



Thèse

En vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat LMD En Génie Mécanique

Option : Fiabilité et réhabilitation des équipements mécaniques

Présenté par :

GUENANOU Ahmed

Thème

Conception de plaques composites épaisses à rigidité variable pour la fréquence fondamentale maximale

Soutenu le 09/12/2015, devant le jury composé de :

Mr. HADJOUI Abdelhamid	Professeur	UABB. Tlemcen	<i>Président</i>
Mr. HOUMAT Abderrahim	Professeur	UABB. Tlemcen	<i>Directeur de thèse</i>
Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL. Sidi Bel Abbes	<i>Examineur</i>
Mr. OUINAS Djamel	Professeur	UAIB. Mostaganem	<i>Examineur</i>
Mr. BELALIA Sid Ahmed	MCA	UABB. Tlemcen	<i>Examineur</i>



À mes parents,

À mon seul frère et sa femme,

À mes petits neveux Kheireddin et Salaheddin,

À ma femme Zineb,

À tout la famille Guenanou, Berkouki, Benadis et Bouzaki.

À Tous mes amis,

Et à tous ceux qui m'ont apporté leur aide,

Je dédie ce travail.

GUENANOU Ahmed

Remerciements

Avant tout je tiens à remercier « Allah », qui m'a incité à acquérir le savoir et qui m'aide à terminer mon travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse le professeur Abderrahim HOUMAT pour la confiance qu'il m'a accordé en me proposant ce sujet de recherche. De plus, son enthousiasme et sa confiance qui m'ont donné les motivations nécessaires pour réaliser ce travail. Je n'oublierai pas la grande humanité dont il m'a fait preuve. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses compétences, son encouragement, son entière disponibilité au cours de cette recherche et ses judicieux conseils.

Mes plus vifs remerciements à monsieur BELALIA Sid Ahmed, Maître de conférences pour son soutien, aide, encouragements et informations.

Je veux adresser mes vifs remerciements à mes chers parents et toute ma famille pour leurs sacrifices, aides, soutiens et encouragements durant mon cursus d'étude.

Je tiens à remercier les membres du jury, particulièrement monsieur

Enfin mes remerciements vont aussi à tous mes collègues pour leur soutien moral et leur gentillesse. Comme je remercie toute personne de près ou de loin qui a aidé à la réalisation de cette thèse.

Résumé

La conception d'un stratifié composite consiste à sélectionner le meilleur arrangement des matériaux constitutifs à l'intérieur du stratifié. Dans ce travail, la conception des plaques stratifiées composites circulaires épaisses à rigidité variable (SCRV) composées de fibres curvilignes décalées pour la fréquence fondamentale maximale est faite en adoptant la procédure d'optimisation couche par couche et la version- p de la méthode des éléments finis. Les variables de conception sont prises pour un ensemble d'angles d'orientation des fibres dans les couches symétriques.

La version- p de la méthode des éléments finis basée sur la théorie du premier ordre des plaques (FSDT) est présentée comme une méthode d'analyse pour déterminer les fréquences de vibration libre des plaques composites circulaires à rigidité variable. La plaque circulaire est modélisée par un élément- p quadrilatéral courbé. La fonction de mélange permet de modéliser exactement la forme géométrique de la plaque circulaire. Les fonctions de forme de l'élément- p quadrilatéral sont exprimées en fonction des polynômes orthogonaux de Legendre. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange.

Deux programmes sont élaborés, un programme pour le calcul des fréquences et modes propres, et l'autre pour la détermination de la conception optimale des plaques circulaires SCRV pour la fréquence fondamentale maximale. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, la haute précision, et l'efficacité de l'élément- p courbé développé. Plusieurs exemples sont traités. Les effets des propriétés des matériaux composites, conditions aux limites, nombre de couches, et rapport d'épaisseur sur les fréquences fondamentales maximales et les dispositions des fibres associées sont montrés et discutés.

Mots clés :

Plaque stratifiée composite circulaire ; théorie de déformation de cisaillement du premier ordre ; fibres curvilignes ; vibration libre ; élément- p quadrilatéral courbé ; optimisation couche par couche.

Abstract

Designing a composite laminate consists of selecting the best arrangement of materials inside the laminate. In this work, the design of thick variable stiffness composite circular laminated plates with shifted curvilinear fibers for the maximum fundamental frequency is carried out using the layerwise optimization technique and the p -version of the finite element method. The design variables are taken to be a set of fiber orientation angles in the symmetrical layers.

The p -version of the finite element based on the first-order shear deformation theory of plates is presented as a method of analysis to determine the frequencies of variable stiffness circular plates. The circular plate is modeled as a curved quadrilateral p -element. The blending function method models accurately the geometry of the circular plate. The shape functions of the quadrilateral p -element are expressed in terms of the Legendre orthogonal polynomials. The equations of motion are obtained using Lagrange's equations.

Two programs are developed, one for calculating the frequencies and mode shapes, and the other for determining the optimal design of variable stiffness circular plates for the maximum fundamental frequency. The results compared with those available in the literature show fast convergence, high accuracy, and effectiveness of the developed curved p -element. Several examples are treated. The effects of properties of composite materials, boundary conditions, number of layers, and thickness ratio on the maximum fundamental frequencies and associated disposition of fibers are shown and discussed.

Keywords :

Laminated composite circular plate; first-order shear deformation theory, curvilinear fibers; free vibration; curved quadrilateral p -element; layerwise optimization.

ملخص

لتصميم الصفائح المركبة يجب تحديد أفضل ترتيب للمواد داخل الصفيحة. في هذا العمل، تم تصميم صفائح مركبة دائرية سميكة ذات صلابة متغيرة تتألف من ألياف منحنية من أجل أقصى تردد أساسي وذلك من خلال اعتماد طريقة التصميم طبقة بطبقة والإصدار p من طريقة العناصر المنتهية. يتم أخذ متغيرات التصميم كمجموعة من زوايا اتجاه الألياف في طبقات متناظرة.

يتم تقديم الإصدار p من طريقة العناصر المنتهية على أساس نظرية الدرجة الأولى للصفائح كوسيلة من وسائل التحليل لتحديد ترددات الاهتزاز الحر للصفائح المركبة الدائرية ذات الصلابة المتغيرة. الصفيحة الدائرية مثلت من قبل العنصر p الرباعي المنحني. وظيفة الاختلاط تمكن من تمثيل نموذج هندسة الصفيحة الدائرية بدقة. دالات الشكل للعنصر p الرباعي معبرة بكثيرات الحدود المتعامدة ل Legendre. معادلات الحركة الاهتزازية متحصل عليها بتطبيق معادلات Lagrange.

تم تطوير برنامجين حسابيين، برنامج لحساب الترددات والوسائط، والآخر لتحديد التصميم الأمثل للصفائح الدائرية المركبة ذات الصلابة المتغيرة لأقصى قدر من التردد الأساسي. النتائج المحصل عليها والمقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في المراجع بينت سرعة التقارب، الدقة وفعالية العنصر p المنحني المستعمل. عدة أمثلة عولجت مع تحديد تأثير الخصائص المختلفة للمواد المركبة، الشروط الحدية للصفائح، عدد الطبقات ونسبة السماكة على الترددات الأساسية القصوى وتموضع الألياف المرتبطة ومناقشتها.

الكلمات الرئيسية:

الصفائح الدائرية المركبة؛ نظرية الدرجة الأولى للصفائح؛ اهتزازات الصفائح؛ ألياف منحنية؛ عنصر p رباعي منحني؛ التصميم طبقة بطبقة.

Sommaire

Sommaire	i
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	ix
Liste des symboles	xi
Introduction générale	1
Chapitre I : Revue de littérature	
Objectif	5
I.1. Développement et application de la version-p de la MEF.....	6
I.2. Développement de la théorie du premier ordre des plaques en vibrations	9
I.3. Vibration libre des plaques circulaires.....	10
I.4. Stratifiés composites à rigidité variable (SCRV)	11
I.5. Méthodes d'optimisation des stratifiés composites.....	14
I.5.1. Algorithme génétique (AG)	15
I.5.2. Optimisation avec paramètres de laminage.....	17
I.5.3. Optimisation couche par couche.....	19
I.5.4. Méthodes hybrides	20
Chapitre II : SCRV composés de fibres curvilignes	
Objectif	22
II.1. Introduction.....	23
II.2. Méthodes de création des SCRV.....	23
II.3. Fabrication des SCRV composés de fibres curvilignes.....	25
II.4. Considérations de conception	28
II.5. Description de la trajectoire de la fibre de référence.....	29
II.5.1. Trajectoires des fibres décalées	31
II.5.2. Trajectoires des fibres parallèles	32
II.5.3. Contraint de courbure de fibre	33

Chapitre III : Théorie du premier ordre des plaques

Objectif	35
III.1. Introduction	36
III.2. Théories utilisées dans la formulation numérique des structures composites....	36
III.3. Définitions et Hypothèses.....	37
III.3.1. Théorie de Kirchhoff.....	37
III.3.2. Théorie du premier ordre des plaques	37
III.4. Relations cinématiques.....	38
III.4.1. Champ de déplacements	38
III.4.2. Relations déformation-déplacement.....	39
III.4.3. Efforts résultants et moments	40
III.4.4. Facteurs de correction du cisaillement transversal.....	42
III.4.5. Relations contrainte-déformation.....	43
III.5. Energie de déformation de la plaque	45
III.6. Energie cinétique de la plaque.....	46
III.7. Equations du mouvement	46

Chapitre IV : Formulation par la version-p de la méthode des éléments finis

Objectif	47
IV.1. Introduction	48
IV.2. Fondements de la version-p.....	48
IV.3. Avantages de la version-p.....	49
IV.4. Inconvénients de la version-p	50
IV.5. Fonctions de forme hiérarchiques.....	50
IV.5.1. Polynômes de Legendre	51
IV.5.2. Modes-bulle.....	51
IV.5.3. Élément unidimensionnel.....	52
IV.5.4. Éléments-p bidimensionnels.....	53
IV.5.4.1. Élément-p quadrilatéral.....	53
• Espaces polynomiaux.....	53
a)- Espace $S^p(\Delta)$ ou famille "Serendipity"	53
b)- Espace $S^{p,q}(\Delta)$ ou famille de "Lagrange"	54

c)- Espace $\tilde{S}^{p,q}(\Delta)$ ou famille mixte	55
IV.6. Modélisation géométrique des éléments-p courbés	55
IV.6.1. Fonctions "mapping"	56
IV.6.2. Carreaux de Coons	57
IV.7. Formulation par l'élément-p courbé	58
IV.7.1. Détermination des matrices de rigidité	61
IV.7.1.1. Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle due aux rotations	61
IV.7.1.2. Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle due au cisaillement transversal	63
IV.7.2. Détermination de la matrice masse	64
IV.8. Equations du mouvement	64

Chapitre V : Optimisation couche par couche

Objectif	65
V.1. Introduction	66
V.1.1. Définition d'un problème d'optimisation	66
V.1.2. Mode de recherche de l'optimum	67
V.2. Classification des méthodes d'optimisation	68
V.2.1. Méthodes d'optimisation stochastiques	68
V.2.2. Méthodes déterministes	70
V.3. Optimisation de la fréquence des plaques stratifiées	71
V.4. Méthode d'optimisation couche par couche	73
V.4.1. Procédure de la méthode d'optimisation couche par couche	74
V.4.2. Algorithme d'optimisation couche par couche	76

Chapitre VI : Techniques de programmation

Objectif	79
VI.1. Introduction	80
VI.2. Logiciels et matériel utilisés	80
VI.3. Programme de calcul des fréquences	80
VI.3.1. Organigramme du programme principal	80
VI.3.2. Description des Sous-Programmes.....	81
VI.3.2.1. Sous-programme INPUT	82

VI.3.2.2. Sous-programme BOUNDC	83
VI.3.2.3. Sous-programme GAUSS.....	84
VI.3.2.4. Sous-programme ELMATR	84
VI.3.2.5. Sous-programme COORDS.....	84
VI.3.2.6. Sous-programme SPFUNCT.....	85
VI.3.2.7. Sous-programme JMATRIX.....	85
VI.3.2.8. Sous-programme JACOBI.....	85
VI.3.2.9. Sous-programme MODE	85
VI.3.2.10. Sous-programme SORT	85
VI.3.2.11. Sous-programme GFUNCT	85
VI.3.2.12. Affichage des résultats	85
VI.4. Programme d'optimisation	85
VI.4.1. Organigramme du programme principal	85
VI.4.2. Description du programme.....	86
VI.4.2.1. Fichier de données	87
VI.4.2.2. Sous-programme CURVMAX	87
VI.4.2.3. Sous-programme MASS.....	87
VI.4.2.4. Sous-programme STIFF	87
VI.4.2.5. Sous-programme OBJECTF.....	87
VI.4.2.6. Sous-programme OPTIMUM	88
VI.3.2.7. Affichage des résultats.....	88

Chapitre VII : Résultats et interprétations

Objectif	89
VII.1. Introduction	90
VII.2. Analyse vibratoire	90
VII.2.1. Convergence et validation des résultats.....	90
VII.2.1.1. Plaques isotropes	91
VII.2.1.2. Plaques composites à rigidité constante	94
VII.2.2. Analyse des vibrations libres des plaques SCR.....	97
VII.2.2.1. Convergence des résultats.....	98
VII.2.2.2. Vibration des plaques SCRV circulaires en fonction de T_0 et T_1	100

VII.3. Conception des plaques SCRV circulaires pour la fréquence fondamentale maximale	111
VII.3.1. Etude paramétrique	113
VII.3.1.1. Influence du type de matériau	114
VII.3.1.2. Influence du nombre de couches	117
VII.3.1.3. Influence des rapports d'épaisseur	117
Conclusions et perspectives	126
Références bibliographiques	129
Annexe A	147

Liste des figures

Introduction

Figure 1.1 : Plis composites. (a) Rigidité constante ; (a) Rigidité variable	1
---	---

Chapitre II

Figure 2.1 : Plaque rectangulaire avec un espacement variable des fibres.....	24
Figure 2.2 : Technologie d'emplacement de fibres : caractéristiques du système (courtoisie d'Ingersoll Machine Tools (Ing))	26
Figure 2.3 : Schéma de la machine <i>Hercules Inc.</i> d'emplacement des gaines [Waldhart (1996)]	27
Figure 2.4 : Tête typique d'emplacement des gaines [Lopes et al. (2008)].....	28
Figure 2.5 : Trajectoire de la fibre de référence et angles d'orientation	30
Figure 2.6 : Trajectoire de la fibre de référence et la trajectoire décalée	31
Figure 2.7 : Création de deux courbes parallèles	32
Figure 2.8 : Espace de conception pour un pli composé de fibres curvilignes décalées ($a = 0.5 m$)	34

Chapitre III

Figure 3.1 : Plaque rectangulaire	36
Figure 3.2 : Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation	39
Figure 3.3 : Efforts agissant sur un élément de plaque.....	41
Figure 3.4 : Moments agissant sur un élément de plaque	41
Figure 3.5 : Contrainte du cisaillement transversal	42

Chapitre IV

Figure 4.1 : Élément unidimensionnel.....	52
Figure 4.2 : Fonctions de forme hiérarchiques (a) et leurs dérivées (b).....	53
Figure 4.3 : Élément bidimensionnel quadrilatéral de référence.....	54
Figure 4.4 : Famille « Serendipity »	54
Figure 4.5 : Famille de « Lagrange ».....	54
Figure 4.6 : Élément- p quadrilatéral courbé	58

Chapitre V

Figure 5.1 : Présentation d'un problème d'optimisation 67

Figure 5.2 : Minimum local et minimum global de la fonction $f(x) = x * \sin(x)$ dans son domaine de définition $[9; 20]$ 68

Figure 5.3 : Méthodes d'optimisation stochastiques 69

Figure 5.4 : Méthodes d'optimisation déterministes 71

Figure 5.5 : Procédure d'optimisation couche par couche pour des plaques stratifiées symétriques..... 77

Figure 5.6 : Algorithme de la méthode d'optimisation couche par couche 78

Chapitre VI

Figure 6.1 : Organigramme du programme principal pour le calcul des fréquences et modes.... 81

Figure 6.2 : Numérotation des nœuds et côtés de l'élément- p 83

Figure 6.3 : Organigramme du programme principal d'optimisation 86

Chapitre VII

Figure 7.1 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque circulaire isotrope encadrée ($h/a = 0.02$) 93

Figure 7.2 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque circulaire isotrope encadrée ($h/a = 0.2$) 93

Figure 7.3 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire mince $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ encadrée (Matériau (ii), $h/a = 0.002$) 96

Figure 7.4 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire modérément épaisse $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ (Matériau (ii) et $h/a = 0.2$) 97

Figure 7.5 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire encadrée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de E-Glass/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 100

Figure 7.6 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire encadrée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de Graphite/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 101

Figure 7.7 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire encadrée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de Boron/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 101

Figure 7.8 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire simplement appuyée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de E-Glass/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 103

Figure 7.9 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire simplement appuyée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de Graphite/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 103

Figure 7.10 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire simplement appuyée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de Boron/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 104

Figure 7.11 : Formes du mode fondamental des SCRv circulaires encastrée $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ où $T_1 = 30^\circ$ et (a) $T_0 = 0^\circ$. (b) $T_0 = 45^\circ$. (c) $T_0 = 90^\circ$ 105

Figure 7.12 : Section normalisée en $\eta = 0$ de la forme du mode fondamental des SCRv circulaires encastrées $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en fonction de T_0 (E-Glass/Epoxy, $T_1 = 30^\circ$)..... 106

Figure 7.13 : Section normalisée en $\eta = 0$ de la forme du mode fondamental des SCRv circulaires encastrées $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en fonction de T_0 (Graphite/Epoxy, $T_1 = 30^\circ$)..... 106

Figure 7.14 : Section normalisée en $\eta = 0$ de la forme du mode fondamental des SCRv circulaires encastrées $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en fonction de T_0 (Boron/Epoxy, $T_0 = 30^\circ$)..... 107

Figure 7.15 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRv encastrées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en E-Glass/Epoxy..... 108

Figure 7.16 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRv encastrées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en Graphite/Epoxy..... 108

Figure 7.17 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRv encastrées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en Boron/Epoxy..... 109

Figure 7.18 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRv simplement appuyées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en E-Glass/Epoxy 109

Figure 7.19 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRv simplement appuyées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en Graphite/Epoxy 110

Figure 7.20 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRv simplement appuyées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en Boron/Epoxy..... 110

Figure 7.21 : Influence du type de matériau sur la fréquence fondamentale maximale pour une plaque circulaire SCRv encastrée ($NL = 4, h/a = 0.01$) 116

Figure 7.22 : Influence du type de matériau sur la fréquence fondamentale maximale pour une plaque circulaire SCRv simplement appuyée ($NL = 4, h/a = 0.01$) 116

Figure 7.23 : Influence du rapport d'épaisseur sur le paramètre fréquence fondamentale maximale pour une plaque circulaire SCRv encastrée en Graphite/Epoxy 125

Liste des tableaux

Chapitre VI

Tableau 6.1 : Introduction des conditions aux limites des nœuds 84

Tableau 6.2 : Introduction des conditions aux limites des côtés..... 84

Chapitre VII

Tableau.7.1 : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire isotrope encastree ($\nu = 0.3, h/a = 0.01$) 91

Tableau.7.2 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire isotrope encastree ($\nu = 0.3, h/a = 0.02$) 92

Tableau.7.3 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire encastree ($\nu = 0.3, h/a = 0.2$) 92

Tableau.7.4 : Propriétés mécaniques des matériaux..... 94

Tableau.7.5 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ encastree (Matériau (ii), $h/a = 0.002$) 94

Tableau.7.6 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ encastree (Matériau (ii), $h/a = 0.2$) 95

Tableau.7.7 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]$ encastree (Matériau (ii), $h/a = 0.1$) 95

Tableau.7.8 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[30^\circ, -30^\circ, 30^\circ]$ encastree (Matériau (i), $h/a = 0.02$) 96

Tableau.7.9 : Propriétés mécaniques des matériaux utilisés..... 98

Tableau 7.10 : Paramètres de fréquences fondamentales Ω_1 d'une plaque SCRV circulaire $[\mp(60^\circ|35^\circ)]_s$ encastree..... 99

Tableau 7.11 : Paramètres de fréquences fondamentales Ω_1 d'une plaque SCRV circulaire $[\mp(45^\circ|60^\circ)]_s$ simplement appuyée..... 99

Tableau 7.12 : Illustration de la procédure d'optimisation couche par couche pour des plaques SCRV circulaires encastrees ($NL = 4, E\text{-glass/Epoxy}, h/a = 0.01$) 112

Tableau 7.13 : Illustration de la procédure d'optimisation couche par couche pour des plaques SCRV circulaires simplement appuyées ($NL = 4, E\text{-glass/Epoxy}, h/a = 0.01$) 113

Tableau 7.14 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires avec différents matériaux et différentes conditions aux limites ($NL = 4, h/a = 0.01$)..... 115

Tableau 7.15 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires avec différents nombre des couches et conditions aux limites (E-glass/Epoxy, $h/a = 0.01$)..... 118

Tableau 7.16 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires avec différents nombre des couches et conditions aux limites (Graphite/Epoxy, $h/a = 0.01$)..... 119

Tableau 7.17 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires avec différents nombres des couches et conditions aux limites (Boron/Epoxy, $h/a = 0.01$)..... 120

Tableau 7.18 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires encastées en E-Glass/Epoxy avec différents nombres des couches et rapports d'épaisseur..... 122

Tableau 7.19 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires encastées en Graphite/Epoxy avec différents nombres des couches et rapports d'épaisseur..... 123

Tableau 7.20 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires encastées en Boron/Epoxy avec différents nombres des couches et rapports d'épaisseur..... 124

Tableau 7.21 : Différences des paramètres de fréquences fondamentales maximales en fonction de $NL, h/a$, et le type de matériau 125

Liste des symboles

x, y, z	Coordonnées Cartésiennes.
ξ, η	Coordonnées locales.
a	Rayon de la plaque.
h	Epaisseur de la plaque
θ	Angle d'orientation des fibres (rigidité constante).
T_0	Angle d'orientation des fibres au centre de la plaque.
T_1	Angle d'orientation des fibres à une distance caractéristique.
κ	Contraint de courbure.
k	Numéro de pli.
t	Temps.
u	Déplacement membranaire suivant la direction x .
v	Déplacement membranaire suivant la direction y .
θ_x	Rotation de la section droite par rapport à l'axe x .
θ_y	Rotation de la section droite par rapport à l'axe y .
w	Déplacement transversal dans la direction z .
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte.
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation.
E	Module de Young.
E_1, E_2	Modules de Young dans les directions d'orthotropie 1 et 2.
G_{12}, G_{13}, G_{23}	Modules de cisaillement dans les plans 1-2, 1-3 et 2-3.
ν	Coefficient de Poisson.
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	Efforts normaux par unité de longueur.
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	Moments de flexion par unité de longueur.

Q_x, Q_y	Efforts tranchants par unité de longueur.
k_s	Facteur de correction du cisaillement.
Q_{ij}	Coefficients de rigidité.
\bar{Q}_{ij}	Coefficients de rigidité dans le repere globale.
U	Energie de déformation.
T	Energie cinétique.
dV	Elément de volume.
A_{ij}, D_{ij}	Constantes d'intégration suivant l'épaisseur.
ρ	Densité.
$I_{1,3}$	Constants d'inertie.
M	Matrice masse.
K	Matrice de rigidité.
q	Vecteur de déplacement.
P	Polynôme de Legendre.
ϕ_j	Modes-bulle.
p	Degré du polynôme.
J	Jacobien.
ξ_i, η_j	Abscisses des points de la quadrature de Gauss-Legendre.
w_i, w_j	Poids de la quadrature de Gauss-Legendre.
m	Nombre de points de la quadrature de Gauss-Legendre.
ω	Pulsation propre.
Ω	Paramètre de fréquence.

Introduction générale

Depuis les années 80, l'essor des technologies modernes impose l'utilisation de matériaux novateurs présentant des propriétés mécaniques élevées et adaptées à leur utilisation ainsi qu'une faible masse volumique. Les matériaux composites fibreux répondent à ces exigences et sont de plus en plus couramment utilisés comme alternative aux matériaux conventionnels, principalement en raison de leur haute résistance et rigidité spécifique, mais aussi à cause de leurs propriétés mécaniques ajustables dans des grandes proportions.

Le potentiel d'emplacement des fibres a conduit à la naissance d'une nouvelle branche de recherche dans les matériaux composites stratifiés. En combinant les caractéristiques de drapage automatisé et l'enroulement de filaments, les machines d'emplacement des gaines sont capables de produire économiquement une large gamme de produits composites à rigidité variable de haute qualité. L'expression "rigidité variable" signifie que les paramètres de rigidité varient spatialement dans toute la structure. Le principal mécanisme pour produire cette variation de rigidité se fera par l'introduction des trajectoires curvilignes des fibres au lieu des trajectoires rectilignes (stratifiés composites à rigidité constante) en variant l'orientation des fibres dans chaque pli comme montré dans la figure 1.1.

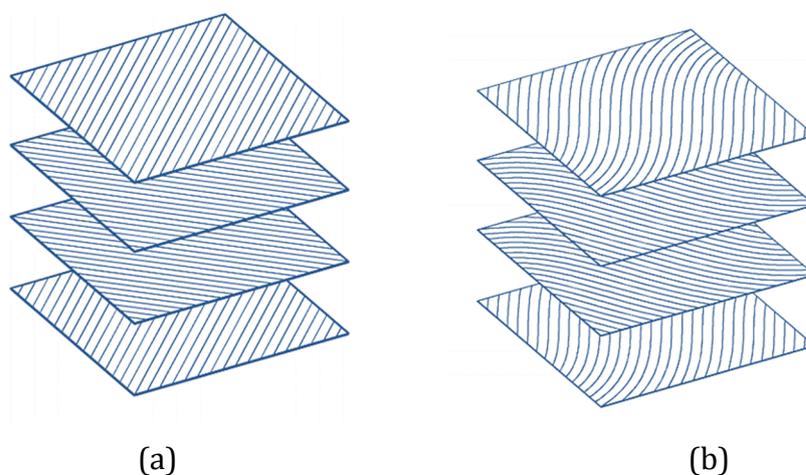


Figure 1.1 : Plis composites. (a) Rigidité constante ; (a) Rigidité variable.

L'analyse des structures composites a connu un essor avec l'apparition des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis qui est la méthode la plus

répandue dans le domaine des calculs. La présence des paramètres de rigidité variable augmente considérablement la complexité de l'analyse, donc le but de cette recherche est de développer un modèle d'éléments finis qui modélise avec précision la physique du problème et numériquement efficace de sorte que les études de conception et d'optimisation peuvent être menées en profondeur. Parmi les méthodes des éléments finis implantées récemment est la version- p appelée aussi méthode des éléments finis hiérarchiques. Cette méthode s'est imposée pour sa robustesse et sa flexibilité. Elle est utilisée pour résoudre des problèmes complexes de technologie, notamment en mécanique, aéronautique, marine, nucléaire, biomécanique et génie civil. Notre objectif est de développer un élément- p courbé pour la modélisation des plaques composites de formes géométriques circulaires, et plus précisément, le comportement vibratoire des plaques en matériaux composites à rigidité variable avec la prise en compte des effets de cisaillement transversal, inertie de rotation, et paramètres physiques et géométriques.

Les propriétés globales d'une structure stratifiée dépendent du design de celle-ci. C'est-à-dire, elles dépendent de l'épaisseur, l'orientation des fibres, et matériau dans chaque pli ainsi que la séquence d'empilement de ces plis. Ce caractère indéterminé est avantageux par rapport à d'autres matériaux, car il donne la possibilité à l'ingénieur de concevoir des structures aux propriétés répondant à des besoins précis. Cependant, cette liberté, à l'étape de la conception, rend la tâche de l'ingénieur plus complexe compte tenu des nombreux choix qu'il doit faire afin de déterminer la structure globale du stratifié. Ainsi, dans un monde où la compétitivité est un facteur prédominant et où les exigences de l'industrie sont de plus en plus pointues, ces choix ont une importance majeure sur la qualité du produit final. C'est pourquoi des outils d'optimisation sont utilisés afin d'aider la prise de décision et concevoir des structures aux propriétés optimisées.

La conception des plaques stratifiées composites à rigidité variable consiste à sélectionner le meilleur agencement d'orientations des fibres à l'intérieur du stratifié pour des conditions données. Cette recherche considère la maximisation de la fréquence naturelle fondamentale des plaques composites épaisses à rigidité variable où les propriétés de rigidité en chaque point de la plaque peuvent être variées de manière indépendante menant à l'adaptation optimale de la plaque composite aux exigences de

conception. La fréquence fondamentale est calculée en utilisant la version- p de la MEF basé sur la théorie du premier ordre des plaques épaisses. Une méthode d'optimisation appelée optimisation couche par couche est introduite et utilisée pour déterminer la conception optimale des plaques SCRIV pour la fréquence fondamentale maximale. Les conditions d'optimalité du problème sont formulées sur la base de cette méthode.

Contenu de mémoire

Ce mémoire s'articule en sept chapitres présentés brièvement ci-dessous.

Le premier chapitre a pour objectif de dresser un état de l'art du développement des calculs par éléments finis basés sur la version- p . Après, un historique sur l'évolution de la théorie du premier ordre des plaques en vibrations est présenté. Ensuite, nous présentons un résumé des travaux trouvés dans la littérature sur la vibration libre des plaques circulaires. Un aperçu général des recherches faites sur les stratifiés composites à rigidité variable (SCRIV) composés de fibres curvilignes, ainsi que l'application de la théorie du premier ordre des plaques et la version- p de la méthode des éléments finis pour résoudre les différents cas. Finalement, une revue des différentes méthodes d'optimisation qui ont été appliquées aux plaques composites stratifiées est donnée.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons plus de détails sur les stratifiés composites à rigidité variable (SCRIV) et spécifiquement les stratifiés composés de fibres curvilignes, leur procédure de fabrication et les considérations de conception par les machines d'emplacement des gaines. Ce chapitre est terminé par la description et formulation détaillée des équations de la trajectoire de la fibre de référence et orientations, ainsi que la définition de contrainte de courbure de la fibre de référence.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des deux théories des plaques (mince et épaisse) et leurs hypothèses fondamentales (hypothèses de Kirchhoff et Mindlin). Dans ce chapitre, les déplacements, déformations, et expressions des énergies de déformation et cinétique de la plaque en matériaux composites (basés sur la théorie du premier ordre des plaques) sont déterminés, ainsi que les équations du mouvement vibratoire libre de la plaque.

Le quatrième chapitre est consacré à la formulation par la version- p de la MEF. Dans ce chapitre, la présentation de cette méthode avec ses avantages, inconvénients, et

fonctions de formes hiérarchiques sont présentés. Ensuite, les plaques circulaires composites épaisses à rigidité variable en vibration libre sont modélisées par un élément- p quadrilatéral courbé pour obtenir les matrices de rigidité et masse à partir des énergies cinétique et déformation. Finalement, les équations du mouvement vibratoire de la plaque obtenues en appliquant l'équation de Lagrange.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons la définition d'optimisation des structures composites stratifiées, classification des méthodes d'optimisation, et un état de l'art d'optimisation de la fréquence maximale de vibration des stratifiés composites. Le cinquième chapitre explique en profondeur le fonctionnement de la méthode d'optimisation couche par couche utilisée dans ce travail afin de concevoir des plaques composites à rigidité variable pour la fréquence fondamentale maximale. La procédure et l'algorithme de cette méthode sont présentés.

Le sixième chapitre décrit les programmes de calcul élaborés avec ses différentes étapes. Le premier code de calcul est fait pour déterminer les fréquences et modes propres des plaques circulaires SCR V vibrantes et le deuxième code de calcul permet de trouver la conception optimale des plaques circulaires SCR V pour la fréquence fondamentale maximale. La description de ce chapitre inclut : les logiciels et matériels utilisés (software et hardware), organigramme, dictionnaire des paramètres, sous-programmes, et fichiers d'entrée et de sortie.

Le septième chapitre est réservé aux différents résultats obtenus par la version- p de la MEF et la méthode d'optimisation couche par couche. En premier lieu, des exemples de convergence et de validation avec les travaux trouvés dans la littérature pour les modèles des plaques isotropes et composites à rigidité constante sont présentés. Ensuite, les vibrations des plaques SCR V pour trois types de matériaux composites sont étudiées en fonction des conditions aux limites. Cela mène à une discussion sur la déférence entre les fréquences des SCR V et les stratifiés composites à rigidité constante. En deuxième lieu, les résultats des conceptions optimales des plaques SCR V circulaires pour la fréquence fondamentale maximale sous l'effet de différentes caractéristiques géométriques, physiques et conditions aux limites sont présentés.

Cette thèse se termine par une conclusion générale recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les futures perspectives.

Chapitre I

Revue de littérature

Objectif

Le chapitre I est consacré à la présentation d'une revue de littérature. Cette revue fait l'état de l'art des différents domaines qui ont servi aux études présentées dans ce mémoire. D'abord, un historique général du développement des calculs par éléments finis basés sur la version-p. Dans la deuxième partie un état de l'art très riche de l'évolution de la théorie du premier ordre des plaques en vibrations. Après, un résumé des travaux trouvés dans la littérature sur la vibration libre des plaques circulaires. Dans la quatrième partie, un aperçu général des recherches faites sur les stratifiés composites à rigidité variable (SCRV) composés de fibres curvilignes, ainsi que l'application de la théorie du premier ordre des plaques et la version-p de la méthode des éléments finis pour résoudre les différents cas. Finalement, une revue des différentes méthodes d'optimisation des plaques composites stratifiées est présentée dans la cinquième partie.

I.1. Développement et application de la version- p de la MEF

Pour résoudre un problème physique, la méthode des éléments finis est l'outil le plus performant et le plus souple utilisé dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Dans la version- p de la méthode des éléments finis, plusieurs fonctions de forme ont été adoptées et ceci sert à la recherche d'une précision plus élevée dans les calculs numériques tout en optimisant le temps de calcul, c'est-à-dire la taille des systèmes numériques à résoudre. Le développement des calculs par éléments finis basés sur la version- p a été marqué par différentes étapes importantes :

- ✓ Introduction des fonctions hiérarchiques dans les éléments finis (1975).
- ✓ Etablissement de la base théorique de la version- p (1981).
- ✓ Commercialisation de programmes basés sur la version- p (1985).
- ✓ Analyse d'erreur de la version- p (1986).
- ✓ Enseignements basés sur la version- p (1991).

Le développement de version- p de la MEF remonte à 1970, lorsque Zienkiewicz et *al.* (1970) ont proposé le concept de fonctions de forme hiérarchiques. Ces sujets comprennent enquête de fonctions de forme hiérarchiques, les techniques de solution pour résoudre un grand et rare système d'équations. Ils ont proposé l'utilisation des éléments avec des ordres variables (appelés éléments de mélange) pour l'analyse tridimensionnelle comme manière efficace d'ajouter des degrés de liberté supplémentaires dans les régions des gradients élevés. Au lieu de créer des nœuds, ils ont créé des variables de bord pour aboutir à une interpolation d'ordre élevé. Ils ont également introduit le concept qui est au cœur de la mise en œuvre de la version- p . Il faut attendre l'introduction de la formulation hiérarchique de Peano (1975) pour réellement voir la naissance d'une version- p efficace. Il a présenté des familles de fonctions hiérarchiques d'interpolation pour les éléments triangulaires qui, dans la théorie, pourraient être employés pour produire des éléments arbitraires d'ordre supérieur. Une approximation par éléments finis $u_h = \sum_{i=1}^n N_i a_i$ est dite hiérarchique si le passage de n à $n + 1$ n'altère pas les fonctions de forme N_i ($i = 1$ à n). Katz et *al.* (1978) et Rossow et Katz (1978) ont prolongé le travail de Peano pour inclure l'idée d'un élément de référence afin d'améliorer l'efficacité informatique. Le traçage des transformations pour les côtés droits de l'élément triangulaire a été présenté. Ils ont suggéré l'utilisation de tableaux pré-calculés pour l'efficacité des calculs et ont

également noté qu'il était plus efficace de calculer d'abord une solution d'ordre élevé, puis extraire les solutions d'ordre inférieur embarquées. Zienkiewicz et *al.* (1981) ont ressuscité les fonctions d'interpolation présentées en 1970 et ont montré comment des éléments quadrilatéraux hiérarchiques ont pu être formulés. Les avantages de cette approche sont des matrices bien conditionnées, la facilité d'application de la compatibilité lors de l'utilisation d'un polynôme de degré gradué, et la facilité de mise en place d'indicateurs d'erreur. Les mathématiciens intéressés par la bonne convergence de la version- p ont plus tard établi une base théorique solide. Babuska et *al.* (1981) dans un article principal ont présenté la base mathématique rigoureuse de la version- p . Le document montre que la convergence de la version- p de $p_{min} \rightarrow \infty$ est garantie, les fonctions d'interpolation fournies ont été correctement choisies. Les auteurs ont présenté le taux asymptotique de convergence de la version- p . Cette évaluation a montré que le taux de convergence de la version- p est deux fois de celui de la version- h . Les années 80 ont été marquées par le développement des codes éléments finis basés sur la version- p . Certains ont été commercialisés, comme par exemple PROBE [Szabo (1985)] et FIESTA [Babuska et Suri (1990)]. Bien que moins populaire que la version- h , la version- p est aujourd'hui en plein essor, et de plus en plus de codes- p sont maintenant disponibles sur le marché ; parmi les plus diffusés, on peut citer Pro/MECHANICA [Parametric Technology Corporation 1995], StressCheck [ESRD 1998] et ANSYS [CEC 1998]. C'est pendant cette même période qu'ont été établis les taux de convergence de l'erreur de la version- p [Gui et Babuska (1986)] et que des estimateurs d'erreur ont été consacrés aux version- p et $-hp$ [Oden et *al.* (1989)]. En 1991, Szabo et Babuska ont publié un livre consacré principalement à la version- p [Szabo et Babuska (1991)]. Ils l'ont proposé comme alternative à la version- h . Il contient un examen de la version- p dans une et deux dimensions avec des chapitres sur l'application d'élasto-statique en deux et trois dimensions et la formulation des éléments- p des plaques et des coques.

Comme il est indiqué dans le travail de Campion et Jarvis (1996), la version- p approche la variable inconnue par utilisation des solutions avec des polynômes d'ordre élevé. Le nombre d'éléments requis pour utiliser la version- p est nettement inférieur à celui qu'on utiliserait dans la version- h , car les approximations d'ordre supérieur permettent de modéliser des variations plus complexes. Ainsi, les éléments- p sont plus grands que les éléments- h , et le mappage géométrique en conséquence est plus exigeant

pour les éléments- p . L'approche standard du mappage géométrique iso-paramétrique de la version- h est insuffisant.

Lorsque la version- p est utilisée, le maillage reste fixe. Il est donc important pour la précision de modéliser la géométrie de la structure avec un nombre fixe d'éléments. Il faut pour cela une nouvelle méthode qui est capable de décrire les géométries complexes en utilisant seulement quelques éléments. La méthode de la fonction de mélange (Blending Function Method) a été initialement développée par Coons (1964) qui a décrit des méthodes pour construire des surfaces utilisées pour la conception assistée par ordinateur. Gordon (1971) a étendu ce travail, et a présenté une nouvelle classe de méthodes pour l'approximation des fonctions à plusieurs variables. Ces méthodes ont été développées pour la représentation et le rapprochement des formes complexes en conception assistée par ordinateur et à l'application d'usinage à commande numérique. Le concept principal est l'utilisation des fonctions de mélanges en tant que moyens d'approximation. Les fonctions de mélanges employées par Coons (1964) dans son article étaient les fonctions cardinales pour une interpolation de Hermite de deux points par des polynômes de degrés impairs. Gordon (1971) a utilisé une variété de fonctions de mélange dans son document, y compris les fonctions de Hermite et de Lagrange. Gordon et Hall (1973a-b) ont montré comment la méthode de la fonction de mélange pourrait être utilisée pour construire des systèmes de coordonnées curvilignes, et aussi pour décrire des géométries arbitraires.

Le premier travail qui a introduit la méthode de mélange dans la version- p de la méthode des éléments finis est celui de Szabo et Babuska (1990). Le résultat de cette combinaison a donné pour les éléments- p une représentation exacte des bords arbitrairement courbés [Dey et al. (1997), Kirfilyfalvi et Szabo (1997), Düster et al. (2001)]. Düster et al. (2001) ont présenté une implémentation tridimensionnelle de la version- p pour des problèmes structuraux des solides minces avec des surfaces arbitraires courbées. Houmat (2006) a développé un élément- p quadrilatéral courbé basé sur des fonctions de forme trigonométriques appliqué à la vibration libre de formes arbitraires de membranes. En se basant sur les mêmes types de fonctions de forme, le même auteur (2008) a fait une analyse de vibration libre dans le plan pour des plaques de formes curvilignes à l'aide d'un élément- p triangulaire courbé. Belalia et Houmat (2010) ont développé un élément- p triangulaire courbé et appliquée à la vibration libre

non-linéaire des plaques sectorielles elliptiques isotropes où l'élément peut décrire la géométrie de la plaque de sectorielle elliptiques exactement. Les mêmes auteurs (2012) ont utilisé un élément- p triangulaire courbée et l'ont appliqué à la vibration libre non-linéaire de plaques sectorielles composées de trois différents matériaux à gradient fonctionnel.

I.2. Développement de la théorie du premier ordre des plaques en vibration

Une excellente étude sur le développement de la théorie du premier ordre a été faite par Belalia (2011) dans sa thèse de doctorat. L'étude de la vibration libre des plaques remonte aux années 1800. Chladni (1802), un physicien allemand, a étudié la vibration d'une plaque carrée avec des cotés complètement libres et a observé le comportement vibratoire de cette plaque. Rayleigh (1877) a présenté sa méthode bien connue avec une solution générale de fréquences propres de vibrations pour plusieurs structures. Ritz a amélioré la procédure de Rayleigh en 1909 en supposant un ensemble de nouvelles fonctions test admissibles. Cette approche est connue sous le nom de la méthode de Rayleigh-Ritz ou la méthode de Ritz. Elle est parmi les méthodes approximatives les plus utilisées dans l'analyse des vibrations des structures.

Depuis lors, il y a eu de grandes recherches sur la vibration des plaques de différentes formes géométriques, avec différentes conditions aux limites et chargements tel que sont rapportés dans les références [Timoshenko et Gere (1961), Hinton (1988), Kim (1988), Liew (1990) et Xiang (1993)] et [Dickinson et Di Blasio (1986), Mizusawa et Leonard (1990)]. La plupart de ces travaux utilisent la théorie des plaques minces où les déformations de cisaillement sont négligées, comme le montre la série des travaux de [Leissa (1969,1977a-b,1981a-b,1987)], la série de travaux de Bert pour les plaques sandwichs et composites [Bert (1976,1979,1982,1985,1991a-b)] et d'autres articles de synthèse [Reddy (1985), Kapania et Raciti (1989)]. Cet effet de cisaillement est significatif surtout dans les plaques plus épaisses [Mindlin (1951), Srinivas et Rao (1970)]. Lorsque l'effet de cisaillement est ignoré, l'erreur des solutions de vibration des plaques est élevée. Les recherches sur l'intégration de l'effet de cisaillement transversal dans les plaques ont donné beaucoup de théories. La théorie du premier ordre des plaques ou de Reissner-Mindlin [Mindlin (1951), Srinivas et Rao (1970), Reissner (1945)], la théorie modifiée de plaque de Mindlin donné par Bergan et Wang (1984),

Yang *et al.* (1966) et Whitney et Pagano (1970) et d'autres théories d'ordre supérieur telle que proposée par Nelson et Lorch (1974), Lo *et al.* (1977, Levinson (1980), Murthy (1981), Reddy (1984), Senthilnathan (1989) et Doong *et al.* (1991). Dans les théories d'ordre supérieur les champs de déplacements sont développables suivant les puissances de coordonnées d'épaisseur.

