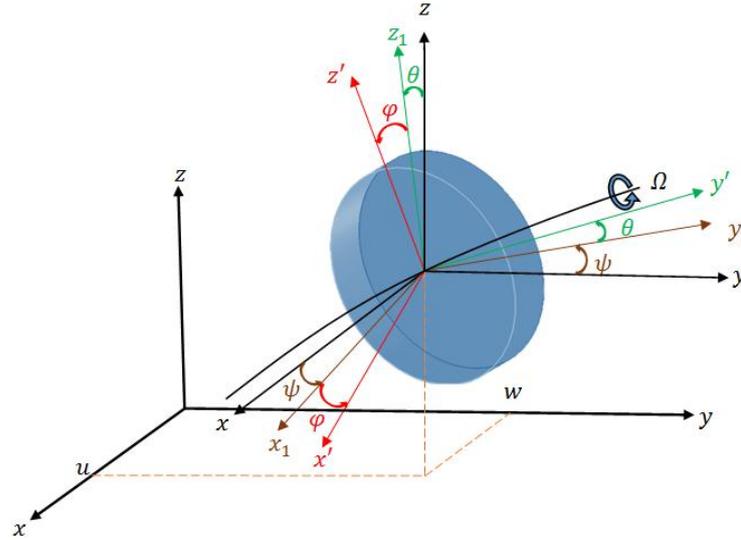


Figure II. 2: Repère fixe liée au support et repère tournant liée au disque.

Le vecteur de rotation instantanée traduisant la position du repère R s'écrit :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y}' \quad (\text{II-2})$$

Où \vec{Z} , \vec{x}_1 et \vec{y}' sont les vecteurs unitaires suivant les axes \overline{OZ} , \overline{Ox}_1 et \overline{Oy}'

L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse O est calculée dans le repère tournant R . la vitesse de rotation du solide s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ \dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{pmatrix} \quad (\text{II-3})$$

ω_x, ω_y et ω_z sont les composants du vecteur de rotation instantanée suivant x, y et z .

Soient u et w les coordonnées du centre du disque O suivant OX, OZ dans le repère fixe R_0 , la coordonnée suivant OY restant constante.

I_d est le tenseur d'inertie principal, exprimé dans le repère lié au disque:

$$I_d = \begin{bmatrix} I_{d_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d_z} \end{bmatrix} \quad (\text{II-4})$$

I_{d_x} , I_{d_z} et I_{d_y} sont les moments d'inertie du disque suivant les axes x , y et z .

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque T_d s'écrit alors :

$$T_d = T_d^{trans} + T_d^{rot} = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{R/R_0}^R I_d \vec{\omega}_{R/R_0}^R \quad (\text{II-5})$$

m_d est la masse du disque.

Le disque tourne avec le rotor autour de son axe principal à la vitesse constante $\dot{\theta}_y = \Omega$, les angles θ_z et θ_x sont petits d'où l'on peut faire les approximations $\cos \theta \sim 1$ et $\sin \theta \sim \theta$. Dans ce cas le vecteur de rotation devient :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_z \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \Omega + \dot{\theta}_z \theta_x \\ \dot{\theta}_z \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{pmatrix} \quad (\text{II-6})$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} T_d^{rot} &= \frac{1}{2} I_{d_x} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{d_y} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{d_z} \omega_z^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{d_x} (-\dot{\theta}_z \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y)^2 + \frac{1}{2} I_{d_y} (\Omega + \dot{\theta}_z \theta_x)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{d_z} (\dot{\theta}_z \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y)^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{d_x} (\dot{\theta}_z^2 \sin^2 \theta_y + \dot{\theta}_x^2 \cos^2 \theta_y - 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \cos \theta_y \sin \theta_y) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{d_y} (\Omega^2 + \dot{\theta}_z^2 \theta_x^2 + 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{d_z} (\dot{\theta}_z^2 \cos^2 \theta_y + \dot{\theta}_x^2 \sin^2 \theta_y + 2\dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \cos \theta_y \sin \theta_y) \quad (\text{II-7}) \end{aligned}$$

Où $I_{d_x}, I_{d_y}, I_{d_z}$ représentent les moments d'inertie du disque par rapport à ses axes principaux d'inertie. Puisque le disque est symétrique on a $I_{d_x} = I_{d_z}$ et les termes $\dot{\theta}_z^2 \dot{\theta}_x^2$ qui sont d'un ordre élevé peuvent être négligés. L'énergie cinétique de rotation du disque deviendra donc :

$$T_d^{rot} = \frac{1}{2}I_{dx} (\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2}I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\theta}_z\theta_x)$$

$$T_d^{trans} = \frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (\text{II-9})$$

L'énergie cinétique totale du disque est donc définie par :

$$T_d = T_d^{trans} + T_d^{rot} = \frac{1}{2}m_d(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{dx} (\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2}I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\theta}_z\theta_x) \quad (\text{II-10})$$

Cette expression fait apparaître les termes classiques de la dynamique des rotors :

- $\frac{I_{dy}}{2}\Omega^2$: Terme constant représentant l'énergie de rotation du disque. Il n'a pas d'influence sur les équations du mouvement.
- $\frac{m_d}{2}(\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$: énergie cinétique d'un élément en translation dans un plan.
- $\frac{I_{dx}}{2}(\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2)$: énergie cinétique de rotation d'un élément autour des axes x et z.
- $I_{dy}\Omega\dot{\theta}_z\theta_x$: effet gyroscopique (Coriolis).

Où :

$$m_d = \pi(R^2 - r^2)e_d\rho_d \quad (\text{II-11})$$

$$I_{dx} = \frac{m_d}{12}(3r^2 + 3R^2 + e_d^2) \quad (\text{II-12})$$

$$I_{dz} = \frac{m_d}{12}(3r^2 + 3R^2 + e_d^2) \quad (\text{II-13})$$

$$I_{dy} = \frac{m_d}{12}(r^2 + R^2) \quad (\text{II-14})$$

II.3.2. Arbre

L'arbre est considéré comme une poutre déformable de section circulaire définie par l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

II.3.2.1. Energie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque. Pour un élément de longueur L, de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T_a = \frac{1}{2}\rho S \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2)dy + \rho \frac{I_a}{2} \int_0^L (\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2)dy + 2\rho I_a \Omega \int_0^L \dot{\theta}_z\theta_x dy + \rho I_a L \Omega^2 \quad (\text{II-15})$$

Cette expression fait apparaître des termes classiques en dynamique des rotors :

- $\rho I_a L \Omega^2$: Un terme constant, représente l'énergie de rotation de l'arbre, il a une contribution nulle dans les équations du mouvement.
- $2\rho I_a \Omega \int_0^L \dot{\theta}_z \theta_x dy$: un terme représente l'effet gyroscopique.
- $\frac{\rho I_a}{2} \int_0^L (\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_x^2) dy$: effet secondaire de l'inertie de rotation.
- $\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$: expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.

Les autres termes sont dus au mouvement du rotor. Les mêmes remarques pour le disque peuvent être faites quant à la symétrie des équations obtenues.

II.3.2.2. Energie de déformation

Le calcul de l'énergie de déformation de l'arbre s'effectue en considérant le cas d'une poutre flexible en rotation sans déformation à l'effort tranchant.

Considérant le point C comme centre géométrique et $B(x, z)$ un point de la section transversale de l'arbre et supposant que ε et σ représentent successivement la déformation et la contrainte suivant l'axe de l'arbre.

Soit u^* et w^* les déplacements du centre géométrique de l'arbre par rapport au repère tournant $R(x,y,z)$ (Figure III.6), le déplacement suivant y supposé négligeable.

La déformation longitudinale au point B est donnée par l'expression :

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{II-16})$$

L'énergie de déformation est donnée par :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_{(V)} \varepsilon \sigma dV \quad (\text{II-17})$$

Compte tenu de la loi de Hooke $\sigma = \varepsilon E$ qui donne la relation entre les contraintes et les déformations, on a :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{(V)} \varepsilon^2 dV \quad (\text{II-18})$$

Alors l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{(V)} \left[-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right]^2 dV \quad (\text{II-19})$$

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{(V)} \left[\left(x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (\text{II-20})$$

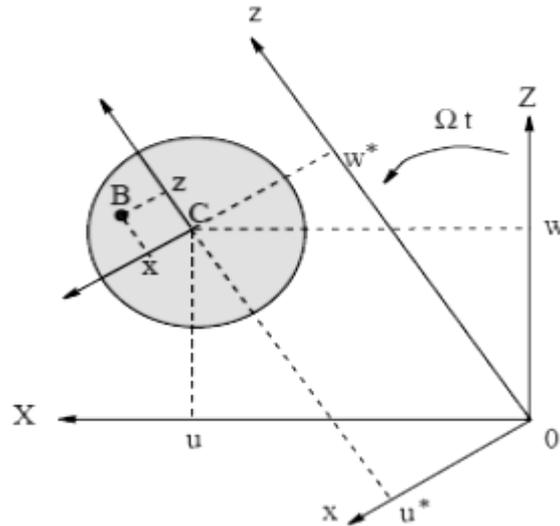


Figure II. 3: Coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor.

Le troisième terme de l'intégrale est nul par suite de la symétrie de la section, d'où :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \int_{(s)} \left[\left(x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dS dy \quad (\text{II-21})$$

En introduisant les inerties diamétrales de la section,

$$I_x = \int_{(s)} z^2 dS ; I_z = \int_{(s)} x^2 dS \quad (\text{II-22})$$

L'énergie de déformation a donnée par l'expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[\left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy \quad (\text{II-23})$$

Pour exprimer l'énergie de déformation dans le repère fixe R_0 ; on utilise les relations de passage u^* et w^* en fonction de u et w (Figure .II.6), soient :

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

Comme on a pour le cas de l'arbre symétrique $I_x = I_z = I_a$, l'énergie de déformation s'écrit :

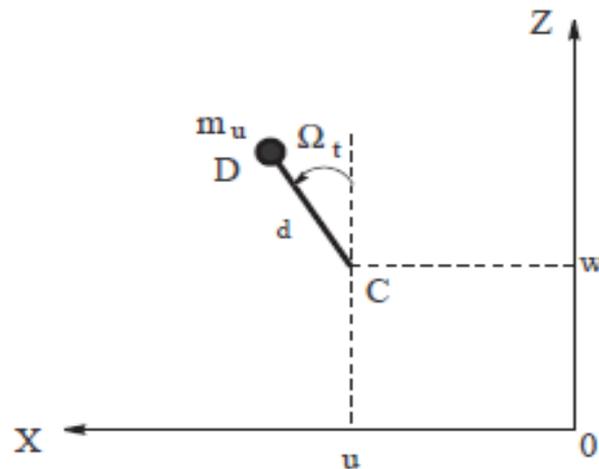
$$U_a = \frac{EI_a}{2} \int_0^L \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos \Omega t - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \Omega t \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \Omega t + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \right)^2 \right) \right] dy \quad (\text{II-25})$$

Et finalement, on a :

$$U_a = \frac{EI_a}{2} \int_0^L \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy \quad (\text{II-26})$$

III.3.3. Balourd

Le balourd dont une représentation géométrique est donnée (Figure II.7) représenté à une masse m_u localisée à la distance d du centre de la section de l'arbre. Son énergie cinétique doit être prise en compte.



II. 4: Masse de balourd.

Pour modéliser d'une façon simple le balourd, il est décomposé en masses concentrées posées dans différents plans comme illustré dans la figure II.5. Ces masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor.

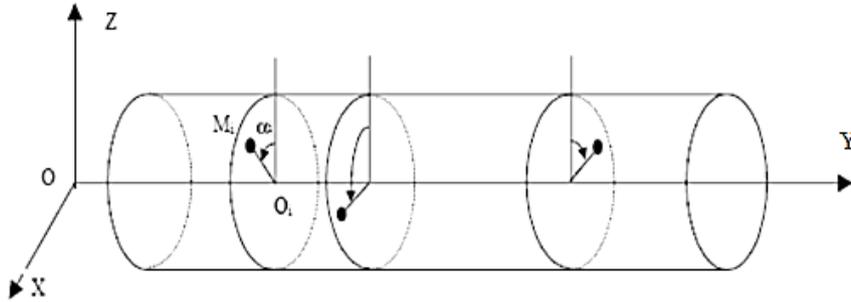


Figure II. 5: Modélisation de la distribution de balourd.

La masse est toujours perpendiculaire à l'axe de rotation y , alors la coordonnée de cette masse est constante par rapport à l'axe y dans le repère R_0 :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{cases} u + d \sin \Omega t \\ cte \\ w + d \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{cases} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{cases} \quad (\text{II-28})$$

L'énergie cinétique de balourd est donnée par :

$$T_{Bal} = \frac{1}{2} m_u (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \sin \Omega t - 2\Omega d \dot{w} \cos \Omega t) \quad (\text{II-29})$$

Comme le terme $\frac{1}{2} m_u \Omega^2 d^2$ qui est constant, est négligeable, il n'influe donc pas dans l'équation. La masse du balourd étant petite par rapport à la masse de rotor, la formule approximative de l'énergie cinétique est donnée par :

$$T_{Bal} = m_u \Omega d (\dot{u} \sin \Omega t - \dot{w} \cos \Omega t) \quad (\text{II-30})$$

II.3.4. Paliers

Les paliers induisent des forces extérieures agissant sur l'arbre par leurs caractéristiques de raideurs et d'amortissement. Ces caractéristiques sont sur le plan de la section droite selon les directions montrées sur la figure suivante :

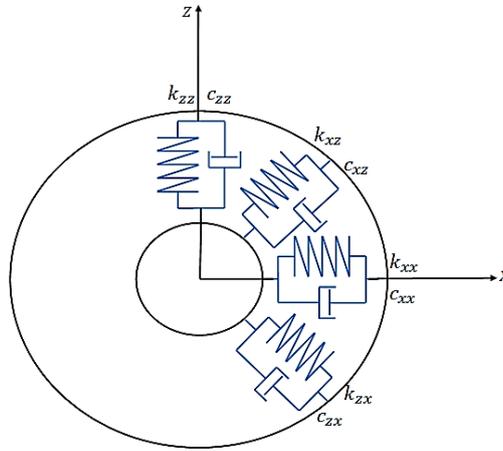


Figure II. 6: Amortissement et raideur de palier.

Le travail virtuel δWp des forces extérieures agissant sur l'arbre est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta Wp = & -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w \\ & -c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \end{aligned} \quad (\text{III} - 31)$$

Le travail virtuel des forces agissant sur l'arbre s'écrit :

$$\delta Wp = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (\text{II-32})$$

Ou F_u et F_w sont les forces généralisées :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{II-33})$$

- $k_{xx}, k_{zz}, c_{xx}, c_{zz}$ sont les rigidités et les amortisseurs selon les directions x et z de l'arbre.
- $k_{xz}, k_{zx}, c_{xz}, c_{zx}$ sont les rigidités et les amortissements dans une direction (x ou z) mais affectés par l'autre direction. Ils représentent des constantes d'accouplement.

CHAPITRE III

Modélisation du rotor par la version h de la méthode des éléments finis

Tables des matières

III.1.	Introduction	34
III.2.	Expressions des énergies des éléments du rotor	34
III.2.1.	Energie de déformation d'un élément de rotor	35
III.2.2.	Energie cinétique d'un élément de rotor	36
III.3.	Formulation matricielle	36
III.3.1.	Formulation matricielle des équations du disque	36
III.3.2.	Formulation matricielle des équations de l'arbre	38
III.3.3.	L'énergie cinétique	40
III.3.4.	L'énergie de déformation	42
III.3.5.	Formulation matricielle des équations du palier	44
III.3.6.	Formulation matricielle des équations du balourd	44
III.3.7.	Modélisation d'une fissure transversale	44
III.4.	Equation dynamique du rotor fissuré	47

III.1. Introduction

La méthode des éléments finis est apparue pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Son champ d'application dépasse le domaine du génie mécanique. Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh Ritz qui permet de traiter facilement des systèmes d'équations complexes ou de hauts degrés causés par une complexité des formes géométriques et des conditions aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation).

En dynamique des structures, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles qui modélisent le mouvement en équations différentielles temporelles.

III.2. Expressions des énergies des éléments du rotor

La méthode des éléments finis classique, ou version h , consiste à discrétiser la structure en éléments de dimensions finis qui sont reliés par des points nommés points nodaux ou nœuds situés sur leur contour. A partir d'hypothèses raisonnables sur le déplacement d'un point de l'élément, les énergies cinétiques, de déformation et de dissipation de l'élément sont calculées en fonction des déplacements des nœuds.

Pour une structure composée de N éléments nous avons :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad \text{(III-1)}$$

$$R = \sum_{i=1}^N R_i \quad \text{(III-2)}$$

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad \text{(III-3)}$$

Où U_i est l'énergie de déformation ; T_i est l'énergie cinétique et R_i est la fonction de dissipation de l'élément i . Les forces généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces extérieures. Dans la dynamique des rotors R_i sont négligés quand les systèmes tournent à grandes vitesses.

III.2.1. Energie de déformation d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{(V)} \varepsilon^t \sigma dV \quad (\text{III-4})$$

Le vecteur de déplacement δ d'un point de l'élément est relié au vecteur d regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire d'une matrice $N(y)$. Ceci donne une relation de la forme :

$$d = N(y)\delta \quad (\text{III-5})$$

Après dérivation du vecteur d par rapport à y , on trouve :

$$\varepsilon = \frac{\partial d}{\partial y} = B(y)\delta \quad (\text{III-6})$$

La matrice $B(y)$ est la matrice qui relie les déformations aux déplacements nodaux.

L'expression de l'équation qui relie les contraintes et les déformations est donnée par :

$$\sigma = [D] \varepsilon \quad (\text{III-7})$$

La matrice $[D]$ est une matrice carrée symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, généralement le module de Young E et le coefficient de poisson ν .

En substituant les équations (III-6) et (III-7) dans (III-4) on obtient l'équation :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{(V)} [(B(y)\delta)^t (D B(y) \delta)] dV \quad (\text{III-8})$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t \left[\int_{(V)} (B^t D B) dV \right] \delta \quad (\text{III-9})$$

L'équation (III-9) peut se mettre sous la forme :

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t [K_e] \delta \quad (\text{III-10})$$

Où $[K_e] = \left[\int_{(V)} B^t D B dV \right]$

Qui $[K_e]$ est la matrice raideur de l'élément qui est symétrique car la matrice $[D]$ est symétrique ainsi que la matrice produit $(B^t D B)$.

III.2.2. Energie cinétique d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément est :

$$T = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho v^2 dV \quad (\text{III-11})$$

Où ρ est la masse volumique d'un élément d'arbre et v est d'un élément de l'arbre de volume V .

La vitesse v est obtenu par la dérivation du déplacement d par rapport au temps :

$$v = N(y) \frac{d\delta}{dt} = N(y) \dot{\delta} \quad (\text{III-12})$$

En substituant l'équation (III-12) dans (III-11) et en considérant que $v^2 = (N\dot{\delta})^t (N\dot{\delta})$, on aura :

$$T = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho (N\dot{\delta})^t (N\dot{\delta}) dV \quad (\text{III-13})$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t \left[\int_{(V)} \rho N^t N dV \right] \dot{\delta} \quad (\text{III-14})$$

On peut écrire l'équation (III-14) sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t [M_e] \dot{\delta} \quad (\text{III-15})$$

Où $[M_e] = \left[\int_{(V)} \rho N^t N dV \right]$

La matrice $[M_e]$ est la matrice masse d'un élément d'arbre qui est aussi symétrique comme la matrice $[K_e]$.

III.3. Formulation matricielle

III.3.1. Formulation matricielle des équations du disque

Le disque est modélisé par un nœud possédant deux degrés de liberté ; deux translations u et w et deux rotations θ_x et θ_z autour des axes x et z (Figure III.1) où les rotations sont les dérivées des translations (2 liaisons).

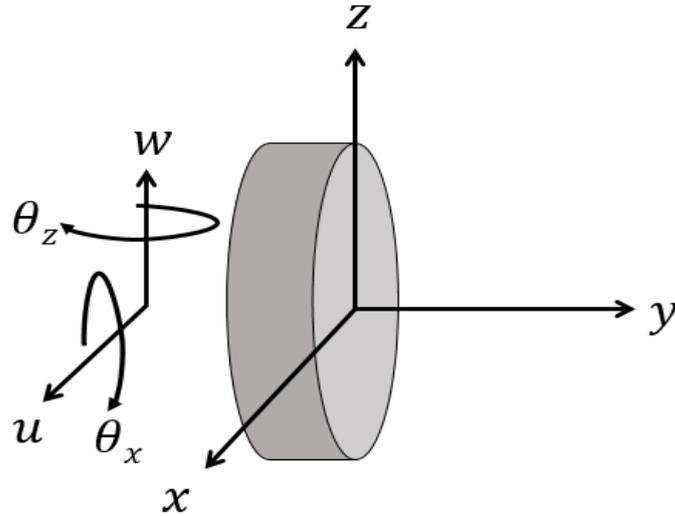


Figure III.1: Degrés de liberté du disque.

Le vecteur des déplacements nodaux du disque δ s'écrit sous la forme :

$$\delta = [u, w, \theta_x, \theta_z]^t \quad (\text{III-16})$$

La matrice masse $[Md]$ et la matrice gyroscopique $[Gd]$ sont obtenues en appliquant l'équation de Lagrange à l'expression (II-10), soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left[\frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\theta}_z\theta_x) \right] \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial \delta_i} &\left\{ \left[\frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\theta}_z\theta_x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} \\ &= \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \\ 0 & 0 & -I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \\ &= [M_d] \ddot{\delta} + [G_d] \dot{\delta} \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

III.3.2. Formulation matricielle des équations de l'arbre

Les résultats présentés concernent le cas d'un élément arbre symétrique qui est modélisé par un élément poutre Euler-Bernoulli de section circulaire constante. L'élément fini utilisé a deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud (figure III.2).

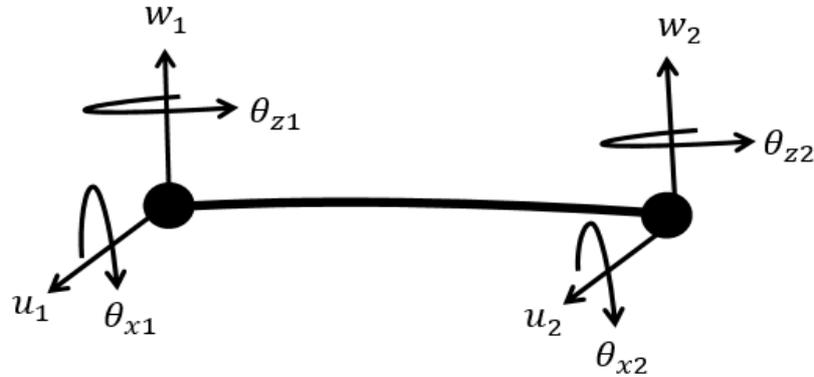


Figure III. 2: Degrés de liberté d'un élément de l'arbre.

La fonction des déplacements w ou u qui sont normale à la poutre (arbre) sont donnée par le polynôme d'interpolation du 3^{ème} degré donné par.

$$w(y) = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3 \quad (\text{III-19})$$

La rotation θ_z autour de z est donnée par la dérivée de la fonction de déplacement w .

$$\theta_z = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = b_2 + 2 b_3 y + 3 b_4 y^2 \quad (\text{III-20})$$

Les constantes b_1, b_2, b_3 et b_4 sont déterminées en appliquant les conditions aux limites sur les polynômes (III-19) et (III-20).

Pour $y = 0$ (nœud 1) on a
$$\begin{cases} w_1 = b_1 \\ \theta_{z1} = b_2 \end{cases} \quad \text{systeme (a)}$$

Pour $y = L$ (nœud 2) on a
$$\begin{cases} w_2 = b_1 + b_2 L + b_3 L^2 + b_4 L^3 \\ \theta_{z2} = b_2 + 2 b_3 L + 3 b_4 L^2 \end{cases} \quad \text{systeme (b)}$$

Après avoir résolu le système (b) et en remplaçant les constantes b_1 et b_2 par leurs valeurs on trouve :

$$\begin{cases} b_1 = w_1 \\ b_2 = \theta_{z_1} \\ b_3 = 3 \frac{w_2 - w_1}{L^2} - 3 \frac{\theta_{z_2} + 2 \theta_{z_1}}{L} \\ b_4 = -2 \frac{w_2 - w_1}{L^3} + \frac{\theta_{z_1} + \theta_{z_2}}{L^2} \end{cases} \quad (\text{III-21})$$

On remplace les valeurs des constantes b_1, b_2, b_3, b_4 dans l'expression (III-19):

$$w(y) = \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}\right) w_1 + \left(y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_{z_1} + \left(\frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}\right) w_2 + \left(-\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_{z_2} \quad (\text{III-22})$$

Le vecteur des déplacements et rotations nodaux d'un élément de l'arbre à deux nœuds dans les deux directions est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{z_1}, u_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{z_2}]^t \quad (\text{III-23})$$

Ce vecteur est séparé en deux vecteurs de déplacements dont chacun correspond à une direction

$$\delta_u = [u_1, \theta_{x_1}, u_2, \theta_{x_2}]^t \quad (\text{III-24})$$

$$\delta_w = [w_1, \theta_{z_1}, w_2, \theta_{z_2}]^t \quad (\text{III-25})$$

Les déplacements sont exprimés à partir des expressions suivantes :

$$u = N_1(y) \delta_u \quad (\text{III-26})$$

$$w = N_2(y) \delta_w \quad (\text{III-27})$$

où N_1 et N_2 sont les vecteurs des fonctions de forme classiques d'un élément de poutre en flexion [123] :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}\right] \quad (\text{III-28})$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right] \quad (\text{III-29})$$

Où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont obtenues en posant $u(y) = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3$

Les expressions des rotations θ_x et θ_z en fonctions des déplacements u et w sont données par les formules suivantes :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{III-30})$$

$$\theta_z = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{III-31})$$

Le nombre total de degrés de liberté pour chaque nœud est deux; les matrices élémentaires de l'arbre sont donc de taille 8 x 8 qui sont obtenues en remplaçant u , w , θ_x , θ_z par leurs expressions dans les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.