La théorie du deuxième ordre donne des solutions raisonnablement précises lorsqu'elle est utilisée en conjonction avec un facteur de correction de cisaillement k_s . Ce facteur est bien détaillé dans les travaux de Srinivas et Rao (1970) et Senthilnathan *et al.* (1989). Les valeurs de ce facteur, couramment utilisés, sont $k_s = 5/6$ [Reissner (1954)] et $k_s = \pi^2/12$ [Mindlin (1951)]. Toutefois, Nanni (1971) a montré que le facteur de correction de cisaillement, k_s peut être exprimé en termes de coefficient de Poisson, donnée par $k_s = 20(1 + \nu)/(24 + 25\nu + \nu^2)$. Une étude récente de Noor et Burton (1989) a montré qu'une précision acceptable peut être obtenue pour l'analyse des vibrations libres d'une plaque épaisse en matériaux composites, en utilisant la théorie des plaques de Mindlin, pour voir la possibilité de trouver le facteur de correction de cisaillement. Pour en savoir plus, la monographie de Liew *et al.* (1995) présente un détail riche du développement de la théorie du premier ordre des plaques. Une simple théorie du premier ordre a été récemment développée par Thai et Choi (2013) pour les plaques à gradient fonctionnel et évaluée pour les plaques stratifiées composites par les mêmes auteurs [Thai et Choi (2013)]. Cette théorie a été proposée pour les analyses de flexion et vibration libre des stratifiés composites. Les études de vérification montrent que les prédictions par cette théorie et la théorie existant pour des plaques cross-ply et angle-ply antisymétriques stratifiés sont proches les uns des autres.

I.3. Vibration libre des plaques circulaires

La vibration libre des plaques circulaires a été d'un intérêt pratique et théorique pour différents chercheurs. Une littérature sur la vibration des plaques circulaires isotropes a été résumée pour diverses conditions aux limites dans une monographie bien connue par Leissa (1969). La monographie contient une revue détaillée des études sur la vibration des plaques de différentes formes y compris les plaques de forme circulaire. Soni et Rao (1975) ont étudié la vibration axisymétrique libre des plaques circulaires orthotropes avec variation linéaire de l'épaisseur en utilisant la théorie de la

déformation du cisaillement (théorie du premier ordre) et la technique de collocation Chebyshev a été adoptée pour résoudre les équations différentielles. Utilisant aussi la théorie du premier ordre des plaques en coordonnées polaires Venkatesan et Kunukkasseril (1978) ont analysé la vibration libre des plaques circulaires stratifiées où chaque pli était isotrope et les plis ont différentes propriétés des matériaux et épaisseurs. Les modes sont obtenus pour les cas axisymétriques et antisymétriques. Les résultats numériques sont présentés pour différents arrangements de plis et conditions aux limites. Lam et *al.* (1992) ont proposé une méthode générale pour estimer les fréquences propres des plaques circulaires et elliptiques, et aussi une méthode numérique précise et efficace pour la vibration libre des plaques elliptiques minces se trouvant sur un appui simple de forme circulaire ou elliptique.

L'étude de la vibration libre des plaques composites stratifiées modérément épaisses circulaires et elliptiques a été faite par Narita et *al.* (2002). Ils ont utilisé la théorie du premier ordre des plaques et la méthode de Ritz. Ils ont montré les effets de la variation du facteur de correction du cisaillement k_s . Wu et *al.* (2002) ont étudié la vibration libre des plaques circulaires en utilisant la règle de quadrature différentielle généralisée (RQDG). Les auteurs ont appliqué quatre types de conditions aux limites classiques comme encasté, simplement appuyé, libre, et des supports à glissement. Nallim et Grossi (2008) utilisent la méthode de Rayleigh–Ritz pour développer un algorithme général pour l'analyse dynamique des plaques stratifiés symétriques composites elliptiques et circulaires avec plusieurs effets compliqués sur la base de la théorie classique des plaques stratifiées. Nguyen-Van et *al.* (2008) ont étudié la vibration libre des structures plaques et coques composites stratifiés de formes diverses. La méthode est basée sur un élément à quatre nœuds quadrilatéral et la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre. Ngo-Cong et *al.* (2011) ont étudié le cas de vibration libre des stratifiés composites sur la base de la théorie de déformation du cisaillement du premier ordre et la méthode (One-Dimensional Integrated Radial Basis Function Networks).

1.4. Stratifiés composites à rigidité variable (SCRV)

Un matériau composite résulte de l'assemblage d'au moins deux matériaux de nature différente, immiscible, se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport

à celles de ses constituants élémentaires. L'étude du comportement de ces matériaux et la prédiction de leurs propriétés font aussi bien intervenir les caractéristiques de la matrice et des fibres que les conditions de fabrication et de qualité d'interface. De manière générale, les propriétés mécaniques dépendent essentiellement des fibres utilisées (type, taux de remplissage, diamètre, longueur, orientation, etc). Les matériaux composites avancés tels que les plaques stratifiées ont été utilisés dans différentes applications d'ingénierie ces dernières années, grâce à leurs propriétés. Les stratifiés à rigidité constante sont formés par l'empilement des couches unidirectionnels, chacune ayant une orientation propre θ par rapport aux axes principaux de la structure. Les couches sont les éléments de base des structures composites. Des fibres unidirectionnelles placées dans le plan médian sont injectées dans une matrice polymère. Un choix judicieux de la séquence d'empilement et des différentes orientations permettra d'obtenir des propriétés mécaniques adaptées au champ de contrainte subi par la structure.

Les stratifiés composites à rigidité variable sont différents par rapport aux stratifiés traditionnels (où la rigidité est constante) en faisant varier l'angle d'orientation des fibres dans l'espace à travers le stratifié. La conception des SCRVS peut être adaptée à un large éventail d'applications potentielles que les stratifiés traditionnels. Il existe deux méthodes principales pour créer des SCRVS [Langley (1999)], ces méthodes seront expliquées dans le chapitre III. Dans ce travail nous sommes intéressés par une méthode spécifique, le principe de cette méthode est d'introduire des fibres curvilignes au lieu des fibres rectilignes à travers un pli. Plusieurs approches différentes ont été utilisées pour créer des trajectoires curvilignes des fibres par la machine d'empilement des gaines. La motivation dans chaque cas est que, en variant spatialement la trajectoire de la fibre dans un pli, il pourrait être possible d'améliorer les performances d'une structure composite. Il existe plusieurs possibilités sur la façon de développer ces trajectoires de fibre curviligne.

Les premiers travaux sur les stratifiés composites à rigidité variable composés de fibres curvilignes ont été faites par Hyer et Lee (1991), et Gürdal et Olmedo (1993). Hyer et Lee (1991) ont étudié une plaque carrée avec un trou situé au centre de la plaque soumis à une charge de compression uni-axiale. Ils considèrent le quart de cette plaque pour but de conception. Ce quart est divisé en un maximum de dix-huit éléments, dont

chacun peut être attribué un angle d'orientation des fibres différente. Une étude de sensibilité par élément conduit à la conclusion que les gains de performances flambage peut être réalisée en introduisant des fibres curvilignes au lieu des fibres rectilignes. Gürdal et Olmedo (1993) ont utilisé des variations d'angle de fibres linéaires pour étudier l'effet des variations de rigidité sur les propriétés élastiques d'un panneau composite. Ils concluent que ces effets peuvent être utilisés à l'avantage du concepteur pour adapter la répartition des contraintes dans une plaque composite. La recherche par Parthasarathy et *al.* (1995) était un effort pour augmenter les performances de conception en variant spatialement la trajectoire des fibres d'une structure. Waldhart (1996) a analysé le flambage et la réponse dans le plan des SCRIV avec des fibres curvilignes à chargement uni-axial. Un travail sur la réponse statique et le flambage des cylindres composites à rigidité variable a été effectué par Tatting (1998). Langley (1999) a introduit un modèle d'éléments finis pour modéliser des SCRIV et a analysé leur réponse dans le plan ainsi que les déformations et les contraintes. Tatting et Gürdal (2002), (2003) ont développé un outil de conception avec l'intégration du solveur automatisé STAGS avec le logiciel de conception de stratifié. À l'aide du logiciel élaboré, ils ont réussi d'analyser le flambage, pré-flambage, déformation et distribution des contraintes dans une plaque composite à rigidité variable (en insistant sur des plaques avec un trou en raison de l'utilité de la rigidité variable dans la distribution des contraintes créées autour du trou). Setoodeh (2005) a étudié la conception optimale de stratifiés composites à rigidité variable en utilisant un système d'optimisation de l'ingénierie numérique émergente fondée sur le paradigme des automates cellulaires.

L'application de la version-*p* aux vibrations des plaques revient à Bardell (1991, 1992, 1999), suivi par d'autres chercheurs [Beslin et Nicolas (1997), Houmat (1997a-b), (2001a-b), Leung et Chan (1998), Woo *et al.* (2003)]. La version-*p* est devenue un grand support aux problèmes de vibrations de plaques. A noter que les travaux cités précédemment traitent des formes régulières de plaques (carré, rectangle, triangulaire, circulaire et sectoriel). La version-*p* a été un excellent procédé pour la résolution de la vibration libre linéaire et non-linéaire des SCRIV composés par des fibres curvilignes. Elle a été utilisée par Akhavan et Ribeiro (2011) qui ont développé une version-*p* des éléments finis qui suit la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre pour mener à bien l'étude de vibration libre linéaire des plaques rectangulaires composites composées de fibres curvilignes. Ils ont montré les effets de l'utilisation des fibres

curvilignes au lieu de fibres rectilignes sur les formes de modes et les fréquences propres de vibration. Honda et Narita (2012) ont présenté une méthode analytique pour déterminer les fréquences naturelles et les modes de vibration de plaques stratifiées ayant des fibres de renforcement curvilignes. Des fonctions splines ont été utilisées pour représenter des fibres de forme arbitraire et des solutions Ritz ont été utilisés pour dériver les équations de fréquence à l'aide des fonctions de forme du type série. Ribeiro et Akhavan (2012) ont appliqué la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre des plaques pour la vibration libre linéaire et la vibration forcée non linéaire de plaques stratifiées rectangulaires composites symétrique. Les résultats numériques ont montré que les fibres curvilignes peuvent conduire à des différences importantes dans les amplitudes de la réponse non linéaire. Ribeiro (2012) a appliqué la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre des plaques à la vibration non linéaire périodique des plaques stratifiées rectangulaires composites symétrique constituées de fibres curvilignes. Houmat (2013) a appliqué la version- p pour étudier la vibration non-linéaire des SCRVR rectangulaires symétriques et antisymétriques composées de fibres curvilignes. Les résultats ont montré que les stratifiés antisymétriques produisent des fréquences fondamentales linéaires et non linéaires légèrement inférieurs à celles des stratifiés symétriques. Les fréquences fondamentales maximales et minimales, linéaires et non linéaires ne peuvent pas être obtenues en utilisant des fibres rectilignes. Une nouvelle version- p des éléments finis, avec des fonctions de base hiérarchique en utilisant la théorie de couche par couche en zig-zag est développé par Saleh Yazdani et *al.* (2014). La théorie est proposée pour étudier le comportement non-linéaire des plaques SCRVR avec des fibres curvilignes.

1.5. Méthodes d'optimisation des stratifiés composites

L'avantage des matériaux composites est qu'ils fournissent d'excellentes propriétés mécaniques. Cependant, l'utilisation de cet avantage nécessite l'optimisation de la forme et la taille et le placement correct des fibres dans le matériau, ce qui donne une bonne possibilité d'adapter les propriétés du matériau ; Toutefois, cela augmente la complexité du problème de conception. Cette complexité existe, non seulement à cause de nombreuses variables de conception, mais aussi à cause du problème d'optimisation multimodale et dimensions variables avec des dérivées inaccessibles ou coûteuses. Dans la littérature, différentes classifications et différentes techniques d'optimisation de

stratifié composite à rigidité constante et variable ont été présentées par Ghiasi et *al.* (2009,2010). Dans ce chapitre nous présentons quelques méthodes d'optimisation les plus utilisées.

I.5.1. Algorithme génétique (AG)

L'algorithme génétique (AG) est une technique d'optimisation évolutionnaire à l'aide du principe de Darwin "survie du plus apte" pour améliorer une population de solutions. Si la taille de la population est suffisamment grande, AG n'est pas au risque d'être bloqué dans un optimum local. Cependant, trouver une solution globale n'est pas nécessairement garantie d'être couronnée de succès si un nombre infini d'itérations sont effectuées. Malgré le coût de calcul élevé, AG a été la méthode la plus populaire pour l'optimisation de la séquence d'empilement d'un composite stratifié [Venkataraman et Haftka (1999)]. Son codage simple, qui évite les calculs de gradient, et sa flexibilité d'être appliquée à une grande variété de problèmes avec différents types de variables et fonctions objectives font AG particulièrement utile pour les problèmes avec des fonctions multimodales, variables discrètes, et les fonctions avec des dérivées coûteuses.

Callahan et Weeks (1992), Nagendra et *al.* (1992), Le Riche et Haftka (1993), et Ball et *al.* (1993) sont parmi les premiers qui ont adopté et utilisé AG pour l'optimisation de séquence d'empilement des stratifiés composites. AG a été utilisé pour plusieurs fonctions objectives, telles que résistance [Le Riche et Haftka (1993), Park et *al.*(2001)], charge de flambage [Le Riche et Haftka (1993), Gürdal et *al.*(1994), Abouhamze et Shakeri(2007)], stabilité dimensionnelle [Le Riche et Gaudin(1998)], absorption d'énergie de déformation [Potgeiter et Stander(1998)], poids (en tant que contrainte ou en tant que fonction objectif à minimiser) [Rajendran et Vijayarangan(2001), Sadagopan et Pitchumani(1998), Sivakumar et *al.*(1998), Naik et *al.*(2008)], flexion et torsion couplage [Soremekun et *al.*(2001)], rigidité [Potgeiter et Stander(1998), Todoroki et *al.*(1995)], fréquences fondamentales [Haftka et Gürdal(1992), Abouhamze et Shakeri(2007), Sivakumar et *al.*(1998), Apalak et *al.*(2008)].

AG est initialement développé pour l'optimisation sans contrainte, alors les problèmes de conception sont généralement limités par la force, le poids, le coût de matériel ou d'autres critères. Parmi plusieurs méthodes utilisées pour intégrer les contraintes, en utilisant une stratégie de fonction de pénalité. Une fonction de pénalité

est introduite pour convertir un problème contraint à un problème sans contrainte par l'attribution d'un terme de pénalité pour les solutions irréalisables. La pénalité attribuée à chaque solution dépend du nombre et de l'intensité des contraintes violées. Un autre procédé pour gérer les contraintes est la stratégie de réparation [Todoroki et Haftka(1998)], qui transforme des solutions irréalisables à une solution réalisable située dans une proximité. Sargent et *al.* (1995) ont comparé AG avec quelques algorithmes (recherche aléatoire, recherche avide, et recuit simulé) et ils ont observé que AG produit de meilleures solutions que les recherches avides, qui dans certains cas n'ont pas pu trouver une solution. Même si plus exigeants en termes de temps de calcul, AG révèle être un algorithme plus robuste. Sivakumar et *al.* (2000) ont comparé La méthode Quasi-Newton par Davidon, Fletcher et Powell (DFP) [Davidon (1991)] et AG, les deux méthodes sont appliquées pour réduire le poids d'un composite stratifié limité par ses fréquences fondamentales. Il a été signalé que DFP converge en un plus petit nombre d'itérations lorsque le nombre de contraintes était petit. Cependant, trouver un point possible était une tâche difficile lorsque le nombre de contraintes augmente. Considérant également que la DFP ne pouvait pas gérer des variables discrètes, ils ont conclu "AG semble être le meilleur outil pour optimiser les stratifiés composites".

Tatting et Gürdal (2001) ont utilisé une définition de trajectoire curviligne de la fibre à trois paramètres pour modéliser l'orientation des fibres dans des SCR. Un algorithme génétique a été utilisé pour optimiser la trajectoire de la fibre pour la charge de flambage maximale. Une tendance similaire a été utilisée par Huang et Haftka (2005), qui fait appel à une fonction d'interpolation bilinéaire pour représenter la distribution des fibres à proximité d'un trou dans chaque couche d'un stratifié composite multicouche. Legrand et *al.* (2006) ont utilisé un algorithme génétique pour trouver l'orientation optimale des fibres au niveau de chaque élément d'une plaque composite. Ensuite les trajectoires des fibres ont été exprimées par l'algorithme de Runge-Kutta. Cette méthode nécessite un grand nombre d'éléments dans le but de représenter les changements continus dans les angles de la fibre et n'est applicable que pour les stratifiés à couche unique.

Bien qu'AG ait été largement utilisée pour l'optimisation de la séquence d'empilement, un inconvénient majeur est son taux de convergence faible. AG est un algorithme évolutionnaire basé sur la population, et peut nécessiter plusieurs

générations avant de converger vers une solution [Liu et Haftka (2001)]. Chaque génération est constituée d'un grand nombre d'évaluations de la fonction, ainsi il peut être long et coûteux en calculs.

1.5.2. Optimisation avec paramètres de laminage

Les premiers travaux sur l'optimisation composite peuvent être retracés au développement des paramètres de laminage par Tsai et Pagano à la fin des années 1960. Leur travail a révélé un avantage potentiel pour les paramètres de laminage. Les variables de conception discrètes (angles et épaisseurs des plis) sont regroupées dans un ensemble de douze paramètres continus (4 membranaires, 4 flexionnels et 4 couplage membrane-flexion) qui décrivent la rigidité d'un stratifié dans l'espace convexe. Ces paramètres de laminage peuvent être utilisés en tant que variables de conception intermédiaires et un optimiseur gradient pourraient être utilisé dans une minimisation de conformité pour déterminer l'ensemble optimal de paramètres. Cependant, une étape supplémentaire serait encore nécessaire pour déterminer l'empilement optimal.

Lorsque Tsai et Pagano(1968) ont publié leur travail, pas de contraintes ont été placées sur les paramètres de laminage qui ont rendu leur utilisation dans l'optimisation difficile. Cependant, au début des années 1980, Miki (1982) a développé un moyen simple de contraindre les espaces de conception des paramètres de laminage en supposant des combinaisons balancées et symétriques afin de réduire le nombre de paramètres de laminage à quatre : deux dans le plan et deux hors-plan. A côté de l'avantage prometteur de l'utilisation des paramètres de laminage, le défi de travailler avec ces paramètres est qu'ils ne sont pas indépendants et ne peuvent pas être arbitrairement prescrits. La plage admissible des paramètres de laminage est donnée en résolvant les relations géométriques. Plusieurs auteurs, comme Fukunaga et Vanderplaats (1991) et Grenstedt et Gudmundson (1993), ont proposé des conditions nécessaires pour les différentes combinaisons de paramètres de laminage, mais l'ensemble des conditions suffisantes pour tous les douze paramètres est encore inconnue [Hammer et al. (1997)]. La stratégie des paramètres de laminage nécessite la résolution du problème inverse pour obtenir le nombre correspondant de couches, des épaisseurs et des orientations de fibres, qui sont appropriés pour la fabrication.

Résoudre le problème inverse n'est pas facile et la solution n'est pas unique. Miki (1985) a proposé une méthode pour visualiser la plage admissible des paramètres de laminage et leurs paramètres d'empilage correspondant. La méthode est rapide et pratique, même si elle peut être appliquée que pour les stratifiés avec propriétés prescrites dans le plan de rigidité et stratifiés angle-plis équilibrées de type $[\pm \theta_1 / \pm \theta_2 / \dots / \pm \theta_i]_s$. Même que pour le diagramme dans le plan de laminage, les diagrammes de laminage de flexion ont également été développés [Miki et Sugiyama (1993)]. Fukunaga et Chou (1998) ont utilisé une technique graphique similaire pour les cuves sous pression cylindriques stratifiées. Autio (2000), Kameyama et Fukunaga (2007), Enrique et *al.* (2007), et d'autres chercheurs ont utilisé AG pour résoudre le problème inverse.

Setoodeh et *al.* (2006a-b) ont utilisé les paramètres de laminage comme variables de conception. Le problème de conception de minimum de souplesse d'une plaque rectangulaire à rigidité variable a été résolu en utilisant une combinaison de programmation quadratique séquentielle et la méthode de directions faisables. Cette méthode repose sur le comportement plan/flexion des stratifiés composites minces symétriques qui peut être entièrement modélisé avec seulement quatre paramètres de laminage. Mostafa et *al.* (2007) ont utilisé les paramètres de laminage pour concevoir des panneaux composite à rigidité variable en considérant la maximisation de la fréquence fondamentale. Cette fréquence est calculée par éléments finis conformes, basés sur la théorie classique des plaques. Abdallah et Gürdal (2007) ont également choisi les paramètres de laminage pour maximiser la fréquence naturelle des panneaux composites à rigidité variable. Ils ont développé un critère d'optimalité discrets basé sur une approximation réciproque généralisée.

En général, les méthodes d'optimisation basées sur les paramètres de laminage sont limitées à des réponses structurelles globales, telles que la rigidité, et n'incluent pas les contraintes de résistance locales au niveau de plis. Les études de conception optimales sont limitées à certaines réponses structurelles et à des configurations spécifiques de stratifiés. Le problème inverse doit être résolu pour obtenir le nombre correspondant de couches, épaisseurs, et orientations des fibres, qui est la partie la plus difficile.

I.5.3. Optimisation couche par couche

La méthode d'optimisation couche par couche optimise la performance globale d'un stratifié composite par une optimisation séquentielle ou une partie des couches à

l'intérieur d'un stratifié. Cette méthode fonctionne avec une couche ou un sous-ensemble de couches dans le stratifié et nécessite tout d'abord la sélection du meilleur stratifié initial, puis l'addition de la couche qui améliore le mieux la performance du stratifié, qui est habituellement réalisé par une recherche de dénombrement [Kere et *al.* (2002), (2003)]. Massard (1984) a commencé avec un stratifié d'une seule couche et il a trouvé la meilleure orientation des fibres pour le stratifié à un seul pli. Todoroki et *al.* (1996) ont proposé deux autres approches pour trouver le stratifié initial. 1) Ils ont utilisé d'abord des plis quasi-isotropes pour estimer le nombre initial de couches ; 2) Ils ont déterminé la liaison inférieure pour le nombre de couches en utilisant une super-couche (une super-couche est une couche virtuelle qui a les meilleures propriétés matérielles dans toutes les directions).

Un point important dans la stratégie d'optimisation couche par couche est l'impact de la couche nouvellement ajoutée sur la répartition des contraintes du stratifié. L'addition d'une nouvelle couche modifie le champ de contraintes dans le stratifié, en raison d'un changement dans la position des couches du stratifié et dans la partie de charge que chaque couche peut supporter. Par conséquent, des couches insérées dans les étapes précédentes ne sont plus optimales. Narita (2003), (2006) et Narita et Hodgkinson (2005) ont tenté de résoudre ce problème en commençant par un stratifié avec des couches hypothétiques sans rigidité. À partir de la couche la plus extérieure, de façon séquentielle toutes les couches ont été remplacées par une couche orthotrope et l'angle d'orientation de fibre optimale a été déterminé par dénombrement. La première solution a ensuite été utilisée comme première approximation pour le cycle d'itérations suivant. Narita et Robinson (2006) ont utilisé la méthode d'optimisation couche par couche pour déterminer les fréquences fondamentales maximales des panneaux stratifiés composites symétriques courbés. La méthode Ritz est utilisée pour le calcul des fréquences de vibration. Farshi et Rabiei (2007) ont proposé une méthode pour la conception d'épaisseur minimum constituée de deux étapes. La première a pour but d'introduire de nouvelles couches au stratifié. La deuxième pour examiner la probabilité de remplacer les couches de qualité supérieure avec des matériaux plus faibles. Ghiasi et *al.* (2008) ont utilisé la technique de séparation de la couche pour maintenir la localisation de différentes couches inchangées quand on ajoute une couche. Une nouvelle couche a été ajoutée au stratifié en divisant l'une des couches de courant en

deux couches. Ensuite, une procédure de graduation a été utilisée pour modifier les épaisseurs. Honda et *al.* (2013) ont utilisé l'optimisation couche par couche au problème de maximisation des fréquences fondamentales des plaques sandwich avec des fibres composites et des couches de base de faible rigidité.

Ces méthodes sont très rapides par rapport à d'autres techniques d'optimisation, parce qu'elles travaillent seulement avec une petite partie de toutes les variables de conception à chaque étape ; Toutefois, elles ne peuvent pas atteindre un optimum local. Ce problème peut être partiellement résolu par une révision des orientations des fibres et des épaisseurs à chaque fois une nouvelle couche est introduite dans le stratifié.

La méthode d'optimisation couche par couche sera détaillée dans le chapitre V.

I.5.4. Méthodes hybrides

Une méthode hybride combine deux ou plusieurs méthodes d'optimisation pour bénéficier des avantages de chacune d'entre elles afin d'obtenir un meilleur taux de convergence, pour atteindre un optimum global, pour avoir une meilleure précision, pour rendre la méthode d'optimisation plus robuste, ou pour d'autres raisons.

L'intégration d'une technique d'optimisation locale en AG [Kogiso et *al.* (1995), Lin et Lee (2004)] est l'approche hybride la plus populaire, dans laquelle un algorithme de recherche locale est appliqué à certains individus nouvellement générés pour les conduire à un optimum local. Ces solutions locales optimales remplacent les individus actuels dans la population pour préparer la prochaine génération. Cette combinaison utilise l'avantage d'AG pour trouver l'optimum global et l'avantage d'une méthode d'optimisation locale pour arriver rapidement à une solution optimale. Huang et Haftka (2005) ont combiné le Gradient Conjugué (GR) et un AG pour éviter un optimum local dans la conception des orientations des fibres à proximité d'un trou ouvert dans un stratifié composite multicouche. La seule variable de conception a été l'angle d'orientation des fibres. Elle est supposée avoir une distribution continue représentée par les fonctions d'interpolation bilinéaires. L'algorithme a été utilisé pour l'optimisation de la charge de rupture à l'aide du gradient conjugué (un optimum local) et en effectuant l'AG sur une population produite par une mutation aléatoire de l'optimum local. L'objectif de l'AG est de déplacer l'optimisation pour une meilleure

zone, tandis que la méthode de gradient conjugué a été utilisée pour trouver rapidement l'optimum local dans cette zone.

Pour l'étude d'un cas particulier du comportement plan-flexion d'un stratifié composite mince symétrique (qui peut être entièrement modélisé en utilisant seulement quatre paramètres de laminage indépendamment du nombre effectif de couches). Setoodeh et *al.* (2006a-b) ont résolu le problème de minimum de souplesse en combinant la programmation quadratique séquentielle et la méthode de directions faisables. Ce mélange de directions a été ajusté pour assurer la faisabilité, tout en conservant la rapidité de convergence. Honda et Narita (2011) ont étudié la conception de plaques composites stratifiées à anisotropie locale induite par les fibres courtes et les fibres curvilignes en vibration. Tout d'abord, pour démontrer l'efficacité de l'anisotropie locale, les distributions optimales des fibres courtes sont calculées sans contraintes directionnelles en utilisant un algorithme génétique simple, et le concept d'optimisation couche par couche est utilisé pour réduire le temps de calcul par éléments finis. D'autre part, des dispositions optimales de fibres curvilignes continues sont obtenues dans le cadre des contraintes de continuité où les directions de fibres sont considérées comme des projections des lignes de contour d'une surface polynomiale cubique.

Pour d'autres techniques d'optimisation et comparaison entre elles [voir les travaux de Ghiasi et *al.* (2009), (2010)].

Chapitre II

SCRV composés de fibres curvilignes

Objectif

L'objectif de ce chapitre est de donner plus de détails sur les stratifiés composites à rigidité variable (SCRV) et spécifiquement les stratifiés composés de fibres curvilignes. Ce chapitre est divisé en plusieurs parties. Dans la première partie, une introduction est présentée pour montrer la différence entre les stratifiés composites à rigidité constante et les SCR. Les méthodes principales pour créer des SCR sont résumées dans la deuxième partie. La procédure de fabrication et les considérations de conception des SCR composés de fibres curvilignes par les machines d'emplacement des gaines sont données dans la troisième et la quatrième partie respectivement. Une description de la fibre de référence, suivie par la formulation des équations de trajectoire de fibre et orientation, ainsi que les deux méthodes pour décrire toutes les fibres d'une plaque, et la définition de contrainte de courbure de la fibre de référence sont donnés dans la dernière partie.

II.1. Introduction

De nombreuses applications d'ingénierie moderne exigent des matériaux à haute performance qui allient rigidité élevée, haute résistance, et faible poids. Les matériaux composites offrent souvent la meilleure combinaison de ces propriétés. Le stratifié constitué de fibres à haute résistance et haute rigidité peut être combiné à des orientations différentes pour créer un matériau composite adapté aux conditions spécifiques de chargement. Les stratifiés composites traditionnels (stratifiés composites à rigidité constante) sont constitués de plusieurs plis composites. Chaque pli a des propriétés spécifiques, l'épaisseur et les angles d'orientation qui restent constants tout au long du pli. Les stratifiés composites à rigidité variable sont différents aux stratifiés traditionnels en faisant varier l'orientation des fibres dans l'espace à travers le stratifié. La conception des stratifiés à rigidité variable peut être adaptée à un large éventail d'applications potentielles par rapport aux stratifiés à rigidité constante.

II.2. Méthodes de création des SCR

Il existe deux méthodes principales pour créer des SCR [Langley (1999)]. Ces méthodes incluent la variation de fraction volumique des fibres et la variation des angles d'orientation des fibres dans un pli.

La première méthode sert à modifier les propriétés de réponse d'un stratifié, son principe est de varier la fraction volumique des fibres dans le stratifié. Leissa et Martin (1990) ont étudié les vibrations et les réponses au flambage des plaques composites à un seul pli avec des fibres parallèles espacées de façon variable. La variation d'espacement des fibres le long de la direction x a modifié spatialement les propriétés mécaniques. Ainsi, les propriétés de réponse de la plaque sont devenues des fonctions de position le long de l'axe des x . La méthode de Ritz a été utilisée pour déterminer la distribution initiale des contraintes et aussi pour résoudre le problème de vibrations et problèmes de flambage. Trois différents types de composites avec différents niveaux d'orthotropie ont été étudiés. Les auteurs ont montré qu'en faisant varier l'espacement des fibres, il était possible d'augmenter la charge de flambage jusqu'à 38% et la fréquence fondamentale jusqu'à 21%. En outre, ils ont montré que les deux, la charge de flambage et la fréquence de vibration peuvent être diminuées dans certains cas. Houmat (2012) a également limité son étude à un seul pli composite ayant des fibres droites et

parallèlement espacées. Les fibres sont réparties de manière plus dense dans la zone centrale où la rigidité élevée est nécessaire par rapport aux autres régions comme montré dans la figure 2.1.

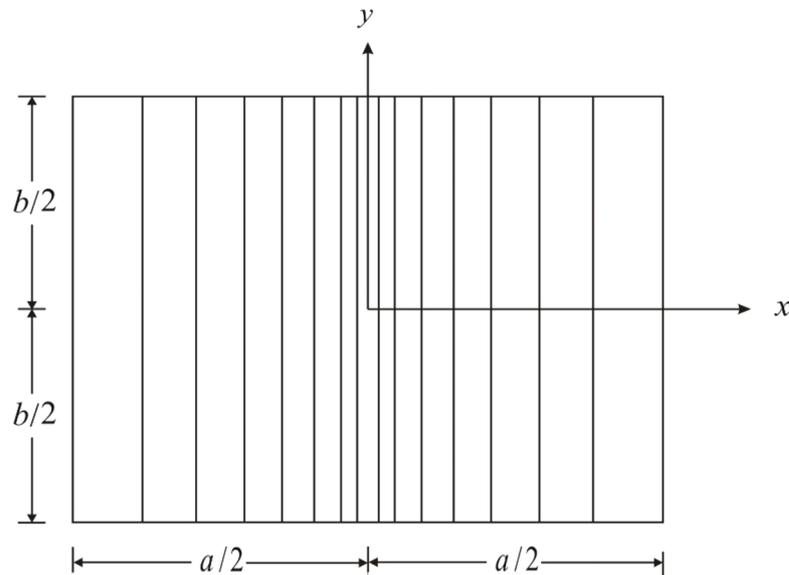


Figure 2.1 : Plaque rectangulaire avec un espacement variable des fibres.

L'auteur a utilisé trois matériaux composites différents. Il a montré que la plaque avec un espacement variable des fibres présente un comportement de durcissement plus accentué que la plaque avec un espacement constant des fibres et diminue avec l'augmentation de la fraction volumique des fibres.

La deuxième méthode de création d'un SCRv est de varier les orientations des fibres dans chaque pli. Les études du potentiel des SCRv sont nécessaires, car il semble évident que l'utilisation de fibres curvilignes serait une méthode efficace et souhaitable pour améliorer la performance des plaques. Le principal avantage de ce concept est que les paramètres de rigidité et de résistance qui dépendent de l'angle d'orientation des fibres peuvent être modifiés pour adapter l'espace de la structure aux charges attendues et des contraintes. En outre, il peut être possible d'améliorer la performance de la structure sans augmentation de poids, étant donné que le volume et le poids d'un pli à rigidité variable doit être la même que celle d'un pli à rigidité constante. Deux questions concernant ce concept de rigidité variable restent : ces structures peuvent être analysées avec précision et efficacité ? Et ces stratifiés peuvent être fabriqués ?

Pour tenter de répondre à la première de ces questions, les travaux faits par les différents chercheurs sur les stratifiés composés de fibres curvilignes sont mentionnés

dans le chapitre I. La réponse à la dixième question sera donnée dans la suite de ce chapitre.

II.3. Fabrication des SCRIV composés de fibres curvilignes

Les stratifiés à rigidité constante composés de fibres rectilignes sont fabriqués par la méthode de drapage manuel. La qualité du produit acceptable est difficile à réaliser, ce qui rend le coût de cette technique inefficace. À l'aide des techniques de fabrication automatisées modernes, il est économiquement possible de produire une grande variété de formes composites. L'enroulement de filaments et le drapage automatisé ont permis de produire une variété de produits composites et sont économiquement une alternative viable par rapport aux techniques traditionnelles comme le drapage manuel. Une méthode innovante a été développée pour produire des stratifiés composites à rigidité variable en variant l'orientation des fibres dans chaque pli. En combinant les caractéristiques de drapage automatisé et l'enroulement de filaments, les machines d'emplacement des gaines sont capables de produire économiquement une large gamme de produits composites de haute qualité.

La machine d'emplacement des gaines est un robot de haute précision, avec une grande liberté de mouvement, contrôlé par ordinateur pour produire des stratifiés composites sans aucune intervention humaine [Bullock et al. (1990), Enders et Hopkins (1991)]. Une programmation est utilisée pour mettre en œuvre la conception souhaitée et les simulations confirment sa faisabilité. Cette technologie permet la conception et la production de composants qui seraient extrêmement difficiles ou même impossibles avec d'autres méthodes automatisées. Malgré la nouveauté du processus et le coût élevé de la machinerie, la disponibilité des systèmes d'emplacement des gaines augmente rapidement. Par exemple, Evans et al. (1989) ont examiné les capacités de la machine d'emplacement des gaines *Cincinnati Milacron FPX*. Deux autres machines sont fabriquées par *Hercules*, elles ont été examinées par Barth (1990). L'avantage principal d'emplacement des gaines par rapport au drapage manuel d'un stratifié composite est l'automatisation du processus de fabrication. La répétabilité du processus est fortement améliorée où sa vitesse est augmentée. Bullock et al. (1990) ont estimé le processus d'emplacement des gaines pour être plus rapide jusqu'à sept fois plus que le drapage manuel.

La possibilité de produire des formes complexes dépend d'une gamme complète de mouvement. Dans le procédé d'emplacement des gaines, les gaines de pré-imprégnées individuelles sont alimentées à travers un système de distribution de fibres (figure 2.2 (a)) dans une tête de placement de fibres (figure 2.2 (b)) et regroupées pour former une bande de fibres parallèles.



(a) Système de distribution d'emplacement de fibres. (b) Trajectoires de gaines courbées.

Figure 2.2 : Technologie d'emplacement de fibres : caractéristiques du système (courtoisie de Ingersoll Machine Tools (Ing)).

Les machines d'emplacement des gaines ont sept degrés de liberté qui leur permettent un large éventail requis de mouvement. Le premier degré de liberté est la rotation du mandrin. Trois degrés de liberté permettent pour l'ensemble de la machine d'être traduits sur un chariot dans les directions x , y et z . Les trois derniers degrés de liberté permettent à la tête d'emplacement des gaines qui est le cœur de la machine (une tête typique est montrée dans la figure 2.4) à être mis en rotation autour des axes x , y et z . Un schéma de base d'une machine d'emplacement des gaines *Hercules* et les sept axes de mouvement sont montrés dans la figure 2.3 [Barth (1990)]. La rotation du mandrin est désignée par « l'axe 1 ». Les axes de translation sont désignés par « Axe 2 » « Axe 3 » et « Axe 4 ». Les trois axes de rotation de la tête sont désignés par "R1", "R2" et "R3". La machine *Cincinnati Milacron* a une configuration similaire avec sept axes. Le chariot et le mandrin de la plus grande machine *Hercules Inc.* permettent la fabrication des plaques de plus de 9.144 m de longueur. Enfin, la gamme complète de mouvement permet à la tête avec ses trois axes de rotation à être alignées dans une direction

quelconque. Cette tâche est impossible pour la méthode d'enroulement filamentaire, qui limite les fibres de suivre des trajectoires quasi-géodésiques. La tête d'emplacement des gaines de la machine *Cincinnati Milacron* peut accueillir jusqu'à 24 gaines individuelles, tandis que les machines *Hercules Inc.* ont deux différentes configurations de la tête : 12 et 32 gaines. Le résultat est des largeurs des trajectoires jusqu'à 76.2 mm pour la machine *Cincinnati Milacron* et jusqu'à 101.6 mm pour les machines *Hercules Inc.*

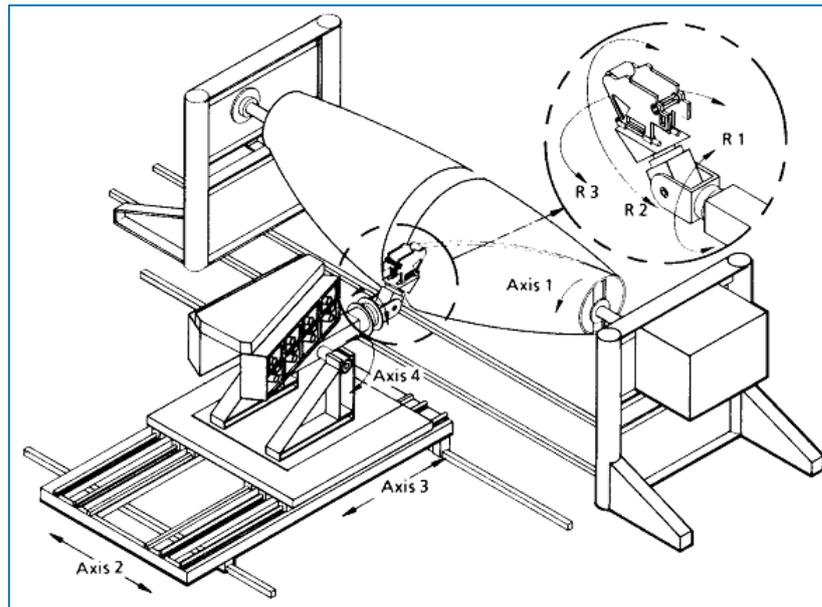


Figure 2.3 : Schéma de la machine *Hercules Inc.* d'emplacement des gaines [Waldhart (1996)].

Lors du démarrage d'une trajectoire de fibre, les gaines individuelles sont introduites par la tête et compactées sur une surface. Depuis que la trajectoire est posée, la tête de traitement peut couper ou redémarrer les gaines individuelles. Cela permet à la largeur de la bande de fibres à être augmentée ou diminuée et facilite l'élimination des écarts excessifs ou les chevauchements entre les trajectoires adjacentes. À la fin de la trajectoire, les gaines restantes sont coupées pour épouser la forme de limite de pli. Cela réduit la quantité de matériau rebut. Au cours de la mise en place d'une trajectoire, chaque gaine est distribuée à sa propre vitesse, ce qui lui permet de se conformer de manière indépendante à la surface du pli. A cause de ce système de distribution différentielle, les fibres peuvent être dirigées pour répondre aux objectifs spécifiques de conception.

Un dispositif de compactage de roulement, combiné avec la chaleur pour l'amélioration de la punaise, lamine les gaines sur la surface de drapage. L'action d'appuyer sur les gaines dans la surface de travail, ou un pli posé précédemment, enlève l'air piégé réduisant le besoin de réduction de volume vide. Le compacteur combiné avec le positionnement de basse tension permet aux fibres d'être posées sur des surfaces concaves. Cela est impossible avec les méthodes traditionnelles, telles que l'enroulement de filaments.

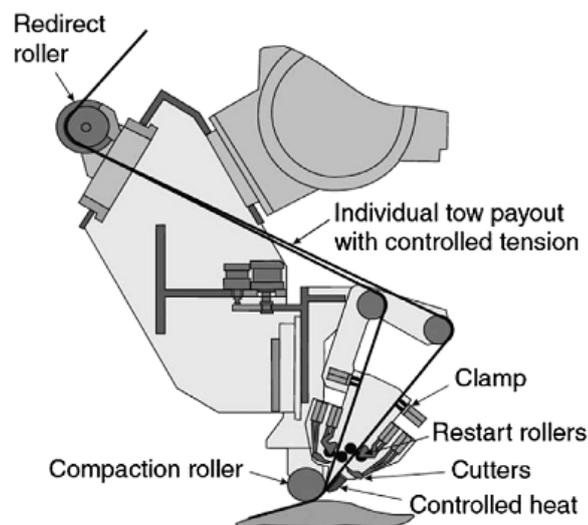


Figure 2.4 : Tête typique d'emplacement des gaines [Lopes et al. (2008)].

II.4. Considérations de conception

La technique d'emplacement des fibres offre la possibilité de réduire les coûts des matériaux et la main-d'œuvre tout en permettant la production des structures adaptées pour des performances améliorées. Pour profiter de ces économies, le concepteur doit prendre en considération les avantages et les limites spécifiques de cette technologie. Une de ces limites est le rayon de rotation de la tête d'emplacement des gaines. Afin d'éviter le flambage de la fibre locale, Nagendra et al. (1995) suggèrent un rayon de rotation minimum de 635 mm. Si le rayon de rotation est trop petit les gaines internes ont tendance à se rider hors-plan, ce qui conduit à des imperfections et dégradations de la capacité de charge structurale supportée par le stratifié.

Le concepteur doit aussi prendre en considération lorsque les gaines sont ajoutées en vérifiant qu'il n'y pas trop de lacunes et chevauchements dans une petite région. Il y a

une limite de longueur pour une gaine à être correctement placée par la tête car la coupe de gaine est située entre le rouleau de reprise et le rouleau de compactage (Figure 2.4), il est possible de redémarrer et couper une gaine avant qu'il ne soit correctement introduit dans le rouleau de compactage. Par conséquent, la gaine ne sera pas placée avec précision sur la partie en cours de fabrication. Ensuite, la longueur minimale de coupe de la machine peut être correctement définie. Cette longueur est la distance entre le début du point de dépôt et la coupe de gaine dans la tête d'emplacement des fibres et varie en fonction de la machine d'emplacement des gaines considérées.

II.5. Description de la trajectoire de la fibre de référence

La première étape de la notion de rigidité variable est de concevoir une façon pour décrire une trajectoire de fibre curviligne réaliste en termes de variables générales. Une méthode simple de modélisation des trajectoires de fibre complète a été développée dans les recherches commencées par Gürdal et Olmedo (1992,1993), et Olmedo et Gürdal (1993). L'idée originale est que la réponse de stratifiés renforcés par des fibres peut être modifiée de manière significative en permettant à l'angle d'orientation des fibres de varier spatialement à travers la structure. Le travail mené par Gürdal a permis de formuler une définition de la trajectoire de la fibre de référence avec un nombre minimum de paramètres.

Les fibres rectilignes dans un stratifié composite peuvent être décrites de façon adéquate par un ensemble de propriétés des matériaux de base, une épaisseur, et un seul angle d'orientation θ . Les stratifiés composés de fibres curvilignes nécessitent non seulement des informations concernant le matériau et l'épaisseur, mais aussi un procédé commode pour décrire les différentes orientations des fibres en un point quelconque dans un seul pli. Dans ce travail, l'angle d'orientation des fibres θ est défini comme une fonction linéaire de x . L'angle d'orientation des fibres varie de façon linéaire entre deux angles le long de l'axe des x . Le premier des deux angles, T_0 , est l'angle d'orientation des fibres au centre de la plaque. Le deuxième angle, T_1 , est l'angle d'orientation des fibres à une distance caractéristique $a/\sqrt{2}$ à partir du centre de la plaque, où a représente le rayon de la plaque circulaire. Par conséquent, l'orientation d'une seule trajectoire de fibre curviligne peut être dénotée par le symbole $\langle T_0|T_1 \rangle$. La figure 2.5 présente la trajectoire et l'orientation de la fibre de référence.

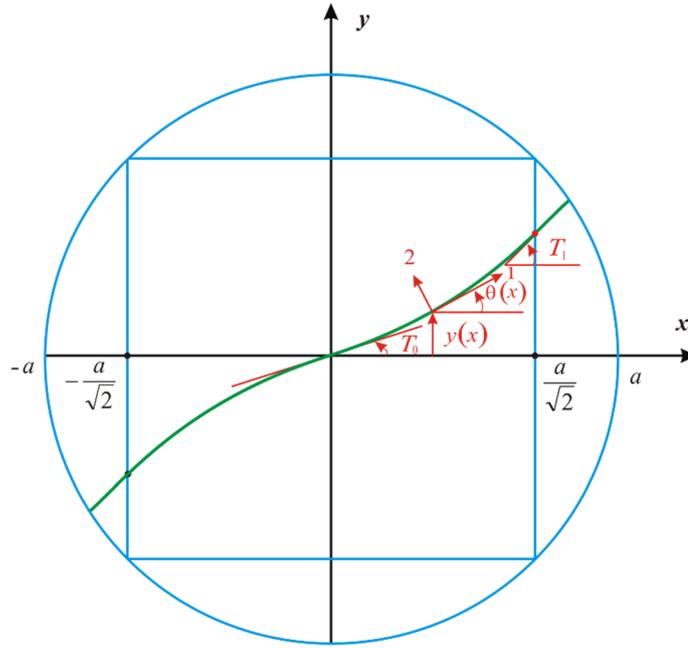


Figure 2.5 : Trajectoire de la fibre de référence et angles d'orientation.

Puisque un pli est composé de fibres orientées de façon similaire à la trajectoire de la fibre de référence, la description de la trajectoire de la fibre de référence servira pour décrire toutes les trajectoires des fibres de la plaque. L'équation de la trajectoire résultante $y(x)$, et l'orientation $\theta(x)$ de la fibre de référence peuvent être exprimés en fonction de T_0 , T_1 , et x par :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}(T_1 - T_0)} \left\{ -\ln[\cos(T_0)] + 2\ln[\cos(T_1)] - \ln \left[\cos \left(-T_0 + 2T_1 + \frac{\sqrt{2}(T_1 - T_0)}{a} x \right) \right] \right\} \\ \quad \left(\frac{-2a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{-a}{\sqrt{2}} \right) \\ \frac{a}{\sqrt{2}(T_1 - T_0)} \left\{ -\ln[\cos(T_0)] + \ln \left[\cos \left(T_0 - \frac{\sqrt{2}(T_1 - T_0)}{a} x \right) \right] \right\} \\ \quad \left(\frac{-a}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \right) \\ \frac{a}{\sqrt{2}(T_1 - T_0)} \left\{ \ln[\cos(T_0)] - \ln \left[\cos \left(T_0 + \frac{\sqrt{2}(T_1 - T_0)}{a} x \right) \right] \right\} \\ \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \\ \frac{a}{\sqrt{2}(T_1 - T_0)} \left\{ \ln[\cos(T_0)] - 2\ln[\cos(T_1)] + \ln \left[\cos \left(-T_0 + 2T_1 - \frac{\sqrt{2}(T_1 - T_0)}{a} x \right) \right] \right\} \\ \quad \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{2a}{\sqrt{2}} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{a} (T_1 - T_0)x + T_0 + 2(T_1 - T_0) & \left(\frac{-2a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{-a}{\sqrt{2}} \right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{a} (T_1 - T_0)x + T_0 & \left(\frac{-a}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \right) \\ \frac{\sqrt{2}}{a} (T_1 - T_0)x + T_0 & \left(0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{a} (T_1 - T_0)x + T_0 + 2(T_1 - T_0) & \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{2a}{\sqrt{2}} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Après la définition de la trajectoire de la fibre de référence pour un pli donné, il est nécessaire de décrire les autres trajectoires qui formeront ce pli. Actuellement, deux méthodes différentes sont utilisées. La première méthode consiste à réaliser des trajectoires de fibres restantes en décalant la trajectoire de la fibre de référence le long de l'axe y . L'autre méthode consiste à créer des trajectoires de fibre par des ensembles de points qui sont à des distances fixes de la courbe de référence. Les trajectoires créées par cette méthode sont réellement parallèles à la trajectoire de la fibre de référence.

II.5.1. Trajectoires des fibres décalées

La méthode des trajectoires des fibres décalées suppose que chaque trajectoire additionnelle a la même forme que la fibre de référence, mais qu'elle est décalée dans une direction perpendiculaire à la variation de rigidité de telle sorte que tout le pli est couvert. Un exemple d'une trajectoire de référence et une trajectoire décalée sont montrées dans la figure 2.6. Les petites flèches en rouge ont une longueur identique. La distance du décalage est en général égale à la largeur de la trajectoire de la fibre au centre du pli. Le processus de création des trajectoires décalées supplémentaires est répété jusqu'à ce que le pli soit complètement rempli.

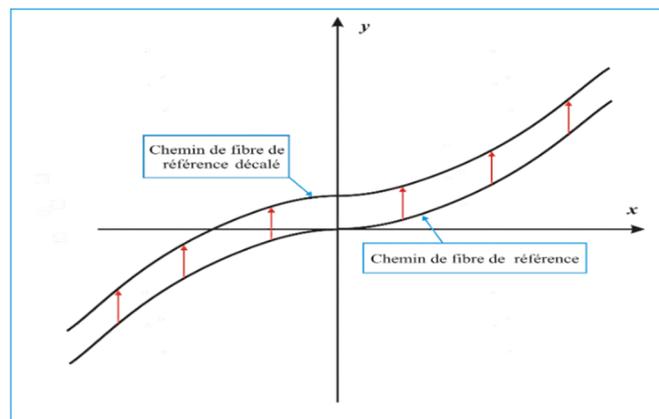


Figure 2.6 : Trajectoire de la fibre de référence et la trajectoire décalée.

II.5.2. Trajectoires des fibres parallèles

L'autre méthode utilisée pour définir les trajectoires de fibres restantes est la méthode des trajectoires des fibres parallèles. Ce procédé crée des trajectoires de fibres de telle sorte que chaque trajectoire est définie comme un ensemble de points situés à une distance constante à partir de la fibre de référence. Contrairement au cas de fibre décalée où une expression analytique existe pour chaque trajectoire de fibre individuelle, les trajectoires parallèles sont générées par un système numérique qui simule le processus de création d'une fibre parallèle à une autre fibre. Les informations requises pour créer une fibre parallèle à partir d'une fibre de référence sont représentées dans la figure 2.7. La trajectoire de la fibre de référence A dans ce cas est définie par un nombre infini de points A_i . La trajectoire B parallèle à la trajectoire A est définie par un ensemble de points B_i . Ces points pondent à une distance fixe à partir de trajectoire de la fibre de référence, mesurée le long de la normale à la trajectoire de référence \hat{n}_{A_i} de sorte que :

$$|\overline{A_1B_1}| = |\overline{A_2B_2}| = |\overline{A_3B_3}| = \dots = |\overline{A_lB_l}| \quad (2.3)$$

En supposant que B_i satisfait l'équation (2.3), alors la courbe B est parallèle à la courbe A . La répétition de cette procédure crée un pli avec des fibres véritablement parallèles.

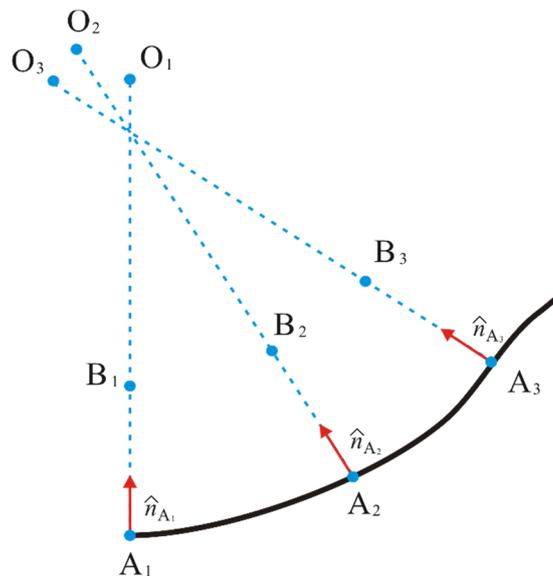


Figure 2.7 : Création de deux courbes parallèles.

Le décalage de la trajectoire de la fibre de référence le long de l'axe y pour créer les trajectoires restantes dans un pli est plus utilisable que la méthode de la trajectoire des

fibres parallèles. L'avantage de cette méthode est qu'elle est manipulée très rapidement. Le procédé ne nécessite que de placer les valeurs connues à partir des données de la trajectoire de référence d'une manière qui représente la totalité de la plaque. Dans ce travail, la méthode des trajectoires des fibres décalées est utilisée.

II.5.3. Contraint de courbure de fibre

Pour créer des stratifiés composés de fibres curvilignes, il est nécessaire de courber les trajectoires des fibres. Si une fibre est courbée trop, alors il est possible qu'un vrillage se développe dans la fibre. Pour éviter cela, il suffit de courber les trajectoires des fibres de sorte que la magnitude de la plus grande courbure dans chaque pli soit inférieure à une valeur maximale prescrite. Le contrainst de courbure donne une mesure de variation de l'angle d'orientation par rapport à la longueur de la plaque. Les trajectoires de fibres décalées sont similaires à la trajectoire de la fibre de référence. Par conséquent, le contrainst de courbure est appliqué uniquement à la trajectoire de la fibre de référence. Puisque la fonction de la trajectoire de la fibre de référence $y(x)$ est antisymétrique, la courbure de cette trajectoire dans la partie positive des x doit être trouvée.

La définition de la courbure κ d'une trajectoire de fibre curviligne pour une fonction à seule variable x est donnée par la formule suivante :

$$\kappa = \frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} \quad (2.4)$$

Où $y'(x)$ et $y''(x)$ désignent la dérivée première et deuxième de $y(x)$ par rapport à x .

La courbure de la trajectoire de la fibre de référence dans la partie positive peut être trouvée par l'insertion des première et deuxième dérivées de la fonction de la trajectoire de fibre y dans l'équation (2.4) pour obtenir :

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{a} (T_1 - T_0) \cos \left[T_0 + \frac{\sqrt{2}}{a} (T_1 - T_0)x \right] \quad (2.5)$$

En chaque point le long de la trajectoire de la fibre de référence, la courbure κ doit être inférieure à la courbure maximale admissible de 3.28 m^{-1} , (dans le travail de

Waldhart (1996) cette valeur est $1/12 \text{ in}^{-1}$). Cette valeur critique a été déterminée à l'aide de la machine d'emplacement des gaines utilisée par Boeing Defense and Space Group en Philadelphia. Si la courbure est inférieure à cette valeur critique, l'analyse est effectuée et si elle est supérieure à la courbure maximale admissible, aucune analyse a été effectuée et le stratifié ne peut pas être fabriqué.

L'espace de conception pour un pli composé de fibres décalées avec un rayon $a = 0.5 \text{ m}$ est représenté sur la figure 2.8.

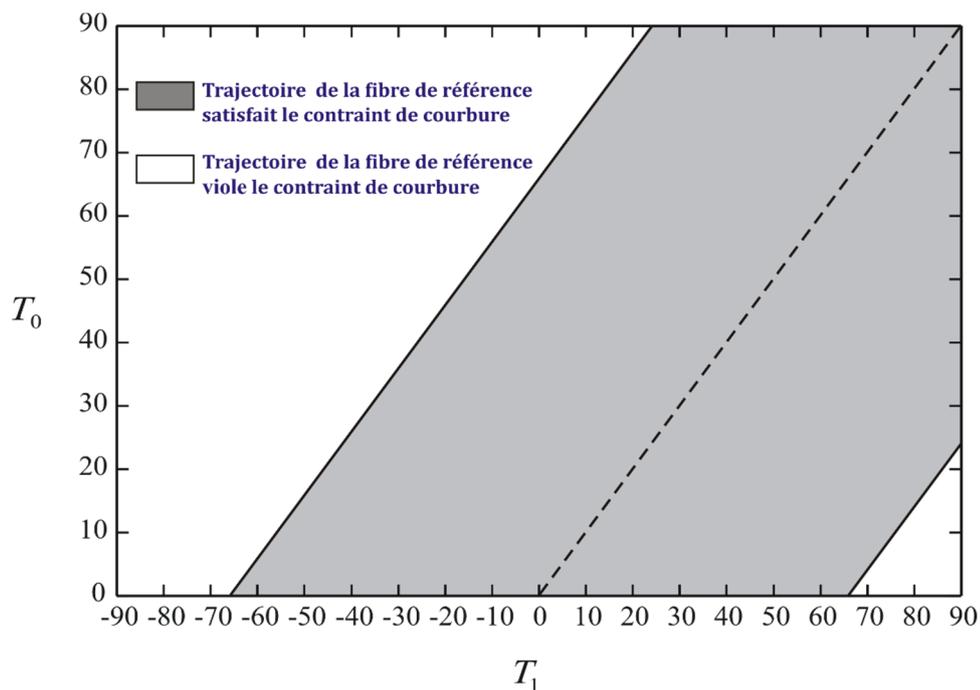


Figure 2.8 : Espace de conception pour un pli composé de fibres curvilignes décalées ($a = 0.5 \text{ m}$).

La région grise est où le format de fibre décalée est une conception valable puisque le contrainte de courbure de fibre est satisfait dans cette région. La région blanche représente un pli qui ne peut pas être fabriqué parce que la trajectoire de la fibre de référence viole le contrainte de courbure.

Chapitre III

Théorie du premier ordre des plaques

Objectif

Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie du premier ordre des plaques. Sa formulation est basée sur les hypothèses de Mindlin dans une approche bidimensionnelle d'élasticité. Nous commençons par une définition de plaque et les théories utilisées dans la formulation numérique de structures composites. La présentation des hypothèses de la théorie du premier ordre des plaques est donnée, suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. Les relations déformation-déplacement sont données. Ensuite, une analyse détaillée est faite sur l'introduction du facteur de correction du cisaillement transversal dans la formulation des plaques épaisses. Le tenseur de contraintes pour les plaques composites en coordonnées globales est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée. Les fonctionnelles des énergies cinétique et de déformation sont utilisées pour l'obtention de l'équation du mouvement vibratoire libre de la plaque.

III.1. Introduction

D'une manière générale, une plaque est un solide élastique dont l'épaisseur est petite en comparaison avec les deux autres dimensions, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne. Par convention, cette surface sera le plan $(x - y)$. L'axe $(o - z)$ correspond à l'axe transversal suivant l'épaisseur h (figure 3.1). Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène ou être obtenue par l'empilement de différents plis de matériaux orthotropes.

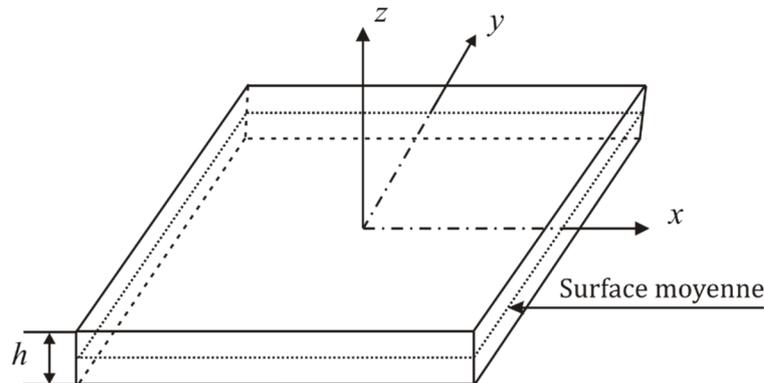


Figure 3.1 : Plaque rectangulaire.

III.2. Théories utilisées dans la formulation numérique des structures composites

Différentes théories utilisées pour l'approximation du déplacement et de la déformation mécanique ont été initialement utilisées pour la modélisation des structures métalliques (en matériau isotrope), puis étendues à l'étude des structures composites (en matériau anisotrope, orthotrope, ou transversalement isotrope). Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories :

- Celles formulées tenant pour base la notion d'une seule couche équivalente, appelées Théorie de la Couche Equivalente Unique ;
- Celles formulées sur le concept de couches distinctes, appelées Théorie de la Couche Equivalente.

La première catégorie inclue la Théorie Classique des Stratifiés (TCS), la Théorie de la Déformation de Cisaillement du Premier-Ordre (TDCP), la Théorie de la Déformation de Cisaillement du Troisième-Ordre (TDCT) et d'autres. D'autre part, la deuxième catégorie inclue la Théorie des Couches Indépendantes (TCI) et la Théorie des Couches

Dépendantes (TCD). Nous pouvons citer les travaux de Berthelot (1992), Reddy (1997), et Kollar et Springer (2003) qui présentent ces différentes théories.

Selon Reddy (1997), si le but de l'étude est la détermination de la réponse globale de la structure composite, telles que déflexions, charges critiques de flambage, fréquences et modes propres, l'étude peut être réalisée de manière assez en utilisant les théories fondées sur hypothèse d'une seule couche équivalente (TCS, TDCP, TDCT...). Par contre, lorsque le but de l'étude est associé aux réponses locales tels que à l'identification des zones plus critiques en relation au niveau des contraintes suivant l'épaisseur du stratifié, ou la localisation des zones d'incidence probable d'endommagement, il est recommandé l'emploi de théories fondées sur couches discrètes (TCI, TCD, ...).

III.3. Définitions et Hypothèses

III.3.1. Théorie de Kirchhoff

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par (Kirchhoff 1850) :

H.1 : Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.

H.2 : La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres composantes.

H.3 : Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan après déformation.

H.4 : L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

La troisième hypothèse veut dire que la déformation due au cisaillement transversal est négligée. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées.

III.3.2. Théorie du premier ordre des plaques

Wittrick (1987) a précisé qu'en excluant les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation, l'erreur dans la théorie de plaque de Kirchhoff est proportionnelle à l'épaisseur. Si la théorie des plaques de Kirchhoff est employée, les fréquences obtenues sont au-dessus de celles prévues. Une théorie plus sophistiquée des plaques est ainsi nécessaire pour l'analyse des plaques épaisses. Il y a eu beaucoup de théories des plaques

épaisses prenant en compte l'effet du cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible.

Reissner (1944,1945) a proposé la théorie des plaques épaisses la plus simple en introduisant l'effet du cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin (1951) a présenté une théorie du premier ordre des plaques avec un facteur de correction du cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues. Pour tenir compte de l'effet du cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que :

- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur k_s de correction du cisaillement à appliquer pour la contrainte de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que :

- ✓ L'effet de l'inertie de rotation est inclu.

La théorie de Kirchhoff (théorie classique des plaques minces), peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner-Mindlin.

III.4. Relations cinématiques

III.4.1. Champ de déplacements

Dans la théorie de Reissner-Mindlin le modèle de déplacements (figure 3.2) est basé sur trois variables indépendantes : le déplacement transversal $w(x, y, z, t)$ et les deux rotations $\theta_x(x, y, t)$ et $\theta_y(x, y, t)$.

Le champ des déplacements s'exprime alors en fonction de ces trois variables par les relations suivantes :

$$u(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t) \quad (3.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3.3)$$

u, v, w, θ_x et θ_y sont des fonctions inconnues et sont appelées déplacements généralisés du système où :

- ✓ u et v sont les déplacements membranaires.
- ✓ w est le déplacement flexionnel.
- ✓ θ_x et θ_y sont les rotations.

La géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation est représentée dans la figure 3.2.

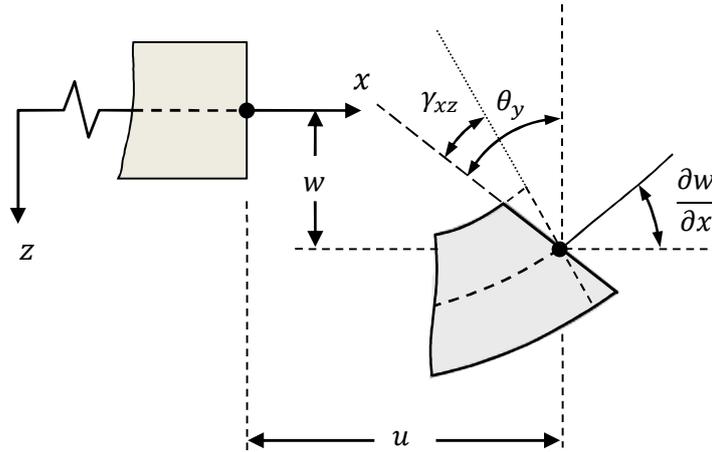


Figure 3.2 : Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation.

III.4.2. Relations déformation-déplacement

Les relations déformation-déplacement suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié.

La relation entre les déformations et déplacements est définie en fonction des dérivées des déplacements (u, v, w) par rapport aux coordonnées (x, y, z). Donc, ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \quad (3.7)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \quad (3.8)$$

Les expressions des courbures sont définies comme :

$$\chi_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$\chi_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$\chi_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (3.11)$$

Les expressions des composantes du vecteur de déformation peuvent être écrites sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

A noter que les déformations ε_{xx} , ε_{yy} et γ_{xy} sont linéaires à travers l'épaisseur de la plaque tandis que les déformations γ_{xz} et γ_{yz} sont constantes.

III.4.3. Efforts résultants et moments

Les équations exprimant les forces et les moments sont obtenues par l'intégration des contraintes comme suit :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz \quad (3.13-14)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} dz \quad (3.15-16)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \cdot z \cdot dz \quad (3.17-18)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot z \cdot dz \quad (3.19-20)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (3.21-22)$$

Les efforts et moments sont représentés dans les figures 3.3 et 3.4.

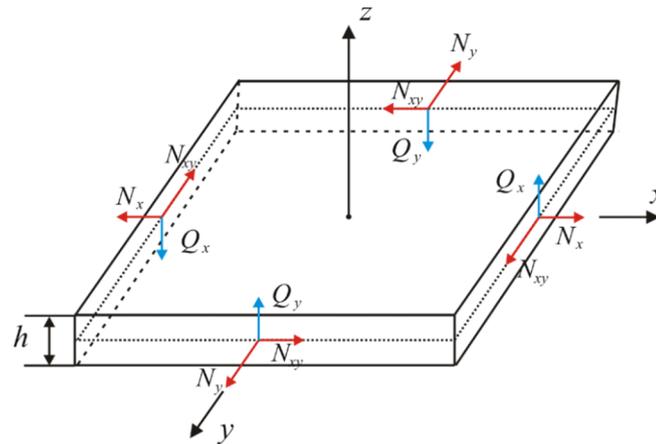


Figure 3.3 : Efforts agissant sur un élément de plaque.

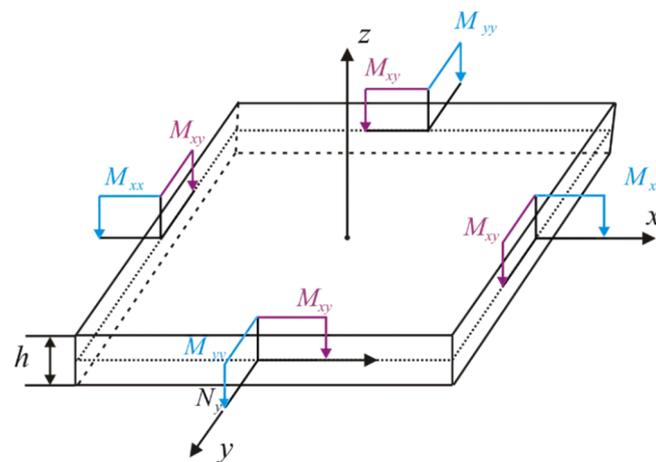


Figure 3.4 : Moments agissant sur un élément de plaque.

Puisque les déformations angulaires (γ_{xz} et γ_{yz}) sont constantes dans la direction de l'épaisseur de la plaque, les contraintes tangentielles de cisaillement sont également constantes dans la même direction. Ceci contredit le fait bien connu que les contraintes tangentielles de cisaillement sont paraboliques (c-à-d équation quadratique) à travers l'épaisseur de la plaque (figure 3.5). Tandis que cette anomalie entre la variation parabolique des contraintes tangentielles et l'état constant de ces mêmes contraintes prévues par la théorie du premier ordre ne peuvent pas être corrigés dans les limitations de la cinématique de la théorie du premier ordre, par contre les efforts tranchants Q_x et Q_y peuvent être corrigés en multipliant les intégrales dans les équations (3.21-22) par le paramètre k_s , appelé facteur de correction du cisaillement :

$$Q_x = k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad Q_y = k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (3.23-24)$$

Le facteur k_s est calculé de sorte que l'énergie de déformation due aux efforts de cisaillement transversal obtenue par la théorie du premier ordre des plaques est égale (ou équivalente) à l'énergie de déformation due aux efforts de cisaillement transversal prévus par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

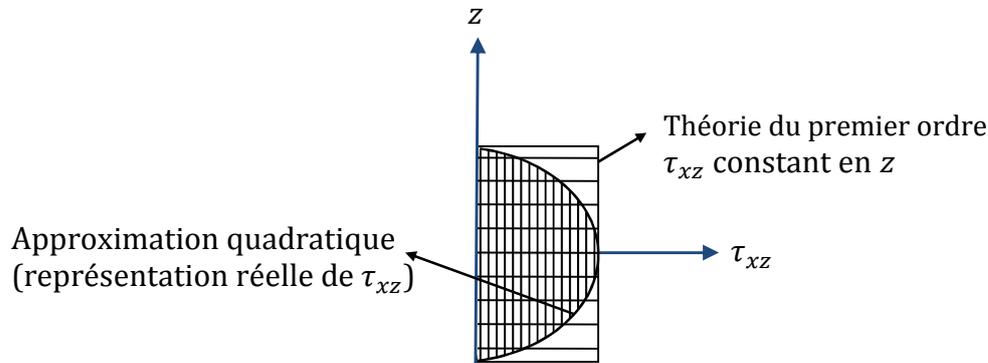


Figure 3.5 : Contrainte du cisaillement transversal.

III.4.4. Facteurs de correction du cisaillement transversal

Mindlin (1951) trouve ce facteur dépendant du coefficient de Poisson et variant de $k_s = 0.76$ pour $\nu=0$ à $k_s = 0.91$ pour $\nu=0.5$. Suivant la suggestion de Mindlin, le facteur de correction du cisaillement est donné par l'équation cubique suivante :

$$k_s^3 - 8k_s^2 + \frac{8(2-\nu)k_s}{1-\nu} - \frac{8}{1-\nu} = 0 \quad (3.25)$$

Par exemple, si $\nu=0.3$, alors $k_s = 0.86$ et si $\nu=0.176$, alors $k_s = \pi^2/12$.

L'hypothèse de Mindlin-Reissner nécessite l'introduction de coefficients de correction permettant de tenir compte de la distribution réelle des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. Dans le cas des plaques isotropes, le facteur couramment employé est :

$$k_s = \frac{5}{6} \quad (3.26)$$

Wittrick en 1987 propose une approximation de k_s dans le cas d'une plaque simplement supportée :

$$k_s = \frac{5}{6-\nu} \quad (3.27)$$

Le facteur de correction du cisaillement de Wittrick donne une valeur de 0.877 pour $\nu = 0.3$ qui correspond étroitement à la valeur de 0.88 obtenue auparavant par Srinivas et *al.* (1970) et Dawe (1978). Il s'avère que le facteur de correction du cisaillement de Wittrick est le meilleur jusqu'à présent car il a une forme simple et tient compte de l'effet du coefficient de Poisson.

A ce jour, le facteur lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion. D'autres théories ne nécessitant pas de facteur de correction ont été proposées, notamment par J. N. Reddy [8] qui utilise une interpolation polynomiale du troisième ordre pour la déformation en cisaillement. Ces théories d'ordres supérieurs impliquent cependant une mise en œuvre difficile par rapport au faible gain de précision sur les résultats.

III.4.5. Relations contrainte-déformation

Les contraintes (σ) et les déformations (ε) sont associées au tenseur de rigidité $[C]$, en utilisant la loi de Hooke généralisée dans le domaine de l'élasticité linéaire. La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. Pour les stratifiés orthotropes, la relation liant les contraintes aux déformations dans un pli k s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}^k \quad (3.28)$$

Les propriétés du matériau sont déterminées par expérimentation. La plupart des plaques composites sont exprimées par les propriétés suivantes : E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , G_{23} et G_{13} . Ces propriétés sont utilisées pour élaborer la matrice de rigidité.

Les coefficients de rigidité Q_{ij} sont définis comme:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.29)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.30)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.31)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (3.32)$$

$$Q_{44} = G_{13} \quad (3.33)$$

$$Q_{55} = G_{23} \quad (3.34)$$

Où

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \quad (3.35)$$

La matrice de rigidité donnée ci-dessus est très utile pour caractériser les propriétés du pli. Les stratifiés sont formés par empilement de plis avec variation d'orientation des fibres. Pour tenir compte de la variation d'orientation des fibres, la matrice de rigidité du stratifié doit être transformée aux coordonnées globales. Les relations entre les contraintes dans les coordonnées globales et locales dans un pli k sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^k \quad (3.36)$$

Des relations similaires entre les déformations dans les coordonnées globales et locales peuvent être écrites.

Les contraintes et les déformations d'un pli k en coordonnées globales sont liées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^k \quad (3.37)$$

Où les coefficients de rigidité \bar{Q}_{ij} sont écrits en fonction de $m = \cos \theta$ et $n = \sin \theta$ comme :

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{22} n^4 \quad (3.38)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{12} (m^4 + n^4) \quad (3.39)$$

$$\bar{Q}_{16} = Q_{11} m^3 n - Q_{22} m n^3 - 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m n (m^2 - n^2) \quad (3.40)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) m^2 n^2 + Q_{22} m^4 \quad (3.41)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) n^3 m + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) m^3 n \quad (3.42)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \quad (3.43)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \quad (3.44)$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn \quad (3.45)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2 \quad (3.46)$$

III.5. Energie de déformation de la plaque

L'énergie de déformation U de la plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v [\bar{Q}_{11}\varepsilon_{xx}^2 + \bar{Q}_{22}\varepsilon_{yy}^2 + \bar{Q}_{66}\gamma_{xy}^2 + 2\bar{Q}_{12}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2\bar{Q}_{16}\varepsilon_{xx}\gamma_{xy} + 2\bar{Q}_{26}\varepsilon_{yy}\gamma_{xy} + \bar{Q}_{44}\gamma_{xz}^2 + \bar{Q}_{55}\gamma_{yz}^2 + 2\bar{Q}_{45}\gamma_{yz}\gamma_{xz}] dV \quad (3.47)$$

En introduisant les déplacements, l'équation (3.47) devient :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v \left[\bar{Q}_{11} \left(Z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \bar{Q}_{22} \left(-Z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + \bar{Q}_{66} \left(Z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right)^2 + 2\bar{Q}_{12} \left(Z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(-Z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + 2\bar{Q}_{16} \left(Z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(Z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) + 2\bar{Q}_{26} \left(-Z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \left(Z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) + \bar{Q}_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \bar{Q}_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 + 2\bar{Q}_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) \right] dV \quad (3.48)$$

L'énergie de déformation de la plaque en fonction de coordonnées x et y s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \iint [D_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 - 2D_{12} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + 2D_{16} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) - 2D_{26} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + k_s A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + k_s A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 + 2k_s A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)] dx dy \quad (3.49)$$

Où :

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (3.50)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3.51)$$

III.6. Energie cinétique de la plaque

L'énergie cinétique T de la plaque est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \iint \left[I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.52)$$

Les constantes d'inertie I_1 et I_3 sont exprimées par :

$$I_1 = \rho h \quad (3.53)$$

$$I_3 = \rho h^3 / 12 \quad (3.54)$$

III.7. Equations du mouvement

L'équation du mouvement vibratoire libre s'écrit en fonction des dérivées de l'équation de *Lagrange*. Soit L la fonction de *Lagrange* définie à partir de l'énergie de déformation U (Eq. (3.49)) et l'énergie cinétique T (Eq. (3.52)) :

$$L = T - U \quad (3.55)$$

La dérivée de cette fonction par rapport aux vecteurs des coordonnées généralisées q et vitesses généralisées \dot{q} donne les équations du mouvement vibratoire libre de la plaque :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}_i\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{q_i\}} + \frac{\partial U}{\partial \{q_i\}} = 0 \quad (3.56)$$

L'équation du mouvement vibratoire libre de la plaque épaisse possède la forme suivante :

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = 0 \quad (3.57)$$

Où \mathbf{M} est la matrice masse, et \mathbf{K} est la matrice de rigidité.

Chapitre IV

Formulation par la version-p de la méthode des éléments finis

Objectif

Ce chapitre est consacré à la modélisation des plaques circulaires composites à rigidité variable en vibration libre par un élément-p quadrilatéral courbé. Une introduction sur la méthode des éléments finis (MEF) est présentée dans la première partie. Le fondement de la version-p de la MEF est donné dans la deuxième partie. Les avantages et les inconvénients de la version-p sont présentés dans les troisième et quatrième parties de ce chapitre. Les fonctions de formes hiérarchiques utilisées dans la version-p et leurs tracés sont illustrés dans la cinquième partie pour les cas unidimensionnel et bidimensionnel. Dans la sixième partie, la modélisation géométrique des éléments-p courbés pour définir la géométrie des plaques est donnée. La formulation par l'élément-p courbé à partir des énergies des plaques épaisses pour obtenir les matrices de rigidité et masse. Dans la dernière partie, l'équation de Lagrange est appliquée afin d'obtenir les équations du mouvement de la plaque.

IV.1. Introduction

La modélisation physique des systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, en raison de la complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approchée du problème physique. La Méthode des Éléments Finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des problèmes de cette nature.

L'objectif du calcul numérique est de combiner les techniques d'évaluation et d'amélioration de la qualité de la solution. La version- p désigne une stratégie de contrôle de l'erreur qui consiste à faire varier le degré d'interpolation des éléments tout en conservant leur taille. Elle s'oppose à la version- h qui consiste à faire varier la taille des éléments tout en conservant leur degré d'interpolation. On parlera également de version- h ou - p de la méthode des éléments finis.

IV.2. Fondements de la version- p

Dès l'apparition de la méthode des éléments finis, beaucoup de chercheurs ont testé des éléments finis de degré d'approximation élevé. Ces éléments sont de formulation totale, c'est-à-dire que chaque fonction de forme est physiquement rattachée à un nœud, ce qui ne permet pas d'en tirer un profit maximum [Beckers (1970)] et [Fraeijs De Veubeke et *al.* (1972)]. Il faut attendre l'introduction de la formulation hiérarchique [Peano 1975] pour réellement voir la naissance d'une version- p efficace.

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (4.1)$$

Une approximation par éléments finis est dite hiérarchique si le passage de n à $n + 1$ n'altère pas les fonctions de forme N_i ($i = 1$ à n). Cette formulation présente certains avantages [Zienkiewicz et *al.* (1983)].

- La génération d'une discrétisation initiale peut être mise à profit pour le calcul des solutions raffinées ;
- Le système d'équations est mieux conditionné ;
- Les solutions obtenues sont moins sensibles aux imprécisions numériques.

IV.3. Avantages de la version- p

La version- p présente de nombreux attraits [Babuska et Szabo (1982)], [Babuska et Suri (1990)], [Szabo et Babuska (1991)] et [Szabo (1991)] :

- Elle est plus précise et sa convergence est plus rapide que celle de la version- h . En effet, pour différentes catégories de problèmes, on observe les caractéristiques suivantes. Lorsque la solution exacte est partout analytique (problèmes de Catégorie A), le taux de convergence est exponentiel, alors que celui de la version- h n'est qu'algébrique. Pour des problèmes dont la solution exacte contient un nombre fini de points singuliers (problèmes de Catégorie B), le taux de convergence est algébrique, mais il est deux fois plus élevé que celui de la version- h lorsque ces points singuliers sont aussi des nœuds-sommets du maillage. Notons que la plupart des problèmes de statique rencontrés dans la pratique appartiennent à cette catégorie.
- La qualité des solutions est peu sensible aux distorsions des éléments, ce qui permet l'utilisation d'éléments aplatis avec de grands rapports des côtés sans trop pénaliser la précision.
- Aucun verrouillage numérique dû à la quasi-incompressibilité de certains matériaux n'est observé. Cependant, lorsque le coefficient de Poisson est plus proche de 0.5, la convergence asymptotique de la version- p s'obtient à partir d'un degré plus élevé.
- Comme une formulation hiérarchique est adoptée pour la représentation des déplacements, la matrice de rigidité relative à un degré donné imbrique celles de degrés inférieurs. Ceci permet d'obtenir de manière économique une séquence de solutions au lieu d'une seule solution comme c'est le cas de la version- h .
- Il est également possible d'observer la convergence de toute grandeur physique autre que l'énergie, ce qui permet d'évaluer la qualité locale des solutions obtenues et d'éventuellement détecter certaines erreurs liées aux données de modélisation en vérifiant si les solutions convergent ou non.
- La géométrie peut être représentée de manière exacte, ce qui évite les erreurs liées à sa modélisation.
- La tâche de modélisation est réduite car le maillage contient peu d'éléments et peut être directement obtenu par division de structure en macroéléments (maillages structurés).

IV.4. Inconvénients de la version- p

La version- p présente toutefois certaines limitations :

- Tout d'abord, la version- p convient bien pour une analyse détaillée des composantes d'une structure complexe. En effet, dans ce cas le nombre de points singuliers est souvent réduit et l'on bénéficie pleinement de la vitesse de convergence élevée de la version. Un champ de contrainte de qualité supérieure est obtenu avec peu de degrés de liberté, ce qui permet une analyse locale précise. Par contre, la version- h semble plus adéquate pour obtenir une solution globale car le maillage structuré d'une pièce mécanique comportant plusieurs niveaux de détails est très difficile à réaliser et aboutit souvent à un grand nombre d'éléments.
- Pour des problèmes dont la solution contient un nombre infini de points singuliers (problèmes de Catégorie C), la version- p n'est pas meilleure que la version- h du point de vue de la convergence.
- Pour un même nombre de degrés de liberté, la matrice de rigidité relative à la version- p est plus dense. Ceci signifie que, pour le même nombre de degrés de liberté, les demandes en mémoire centrale et en temps de calcul seront plus importantes. Mais en choisissant des méthodes de résolution appropriées, le gain de précision l'emporte sur l'augmentation du temps de calcul [Carnevali et *al.* (1993)].
- La version- p n'est pas facile à intégrer dans un code existant parce que celui-ci ne prévoit généralement pas d'outils de pré- et post-traitement pour des éléments de degré élevé.

IV.5. Fonctions de forme hiérarchiques

Les fonctions de forme hiérarchiques ont été introduites pour la première fois par Zienkiewicz et *al.* (1970). Néanmoins, elles n'ont été mises sous une forme utile qu'en 1975 par Peano. Babuska et *al.* (1981) ont établi une base théorique pour les éléments- p en 1981. Après ces travaux, des formes standard de fonctions de forme hiérarchiques ont été représentées dans divers travaux [Babuska et *al.* (1989), Szabo et Babuska (1991), Zienkiewicz et Taylor (1994)].

Pour un modèle cinématiquement admissible, le champ des déplacements doit être continu. Par conséquent, les fonctions de forme doivent l'être aussi. Pour faciliter les traitements numériques, il faut choisir des fonctions relativement simples, par exemple,

des polynômes. De plus, pour réduire l'erreur numérique, il faut que le système d'équations des éléments finis soit bien conditionné, et surtout pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Toutes ces conditions impliquent le choix des fonctions de forme construites à partir de fonctions polynomiales simples possédant certaines propriétés d'orthogonalité telles que les polynômes de Legendre. En particulier les polynômes de Legendre présentent un faible arrondi de calcul et sont numériquement stables.

IV.5.1. Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre orthogonaux $P_i(\xi)$ pour un domaine défini entre $[-1, +1]$ sont définis par :

$$\begin{cases} P_0(\xi) = 1 \\ P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} [(\xi^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.2)$$

Ils sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Ces polynômes présentent les propriétés suivantes :

1) Orthogonalité :

$$(P_i, P_j) = \int_{-1}^{+1} P_i(\xi) P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{2}{2n + 1} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (4.4)$$

2) Symétrie :

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (4.5)$$

3) Formule de récurrence :

$$P_{n+1}(\xi) = \frac{2n + 1}{n + 1} \xi P_n(\xi) - \frac{n}{n + 1} P_{n-1}(\xi) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

4) Normalisation :

$$P_n(1) = 1 \quad (4.7)$$

5) Encadrement :

$$|P_n(\xi)| \leq 1 \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (4.8)$$

IV.5.2. Modes-bulle

A partir des polynômes de Legendre, il est possible de construire un ensemble de modes-bulle définis comme suit :

$$\phi_j(\xi) = \int_{-1}^1 P_{j-1}(\zeta) d\zeta \quad , \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (4.9)$$

Ces modes-bulle ont les propriétés suivantes :

1) Nullité aux extrémités :

$$\phi_j(-1) = \phi_j(1) = 0 \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (4.10)$$

2) Orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} d\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (4.11)$$

3) Symétrie :

$$\phi_j(-\xi) = (-1)^j \phi_j(\xi) \quad (4.12)$$

4) Nullité des intégrales de degré impair :

$$\int_{-1}^1 \phi_j(\xi) d\xi = 0 \quad , \quad j = 3, 5, 7, \dots \quad (4.13)$$

IV.5.3. Élément unidimensionnel

Les fonctions de forme sont dérivées sur la base d'un élément fini hiérarchique unidimensionnel (figure 4.1). La propriété de nullité aux extrémités des modes-bulle permet l'introduction des fonctions de forme hiérarchiques :

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (4.14-15)$$

$$N_i(\xi) = \phi_{i-1}(\xi) ; \quad i = 3, 4, \dots, p + 1 \quad (4.16)$$

Où N_1 et N_2 sont les fonctions de forme nodales ou externes ou encore modes externes.