III.3.3. L'énergie cinétique

Le remplacement des équations (III-26) et (III-27) dans l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre (II-15) conduit à :

$$\begin{aligned} T_a = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta_u^t N_1^t N_1 \delta_u + \delta_w^t N_2^t N_2 \delta_w] dy \\ & + \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta_u^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta_u + \delta_w^t \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_w \right] dy + \rho I_a L \Omega^2 \\ & + 2\rho I_a \Omega \int_0^L \left[\delta_u^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta_w \right] dy \end{aligned} \quad (\text{III-32})$$

On peut simplifier l'équation précédente (III-32), On aura :

$$\begin{aligned} T_a = & \frac{1}{2} \delta_u^t [M_1] \delta_u + \frac{1}{2} \delta_w^t [M_2] \delta_w + \frac{1}{2} \delta_u^t [M_3] \delta_u + \delta_w^t [M_4] \delta_w + \delta_u^t [M_5] \delta_w \\ & + \rho I_a L \Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{III-33})$$

Les matrices obtenues sont de l'ordre 4 x 4. $[M_1]$ et $[M_2]$ sont les matrices classiques de masse, $[M_3]$ et $[M_4]$ représentent l'effet secondaire de l'inertie de rotation de la section droite de l'arbre. La matrice $[M_5]$ représente l'effet gyroscopique. Le terme $\rho I_a L \Omega^2$ est un constant à une contribution nulle lors de l'application des équations de Lagrange.

Par l'application de l'équation de Lagrange, L'expression (III-33) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = [M_e] \dot{\delta} + [G_e] \delta \quad (\text{III-34})$$

Les matrices $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$, $[M_4]$, et $[M_5]$ sont les suivantes :

$$[M_1] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-35})$$

$$[M_2] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-36})$$

$$[M_3] = \frac{\rho I_a}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-37})$$

$$[M_4] = \frac{\rho I_a}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-38})$$

$$[M_5] = \frac{\rho I_a \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-39})$$

Rassemblons les matrices $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$, $[M_4]$, et $[M_5]$ qui ont les mêmes propriétés où $[M_c] = [M_1] + [M_2]$ et $[M_r] = [M_3] + [M_4]$, La matrice élémentaire de masse $[M_e] = [M_c] + [M_r]$

$$[M_c] = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-40})$$

$$[M_r] = \frac{\rho I_a}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-41})$$

$$[G_e] = \frac{\rho I_a \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-42})$$

III.3.4. L'énergie de déformation

Le remplacement des équations (III-26) et (III-27) dans l'expression de l'énergie de déformation de l'arbre (II-26) conduit à :

$$U_a = \frac{EI_a}{2} \int_0^L \left[\delta_u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta_u + \delta_w^t \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta_w \right] dy \quad (\text{III-43})$$

$$U_a = \frac{EI_a}{2} \left[\delta_u^t \left[\int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \right] \delta_u + \delta_w^t \left[\int_0^L \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right] \delta_w \right] \quad (\text{III-44})$$

L'expression de U_a peut s'écrire sous la forme réduite :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta_u^t [K_1] \delta_u + \frac{1}{2} \delta_w^t [K_2] \delta_w \quad (\text{III-45})$$

Les matrices classiques de raideur $[K_1]$, $[K_2]$ sont les suivantes :

$$[K_1] = \frac{EI_a}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-46})$$

$$[K_2] = \frac{EI_a}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-47})$$

La matrice élémentaire de rigidité $[K_e]$ est donnée par :

$$[K_e] = \frac{EI_a}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12L & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-48})$$

Dans le cas où nous tiendrons compte de l'effet de cisaillement, La matrice $[K_e]$ prend la forme suivante :

$$[K_e] = \frac{EI_a}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12L & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-49})$$

La quantité caractérisant le cisaillement est $a = \frac{12EI_a}{GS_r L^2}$, où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement, ν est le coefficient de poisson et $S_r \approx S$ (section réduite).

III.3.5. Formulation matricielle des équations du palier

Pour les paliers, le vecteur des forces généralisées est obtenu par l'application de l'équation de Lagrange sur le travail virtuel δW_p :

$$\frac{\delta W_p}{\partial \delta} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_{\theta_x} \\ F_w \\ F_{\theta_z} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta_x \\ w \\ \theta_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{w} \\ \dot{\theta}_z \end{Bmatrix} \quad (\text{III-50})$$

La première matrice est la matrice de raideur des paliers $[K_p]$ et la seconde est une matrice d'amortissement des paliers $[C_p]$.

III.3.6. Formulation matricielle des équations du balourd

L'application de l'équations de Lagrange sur l'équation de l'énergie cinétique du balourd (II-29) donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_b}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_b}{\partial \delta} = -m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (\text{III-51})$$

III.3.7. Modélisation d'une fissure transversale

Pour la formulation de la matrice de rigidité de l'élément fissuré, on présente le modèle de la fissure ouverte. La présence d'une fissure conduit à une flexibilité additionnelle par rapport à la rigidité d'un élément sain, ceci se traduit par la réduction de la section droite de l'élément fissuré.

Mathématiquement, La diminution de rigidité est traduite par la diminution des valeurs des moments d'inertie de la section droite l'élément fissuré (Figure. III.3).

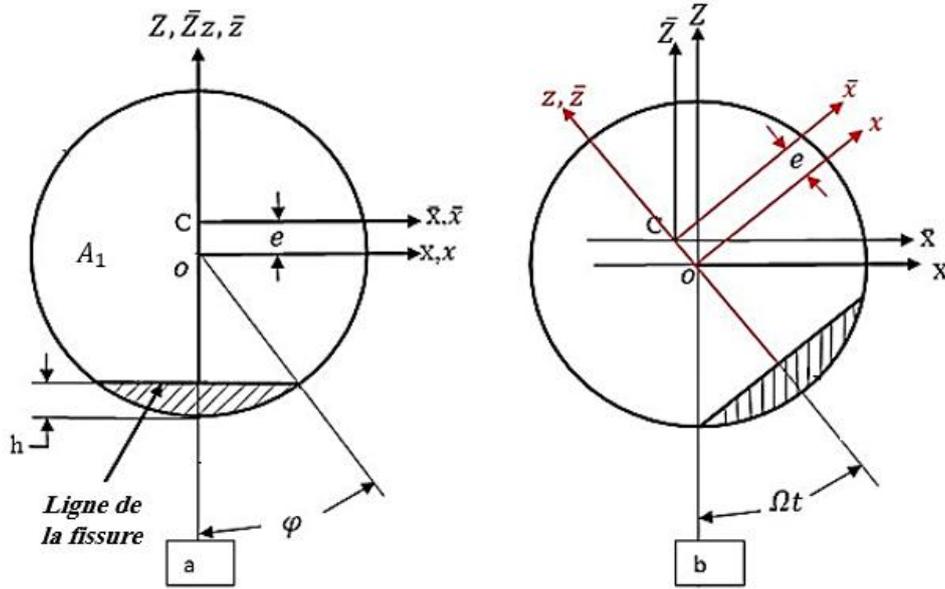


Figure III. 3: Section transversale de l'élément fissuré (-a- Avant la rotation, -b- Après la rotation)

La figure III.3 présente un modèle de la fissure ouverte. La figure (a) présente la section fissurée de rotor à l'arrêt à l'instant $t=0$, φ est l'angle initial de la section fissurée, la figure (b) présente la section fissurée à l'instant t , le rotor tourne par un angle $\varphi + \Omega t$, dans notre étude, L'angle φ est mis à zéro.

Selon Al- Shudeifat [77], la matrice de rigidité de l'élément fissuré peut être écrite comme suit

$$\left[K_{\text{fissuré}} \right] = \left[K_a \right] + \left[K_b \right] \quad (\text{III-52})$$

Les matrices $\left[K_a \right]$, $\left[K_b \right]$ sont les suivantes :

$$\left[K_a \right] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 12I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{X}}(t) & -12I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{X}}(t) \\ 0 & 12I_{\bar{Z}}(t) & -6I_{\bar{Z}}(t) & 0 & 0 & -12I_{\bar{Z}}(t) & -6I_{\bar{Z}}(t) & 0 \\ 0 & -6I_{\bar{Z}}(t) & 4I_{\bar{Z}}^2(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{Z}}(t) & 2I_{\bar{Z}}^2(t) & 0 \\ 6I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & 4I_{\bar{X}}^2(t) & -6I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & 2I_{\bar{X}}^2(t) \\ -12I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & -6I_{\bar{X}}(t) & 12I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & -6I_{\bar{X}}(t) \\ 0 & -12I_{\bar{Z}}(t) & 6I_{\bar{Z}}(t) & 0 & 0 & 12I_{\bar{Z}}(t) & 6I_{\bar{Z}}(t) & 0 \\ 0 & -6I_{\bar{Z}}(t) & 2I_{\bar{Z}}^2(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{Z}}(t) & 4I_{\bar{Z}}^2(t) & 0 \\ 6I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & 2I_{\bar{X}}^2(t) & -6I_{\bar{X}}(t) & 0 & 0 & 4I_{\bar{X}}^2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III-53})$$

$$\left[K_b \right] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & -12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & 12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 \\ -12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) \\ 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & 4I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & 2I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) \\ 0 & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 4I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 2I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) & 0 \\ 0 & 12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & -12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 \\ 12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & -12I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) \\ 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & 2I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 0 & 0 & 4I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) \\ 0 & -6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 2I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) & 0 & 0 & 6I_{\bar{x}\bar{z}}(t) & 4I_{\bar{x}\bar{z}}^2(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-54})$$

Où $I_{\bar{x}}(t)$ et $I_{\bar{z}}(t)$ représentent les moments d'inertie de l'élément fissuré par rapport aux axes \bar{x} et \bar{z} respectivement et qui sont variables dans le temps. L'axe \bar{x} et \bar{z} restent parallèles aux axes fixes X et Z pendant la rotation de l'arbre. Les expressions $I_{\bar{x}}(t)$ et $I_{\bar{z}}(t)$ de la fissure sont données par Al- Shudeifat et Butcher [72] :

$$\begin{cases} I_{\bar{x}}(t) = \frac{I_{\bar{x}} + I_{\bar{z}}}{2} + \frac{I_{\bar{x}} - I_{\bar{z}}}{2} \cos(2\Omega t) + I_{\bar{x}\bar{z}} \sin(2\Omega t) \\ I_{\bar{z}}(t) = \frac{I_{\bar{x}} + I_{\bar{z}}}{2} - \frac{I_{\bar{x}} - I_{\bar{z}}}{2} \cos(2\Omega t) - I_{\bar{x}\bar{z}} \sin(2\Omega t) \\ I_{\bar{x}\bar{z}}(t) = -\frac{I_{\bar{x}} - I_{\bar{z}}}{2} \sin(2\Omega t) + I_{\bar{x}\bar{z}} \cos(2\Omega t) \end{cases} \quad (\text{III-55})$$

Où $I_{\bar{x}} = I_x - A_1 e^2$, $I_{\bar{z}} = I_z$ et $I_{\bar{x}\bar{z}} = 0$, $I_{\bar{x}}$ et $I_{\bar{z}}$ sont les moments d'inertie de la section transversale de l'élément fissuré autour des axes tournants \bar{x} et \bar{z} autour de centre de gravité C. I_x et I_z sont les moments d'inertie de la section transversale de l'élément fissuré autour des axes tournants x et z autour de centre O. A_1 est l'aire de la section non-fissuré et e est son emplacement de centre sur l'axe z .

Selon Al- Shudeifat et Butcher [72], les expressions de I_x , I_z , A_1 et e sont donnée par:

$$I_x = \frac{\pi R^4}{8} + \frac{R^4}{4} \left((1-\mu)(2\mu^2 - 4\mu + 1)\gamma + \sin^{-1}(1-\mu) \right) \quad (\text{III-56})$$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{R^4}{12} \left((1-\mu)(2\mu^2 - 4\mu - 3)\gamma + 3\sin^{-1}(\gamma) \right) \quad (\text{III-57})$$

$$A_1 = R^2 \left(\pi - \cos^{-1}(1-\mu) + (1-\mu)\gamma \right) \quad (\text{III-58})$$

$$e = \frac{2R^3}{3A_1} \gamma^3 \quad (\text{III-59})$$

Dans lequel $\gamma = \sqrt{\mu(2-\mu)}$. $\mu = h/R$ est la profondeur adimensionnelle de fissure (h est la profondeur de la fissure et R est le rayon de l'arbre).

III.4. Equation dynamique du rotor fissuré

L'assemblage des matrices élémentaires des différents composants en respectant le vecteur des coordonnées généralisées δ de N éléments de l'arbre est indispensable afin d'obtenir les matrices globales de l'équation différentielle de mouvement.

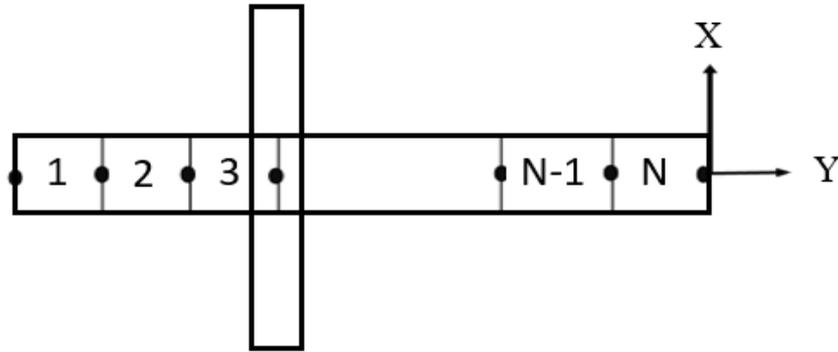


Figure III.4: Modèle élément finis d'un rotor.

L'équation globale du mouvement de système arbre-disque-palier est donnée par l'expression suivante :

$$[M_g] \ddot{\delta} + ([C_p] + \Omega [G_g]) \dot{\delta} + ([K_g] - [K_{fissuré}] + [K_p]) \delta = \{F_{Bal}\} \quad (\text{III-60})$$

Où $[M_g]$, $[G_g]$, $[K_g]$ définissent les matrices globales de masse, gyroscopique et de rigidité de rotor. $\{F_{Bal}\}$ est le vecteur des forces de balourd. $[K_{fissuré}]$ est la matrice de rigidité de l'éléments fissuré. Les matrices $[K_p]$ et $[C_p]$ sont les matrices de raideur et d'amortissement des paliers.

Les fréquences naturelles et critiques des précessions directe et indirecte du système sont obtenues à partir des valeurs propres de la matrice $[S(\Omega)]$ de l'équation (III-61), ces fréquences sont représentées graphiquement dans le diagramme de Campbell.

$$[S(\Omega)] = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -[M_g]^{-1}([K_g] - [K_{fissuré}] + [K_p]) & -[M_g]^{-1}(\Omega [G_g] + [C_p]) \end{bmatrix} \quad (\text{III-61})$$

CHAPITRE IV

Résultats et interprétation

Table des matières

VI.1.	Introduction	49
VI.2.	Convergence et validation des résultats :	49
VI.2.1.	Etude de convergence	49
VI.2.2.	Validation des résultats	53
VI.3.	Analyse fréquentielle par la méthode rigidité variable.....	55
VI.3.1.	Modèle de fissure ouverte	55
VI.3.1.1.	Rotor à l'état stationnaire ($\Omega = 0$).....	55
VI.3.1.2.	Rotor à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$)	60
VI.3.2.	Modèle de fissure respiratoire.....	65
VI.4.	Nouvelle approche pour l'étude du comportement vibratoire d'un rotor fissuré	68
VI.4.1.	Présentation de l'approche.....	68
VI.4.1.1.	Modèle de fissure ouverte	68
VI.4.1.1.1.	Rotor à l'état stationnaire ($\Omega = 0$).....	68
VI.4.1.1.2.	Rotor à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$)	73
VI.4.1.1.3.	Estimation de la gravité de la fissure ouverte	78
VI.4.1.2.	Modèle de fissure respiratoire.....	81
VI.4.1.2.1.	Estimation de la gravité de la fissure respiratoire	83
VI.4.1.3.	Réponse dynamique	84
VI.4.1.4.	Influence du nombre des éléments.....	85
VI.4.1.5.	Relation entre la profondeur de la fissure et le facteur α	87

VI.1. Introduction

La présence d'une fissure dans une structure amène à une concentration d'énergie au voisinage des lèvres de la fissure et introduit une flexibilité additionnelle ceci est traduit par une réduction dans la rigidité. Dans les études des rotors fissurés, deux principales méthodes sont utilisées pour quantifier cette variation de rigidité :

- La méthode de flexibilité locale.
- La méthode de rigidité variable par rapport au temps.

Dans la méthode de flexibilité locale, la rigidité de l'élément fissuré est donnée par l'inverse de la matrice de flexibilité, cette dernière a une relation aux facteurs d'intensité de contraintes, La méthode de rigidité variable est traduite par une réduction des moments d'inertie de la section droite de l'élément fissuré, les moments d'inertie dans les deux directions sont variés en fonction de l'angle de rotation (Ωt).

En utilisant la méthode classique des éléments finis (h-MEF) et la méthode de rigidité variable, nous étudions l'influence de la profondeur et la position d'une fissure transversale sur le comportement vibratoire du rotor à l'état rotationnelle et stationnaire. Les résultats sont obtenus à l'aide d'un code de calcul élaboré sous MATLAB. Une nouvelle approche d'estimation de la rigidité de l'élément fissuré est présentée dans ce chapitre.

VI.2. Convergence et validation des résultats :

VI.2.1. Etude de convergence

Dans l'étude de convergence, nous déterminons les fréquences propres d'un rotor non fissuré en fonction du nombre des éléments (Figure IV.1). Les paramètres physiques et géométriques de ce rotor sont représentés dans le tableau IV.1.

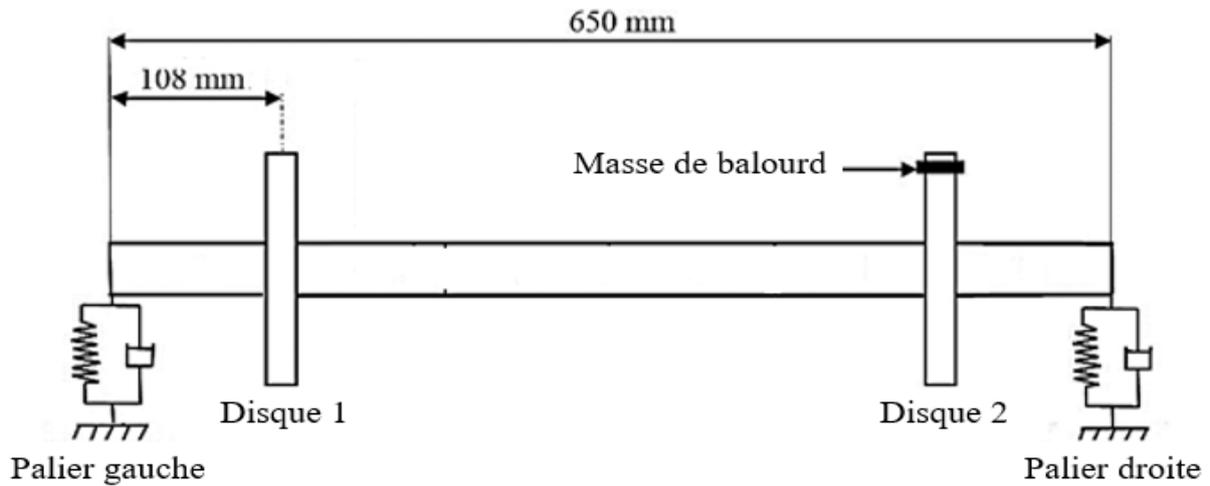


Figure IV.1: Modèle du rotor étudié.

Description	Valeur
Longueur de l'arbre du rotor, L_{arbre}	0.65 m
Rayon de l'arbre du rotor, R	7.9×10^{-3} m
Masse volumique de l'arbre, ρ	7800 kg/m^3
Module d'Young, E	$2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Rayon externe du disque, r	76.2×10^{-3} m
Rayon interne du disque, R	7.9×10^{-3} m
Masse volumique de disque, ρ_d	2700 kg/m^3
Masse du disque m_d	0.571 kg
Profondeur adimensionnelle de fissure μ	$0 \leq \mu \leq 1$
Rigidité de palier (k_{xx}, k_{zz})	$7 \times 10^7 \text{ N/m}$
Amortissement de palier (c_{xx}, c_{zz})	$5 \times 10^2 \text{ N.s/m}$
Masse balourd, m_u	$6.3 \times 10^{-4} \text{ kg.m}$
Angle de balourd β	$\pi/2 \text{ rad}$

Tableau IV. 1 : Paramètres physiques du rotor étudié.

Le tableau IV.2 et les figures IV.2, IV.3, IV.4 et IV.5 représentent la convergence des fréquences de deux premiers modes de flexion en fonction du nombre d'éléments.

Fréquence (Hz)	N=3	N=4	N=5	N=6	N=8	N=12	N=24
ω_{b1}	57.9114	57.6522	57.6405	57.6386	57.6379	57.6378	57.6378
ω_{f1}	62.3298	61.9571	61.9401	61.9373	61.9362	61.9360	61.9359
ω_{b2}	176.1489	175.9833	175.8202	175.7939	175.7844	175.7809	175.7802
ω_{f2}	184.9212	184.7077	184.5071	184.4739	184.4616	184.4558	184.4545

Tableau IV. 2 : Convergence des fréquences propres des deux premiers modes en fonction du nombre d'éléments.

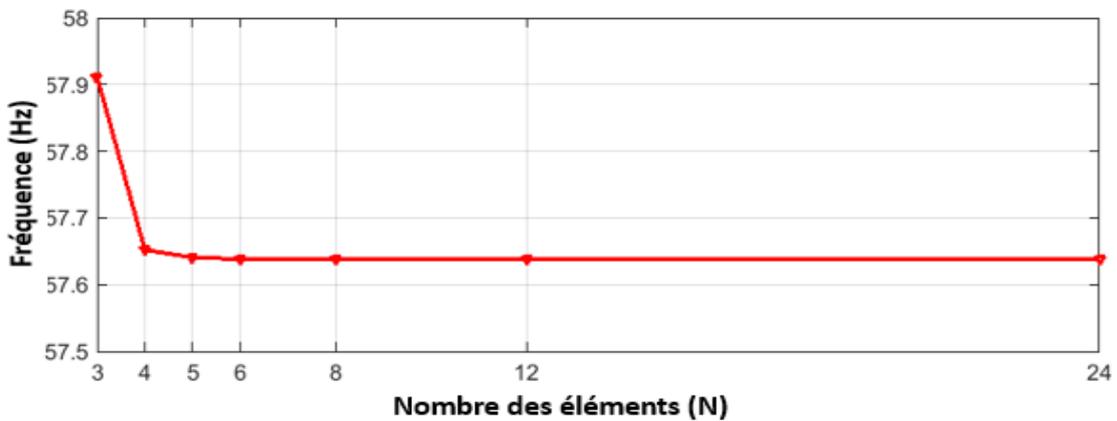


Figure IV.2: Courbe de convergence du premier mode de flexion (indirect) en fonction du nombre d'éléments.

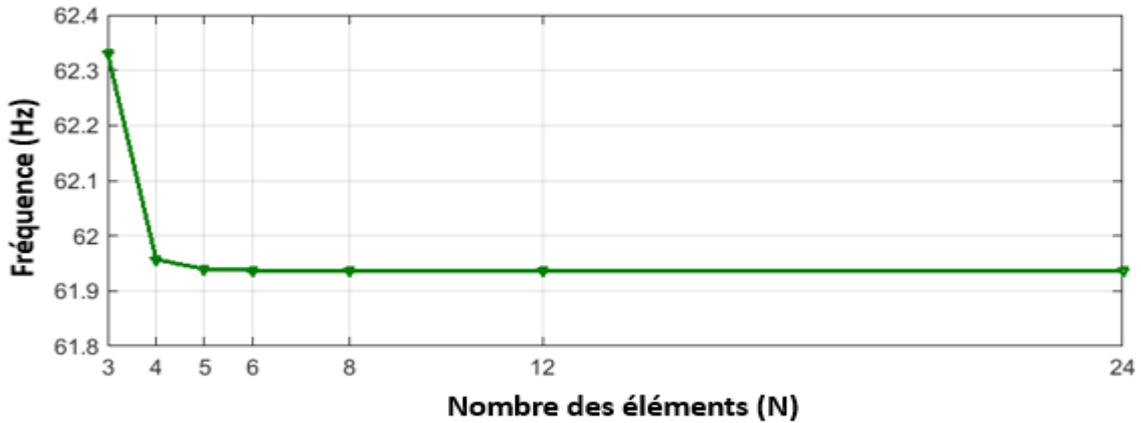


Figure IV.3: Courbe de convergence du premier mode de flexion (direct) en fonction du nombre d'éléments.

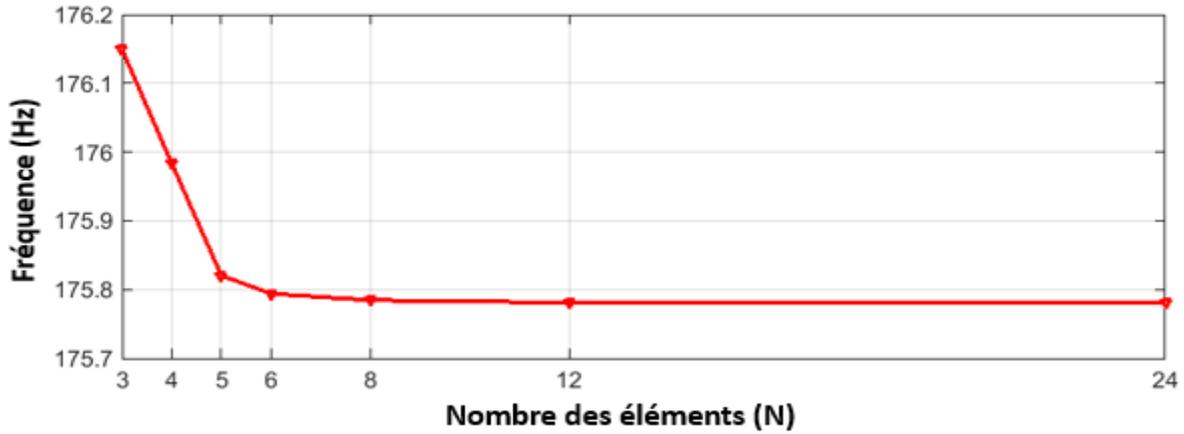


Figure IV.4: Courbe de convergence du deuxième mode de flexion (indirect) en fonction du nombre d'éléments.