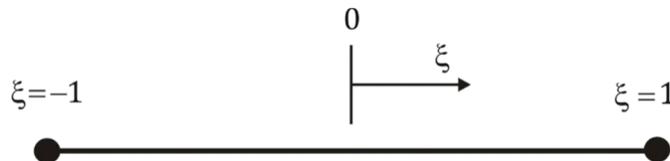


Figure 4.1 : Élément unidimensionnel.

Les fonctions N_i , $i = 3, 4, \dots, p + 1$ sont des fonctions de forme internes ou modes internes ou encore modes-bulle. Les modes externes permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements, tandis que les modes internes permettent d'enrichir le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément. La figure 4.2 (a-b) montre les tracés des fonctions de forme hiérarchiques et leurs dérivées.

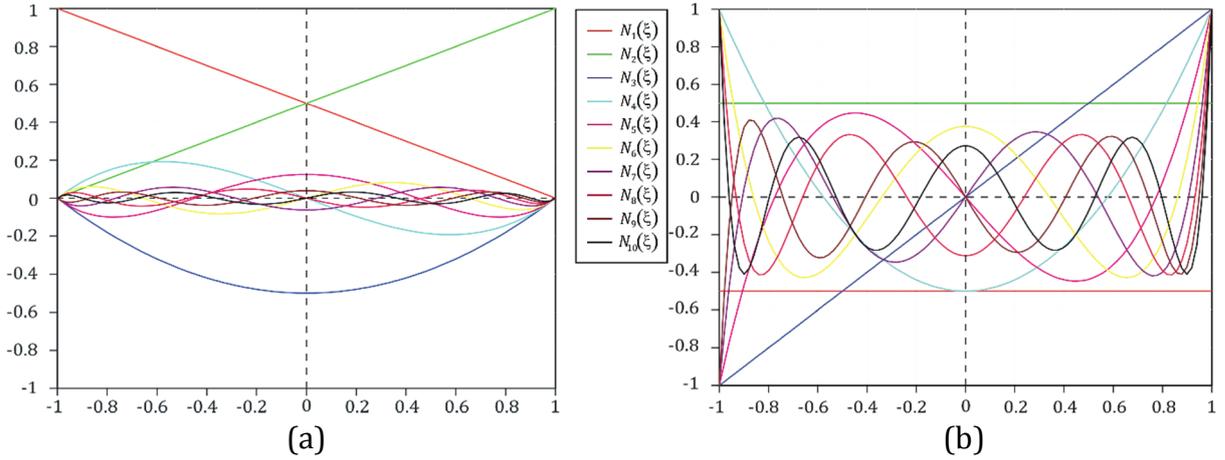


Figure 4.2 : Fonctions de forme hiérarchiques (a) et leurs dérivées (b).

Le terme "hiérarchique" est utilisé car l'ensemble des fonctions de forme de degré p inclut ceux des degrés inférieurs $p - 1, p - 2, \dots, 1$ comme sous-ensembles. Le champ des déplacements discrétisé à l'intérieur de l'élément est donné par :

$$u_h = \sum_{j=1}^{p+1} N_j(\xi) q_j \quad (4.17)$$

Où q_1 et q_2 sont des déplacements nodaux, tandis que q_3, \dots, q_{p+1} ne représentent pas des déplacements réels mais plutôt des amplitudes des modes internes ou déplacements relatifs (hiérarchiques). Leur nature est différente de celle des éléments définis en formulation totale. Dans ce dernier cas, q_3, \dots, q_{p+1} sont réellement des déplacements aux nœuds internes.

IV.5.4. Eléments- p bidimensionnels

IV.5.4.1. Élément- p quadrilatéral

- **Espaces polynomiaux**

Pour un domaine carré $\Delta = \{(\xi, \eta) | -1 \leq \xi, \eta \leq +1\}$ tel que celui de la figure 4.3, il existe trois espaces polynomiaux bidimensionnels fréquemment utilisés.

a) Espace $S^p(\Delta)$ ou famille "Serendipity" (Figure 4.4) :

Il correspond à l'ensemble de tous les monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i + j = 0, 1, \dots, p$ et en plus, si $p = 1$, le monôme $\xi \eta$ et, si $p \geq 2$, les monômes $\xi^p \eta$ et $\xi \eta^p$.

Ces monômes supplémentaires n'augmentent pas le degré sur les côtés de l'élément de référence.

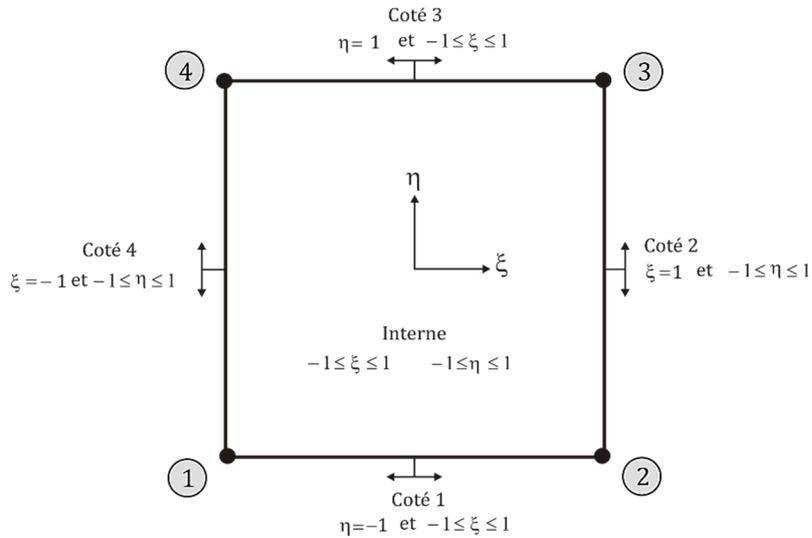


Figure 4.3 : Elément bidimensionnel quadrilatéral de référence.

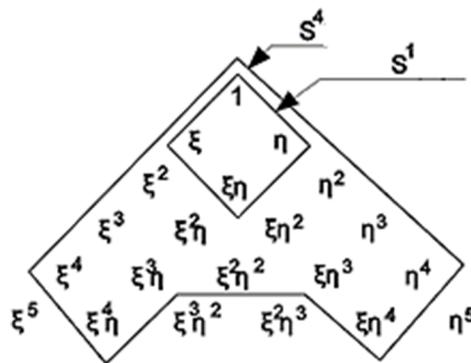


Figure 4.4 : Famille « Serendipity »

b) Espace $S^{p,q}(\Delta)$ ou famille de "Lagrange" (Figure 4.5) :

Il correspond à l'ensemble des monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i = 0, 1, \dots, p$ et $j = 0, 1, \dots, q$.

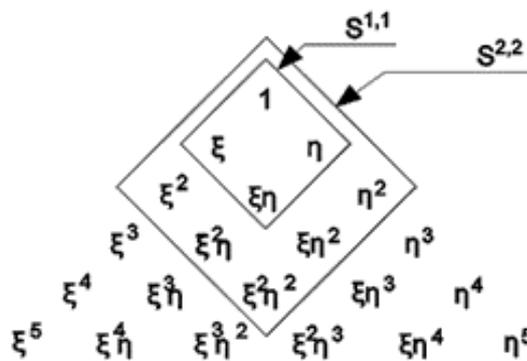


Figure 4.5 : Famille de « Lagrange ».

c) Espace $\tilde{S}^{p,q}(\Delta)$ ou famille mixte :

Il est composé de l'ensemble des monômes communs $S^p(\Delta)$ et à $S^{p,q}(\Delta)$; formellement : $\tilde{S}^{p,q}(\Delta) = S^p(\Delta) \cap S^{p,q}(\Delta)$.

Les fonctions de formes hiérarchiques d'un élément quadrilatéral sont généralement choisies dans l'espace de Serendipity [Szabo et Babuska (1991)]; elles diffèrent de celles introduites par Peano car elles sont définies à partir des polynômes de Legendre. Ces fonctions de forme peuvent être classées en trois catégories :

✚ fonctions de forme nodales

$$\text{Nœud 1 : } N^{n1}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (2.18.1)$$

$$\text{Nœud 2 : } N^{n2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (2.18.2)$$

$$\text{Nœud 3 : } N^{n3}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (2.18.3)$$

$$\text{Nœud 4 : } N^{n4}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (2.18.4)$$

✚ fonctions de forme des côtés

$$\text{Côté 1 : } N_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\phi_i(\xi) \quad i = 2, \dots, p \quad (4.19.1)$$

$$\text{Côté 2 : } N_i^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)\phi_i(\eta) \quad i = 2, \dots, p \quad (4.19.2)$$

$$\text{Côté 3 : } N_i^{(3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)\phi_i(\xi) \quad i = 2, \dots, p \quad (4.19.3)$$

$$\text{Côté 4 : } N_i^{(4)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)\phi_i(\eta) \quad i = 2, \dots, p \quad (4.19.4)$$

✚ fonctions de forme internes

$$N_k^{int}(\xi, \eta) = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta) \quad k = 1, \dots, \frac{1}{2}(p-2)(p-3) \quad (4.20)$$

Avec : $i, j = 2, \dots, p-2$; $i + j = 4, \dots, p$ et $p \geq 4$.

IV.6. Modélisation géométrique des éléments- p courbés

Lorsque les éléments sont de grande taille, la transformation quadratique isoparamétrique utilisée dans la version- p n'est plus suffisante pour représenter la géométrie souvent complexe des éléments. La surface du domaine maillé est seulement approchée et des singularités géométriques artificielles sont introduites à cause de la faible continuité au niveau des interfaces des éléments [ESRD (1998)]. Afin de remédier à ce problème, il est indispensable d'introduire des fonctions "mapping" plus élaborées

où la position d'un élément est définie à partir des fonctions géométriques pour décrire exactement le modèle.

IV.6.1. Fonctions "mapping"

Les fonctions "mapping" des éléments finis paramétriques donnent la relation entre la géométrie réelle des éléments dans le système de coordonnées x, y, z et la géométrie cubique du système de coordonnées locales ξ, η, ζ . Ces fonctions sont utilisées pour générer la matrice Jacobienne de transformation qui est utilisée dans le calcul des différentes matrices et vecteurs élémentaires.

Les détails des fonctions "mapping", le calcul de la matrice Jacobienne et leur utilisation dans la formulation des éléments- h isoparamétriques sont clairement décrits dans les ouvrages de référence [Cook et al. (1989) et Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Pour les éléments- p , le calcul et l'utilisation de la matrice Jacobienne suivent la même procédure que celle des éléments- h linéaires. En outre, les fonctions "mapping" d'un élément- p ayant des côtés droits sont les mêmes que celles de l'élément- h . La différence se trouve dans les fonctions "mapping" des côtés courbés ou des faces. Dans un élément- h isoparamétrique, les fonctions d'interpolation utilisées sont les mêmes dans le champ de déplacement de l'élément et dans les fonctions "mapping". Cependant, dans un élément- p , les fonctions "mapping" spéciales qui fournissent des géométries exactes ou des géométries très précises sont nécessaires et ceci pour deux raisons :

- 1) Les éléments- p dans un maillage ont généralement une grande taille [Szabo et Babuska (1991)], et
- 2) une précision de la matrice Jacobienne est nécessaire pour le calcul des matrices de rigidité et de masse et le vecteur de charge [Campion et Jarvis (1996)].

Plus de détails peuvent être trouvés dans les deux dernières références citées précédemment.

Pour un élément- p quadrilatéral à côtés droits, les fonctions "mapping" de coordonnées (x, y) sont des fonctions linéaires des coordonnées des nœuds aux sommets qui peuvent être écrites comme suit [Szabo et Babuska (1991)] :

$$x = [N_i(\xi, \eta)]\{C_x\} \quad (4.21)$$

$$y = [N_i(\xi, \eta)]\{C_y\} \quad (4.22)$$

Où $[N_i]$ sont les fonctions de forme de l'élément, $\{C\}$ sont les coordonnées des nœuds aux sommets de l'élément, et les indices x et y indiquent la relation au système de coordonnées x, y , respectivement. Ces fonctions tracent exactement les coordonnées (x, y) d'un élément quadrilatéral ayant des côtés droits dans le système de coordonnées x, y à partir d'un élément carré dans le système de coordonnées ξ, η . Les fonctions (4.21) et (4.22) sont utilisées pour tous les degrés de liberté de l'élément. Par conséquent, un élément-p d'ordre 1, qui a des côtés droits, est un élément isoparamétrique et pour un ordre supérieur à 1, c'est un élément sub-paramétrique [Cook et al. (1989)].

Pour un élément quadrilatéral aux cotés courbés, un ordre élevé des fonctions "mapping" est nécessaire. La relation entre les deux systèmes de coordonnées x, y et ξ, η , sont appelées relations curvilignes [Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Les fonctions "mapping" curvilignes représentent un élément de côtés courbés dans le système de coordonnées x, y à partir d'un élément de forme carrée dans le système de coordonnées ξ, η . La forme générale des fonctions "mapping" curvilignes peut être écrite comme suit [Szabo et Babuska (1991)] :

$$x = \psi_x(\xi, \eta) \quad (4.23)$$

$$y = \psi_y(\xi, \eta) \quad (4.24)$$

avec ψ_x et ψ_y sont les fonctions "mapping" des coordonnées (x, y) . Ces fonctions curvilignes sont appliquées à un élément particulier qui a des côtés courbés. Par exemple, dans un maillage d'une plaque avec un trou transversal, les fonctions "mapping" curvilignes sont appliquées uniquement aux éléments qui définissent le rayon du trou, et les relations (2.21) et (2.22) sont appliquées pour les autres éléments qui ont des côtés droits.

IV.6.2. Carreaux de Coons

Au début des années 60, S.A. Coons, professeur au M.I.T., a présenté une formulation mathématique puissante pour représenter des surfaces transfinies [Coons (1964)]. Cette formulation a été améliorée par la suite [Coons (1987)], et est apparue comme une méthode très générale pour la représentation des surfaces. En effet, outre les surfaces

complexes, un bon nombre de surfaces simples peuvent être considérées comme cas particuliers des carreaux de Coons (cylindre, surface réglée, surface de révolution,...).

IV.7. Formulation par l'élément-p courbé

La plaque circulaire est modélisée par un élément-p quadrilatéral courbé. Un élément quadrilatéral est constitué d'un domaine limité par quatre courbes ($C_1(\xi)$, $C_2(\eta)$, $C_3(\xi)$, $C_4(\eta)$) (Figure 4.6). Les coordonnées non-dimensionnelles locales η et ξ sont également représentées dans la figure. Les coordonnées d'un nœud i sont désignées par (X_i, Y_i) , $i = 1,2,3,4$. Les côtés 1-2, 2-3, 3-4 et 4-1 sont numérotés 1, 2, 3 et 4 respectivement.

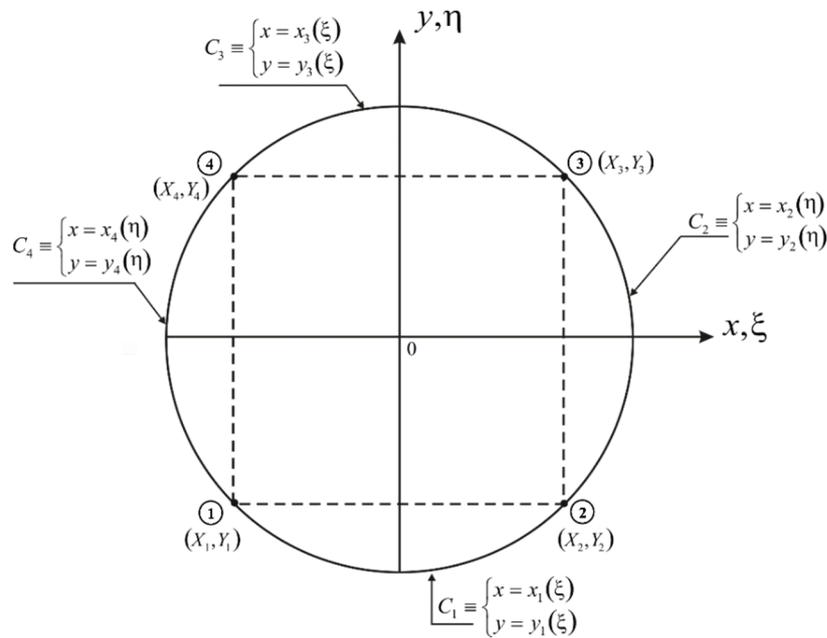


Figure 4.6 : Élément-p quadrilatéral courbé.

En utilisant la méthode des fonctions de mélange [Gordon et Hall (1973)], les côtés courbés de l'élément quadrilatéral peuvent être exprimés sous la forme paramétrique suivante :

$$x = x_i(\xi), \quad y = y_i(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (i = 1,3) \quad (4.25)$$

$$x = x_i(\eta), \quad y = y_i(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (i = 2,4) \quad (4.26)$$

Les fonctions "mapping" de l'élément-p quadrilatéral courbé sont données par :

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} [(1 - \eta)x_1(\xi) + (1 + \xi)x_2(\eta) + (1 + \eta)x_3(\xi) + (1 - \xi)x_4(\eta)] \\
& - \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta)X_1 + (1 + \xi)(1 - \eta)X_2 + (1 + \xi)(1 + \eta)X_3 \\
& + (1 - \xi)(1 + \eta)X_4]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
y(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} [(1 - \eta)y_1(\xi) + (1 + \xi)y_2(\eta) + (1 + \eta)y_3(\xi) + (1 - \xi)y_4(\eta)] \\
& - \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta)Y_1 + (1 + \xi)(1 - \eta)Y_2 + (1 + \xi)(1 + \eta)Y_3 \\
& + (1 - \xi)(1 + \eta)Y_4]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Les transformations des dérivations partielles du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales sont données par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

La matrice Jacobienne de transformation \mathbf{J} est la matrice des dérivées partielles des coordonnées globales (x et y) par rapport aux coordonnées locales (ξ et η) dans l'élément. Cette matrice est unique et indépendante du degré d'approximation de l'élément- p . C'est une des raisons pour lesquelles, la géométrie doit être représentée de manière exacte et doit être définie indépendamment du degré d'approximation du champ des déplacements.

Dans le cas bidimensionnel, la matrice Jacobienne est définie par :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{1,1}(\xi, \eta) & J_{1,2}(\xi, \eta) \\ J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{2,2}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Les termes de la matrice Jacobienne pour l'élément- p quadrilatéral courbé sont obtenus à partir des équations (4.30) comme :

$$\begin{aligned}
J_{1,1}(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} \left[(1 - \eta) \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} + x_2(\eta) + (1 + \eta) \frac{dx_3(\xi)}{d\xi} - x_4(\eta) \right] \\
& + \frac{1}{4} [(1 - \eta)X_1 - (1 - \eta)X_2 - (1 + \eta)X_3 + (1 + \eta)X_4]
\end{aligned} \tag{4.31.1}$$

$$J_{1,2}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[(1 - \eta) \frac{dy_1(\xi)}{d\xi} + y_2(\eta) + (1 + \eta) \frac{dy_3(\xi)}{d\xi} - y_4(\eta) \right] + \frac{1}{4} [(1 - \eta)Y_1 - (1 - \eta)Y_2 - (1 + \eta)Y_3 + (1 + \eta)Y_4] \quad (4.31.2)$$

$$J_{2,1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[-x_1(\xi) + (1 + \xi) \frac{dx_2(\eta)}{d\eta} + x_3(\xi) + (1 - \xi) \frac{dx_4(\eta)}{d\eta} \right] + \frac{1}{4} [(1 - \xi)X_1 + (1 + \xi)X_2 - (1 + \xi)X_3 - (1 - \xi)X_4] \quad (4.31.3)$$

$$J_{2,2}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[-y_1(\xi) + (1 + \xi) \frac{dy_2(\eta)}{d\eta} + y_3(\xi) + (1 - \xi) \frac{dy_4(\eta)}{d\eta} \right] + \frac{1}{4} [(1 - \xi)Y_1 + (1 + \xi)Y_2 - (1 + \xi)Y_3 - (1 - \xi)Y_4] \quad (4.31.4)$$

À partir de l'équation (4.29), la relation inverse suivante est déduite

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Où \mathbf{J}^{-1} est la matrice inverse de la matrice Jacobienne donnée par :

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{2,2}(\xi, \eta) & -J_{1,2}(\xi, \eta) \\ -J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{1,1}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} & -\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne est obtenu par :

$$|\mathbf{J}| = J_{1,1}(\xi, \eta)J_{2,2}(\xi, \eta) - J_{1,2}(\xi, \eta)J_{2,1}(\xi, \eta) \quad (4.34)$$

En utilisant la version- p de la méthode des éléments finis, le déplacement flexionnel et les rotations dans un élément seront exprimés par :

$$w = \sum_{\beta=1}^{(p+1)^2} q_{3\beta-2}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \quad (4.35)$$

$$\theta_x = \sum_{\beta=1}^{(p+1)^2} q_{3\beta-1}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \quad (4.36)$$

$$\theta_y = \sum_{\beta=1}^{(p+1)^2} q_{3\beta}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \quad (4.37)$$

Les fonctions de forme N_β sont données par :

$$N_\beta = g_k(\xi)g_l(\eta) \quad (k, l = 1, 2, \dots, p + 1), \quad \beta = l + (k - 1)(p + 1) \quad (4.38)$$

Les fonctions de formes $g_i(\xi)$ ($i = 1, 2, \dots, p + 1$) sont données dans la section IV.5.

IV.7.1. Détermination des matrices de rigidité

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite sous la forme :

$$U = U_1 + U_2 \quad (4.39)$$

Où

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 - 2D_{12} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + 2D_{16} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) - 2D_{26} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (4.40)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \iint \left[k_s A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + k_s A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 + 2k_s A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) \right] dx dy \quad (4.41)$$

À partir des équations (4.35-37), les dérivées partielles du déplacement et des rotations par rapport aux coordonnées x et y sont obtenues telles que :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \quad (4.42-43)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \quad (4.44-45)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \quad (4.46-47)$$

IV.7.1.1. Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle due aux rotations

En introduisant les dérivées partielles obtenues dans les équations (4.42-47) et les coordonnées locales adimensionnelles pour l'élément quadrilatéral ainsi que la matrice

Jacobienne dans l'expression de l'énergie de déformation U_1 . L'expression de l'énergie de déformation U_1 dans le repère local devient :

$$\begin{aligned}
U_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left[D_{11} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) + D_{22} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) \right. \\
& + D_{66} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) \right. \\
& - 2 \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) \left. \right) - 2D_{12} \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) \\
& + D_{16} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) - \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) \right) \\
& - 2D_{26} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) \right. \\
& \left. \left. - \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) \right) \right] |J| d\xi d\eta \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Avec :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(J_{2,2} \frac{\partial}{\partial \xi} - J_{1,2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left(J_{1,1} \frac{\partial}{\partial \eta} - J_{2,1} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (4.50)$$

Les composantes de la matrice de rigidité élémentaire flexionnelle dues aux rotations $[K_\theta]$ sont données par :

$$[K_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & K_{3\alpha-1,3\beta} \\ 0 & K_{3\alpha,3\beta-1} & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

IV.7.1.2. Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle due au cisaillement transversal

La matrice de rigidité élémentaire flexionnelle due au cisaillement transversal est obtenue à partir de l'équation de l'énergie de déformation U_2 (Eq. (4.41)).

Cette énergie s'écrit dans le repère local comme suit :

$$\begin{aligned}
U_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left[k_s A_{44} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) \right. \right. \\
& + 2 \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} N_\beta \right) + \left. \left. \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} N_\beta \right) \right) \right. \\
& + k_s A_{55} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) \right. \\
& - 2 \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} N_\beta \right) + \left. \left. \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-1} N_\beta \right) \right) \right. \\
& + 2k_s A_{45} \left(\left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) \right. \\
& - \left. \left. \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta-2} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-2} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} N_\beta \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\sum_{\alpha=1}^n q_{3\alpha-1} N_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^n q_{3\beta} N_\beta \right) \right) \right] |J| d\xi d\eta \quad (4.52)
\end{aligned}$$

La matrice de rigidité élémentaire flexionnelle due au cisaillement transversal possède la forme suivante :

$$[K_C] = \begin{bmatrix} K_{3\alpha-2,3\beta-2} & K_{3\alpha-2,3\beta-1} & K_{3\alpha-2,3\beta} \\ K_{3\alpha-1,3\beta-2} & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & K_{3\alpha-1,3\beta} \\ K_{3\alpha,3\beta-2} & K_{3\alpha,3\beta-1} & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

La matrice de rigidité $[K]$ est :

$$[K] = [K_\theta] + [K_C] \quad (4.54)$$

IV.7.2. Détermination de la matrice masse

L'énergie cinétique T dans le repère local devient :

$$T = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(I_1 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{dq_{3\alpha-2}}{dt} N_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta-2}}{dt} N_{\beta} \right) + I_3 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{dq_{3\alpha-1}}{dt} N_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta-1}}{dt} N_{\beta} \right) \right. \\ \left. + I_3 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{dq_{3\alpha}}{dt} N_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{dq_{3\beta}}{dt} N_{\beta} \right) \right) |J| d\xi d\eta \quad (4.55)$$

Les composantes de la matrice masse flexionnelle $[M]$ sont données par :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3\alpha-1,3\beta-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Les coefficients non-nuls des matrices de rigidité $[K]$ et masse $[M]$ sont donnés dans l'annexe A.

IV.8. Equations du mouvement

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement de la plaque. Après la détermination de la matrice de rigidité et masse, l'équation du mouvement vibratoire libre sera obtenue comme :

$$\mathbf{M}_{\alpha,\beta} \frac{d^2 \mathbf{q}_{\beta}}{dt^2} + \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \mathbf{q}_{\beta} = 0 \quad (4.57)$$

$$\text{Où } \alpha = j + (i - 1)(p + 1) \quad (i, j = 1, 2, \dots, p + 1) \quad (4.58)$$

L'équation (4.57) devient :

$$[\mathbf{K}_{\alpha,\beta} - \omega^2 \mathbf{M}_{\alpha,\beta}] \mathbf{Q}_{\beta} = 0 \quad (4.59)$$

En posant $\mathbf{q}_{\beta} = \mathbf{Q}_{\beta} \sin \omega t$.

En appliquant les conditions aux limites, l'équation (4.59) devient

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{q} = 0 \quad (4.60)$$

Chapitre V

Optimisation couche par couche

Objectif

Dans ce chapitre, la méthode d'optimisation des structures composites stratifiées est présentée. En commençant par une introduction dans laquelle la définition d'un problème d'optimisation, la formulation générale du problème d'optimisation, et la définition d'un optimum local et un optimum global sont présentés dans la première partie. Dans la deuxième partie une classification des méthodes d'optimisation selon deux grandes catégories est donnée. Dans la troisième partie un état de l'art d'optimisation de la fréquence maximale de vibration des stratifiés composites est donné. La méthode d'optimisation couche par couche et son procédure ainsi que l'algorithme de cette méthode utilisé dans la partie de programmation sont montrés dans la dernière partie du chapitre.

V.1. Introduction

Durant ces dernières années, de nombreuses études ont été dans le domaine de l'optimisation comme montre le nombre important de publications sur ce thème dans les revues du domaine. Aujourd'hui, l'optimisation s'applique à tous les domaines de la science et même à notre vie quotidienne. Chacun cherche souvent à mieux gérer son temps, son argent, minimiser certaines consommations, ..., ce sont des problèmes d'optimisation.

L'optimisation est le processus de trouver la meilleure conception dans des restrictions prédéterminées. La première étape d'optimisation est la formulation du problème de conception. Le système doit être caractérisé comme une fonction objectif qui dépend d'un ensemble de variables de conception. L'objectif est de minimiser ou de maximiser cette fonction. Les variables de conception sont des paramètres qui peuvent être changés pour trouver le meilleur design.

V.1.1. Définition d'un problème d'optimisation

L'optimisation est la discipline mathématique qui nous permet de trouver les maximums et minimums d'une fonction soumise éventuellement à des contraintes. En général, dans un problème d'optimisation, deux parties sont fondamentales :

- ✓ L'objectif à atteindre.
- ✓ Les variables qui conditionnent cet objectif.

La tâche consiste maintenant à trouver les valeurs des variables à optimiser qui correspondent à un ensemble de paramètres dimensionnant $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ minimisant (ou maximisant) la fonction objectif $f(x)$. Cette fonction est soumise à un certain nombre de contraintes qui définissent un nombre de valeurs admissibles pour les variables d'optimisation sous la forme de contraintes égalitaires $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m_e$) et inégalitaires $g_i(x) \leq 0$ ($i = m_e + 1, \dots, m$). La formulation générale du problème d'optimisation peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Fonction objectif :} & \text{Min/Max } f(x) \\ \text{Contraintes d'égalité :} & g_i(x) = 0, \quad (i = 1, \dots, m_e) \\ \text{Contraintes d'inégalité :} & g_i(x) \leq 0, \quad (i = m_e + 1, \dots, m) \end{cases} \quad (5.1)$$

Où : x_1, x_2, \dots, x_n sont les variables de conception.

En d'autres termes, c'est un problème d'optimisation sous contraintes où l'on définit un objectif à atteindre tout en imposant des conditions sur les variables. Dans le système ci-dessus, les variables d'optimisation sont représentées par le vecteur x de taille n , $f(x)$ est la fonction objectif qui renvoie des valeurs scalaires, et $g(x)$ est un vecteur de fonction de dimension m , contenant les valeurs des contraintes égalitaires et inégalitaires évaluées au point x ($g(x)$ est un scalaire dans le cas d'une seule contrainte).

Une résolution efficace d'un problème d'optimisation (Figure 5.1), en terme de temps de calcul et de précision de la qualité de l'optimum de la fonction objectif atteint nécessite un algorithme d'optimisation adéquat. En d'autres termes, le choix de l'algorithme d'optimisation dépend des caractéristiques de la fonction objectif, des contraintes imposées et la taille du problème (nombre de contraintes et variables à optimiser).

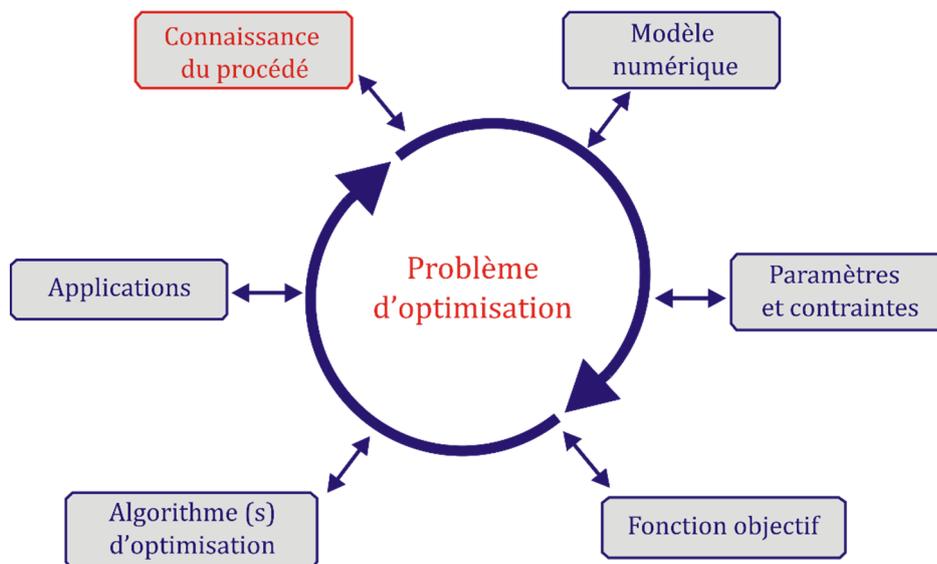


Figure 5.1 : Présentation d'un problème d'optimisation.

V.1.2. Mode de recherche de l'optimum

Soit la fonction à optimiser f définie sur l'espace:

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) = 0, (i = 1, \dots, m_e) ; g_i(x) \leq 0, (i = m_e + 1, \dots, m)\}$$

Et soit x_1 un point de Π . On dit que $f(x_1)$ est un « *minimum local* » de f sur Π s'il existe un voisinage de x_1 : $\mathcal{V}(x_1) = \{x \in \mathcal{C} / \|x - a\| < \varepsilon\}$ de taille ε tel que pour tout élément x de $\mathcal{V}(x_1)$, on ait $f(x) \geq f(x_1)$.

En revanche x_2 est un minimum global si $x_2 \in \Pi$ et $f(x) \geq f(x_2)$ pour tout élément x de tout l'ensemble Π . Sur la fonction $f(x) = x * \sin(x)$ bi-extrema présentée sur la figure 5.2, $\Pi = [9; 20]$ deux minimums peuvent apparaître : x_1 un minimum local et x_2 un minimum global.

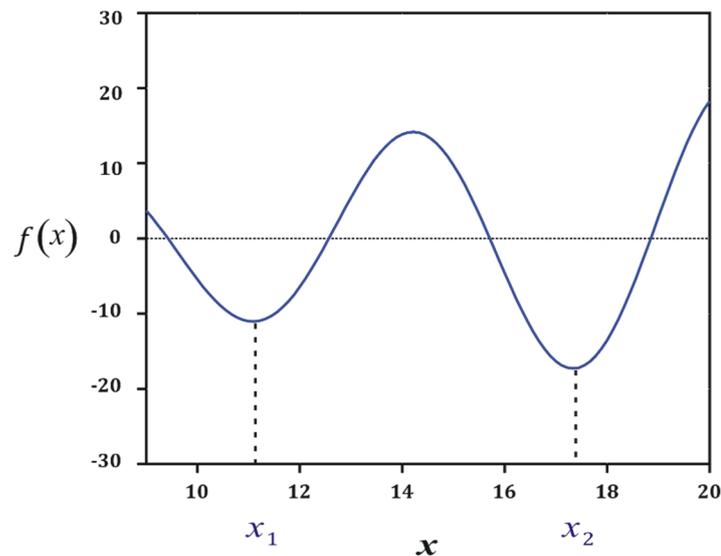


Figure 5.2 : Minimum local et minimum global de la fonction $f(x) = x * \sin(x)$ dans son domaine de définition $[9; 20]$.

V.2. Classification des méthodes d'optimisation

Dans la littérature, il existe de nombreuses méthodes d'optimisation. Cependant, nous pouvons les classer en deux grandes catégories: les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes [Nocedal et Wright (1999)].

V.2.1. Méthodes d'optimisation stochastiques

Ces méthodes sont reconnues comme des méthodes d'optimisation globales qui permettent de localiser l'optimum global. Elles s'appuient sur des mécanismes de transition aléatoire et probabiliste. Cette caractéristique implique que pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation, ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents dans le cas de différentes exécutions successives de ces algorithmes.

Ces méthodes d'ordre zéro peuvent être subdivisées en plusieurs sous classes. Les plus utilisées sont :

- Les méthodes évolutionnistes : ces algorithmes s'appuient sur des techniques dérivées de la génétique et de l'évolution naturelle de Darwin : le croisement et la mutation. Selon Darwin les individus d'une population les mieux adaptés à leur environnement ont une plus grande probabilité de survivre et de se reproduire, en donnant des descendants encore mieux adaptés. Différents algorithmes évolutionnaires existent dans la littérature.
- Les algorithmes de voisinage : ces algorithmes sont basés sur la notion de voisinage pour une solution admissible. À partir d'une solution de base, ces algorithmes tentent de chercher parmi les solutions voisines, celles qui améliorent la solution objectif. Les algorithmes de voisinage les plus répandues sont basés sur deux méthodes :
 - i) Le recuit simulé : cette méthode imite le processus thermodynamique de recuit d'un solide, la succession des phases d'équilibre thermique et de refroidissement permet de localiser l'optimum global.
 - ii) La recherche taboue : cette méthode est basée sur l'utilisation d'une mémoire flexible jouant un rôle essentiel dans le processus de recherche et permettant d'exploiter son historique en évitant de se faire piéger dans des optimums locaux et de revenir à des solutions déjà visitées.

Cette classification des méthodes stochastiques est illustrée dans la figure 5.3.

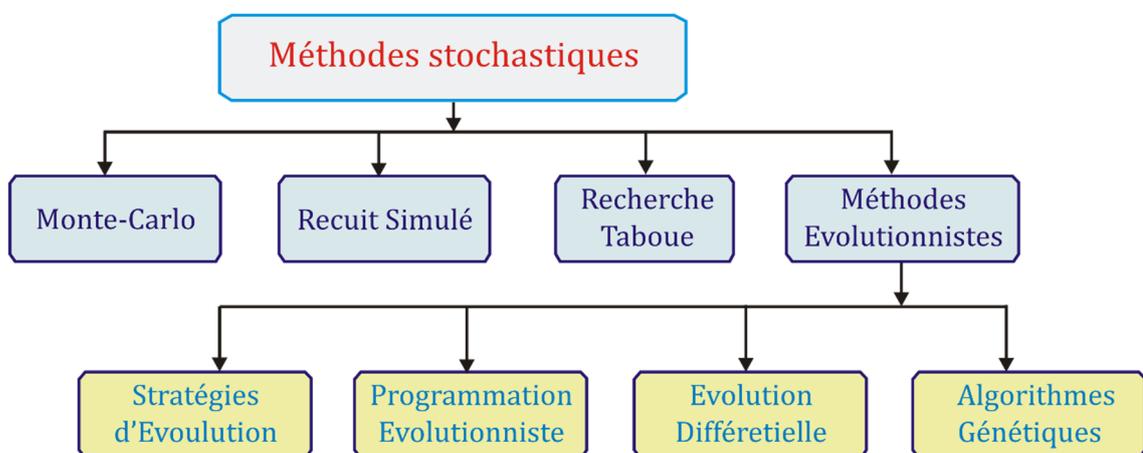


Figure 5.3 : Méthodes d'optimisation stochastiques.

Ces méthodes ont une grande capacité de trouver l'optimum global du problème même dans les cas les plus difficiles et ne nécessitent pas la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la fonction optimale. Elles sont ainsi faciles à programmer. Malgré leur capacité de trouver une solution globale, ces méthodes présentent plusieurs difficultés liées au nombre important d'évaluations de la fonction objectif et par suite elles sont très coûteuses en temps de calcul. Ceci est particulièrement pénalisant lorsque le calcul de la performance de chaque nouvelle solution proposée par le processus aléatoire nécessite la résolution d'un modèle d'élément finis. Les inconvénients sont dûs aussi au fait que les propriétés mathématiques des problèmes n'ont pas à être connues (problème de preuve de la résolution). Toutefois, les deux inconvénients majeurs, sont liés à la nature même de ces méthodes qui ne peuvent garantir l'obtention d'un optimum, et au nombre important de paramètres déterminants qu'il faut a priori fixer.

V.2.2. Méthodes déterministes

Une méthode d'optimisation est déterministe lorsque celle-ci est prévisible et ne laisse aucune place au hasard. Les méthodes d'optimisation utilisant ce mode de recherche possèdent généralement des fondements théoriques solides issus des mathématiques appliquées et ne font appel qu'à des opérateurs d'intensification. La plupart de ces méthodes sont locales (très sensibles aux extremums locaux qui, partant d'une solution réalisable, cherchent à l'améliorer pas à pas) mais il existe aussi quelques méthodes globales. Parmi ces méthodes, on distingue :

- *Les méthodes déterministes d'ordre zéro* : une méthode d'ordre zéro est également appelée méthode directe et ne fait appel qu'à la valeur de la fonction objectif et des contraintes. Les méthodes utilisant les plans d'expérience et les méthodes Branch and Bound s'appuyant sur l'algèbre de Moore sont des méthodes déterministes d'optimisation globales d'ordre zéro. Les méthodes heuristiques ou méthodes géométriques sont des méthodes d'optimisation déterministes locales d'ordre zéro.
- *Les méthodes déterministes du premier ou du second ordre* : une méthode d'ordre deux requiert le hessien de la fonction objectif (dérivées secondes) et de chacune des contraintes. Les méthodes dites « d'ordre supérieur à un » utilisent

une approximation du hessien qui est mise à jour à chaque itération à partir du gradient. On distingue notamment les algorithmes Programmation Quadratique Séquentielle (PQS). Comme son nom le suggère, la méthode PQS trouve la solution optimale par une séquence de problèmes de programmation Quadratique.

Ces méthodes sont illustrées dans la figure 5.4 :

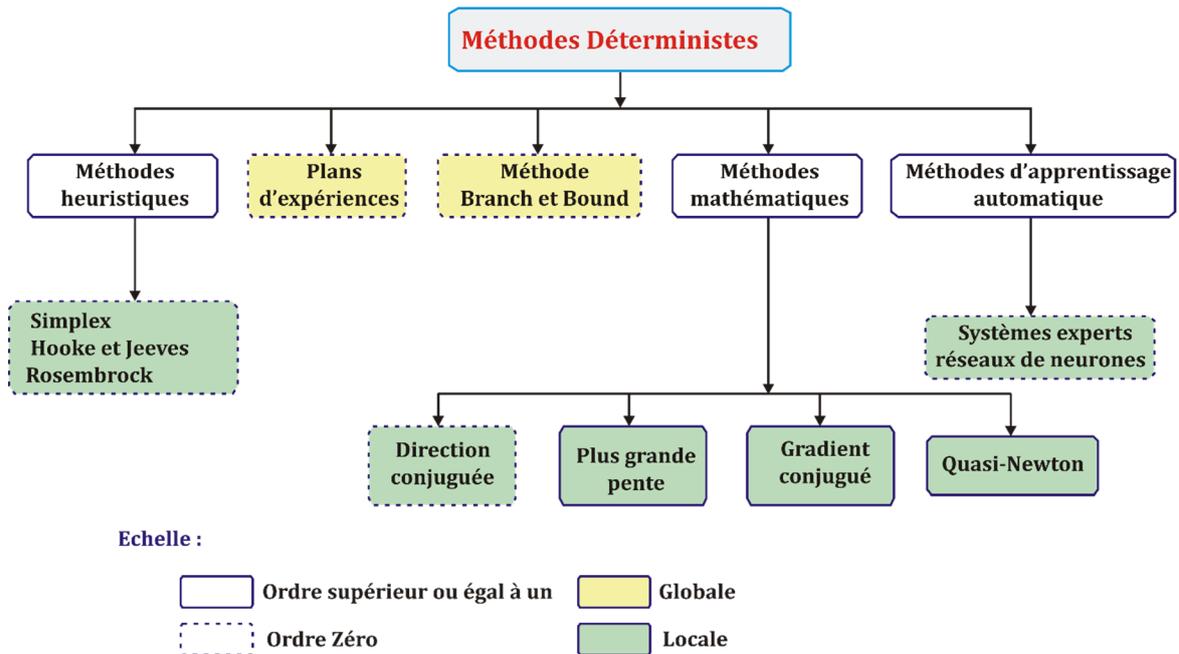


Figure 5.4 : Méthodes d'optimisation déterministes.