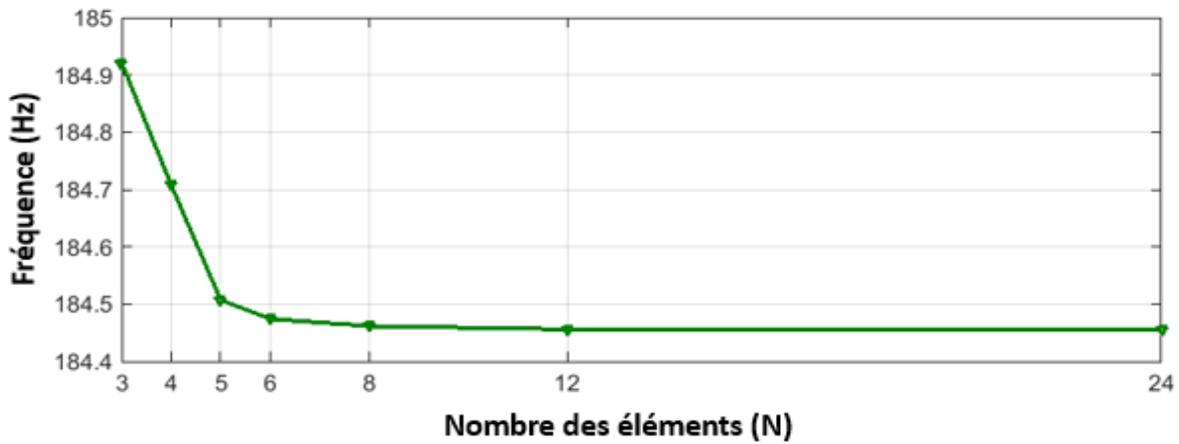


Figure IV.5: Courbe de convergence du deuxième mode de flexion (direct) en fonction du nombre d'éléments.

D'après le tableau IV.2 et les figures IV.2, IV.3, IV.4 et IV.5, On observe une stabilisation des fréquences à partir de 6 éléments. Donc le système sera divisé en 6 éléments (Figure IV.6) où la longueur d'un élément est égale à 10.8 cm et les deux disques sont fixés aux nœuds 2 et 6. Le déséquilibre de masse se trouve au niveau du disque 2.

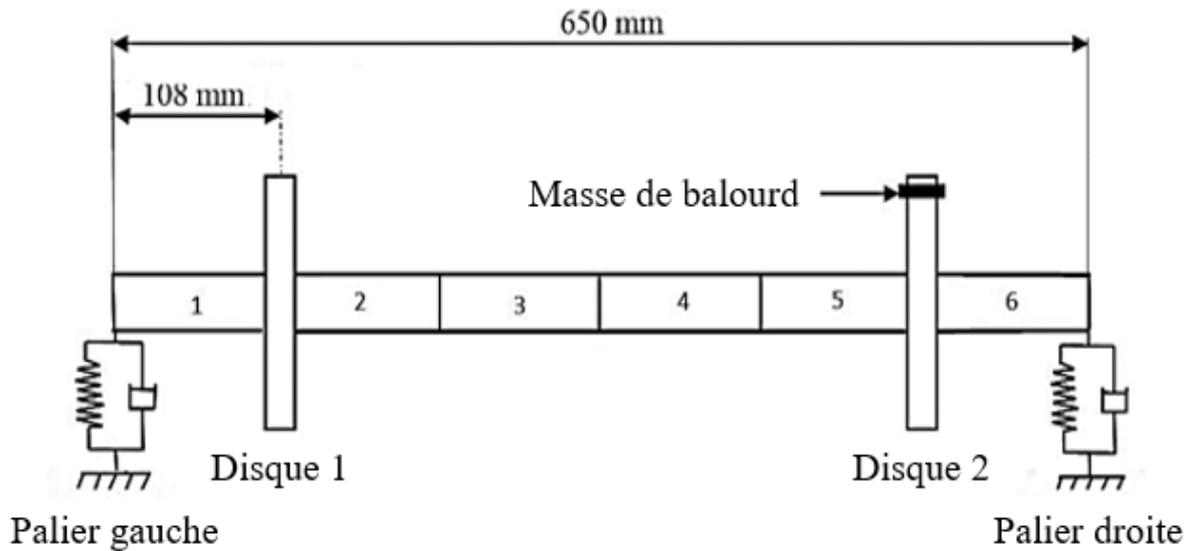


Figure IV.6: Modèle éléments finis du rotor étudié.

VI.2.2. Validation des résultats

Pour valider nos résultats, nous calculons les fréquences du rotor représenté sur la figure IV.6 pour différents cas (rotor sain, rotor fissuré au niveau de l'élément 2 et au niveau de l'élément 3 et on compare les fréquences obtenues par notre programme de calcul avec les fréquences obtenues théoriquement et expérimentalement par AL-Shudeifat [74].

Le tableau IV.3 donne les valeurs des vitesses critiques du rotor sain obtenu par notre programme avec les résultats théoriques et expérimentaux donnés par AL-Shudeifat [74].

Le tableau IV.4 montre les valeurs des vitesses critiques dans le cas où la fissure est située au niveau du deuxième élément, le tableau IV.5 montre les valeurs des vitesses critiques dans le cas où la fissure est située au niveau du troisième élément.

Les tableaux IV.3, IV.4 et IV.5 montrent que les résultats trouvés sont très proches avec les résultats théoriques et expérimentaux.

Rotor sain		Fréquence indice	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
AL-Shudeifat	Théorique	Valeur (tr/min)	3465	3718	10585	11091	24889	26317
		Valeur (Hz)	57.8	62	176.4	184.9	414.8	438.6
AL-Shudeifat	Expérimental	Valeur (Hz)	56.6	-	-	-	-	-
Nos résultats	Théorique	Valeur (tr/min)	3458.8	3716.22	10547.64	11068.2	24799.2	26339.4
		Valeur (Hz)	57.63	61.93	175.79	184.47	413.32	439
ε_1 (Nos résultats / Théorique)		%	0.28	0.1	0.34	0.23	0.36	0.09
ε_2 (Nos résultats / Exp)		%	1.83	-	-	-	-	-

Tableau IV. 3 : Validation des fréquences et vitesses critiques dans le cas d'un rotor sain.

Rotor fissuré		Fréquence indice	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
AL-Shudeifat	Théorique	Valeur (tr/min)	3340	3591	9996	10558	24601	25619
		Valeur (Hz)	55.7	59.9	166.6	176	410	427
AL-Shudeifat	Expérimental	Valeur (Hz)	-	60.7	-	-	-	-
Nos résultats	Théorique	Valeur (tr/min)	3378.6	3638.46	10153.2	10737.84	24624	25884
		Valeur (Hz)	56.31	60.641	169.22	178.964	410.4	431.4
ε_1 (Nos résultats / Théorique)		%	1.09	1.24	1.57	1.68	0.1	1.03
ε_2 (Nos résultats / Exp)		%	-	0.01	-	-	-	-

Tableau IV. 4 : Validation des fréquences et vitesses critiques dans le cas où la fissure est située au niveau de deuxième élément et $\mu = 0.46$.

Rotor fissuré		Fréquence indice	ω_{b1}	ω_{r1}	ω_{b2}	ω_{r2}	ω_{b3}	ω_{r3}
AL-Shudeifat	Théorique	Valeur (tr/min)	3294	3535	10466	10979	24354	25515
		Valeur (Hz)	54.9	58.9	174.4	183	406	425.3
AL-Shudeifat	Expérimental	Valeur (Hz)	-	60	-	-	-	-
Nos résultats	Théorique	Valeur (tr/min)	3347	3604	10471.5	10998	24453.6	25827
		Valeur(Hz)	55.78	60.07	174.525	183.3	407.56	430.45
ε_1 (Nos résultats / Théorique)		%	1.6	1.99	0.07	0.164	0.384	1.21
ε_2 (Nos résultats / Exp)		%	-	0.117	-	-	-	-

Tableau IV. 5 : Validation des fréquences et vitesses critiques dans le cas où la fissure est située au niveau de troisième élément et $\mu = 0.46$.

VI.3. Analyse fréquentielle par la méthode rigidité variable

La méthode de rigidité variable par rapport au temps est parmi les techniques les plus utilisés pour déterminer la rigidité d'un arbre fissuré. La variation des moments d'inertie de l'élément fissuré en fonction de l'angle de rotation donne une rigidité variable par rapport au temps.

VI.3.1. Modèle de fissure ouverte

Dans le cas du modèle de fissure ouverte, la fissure reste ouverte et sa section ne change pas pendant la rotation, dans ce cas la variation des moments d'inerties par rapport à l'angle de rotation est supposée négligeable et on prend les valeurs des moments d'inertie dans le cas où l'angle de rotation $\Omega t = 0$.

L'influence de la profondeur et la position de la fissure sur les fréquences propres dans les deux cas stationnaire $\Omega = 0$ et rotationnelle $\Omega \neq 0$ sont discutées dans cette partie.

VI.3.1.1. Rotor à l'état stationnaire ($\Omega = 0$)

Les tableaux (IV.6, IV.7 et IV.8) montrent respectivement la variation des fréquences propres des trois premières modes par rapport à la profondeur de la fissure (μ) où la fissure est localisée au niveau du premier, deuxième et troisième élément.

Les résultats de ces tableaux sont illustrés dans les figures IV.7 aux IV.15.

Profondeur adimensionnelle	Fréquences propres (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\mu=0$	59.69	59.69	180.3	180.3	429.7	429.7
$\mu=0.1$	59.66	59.7	180.1	180.4	428.8	430
$\mu=0.2$	59.61	59.69	179.6	180.3	426.8	429.6
$\mu=0.3$	59.53	59.64	178.8	179.9	423.8	428
$\mu=0.4$	59.42	59.56	177.7	179	419.6	424.8
$\mu=0.5$	59.25	59.41	176.1	177.6	413.9	419.3
$\mu=0.6$	59.02	59.15	174	175.2	406.2	410.6
$\mu=0.7$	58.67	58.71	170.98	171.32	396.05	397.18
$\mu=0.8$	57.88	58.16	164.5	166.66	377	382.95
$\mu=0.9$	55.95	57.33	151.32	160.35	347.67	366.49
$\mu=1$	47.94	55.87	121.86	150.87	309.6	346.84

Tableau IV. 6 : Variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le premier élément est fissuré.

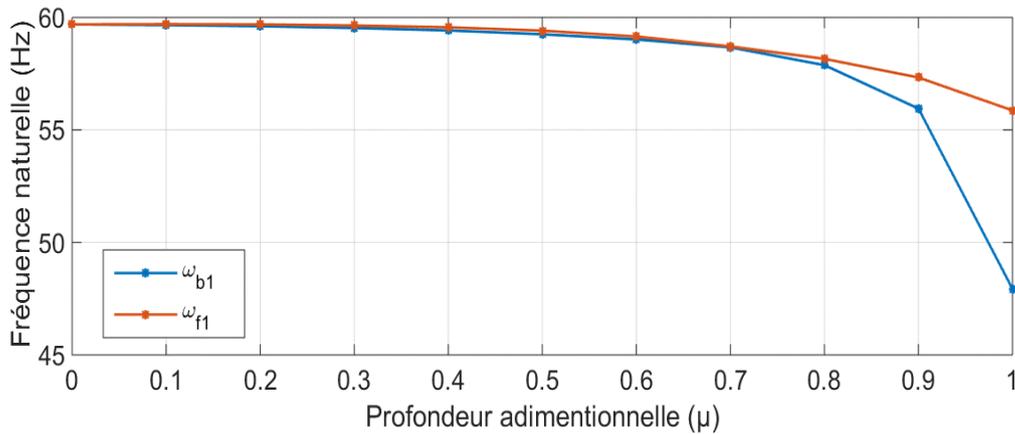


Figure IV.7: Variation des fréquences propres du premier mode dans le cas où le premier élément est fissuré.

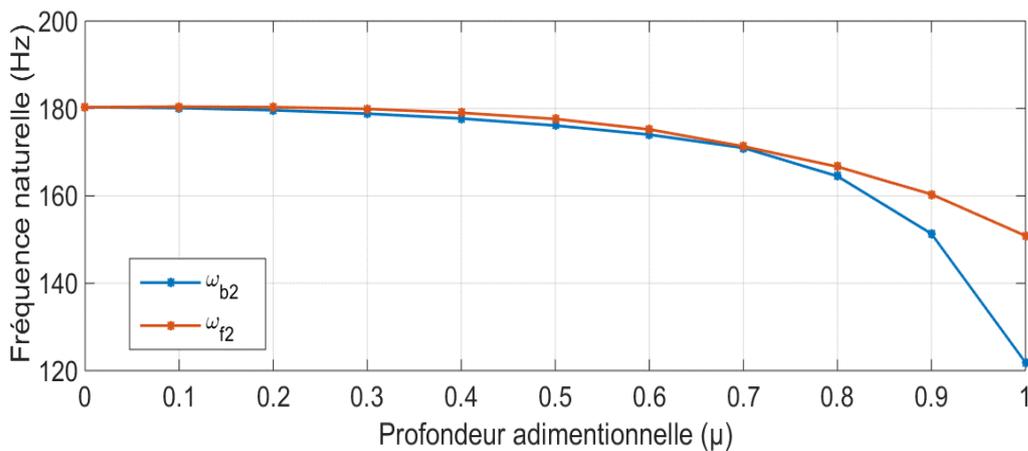


Figure IV.8: Variation des fréquences propres du deuxième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.

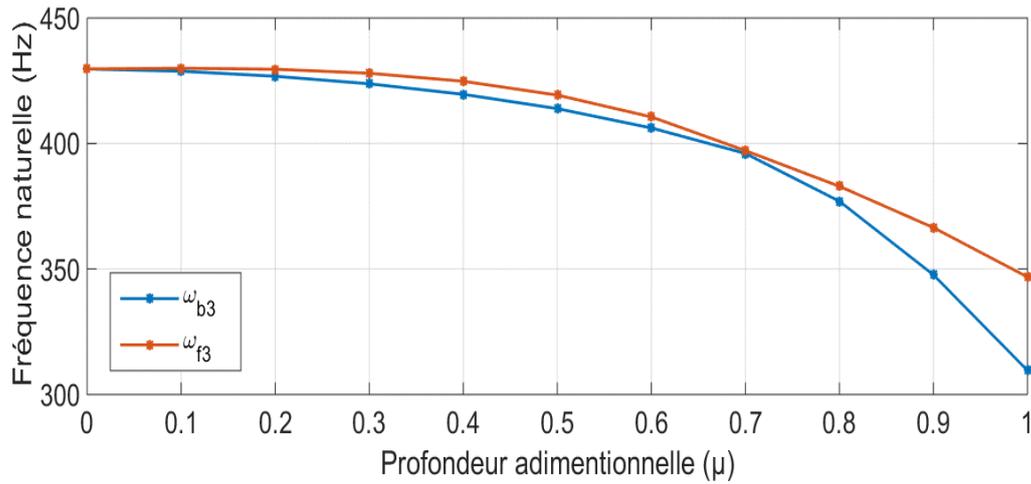


Figure IV.9: Variation des fréquences propres du troisième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.

Profondeur adimensionnelle	Fréquences propres (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\mu=0$	59.69	59.69	180.3	180.3	429.7	429.7
$\mu=0.1$	59.57	59.72	179.7	180.5	429.2	429.9
$\mu=0.2$	59.33	59.68	178.6	180.3	428.1	429.7
$\mu=0.3$	58.97	59.49	176.9	179.3	426.5	428.8
$\mu=0.4$	58.44	59.08	174.5	177.4	424.3	427
$\mu=0.5$	57.71	58.4	171.5	174.4	421.3	424.1
$\mu=0.6$	56.71	57.28	167.6	169.7	417.5	419.7
$\mu=0.7$	55.31	55.47	162.7	163.3	412.5	413.1
$\mu=0.8$	52.37	53.34	154.3	156.9	402.9	406
$\mu=0.9$	46.44	50.49	141.9	149.8	384.1	397
$\mu=1$	32.17	46.24	123.6	141.5	324.8	383.5

Tableau IV. 7 : Variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

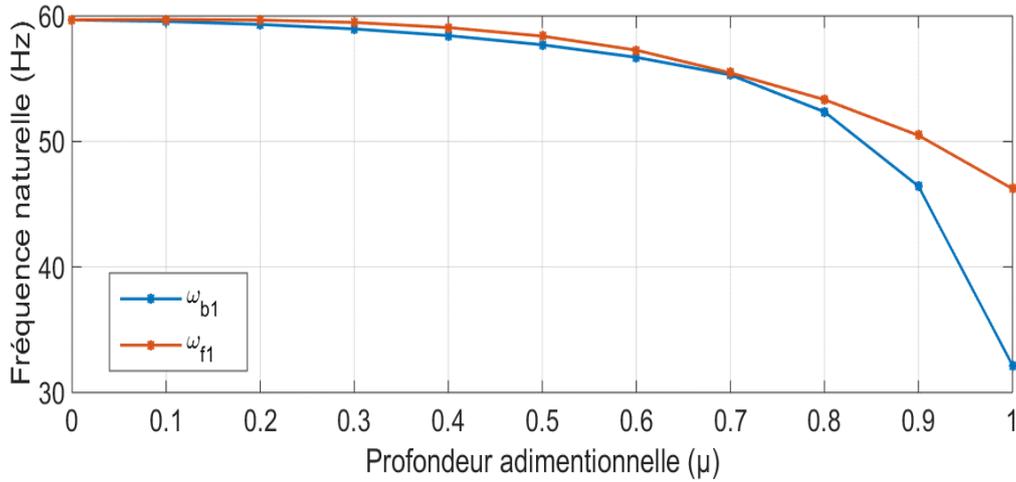


Figure IV.10: Variation des fréquences propres du premier mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

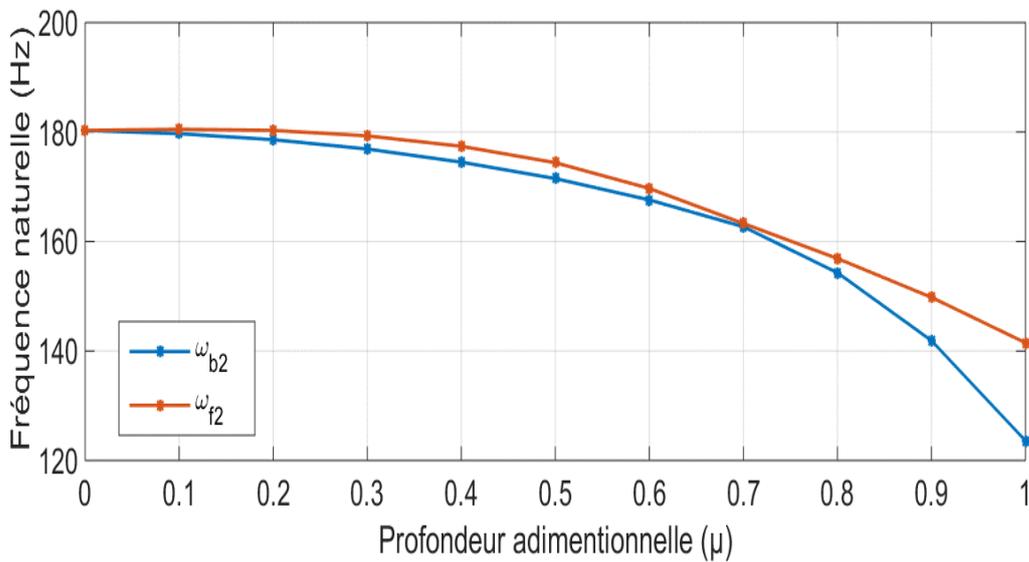


Figure IV.11: Variation des fréquences propres du deuxième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

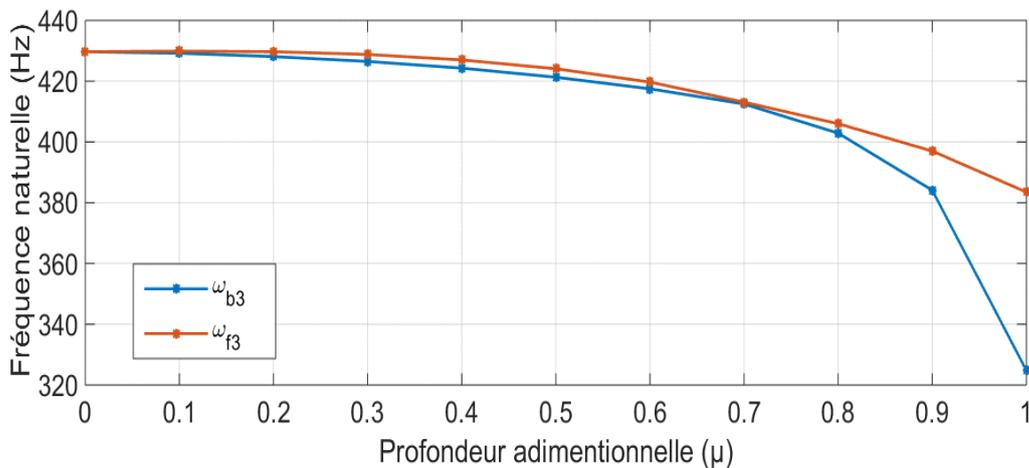


Figure IV.12: Variation des fréquences propres du troisième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

Profondeur adimensionnelle	Fréquences propres (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\mu=0$	59.69	59.69	180.3	180.3	429.7	429.7
$\mu=0.1$	59.52	59.74	180.2	180.3	429	429.9
$\mu=0.2$	59.18	59.62	180	180.3	427.5	429.6
$\mu=0.3$	58.66	59.4	179.6	180.1	425.4	428.5
$\mu=0.4$	57.92	58.82	179.1	179.7	422.4	426.1
$\mu=0.5$	56.92	57.86	178.5	179.1	418.5	422.2
$\mu=0.6$	55.57	56.34	177.6	178.1	413.5	416.3
$\mu=0.7$	53.76	53.97	176.5	176.6	407.1	407.8
$\mu=0.8$	50.14	51.31	174.2	174.9	395.6	399.2
$\mu=0.9$	43.45	47.95	170	172.9	377.2	389.2
$\mu=1$	29.19	43.23	158.2	169.8	341.5	376.2

Tableau IV. 8 : Variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le troisième élément est fissuré.

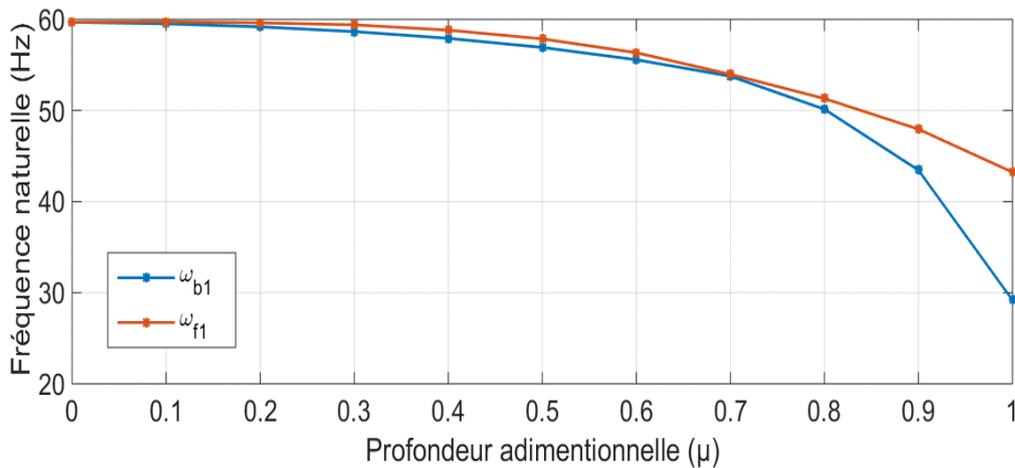


Figure IV.13: Variation des fréquences propres du premier mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.

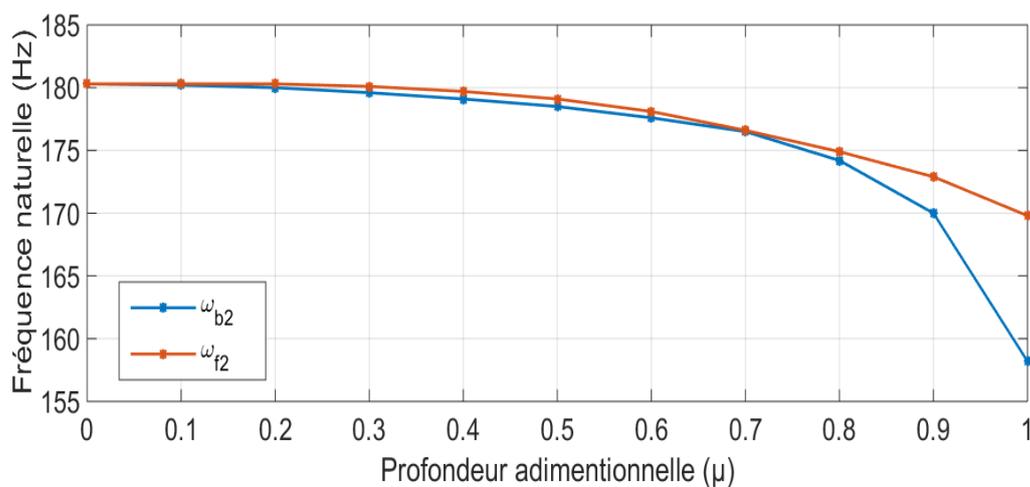


Figure IV.14: Variation des fréquences propres du deuxième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.

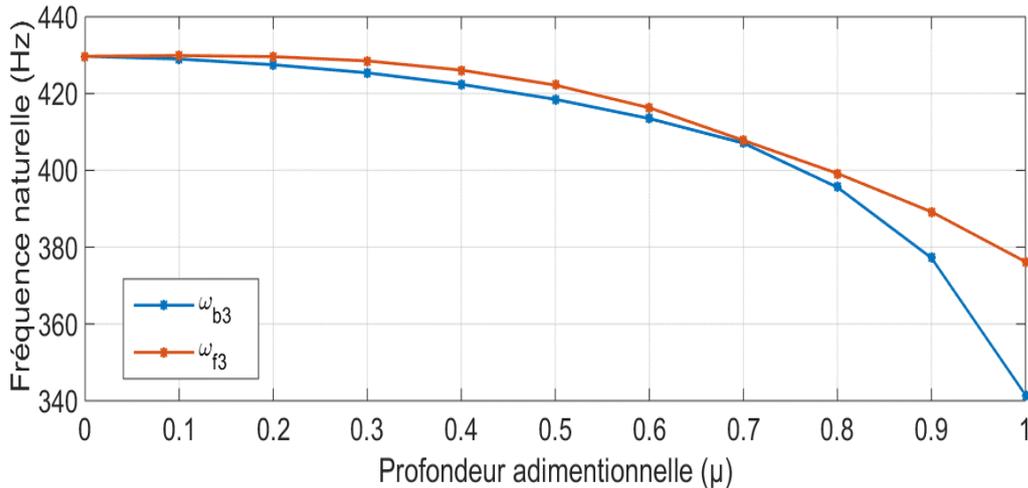


Figure IV.15: Variation des fréquences propres du troisième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.