Un mode de recherche déterministe trouvera toujours le même optimum si les conditions initiales et les paramètres de contrôle de l'algorithme sont identiques. Ces méthodes déterministes convergent rapidement vers un optimum. Cependant, ces méthodes présentent quelques inconvénients liés notamment à la nécessité de calculer les dérivées de la fonction objective. Elles ne sont pas aussi robustes à l'initialisation que les algorithmes génétiques ce qui n'assure pas que l'optimum déterminé est un optimum global.

V.3. Optimisation de la fréquence des plaques stratifiées

Pour éviter la résonance vibratoire dans les structures aéronautiques et navales, les plaques stratifiées sont généralement conçues pour la fréquence naturelle maximale. De nombreux chercheurs ont fait des études sur l'optimisation de la fréquence de plaques

stratifiées. Duffy et Adali (1991) ont déterminé les orientations des fibres optimales des stratifiés antisymétriques pour objectif de maximiser leurs caractéristiques vibratoires. Kam et Chang (1993) ont étudié l'arrangement optimal des plis des plaques composites stratifiés épais pour la fréquence maximale par une technique d'optimisation globale. Un certain nombre d'exemples de conception de plaques stratifiées composites symétrique et antisymétrique avec diverses propriétés des matériaux, différents épaisseurs, des rapports d'aspect et des nombres différents de plis ont été étudiés pour illustrer les applications pratiques de la présente méthode. Fukunaga et *al.* (1994) ont examiné les configurations optimales des plaques stratifiées symétriques afin de maximiser leurs fréquences fondamentales en utilisant une méthode de programmation mathématique. Quatre paramètres de laminage ont été utilisés comme variables de conception. Sivakumar et *al.* (1999) ont étudié la conception optimale des plaques composites stratifiées avec grande amplitude. L'optimisation a été réalisée en utilisant l'algorithme génétique (GA). Adali et Verijenko (2001) ont présenté une conception de plaques stratifiées hybrides composés de surface à haute rigidité et plis de base à faible rigidité. La maximisation de la fréquence fondamentale a été réalisée sur un ensemble discret d'angles disponibles des plis. Diaconu et *al.* (2002) ont examiné les configurations optimales des stratifiés pour maximiser leurs fréquences fondamentales des plaques épais stratifiées symétriques. Rao et *al.* (2002) ont utilisé l'approche de recuit simulé pour la conception optimale de structures composites stratifiées. Cette technique d'optimisation a été utilisée pour obtenir l'orientation optimale des fibres pour des fréquences fondamentales maximales. La plaque composite a été discrétisée et analysée par la méthode des éléments finis en utilisant un programme d'ordinateur écrit en langage C.

Un nouveau concept d'une optimisation couche par couche a été proposé par Narita (2003) afin d'optimiser la fréquence naturelle maximale des plaques composites stratifiées. Les variables de conception sont considérées comme des angles d'orientation des fibres dans tous les plis. Une méthode de Ritz est utilisée pour calculer les fréquences des plaques rectangulaires stratifiées sous une combinaison des conditions aux limites. Le même auteur (2006) a étendu l'approche d'optimisation couche par couche pour tenir compte l'analyse par éléments finis afin d'optimiser le comportement vibratoire libre de plaques composites stratifiées avec des discontinuités le long des limites. La fréquence

fondamentale a été maximisée en tenant les angles d'orientation des fibres dans les plis comme des variables de conception. Topal et Uzman (2006) ont étudié l'orientation optimale des fibres de structures composites stratifiées symétriques avec un renforcement des fibres pour maximiser la fréquence fondamentale de faible amplitude. Un ensemble d'angles d'orientation des fibres sont considérés comme variables de conception. Les mêmes auteurs (2008) ont étudié la maximisation de la fréquence fondamentale de plaques composites stratifiées symétriques simplement appuyées avec des trous circulaires centrales. Ils ont utilisé la méthode des éléments finis basée sur la théorie du premier ordre. La méthode de Direction Faisable Modifiée (DFM) est utilisée pour l'optimisation. Aussi, le problème d'optimisation est résolu en utilisant une autre méthode (Golden Section) pour comparer les résultats avec la méthode DFM. Hu et Tsai (2009) ont analysé la vibration libre de plaques stratifiées composites rectangulaires et carrées soumises à des forces de compression uniaxiale. Ils ont utilisé le programme d'éléments finis ABAQUS. Les fréquences fondamentales des plaques stratifiées composites avec un matériau donné sont maximisées par rapport à des orientations de fibres en utilisant la méthode de Golden section. Honda et *al.* (2013) ont étendu la procédure d'optimisation couche par couche pour le problème de maximisation des fréquences fondamentales des plaques de verre avec des fibres composites et des plis de base de faible rigidité. Les fréquences sont calculées par la méthode Ritz basée sur une théorie de zigzag raffiné.

V.4. Méthode d'optimisation couche par couche

Une conception optimale d'une structure est généralement composée de deux parties: l'analyse de la structure et le processus d'optimisation. Le but d'optimisation est de maximiser ou minimiser la performance d'un problème donné. En mécanique des structures, cela se fait en reformulant le problème physique à un problème mathématique, aussi appelé fonction objectif. Les variables de la fonction objectif sont généralement basées sur les valeurs des paramètres physiques à savoir la conception géométrique, l'orientation des fibres, l'épaisseur et le matériau. Ces variables reflètent donc la conception de la structure. Elles sont appelées variables de conception.

L'optimisation couche par couche est une méthode déterministe approximative et simple, mais une approche tout à fait efficace. Son principe est basé sur l'observation

physique suivante : « en flexion des plaques stratifiées, les couches externes ont un effet de rigidification plus que les couches internes, et par conséquent, la couche extérieure est considérée comme un facteur influent dans la détermination de la fréquence naturelle maximale de la plaque ».

L'hypothèse de cette optimisation est introduit en tant que " La séquence d'empilement optimale $[\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}]_{opt}$ pour la fréquence naturelle (fondamentale) maximale de la plaque stratifiée peut être déterminée de manière séquentielle dans l'ordre à partir de la couche externe à la couche interne".

La fonction objectif est considérée comme étant la fréquence fondamentale de plaques circulaires stratifiées symétriques, elle est maximisée par rapport à un ensemble de variables de conception qui sont les angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 dans chaque couche. L'approche actuelle d'optimisation est indépendante des méthodes d'analyse de vibration.

V.4.1. Procédure de la méthode d'optimisation couche par couche

Quand un angle d'orientation des fibres dans chaque couche est considéré comme une variable de conception de manière un à un, un problème du calcul intensif est inévitable, dans laquelle les solutions optimales doivent être déterminées dans l'espace multidimensionnel. Une façon d'éviter un tel problème du calcul est d'utiliser les paramètres de laminage [Gürdal et al. (1999)]. L'utilisation de ces paramètres intermédiaires nécessite un autre procédé mathématique qui empêche l'utilisation pratique de l'approche pour obtenir les angles d'orientation des fibres réelles optimales. L'optimisation couche par couche dissout un tel problème mathématique de calcul conventionnel et réduit la recherche de la solution optimale multidimensionnelle à quelques cycles itératifs de recherche unidimensionnelle [Narita et Turvey (2004)].

La fonction objectif pour l'optimisation est considérée comme un paramètre de fréquence Ω désigné par Ω_1 et défini par l'équation (5.2) pour le mode fondamental. Le terme " fréquence fondamentale " indique la plus petite valeur propre pour des conditions données.

La fréquence naturelle est normalisée en tant que paramètre de fréquence :

$$\Omega_1 = \omega a \sqrt{\rho/E_2} \quad (5.2)$$

Les variables de conception sont considérées comme un ensemble d'angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 dans les couches $K/2$ de la partie supérieure (ou inférieure) de la section transversale de la plaque comme suit :

$$[\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}] \quad (5.3)$$

Où $\langle T_0|T_1 \rangle^n$ sont les angles d'orientation des fibres de la n -ième couche ($k = 1$: la plus externe, $n = K/2$: la plus interne).

Le problème d'optimisation peut être écrit sous la forme mathématique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver: } \vec{\mathbf{T}} = (\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}) \\ \text{Pour maximiser : } \Omega_1 = \Omega_1(\vec{\mathbf{T}}) \\ \text{Soumis à des contraintes : } \begin{array}{l} -90^\circ \leq (T_0)^k \leq 90^\circ \quad (k = 1, 2, \dots, K/2) \\ -90^\circ \leq (T_1)^k \leq 90^\circ \quad (k = 1, 2, \dots, K/2) \\ \kappa_{max}^n \leq 3.28 \text{ m}^{-1} \end{array} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Les dispositions optimales des fibres pour la fréquence naturelle fondamentale maximale d'une plaque circulaire stratifiée peuvent être obtenues par la détermination des angles optimaux de fibre pour chaque couche à partir de la couche extérieure à la couche intérieure. Les angles d'orientations des fibres T_0 et T_1 doivent satisfaire le contrainst de courbure κ . Quand $\Omega_{opt}^{(k)}$ est supposé être la valeur maximale du paramètre de fréquence obtenue à k -ième étape, la procédure itérative suivante peut être utilisée pour déterminer $\Omega_{1,opt}$:

Étape 0. Supposer une plaque stratifiée symétrique avec un nombre de couches K hypothétiques avec une masse mais sans rigidité de la partie supérieure (inférieure) de la section transversale de la plaque.

Étape 1. Trouver $\langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^1$ avec un certain incrément de 5° en T_0 et T_1 , qui détermine la fréquence fondamentale maximale $\Omega_{1,opt}^{(1)}$ du stratifié avec un pli orthotrope (c'est-à-dire

avec E_1, E_2, G_{12} et ν_{12}) dans la première couche extérieure. Les couches internes ($K - 1$) restent hypothétiques sans rigidité.

Étape 2. Trouver $\langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^2$ qui donne $\Omega_{1,opt}^{(2)}$ de stratifié avec des plis orthotropes dans la deuxième et la première couche avec $\langle T_0|T_1 \rangle^1 = \langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^1$. Les couches internes ($K - 2$) restent hypothétiques sans rigidité.

Étape k ($k = 3$ à $K/2$). Le processus ci-dessus est répété pour obtenir $\langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^3, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^k$.

Étape K: Trouver $\langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^{K/2}$ qui donne $\Omega_{1,opt}^{(K)}$ pour maximiser la fonction objectif de la plaque stratifiée avec des plis orthotropes dans toutes les couches. Cette dernière étape permet de déterminer la séquence d'empilement optimale $[\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}]_{opt}$ qui donne la fréquence fondamentale maximale $\Omega_{1,opt} = \Omega_{1,opt}^{(K)}$ de la plaque.

Après avoir terminé l'ensemble des étapes de la première itération ; de nouvelles itérations sont réalisées pour obtenir la solution optimale en laissant l'ensemble des angles d'orientation des fibres dans l'itération précédente inchangées. Les angles d'orientation des fibres déterminées à l'étape K dans le premier cycle sont considérés comme une meilleure approximation initiale pour le deuxième cycle. Les itérations sont répétées jusqu'à ce qu'une solution de convergence soit trouvée.

V.4.2. Algorithme d'optimisation couche par couche

L'optimisation couche par couche réduit avec succès l'optimisation multicouche aux itérations d'une recherche unidimensionnelle, car l'optimisation de chaque couche est répétée de manière séquentielle. L'algorithme de cette technique d'optimisation est présenté dans la figure 5.5 et d'une manière plus développée dans la figure 5.6.

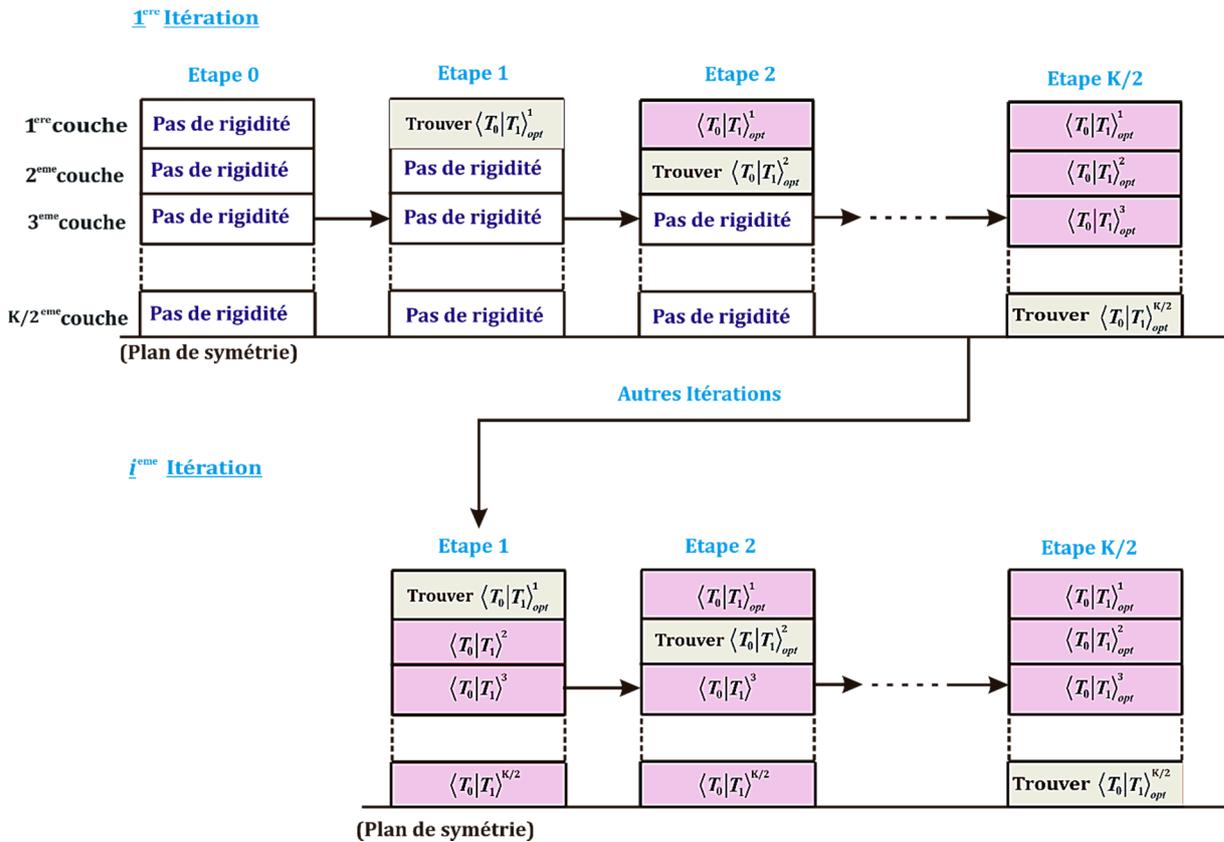


Figure 5.5 : Procédure d'optimisation couche par couche pour des plaques stratifiées symétriques.

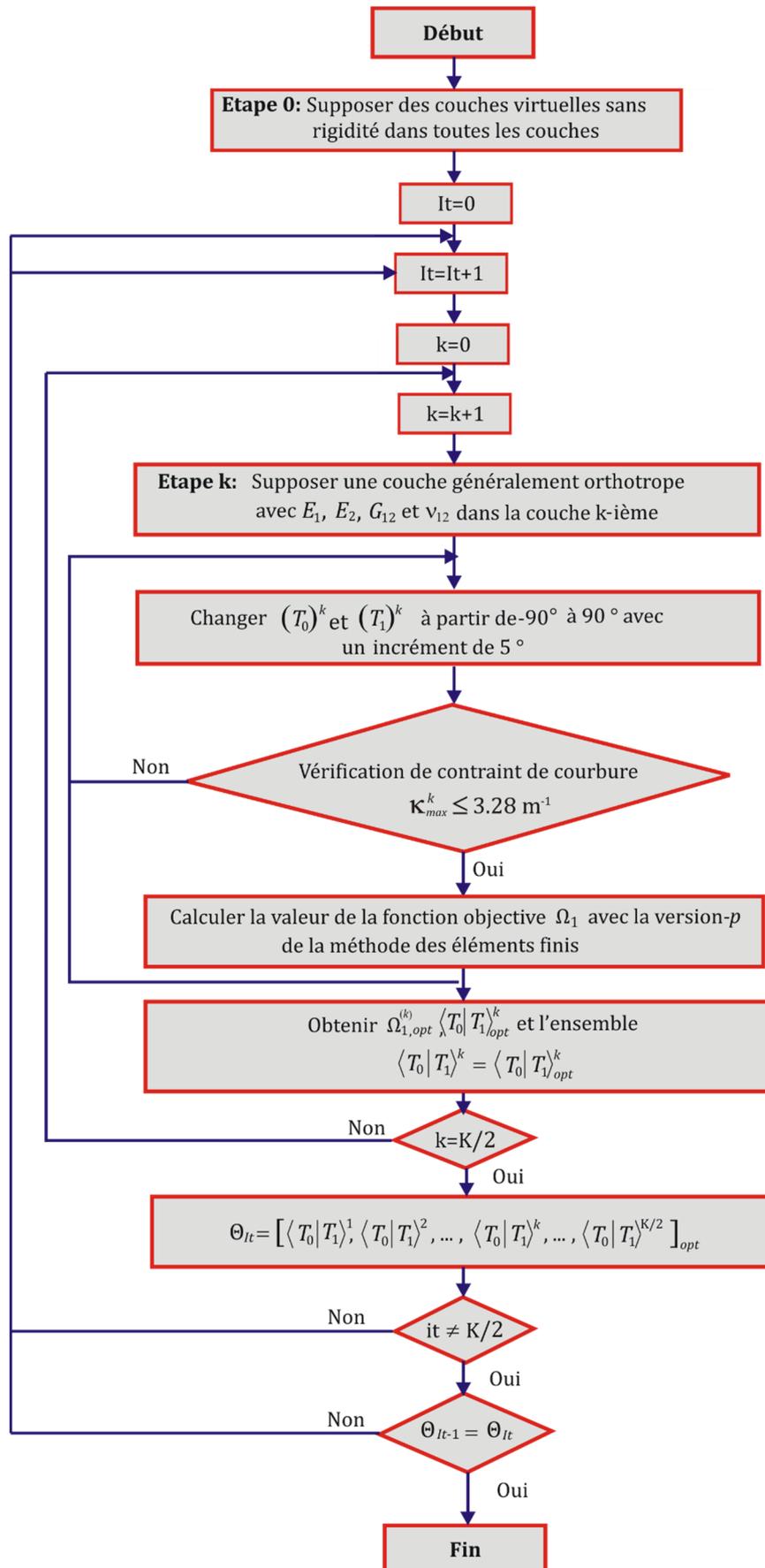


Figure 5.6 : Algorithme de la méthode d'optimisation couche par couche.

Chapitre VI

Techniques de programmation

Objectif

Ce chapitre présente l'implémentation des formules mathématiques obtenues précédemment dans des codes de calcul écrits en langage Fortran 90. Le premier code de calcul est basé sur la théorie des plaques composites du premier ordre et la formulation par élément-p courbé. Ce code permettra de déterminer les fréquences et modes propres des plaques circulaires SCR.V. Nous adoptons la méthode d'optimisation couche par couche pour réaliser un deuxième code de calcul qui permet de trouver la conception optimale des plaques circulaires SCR.V pour la fréquence fondamentale maximale. Une description inclut les logiciels et matériel utilisés (software et hardware), organigramme, sous-programmes, fichier de données et fichier de sortie.

VI.1. Introduction

Dans les chapitres précédents, une formulation théorique concernant la version-p des éléments finis a été présentée. Deux codes de calcul basés sur cette méthode ont été développés. Le premier code de calcul est réalisé pour résoudre le problème de vibrations des plaques circulaires stratifiées composites à rigidité variable en tenant compte de l'effet du cisaillement transversal. Le deuxième code est réalisé pour la conception optimale des plaques circulaires SCRIV pour la fréquence fondamentale maximale.

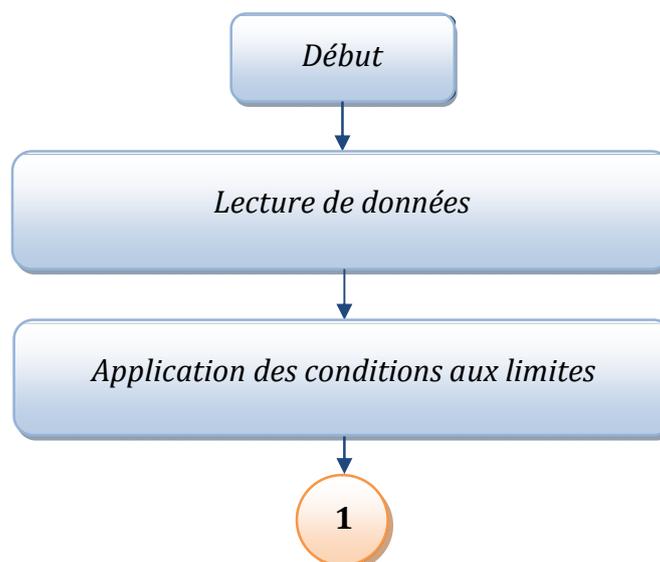
VI.2. Logiciels et matériel utilisés

Les logiciels utilisés dans ce travail, le Matlab 7.6 pour le calcul symbolique des fonctions de forme et leurs dérivées, l'Origin 8.0 pour le traçage des courbes et graphes. Le langage de programmation utilisé est le Fortran 90. L'exécution du premier programme a été effectuée sur un PC avec un processeur Core i5 (2.4 Ghz) et 4 Go de RAM et l'exécution du deuxième programme a été effectuée sur un micro-ordinateur avec un processeur Core i7 (4.0 Ghz) et 8 Go de RAM.

VI.3. Programme de calcul des fréquences

VI.3.1. Organigramme du programme principal

La figure 6.1 montre les différentes étapes du programme élaboré.



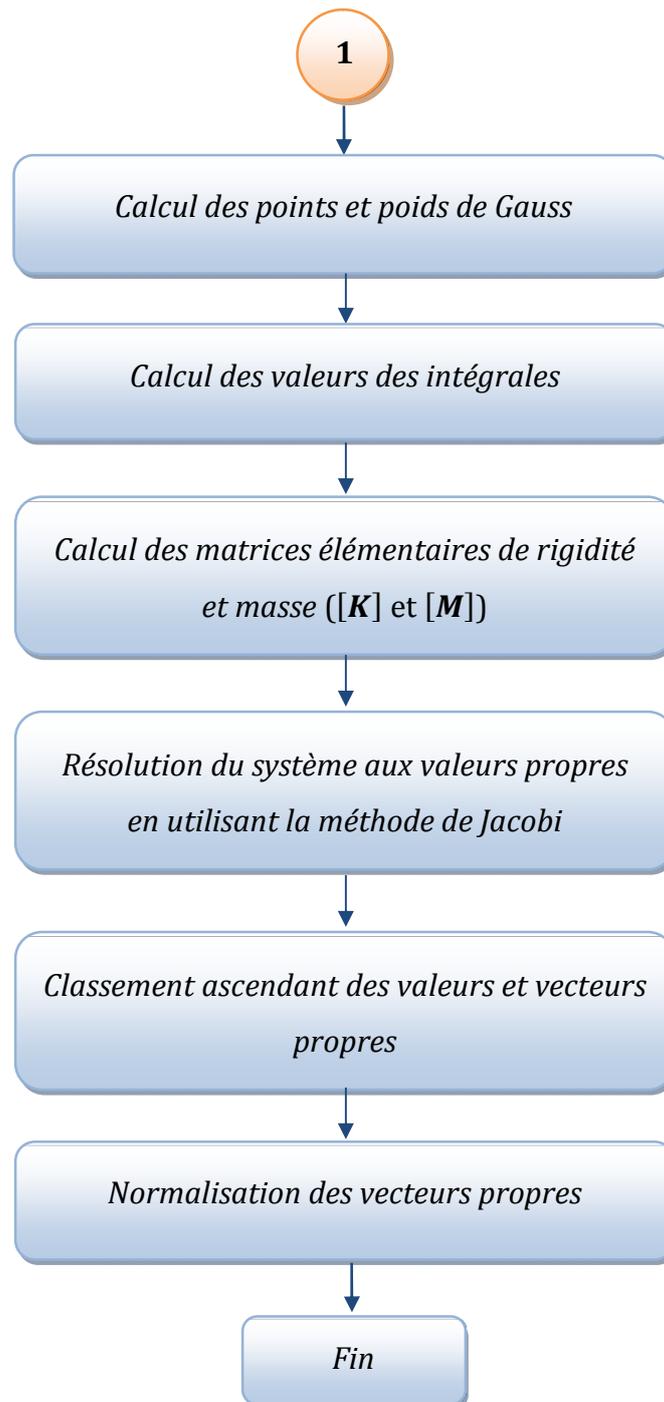


Figure 6.1 : Organigramme du programme principal pour le calcul des fréquences et modes.

VI.3.2. Description des Sous-Programmes

Le programme élaboré permet d'étudier la vibration libre des plaques circulaires à rigidité variable par un élément- p quadrilatéral courbé. Il permet de déterminer les fréquences et vecteurs propres. Ces étapes sont illustrées dans l'organigramme de la

figure 6.1. Les sous-programmes sont des séquences d'instructions appelables d'un point quelconque du programme. Elles peuvent être appelées depuis le programme principal ou depuis un autre sous-programme ou fonction.

Notre programme contient les sous-programmes suivants :

- Sous-programme **INPUT**
- Sous-programme **BOUNDC**
- Sous-programme **GAUSS**
- Sous-programme **ELMATR**
- Sous-programme **COORDS**
- Sous-programme **JMATRIX**
- Sous-programme **SPFUNCT**
- Sous-programme **JACOBI**
- Sous-programme **SORT**
- Sous-programme **MODE**
- Sous-programme **GFUNCT**

VI.3.2.1. Sous-programme INPUT

Le sous-programme INPUT est un module d'entrée des données. Il doit transmettre suffisamment d'informations aux autres modules pour pouvoir résoudre le problème. Les données peuvent être divisées en trois catégories :

- Données nécessaires pour définir la géométrie de la structure (paramètres des éléments).
- Informations concernant les propriétés des matériaux.
- Affectation des degrés de liberté des nœuds restreints.

Les données sont introduites au programme à partir d'un fichier d'entrée appelé MAIN.DAT selon l'ordre suivant :

- IP : Degré du polynôme de l'élément- p .
- NRN : Nombre total de nœuds.
- NRE : Nombre total de côtés.
- NL : Nombre de couches.
- NMODE : Nombre maximum de modes propres à déterminer dans un calcul ou le numéro de mode spécifique.

- H : Rapport d'épaisseur de la plaque circulaire.
- E1 : Module de Young
- G12 : Module de cisaillement dans le plan 1-2
- G13 : Module de cisaillement dans le plan 1-3
- G23 : Module de cisaillement dans le plan 2-3
- PR12 : Coefficient de Poisson
- K : Numéro de couche spécifique.
- T0 : angle d'orientation des fibres au centre de la plaque
- T1 : angle d'orientation des fibres à une distance caractéristique à partir du centre de la plaque.
- Conditions aux limites des nœuds restreints.
- Conditions aux limites des côtés restreints.

VI.3.2.2. Sous-programme BOUNDC

Pour la résolution du problème généralisé de valeurs propres les conditions aux limites doivent être prises en compte. Dans ce sous-programme une boucle avec un test d'élimination des degrés de liberté restreints existe. L'élément- p quadrilatéral représenté dans la figure 6.2 contient 4 nœuds aux sommets et 4 côtés, et chaque nœud possède 3 degrés de liberté :

- ▲ w : Déplacement suivant l'axe z .
- ▲ θ_x : Rotation de la section droite autour de l'axe x .
- ▲ θ_y : Rotation de la section droite autour de l'axe y .

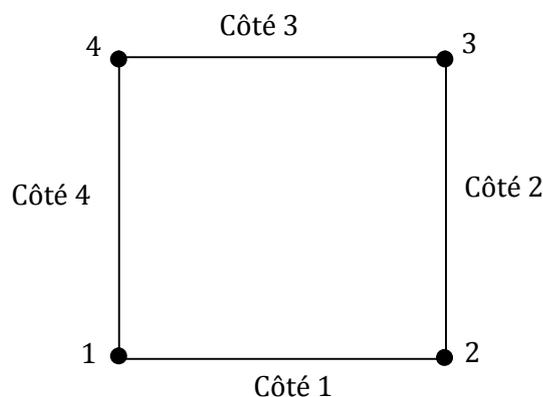


Figure 6.2 : Numérotation des nœuds et côtés de l'élément- p .

L'introduction des conditions aux limites de l'élément- p dans le fichier des données se fait dans l'ordre donné par les tableaux 6.1 et 6.2.

Tableau 6.1 : Introduction des conditions aux limites des nœuds.

Nœuds	w	θ_x	θ_y
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
4	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

Tableau 6.2 : Introduction des conditions aux limites des côtés.

Côtés	w	θ_x	θ_y
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
4	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

La valeur « 1 » est associée avec un degré de liberté restreint, et la valeur « 0 » est associée avec un degré de liberté libre.

VI.3.2.3. Sous-programme GAUSS

C'est un sous-programme qui calcule les abscisses des points et les poids correspondants de Gauss nécessaires pour l'intégration numérique.

VI.3.2.4. Sous-programme ELMATR

Ce sous-programme permet de calculer les matrices de rigidité et masse.

VI.3.2.5. Sous-programme COORDS

Ce sous-programme permet de calculer les coordonnées d'un point quelconque de la plaque.

VI.3.2.6. Sous-programme SPFUNCT

Ce sous-programme permet de calculer les fonctions des côtés et leurs dérivées par rapport x et y .

VI.3.2.7. Sous-programme JMATRIX

Ce sous-programme permet de calculer le déterminant et les composantes de la matrice Jacobienne utilisés dans le calcul des matrices de rigidité et masse élémentaires.

VI.3.2.8. Sous-programme JACOBI

Ce sous-programme utilise la méthode de Jacobi pour le calcul des valeurs et vecteurs propres.

VI.3.2.9. Sous-programme MODE

Le sous-programme MODE fait la normalisation des vecteurs propres

VI.3.2.10. Sous-programme SORT

Le sous-programme SORT permet de classer les valeurs propres et vecteurs propres associés par ordre croissant.

VI.3.2.11. Sous-programme GFUNCT

Ce sous-programme calcule les fonctions de forme et leurs dérivées.

VI.3.2.12. Affichage des résultats

Après avoir déterminé les fréquences et modes, les résultats sont stockés dans un fichier de sortie appelé MAIN.OUT. Les paramètres calculés par le programme élaboré sont :

- NEQB : Nombre d'équations du système,
- Paramètres de fréquence et modes.

VI.4. Programme d'optimisation**VI.4.1. Organigramme du programme principal**

La figure 6.3 montre les différentes étapes du programme élaboré. L'organigramme de la méthode d'optimisation couche par couche est montré dans le chapitre précédent (figure 5.6).

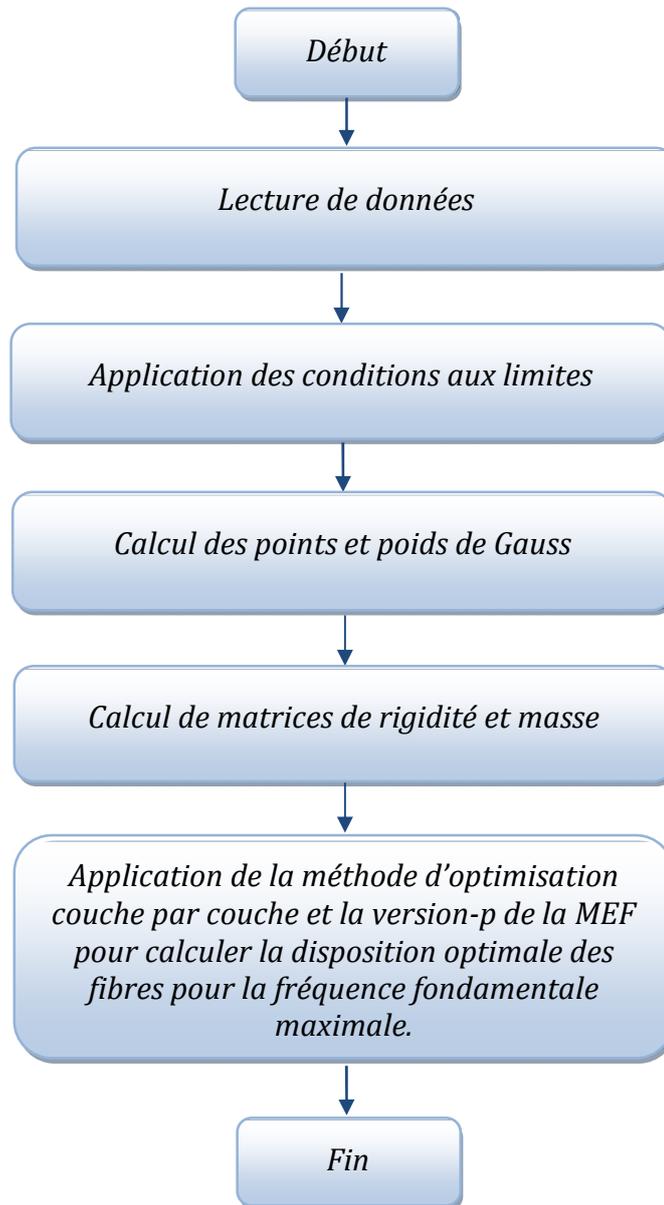


Figure 6.3 : Organigramme du programme principal d'optimisation.

VI.4.2. Description du programme

Ce programme élaboré permet de déterminer la disposition optimale des fibres pour la fréquence fondamentale maximale des plaques circulaires composites à rigidité variable par la méthode d'optimisation couche par couche et la version- p de la méthode des éléments finis.

Ce programme contient les sous-programmes suivants :

- Sous-programme **INPUT**
- Sous-programme **BOUNDC**

- Sous-programme **GAUSS**
- Sous-programme **CURVMAX**
- Sous-programme **MASS**
- Sous-programme **STIFF**
- Sous-programme **COORDS**
- Sous-programme **JMATRIX**
- Sous-programme **SPFUNCT**
- Sous-programme **OBJECTF**
- Sous-programme **JACOBI**
- Sous-programme **SORT**
- Sous-programme **OPTIMUM**
- Sous-programme **GFUNCT**

VI.4.2.1. Fichier de données

Dans ce cas le fichier de données contient toutes les données mentionnées précédemment sauf les angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 .

Les sous-programmes **BOUNDC**, **GAUSS**, **COORDS**, **JMATRIX**, **SPFUNCT**, **JACOBI**, **SORT** et **GFUNCT** sont définis précédemment.

VI.4.2.2. Sous-programme CURVMAX

Il permet la variation des angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 dans chaque couche et la vérification du contrainte de courbure κ .

VI.4.2.3. Sous-programme MASS

Il calcule la matrice masse élémentaire.

VI.4.2.4. Sous-programme STIFF

Il permet de calculer la matrice de rigidité élémentaire.

VI.4.2.5. Sous-programme OBJECTF

Après la variation des angles T_0 et T_1 , vérification de contrainte de courbure, et le calcul des matrices de rigidité et masse, le sous-programme OBJECTF calcule la fonction objectif (paramètre de fréquence fondamentale maximale).

VI.4.2.6. Sous-programme OPTIMUM

Il applique la méthode d'optimisation couche par couche et permet d'obtenir les paramètres de fréquence fondamentale maximale et les dispositions optimales des fibres.

VI.4.2.7. Affichage des résultats

Les résultats sont stockés dans un fichier de sortie appelé OPTIMUM.OUT qui contient les paramètres calculés par le programme élaboré tel que :

- NEQB : Nombre d'équations du système,
- ITER : Nombre d'itérations,
- KK : Couche sélectionnée,
- T0(KK) : Angle d'orientation des fibres T_0 optimal de la couche sélectionnée,
- T1(KK) : Angle d'orientation des fibres T_1 optimal de la couche sélectionnée,
- OMKK : Paramètre de fréquence fondamentale maximale de la couche sélectionnée,
- OMMAX : Paramètre de fréquence fondamentale maximale.

Chapitre VII

Résultats et interprétations

Objectif

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différents résultats obtenus par la version-p des éléments finis en utilisant l'élément-p quadrilatéral courbé afin d'obtenir les fréquences fondamentales et les modes des plaques circulaires SCR. L'autre objectif est de donner la conception optimale de ces plaques pour la fréquence fondamentale maximale, en adoptant la méthode d'optimisation couche par couche. En premier lieu et pour prouver l'efficacité de cet élément, une étude de convergence et comparaison est faite pour les plaques circulaires encastrées en considérant les modèles isotropes et composites à rigidité constante (fibres rectilignes) avec deux types de plaques : plaque mince et plaque modérément épaisse. Dans la deuxième partie, des graphes de contour et formes de modes du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 sont présentés pour différents matériaux composites et conditions aux limites en fonction des angles T_0 et T_1 . La troisième partie est consacrée à la conception optimale des plaques SCR circulaires pour la fréquence fondamentale maximale pour trois types de matériaux composites en fonction de plusieurs paramètres physiques, géométriques, et conditions aux limites.

VII.1. Introduction

Pour évaluer la robustesse et l'efficacité de l'élément- p quadrilatéral courbé, une série de tests ont été menés. Ces tests ont permis non seulement de mesurer la qualité des résultats obtenus au moyen des techniques développées dans le cadre de cette thèse, mais aussi d'aboutir à des résultats originaux. La plaque circulaire est modélisée par un seul élément- p quadrilatéral courbé. La convergence et la précision souhaitées sont obtenues en augmentant l'ordre polynomial.

L'approche d'optimisation couche par couche a été proposée par Narita (2003) pour déterminer les fréquences fondamentales maximales des plaques composites stratifiées à rigidité constante. Ensuite, elle a été améliorée à une approche itérative plus générale par Narita et Turvey (2004). Puisque cette méthode d'optimisation est indépendante des méthodes d'analyse de vibration, les auteurs ont utilisé la méthode de Ritz pour calculer la fonction objectif qui est la fréquence fondamentale maximale de la plaque. Dans cette thèse, l'élément- p fini quadrilatéral courbé développé est mis en œuvre avec la méthode d'optimisation couche par couche pour résoudre le problème de conception des plaques SCRV circulaires en maximisant leurs fréquences fondamentales en fonction de différents paramètres physiques, géométriques, et conditions aux limites.

VII.2. Analyse vibratoire

VII.2.1. Convergence et validation des résultats

La convergence et la validation doivent être réalisées pour assurer l'exactitude et la précision des résultats. La plaque circulaire est modélisée par un seul élément- p quadrilatéral courbé. La convergence et la précision souhaitées sont obtenues en augmentant l'ordre polynomial. Cette étude est faite pour des plaques circulaires encastées en considérant les modèles isotropes et composites à rigidité constante (fibres rectilignes). Deux types de plaques sont considérés : plaque mince et plaque modérément épaisse. Les résultats sont donnés pour le paramètre de fréquence non-dimensionnel exprimé en fonction de la pulsation propre de vibration, qui s'écrit :

$$\Omega = \omega a \sqrt{\rho/E_2} \quad (7.1)$$

VII.2.1.1. Plaques isotropes

Dans cette partie, une étude de convergence et comparaison des paramètres de fréquence d'une plaque circulaire encadrée avec les rapports d'épaisseur ($h/a = 0.01$, $h/a = 0.02$, et $h/a = 0.2$) et un coefficient de Poisson ($\nu = 0.3$). Les résultats obtenus des paramètres de fréquence Ω en fonction du degré de polynôme d'interpolation p sont mentionnés et comparés avec les résultats trouvés dans la littérature qui traitent le même problème avec différentes théories et méthodes dans les tableaux 7.1-3 et figures 7.1-2.

Le tableau 7.1 représente les valeurs des quatre premiers paramètres de fréquence d'une plaque circulaire isotrope avec $h/a = 0.01$. La comparaison avec les résultats de Nallim et Grossi (2008) montrent un bon accord. A noter que dans l'étude de Nallim et Grossi (2008), le problème des vibrations est résolu en utilisant une approche basée sur la méthode de Rayleigh-Ritz et la théorie classique des plaques minces.

Les cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque circulaire isotrope avec $h/a = 0.02$ et $h/a = 0.2$ sont présentés dans les tableaux 7.2 et 7.3, respectivement, et comparés avec les valeurs de Narita et *al.* (2002). Les résultats donnés dans ces tableaux s'accordent avec ceux de la référence où les auteurs ont employé la méthode de Ritz et la théorie du premier ordre pour calculer les fréquences des vibrations.

Tableau.7.1 : Convergence et comparaison des quatre premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire isotrope encadrée ($\nu = 0.3$, $h/a = 0.01$).

p	<i>Mode</i>			
	1	2	3	4
4	0.055	1.192	1.231	2.396
6	0.031	0.070	0.070	0.149
8	0.031	0.065	0.065	0.108
10	0.031	0.064	0.064	0.105
11	0.031	0.064	0.064	0.105
Nallim et Grossi. (2008)	0.030	0.063	0.063	0.103

Tableau.7.2 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire isotrope encastree ($\nu = 0.3$, $h/a = 0.02$).

p	<i>Mode</i>				
	1	2	3	4	5
4	0.078	1.196	2.842	2.892	4.278
6	0.062	0.138	0.271	0.287	0.483
8	0.062	0.129	0.214	0.244	0.327
10	0.062	0.128	0.210	0.240	0.309
11	0.062	0.128	0.210	0.240	0.307
Narita et al. (2002)	0.062	0.128	0.210	0.240	0.307

Tableau.7.3 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire encastree ($\nu = 0.3$, $h/a = 0.2$).

p	<i>Mode</i>				
	1	2	3	4	5
4	0.570	1.554	2.796	3.046	4.463
6	0.555	1.087	1.723	1.929	2.509
8	0.554	1.075	1.632	1.830	2.250
10	0.554	1.073	1.626	1.822	2.214
11	0.554	1.073	1.626	1.821	2.211
Narita et al. (2002)	0.559	1.076	1.637	1.832	2.230

Nous pouvons également observer que la convergence des paramètres de fréquence est très rapide vers le bas et se produit lorsque le degré de polynôme p est augmenté de 4 à 11.

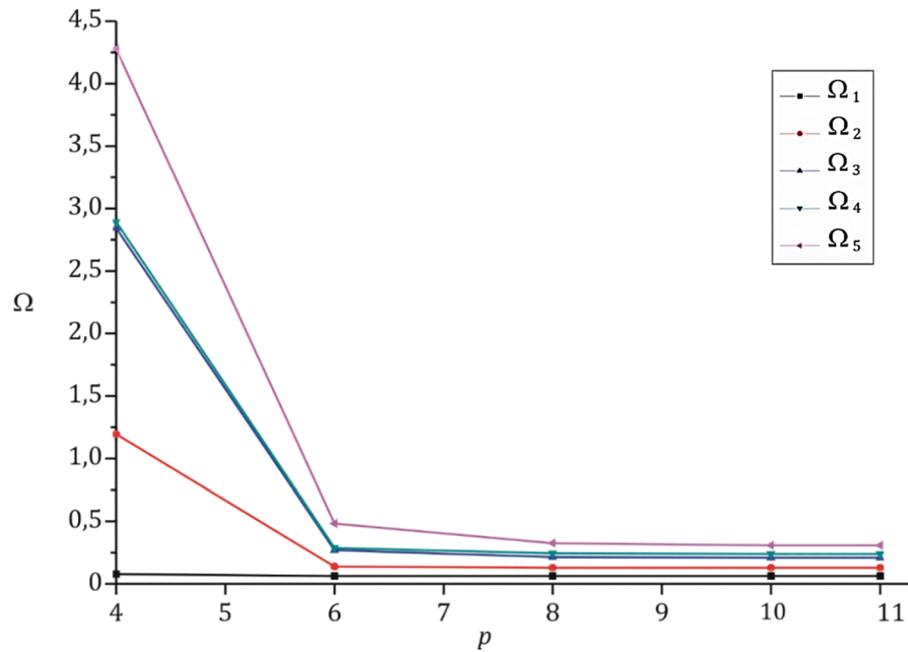


Figure 7.1 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque circulaire isotrope encastrée ($h/a = 0.02$).

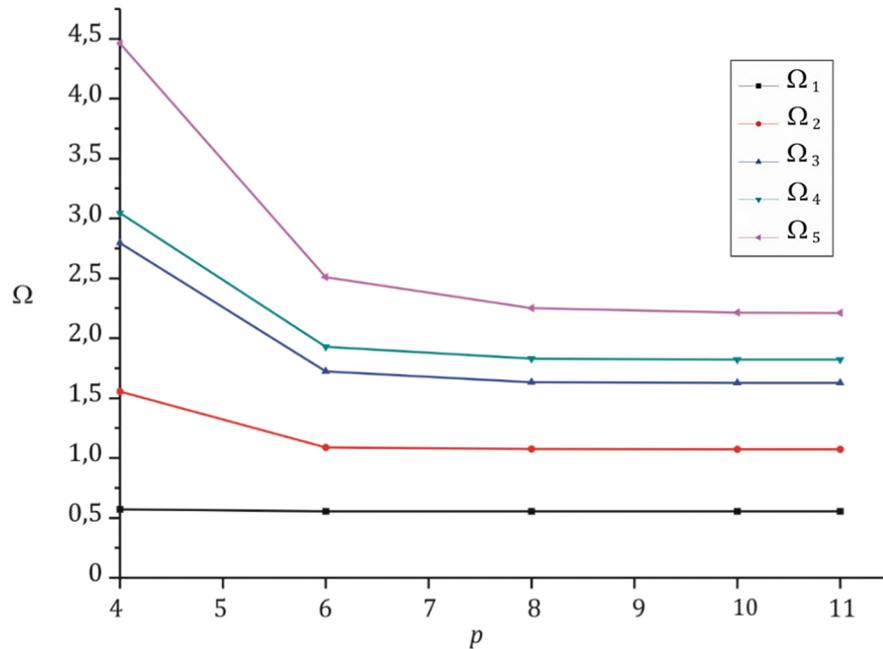


Figure 7.2 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquence d'une plaque circulaire isotrope encastrée ($h/a = 0.2$).

Les allures des courbes présentées dans les figures 7.1-2 montrent la rapidité de la convergence vers des valeurs bien précises en augmentant le degré du polynôme

d'interpolation ($p = 4, \dots, 11$). Pour $p \geq 8$, l'allure de la courbe devient presque une droite.

VII.2.1.2. Plaques composites à rigidité constante

Dans cette étape, deux types de matériaux composites sont utilisés avec les propriétés mécaniques présentées dans le tableau 7.4 :

Tableau.7.4 : Propriétés mécaniques des matériaux.

Matériau	E_1/E_2	G_{12}/E_2	G_{13}/E_2	G_{23}/E_2	ν_{12}
(i)	15.4	0.792	0.792	0.792	0.3
(ii)	40	0.6	0.6	0.5	0.25

Les résultats des paramètres de fréquence non-dimensionnels des plaques circulaires composites encastrées minces et modérément épaisses avec les rapports d'épaisseur ($h/a = 0.002, 0.02, 0.1, \text{ et } 0.2$), les angles d'orientation des fibres ($\theta = 0^\circ, 30^\circ \text{ et } 45^\circ$), et le nombre de couches ($NL = 3 \text{ et } 4$) sont donnés et comparés avec d'autre résultats dans les tableaux 7.5-8.

Tableau.7.5 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ encastrée (Matériau (ii), $h/a = 0.002$).

p	Mode				
	1	2	3	4	5
4	0.058	1.424	1.471	2.863	3.398
6	0.024	0.040	0.064	0.122	0.159
8	0.023	0.036	0.058	0.059	0.078
10	0.023	0.035	0.056	0.058	0.073
11	0.023	0.035	0.055	0.058	0.072
Ngo-Cong et al. (2011)	0.023	0.035	0.055	0.057	0.071

Tableau.7.6 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquence Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ encastrée (Matériau (ii), $h/a = 0.2$).

p	<i>Mode</i>				
	1	2	3	4	5
4	1.226	2.216	2.443	3.615	3.767
6	1.210	1.938	2.187	2.895	2.913
8	1.205	1.923	2.170	2.832	2.848
10	1.203	1.922	2.169	2.827	2.844
11	1.202	1.921	2.169	2.827	2.844
Ngo-Cong et al. (2011)	1.236	1.954	2.181	2.856	2.859

Tableau.7.7 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]$ encastrée (Matériau (ii), $h/a = 0.1$).

p	<i>Mode</i>				
	1	2	3	4	5
4	0.861	1.811	2.108	3.437	3.502
6	0.837	1.112	1.525	1.793	2.174
8	0.835	1.058	1.400	1.776	2.045
10	0.835	1.052	1.383	1.774	2.527
11	0.835	1.052	1.382	1.774	2.526
Ngo-Cong et al. (2011)	0.835	1.054	1.391	1.774	2.526

Tableau.7.8 : Convergence et comparaison des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire stratifiée composite $[30^\circ, -30^\circ, 30^\circ]$ encadrée (Matériau (i), $h/a = 0.02$).

p	Mode				
	1	2	3	4	5
4	0.169	1.727	2.795	3.479	4.082
6	0.150	0.236	0.405	0.407	0.564
8	0.149	0.215	0.320	0.380	0.475
10	0.148	0.213	0.312	0.377	0.449
11	0.148	0.213	0.311	0.377	0.443
Narita et al. (2002)	0.149	0.214	0.312	0.377	0.441

Les figures 7.3-4 représentent les résultats obtenus des paramètres de fréquences Ω pour deux types de plaques composites avec quatre couches $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$, mince ($h/a = 0.002$) et modérément épaisse ($h/a = 0.2$), respectivement.

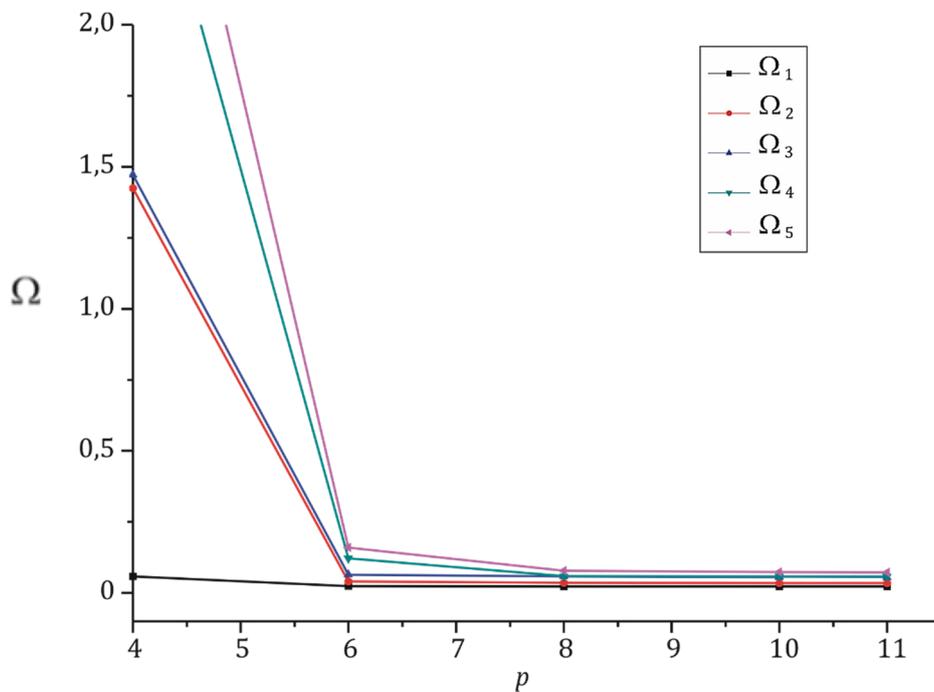


Figure 7.3 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire mince $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ encadrée (Matériau (ii), $h/a = 0.002$).

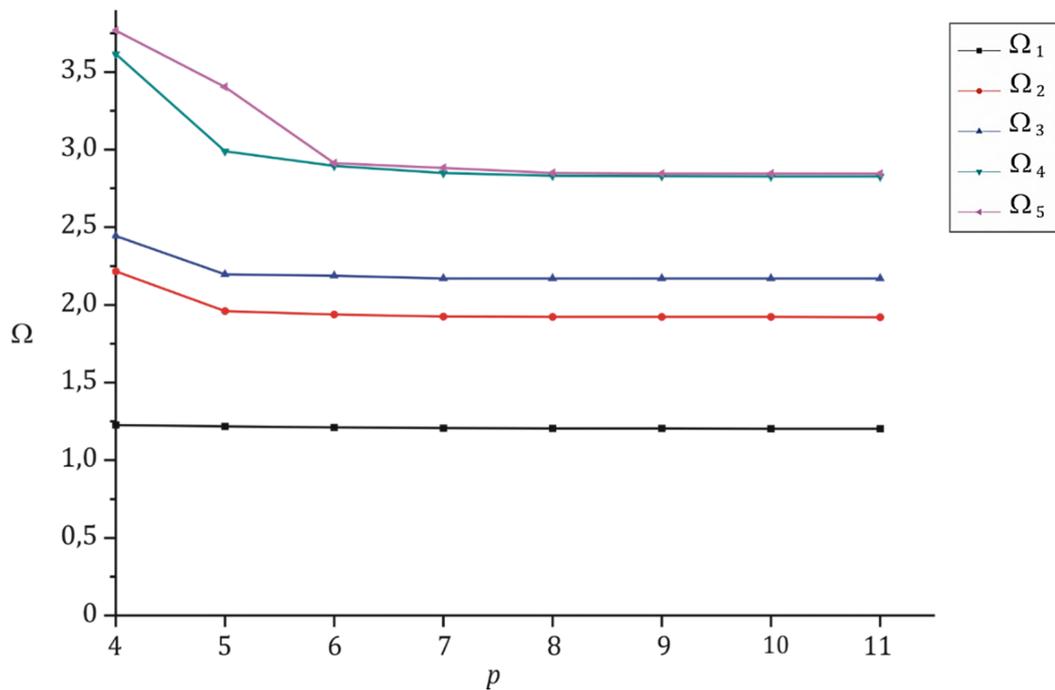


Figure 7.4 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences Ω d'une plaque circulaire modérément épaisse $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ (Matériau (ii) et $h/a = 0.2$).

Les résultats trouvés montrent une excellente concordance avec ceux donnés par Ngo-Cong et *al.* (2011) pour les deux types des plaques minces et modérément épaisses (tableaux 7.5-7). Remarquons que les auteurs ont employé la méthode (One-Dimensional Integrated Radial Basis Function Networks) et la théorie du premier ordre des plaques pour traiter le problème des vibrations des plaques composites. Le tableau 7.8 montre clairement que les résultats obtenus s'accordent avec ceux obtenus par Narita et *al.* (2002) lorsqu'en changeant le nombre de couches et l'angle d'orientation des fibres.

Les allures des courbes présentées dans les figures 7.3-4 montrent la rapidité de la convergence vers le bas lorsque l'ordre du polynôme d'interpolation p est augmenté de 4 à 11 pour les deux types des plaques minces et modérément épaisses.

VII.2.2. Analyse des vibrations libres des plaques SCRv

Dans cette partie, les résultats numériques sont donnés pour le paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 des plaques composites stratifiées circulaires composées de fibres curvilignes décalées avec quatre couches encastrées et simplement appuyées. Les plis sont supposés ont la même épaisseur. Tous les résultats sont présentés en fonction

du paramètre de fréquence non-dimensionnel (Eq. (7.1)), facteur de correction du cisaillement $k_s = 5/6$ et un rayon $a = 0.5 m$. Trois matériaux composites différents constitués de fibres en E-Glass, Graphite et Boron dans des matrices Epoxy sont considérés. Les propriétés mécaniques de ces matériaux composites sont données dans le tableau 7.9. La plaque composite circulaire stratifiée symétrique à rigidité variable avec quatre couches est dénotée par le symbole $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ qui veut dire $[+\langle T_0|T_1 \rangle, -\langle T_0|T_1 \rangle, -\langle T_0|T_1 \rangle, +\langle T_0|T_1 \rangle]$.

Tableau.7.9 : Propriétés mécaniques des matériaux utilisés.

Fibre/Matrice	E_1/E_2	G_{12}/E_2	G_{13}/E_2	G_{23}/E_2	ν_{12}
E-Glass/Epoxy	5.2750	0.3735	0.3735	0.3735	0.26
Graphite/Epoxy	18.3275	0.3714	0.3714	0.3714	0.25
Boron/Epoxy	27.2216	0.3716	0.3716	0.3716	0.25

VII.2.2.1. Convergence des résultats

Une étude de convergence du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 en fonction d'ordre du polynôme d'interpolation ($p = 4, \dots, 11$) est faite pour des plaques SCRV circulaires minces ($h/a = 0.005$) et modérément épaisses ($h/a = 0.05$) en utilisant les trois matériaux composites avec les propriétés mentionnés dans le tableau 7.9. Les plaques considérées sont $[\mp\langle 60^\circ|35^\circ \rangle]_s$ pour le cas où les conditions aux limites sont encastées et $[\mp\langle 45^\circ|60^\circ \rangle]_s$ pour le cas où les conditions aux limites sont simplement appuyées. Les résultats sont représentés dans les tableaux 7.10-11, respectivement.

Les tableaux 7.10-11 montrent la convergence rapide du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 lorsque le degré de polynôme p est augmenté de 4 à 11 pour les deux types de plaques minces et modérément épaisses quel que soient le matériau et condition aux limites. Nous observons que les fibres de Boron donnent des paramètres de fréquences fondamentales supérieures qu'E-Glass et Graphite dans les cas encasté et simplement appuyé.

Une remarque générale concernant les résultats obtenus est que la convergence est toujours atteinte pour des différents rapports géométriques et conditions aux limites, ceci implique l'efficacité de la méthode utilisée.

Tableau 7.10 : Paramètres de fréquences fondamentales Ω_1 d'une plaque SCRVC circulaire $[\mp(60^\circ|35^\circ)]_s$ encastree.

		p				
		4	6	8	10	11
	h/a					
E-Glass/Epoxy	0.005	0.051	0.025	0.024	0.024	0.024
	0.05	0.251	0.238	0.235	0.235	0.235
Graphite/Epoxy	0.005	0.061	0.042	0.041	0.041	0.041
	0.05	0.400	0.381	0.375	0.372	0.372
Boron/Epoxy	0.005	0.068	0.050	0.049	0.049	0.049
	0.05	0.466	0.443	0.436	0.433	0.433

Tableau 7.11 : Paramètres de fréquences fondamentales Ω_1 d'une plaque SCRVC circulaire $[\mp(45^\circ|60^\circ)]_s$ simplement appuyée.

		p				
		4	6	8	10	11
	h/a					
E-Glass/Epoxy	0.005	0.014	0.010	0.009	0.008	0.008
	0.05	0.100	0.080	0.074	0.071	0.070
Graphite/Epoxy	0.005	0.020	0.015	0.014	0.013	0.012
	0.05	0.142	0.117	0.110	0.105	0.103
Boron/Epoxy	0.005	0.023	0.018	0.016	0.015	0.014
	0.05	0.159	0.133	0.125	0.118	0.118

VII.2.2.2. Vibration des plaques SCRIV circulaires en fonction de T_0 et T_1

Dans cette partie, nous avons calculé les fréquences fondamentales en fonction de la variation des angles T_0 et T_1 pour des plaques circulaires SCRIV $[\mp(T_0|T_1)]_s$. Les stratifiés vérifient le contrainte de courbure de fibre κ (Eq. (2.5)) défini par la machine d'emplacement des gaines qui prend la valeur maximale admissible de $3,28 \text{ m}^{-1}$. L'espace de conception pour un pli de fibre décalée avec un rayon $a = 0.5 \text{ m}$ est représenté sur la figure 2.9 (chapitre II). L'angle T_0 varie de 0° à 90° et l'angle T_1 varie de -90° à 90° pour les deux cas encasté et simplement appuyé. Les matériaux composites avec les propriétés mécaniques mentionnées dans le tableau 7.6 sont considérés et le rapport d'épaisseur $h/a = 0.01$. Les calculs des fréquences fondamentales sont réalisés en prenant le degré du polynôme $p = 10$.

Les graphs de contour des paramètres de fréquences fondamentales Ω_1 des plaques circulaires SCRIV $[\mp(T_0|T_1)]_s$ encastées constituées de matériaux E-Glass/Epoxy, graphite/Epoxy, et Boron/Epoxy sont représentés sur les figures 7.5-7, respectivement.

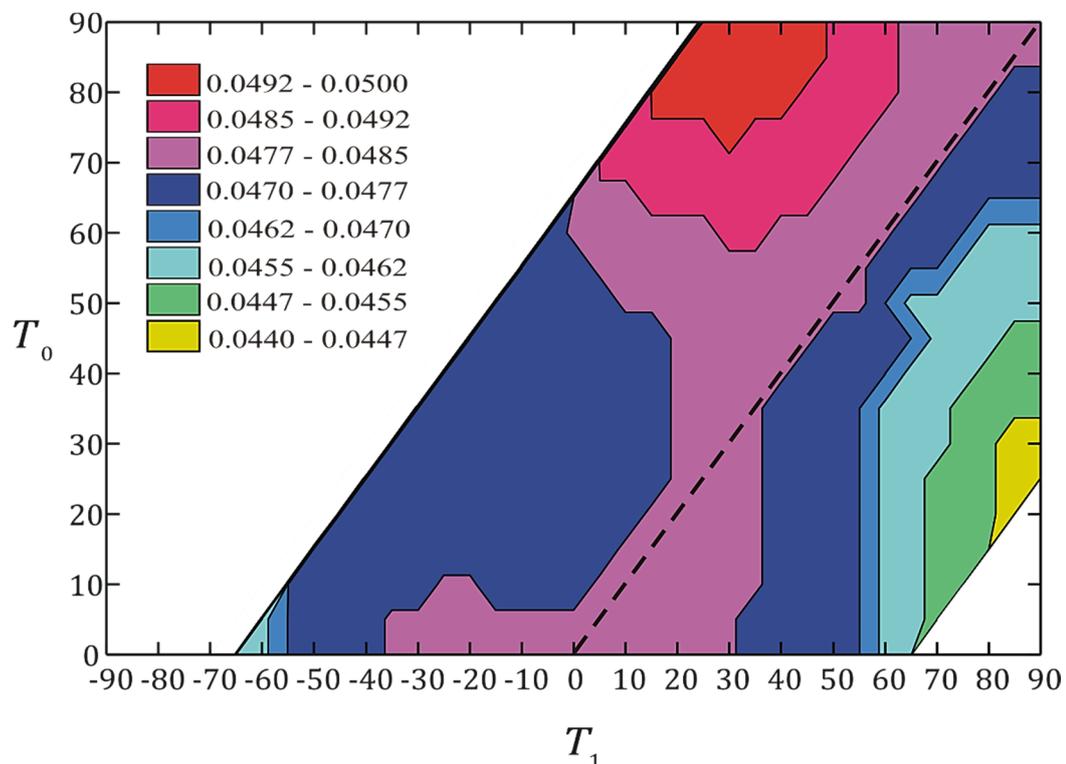


Figure 7.5 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire encastée $[\mp(T_0|T_1)]_s$ constituée de E-Glass/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 .

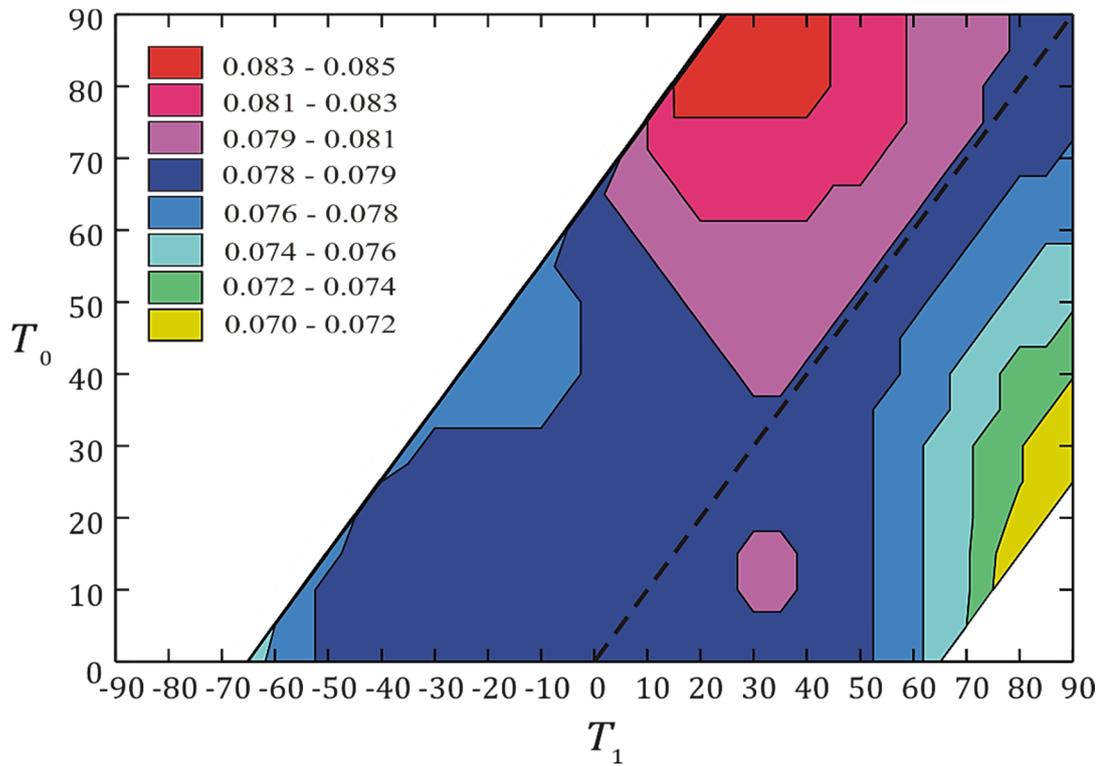


Figure 7.6 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire encadrée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de Graphite/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 .

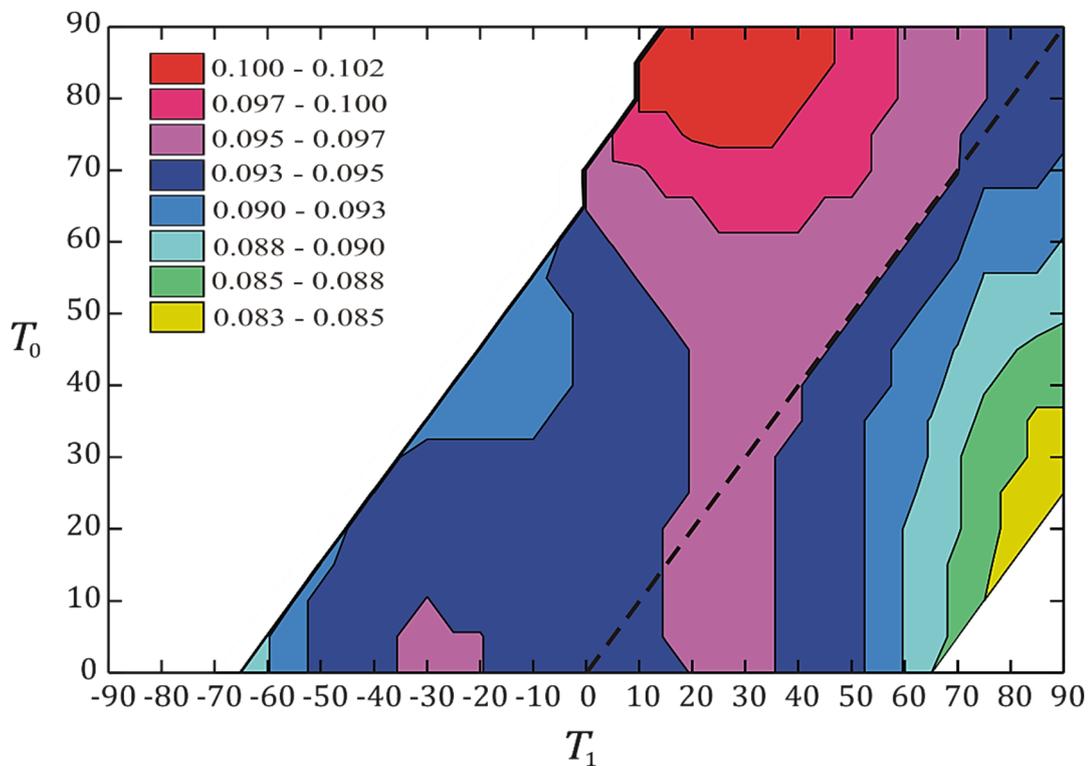


Figure 7.7 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire encadrée $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ constituée de Boron/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 .

Dans les figures 7.5-7, des plaques stratifiées avec des angles d'orientation des fibres situées dans les régions en blanc ne peuvent pas être fabriqués car le contrainte de courbure de fibre κ n'est pas vérifié dans ces régions. Les lignes pointillées tracées sur les figures représentent les stratifiés composites à rigidité constante où $T_0 = T_1$ (fibres rectilignes). Nous remarquons que ces lignes pointillées ne traversent pas les domaines des paramètres de fréquences maximales ou minimales. Donc, la valeur maximale et/ou minimale de la fréquence fondamentale est obtenue avec des plaques composites à rigidité variable (fibres curvilignes).

Les paramètres de fréquence fondamentales maximales des stratifiés en E-Glass/Epoxy, Graphite/Epoxy, et Boron/Epoxy ont été calculés comme 0.050, 0.085, et 0.102, respectivement pour les stratifiés $[\mp\langle 90^\circ | 25^\circ \rangle]_s$. Les paramètres de fréquence fondamentales minimales des plaques en E-Glass/Epoxy, Graphite/Epoxy, et Boron/Epoxy ont été calculés comme 0.044, 0.070, et 0.083, respectivement pour les stratifiés $[\mp\langle 20^\circ | 85^\circ \rangle]_s$. La différence entre les paramètres de fréquences fondamentales maximales et minimales de cette plaque est de 14% pour le matériau E-Glass/Epoxy, 21% pour le Graphite/Epoxy, et 23% pour le Boron/Epoxy. Nous remarquons que ces différences sont augmentées avec l'augmentation des rapports E_1/E_2 .

Les graphs de contour des paramètres de fréquence fondamentales Ω_1 des plaques circulaires $[\mp\langle T_0 | T_1 \rangle]_s$ simplement appuyées constituées des trois matériaux E-Glass/Epoxy, graphite/Epoxy, et Boron/Epoxy sont représentés sur les figures 7.8-10, respectivement.

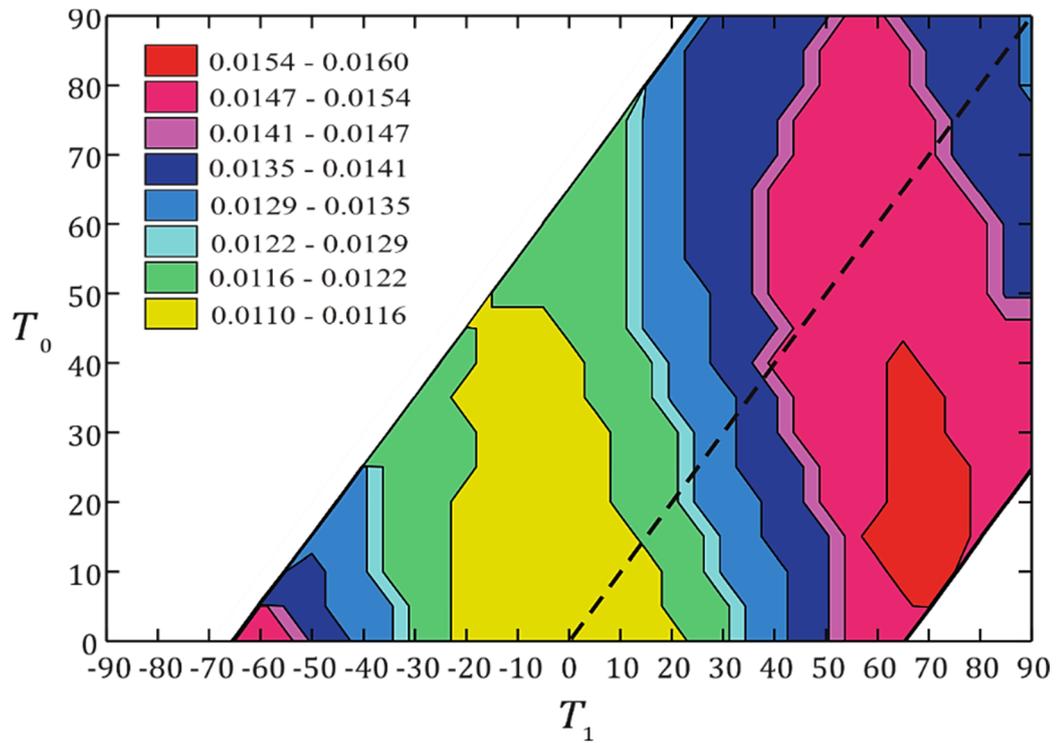


Figure 7.8 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire simplement appuyée $[\mp(T_0|T_1)]_s$ constituée de E-Glass/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 .

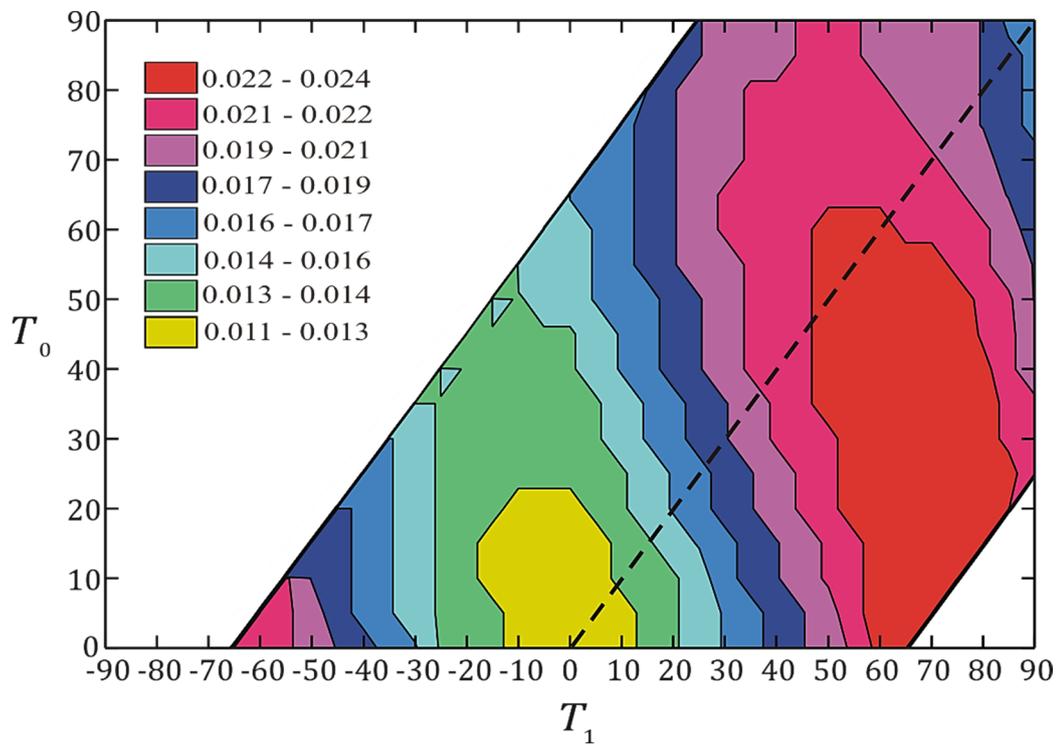


Figure 7.9 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire simplement appuyée $[\mp(T_0|T_1)]_s$ constituée de Graphite/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 .

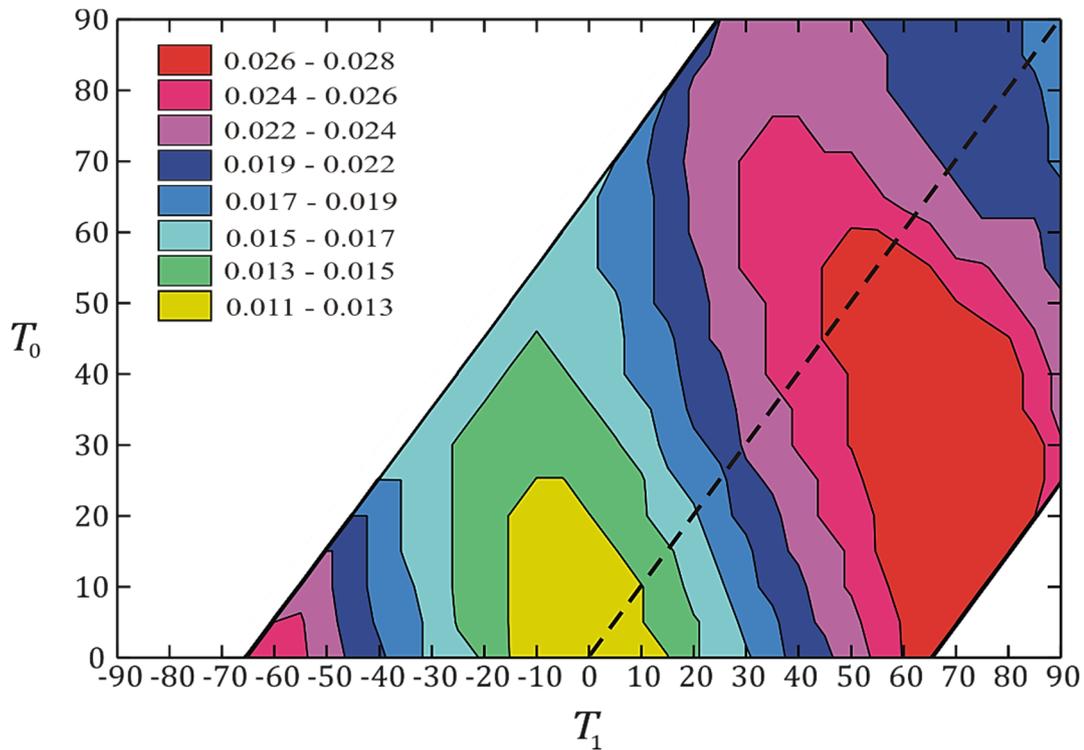


Figure 7.10 : Graph de contour du paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 d'une plaque circulaire simplement appuyée $[\mp\langle T_0|T_1\rangle]_s$ constituée de Boron/Epoxy en fonction de T_0 et T_1 .

La région en blanc dans les figures 7.8-10 est où le format de fibres décalées ne vérifie pas le contrainte de courbure et les lignes pointillées représentent aussi les stratifiés composés de fibres rectilignes ($T_0 = T_1$). Les paramètres de fréquences fondamentales maximales des stratifiés en E-Glass/Epoxy, Graphite/Epoxy, et le Boron/Epoxy ont été calculés comme 0.016, 0.024 et 0.028, respectivement, pour les stratifiés $[\mp\langle 5^\circ|70^\circ\rangle]_s$. Le paramètre de fréquence fondamentale minimale a été calculé comme 0.011 pour les stratifiés $[\mp\langle 0^\circ|0^\circ\rangle]_s$ (tous les matériaux).

Comme montré sur les figures, le matériau de fibres et les conditions aux limites influent sur la répartition des fréquences dans tout l'espace de conception. Il y a d'autres stratifiés composites à rigidité variable qui donnent les fréquences fondamentales maximales trouvées dans les deux cas encastés et simplement appuyés et ils seront déterminés précisément à la suite du chapitre dans la partie d'optimisation.

Les angles d'orientation des fibres $\langle T_0|T_1\rangle$ et les séquences d'empilement des plis conduisent à des changements dans les formes de mode d'un stratifié constitué de fibres

curvilignes. La figure 7.11 montre la forme du mode fondamental du stratifié $[\mp(T_0|T_1)]_s$ pour les trois matériaux en fonction de T_0 où l'angle T_1 est maintenu constant ($T_1 = 30^\circ$), tandis que l'angle T_0 est égal à $0^\circ, 45^\circ$ et 90° .

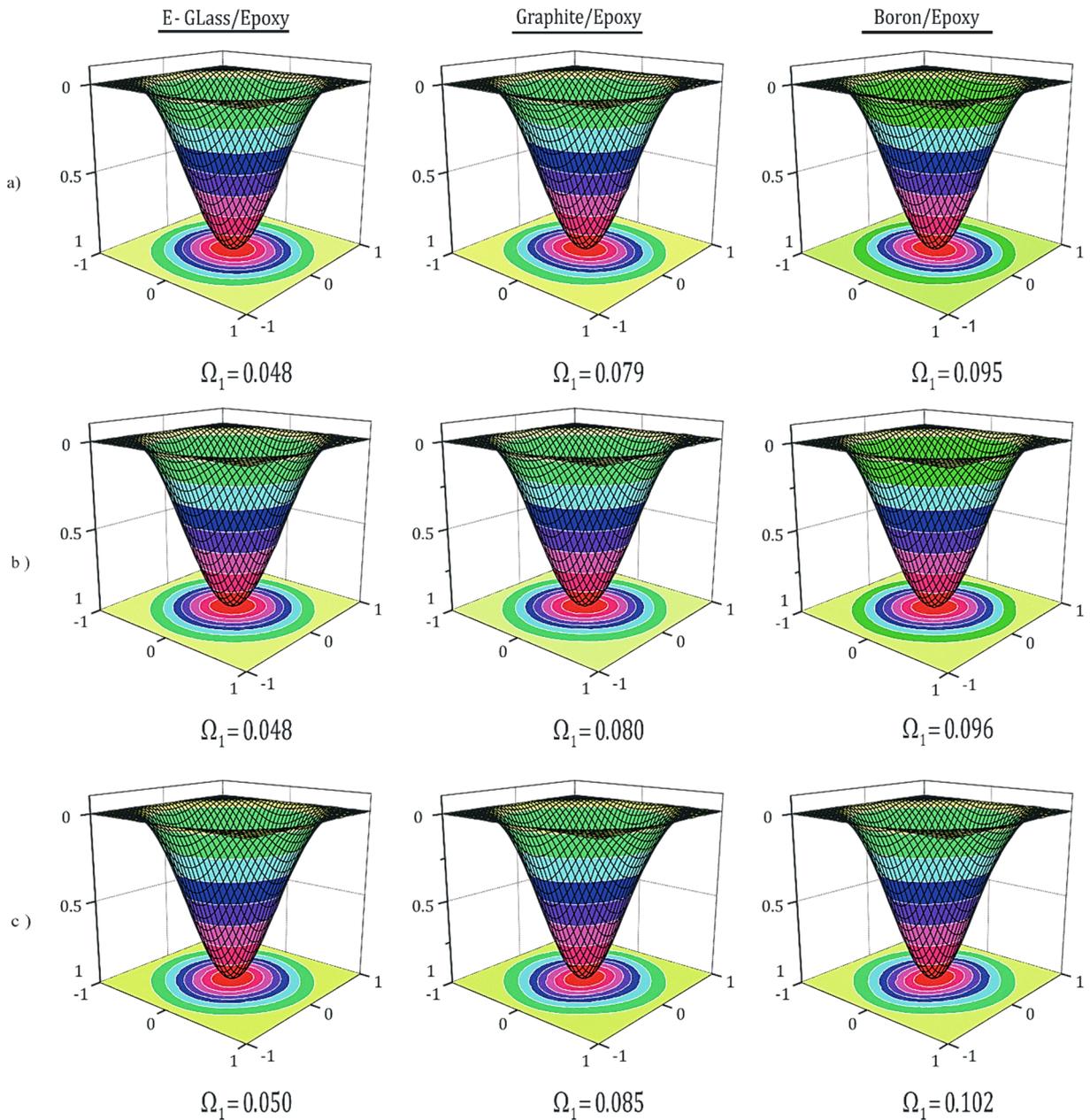


Figure 7.11 : Formes du mode fondamental des SCRVs circulaire encastree $[\pm(T_0|T_1)]_s$ où $T_1 = 30^\circ$ et (a) $T_0 = 0^\circ$. (b) $T_0 = 45^\circ$. (c) $T_0 = 90^\circ$.

Nous observons que le paramètre de fréquence fondamentale Ω_1 diminue avec l'augmentation de l'angle d'orientation des fibres T_0 qui affecte la forme du mode. Nous observons aussi que les fibres de Boron donnent des paramètres de fréquences fondamentales supérieures qu'E-Glass et Graphite.

Les figures 7.12-14 montrent les sections normalisées en $\eta = 0$ de la forme du mode fondamental des stratifiés $[\pm\langle T_0|T_1\rangle]_s$ en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les trois matériaux.

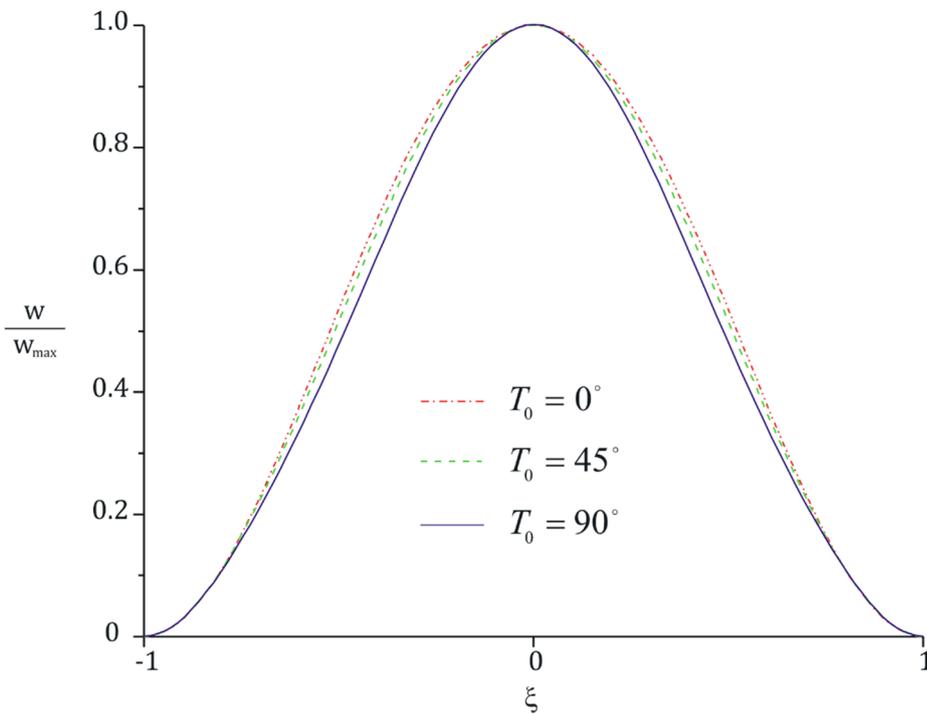


Figure 7.12 : Section normalisée en $\eta = 0$ de la forme du mode fondamental des SCRV circulaires encastrées $[\pm\langle T_0|T_1\rangle]_s$ en fonction de T_0 (E-Glass/Epoxy, $T_1 = 30^\circ$).