Les tableaux IV.6, IV.7 et IV.8 et les figures IV.7 - IV.15 montrent que les fréquences propres de mode direct et indirect d'un rotor fissuré à l'état stationnaire diminuent par rapport aux fréquences propres d'un rotor sain.

Plus la profondeur de la fissure augmente, plus les fréquences propres du rotor diminuent, ceci est dû à la diminution de la rigidité de l'arbre due à la fissure.

On constate, aussi que la divergence entre les fréquences propres des modes directs et indirects apparaît nettement quand la profondeur de la fissure est plus grande, cette divergence est due à la dissymétrie de la géométrie du rotor causée par la présence de fissure.

Plus la position de la fissure avance vers le milieu du rotor plus son influence sur les fréquences naturelles est importante.

VI.3.1.2. Rotor à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$)

Les tableaux IV.9, IV.10 et IV.11 représentent respectivement la variation des fréquences critiques des trois premiers modes (direct et indirect) par rapport à la profondeur de la fissure où la fissure située au niveau du premier, deuxième et troisième élément.

Les résultats de ces tableaux sont présentés dans les figures IV.16 aux IV.24.

Ces tableaux figures montrent que les fréquences critiques de mode direct et indirect d'un rotor fissuré diminuent par rapport aux fréquences critiques d'un rotor sain.

Plus la profondeur de la fissure augmente les fréquences propres du rotor diminuent.

La divergence entre les fréquences propres des précessions direct et indirect est plus importante dans l'état dynamique que celle de l'état statique.

Profondeur adimensionnelle	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\mu=0$	57.63	61.93	175.79	184.47	413.32	439
$\mu=0.1$	57.6	61.9	175.6	184.3	412.8	438.8
$\mu=0.2$	57.58	61.88	175.4	184.1	411.3	438
$\mu=0.3$	57.52	61.77	175	183.3	407.5	436.3
$\mu=0.4$	57.47	61.72	174.2	182.2	401.7	433.8
$\mu=0.5$	57.33	61.53	172.9	180.4	392.6	430.2
$\mu=0.6$	57.1	61.23	171	177.8	378.6	425.1
$\mu=0.7$	56.83	60.8	168.2	173.8	358.6	418.4
$\mu=0.8$	56.22	59.95	162.9	168.1	331.7	409
$\mu=0.9$	54.97	58.47	150.8	160.8	300	392.4
$\mu=1$	47.83	55.98	121.65	151.25	265.8	384.95

Tableau IV. 9 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le premier élément est fissuré.

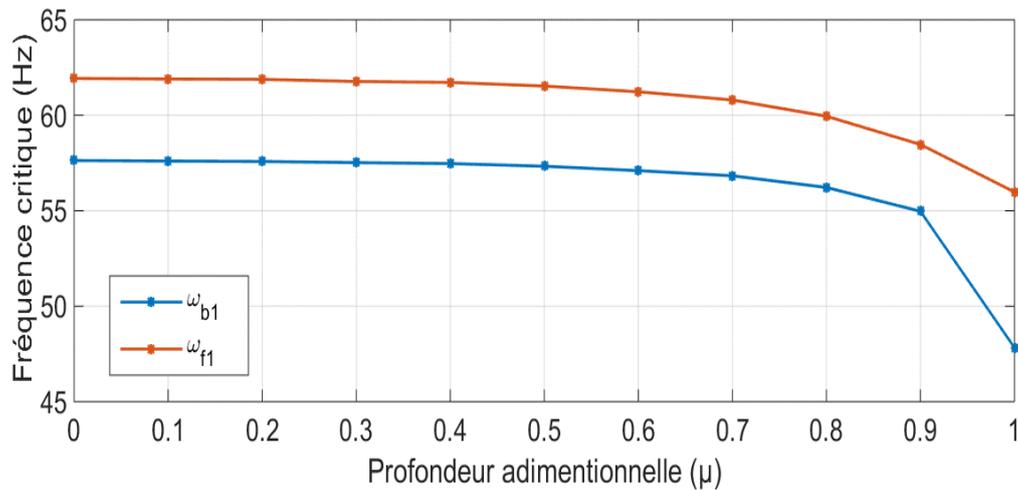


Figure IV.16: Variation des fréquences critiques du premier mode dans le cas où le premier élément est fissuré.

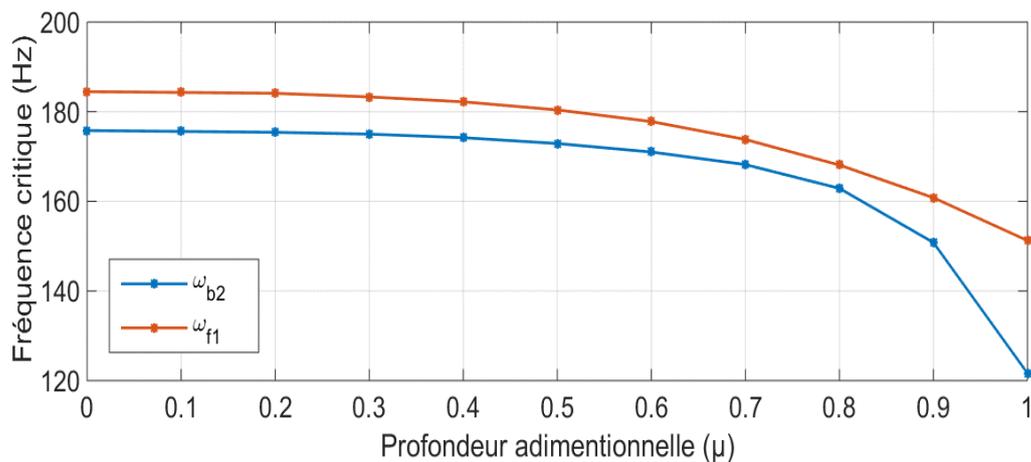


Figure IV.17: Variation des fréquences critiques du deuxième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.

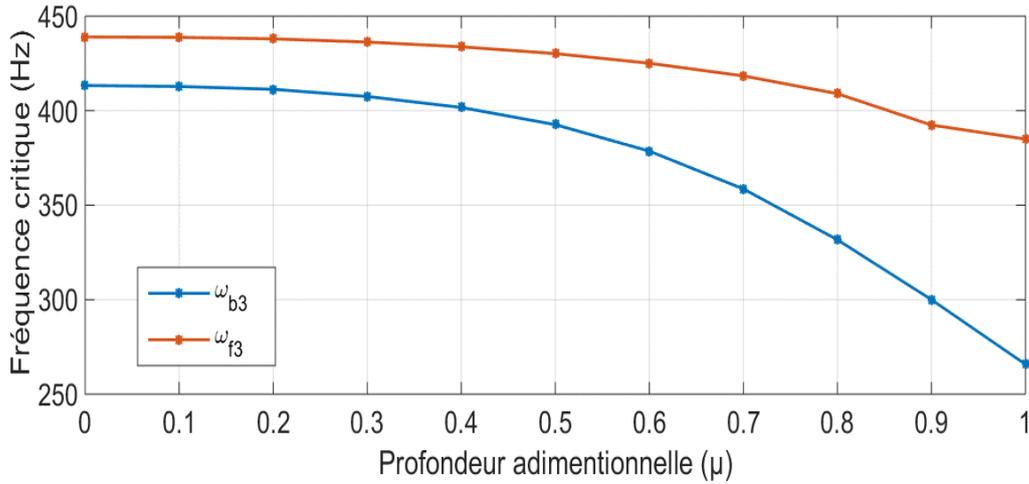


Figure IV.18: Variation des fréquences critiques du troisième mode dans le cas où le premier élément est fissuré.

Profondeur adimensionnelle	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\mu=0$	57.63	61.93	175.79	184.47	413.32	439
$\mu=0.1$	57.59	61.89	175.56	184.3	413.23	438.74
$\mu=0.2$	57.45	61.76	174.78	183.71	412.9	437.87
$\mu=0.3$	57.16	61.48	173.3	182.54	412.27	436.19
$\mu=0.4$	56.72	61.05	171	180.58	411.3	433.5
$\mu=0.5$	56	60.32	167.8	176.6	409.6	429.8
$\mu=0.6$	54.97	59.23	163.6	173.5	407.1	424.7
$\mu=0.7$	53.37	57.63	157.7	168.1	403.6	417.56
$\mu=0.8$	50.82	55.12	150	161.1	397.5	408
$\mu=0.9$	45.72	51.43	139.1	152.8	382.7	396.4
$\mu=1$	32	46.57	122.2	143.2	324.8	382.7

Tableau IV. 10 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

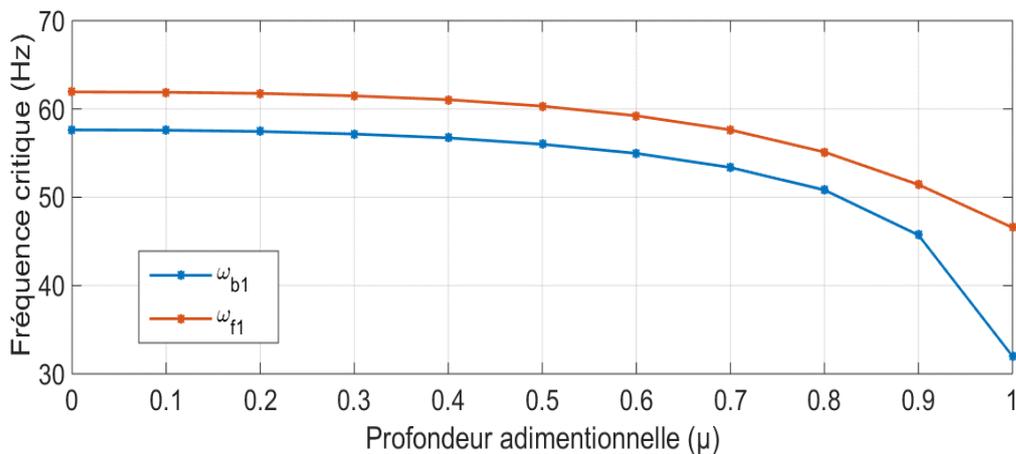


Figure IV.19: Variation des fréquences critiques du premier mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

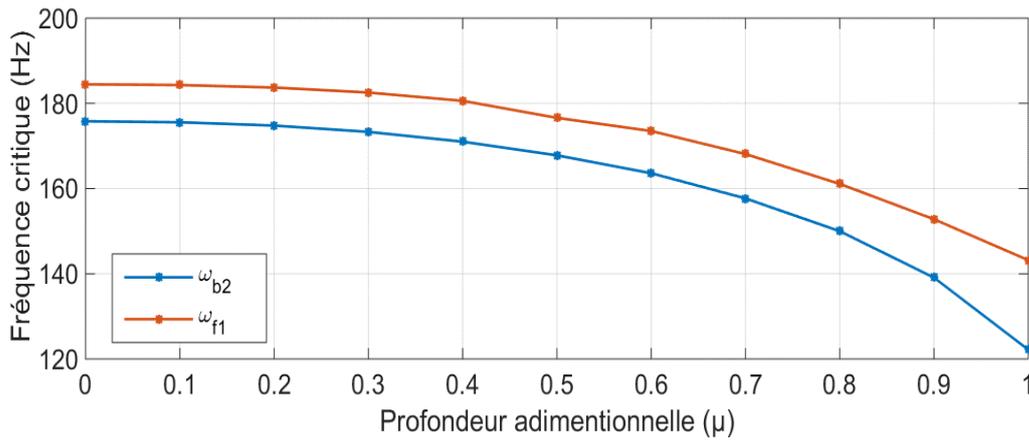


Figure IV.20: Variation des fréquences critiques du deuxième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

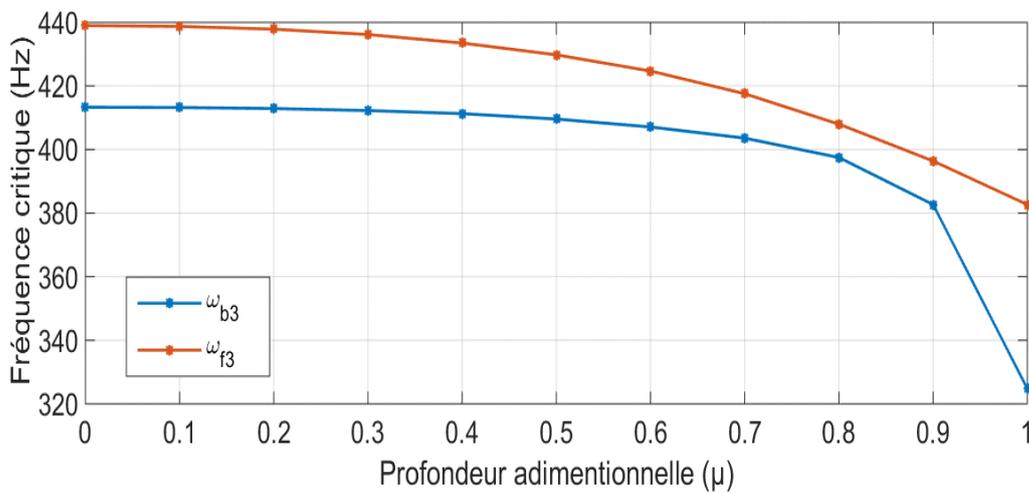


Figure IV.21: Variation des fréquences critiques du troisième mode dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

Profondeur adimensionnelle	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\mu=0$	57.63	61.93	175.79	184.47	413.32	439
$\mu=0.1$	57.57	61.87	175.7	184.4	413.13	438.72
$\mu=0.2$	57.37	61.68	175.6	184.3	412.5	437.9
$\mu=0.3$	56.98	61.3	175.3	184.1	411.2	436
$\mu=0.4$	56.32	60.62	174.9	183.7	409.2	432.9
$\mu=0.5$	55.38	59.62	174.2	183	406.3	428.5
$\mu=0.6$	54	58	173.3	182.2	402.1	422.4
$\mu=0.7$	52	55.9	171.9	180.9	396.4	414.1
$\mu=0.8$	48.88	52.73	169.9	178.9	388.2	403
$\mu=0.9$	42.98	48.57	166.5	176.1	374.1	389.8
$\mu=1$	29.12	43.38	156.5	171.4	341.2	375.57

Tableau IV. 11 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où le troisième élément est fissuré.

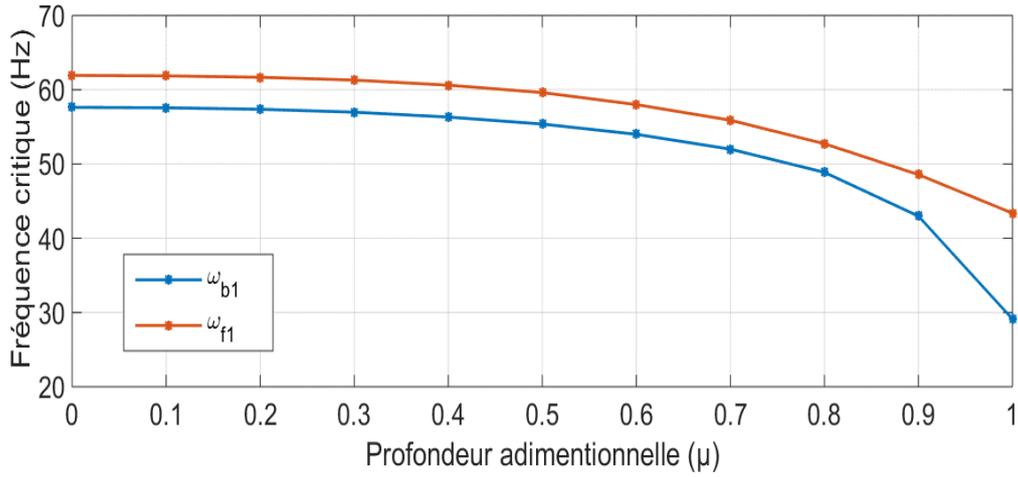


Figure IV.22: Variation des fréquences critiques du premier mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.

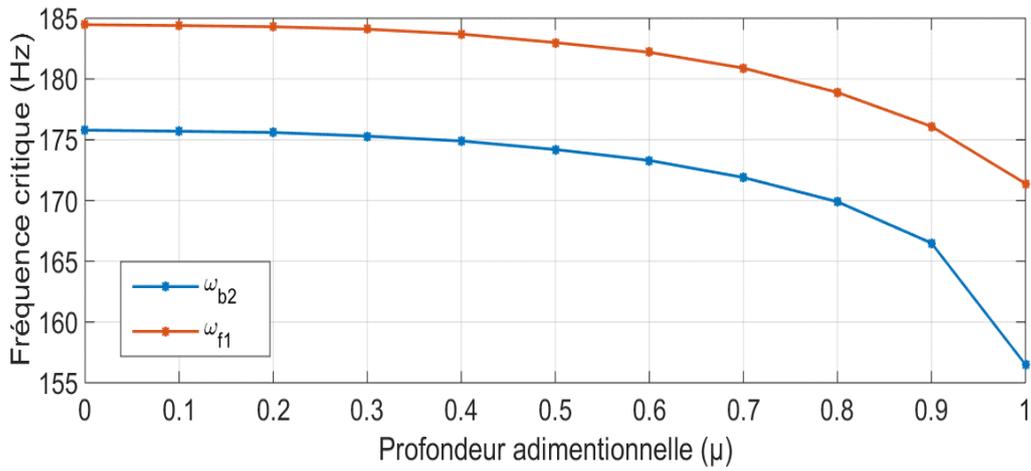


Figure IV.23: Variation des fréquences critiques du deuxième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.

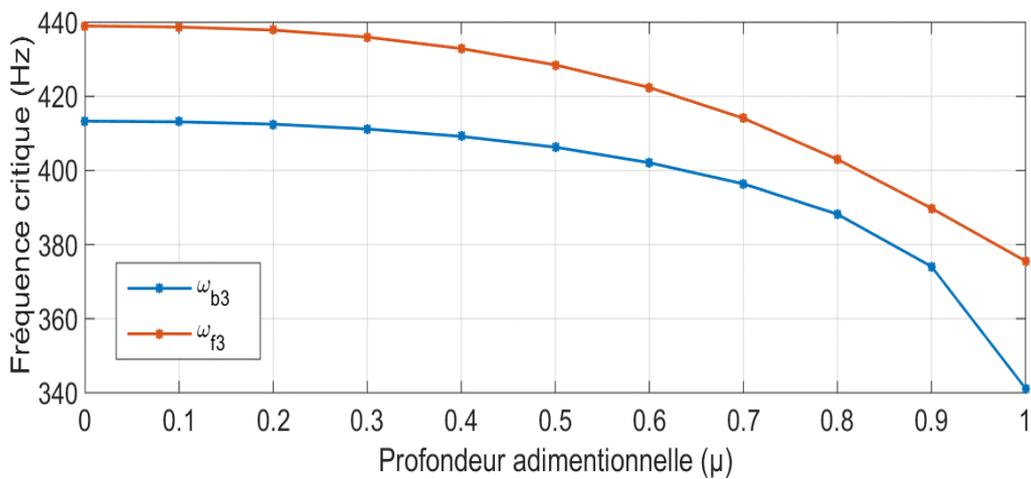


Figure IV.24: Variation des fréquences critiques du troisième mode dans le cas où le troisième élément est fissuré.

VI.3.2. Modèle de fissure respiratoire

La fissure respiratoire s'ouvre et se ferme périodiquement au cours de la rotation, les fréquences propres du rotor varient, entre les fréquences d'un arbre sain et celles d'un arbre fissuré où la fissure est totalement ouverte, ceci est due à la variation de la rigidité par rapport au temps.

La variation périodique de rigidité est traduite par la variation des moments d'inertie de la section droite de l'élément fissuré en fonction de l'angle de rotation, les valeurs de ces derniers varient entre ces valeurs où la section droite est totalement circulaire (non-fissuré) et ces valeurs où la section droite contient une fissure ouverte.

La Figure VI.25 représente la courbe de variation de la rigidité d'un arbre fissuré contenant une fissure transversale respiratoire en fonction de l'angle de rotation, on distingue principalement 3 états de la fissure :

- Pour $\Omega t = -\pi/2$, la fissure est totalement ouverte et la rigidité et les moments d'inerties de l'arbre du rotor sont identiques à celles d'un arbre fissuré contenant une fissure ouverte.
- Pour $\Omega t = \pi/2$, la fissure est totalement fermée et la rigidité et les moments d'inerties de l'arbre du rotor sont identiques à celles d'un arbre sain.
- Pour $-\pi/2 < \Omega t < \pi/2$, la fissure est partiellement fermée, la rigidité de l'arbre et les moments d'inerties sont comprise entre ces valeurs où l'arbre fissuré contient une fissure transversale ouverte et ces valeurs où l'arbre est sain.

La fonction suivante présente la variation de rigidité :

$$\overline{K}_{fissuré} = \frac{K_{non-fissuré} - K_{fissuré}}{2} \sin(\Omega t) + \frac{K_{non-fissuré} + K_{fissuré}}{2} \quad (VI.1)$$

Les équations suivantes montrent la variation des moments d'inertie $I_{\bar{x}}$ et $I_{\bar{z}}$ de la section droite d'un élément fissuré par rapport au repère fixe:

$$\begin{aligned} \overline{I}_{\bar{x}} &= \frac{I_a - I_{\bar{x}}}{2} \sin(\Omega t) + \frac{I_a + I_{\bar{x}}}{2} \\ \overline{I}_{\bar{z}} &= \frac{I_a - I_{\bar{z}}}{2} \sin(\Omega t) + \frac{I_a + I_{\bar{z}}}{2} \end{aligned} \quad (VI.2)$$

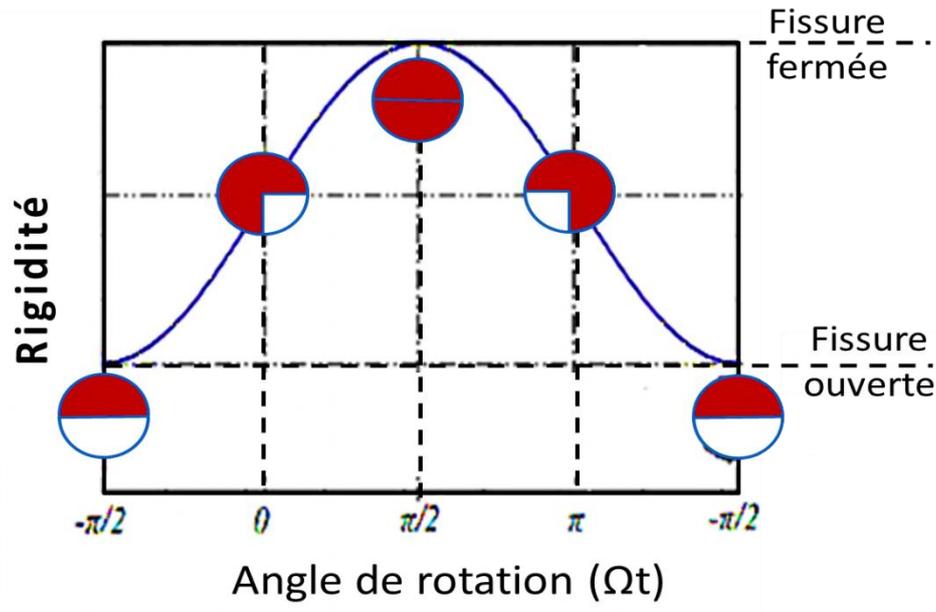


Figure IV.25: Courbe de variation de la rigidité de l'arbre en présence d'une fissure transversale respiratoire.

Les figures IV.26 et IV.27 exposent respectivement, la variation des précessions indirecte et directe de la première fréquence critique par rapport à l'angle de rotation pour des profondeurs (μ) différentes sachant que la fissure est localisée au niveau du premier élément.

- Pour $\Omega t = \pi/2$, la valeur de fréquence est maximum, elle est identique à la fréquence d'un rotor sain.
- Pour $\Omega t = -\pi/2$, Dans cette angle la valeur de fréquence est minimum ce qui montre que l'effet de fissure est très grand où la fissure est totalement ouverte.
- La diminution de fréquence à l'angle $0 < \Omega t < \pi$ est légère, ceci est à cause de la fermeture de la fissure.

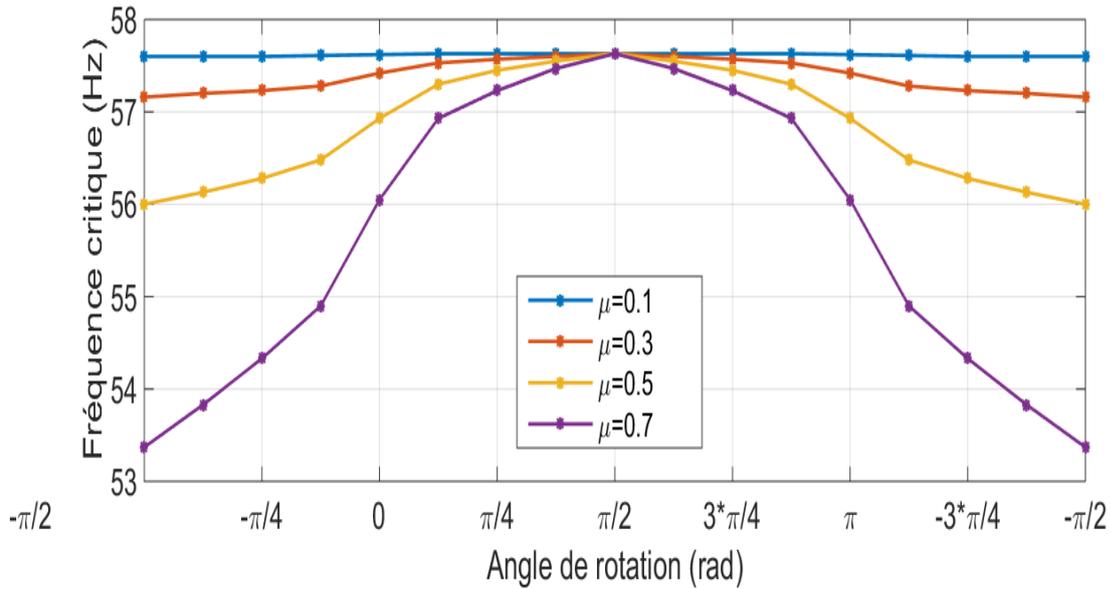


Figure IV.26: Variation de fréquence de premier mode (indirect) en fonction de l'angle de rotation et la profondeur de la fissure.