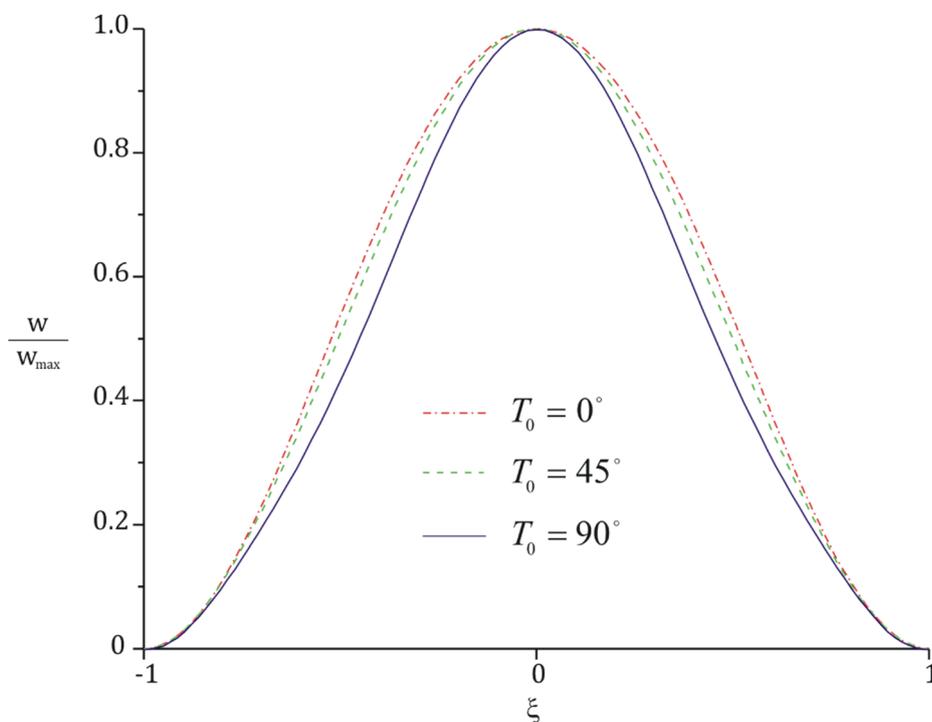


Figure 7.13 : Section normalisée en $\eta = 0$ de la forme du mode fondamental des SCRV circulaires encastrées $[\pm\langle T_0|T_1\rangle]_s$ en fonction de T_0 (Graphite/Epoxy, $T_1 = 30^\circ$).

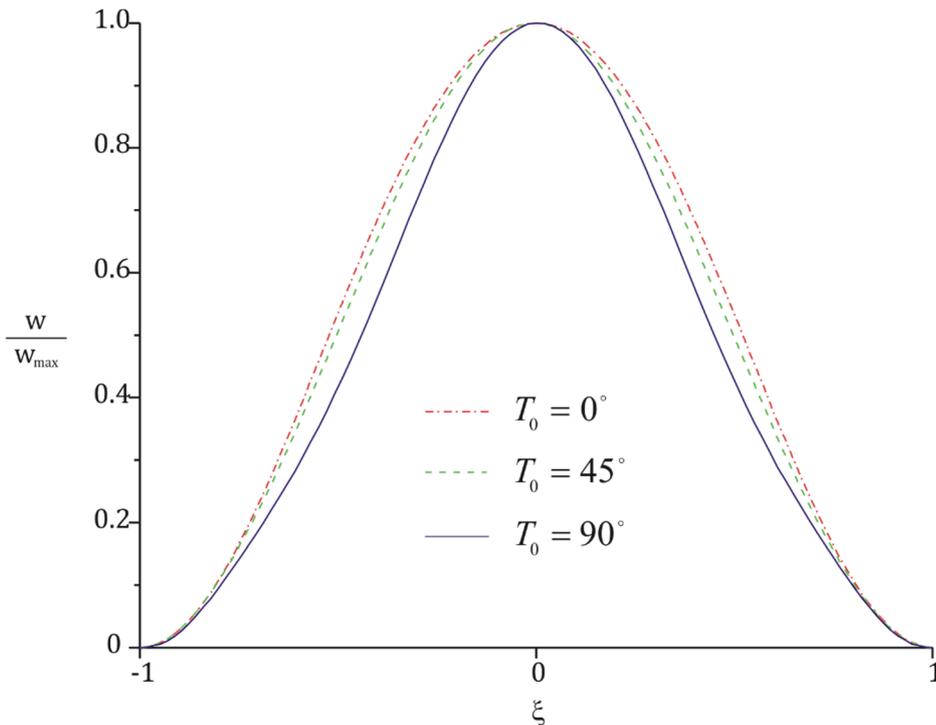


Figure 7.14 : Section normalisée en $\eta = 0$ de la forme du mode fondamental des SCRVC circulaires encastées $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en fonction de T_0 (Boron/Epoxy, $T_0 = 30^\circ$).

Puisque la figure 7.11 n'illustre pas très bien les variations dans les formes du mode lorsque l'angle d'orientation des fibres T_0 est augmenté, les figures 7.12-14 démontrent que des changements se produisent.

Afin d'étudier le croisement et le virement des modes, les variations des paramètres de fréquence Ω , avec un angle d'orientation des fibres T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRVC encastées et simplement appuyées en E-glass/Epoxy, Graphite/Epoxy, et Boron/Epoxy sont trouvés. Les courbes de fréquence sont représentées sur les figures 7.15-20. Nous pouvons voir qu'aucun des modes est affectée par le croisement mais les modes 3 et 4 des stratifiés circulaires encastées en Graphite/Epoxy, et Boron/Epoxy sont affectés par le virement.

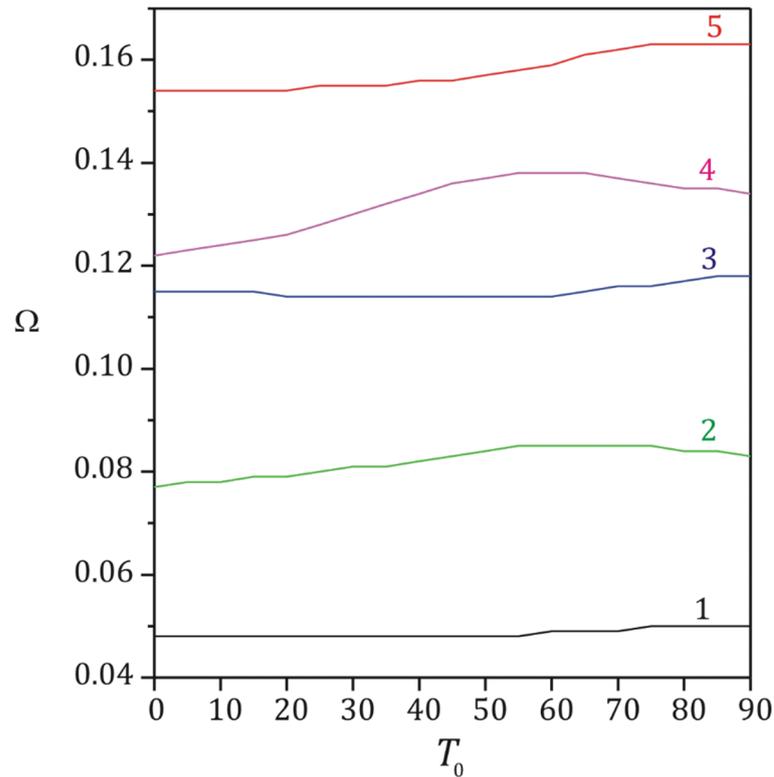


Figure 7.15 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRV $[\mp(T_0|T_1)]_s$ encadrées en E-Glass/Epoxy.

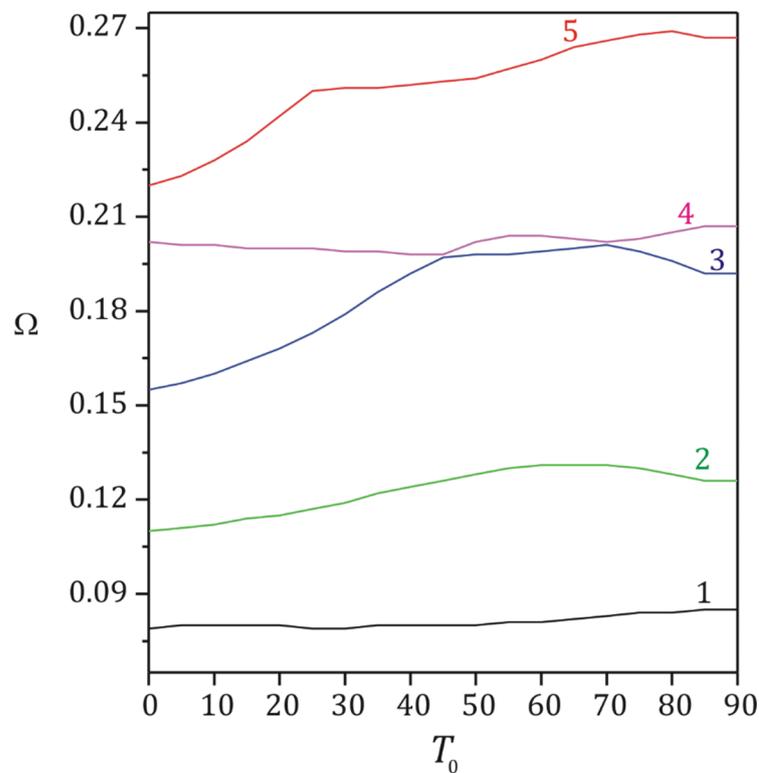


Figure 7.16 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRV $[\mp(T_0|T_1)]_s$ encadrées en Graphite/Epoxy.

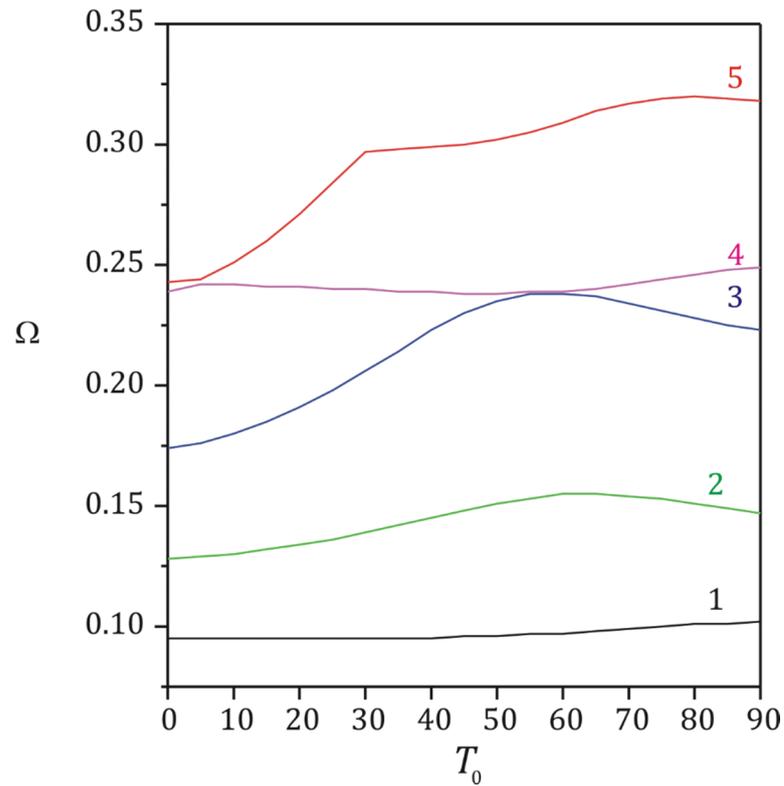


Figure 7.17 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRIV encastées $[\mp(T_0|T_1)]_s$ en Boron/Epoxy.

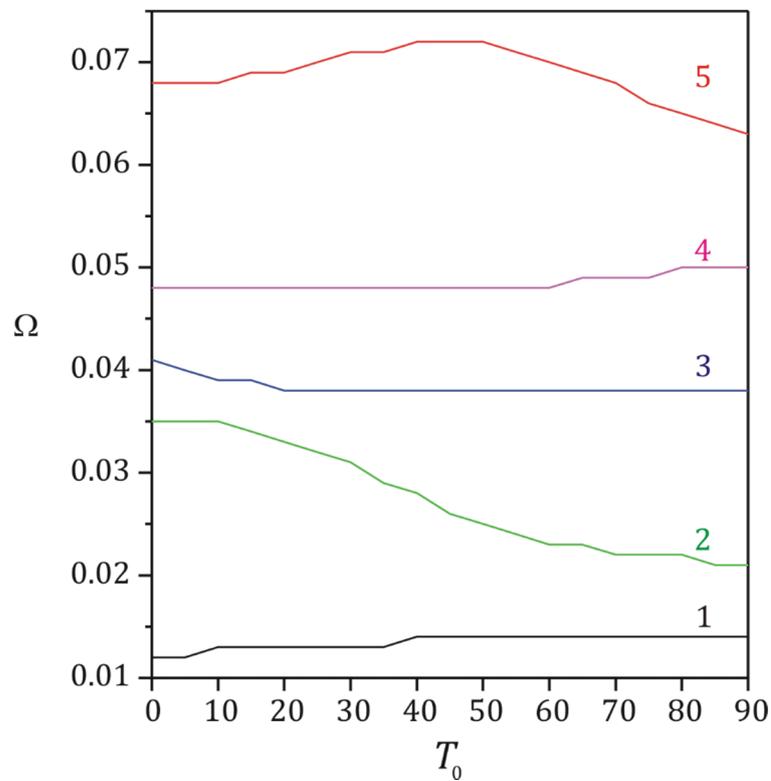


Figure 7.18 Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRIV simplement appuyées $[\mp(T_0|T_1)]_s$ en E-Glass/Epoxy.

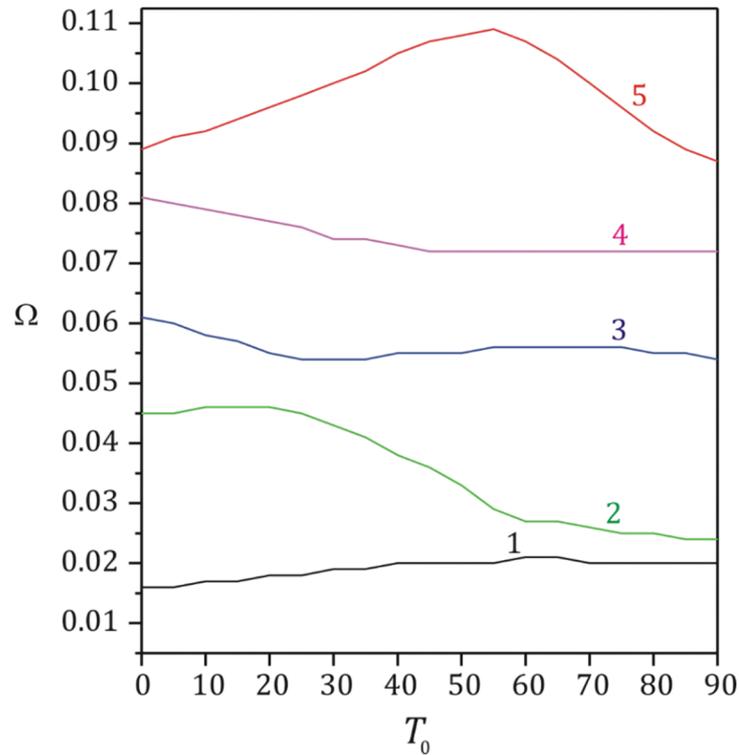


Figure 7.19 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRV simplement appuyées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en Graphite/Epoxy.

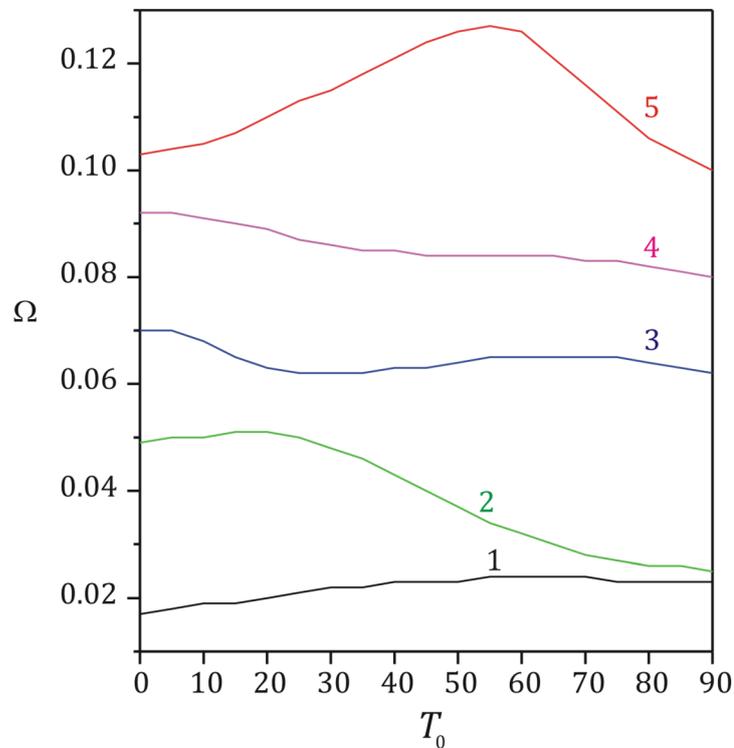


Figure 7.20 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 30^\circ$) pour les cinq premiers modes des plaques circulaires SCRV simplement appuyées $[\mp\langle T_0|T_1 \rangle]_s$ en Boron/Epoxy.

VII.3. Conception des plaques SCRIV circulaires pour la fréquence fondamentale maximale.

Dans cette partie, nous adoptons la procédure d'optimisation couche par couche pour déterminer la solution ou la conception optimale (la fréquence fondamentale maximale et la disposition optimale des fibres correspondante) des plaques circulaires stratifiées composites à rigidité variable. Une étude paramétrique sur la solution optimale d'une plaque circulaire modérément épaisse avec différents matériaux, conditions aux limites, nombre de couches (NL), et rapport d'épaisseur (h/a) est présentée. Les résultats numériques sont donnés pour des plaques circulaires SCRIV symétriques. Le degré du polynôme d'interpolation p est fixé à 8. L'influence de plusieurs paramètres sur le comportement vibratoire et les dispositions des fibres est discutée.

Afin de montrer la procédure et l'efficacité de la méthode d'optimisation couche par couche pour la détermination des dispositions des fibres qui maximisent la fréquence fondamentale des plaques SCRIV, deux exemples sont considérés et représentés dans les tableaux 7.12-13. Nous prenons une plaque circulaire symétrique avec un rapport d'épaisseur $h/a = 0.01$ et $NL = 4$, où la partie supérieure (et inférieure) des couches sont supposées être des couches hypothétiques sans rigidité. Dans l'étape 1, la première couche extérieure est remplacée par une couche orthotrope avec les propriétés élastiques du matériau E-Glass/Epoxy fournies dans le tableau 7.9. L'orientation optimale des fibres $\langle T_0|T_1 \rangle_{1,opt}$ est déterminée en changeant séquentiellement T_0 et T_1 avec un incrément de 5° à partir de -90° à $+90^\circ$ en respectant le contrainte de courbure de fibre κ . Dans l'étape 2, $\langle T_0|T_1 \rangle_{2,opt}$ est déterminé pour la plaque avec l'angle d'orientation des fibres de la première couche maintenu à $\langle T_0|T_1 \rangle_{1,opt}$ et la deuxième couche hypothétique est remplacée par une couche orthotrope. Dans le cas général ce processus est terminé après $\langle T_0|T_1 \rangle_{K/2,opt}$ est déterminé à l'étape K. Ensuite, la première série de solutions $[\langle T_0|T_1 \rangle_1, \langle T_0|T_1 \rangle_2]_{s,opt}^{(1)}$ est utilisée comme une approximation initiale pour la solution du cycle suivant dans une procédure itérative (le symbole s représente la symétrie).

Tableau 7.12 : Illustration de la procédure d'optimisation couche par couche pour des plaques SCRVC circulaires encadrées ($NL = 4$, E-glass/Epoxy, $h/a = 0.01$).

$[\langle T_0 T_1 \rangle_1, \langle T_0 T_1 \rangle_2]_s$		Ω_1
Premier cycle itératif de solutions		
Etape 0	$[\langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	-----
Etape 1	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle * * \rangle]_s$	0.047
Etape 2	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051
Deuxième cycle itératif de solutions		
Etape 0	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051
Etape 1	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051
Etape 2	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051

En comparant la différence des paramètres de fréquence après chaque étape dans le premier cycle itératif, il est montré que la couche externe est la plus influente pour déterminer et augmenter la fréquence de vibration des plaques. Pour le tableau 7.12 le deuxième cycle itératif conduit à une solution optimale convergée (c'est-à-dire, les résultats du troisième cycle itératif sont les mêmes que le deuxième cycle itératif), tandis que pour le tableau 7.13 le troisième cycle itératif donne une solution convergée.

L'avantage de la méthode d'optimisation couche par couche en temps de calcul est évident dans l'exemple numérique. En recherchant la fréquence fondamentale maximale $\Omega_{1,opt}$ en examinant toutes les combinaisons de $[\langle T_0|T_1 \rangle_1, \langle T_0|T_1 \rangle_2]_{s,opt}$ avec un incrément de 5° , il faut calculer les fréquences pour $(37 \times 37)^2 = 1\,874\,161$ combinaisons pour T_0 et T_1 . Avec la procédure d'optimisation couche par couche, il faut calculer pour seulement $(37 \times 37) \times 2 = 2\,738$ combinaisons.

Tableau 7.13 : Illustration de la procédure d'optimisation couche par couche pour des plaques SCRVC circulaires simplement appuyées ($NL = 4$, E-glass/Epoxy, $h/a = 0.01$).

$[\langle T_0 T_1 \rangle, \langle T_0 T_1 \rangle]_s$		Ω_1
Premier cycle itératif de solutions		
Etape 0	$[\langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	-----
Etape 1	$[\langle 15^\circ 80^\circ \rangle, \langle * * \rangle]_s$	0.015
Etape 2	$[\langle 15^\circ 80^\circ \rangle, -\langle 30^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017
Deuxième cycle itératif de solution		
Etape 0	$[\langle 15^\circ 80^\circ \rangle, -\langle 30^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017
Etape 1	$[\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, -\langle 35^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017
Etape 2	$[\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, -\langle 35^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017
Troisième cycle itératif de solutions		
Etape 0	$[\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, -\langle 35^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017
Etape 1	$[\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, -\langle 35^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017
Etape 2	$[\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, -\langle 35^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017

VII.3.1. Etude paramétrique

Les résultats des dispositions optimales des fibres qui donnent les paramètres de fréquence fondamentales maximales $\Omega_{1,opt}$ obtenues par la procédure d'optimisation couche par couche sont donnés dans les tableaux 7.14-20 en fonction de différents paramètres physiques, géométriques et conditions aux limites. Dans chaque tableau, le paramètre de fréquence fondamentale maximale $\Omega_{1,opt}$ et la disposition optimale des fibres $[\langle T_0|T_1 \rangle_1, \langle T_0|T_1 \rangle_2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle_k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle_{K/2}]_{s,opt}$ sont donnés avec le nombre de cycles itératifs.

VII.3.1.1. Influence du type de matériau

Les résultats qui montrent l'influence du type de matériau composite utilisé sur la conception optimale sont donnés dans la forme d'une liste de solutions optimales convergées pour les trois matériaux E-Glass/Epoxy, Graphite/Epoxy, et le Boron/Epoxy (tableau 7.9) en fonction des conditions aux limites pour des plaques circulaires SCRIV avec un nombre de couche $NL = 4$ et rapport d'épaisseur $h/a = 0.01$. Les résultats sont présentés dans le tableau 7.14.

Nous remarquons que la disposition optimale des fibres ne change pas de façon significative lorsque le type de matériau est changé mais elle change avec les conditions aux limites. Comme nous avons dit précédemment, les fréquences augmentent lorsqu'on change les matériaux et les conditions aux limites comme montré dans les figures 7.21-22. Cela est dû à l'augmentation de la rigidité avec l'augmentation du rapport E_1/E_2 . Le nombre de cycles itératifs est égal à 2 dans tous les cas sauf pour la plaque simplement appuyée en E-glass/Epoxy.

Les différences des paramètres de fréquences fondamentales maximales dans le cas des conditions aux limites encastées sont 50.69 %, 40.69 % et 17.30 % entre Boron/Epoxy--E-glass/Epoxy, Graphite/Epoxy--E-glass/Epoxy, et Boron/Epoxy--Graphite/Epoxy, respectivement. Dans le cas des conditions aux limites simplement appuyées, les différences des paramètres de fréquences fondamentales maximales sont 45.16 %, 37.03 % et 12.90 % pour Boron/Epoxy--E-glass/Epoxy, Graphite/Epoxy--E-glass/Epoxy, et Boron/Epoxy--Graphite/Epoxy, respectivement. Nous remarquons que les différences diminuent généralement avec l'augmentation de E_1/E_2 .

Tableau 7.14 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRIV circulaires avec différents matériaux et différentes conditions aux limites ($NL = 4, h/a = 0.01$).

Matériau	Conditions aux limites	Dispositions optimales des fibres	$\Omega_{1,opt}$	Nombre de cycles itératifs
E-Glass/Epoxy	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051	2
	Simplement appuyée	$[\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, -\langle 35^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017	3
Graphite/Epoxy	Encastrée	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.086	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 80^\circ \rangle, \langle 20^\circ 55^\circ \rangle]_s$	0.027	2
Boron/Epoxy	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.104	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 80^\circ \rangle, \langle 20^\circ 55^\circ \rangle]_s$	0.031	2

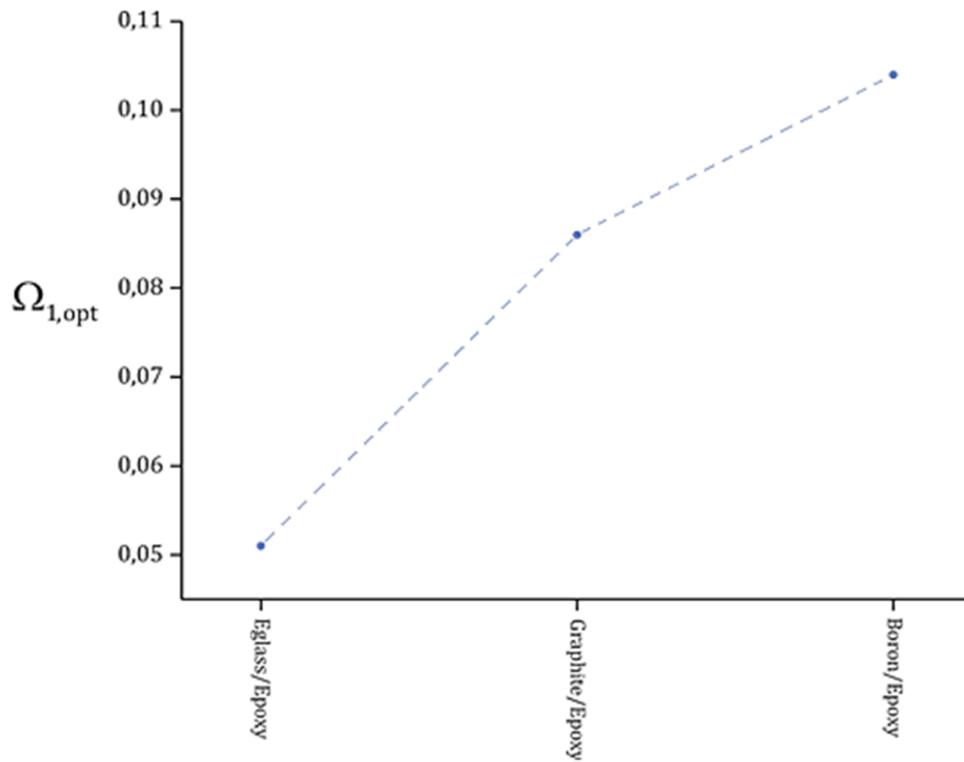


Figure 7.21 : Influence du type de matériau sur la fréquence fondamentale maximale pour une plaque circulaire SCRIV encastree ($NL = 4, h/a = 0.01$).

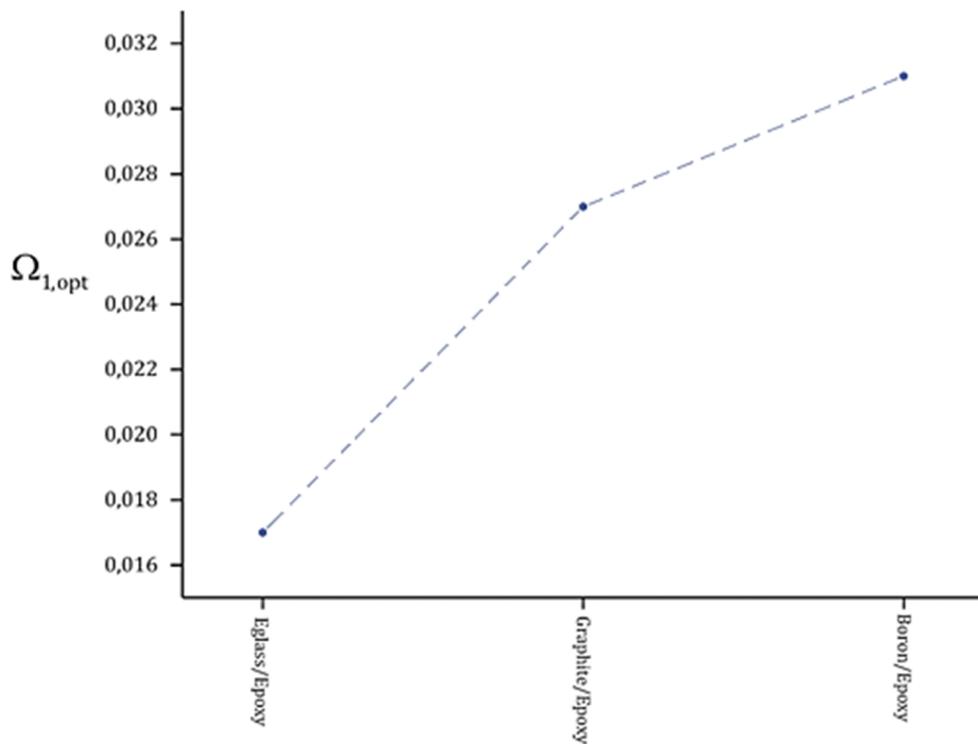


Figure 7.22 : Influence du type de matériau sur la fréquence fondamentale maximale pour une plaque circulaire SCRIV simplement appuyee ($NL = 4, h/a = 0.01$).

VII.3.1.2. Influence du nombre de couches

Les listes des solutions optimales convergées pour différents nombres de couches NL en fonction des conditions aux limites pour les plaques circulaires SCRIV en E-glass/Epoxy, Graphite/Epoxy et Boron/Epoxy sont présentées dans les tableaux 7.15, 7.16 et 7.17, respectivement. Le rapport d'épaisseur h/a reste inchangé ($h/a = 0.01$).

En théorie, les fréquences maximales des plaques avec six couches doivent être légèrement supérieures à celles des plaques avec quatre et deux couches, parce que les plaques avec six couches ont plus de degré de liberté, c'est-à-dire plus de nombre de variables de conception que les plaques avec deux et quatre couches. Cependant, nous remarquons que dans la plupart des cas des tableaux 7.15-17 que la fréquence maximale n'augmente pas lorsque le nombre de couches est augmenté en raison du petit rapport d'épaisseur. Nous pourrions voir cette augmentation dans la partie suivante quand le rapport d'épaisseur est supérieur à 0.01.

Dans le cas de plaques SCRIV circulaires encastées, nous remarquons que le format de fibres $\langle 90^\circ | 25^\circ \rangle$ est le seul qui constitue les séquences d'empilement quelque soient le nombre de couches et matériau. Nous remarquons aussi que la solution optimale n'a besoin que de deux itérations pour la trouver. Concernant le cas des conditions aux limites simplement appuyées, nous n'avons pas distingué des angles d'orientation dominants et nous remarquons aussi que les angles d'orientations optimales qui forment les séquences d'empilement changent lorsque le nombre de couches et le type de matériau sont changés. Dans les cas des plaques avec $NL = 2$ et quel que soit le matériau utilisé, et dans le cas $NL = 4$ et les matériaux Graphite/Epoxy et Boron/Epoxy, nous avons trouvé les mêmes dispositions des fibres. Le nombre de cycles itératifs augmente et atteint le nombre 4 dans le cas des plaques avec six couches en E-glass/Epoxy.

VII.3.1.3. Influence des rapports d'épaisseur

Les résultats qui montrent l'influence du rapport d'épaisseur h/a sur la conception optimale des plaques SCRIV circulaires pour la fréquence fondamentale maximale sont donnés dans les tableaux 7.18-20.

Tableau 7.15 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRIV circulaires avec différents nombre des couches et conditions aux limites (E-glass/Epoxy, $h/a = 0.01$).

NL	Conditions aux limites	Dispositions optimales des fibres	$\Omega_{1,opt}$	Nombre de cycles itératifs
2	Encastrée	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 80^\circ \rangle]_s$	0.016	2
4	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051	2
	Simplement appuyée	$[\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, -\langle 35^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.017	3
6	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051	2
	Simplement appuyée	$[\langle 20^\circ 70^\circ \rangle, -\langle 30^\circ 65^\circ \rangle, -\langle 40^\circ 60^\circ \rangle]_s$	0.018	4

Tableau 7.16 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRIV circulaires avec différents nombre des couches et conditions aux limites (Graphite/Epoxy, $h/a = 0.01$).

<i>NL</i>	Conditions aux limites	Dispositions optimales des fibres	$\Omega_{1,opt}$	Nombre de cycles itératifs
2	Encastrée	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.086	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 80^\circ \rangle]_s$	0.023	2
4	Encastrée	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.086	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 80^\circ \rangle, \langle 20^\circ 55^\circ \rangle]_s$	0.027	2
6	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.087	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, \langle 20^\circ 60^\circ \rangle, \langle 15^\circ 65^\circ \rangle]_s$	0.029	3

Tableau 7.17 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires avec différents nombres des couches et conditions aux limites (Boron/Epoxy, $h/a = 0.01$).

<i>NL</i>	Conditions aux limites	Dispositions optimales des fibres	$\Omega_{1,opt}$	Nombre de cycles itératifs
2	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.103	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 80^\circ \rangle]_s$	0.026	2
4	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.104	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 80^\circ \rangle, \langle 20^\circ 55^\circ \rangle]_s$	0.031	2
6	Encastrée	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.104	2
	Simplement appuyée	$[-\langle 15^\circ 75^\circ \rangle, \langle 10^\circ 65^\circ \rangle, \langle 15^\circ 65^\circ \rangle]_s$	0.034	3

Dans cette partie les rapports d'épaisseurs considérés sont $h/a = 0.01$, $h/a = 0.05$, et $h/a = 0.1$. Le nombre de couches change pour chaque rapport. Les listes de solutions optimales convergées des plaques SCRVC circulaires encastrées avec différents rapports d'épaisseur en E-glass/Epoxy, Graphite/Epoxy et Boron/Epoxy sont représentées en fonction de NL dans les tableaux 7.18, 7.19 et 7.20, respectivement.

À partir des tableaux 7.18-20, les paramètres de fréquences fondamentales maximales augmentent lorsque le rapport d'épaisseur est augmenté. Dans le tableau 7.18, nous avons un seul format de fibres $\langle 90^\circ | 25^\circ \rangle$ qui forme les dispositions optimales des fibres quels que soient le nombre de couches et le rapport d'épaisseur. Les différences des paramètres de fréquences dans le cas des plaques SCRVC circulaires avec deux couches sont 79.10 % et 46.37 % entre $h/a = 0.01-0.05$ et $h/a = 0.05-0.1$, respectivement (presque les mêmes pourcentages sont trouvés pour $NL = 4$ et $NL = 6$). Dans les tableaux 7.19 et 7.20, nous remarquons que le format de fibres $\langle 90^\circ | 25^\circ \rangle$ qui domine dans la constitution des dispositions optimales des fibres. Les différences des paramètres de fréquences dans le cas des plaques SCRVC circulaires avec deux couches en Graphite/Epoxy sont 77.89 % et 40.24 % entre $h/a = 0.01-0.05$ et $h/a = 0.05-0.1$, respectivement (presque les mêmes pourcentages sont trouvés pour les cas $NL = 4$ et $NL = 6$). Dans le cas du matériau Boron/Epoxy, les différences des paramètres de fréquences sont 77.11 % et 37.15 % entre $h/a = 0.01-0.05$ et $h/a = 0.05-0.1$, respectivement ($NL = 2$). Comme nous le constatons, les différences diminuent généralement avec l'augmentation du rapport d'épaisseur h/a . Les solutions optimales sont déterminées avec deux cycles itératifs de la procédure d'optimisation pour tous les cas des tableaux 7.18-20.

En comparant les paramètres de fréquences maximales $\Omega_{1,opt}$ des plaques avec le même rapport d'épaisseur et un nombre de couches différent, nous pouvons voir que les paramètres de fréquences fondamentales maximales $\Omega_{1,opt}$ des plaques avec six couches sont légèrement supérieures à celles des plaques avec quatre et deux couches et nous voyons ça clairement dans la figure 7.23. Les différences des paramètres de fréquences maximales sont présentées dans le tableau 7.21.

Tableau 7.18 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRIV circulaires encastées en E-Glass/Epoxy avec différents nombres des couches et rapports d'épaisseur.

<i>NL</i>	<i>h/a</i>	Dispositions optimales des fibres	$\Omega_{1,opt}$	Nombre de cycles itératifs
2	0.01	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051	2
	0.05	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.244	2
	0.1	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.455	2
4	0.01	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051	2
	0.05	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.245	2
	0.1	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.459	2
6	0.01	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.051	2
	0.05	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.246	2
	0.1	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.463	2

Tableau 7.19 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRv circulaires encastées en Graphite/Epoxy avec différents nombres des couches et rapports d'épaisseur.

<i>NL</i>	<i>h/a</i>	Dispositions optimales des fibres	$\Omega_{1,opt}$	Nombre de cycles itératifs
2	0.01	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.086	2
	0.05	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.389	2
	0.1	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.651	2
4	0.01	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.086	2
	0.05	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 85^\circ 20^\circ \rangle]_s$	0.396	2
	0.1	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 10^\circ 40^\circ \rangle]_s$	0.676	2
6	0.01	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.087	2
	0.05	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 0^\circ 20^\circ \rangle]_s$	0.402	2
	0.1	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 5^\circ 35^\circ \rangle, \langle 90^\circ 35^\circ \rangle]_s$	0.695	3

Tableau 7.20 : Solutions optimales convergées pour des plaques SCRIV circulaires encastées en Boron/Epoxy avec différents nombres des couches et rapports d'épaisseur.

<i>NL</i>	<i>h/a</i>	Dispositions optimales des fibres	$\Omega_{1,opt}$	Nombre de cycles itératifs
2	0.01	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.103	2
	0.05	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.450	2
	0.1	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.716	2
4	0.01	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.104	2
	0.05	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 85^\circ 20^\circ \rangle]_s$	0.461	2
	0.1	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 20^\circ 45^\circ \rangle]_s$	0.755	2
6	0.01	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 90^\circ 25^\circ \rangle]_s$	0.104	2
	0.05	$[-\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, \langle 85^\circ 20^\circ \rangle, \langle 0^\circ 20^\circ \rangle]_s$	0.470	2
	0.1	$[\langle 90^\circ 25^\circ \rangle, -\langle 15^\circ 45^\circ \rangle, -\langle 85^\circ 35^\circ \rangle]_s$	0.783	2

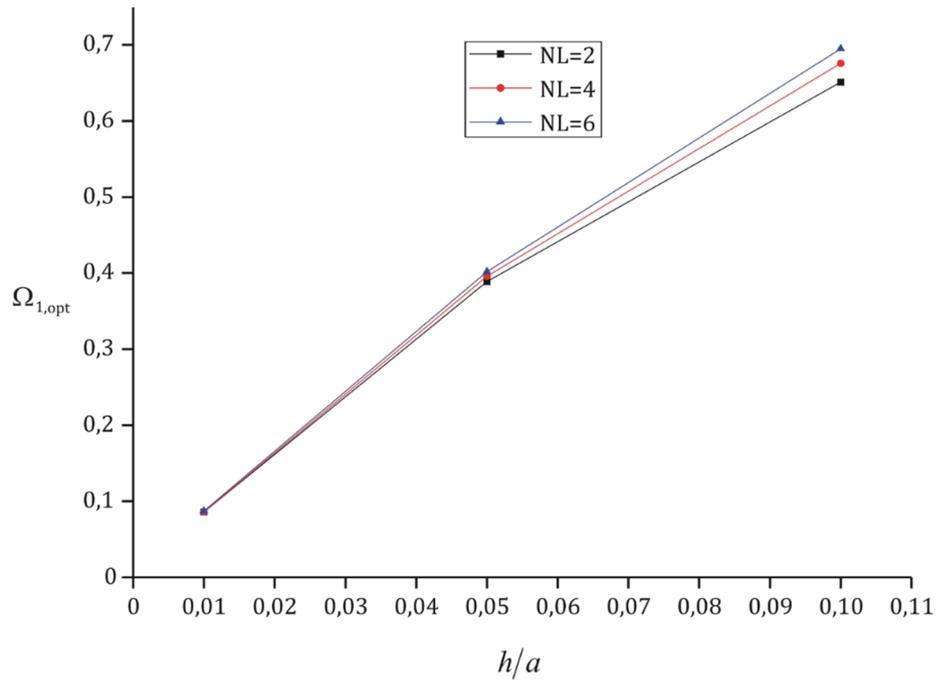


Figure 7.23 : Influence du rapport d'épaisseur sur le paramètre fréquence fondamentale maximale pour une plaque circulaire SCRIV encadrée en Graphite/Epoxy.

Tableau 7.21 : Différences des paramètres de fréquences fondamentales maximales en fonction de NL , h/a , et le type de matériau.

h/a	NL	Matériaux		
		E-Glass/Epoxy	Graphite/Epoxy	Boron/Epoxy
0.05	2-4	0.4 %	1.76 %	2.38 %
	4-6	0.4 %	1.49 %	1.91 %
0.1	2-4	0.87 %	3.69 %	5.16 %
	4-6	0.86 %	2.73 %	3.57 %

Comme illustré dans le tableau 7.21, les différences des paramètres de fréquences fondamentales maximales augmentent lorsque le rapport d'épaisseur et le rapport E_1/E_2 sont augmentés et ils diminuent lorsque le nombre de couches est augmenté.

Conclusions et perspectives

La formulation et l'évaluation des modèles éléments finis pour l'analyse des structures constituent l'un des axes de recherche importants de la modélisation des solides et des structures. C'est dans cet esprit, que notre travail se situe et se veut une étude de nature théorique et numérique, relative à la présentation d'un modèle d'éléments finis consacré à l'analyse vibratoire des structures de types plaques composites stratifiées à rigidité variable. Le travail effectué apporte plusieurs solutions aux problèmes de vibrations des plaques circulaires composites à rigidité variable en se basant sur la théorie du premier ordre des plaques où les effets de cisaillement transversal et inertie de rotation sont prises en compte. Les fréquences de vibrations et les modes propres sont déterminés à l'aide de la version- p de la méthode des éléments finis. Un élément- p quadrilatéral courbé est développé pour les vibrations des plaques modérément épaisses. À l'aide de ses côtés courbés, cet élément permet de modéliser la forme géométrique exacte de la plaque circulaire. La définition géométrique correcte de cet élément est formulée par les fonctions "mapping". Ces fonctions permettent de calculer les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque dans la plaque à partir de ses coordonnées locales. Les fonctions de forme hiérarchiques pour l'élément- p quadrilatéral sont obtenues en fonction des polynômes orthogonaux de Legendre. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en appliquant l'équation de Lagrange.