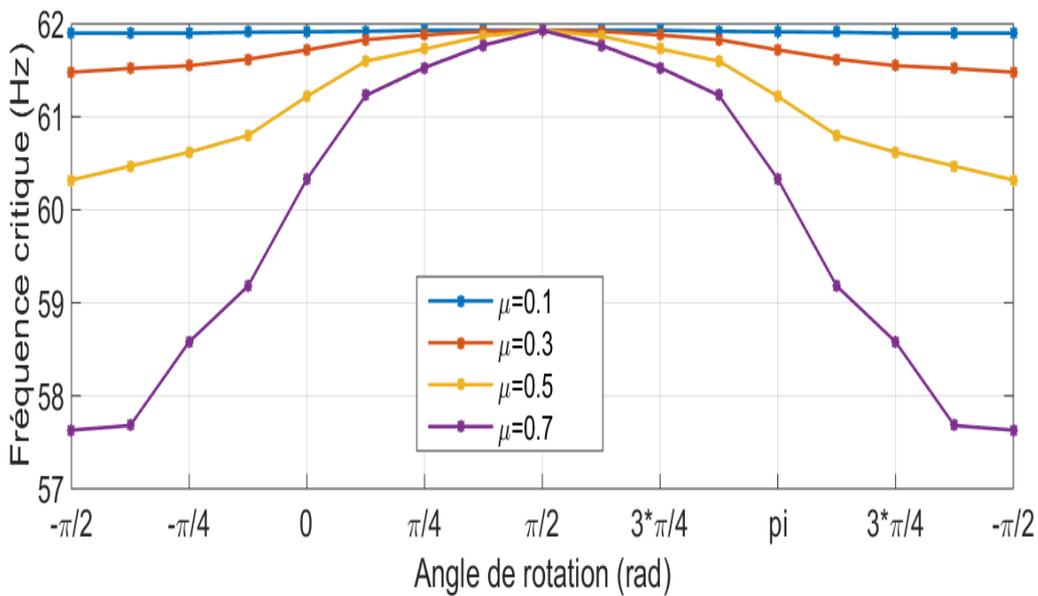


Figure IV.27: Variation de fréquence de premier mode (direct) en fonction de l'angle de rotation et la profondeur de la fissure.

VI.4. Nouvelle approche pour l'étude du comportement vibratoire d'un rotor fissuré

VI.4.1. Présentation de l'approche

Les travaux antérieurs sur les arbres fissurés sont considérés que toute la longueur de l'élément qui contient la fissure est fissuré c'est à dire que la largeur de la fissure est égal à la longueur de l'élément, par contre dans la réalité la largeur de la fissure est très petite.

Pour la méthode de rigidité variable, on ne peut pas prendre un nombre important d'éléments sinon la rigidité du rotor fissuré sera identique à celle du rotor sain cela à cause de la légère diminution des valeurs des moments d'inerties. Par exemple, Al-Shudeifat et Butcher [74] prennent une valeur de la longueur de l'élément fissuré en fonction de ces résultats expérimentaux et estime que le nombre adéquat à prendre est égal à 6 éléments.

Dans l'approche proposée, on suppose que :

- Les propriétés géométriques (profondeur, largeur) de la fissure sont supposées inconnues.
- La diminution de rigidité de l'arbre en présence d'une fissure peut être définie par un pourcentage de diminution α , où la rigidité de l'élément fissurée par rapport à un élément sain est donnée par la formule suivante

$$K_{fissuré} = \alpha \times K_{non-fissuré} \quad (VI.3)$$

Le facteur α compris entre $0 < \alpha \leq 1$, quand $\alpha = 0$ implique que une rupture totale de l'élément et si $\alpha = 1$ implique que l'élément n'est pas fissuré.

VI.4.1.1. Modèle de fissure ouverte

VI.4.1.1.1. Rotor à l'état stationnaire ($\Omega = 0$)

La variation les fréquences propres de trois premiers modes (précessions directe et indirecte) du rotor en fonction du facteur de diminution de rigidité α et la position de la fissure est présentée dans les tableaux IV.12, IV.13 et IV.14. Les résultats de ces tableaux sont illustrés dans les figures IV.28 aux IV.36.

Facteur α	Fréquences propres (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\alpha=1$	59.69	59.69	180.3	180.3	429.7	180.3
$\alpha=0.9$	59.56	59.56	179	179	424.69	179
$\alpha=0.8$	59.38	59.38	177.44	177.44	418.68	177.44
$\alpha=0.7$	59.17	59.17	175.46	175.46	411.38	175.46
$\alpha=0.6$	58.89	58.89	172.9	172.9	402.42	172.9
$\alpha=0.5$	58.50	58.50	169.48	169.48	391.34	169.48
$\alpha=0.4$	57.91	57.91	164.72	164.72	377.55	164.72
$\alpha=0.3$	56.95	56.95	157.68	157.68	360.42	157.68
$\alpha=0.2$	55.09	55.09	146.52	146.52	339.45	146.52
$\alpha=0.1$	50.07	50.07	127.21	127.21	314.78	127.21

Tableau IV. 12 : Variation des fréquences propres en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

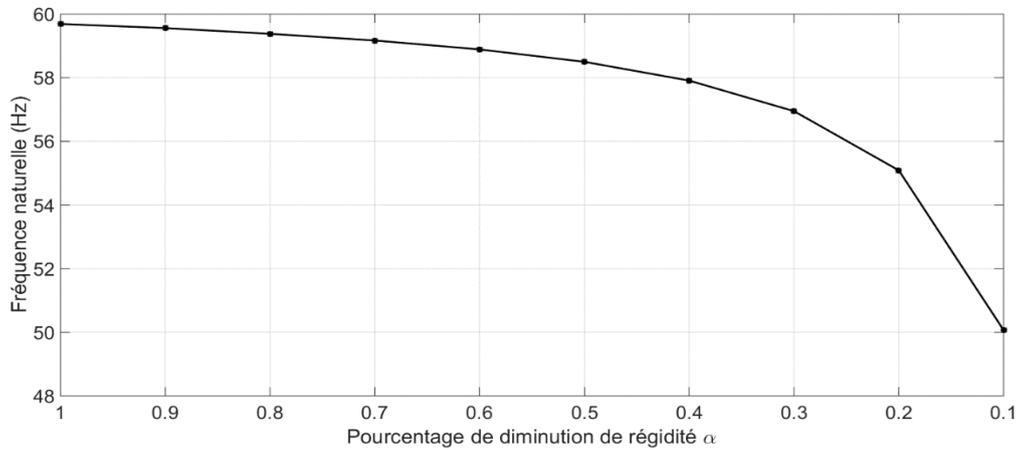


Figure IV.28: Variation des fréquences propres du premier mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

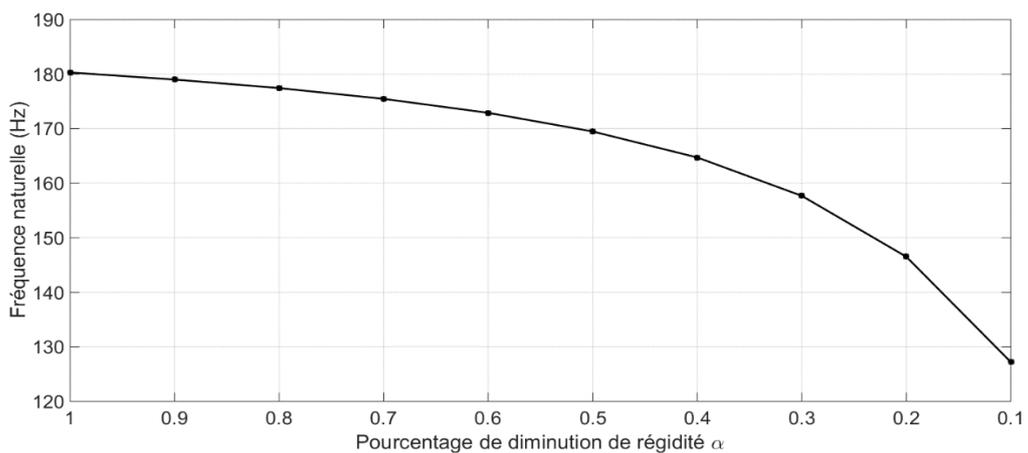


Figure IV.29: Variation des fréquences propres du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

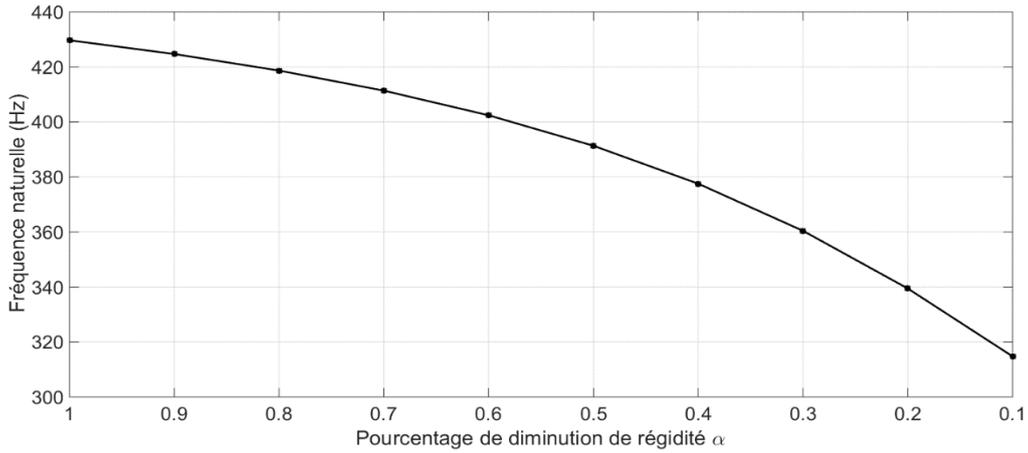


Figure IV.30: Variation des fréquences propres du troisième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

Facteur α	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\alpha=1$	59.69	59.69	180.3	180.3	429.7	180.3
$\alpha=0.9$	59.07	59.07	177.35	177.35	426.94	426.94
$\alpha=0.8$	58.32	58.32	174	174	423.77	423.77
$\alpha=0.7$	57.38	57.38	170.17	170.17	420.06	420.06
$\alpha=0.6$	56.19	56.19	165.74	165.74	415.64	415.64
$\alpha=0.5$	54.62	54.62	160.58	160.58	410.2	410.2
$\alpha=0.4$	52.45	52.45	154.50	154.50	403.15	403.15
$\alpha=0.3$	49.29	49.29	147.24	147.24	393.22	393.22
$\alpha=0.2$	44.27	44.27	138.36	138.36	376.90	376.90
$\alpha=0.1$	35.03	35.03	126.68	126.68	339.44	339.44

Tableau IV. 13: Variation des fréquences propres en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

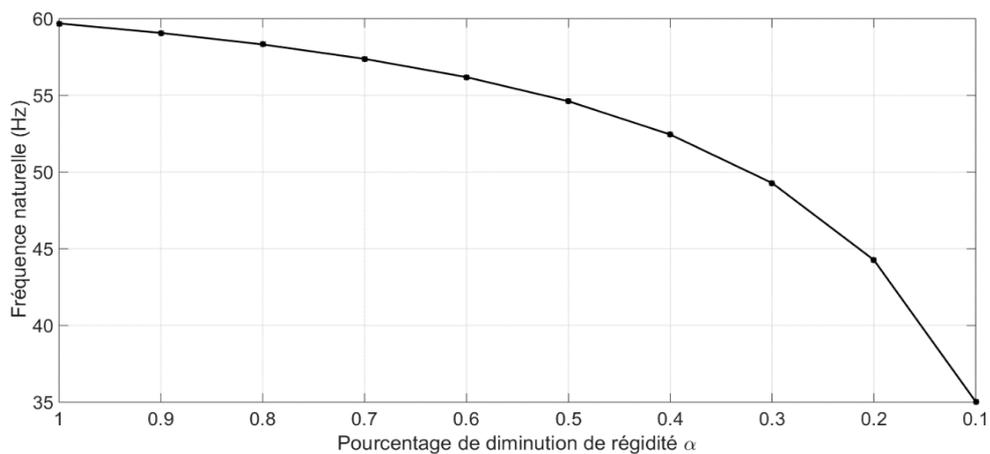


Figure IV.30: Variation des fréquences propres du premier mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

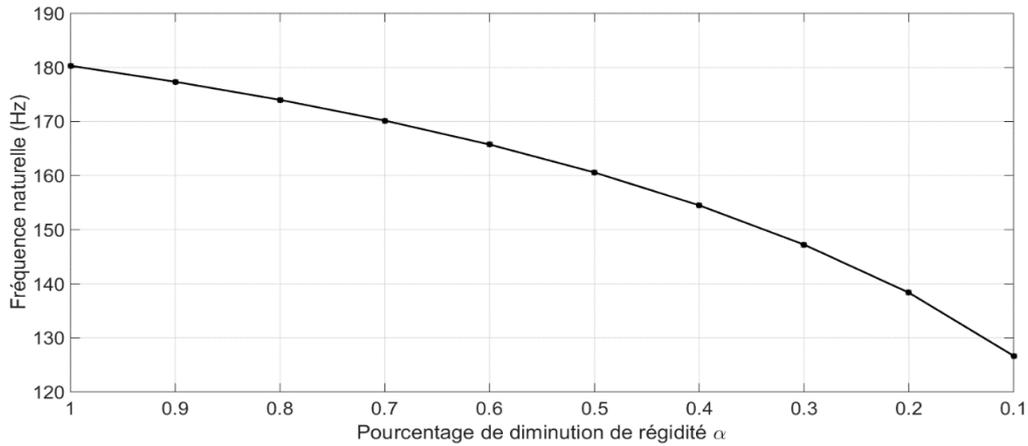


Figure IV.31: Variation des fréquences propres du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

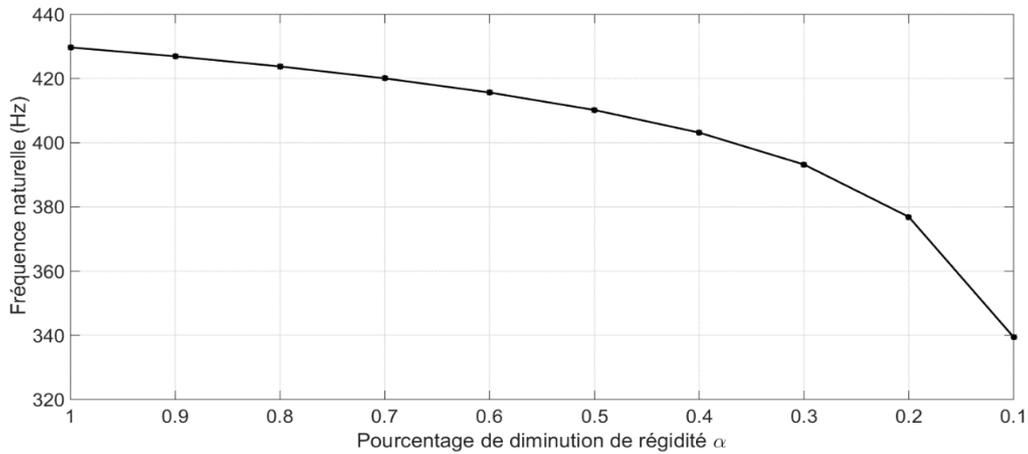


Figure IV.32: Variation des fréquences propres du troisième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

Facteur α	Fréquences propres (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
$\alpha=1$	59.69	59.69	180.3	180.3	429.7	180.3
$\alpha=0.9$	58.80	58.80	179.72	179.72	426	426
$\alpha=0.8$	57.75	57.75	179.04	179.04	421.76	421.76
$\alpha=0.7$	56.48	56.48	178.21	178.21	416.85	416.85
$\alpha=0.6$	54.90	54.90	177.2	177.2	411.10	411.10
$\alpha=0.5$	52.90	52.90	175.93	175.93	404.25	404.25
$\alpha=0.4$	50.25	50.25	174.28	174.28	395.92	395.92
$\alpha=0.3$	46.59	46.59	172	172	385.47	385.47
$\alpha=0.2$	41.15	41.15	168.46	168.46	371.46	371.46
$\alpha=0.1$	31.91	31.91	161.09	161.09	348.76	348.76

Tableau IV. 14: Variation des fréquences propres en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

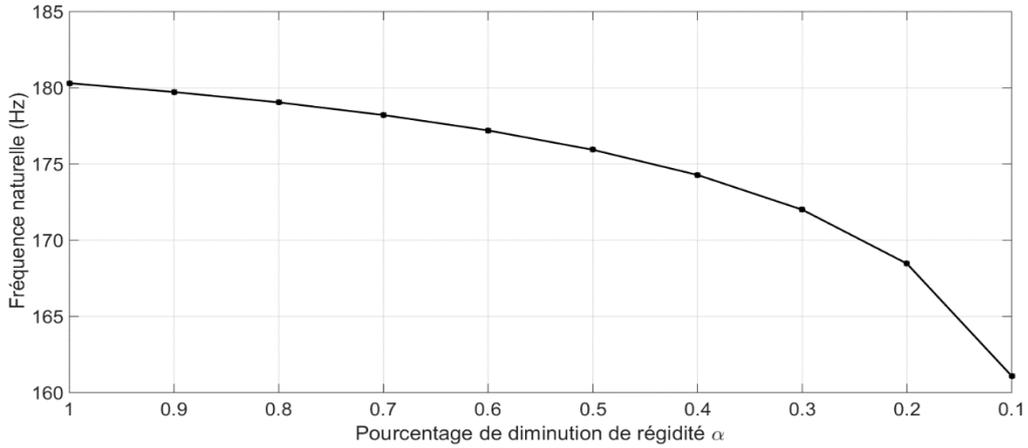


Figure IV.33: Variation des fréquences propres du premier mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

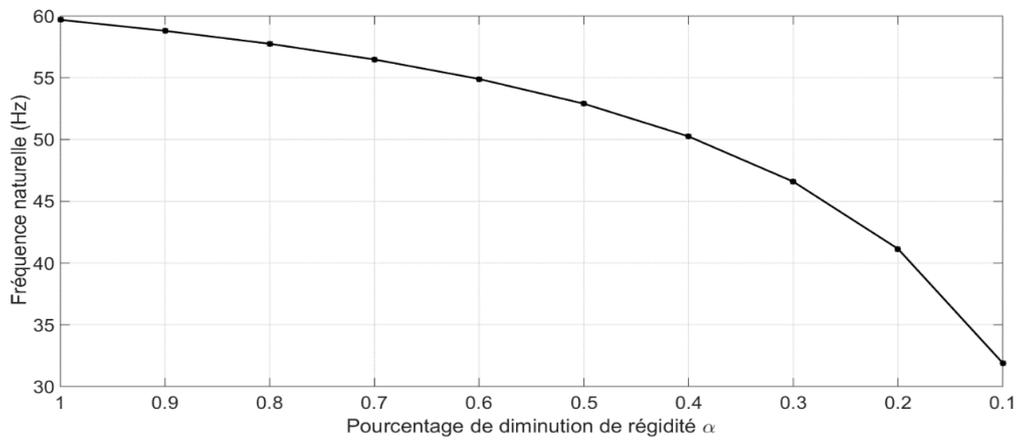


Figure IV.34: Variation des fréquences propres du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

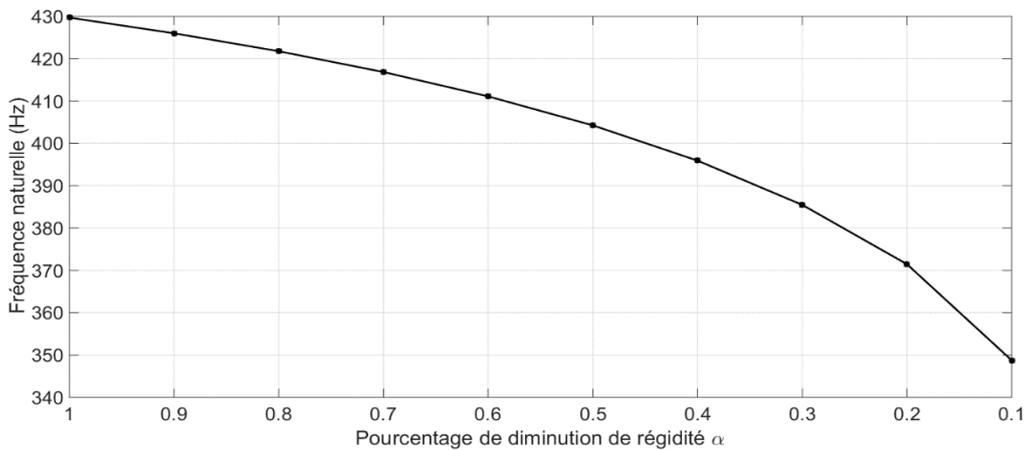


Figure IV.35: Variation des fréquences propres du troisième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

Les fréquences naturelles à l'état stationnaire diminuent de façon linéaire en fonction du facteur α de la même façon de son variation en fonction de la profondeur de la fissure.

Les tableaux IV.12, IV.13 et IV.14 et les figures IV.28 - IV.36 présentent que, quand la fissure rapproche au milieu de rotor, les fréquences du premier et deuxième mode réduisent, la courbe de déformation de rotor est identique à la courbe variation des fréquences par rapport à la position de la fissure.

VI.4.1.1.2. Rotor à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$)

Dans la réalité, la rigidité de l'arbre de rotor avec une fissure ouverte ne varie pas au cours de la rotation du rotor, dans cette partie, on analyse les changements des fréquences critiques du rotor par rapport la position de la fissure et le pourcentage de diminution de rigidité α sachant que l'orientation de la fissure n'est pas prise en considération.

Les tableaux IV.15, IV.16 et IV.17 indiquent la variation des fréquences critiques de trois premiers modes (direct et indirect) par rapport au facteur α où la fissure est située au niveau de premier, deuxième et troisième élément.

Les résultats de ces tableaux sont illustrés dans les figures IV.37 aux IV.45.

Facteur α	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
1	57.65	61.95	175.8	184.5	413.2	439
0.9	57.53	61.78	174.8	182.9	405.9	436.2
0.8	57.38	61.57	173.52	181	396.2	432.4
0.7	57.2	61.32	171.9	178.7	383.8	427.2
0.6	56.97	60.98	169.74	175.77	368.32	421.5
0.5	56.63	60.51	166.8	172	349.83	413.6
0.4	56.13	59.83	162.4	167	328.51	407.8
0.3	55.31	58.69	155.49	159.9	304.78	400
0.2	53.7	56.55	143.83	149.34	279.64	383.3
0.1	49.2	50.95	122.54	132	255.23	375.2

Tableau IV. 15: Variation des fréquences critiques en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

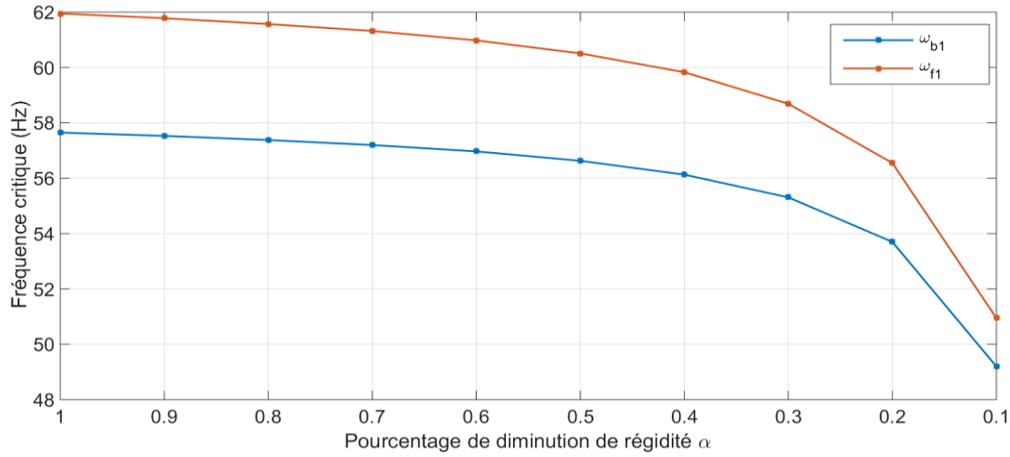


Figure IV.36: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

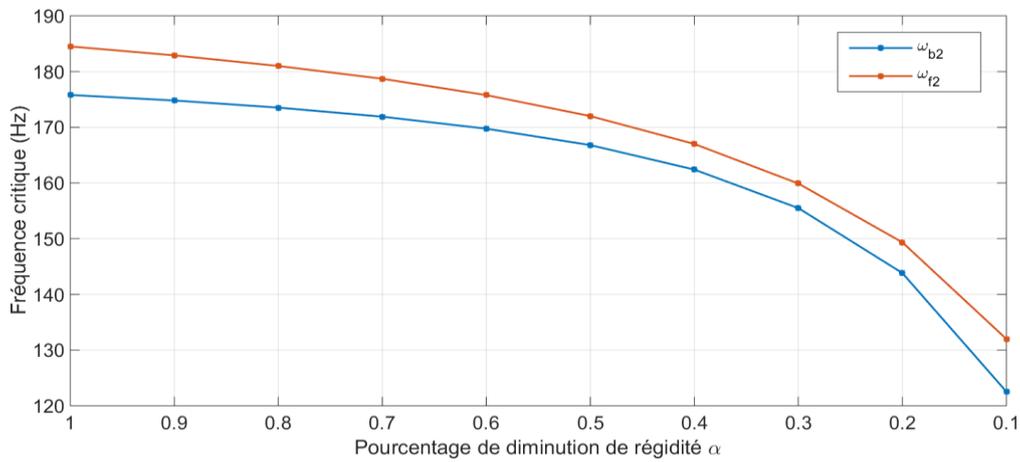


Figure IV.37: Variation des fréquences critiques du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

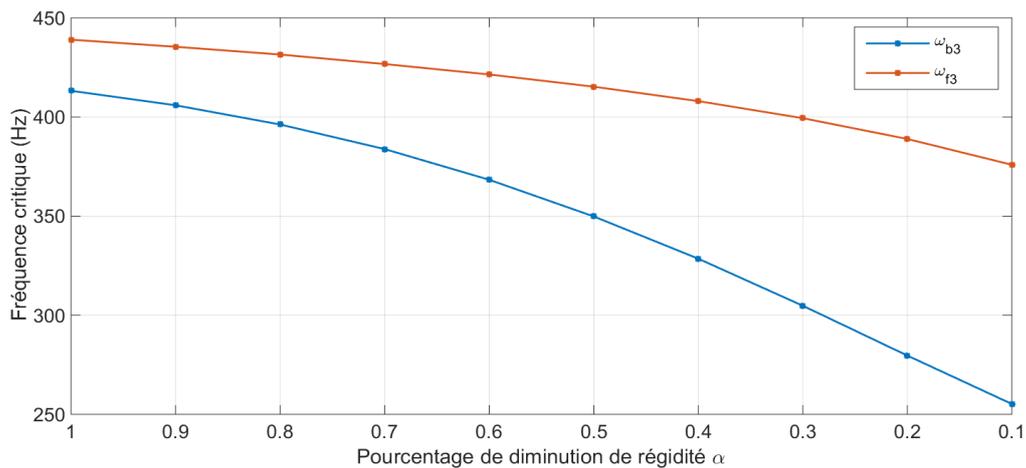


Figure IV.38: Variation des fréquences critiques du troisième mode en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

Facteur α	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
1	57.65	61.95	175.8	184.5	413.2	439
0.9	57.07	61.35	172.7	181.7	411.9	435.2
0.8	56.28	60.55	169.2	178.5	410.3	431.7
0.7	55.37	59.65	165.2	174.9	408.2	426.5
0.6	54.22	58.47	160.7	170.6	405.5	420.9
0.5	52.6	56.88	155.3	165.8	401.9	414.6
0.4	50.5	54.67	149.1	159.8	396.8	406.5
0.3	47.38	51.5	141.8	152.8	388.8	395.6
0.2	42.45	46.35	132.8	144.1	374.4	378.3
0.1	33.45	36.87	121.4	132.4	338.1	340.2

Tableau IV. 16: Variation des fréquences critiques en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

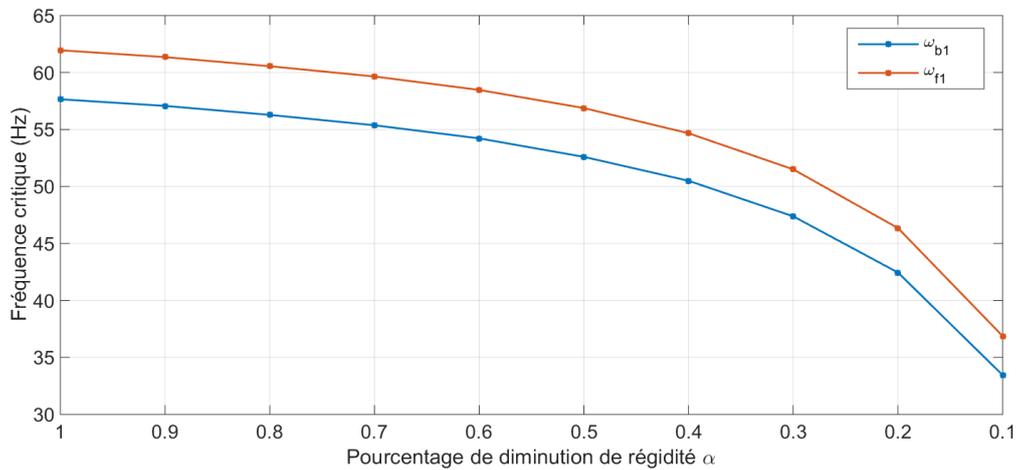


Figure IV.39: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

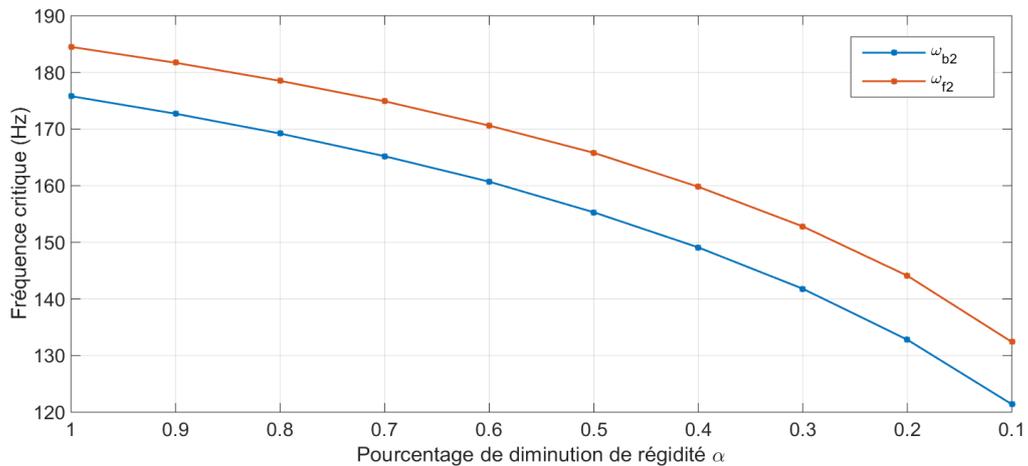


Figure IV.40: Variation des fréquences critiques du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

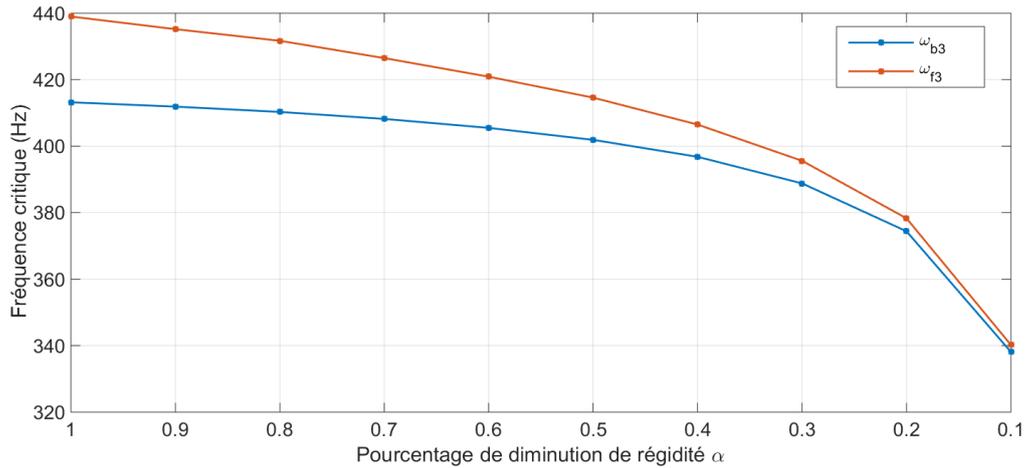


Figure IV.41: Variation des fréquences critiques du troisième mode en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

Facteur α	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
1	57.65	61.95	175.8	184.5	413.2	439
0.9	56.75	61	175.2	183.9	410.6	434.8
0.8	55.72	59.97	174.5	183.3	407.5	430
0.7	54.55	58.63	173.7	182.5	403.8	424.5
0.6	53	57	172.6	181.5	399.3	418.1
0.5	51.05	54.88	171.3	180.3	393.9	410.4
0.4	48.53	52.18	169.6	178.7	387.2	401.2
0.3	45	48.38	167.3	176.4	378.5	389.8
0.2	39.7	42.7	163.7	173	366.6	374.6
0.1	30.83	33.13	156.3	165.8	346.5	350.3

Tableau IV. 17: Variation des fréquences critiques en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

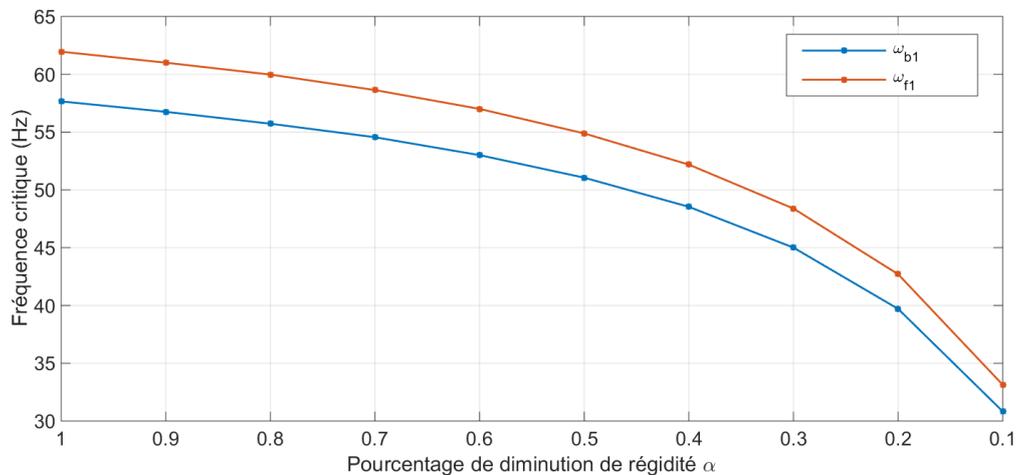


Figure IV.42: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

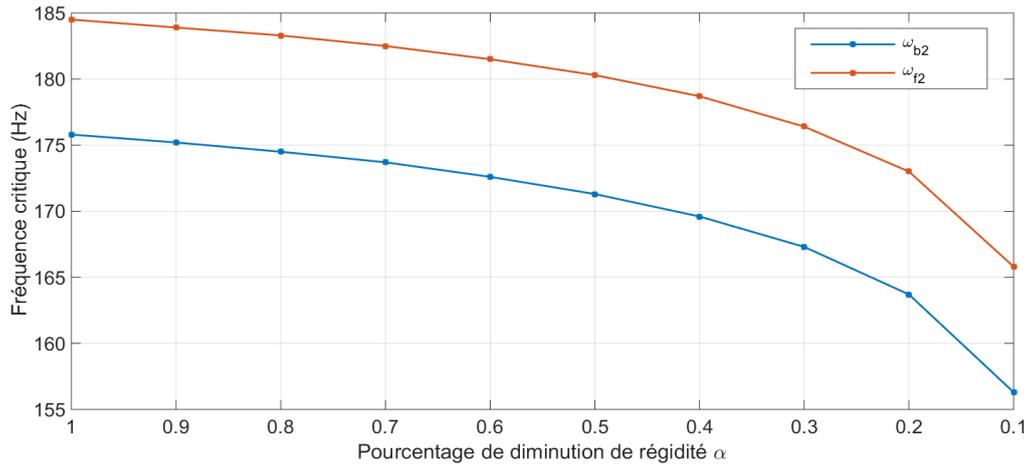


Figure IV.43: Variation des fréquences critiques du deuxième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

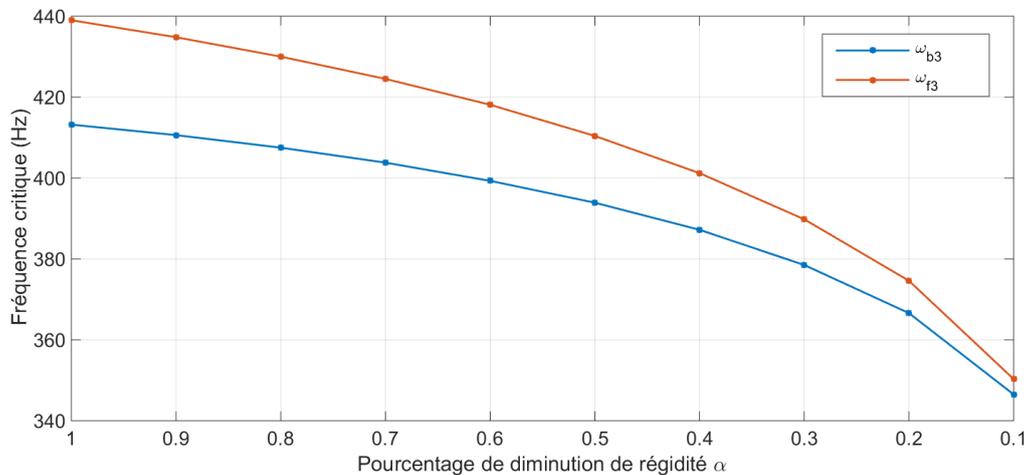


Figure IV.44: Variation des fréquences critiques du troisième mode en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

D'après Les tableaux IV.15, IV.16 et IV.17, on constate que :

- La diminution de rigidité et la position de la fissure influent sur les fréquences naturelles. Les valeurs des fréquences critiques diminuent pour n'importe quelle position de la fissure. Ces fréquences peuvent être stockées dans une base des données, et travers leur analyse on peut prédire la position et l'importance de la fissure.
- Plus la position de la fissure avance vers le milieu du rotor plus son influence sur les fréquences est importante.

VI.4.1.1.3. Estimation de la gravité de la fissure ouverte

Pour estimer la gravité de la fissure sur le comportement vibratoire du rotor, nous utilisons la variation en pourcentage des fréquences naturelles (variation relative des fréquences naturelles) qui est définie comme suit [118] :

$$C_i = \left(\frac{\omega_i^{non-fissuré} - \omega_i^{fissuré}}{\omega_i^{non-fissuré}} \right) \times 100 \quad (VI.4)$$

Les tableaux IV.18, IV.19 et IV.20 représentent respectivement la variation relative des fréquences (gravités de la fissure) des trois premiers modes (direct et indirect) en fonction de la diminution de rigidité (facteur α) où la fissure est située au niveau du premier, deuxième et troisième élément. Les résultats de ces tableaux sont représentés dans les figures IV.46 - IV.51.

Facteur α	Variation relative des fréquences (%)					
	C_{b1}	C_{f1}	C_{b2}	C_{f2}	C_{b3}	C_{f3}
1	0	0	0	0	0	0
0.9	0,21	0,27	0,57	0,87	1,77	0,82
0.8	0,47	0,61	1,30	1,90	4,11	1,71
0.7	0,78	1,02	2,22	3,14	7,12	2,80
0.6	1,18	1,57	3,45	4,73	10,86	4,00
0.5	1,77	2,32	5,12	6,78	15,34	5,40
0.4	2,64	3,42	7,62	9,49	20,50	7,06
0.3	4,06	5,26	11,55	13,33	26,24	9,02
0.2	6,85	8,72	18,19	19,06	32,32	11,41
0.1	14,66	17,76	30,30	28,46	38,23	14,37

Tableau IV. 18: Variation relative des fréquences en fonction de α dans le cas où le premier élément est fissuré.

Facteur α	Variation relative des fréquences (%)					
	C_{b1}	C_{f1}	C_{b2}	C_{f2}	C_{b3}	C_{f3}
1	0	0	0	0	0	0
0.9	1,01	0,97	1,76	1,52	0,31	0,87
0.8	2,38	2,26	3,75	3,25	0,70	1,66
0.7	3,95	3,71	6,03	5,20	1,21	2,85
0.6	5,95	5,62	8,59	7,53	1,86	4,12
0.5	8,76	8,18	11,66	10,14	2,73	5,56
0.4	12,40	11,75	15,19	13,39	10,50	7,40
0.3	17,81	16,87	19,34	17,18	5,91	9,89
0.2	26,37	25,18	24,46	21,90	9,39	13,83
0.1	41,98	40,48	30,94	28,24	18,18	22,51

Tableau IV. 19: Variation relative des fréquences en fonction de α dans le cas où le deuxième élément est fissuré.

Facteur α	Variation relative des fréquences (%)					
	C_{b1}	C_{f1}	C_{b2}	C_{f2}	C_{b3}	C_{f3}
1	0	0	0	0	0	0
0.9	1,56	1,53	0,34	0,33	0,63	0,96
0.8	3,35	3,20	0,74	0,65	1,38	2,05
0.7	5,38	5,36	1,19	1,08	2,27	3,30
0.6	8,07	7,99	1,82	1,63	3,36	4,76
0.5	11,45	11,41	2,56	2,28	4,67	6,51
0.4	15,82	15,77	3,53	3,14	6,29	8,61
0.3	21,94	21,90	4,84	4,39	8,40	11,21
0.2	31,14	31,07	6,88	6,23	11,28	14,67
0.1	46,52	46,52	11,09	10,14	16,14	20,21

Tableau IV. 20: Variation relative des fréquences en fonction de α dans le cas où le troisième élément est fissuré.

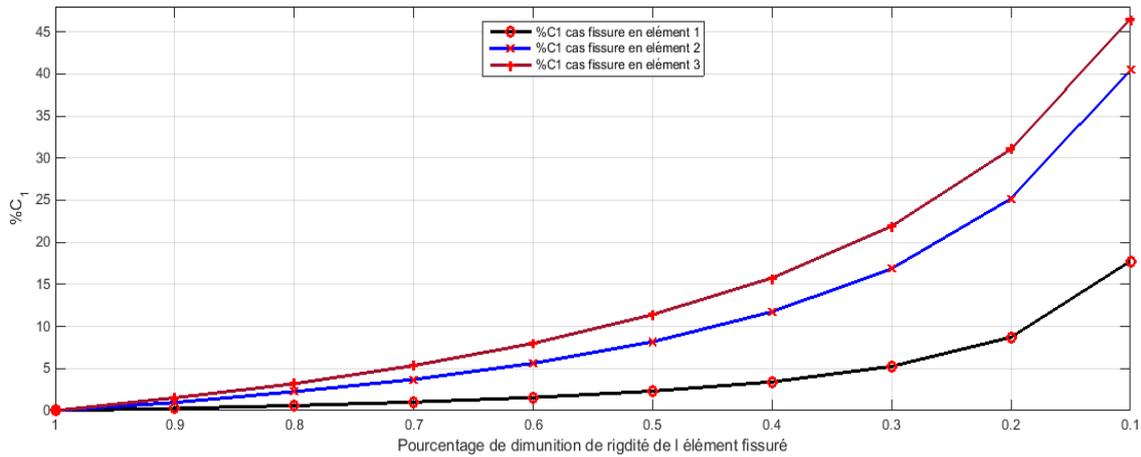


Figure IV.45: Variation relative des fréquences naturelles du premier mode (indirecte).

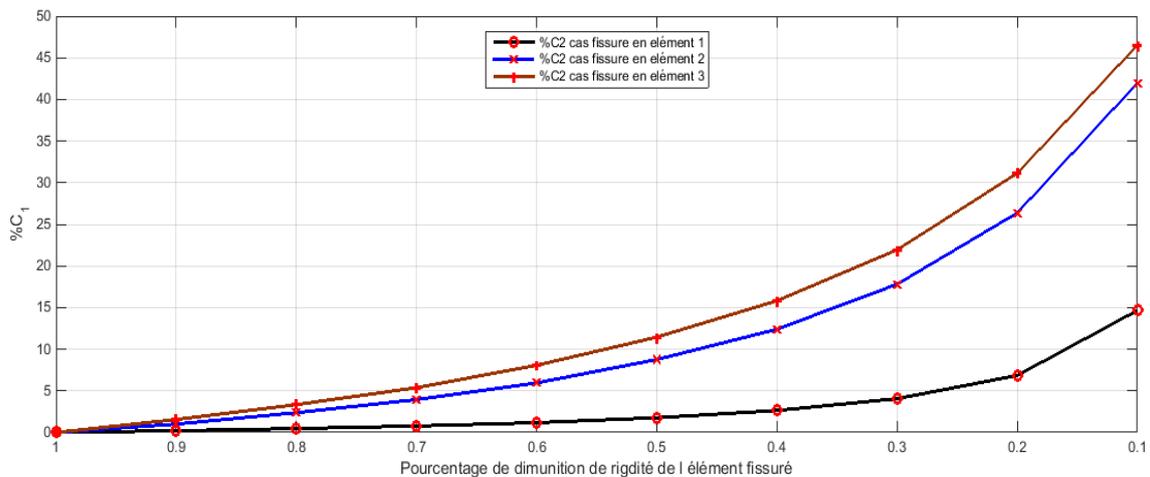


Figure IV.46: Variation relative des fréquences naturelles du premier mode (directe).

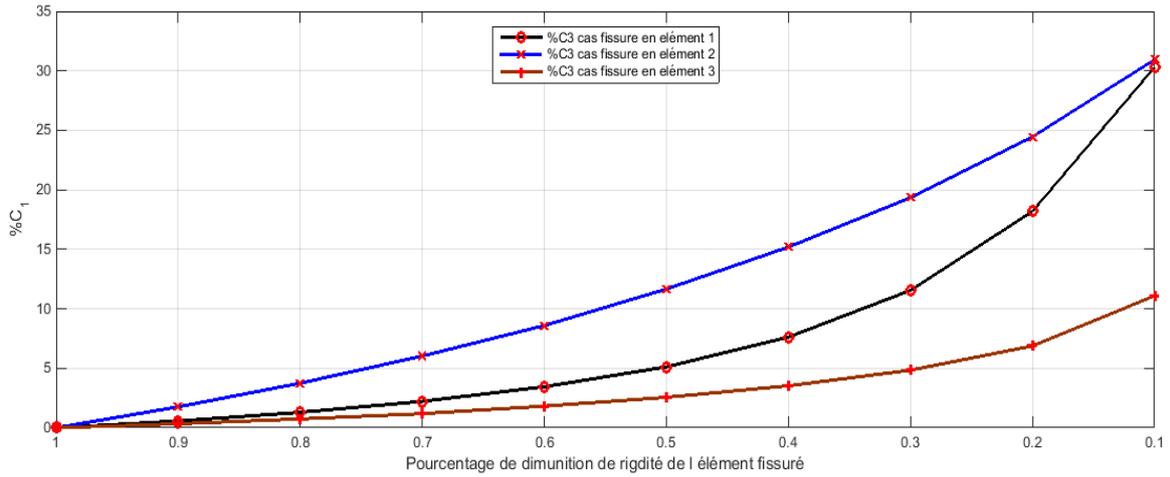


Figure IV.47: Variation relative des fréquences naturelles du deuxième mode (indirecte).

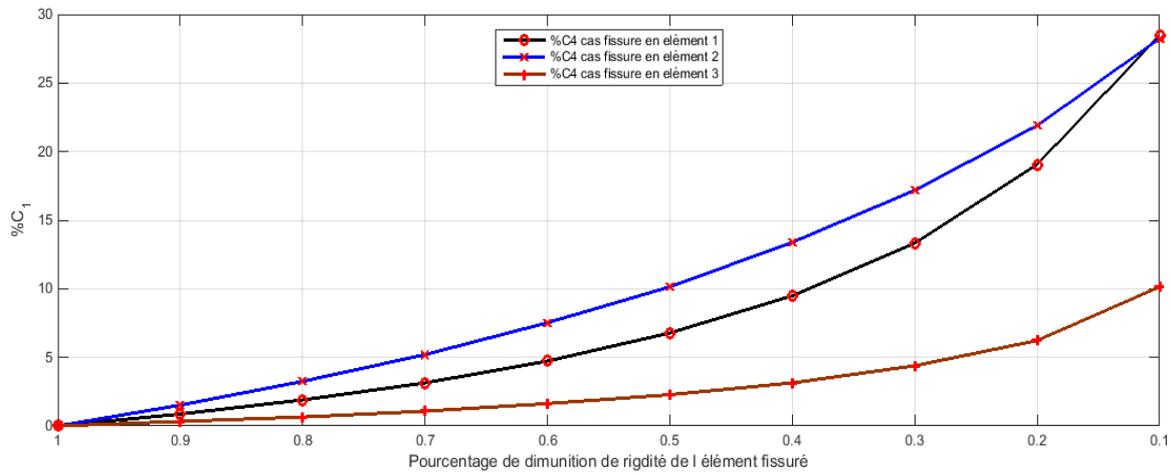


Figure IV.48: Variation relative des fréquences naturelles du deuxième mode (directe).

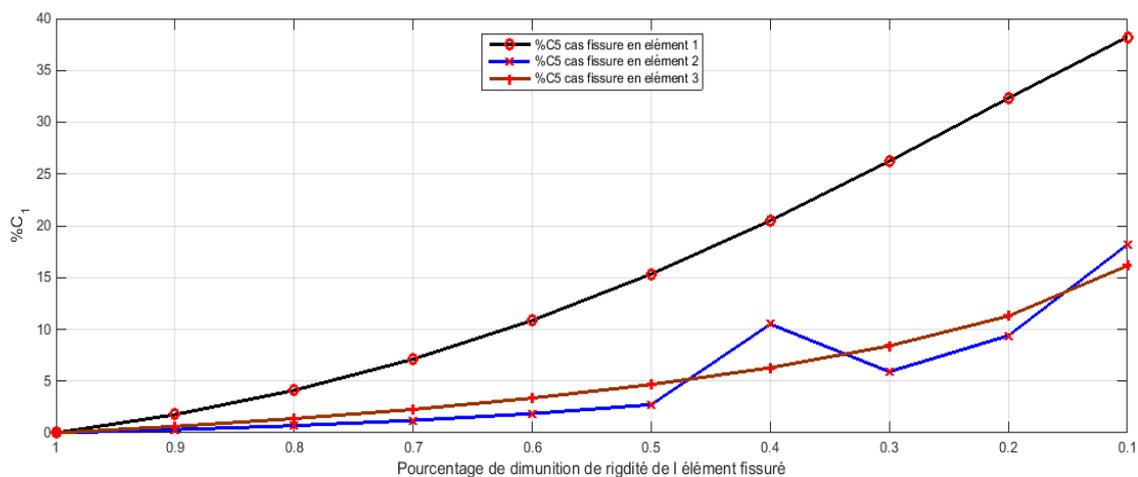


Figure IV.49: Variation relative des fréquences naturelles du troisième mode (indirecte).

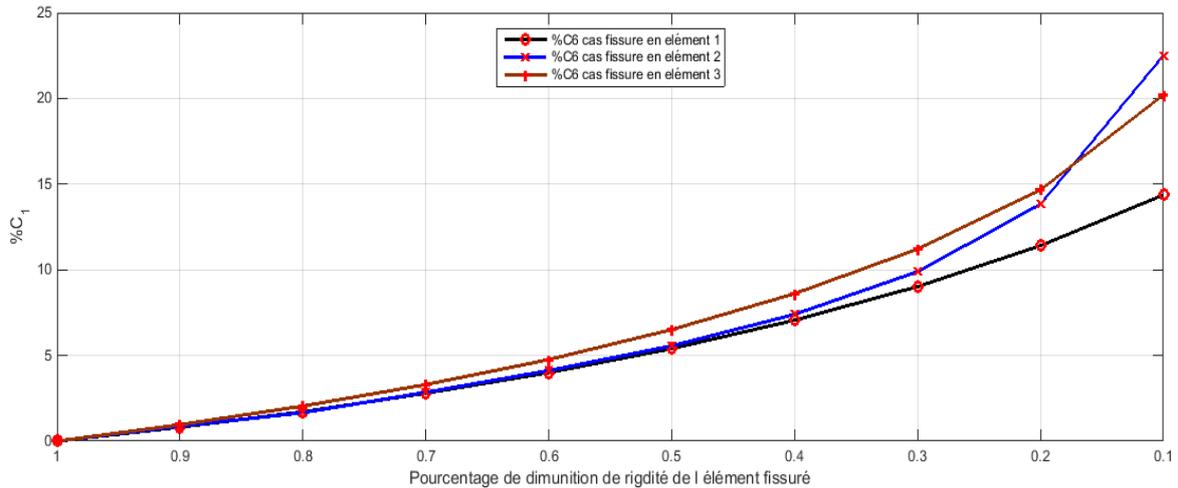


Figure IV.50: Variation relative des fréquences naturelles du troisième mode (directe).

D'après les figures IV.46 - IV.51, La variation relative est donnée comme suit :

- **Premier mode** : la plus grande variation est obtenue quand la fissure est située au niveau du troisième élément (le milieu du rotor) ; c'est-à-dire au ventre de la forme de vibration.
- **Deuxième mode** : la plus grande variation est obtenue quand la fissure est située au niveau du deuxième élément ; c'est-à-dire toujours au ventre de la forme de vibration, tandis que la plus petite variation est obtenue quand la fissure est située au niveau du troisième élément ; c'est-à-dire au nœud de la forme de vibration
- **Troisième mode en précession directe** : la plus grande variation est obtenue quand la fissure est située au niveau du premier élément ; c'est-à-dire toujours au ventre de la forme de vibration.
- **Troisième mode en précession indirecte** : le cas est identique au cas du premier mode avec des variations presque identiques.

VI.4.1.2. Modèle de fissure respiratoire

Dans notre approche, et pour le modèle de la fissure respiratoire, nous tenons en compte la variation périodique de la rigidité en fonction de l'angle de rotation, nous proposons une fonction $f(\alpha, \Omega t)$ qui représente la variation de la rigidité en fonction de facteur de diminution α et l'angle de rotation.

L'expression de la rigidité d'un élément fissuré en fonction de la rigidité d'un élément sain est donnée par :

$$\overline{K_{fissuré}} = f(\alpha, \Omega t) \times K_{non-fissuré} \quad (VI.5)$$

La fonction $f(\alpha, \Omega t)$ est donnée par la formule suivante :

$$f(\alpha, \Omega t) = \frac{1 - \alpha}{2} \sin(\Omega t) + \frac{1 + \alpha}{2} \quad (\text{VI.6})$$

- Pour $\Omega t = -\pi/2$, où la fissure est totalement ouverte, on trouve $f(\alpha, \Omega t = -\pi/2) = \alpha$, et la rigidité de l'élément fissuré est égale à la rigidité d'un élément contenant une fissure ouverte

$$\overline{K}_{fissuré} = \alpha \times K_{non-fissuré}$$

- Pour $\Omega t = \pi/2$, où la fissure est totalement fermée, on trouve $f(\alpha, \Omega t = \pi/2) = 1$, et la rigidité de l'élément fissuré est égale à la rigidité d'un élément sain $\overline{K}_{fissuré} = K_{non-fissuré}$.

- Pour $\Omega t = 0$ ou $\Omega t = \pi$ où la fissure est partiellement ouverte, on suppose que la rigidité de l'élément fissuré est la moitié de la somme de la rigidité d'un élément sain et un élément contenant une fissure ouverte et on trouve $f(\alpha, \Omega t = \pi/2) = (1+\alpha)/2$, où $\overline{K}_{fissuré} = \frac{1+\alpha}{2} K_{non-fissuré}$

La figure IV.52 représente la variation de la fréquence critique du premier mode en fonction de facteur α et l'angle de rotation Ωt dans le cas où $\alpha=0.3$ et la fissure se trouve au niveau de troisième élément, on voit que la fréquence varie entre la valeur d'un rotor sain et la valeur d'un rotor avec une fissure ouverte.

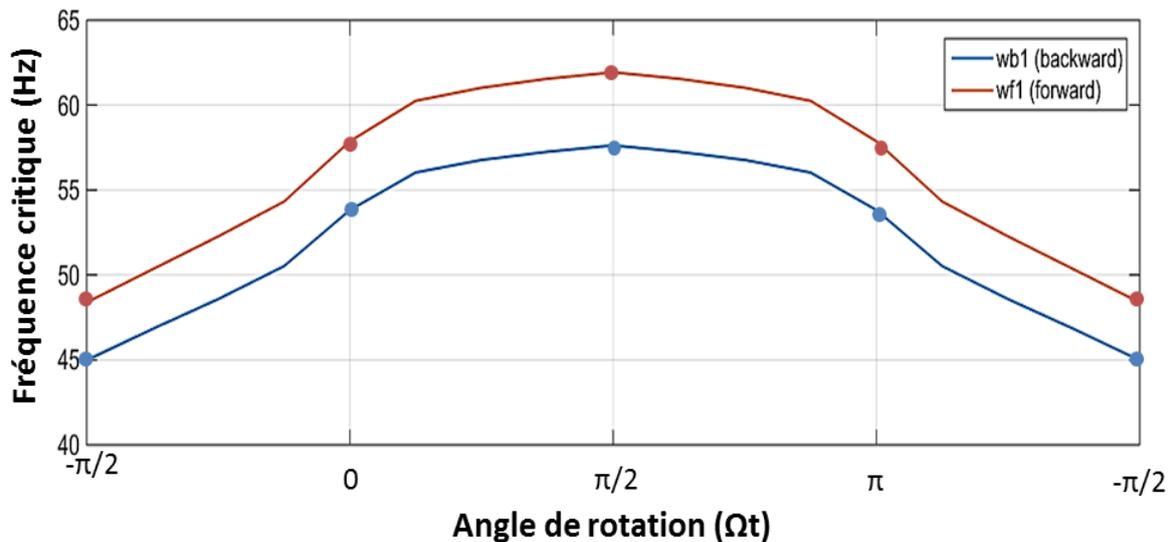


Figure IV.51: Variation des fréquences critiques du premier mode en fonction de l'angle de rotation (Ωt) dans le cas où le troisième élément est fissuré et $\alpha=0.3$.

VI.4.1.2.1. Estimation de la gravité de la fissure respiratoire

La variation relative des fréquences naturelles dans le cas de la fissure respiratoire est variable par rapport à l'angle de rotation, les figures IV.53 - IV.55 représentent la variation relative des fréquences propres de trois premiers modes dans le cas où $\Omega=0$ et la fissure se trouve au niveau de troisième élément.

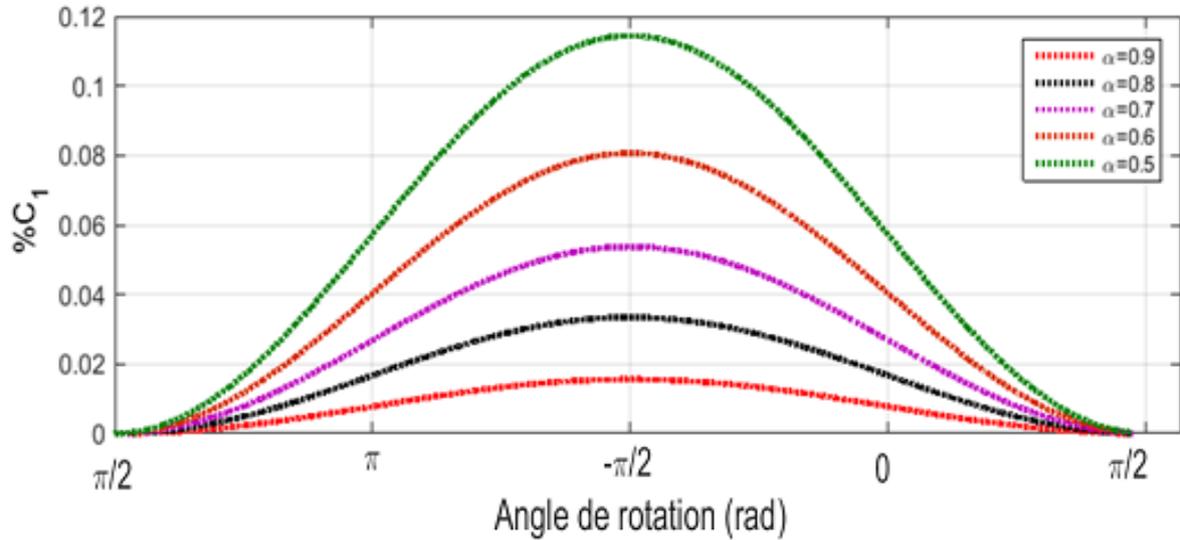


Figure IV.52: Variation relative des fréquences propres du premier mode en fonction de facteur α et l'angle de rotation (Ωt).

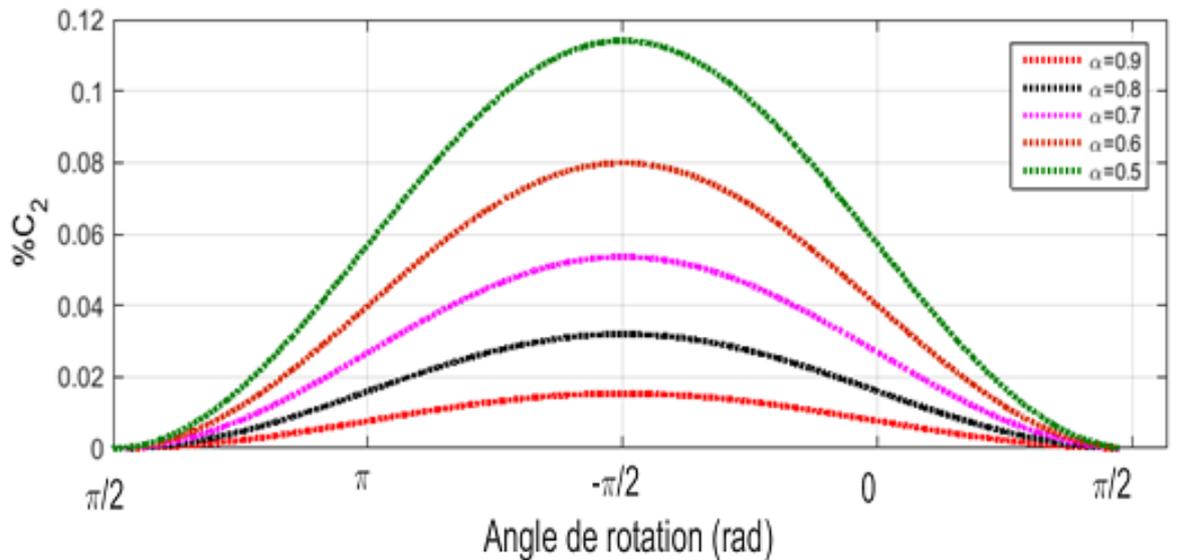


Figure IV.53: Variation relative des fréquences propres du deuxième mode en fonction de facteur α et l'angle de rotation (Ωt).

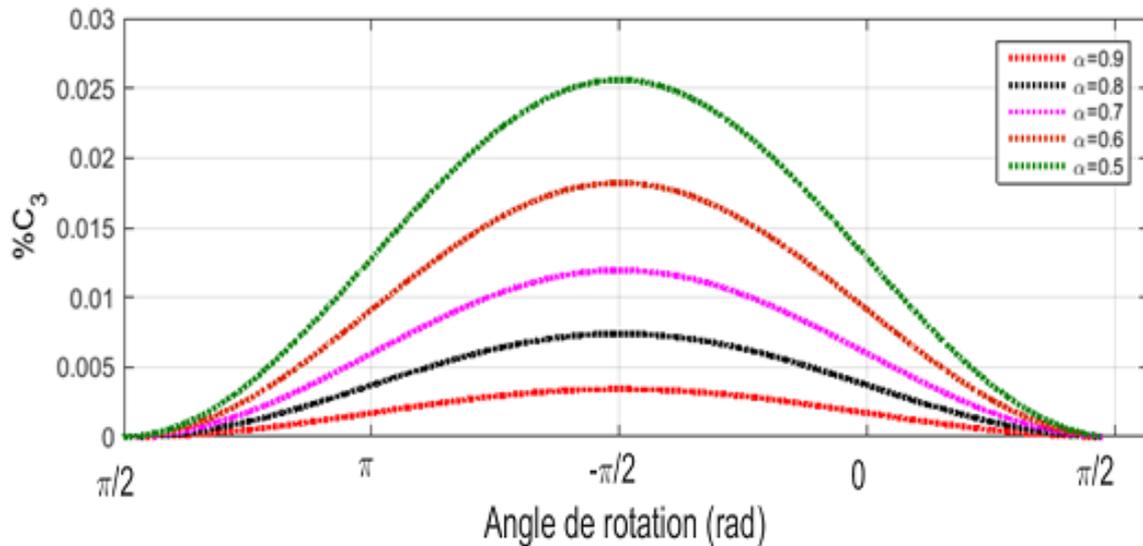


Figure IV.54: Variation relative des fréquences propres du troisième mode en fonction de facteur α et l'angle de rotation (Ωt).

D'après les figures IV.53, IV.54 et IV.55, on constate que :

- Quand α diminue la variation relative des fréquences C_1 , C_2 et C_3 augmentent.
- C_1 , C_2 et C_3 prennent une valeur maximum à l'angle $-\pi/2$ où la fissure est totalement ouverte.
- C_1 , C_2 et C_3 prennent la valeur zéro à l'angle $\pi/2$ où la fissure est totalement fermée.
- La prédiction de la gravité d'une fissure respiratoire est difficile par rapport à fissure ouverte, car la fréquence du rotor varie pendant la rotation et nous pouvons pas trouvé une valeur fixée pour les variation relatives des fréquences (C_i)

VI.4.1.3. Réponse dynamique

L'influence de la variation de la rigidité du rotor due à la présence des fissures sur les amplitudes des vibrations est présentée dans cette partie. La figure IV.56 illustre le spectre d'amplitude verticale dans le nœud 6 sous l'effet de force de balourd en fonction de la vitesse de rotation d'un rotor sain et un rotor avec une fissure ouverte où $\alpha=0.5$ et le deuxième élément est fissuré.

Cette figure montre que :

- L'amplitude de vibration augmente au voisinage des vitesses critiques.
- Le spectre d'amplitude d'un rotor fissuré est différent par rapport au rotor sain.
- Les fréquences critiques diminuent avec la diminution de rigidité (Figure IV.57).

- La plus grande valeur est obtenue au ventre de la forme de vibration, tandis que la plus petite variation est obtenue au nœud de la forme de vibration.

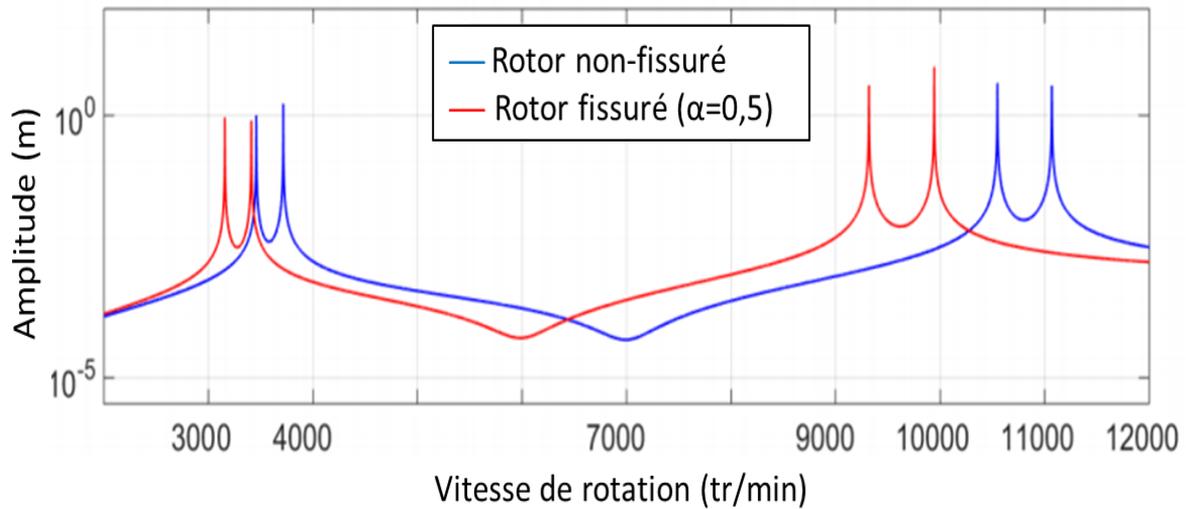


Figure IV.55: Réponse dynamique d'un rotor sain et fissuré.

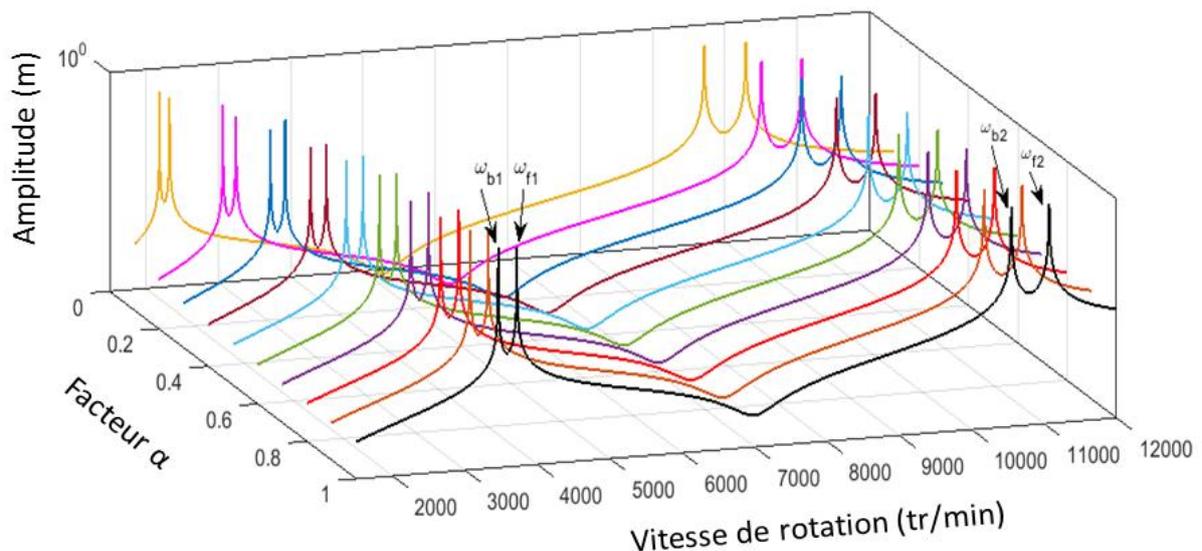


Figure IV.56: Evolution des amplitudes en fonction du pourcentage de diminution de rigidité α .

VI.4.1.4. Influence du nombre des éléments

Dans cette étude, Le même rotor pris précédemment est discrétisé en 12 éléments (Figure IV.58), les deux disques sont fixés aux nœuds 3 et 11 et la longueur d'un élément sera 54 mm. La fissure est supposée être dans la position $L_{fissure}=141$ mm (fissure en élément 3)

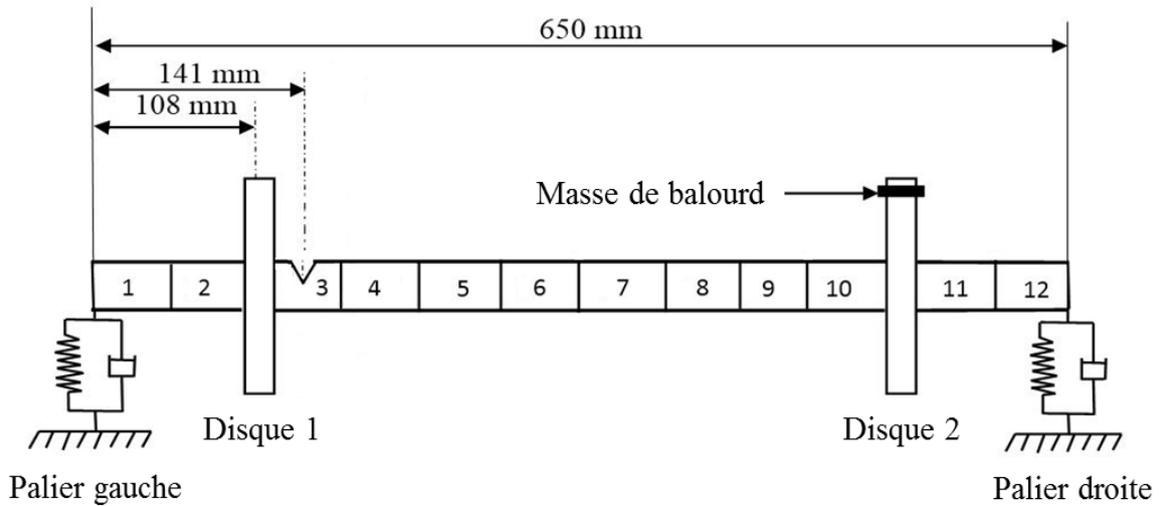


Figure IV.57: Modèle éléments finis du rotor étudié discrétisé en 12 éléments.

Pour étudier l'influence du nombre des éléments de discrétisation sur la variation des fréquences. Le tableau IV.21 donne les valeurs des vitesses critiques de l'arbre non fissuré et fissuré en fonction du coefficient de diminution de rigidité.

Facteur α	Fréquences critiques (Hz)					
	ω_{b1}	ω_{f1}	ω_{b2}	ω_{f2}	ω_{b3}	ω_{f3}
1	57.63	61.93	175.78	184.45	413.09	438.56
0.9	57.37	61.67	175.84	182.73	411.82	435.1
0.8	57.04	61.35	171.53	180.68	410.27	431.17
0.7	56.62	60.93	168.75	178.18	408.33	426.7
0.6	56.07	60.38	165.3	175.1	405.9	421.5
0.5	55.32	59.65	161.1	171.2	402.6	415.5
0.4	54.23	58.58	155.5	166.1	398.2	408.4
0.3	52.48	56.87	148.1	159.2	392.1	399.8
0.2	49.37	53.75	137.9	149.4	383.3	388.9
0.1	42.23	46.5	123.2	134.5	368.9	373.4

Tableau IV.21: Variation des fréquences critiques par rapport à α cas rotor fissuré située au niveau de l'élément 3 pour un rotor discrétisé en 12 éléments.

Dans la figure IV.59, nous présentons la variation d'amplitude au niveau de nœud 6 des rotors fissurés discrétisés en 6 et 12 éléments où $\alpha=0.5$.

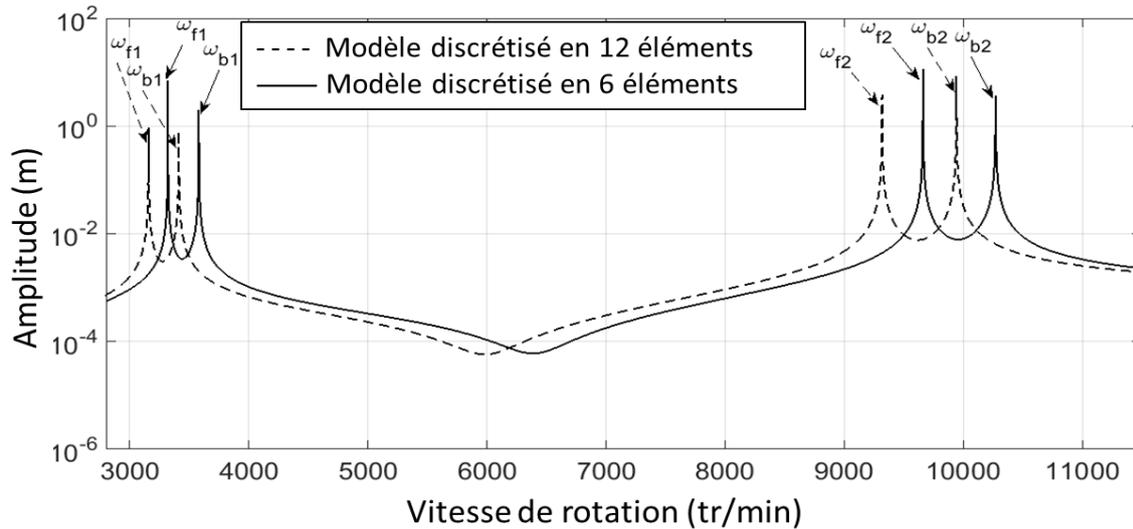


Figure IV.58: Variation d'amplitude en fonction de la vitesse de rotation et le nombre de discrétisation.

En comparant les résultats de tableau IV.21 avec IV.17 et la figure IV.57 avec IV.57, On constate :

- Les fréquences critiques diminuent dans le cas 12 éléments par rapport au cas de 6 éléments parce que dans le cas 12 éléments, la longueur ou bien la rigidité de l'élément fissuré est inférieure à celle dans le cas de 6 éléments.
- La rigidité de l'arbre fissuré étant égale à la rigidité de l'arbre si on augmente le nombre des éléments de discrétisation, où la rigidité de l'élément fissuré devient négligeable par rapport à la rigidité de l'arbre.
- Le choix du nombre des éléments est important dans l'étude du comportement vibratoire des rotors fissurés, donc le choix du nombre des éléments doit être optimal.

VI.4.1.5. Relation entre la profondeur de la fissure et le facteur α

Dans cette section, nous essayons de comparer la variation des fréquences critiques par rapport au facteur de diminution de rigidité α et par rapport de la profondeur adimensionnelle de la fissure μ , qui est donné par $\mu = h/R$,

Le rapport de la profondeur μ varie de 0 à 1. Par contre, le facteur α varie de 1 à 0, Pour cela, on propose un facteur H qui a une relation avec α et μ à travers les relations $\alpha = H$ et

$\mu = 1 - H$, ce facteur est simplement proposé pour trouver des courbes de variation similaires.

Les courbes des figures IV.60 et IV.61 représentent la variation de la première fréquence critique de précession direct et indirect d'un système de rotor avec une fissure ouverte et respiratoire en fonction de H dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément. Ces figures représentent graphiquement les résultats obtenus notre approche dans le cas d'un rotor possédant une fissure ouverte et d'une autre respirant où $\Omega t = \pi$, et les résultats théoriques d'Al-Shudeifat [74], sachant que ce dernier a validé ses résultats théoriques avec des résultats expérimentaux.

La variation des fréquences critiques obtenues par notre approche est légèrement similaire à celle obtenue par d'Al-Shudeifat [74] qui a utilisé la méthode de la rigidité variable dans son travail. Il est possible de réduire l'écart entre nos résultats et ceux d'Al-Shudeifat en faisant varier la longueur de l'élément fissuré où cette dernière a un impact sur la rigidité de l'arbre.

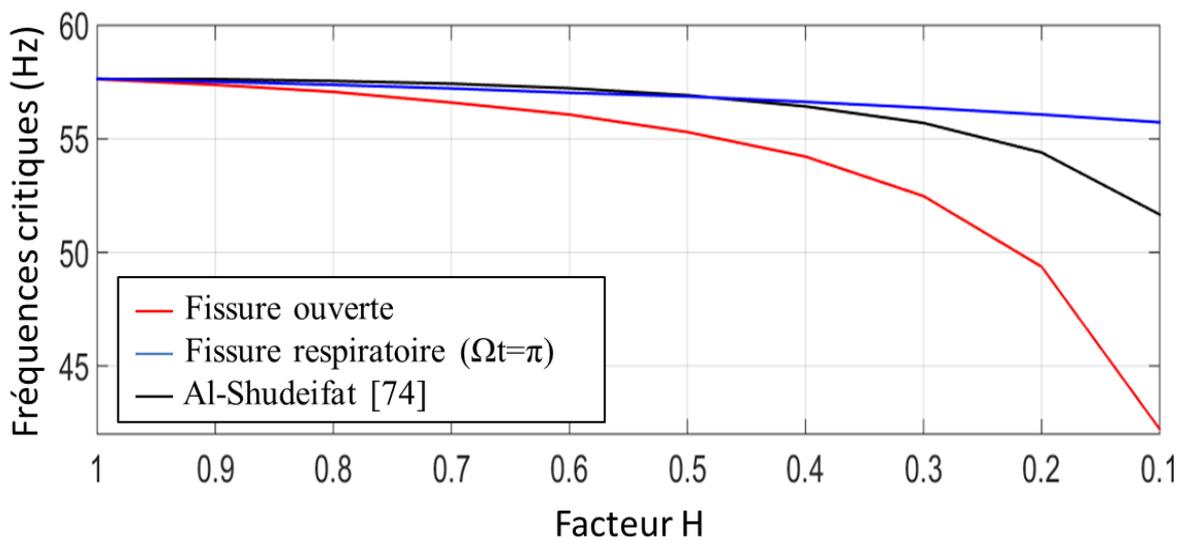


Figure IV.60: Variation de la première fréquence critique (indirecte) en fonction de facteur H.

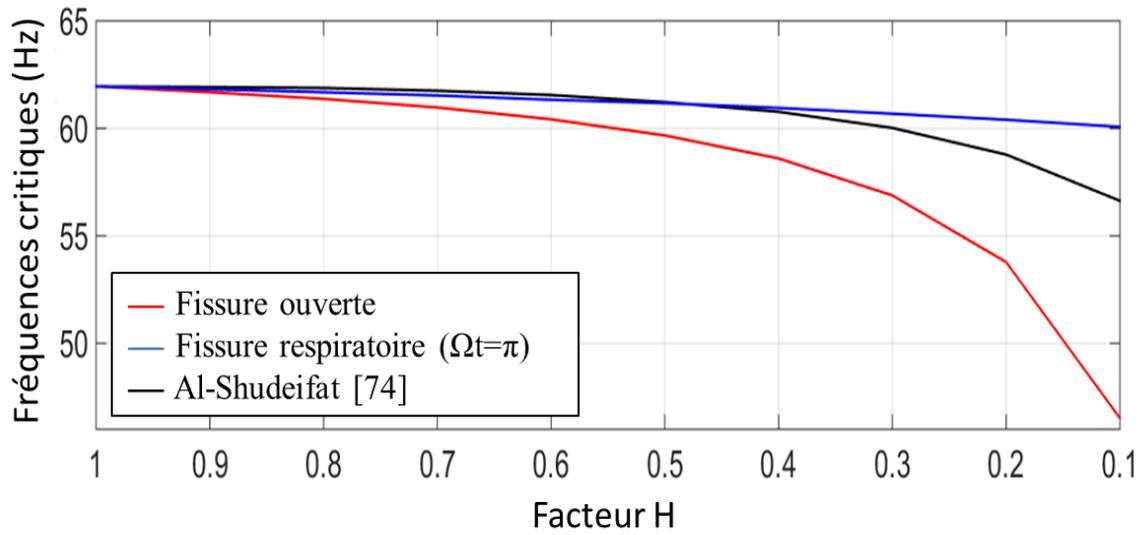


Figure IV.61: Variation de la première fréquence critique (directe) en fonction de facteur H.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le but de ce travail, est d'étudier l'influence d'une fissure transversale sur le comportement vibratoire du rotor, en utilisant la version classique h de la méthode des finis, l'élément poutre Euler-Bernoulli a été utilisé pour la modélisation du rotor.

L'équation de mouvement du système est déterminée par l'application de l'équation de Lagrange sur les énergies des différentes composantes du rotor où le rotor est discrétisé en éléments finis.

Un programme de calcul a été élaboré en MATLAB pour la validation et le développement de nos résultats afin d'étudier l'influence des différents paramètres de la fissure

L'influence de la profondeur et la position de la fissure transversale ouverte et respiratoire sur les fréquences propres et critiques est traité dans ce travail dans les états stationnaire et rotationnelle du rotor.

Une nouvelle approche basée sur la théorie de la diminution de rigidité de l'arbre du rotor par la présence de la fissure est présentée dans ce travail.

Les résultats de ce travail nous a permis d'arriver aux conclusions suivantes :

- Par la présence des fissures dans les rotors, la rigidité de l'arbre diminue à cause de la réduction de la section transversale de la zone fissurée ce qui influe sur les paramètres modaux du rotor (fréquence propres, amplitudes, mode propre), l'étude de la variation de ces derniers permet d'identifier la présence, l'emplacement et la profondeur de la fissure.
- La version classique h de la MEF et la méthode de rigidité variable sont approprié pour l'étude des rotors fissurés.
- La fissure transversale cause une dissymétrie dans le rotor, cette dissymétrie peut être utilisée pour identifier la présence de la fissure.
- Les variations relatives des fréquences naturelles en fonction de la position de la fissure suivent la forme du mode déformation

- Le choix du nombre des éléments a une grande influence sur la précision des résultats car la rigidité de l'arbre fissuré est égale à la rigidité de l'arbre sain si on augmente le nombre des éléments; plus le nombre des éléments est petit plus la longueur et la rigidité de l'élément fissuré est importante.
- Le facteur de diminution de rigidité α proposé dans la nouvelle approche ; avec le choix optimum du nombre des éléments ; peut jouer le rôle d'un indicateur de présence de la fissure ; en élaborant une base de données représentant les fréquences propres du rotor étudié en présence de fissures sur laquelle nous pouvons surveiller le comportement vibratoire du rotor étudié.
- La modélisation du rotor avec la fissure respiratoire est très proche à la réalité.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] N. Rieger, Past Problems of Turbines Which Led to Technology Advances, Proc. of the 25th Annual Meeting of the Vibration Inst, (2001) 19-32.
- [2] C. Frederick, A. Nelson, Brief History of Early Rotor Dynamics, Journal of Sound And Vibration, Jun (2003).
- [3] Rankine W. J., On the Centrifugal Force of Rotating Shafts, Engineer, 27 (1869) 249.
- [4] S. Dunkerley, On the Whirling and Vibration of Shafts, Phil. Trans. R. Soc, London, Ser.A, 185 (1894) 279-360.
- [5] Foppl, A., " Das Problem der Laval schen Turbine welle ", Der Civil ingenieur, vol. 41, pp. 335-342,1895.
- [6] Kerr, W., " On the Whirling Speed of Loaded Shafts ", Engineering, p. 150, 1916.
- [7] Jeffcott, H. H., " The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed ", Phil. Mag., Vol. 6, no. 37, pp. 304-314, 1919.
- [8] Stodola, A., " Steam and Gas Turbines ", McGraw-Hill, New York (1927)
- [9] Smith, D. M., " The Motion of a Rotor Carried by a Flexible Shaft in Flexible Bearings ", Proc. R. Soc. London, Ser. A, vol. 142, pp. 92-118, 1933.
- [10] Nelson H. D., Mac Vaugh J. M. "The dynamic of rotor bearing systems using finite elements", ASME J. of Eng. for Ind., 1976, Vol. 5, pp.593-599.
- [11] Tran D. M. "Etude du comportement dynamique des rotors flexibles", Thèse Université C. Bernard, Lyon, 1981.
- [12] Kassai A. "Contribution à l'étude dynamique des rotors amortis", Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1989, 159 p.
- [13] Dufour R. "Influence d'un couple axial sur le comportement dynamique des rotors flexibles", Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1985, 112 p.
- [14] A. D. Dimarogonas. "Vibration of cracked structures: A state of the art review". Engineering Fracture Mechanics, 55 (5): 831–857, 1996.
- [15] Saber El Arem. " Vibrations non-linéaires des structures fissurées : application aux rotors de turbines", Thèse de doctorat 2006, l'école nationale des ponts et chaussées.
- [16] P. G. Kirmsher. "The effects of discontinuities on the natural frequency of beams", Proc. American Society of Testing and Materials, 44:897–904, 1944.
- [17] W. J. Thomson. Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness. J. APP. Mech., 17:203–207, 1943.
- [18] G. R. Irwin. " Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate". J. App. Mech., 24 :361–364, 1957.
- [19] G. R. Irwin. "Relation of stresses near a crack to the crack extension force". 9th

- Cong. App. Mech., Brussels, 1957
- [20] H. F. Bueckner. "The propagation of cracks and the energy of elastic deformation". Trans. ASME, 80:1225–1229, 1958.
- [21] H. F. Bueckner. "Some stress singularity and their computation by means of integral equations". R. E. Langer, editor, boundary value problems in differential equations, pages 215–230, Madison, Wisconsin, USA, 1960. University of Wisconsin Press.
- [22] R. A. Westmann, W. H. Yang. "Stress analysis of cracked rectangular beams". J. APP. Mech., 32:639–701, 1967.
- [23] H. Tada, P. Paris, G. Irwin. "The stress analysis of cracks handbook". Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, USA, 1973.
- [24] H. Liebowitz, D. W. Claus. "Carrying capacity of notched columns". Eng. Fract. Mech., 1:379–384, 1968.
- [25] H. Liebowitz, H. Vanderveldt, W. D. Harris. "Failure of notched columns". Int. J. Solids Struct, 3 :489–500, 1967.
- [26] H. Okamura, H. W. Liu, C.S. Chu, H. Liebowitz. "A cracked column under compression". Eng. Fract. Mech., 1:547–564, 1969.
- [27] F. W. Brown, J. E. Srawley. "Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials". ASTM STP, 410:12, 1966.
- [28] N. Anifantis. "Stability of cracked columns". PhD thesis, University of Patras, 1978.
- [29] A. D. Dimarogonas. "Buckling of rings and tubes with longitudinal cracks". Mech. Res. Comm., 8 :179–186, 1981.
- [30] N. Anifantis, A. D. Dimarogonas. "Imperfection post-buckling analysis of crack columns". ENG. Fract. Mech., 18 :693–702, 1983
- [31] N. Anifantis, A. D. Dimarogonas. "Stability of cracked columns with a single crack subjected to follower and vertical loads". Int. J. Solids and Structures, 19 :281–291, 1983.
- [32] B. Gross, J. E. Srawley. "Stress intensity factors for a single-edge-notch tension specimen in bending or combined and tension by boundary collocation of a stress function". Tech. Note D-2395, NASA, 1964.
- [33] B. Gross, J. E. Srawley. "Stress intensity factors for a single-edge-notch tension specimen in bending or combined and tension by boundary collocation of a stress function". Tech. Note D-2603, NASA, 1965.
- [34] J. R. Rice, N. Levy. "The part-through surface crack in an elastic plate". J. App. Mech., 39:185–194, 1972.
- [35] A. D. Dimarogonas, S. A. Paipetis. "Analytical methods in rotor dynamics". App science Publishers, 1983.
- [36] A. D. Dimarogonas. "Crack identification of in aircraft structures". In First National aircraft conf., Athens, 1982.
- [37] A. D. Dimarogonas. "A fuzzy logic neural network structured expert system shell for diagnosis and prognosis- users manual". In EXPERTS, Clayton laboratories, St Louis, Missouri, USA, 1987.
- [38] A. D. Dimarogonas. "A general purpose rotor dynamic analysis program- users

- manual". In RODYNA, Clayton laboratories, St Louis, Missouri, USA, 1988.
- [39] N. Anifantis, A. D. Dimarogonas. "Identification of peripheral cracks in cylindrical shells". ASME-Wint. Ann. Meet., Boston, Mass., USA, 1983.
- [40] C. A. Papadopoulos, A. D. Dimarogonas. "Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack". J. Sound and vibration, 117 :81–93, 1987.
- [41] C. A. Papadopoulos, A. D. Dimarogonas. "Coupling of bending and torsional vibration of a cracked timoshenko beam". Ing. Arch., 57 :496–505, 1987.
- [42] C. A. Papadopoulos, A. D. Dimarogonas. "Stability of cracked rotors in the coupled vibration mode". ASME-11th Bien. Conf. Mech. Vib. Noise, pages 25–34, Boston, USA, 1987.
- [43] W. M. Ostachowicz, M. Krawczuk. "Coupled torsional and bending vibrations of a rotor with an open crack". Arch. App. Mech., 62:191–201, 1992.
- [44] A. D. Dimarogonas. "Dynamic response of cracked rotors". Internal report, General Electric Co., Schenectady NY, 1970.
- [45] A. D. Dimarogonas. "Dynamics of cracked shafts". Internal report, General Electric Co., Schenectady NY, 1971.
- [46] C. Varé, S. Andrieux. "Modélisation d'une section de poutre fissurée - application aux rotors de turbine". Revue Française de Mécanique, 2000(2) :91–97, 2000.
- [47] O. N. L. Abraham, J. A. Brandon, A. M. Cohen. "Remark on the determination of compliance coefficients at the crack section of a uniform beam with circular cross section". J. Sound Vib., 169(2) :570–574–430, 1994.
- [48] A. D. Dimarogonas. autor's reply. J. Sound and Vibration, 169 :575–576, 1994.
- [49] C. A. Papadopoulos. "Coupling of bending and torsional vibration of a cracked Timoshenko beam". J. Sound and Vibration, 278 :1205–1211, 2004.
- [50] J.-F. Imbert. "Analyse des structures par éléments finis". Livre, 1995.
- [51] B. O. Dirr, B. K. Schmalhorst. "Crack depth analysis of a rotating shaft by vibration measurement". ASME J. Vib. Acous. Stres. Relia. Des., 110 :158–164, 1988.
- [52] I. Imam, S. H. Azzaro, R. J. Bankert, I. Scheibel. "Development of an on-line rotor crack detection and monitoring system". J. Sound and Vib, 111 :241–250, 1989.
- [53] W. M. Ostachowicz, M. Krawczuk. "Vibration analysis of a cracked beam". Comput. Struct., 36(2) :245–250, 1990.
- [54] C. G. Go, Y. S. Lin. "Infinitely small element for dynamic problem of cracked beam". Eng. Fract. Mech., 48(4) :475–482, 1994.
- [55] A. Tondl. "Some problem of rotor dynamics". Chapman & Hall, 1965.
- [56] F. M. Dimentberg. "Flexural vibration of rotating shafts". Butter worths, London, 1961.
- [57] T. Pafelias. "Dynamic response of a cracked rotor". Technical Information Series DF-74-LS-79, General Electric Co., 1974.
- [58] P. Gudmundson. "Eigen frequency changes of structures due to cracks", notches or other geometrical changes. J. Mech. Phys. Solids, 30(5) :339–353, 1982.
- [59] P. Gudmundson. "The dynamical behavior of slender structures with cross-sectional cracks". J. Mech. Phys. Solids, 31 :329–345, 1983.

- [60] D. Wendtland. "änderung der biege eigenfrequenzen einer idealisierten schaufel durch risse". PhD thesis, University of Karlsruhe, 1972.
- [61] T. A. Henry, Okah-Avae. " Vibrations in cracked shafts. In Vibrations in rotating machinery ", pages 15–19, Inst. Mech. E. Conference, London, 1976.
- [62] R. Gasch. " Dynamical behavior of a simple rotor with a cross-sectional crack. In Vibrations in rotating machinery ", pages 123–128, I. Mech. E. Conference, London, 1976.
- [63] I.W. Mayes, W.G.R. Davies. " The vibrational behaviour of a rotating shaft system containing a transverse crack. In Vibrations in rotating machinery", pages 53–65, Inst.Mech. E. Conference, London, 1976.
- [64] H. Ziebarth, R. J. Baumgartner. "Early detection of cross-sectional rotor cracks by turbine shaft vibration monitoring techniques". ASME, Paper 81-JPGC-Pwr-26, 1981.
- [65] H. Ziebarth, H. Scherdtfeger, E. E. Muhle. "Auswirkung von querissen auf das Schwingungsverhalten von rotoren". VDI-Berichte, 320 :37–43, 1978.
- [66] I.W. Mayes, W.G.R. Davies. "Crack propagation in rotating shafts". ASME Conference on mechanical vibrations, Chicago, 1977.
- [67] I.W. Mayes, W.G.R. Davies. "Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor". J. Vib. Acous. Stress Reliab. Design, 106:139–145, 1984.
- [68] W.G.R. Davies, I.W. Mayes. "The vibrational behaviour of multi-shaft, multi bearing system in the presence of the propagating transverse crack". J. Vib. Acou Stress Reliab. Design, 106 :146–153, 1984.
- [69] J. A. Bush. "Experimentally determined sif for single edge crack round bars loaded in bending". Experimental Mechanics, pages 249–257, 1984.
- [70] J. A. Henry. "Three dimensional calculations of the stress intensity in a cracked 500mw lp shafts". CEGB report SSD/SW/N14, S. W. Region, S. S. D., EDF-DER, 1975.
- [71] Mohammad A. AL-Shudeifat, Eric A. Butcher, Carl R. Stern, "General harmonic balance solution of a cracked rotor-bearing-disk system for harmonic and sub-harmonic analysis: Analytical and experimental approach", International Journal of Engineering Science 48, 921–935, (2010)
- [72] Mohammad A. Al-Shudeifat, Eric A. Butcher, "breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotor system: Approach for critical and subcritical harmonic analysis", Journal of Sound and Vibration 330, 526–544, (2011).
- [73] Mohammad A. AL-Shudeifat, "On the finite element modeling of the asymmetric cracked rotor", Journal of Sound and Vibration, 332, 2795–2807, (2013).
- [74] Mohammad A. AL-Shudeifat, "Stability analysis and backward whirl investigation of cracked rotors with time-varying stiffness", Journal of Sound and Vibration 348, 365–380, (2015).
- [75] Bachschmid N., Tanzi, E., Audebert, S. "The effect of helicoidal cracks on the behaviour of rotating shafts. Engineering Fracture Mechanics", 75(3-4), 475-488,

- (2008).
- [76] Sekhar, A. S., Mohanty, A. R., Prabhakar, S. "Vibrations of cracked rotor system: transverse crack versus slant crack". *Journal of Sound and Vibration*, Volume 279 (Issue 3-5), p. 1203-1217, (2005).
- [77] Sabnavis G., Kirk R.G., Kasarda M., Quinn D. "Cracked shaft detection and diagnostics: A literature review". *Shock and Vibration Digest* 2004; 36(4).
- [78] Nikolakopoulos P.G., Katsareas D.E., Papadopoulos C.A. "Crack identification in frame structures". *Comput Struct* 1997; 64(1-4):389-406.
- [79] Papadrakakis M, editor. "Crack Identification in Structures". *Computational structural engineering for practice*; 1994 Aug; Civil-Comp Press; 1994.
- [80] Lee Y., Chung M. "A study on crack detection using Eigen frequency test data". *Computers & Structures* 2000/6/29; 77(3):327-342.
- [85] Lele S.P., Maiti S.K. "Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension". *Journal of Sound and Vibration* 2002; 257(3):559-583.
- [82] Ratan S., Baruh H., Rodriguez J. "On-line identification and location of rotor cracks". *Journal of Sound and Vibration* 1996/7/4; 194(1):67-82.
- [83] Behera R.K., Parhi D.R.K., Sahu S.K. "Vibration analysis of a cracked rotor surrounded by viscous liquid". *JVC/Journal of Vibration and Control* 2006; 12 (5):465-494.
- [84] Rizos P.F., Aspragathos N., Dimarogonas A.D. "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes". *Journal of Sound and Vibration* 1990; 138(3):381-388.
- [85] Seibold S., Weinert K. "A time domain method for the localization of cracks in rotors". *Journal of Sound and Vibration* 1996/8/8; 195(1):57-73.
- [86] Dong G.M., Chen J., Zou J. "Parameter identification of a rotor with an open crack". *European Journal of Mechanics - A/Solids* 2004 0; 23(2):325-333.
- [87] Karthikeyan M., Tiwari R., Talukdar S. "Crack localisation and sizing in a beam based on the free and forced response measurements". *Mechanical Systems and Signal Processing* 2007; 21(3):1362-1385.
- [88] Gounaris G.D., Papadopoulos C.A. "Analytical and experimental crack identification of beam structures in air or in fluid". *Comput Struct* 1997; 65(5):633-639.
- [89] Ishida Y., Ikeda T., Yamamoto T., Masuda N. "Vibrations of a rotating shaft containing a transverse crack (1st report, variations of a resonance curve due to the angular position of an unbalance at the major critical speed) ". *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C* 1987;53(488):925-932
- [90] Ishida Y., Ikeda T., Yamamoto T., Masuda N. "Vibrations of a rotating shaft containing a transverse crack (variations of a resonance curve due to the angular position of an unbalance at the major critical speed) ". *JSME International Journal Series Iii-Vibration on Control Engineering Engineering for Industry* 1988 MAR; 31(1):22-29.

- [91] Ishida Y., Yamamoto T. "Vibrations of a rotating shaft containing a transverse crack. (Vibrations at the secondary critical speed) ". Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C 1991;57(538):1791-1798.
- [92] Ishida Y., Liu J., Inoue T., Kondo H. "Detection of a rotor crack using non-stationary response (change of maximum amplitude in non-stationary vibration due to the direction of unbalance) ". Nihon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C 2006; 72(2):316-323.
- [93] Tsai T.C., Wang Y.Z. "Vibration analysis and diagnosis of a cracked shaft". Journal of Sound and Vibration 1996/5/9; 192(3):607-620.
- [94] Hwang H.Y., Kim C. "Damage detection in structures using a few frequency response measurements". Journal of Sound and Vibration 2004/2/6; 270(1-2):1-14.
- [95] Sekhar A.S., Prabhu B.S. "Crack detection and vibration characteristics of cracked shafts". Journal of Sound and Vibration 1992 9/8; 157(2):375-381.
- [96] Saavedra P.N., Cuitiño L.A. "Crack detection and vibration behavior of cracked beams". Computers and Structures 2001; 79(16):1451-1459.
- [97] Saavedra P.N., Cuitino L.A. "Vibration analysis of rotor for crack identification". J.Vibrat.Control 2002 JAN;8(1):51-67.
- [98] Papadopoulos C.A., Dimarogonas A.D. "Coupled vibration of cracked shafts". Advances in Design Automation - 1989; 17 September 1989 through 21 September 1989; New York, NY, United States: Publ by ASME; 1989.
- [99] Wauer J. "Modelling and formulation of equations of motion for cracked rotating shafts". International Journal of Solids and Structures 1990; 26(8):901-914.
- [100] Plaut R.H., Wauer J. "Parametric, external and combination resonances in coupled flexural and torsional oscillations of an unbalanced rotating shaft". Journal of Sound and Vibration 1995; 183(5):889-897.
- [101] Prabhakar S., Sekhar A.S., Mohanty A.R. "Detection and monitoring of cracks using mechanical impedance of rotor-bearing system". J.Acoust.Soc.Am. 2001; 110(5):2351-2359.
- [102] Gounaris G.D., Papadopoulos C.A., Dimarogonas A.D. "Crack identification in beams by coupled response measurements". Comput Struct 1996; 58(2):299-305.
- [103] Gounaris G.D., Papadopoulos C.A. "Crack identification in rotating shafts by coupled response measurements". Eng. Fract. Mech. 2002; 69(3):339-352.
- [104] Darpe A.K., Chawla A., Gupta K. "Analysis of the response of a cracked Jeffcott rotor to axial excitation". Journal of Sound and Vibration 2002; 249(3):429-445.
- [105] Darpe A.K., Gupta K., Chawla A. "Experimental investigations of the response of a cracked rotor to periodic axial excitation". Journal of Sound and Vibration 2003 2/13; 260(2):265-286.
- [105] Darpe A.K., Gupta K., Chawla A. "Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor". Journal of Sound and Vibration 2004; 269(1-2):33-60.
- [106] Dado M.H.F., Abuzeid O. "Coupled transverse and axial vibratory behaviour of

- cracked beam with end mass and rotary inertia“. *Journal of Sound and Vibration* 2003; 261(4):675-696.
- [107] Al-Said S.M., Naji M., Al-Shukry A.A. “Flexural Vibration of Rotating Cracked Timoshenko Beam“. *Journal of Vibration and Control* 2006 November 1; 12(11):1271-1287.
- [108] Isermann R. “Model based fault detection and diagnosis methods“. *Proceedings of the American Control Conference* 1995; 3:1605-1609.
- [109] Bachschmid N., Dellupi R. “Nonlinear behaviour of oil film bearings and its relevance in force identification procedures“. *American Society of Mechanical Engineers (Paper)* 1997.
- [110] N. Bachschmid, P. Pennacchi, E. Tanzi, Vania A. “Identification of Transverse Crack Position and Depth in Rotor Systems“. *Meccanica* 2000 11/01; V35 (6):563-582.
- [111] Markert R., Platz R., Seidler M. “Model Based Fault Identification in Rotor Systems by Least Squares Fitting“. *International Journal of Rotating Machinery* 2001; 7(5):311-321.
- [112] Dharmaraju N., Tiwari R., Talukdar S. “Identification of an open crack model in a beam based on force-response measurements“. *Computers and Structures* 2004; 82(2-3):167-179.
- [113] Dharmaraju N., Tiwari R., Talukdar S. “Development of a novel hybrid reduction scheme for identification of an open crack model in a beam“. *Mechanical Systems and Signal Processing* 2005; 19(3):633-657.
- [114] Sekhar A.S. “Identification of unbalance and crack acting simultaneously in a rotor system: Modal expansion versus reduced basis dynamic expansion“. *JVC/Journal of Vibration and Control* 2005; 11(9):1125-1145.
- [115] Sekhar A.S. “Crack identification in a rotor system: a model-based approach“. *Journal of Sound and Vibration* 2004; 3/5;270(4-5):887-902.
- [116] Pennacchi P., Bachschmid N., Vania A. “A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines“. *Mechanical Systems and Signal Processing* 2006/11; 20(8):2112-2147.
- [117] Lalanne M., Ferraris G. “Rotor dynamics prediction in engineering”. 2nd ed. Wiley, New York (1998)
- [118] J. Sinou, A.W. Lees, “The influence of cracks in rotating shafts“, *Journal of Sound and Vibration* 285 (2005) 1015–1037.