L'application de matériaux composites dans l'aéronautique et structures navales se développe rapidement. La technologie et les techniques de fabrication des structures composites sont également en évolution. Ceci exigerait des approches de conception innovantes pour bénéficier pleinement des propriétés directionnelles des matériaux composites renforcés par des fibres. Dans cette thèse, la conception de SCRIV a été étudiée pour le cas des vibrations. Une procédure d'optimisation a été étendue aux problèmes de vibrations des plaques stratifiées composites à rigidité variable. La procédure d'optimisation couche par couche est expliquée et utilisée par combinaison avec la version- p pour déterminer la fréquence fondamentale maximale et la disposition optimale des fibres correspondante des plaques circulaires SCRIV pour trois types de

matériaux composites en fonction de plusieurs paramètres physiques, géométriques, et conditions aux limites.

Les résultats obtenus concordent avec ceux disponibles dans la littérature en considérant les cas des plaques isotropes et composites à rigidité constante. Plusieurs exemples ont été traités pour déterminer l'influence des différents paramètres géométriques et physiques sur les vibrations et la solution optimale des plaques épaisses. Ce travail nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

1. La théorie de Reissner-Mindlin est valable pour modéliser la cinématique dans les plaques stratifiées composites à rigidité variable modérément épaisses à un haut degré d'exactitude.
2. La convergence monotone et uniforme est vérifiée en augmentant le degré du polynôme p . La convergence des solutions est assurée par l'élément- p quadrilatéral courbé avec des résultats qui s'accordent avec les solutions disponibles dans la littérature.
2. Une analyse de vibration des plaques composites à rigidité variable par l'élément- p quadrilatéral courbé est assurée par notre code de calcul.
3. Les effets des propriétés des matériaux composites et les conditions aux limites sur la fréquence fondamentale en fonction des angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 sont étudiés. Le matériau Boron/Epoxy donne des paramètres de fréquences fondamentales supérieures à E-Glass/Epoxy et Graphite/Epoxy.
4. Les angles d'orientation des fibres $\langle T_0|T_1 \rangle$ et les séquences d'empilement des plis conduisent à des changements dans les formes des modes d'un stratifié constitué de fibres curvilignes.
5. la méthode d'optimisation couche par couches est numériquement efficace et pratique pour optimiser le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées à rigidité variable et déterminer la solution optimale.
6. L'étude paramétrique en termes de la géométrie, conditions aux limites, et propriétés des matériaux composites montrent que la fréquence fondamentale maximale d'une plaque composite à rigidité variable augmente ou diminue en fonction de ces paramètres. Aussi, la disposition optimale des fibres de la plaque change en fonction de ces paramètres.

Les travaux réalisés dans ce mémoire de thèse donnent lieu à plusieurs perspectives de recherche, dont nous pouvons citer :

- Utiliser des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.
- Etudier les vibrations non-linéaires des plaques circulaires composites à rigidité variable.
- Etendre le concept de stratifié à rigidité variable à la conception de plaques circulaires SCRIV pour maximiser la charge de flambement.

Références bibliographiques

- Abdalla, M.M., and Gürdal Setoodeh, (2007).
Design of variable stiffness composite panels for maximum fundamental frequency using lamination parameters.
Composite Structures 81; 283–291.
- Abouhamze, M., and Shakeri, M., (2007).
Multi-objective stacking sequence optimization of laminated cylindrical panels using a genetic algorithm and neural networks.
Composite Structures 81(2); 253–263.
- Adali, S., and Verijenko, V.E., (2001).
Optimum stacking sequence design of symmetric hybrid laminates undergoing free vibrations.
Comput Struct. 54; 131–138.
- Akhavan, H., and Ribeiro, P., (2011).
Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers.
Composite Structures 93; 3040–3047.
- Apalak, M.K., Yildirim, M., and Ekici, R., (2008).
Layer optimisation for maximum fundamental frequency of laminated composite plates for different edge conditions.
Compos Sci Technol. 68; 537–550.
- Autio, M., (2000).
Determining the real lay-up of a laminate corresponding to optimal lamination parameters by genetic search.
Struct Multidisc Optim. 20(4); 301–310.
- Babuska, I., Szabo, B.A., and Katz, I.N., (1981).
The p-version of the finite element method.
SIAM J. Numer. Anal. 18, pp. 515-545.
- Babuska, I., and Szabo, B.A., (1982).
On the rates of convergence of the finite element method.
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, pp. 323-341.
- Babuska, I., and Suri, M., (1990).
The p- and hp-versions of the finite element method.
An overview", Comput. Methods Appl. Mech. Eny. 80, pp. 5-26.
- Ball, N.R., Sargent, P.M., and Ige, D.O., (1993).
Genetic algorithm representations for laminate layups.
Artif Intell Eng. 8(2); 99–108.

- Bardell, N.S., (1991).
Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method.
Journal of Sound and Vibration 151 (2); 263–289.
- Bardell, N.S., (1992).
The free vibration of skew plates using the hierarchical finite element method.
Computers and Structure 45 (5–6); 841–874.
- Bardell N.S., Langley, R.S., Dunsdon, J.M. and Aglietti, G.S., (1999).
An h-p finite element vibration analysis of open conical sandwich panels and conical sandwich frusta.
Journal of Sound and Vibration 226 (2); 345–377.
- Barth, J.R., (1990).
Fabrication of Complex Composite Structures Using Advanced Fiber Placement Technology
35th International SAMPE Symposium, Vol. 35, Book 1, pp.710-720.
- Bergan, P.G., and Wang, X., (1984).
Quadrilateral plate bending elements with shear deformations.
Computers and Structures 19, 25–34.
- Belalia, S.A., and Houmat, A., (2010).
Non-linear free vibration of elliptic sector plates by a curved triangular p-element.
Thin-Walled Structures 48 ; 316–326.
- Belalia, S.A (2011)
Développement d'éléments finis courbés version-*p* pour les plaques de formes géométriques arbitraires.
Thèse de doctorat, Tlemcen, Algérie.
- Belalia, S.A., and Houmat, A., (2012).
Nonlinear free vibration of functionally graded shear deformable sector plates by a curved triangular p-element.
European Journal of Mechanics A/Solids 35, 1-9.
- Bert, C.W., (1976).
Dynamics of composite and sandwich panels, Parts I and II.
The Shock and Vibration Digest 8(11), 15–24.
- Bert, C.W., (1979).
Recent research in composite and sandwich plate dynamics.
The Shock and Vibration Digest 11(10), 13–23.
- Bert, C.W., (1982).
Research on dynamics of composite and sandwich plates.
The Shock and Vibration Digest 14(10), 17–34.

- Bert, C.W., (1985).
Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, part IV.
The Shock and Vibration Digest 17(11), 3–25.
- Bert, C.W., (1991).
Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V: part I.
The Shock and Vibration Digest 23(6), 3–14.
- Bert, C.W., (1991).
Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V: part II.
The Shock and Vibration Digest 23(7), 9–21.
- Berthelot, J.M., (1992)
Matériaux composites : Comportement Mécaniques et analyse des structures
Paris: Masson.
- Beslin, O., and Nicolas, J., (1997).
Hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions.
Journal of Sound and Vibration 202 (5); 633–655.
- Bullock, F., Kowalski, S., and Young, R., (1990).
Automated prepreg tow-placement for composite structures.
In: *35th International SAMPE Symposium, vol. 35, Anaheim, CA; 734–43.*
- Beckers, P., (1970).
Modèles d'éléments finis de membranes cinématiquement admissibles et codéformables : triangles, quadrilatères et barres.
Rapport interne SF-9, LTAS.
- Callahan, K.J., and Weeks, G.E., (1992).
Optimum design of composite laminates using genetic algorithm.
Compos Eng. 2(3); 149–160
- Campion, S.D., and Jarvis, J.L., (1996).
An investigation of the implementation of the p-version finite element method.
Finite Elements in Analysis and Design 23; 1-21.
- Carnevali, P., Morris, R.B., and Taylor, G., (1993).
New basis functions and computational procedures for p-version of finite element analysis.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 36, pp. 3759-3779.
- Chladni, E.F.F., (1802).
Die Akustik . Leipzig.
- Coons, S.A., (1964).
Surfaces for computer-aided design of space forms.
Project MAC, Design Division, Department of Mechanical Engineering, MIT.

Coons, S.A., (1987).
Méthode matricielle.
Hermes, Paris.

Cook, R.D., Malkus, D.S., and Plesha, M.E., (1989).
Concepts and Applications of Finite Element Analysis.
John Wiley & Sons, Inc., New York, 3rd Ed.

Davidon, W.C., (1991)
Variable metric method for minimization.
SIAM J Opt. 1(17).

Dawe, D.J., (1978).
Finite Strip Models for Vibration of Mindlin Plates.
Journal of Sound and Vibration 59; 441-452.

Dey, Shephard, S., and Flaherty, J.E., (1997).
Geometry representation issues associated with p-version finite element computation.
Computer Methods in applied Mechanics and Engineering; 150: 39-55.

Diaconu, C.G., Sato, M., and Sekine, H., (2002)
Layup optimization of symmetrically laminated thick plates for fundamental frequencies using lamination parameters.
Struct Multidiscip Optim. 24; 302–311.

Dickinson, S.M., and Di Blasio, A., (1986).
On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh–Ritz method for the study of the exural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates.
Journal of Sound and Vibration 108, 51–62.

Doong, J. L., LEE, C., and FUNG, C.P., (1991).
Vibration and stability of laminated plates based on a modified plate theory.
Journal of Sound and Vibration 151, 193–201.

Duffy, K.J., and Adali, S., (1991)
Optimal fibre orientation of antisymmetric hybrid laminates for maximum fundamental frequency and frequency separation.
Journal of Sound and Vibration 146(2); 181–190.

Düster, A., Bröker, H., and Rank, E., (2001).
The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures.
Int. J. Numer. Methods Eng. 52, 673-703.

Enders, M., and Hopkins, P., (1991)
Developments in the fiber placement process.
In: 36th International SAMPE Symposium, Vol. 36, San Diego, CA; pp. 778–790.

Enrique, H.J., Weavers, P.M., and Friswell, M.I., (2007)
Optimization of long anisotropic laminated fiber composite panels with T-shaped stiffeners.
AIAA Journal 45(10); 2497–2509.

Evans, D., Vaniglia, M., and Hopkins, P., (1989).
Fiber placement process study.
In: 34th International SAMPE Symposium, vol. 34, Reno, NV; pp. 1822–1833.

Farshi, B., Rabiei, R., (2007).
Optimum design of composite laminates for frequency constraints.
Composite Structures 81(4); 587–597.

Fraeijs De Veubeke, B., Sander, G., and Beckers, P., (1972).
Dual analysis by finite elements. Linear and non-linear applications.
Technical report AFFDL-TR-72-93, Wright-Patterson Air Force Base, LTAS internal.

Fukunaga, H., and Vanderplaats, G.N., (1991).
Stiffness optimization of orthotropic laminated composites using lamination parameters.
AIAA Journal 29; 641–646.

Fukunaga, H., Sekine, H., and Sato, M., (1994).
Optimal design of symmetric laminated plates for fundamental frequency.
Journal of Sound and Vibrations 171(2); 219–229.

Fukunaga, H., and Chou, T.W., (1998).
Simplified design techniques for laminated cylindrical pressure vessels under stiffness and strength constraints.
Journal Compos Mater. 22; 1156–1169.

Ghiasi, H., Pasini, D., and Lessard, L., (2008).
Layer separation for optimization of composite laminates.
In: Proceedings of the ASME 2008 international design engineering technology conference and computers and information in engineering conference IDETC/CIE, Brooklyn, New York; August 3–6, 2008.

Ghiasi, H., Pasini, D., and Lessard, L., (2009).
Optimum stacking sequence design of composite materials Part I: Constant stiffness design.
Composite Structures 90; 1–11.

Ghiasi, H., Fayazbakhsh, K., Pasini, D., and Lessard, L., (2010)
Optimum stacking sequence design of composite materials Part II: Variable stiffness design
Composite Structures 93; 1–13.

Gordon, W.J., (1971).

Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation.

SLAM, J. Numer. Anal. 8(1), pp. 158-177.

Gordon, W.J., and Hall, C.A., (1973a).

Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation.

Int. J. Numer. Methods Eny. 7, pp. 461-477, 1973.

Gordon, W.J., and Hall, C.A., (1973b).

Transfinite element methods: blending-function interpolation over arbitrary curved element domains.

Numer. Math. 21; pp. 109-129.

Grenestedt, J.L., and Gudmundson, P., (1993).

Layup optimization of composite material structures.

In: Pedersen P, editor. Optimal design with advanced materials. Amsterdam: Elsevier Science; pp. 311-336.

Gui, W., and Babuska, I., (1986).

The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension - Part I: The error analysis of the p-version.

Numerische Mathematik, Vol. 49, pp. 577-612.

Gürdal, Z., and Olmedo, R., (1992)

Composite laminates with spatially varying fiber orientations: variable stiffness panel concept.

In: Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 33rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, vol. 2, Dallas, TX; pp. 798-808, AIAA 92-2472.

Gürdal, Z., and Olmedo, R., (1993)

In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientation: variable stiffness concept,

AIAA Journal 31; 751-758.

Gürdal, Z., Haftka, R.T., and Nagendra, S., (1994).

Genetic algorithm for the design of laminated composite panels.

SAMPE Journal 30; 207-218.

Gürdal, Z., Haftka, R.T., and Hajela, P., (1999).

Design and Optimization of Laminated Composite Materials.

Wiley-Interscience. Jones, R.M., Mechanics of Composite Materials, second ed. Taylor & Francis.

Haftka, R.T., and Gürdal, Z., (1992).

Elements of structural optimization.

Third ed. Kluwer.

Hammer V.B., Bendsoe, M.P., and Pedersen, P., (1997)

Parametrization in laminate design for optimal compliance.

Int J Solid Struct. 34(4); 415–434.

Hinton, E., (1988).

Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells.

Swansea, U.K.: Pineridge Press.

Honda, S., and Narita, Y., (2011).

Vibration design of laminated fibrous composite plates with local anisotropy induced by short fibers and curvilinear fibers.

Composite Structures 93; 902–910.

Honda, S., and Narita, Y., (2012).

Natural frequencies and vibration modes of laminated composite plates reinforced with arbitrary curvilinear fiber shape paths.

Journal of Sound and Vibration 331; 180–191.

Honda, S., Kumagai, T., Tomihashi, K., and Narita, Y., (2013)

Frequency maximization of laminated sandwich plates under general boundary conditions using layerwise optimization method with refined zigzag theory.

Journal of Sound and Vibration 332; 6451–6462.

Houmat, A., (1997a).

Hierarchical finite element analysis of the vibration of membranes.

Journal of Sound and Vibration 201 (4); 465–472.

Houmat, A., (1997b).

An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations.

Journal of Sound and Vibration 206 (2); 201–215.

Houmat, A., (2001a).

A sector Fourier p -element for free vibration analysis of sectorial membranes.

Computers and Structures 79; 1147–1152.

Houmat, A., (2001b).

A sector Fourier p -element applied to free vibration analysis of sectorial plates.

Journal of Sound and Vibration 243 (2); 269–282.

Houmat, A., (2006).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p -version of the finite-element method.

Thin-Walled Structures 44; 943–951.

Houmat, A., (2008).

In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p -element.

Thin-Walled Struct. 46; 103-111.

Houmat, A., (2012).

Nonlinear free vibration of a composite rectangular specially-orthotropic plate with variable fiber spacing.
Composite Structures 94; 3029–3036.

Houmat, A., (2013).
Nonlinear free vibration of laminated composite rectangular plates with curvilinear fibers.
Composite Structures 106; 211–224.

Hu, H.T., and Tsai, W.K., (2009).
Maximization of Fundamental Frequencies of Axially Compressed Laminated Plates Against Fiber Orientation.
AIAA JOURNAL Vol. 47, No. 4, April 2009.

Huang, J., and Haftka, R.T., (2005).
Optimization of fiber orientations near a hole for increased load-carrying capacity of composite laminates.
Struct Multidiscip Optim. 30(5); 335–341.

Hyer, M., and Lee, H., (1991)
The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes.
Composite Structures 18; 239–261.

Hyer, M., and Charette, R., (1991)
Use of curvilinear fiber format in composite structure design.
AIAA Journal 29(6); 1011–1015.

Kam, T.Y., and Chang, R.R., (1993).
Design of laminated composite plates for maximum buckling load and vibration frequency.
Comput Methods Appl Mech Eng. 106(1–2); 65–81.

Kameyama, M., and Fukunaga, H., (2007).
Optimum design of composite plate wings for aeroelastic characteristics using lamination parameters.
Comput Struct. 85(3–4); 213–224.

Kapania, R.K., and Raciti, S., (1989).
Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part II: vibrations and wave propagation.
American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 27, 935–946.

Katz, I.N., Peano, A.G., and Rossow, M.P., (1978).
Nodal variables for complete conforming finite elements of arbitrary polynomial order.
Comp. Math, Appl. 4, pp. 85–112.

Kere, P., and Koskli, J., (2002).

Multicriterion optimization of composite laminates for maximum failure margins with an interactive descent algorithm.
Struct Multidisc Optim. 23; 436–447.

Kere, P., Lyly, M., and Koski, J., (2003).
Using multicriterion optimization for strength design of composite laminates.
Composite Structures 62; 329–333.

Kim, C.S., (1988).
The vibration of beams and plates studied using orthogonal polynomials.
Ph.D. Thesis, University of Western Ontario, Canada.

Kirfilyfalvi. G. and Szabo. B., (1997).
Quasi-regional mapping for the p-version of the finite element method.
Finite Elements in Analysis and Design 27; 85-97.

Kogiso, N., Watson, L.T., Gürdal, Z., and Haftka, R.T., (1994).
Genetic Algorithm with local improvement for composite laminate design + D2.
Struct Optim. 7(4); 207–218.

Kollar, L.P. and Springer, G. (2003).
Mechanics of composite structures
Cambridge University Press.

Lam, K.Y., Liew, K.M., and Chow, S.T., (1992).
Use of two-dimensional orthogonal polynomials for vibration analysis of circular and elliptical plates.
Journal of Sound and Vibration 154; 261-269.

Langley, P.T., (1999).
Finite element modeling of Tow-Placed variable-stiffness composite laminates.
MSc Thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University.

Le Riche, R., and Haftka, R.T., (1993).
Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by generic algorithm.
AIAA Journal 31; 951–969.

Le Riche, R., and Gaudin, J., (1998).
Design of dimensionally stable composites by evolutionary optimization.
Composite Structures 41; 97–111.

Legrand, X., Kelly, D., Crosky, A., and Crepin, D., (2006).
Optimisation of fibre steering in composite laminates using a genetic algorithm.
Composite Structures 75(1–4); 524–531.

Leissa, A.W., (1969).
Vibration of Plates.
NASA SP -169 Washington, D.C.: Office of Technology Utilization.

- Leissa, A.W., (1977).
Recent research in plate vibrations: classical theory.
The Shock and Vibration Digest 9(10), 13–24.
- Leissa, A.W., (1977).
Recent research in plate vibrations: complicating effects.
The Shock and Vibration Digest 9(11), 21–35.
- Leissa, A.W., (1981).
Plate vibration research, 1976–1980: classical theory.
The Shock and Vibration Digest 13(9), 11–22.
- Leissa, A.W., (1981).
Plate vibration research, 1976–1980: complicating effects.
The Shock and Vibration Digest 13(10), 19–36.
- Leissa, A.W., (1987).
Recent research in plate vibrations, 1981–1985, Part II: complicating effects.
The Shock and Vibration Digest 19(3), 10–24.
- Leissa, A.W., and Martin, A.F., (1990).
Vibration and buckling of rectangular composite plates with variable fiber spacing.
Composite Structures 14; 339–357.
- Leung, A.Y.T., and Chan, J.K.W., (1998).
Fourier p-element for the analysis of beams and plates.
Journal of Sound and Vibration 212; 179–185.
- Levinson, M., (1980).
An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates.
Mechanics Research Communications 7, 343–350.
- Liew, K.M., (1990a).
The development of 2-D orthogonal polynomials for vibration of plates.
Ph.D. Thesis, National University of Singapore.
- Liew, K.M. and Lam, K.Y., (1990b).
Application of two-dimensional orthogonal plate function to flexural vibration of skew plates.
Journal of Sound and Vibration 139; 241–252.
- Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., (1995).
Research On Thick Plate Vibration: A Literature Survey.
Journal of Sound and Vibration 180(1); 163–176.
- Lin, C.C., and Lee, Y.J., (2004).
Stacking sequence optimization of laminated composite structures using genetic algorithm with local improvement.

Composite Structures 63; 339–45.

Liu, B., and Haftka, R.T., (2001).

Composite wing structural design optimization with continuity constraints.

In: Proceedings of 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, structural dynamics, and materials conference, Seattle, WA.

Lo, K.H., Christensen, R.M., and Wu, E.M., (1977).

A higher-order theory of plate deformation, part 1: homogeneous plates/part 2: laminated plates.

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 44, 663–676.

Lopes, C.S., Gürdal Z., and Camanho, P.P., (2008).

Variable-stiffness composite panels: Buckling and first-ply failure improvements over straight-fibre laminates

Computers and Structures 86; 897–907.

Massard, T.N., (1984).

Computer sizing of composite laminates for strength.

J Reinf Plast Compos. 3; 300–345.

Miki, M., (1982).

Material design of composite laminates with required in-plane elastic properties.

In: Hayashi T, Kawata K, Umekawa S. editors. Progress in science and engineering of composites, ICCM-IV, Tokyo; pp. 1725–1731.

Miki, M., (1985).

Material design of fibrous laminated composites with required flexural Stiffness.

In: Mechanical behavior of materials-IV, proceeding of the fourth international conference; pp. 387–400.

Miki, M., and Sugiyama, Y., (1993).

Optimum design of laminated composite plates using lamination parameters.

AIAA Journal 31(5); 921–922.

Mindlin, R.D., (1951).

Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates.

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 18, 31–38.

Mizusawa, T., and Leonard J.W., (1990).

Vibration and buckling of plates with mixed boundary conditions.

Engineering Structures 12, 285–290.

Mostafa, M.A., Setoodeh, S., and Gürdal, Z., (2007).

Design of variable stiffness composite panels for maximum fundamental frequency using lamination parameters.

Composite Structures 81; 283–291.

Murthy, M.V.V., (1981).

An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate.
NASA Technical Paper 1903.

Nagendra, S., Haftka, R.T., and Gürdal, Z., (1992).

Stacking sequence optimization of simply supported laminates with stability and strain constraints.

AIAA Journal 30(8); 2132–2137.

Nagendra, S., Kodiyalam, S., Davis, J., and Parthasarathy, V., (1995).

Optimization of tow fiber paths for composite design.

In: Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 36th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, New Orleans, LA; pp. 1031–1041, AIAA 95-1275.

Naik, G.N., Gopalakrishnan, S., and Ganguli, R., (2008)

Design optimization of composites using genetic algorithms and failure mechanism based failure criterion.

Composite Structure 83; 354–367.

Nallim, L.G., and Grossi, R.O., (2008).

Natural frequencies of symmetrically laminated elliptical and circular plates.
International Journal of Mechanical Sciences 50; 1153– 1167.

Nanni, J., (1971).

Das eulersche knickproblem unter berucksichtigung der querkräfte.

Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik 22, 156–185.

Narita, Y., Fukuchi, K., and Zhao X., (2002).

Vibration analysis of shear-deformable circular and elliptical laminated composite plates.

JSME International Journal 45; 113– 120.

Narita, Y., (2003).

Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates.

Journal of Sound and Vibration 263; 1005–1016.

Narita, Y., and Turvey, G.J., (2004).

Maximizing the buckling loads of symmetrically laminated composite rectangular plates using a layerwise optimization approach.

Journal of Mechanical Engineering Science 218 (Part C); 681–691.

Narita, Y., and Hodgkinson, J.M., (2005).

Layerwise optimisation for maximising the fundamental frequencies of point-supported rectangular laminated composite plates.

Composite Structures 69; 127–135.

Narita, Y., and Robinson, P., (2006).

Maximizing the fundamental frequency of laminated cylindrical panels using layerwise optimization.

International Journal of Mechanical Sciences 48; 1516–1524.

Narita, Y., (2006).

Maximum frequency design of laminated plates with mixed boundary conditions.

International Journal of Solids and Structures 43; 4342–4356.

Nelson, R.B., and Lorch, D.R., (1974).

A refined theory for laminated orthotropic plates.

American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 41, 177–183.

Ngo-Cong, D., Mai-Duy, N., Karunasena, W., and Tran-Cong, T., (2011).

Free vibration analysis of laminated composite plates based on FSDT using one-dimensional IRBFN method.

Computers and Structures 89; 1–13.

Nguyen-Van, H., Mai-Duy, N., Tran-Cong, T., (2008).

Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element.

Journal of Sound and Vibration 313; 205–223.

Nocedal, J., and Wright S-J., (1999).

Numerical optimization, Springer.

Noor, A.K. and Burton W.S., (1989).

Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates.

Applied Mechanics Reviews 42, 1–13.

Oden, J.T., Demkowicz, L., Rachowicz, W., and Westermann, T.A., (1989).

Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 2: A posteriori error estimation.

Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 77, pp. 113-180.

Olmedo, R., and Gürdal, Z., (1993).

Buckling response of laminates with spatially varying fiber orientations.

In: Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, La Jola, CA; pp. 2261–2269, AIAA 93-1567.

Park, J.H., Hwang, J.H., Lee, C.S., and Hwang, W., (2001).

Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms.

Composite Structures 52(2); 217–231.

Parthasarathy, V.N., Kodyalam, S., and Davis, J.E., (1995).

Optimization of Tow Fiber Paths for Composite Design.

Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 36th SDM Conference, April 10-13, 1995, New Orleans, LA, pp.1031-1041.

- Peano., A.G., (1975).
Hierarchies of conforming finite elements.
D.Sc. Thesis, Washington University, St. Louis, MO.
- Potgeiter, E., and Stander, N., (1998).
The genetic algorithm applied to stiffness maximization of laminated plates: review and comparison.
Struct Optim. 15; 221–229.
- Rao, A.M., Ratnam, C., Srinivas, J., and Premkumar, A., (2002).
Optimum design of multilayer composite plates using simulated annealing.
Proc Inst Mech Eng, Part L: J Mater. 216(3); 193–197.
- Rajendran, I., and Vijayarangan, S., (2001).
Optimal design of a composite leaf spring using genetic algorithms.
Composite Structures 79; 1121–229.
- Rayleigh, L., (1877).
Theory of Sound, Volume 1.
London: Macmillan; reprinted 1945 by Dover, New York.
- Reddy, J.N., (1984).
A simple higher-order theory for laminated composite plates.
Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 51, 745–752.
- Reddy, J.N., (1985).
A review of the literature on finite-element modelling of laminated composite plates and shells.
The Shock and Vibration Digest 17(4), 3–8.
- Reddy, J.N., (1997)
Mechanics of laminated composite plates- Theory and analysis.
Boca Raton, FL: CRC Press.
- Reissner, E., (1945).
The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate.
Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics 12, 69–77.
- Ribeiro, P., and Akhavan, H., (2012)
Nonlinear vibrations of variable stiffness composite laminated plates.
Composite Structures 94; 2424–2432.
- Ribeiro, P., (2012)
Nonlinear free periodic vibrations of variable stiffness composite laminated plates.
Nonlinear Dyn. 70; 1535–1548.
- Ritz, W., (1909).
Methode zur losung gewisser variations probleme der mathematischen physik.

Journal für Reine und Angewandte Mathematik 135, 1–61. *Über eine neue.*

Rossow., M.P., and Katz., I.N., (1978).

Hierarchical finite elements and precomputed arrays.

Int. J. Numer. Methods Eng. 12, pp. 977–999.

Sadagopan, D., and Pitchumani R., (1998).

Application of genetic algorithms to the optimal tailoring of composite materials.

Compos Sci Technol. 58; 571–589.

Saleh Yazdani, Ribeiro, P., and Rodrigues, J.D., (2014).

A p -version layerwise model for large deflection of composite plates with curvilinear fibers.

Composite Structures 108; 181–190.

Sargent, P.M., Ige D.O., and Ball, R.N., (1995).

Design of laminate composite layups using genetic algorithms.

Eng Comput. 11(2); 59–69.

Senthilnathan, N.R., (1989).

A simple higher-order shear deformation plate theory.

Ph.D. Thesis, National University of Singapore.

Setoodeh, S., (2005).

Optimal Design of Variable-Stiffness Fiber-Reinforced Composites Using Cellular Automata.

PhD Thesis. Blacksburg, Virginia.

Setoodeh, S., Abdalla, M.M., and Gürdal, Z., (2006).

Design of variable-stiffness laminates using lamination parameters.

Composites: Part B 37; 301–309.

Setoodeh, S., Gürdal, Z., and Watson, L.T., (2006).

Design of variable-stiffness composite layers using cellular automata.

Comput Methods Appl Mech Eng. 195(9–12); 836–851.

Sivakumar, K., Iyengar, N.G.R., and Deb, K., (1998).

Optimum design of laminated composite plates with cut-outs using a genetic algorithm.

Composite Structures 42(3); 265–279.

Sivakumar, K., Iyengar, N.G.R., and Kalyanmoy, D., (1999).

Optimum design of laminated composite plates undergoing large amplitude oscillations.

Appl Compos Mater. 6; 87–98

Sivakumar, K., Iyengar, N.G.R., and Deb, K., (2000).

Optimization of composite laminates with cutouts using genetic algorithm.

Eng Optim Variable Metric Complex Search Meth. 32(5).

Srinivas, S., and Rao, A.K., (1970).

Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates.

International Journal of Solids and Structures 6, 1463–1481.

Soni S. R. and Amba-Rao C.L., (1975).

On radially symmetric vibrations of orthotropic non-uniform disks including shear deformation.

Journal of Sound and Vibration 42:57-63.

Soremekun, G., Gürdal, Z., Haftka, R.T., and Watson, L.T., (2001).

Composite laminate design optimization by genetic algorithm with generalized elitist selection.

Composite Structures 79; 131–143.

Szabo, B.A., (1985).

Probe theoretical manual - Release 1.0.

Noetic Technologies Corp., St. Louis, MO.

Szabo., B.A., and Babuska., I., (1990).

Finite Element Analysis.

Wiley-Interscience, New York, 1991.

Szabo, B.A. and Babuska, I., (1991).

Finite element analysis.

John Wiley and Sons, 367 pages.

Szabo, B.A., (1991).

Reliability in finite element computations.

Proceedings of the 18th MSC European User's Conference 1991, 18 pages.

Tatting, B.F., (1998).

Analysis and design of variable stiffness composite cylinders.

PhD Thesis. Blacksburg: Virginia Tech.

Tatting, B.F., and Gürdal, Z., (2001).

Analysis and design of tow-steered variable stiffness composite laminates.

In: American helicopter society hampton roads chapter, structure specialists' meeting. Williamsburg (VA).

Tatting, B.F., and Gürdal, Z., (2002).

Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates.

NASA/CR-2002-211919.

Tatting, B.F., and Gürdal, Z., (2003).

Automated finite element analysis of elastically tailored plates.

NASA/CR-2003-212679.

Thai, H.T., and Choi, D.H., (2013)

A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates.
Composite Structures 101; 332–340.

Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., (1961).
Theory of Elastic Stability.
New York: McGraw-Hill.

Todoroki, A., Watanabe, K., and Kobayashi, H., (1995).
Application of genetic algorithms to stiffness optimization of laminated composite plates with stress concentrated open holes.
JSM E Int J A: Mech Mater Eng. 38(4); 458–464.

Todoroki, A., Sasada, N., and Miki, M., (1996).
Object-oriented approach to optimize composite laminated plate stiffness with discrete ply angles.
J Compos Mater. 30(9); 1020–1041.

Todoroki, A., Haftka, R.T., (1998).
Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy.
Compos B: Eng. 29; 277–285.

Topal, U., and Uzman, U., (2006).
Optimum design of laminated composite plates to maximize fundamental frequency using MFD method.
Struct Eng Mech. 24(4); 479–491.

Topal, U., and Uzman, U., (2008).
Frequency optimization of laminated composite angle-ply plates with circular hole.
Materials and Design 29; 1512–1517.

Tsai, S.W., and Pagano, N.J., (1968).
Invariant properties of composite materials.
In: Composite materials workshop; pp. 62–71.

Venkataraman, S., and Haftka, R.T., (1999).
Optimization of composite panels a-review.
In: Proceedings of the 14th annual technical conference of the American society of composites, Dayton, OH.

Venkatesan, S., and Kunukkasseril, V.X., (1978).
Free vibration of layered circular plates.
Journal of Sound and Vibration 60; 511-534.

Waldhart, C., (1996).
Analysis of tow-placed, variable-stiffness laminates.
MSc Thesis. Blacksburg: Virginia Tech.

- Whitney, J.M., and Pagano, N.J., (1970).
Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates.
American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics 37, 1031–1036.
- Wittrick, W.H., (1987).
Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on mindlin's plate theory.
Journal of Applied Mechanics, 23; 441–464.
- Woo K.S., Hong, C.H., Basu, P.K., and Seo, C.G., (2003).
Free vibration of skew Mindlin plates by p -version of F.E.M.
Journal of Sound and Vibration 268 (4), 637–656.
- Wu, T.Y., Wang, Y.Y., and Liu, G.R., (2002).
Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule.
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191; 5365–5380.
- Xiang, Y., (1993).
The numerical developments in solving the buckling and vibration of Mindlin plates.
Ph.D. Thesis, the University of Queensland.
- Yang, P.C., Norris, C.H., and Stavsky, Y., (1966).
Elastic wave propagation in heterogeneous plates.
International Journal of Solids and Structures 2, 665–684.
- Zienkiewicz, O.C., Irons, B.M., Scott, F.C., and Campbell, J.S., (1970).
Three-dimensional stress analysis.
Proc. IUTAM Symp. High Speed Computing of Elastic Structures, Liege, pp. 413-431.
- Zienkiewicz., O.C., Kelly., D.W., J.P., Gago, S.R., and Babuska. I. (1981).
Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement.
Proc. MAFELAP, Brunel University, pp. 313-346.
- Zienkiewicz, O.C., GAGO, J.P., and KELLY, D.W., (1983).
The hierarchical concept in finite element analysis.
Computers and Structures, Vol. 16, N° 1-4, pp. 53-65.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., (1994).
The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Programs.
McGraw-Hill Book Company Europe.

A.1. Matrice de rigidité [K]

A.1.1. Les composantes de la matrice de rigidité élémentaire flexionnelle dues aux rotations $[K_\theta]$ sont données par :

$$[K_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & K_{3\alpha-1,3\beta} \\ 0 & K_{3\alpha,3\beta-1} & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{22} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.2})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.3})$$

$$K_{3\alpha,3\beta-1} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.4})$$

$$K_{3\alpha,3\beta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{11} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.5})$$

A.1.2. La matrice de rigidité élémentaire flexionnelle due au cisaillement transversal possède la forme suivante :

$$[K_C] = \begin{bmatrix} K_{3\alpha-2,3\beta-2} & K_{3\alpha-2,3\beta-1} & K_{3\alpha-2,3\beta} \\ K_{3\alpha-1,3\beta-2} & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & K_{3\alpha-1,3\beta} \\ K_{3\alpha,3\beta-2} & K_{3\alpha,3\beta-1} & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Ses composantes sont données par :

$$K_{3\alpha-2,3\beta-2} = k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{44} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + A_{55} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.7})$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta-1} = k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{44} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta + A_{45} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.8})$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta} = -k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{55} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta + A_{45} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.9})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-2} = k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{44} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} N_\alpha + A_{45} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} N_\alpha \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.10})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_s A_{44} N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.11})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_s A_{45} N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.12})$$

$$K_{3\alpha,3\beta-2} = k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{44} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + A_{45} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.13})$$

$$K_{3\alpha,3\beta-1} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_s A_{45} N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.14})$$

$$K_{3\alpha,3\beta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_s A_{55} N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.15})$$

3. Les composantes de la matrice masse $[M]$ sont données par :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3\alpha-1,3\beta-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Où

$$M_{3\alpha-2,3\beta-2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_1 N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.17})$$

$$M_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_3 N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.18})$$

$$M_{3\alpha,3\beta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_3 N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.19})$$

A.2. Intégration numérique

Dans certains cas particuliers, on peut calculer analytiquement les intégrales présentées dans les éléments des matrices de rigidité et masse. Par conséquent, ces intégrales sont calculées numériquement en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre. Celle-ci donne une approximation de l'intégrale sous forme d'une somme pondérée des valeurs de l'intégrale en un certain nombre de points de l'élément appelés points d'intégration.

Les intégrales dans les équations ci-dessus peuvent être mis dans la forme suivante :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{A.13})$$

L'application de la quadrature de Gauss donne :

$$I = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{A.14})$$

Les scalaires w_i et w_j sont appelés poids d'intégration, et les coordonnées ξ_i et η_j sont les coordonnées des m points d'intégration dans l'élément de référence.

Résumé

La conception d'un stratifié composite consiste à sélectionner le meilleur arrangement des matériaux constitutifs à l'intérieur du stratifié. Dans ce travail, la conception des plaques stratifiées composites circulaires épaisses à rigidité variable (SCRV) composées de fibres curvilignes décalées pour la fréquence fondamentale maximale est faite en adoptant la procédure d'optimisation couche par couche et la version-p de la méthode des éléments finis. Les variables de conception sont prises pour un ensemble d'angles d'orientation des fibres dans les couches symétriques.

La version-p de la méthode des éléments finis basée sur la théorie du premier ordre des plaques (FSDT) est présentée comme une méthode d'analyse pour déterminer les fréquences de vibration libre des plaques composites circulaires à rigidité variable. La plaque circulaire est modélisée par un élément-p quadrilatéral courbé. La fonction de mélange permet de modéliser exactement la forme géométrique de la plaque circulaire. Les fonctions de forme de l'élément-p quadrilatéral sont exprimées en fonction des polynômes orthogonaux de Legendre. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange.

Deux programmes sont élaborés, un programme pour le calcul des fréquences et modes propres, et l'autre pour la détermination de la conception optimale des plaques circulaires SCRV pour la fréquence fondamentale maximale. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, la haute précision, et l'efficacité de l'élément-p courbé développé. Plusieurs exemples sont traités. Les effets des propriétés des matériaux composites, conditions aux limites, nombre de couches, et rapport d'épaisseur sur les fréquences fondamentales maximales et les dispositions des fibres associées sont montrés et discutés.

Mots clés :

Plaque stratifiée composite circulaire ; théorie de déformation de cisaillement du premier ordre ; fibres curvilignes ; vibration libre ; élément-p quadrilatéral courbé ; optimisation couche par couche.

Abstract

Designing a composite laminate consists of selecting the best arrangement of materials inside the laminate. In this work, the design of thick variable stiffness composite circular laminated plates with shifted curvilinear fibers for the maximum fundamental frequency is carried out using the layerwise optimization technique and the p-version of the finite element method. The design variables are taken to be a set of fiber orientation angles in the symmetrical layers.

The p-version of the finite element based on the first-order shear deformation theory of plates is presented as a method of analysis to determine the frequencies of variable stiffness circular plates. The circular plate is modeled as a curved quadrilateral p-element. The blending function method models accurately the geometry of the circular plate. The shape functions of the quadrilateral p-element are expressed in terms of the Legendre orthogonal polynomials. The equations of motion are obtained using Lagrange's equations.

Two programs are developed, one for calculating the frequencies and mode shapes, and the other for determining the optimal design of variable stiffness circular plates for the maximum fundamental frequency. The results compared with those available in the literature show fast convergence, high accuracy, and effectiveness of the developed curved p-element. Several examples are treated. The effects of properties of composite materials, boundary conditions, number of layers, and thickness ratio on the maximum fundamental frequencies and associated disposition of fibers are shown and discussed.

Keywords:

Laminated composite circular plate; first-order shear deformation theory, curvilinear fibers; free vibration; curved quadrilateral p-element; layerwise optimization.

ملخص

لتصميم الصفائح المركبة يجب تحديد أفضل ترتيب للمواد داخل الصفيحة. في هذا العمل، تم تصميم صفائح مركبة دائرية سميكة ذات صلابة متغيرة تتألف من ألياف منحنية من أجل أقصى تردد أساسي وذلك من خلال اعتماد طريقة التصميم طبقة بطبقة والإصدار-p من طريقة العناصر المنتهية. يتم أخذ متغيرات التصميم كمجموعة من زوايا اتجاه الألياف في طبقات متناظرة.

يتم تقديم الإصدار-p من طريقة العناصر المنتهية على أساس نظرية الدرجة الأولى للصفائح كوسيلة من وسائل التحليل لتحديد ترددات الاهتزاز الحر للصفائح المركبة الدائرية ذات الصلابة المتغيرة. الصفيحة الدائرية مثلت من قبل العنصر-p الرباعي المنحني. وظيفة الاختلاط تمكن من تمثيل نموذج هندسة الصفيحة الدائرية بدقة. دالات الشكل للعنصر-p الرباعي معبرة بكثيرات الحدود المتعامدة ل Legendre. معادلات الحركة الاهتزازية مُتحصل عليها بتطبيق معادلات Lagrange.

تم تطوير برنامجين حسابيين، برنامج لحساب الترددات والوسائط، والآخر لتحديد التصميم الأمثل للصفائح الدائرية المركبة ذات الصلابة المتغيرة لأقصى قدر من التردد الأساسي. النتائج المحصل عليها والمقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في المراجع بينت سرعة التقارب، الدقة وفعالية العنصر-p المنحني المستعمل. عدة أمثلة عُولجت مع تحديد تأثير الخصائص المختلفة للمواد المركبة، الشروط الحدية للصفائح، عدد الطبقات ونسبة السماكة على الترددات الأساسية القصوى وتموضع الألياف المرتبطة ومناقشتها.

الكلمات الرئيسية:

الصفائح الدائرية المركبة؛ نظرية الدرجة الأولى للصفائح؛ اهتزازات الصفائح؛ ألياف منحنية؛ عنصر-p رباعي منحني؛ التصميم طبقة بطبقة.

Ahmed Guenanou and Abderrahim Houmat*

Free vibration analysis of symmetrically laminated composite circular plates with curvilinear fibers

DOI 10.1515/secm-2014-0340

Received September 27, 2014; accepted May 4, 2015

Keywords: curved hierarchical square finite element; curvilinear fiber; first-order shear deformation theory; free vibration; laminated composite circular plate.

Abstract: The free vibration analysis of symmetrically laminated composite circular plates with curvilinear fibers was performed using the first-order shear deformation theory along with a curved hierarchical square finite element. The blending function method was used to describe accurately the geometry of the circular plate. The hierarchical shape functions were constructed from Legendre orthogonal polynomials. The element stiffness and mass matrices were integrated numerically by means of the Gauss-Legendre quadrature. The equations of motion were derived using Lagrange's method. Results for the fundamental frequency were obtained for clamped and soft simply supported laminated composite circular plates with e-glass, graphite, and boron curvilinear fibers in epoxy matrices. The element was validated by means of the convergence test and comparison with published data for isotropic and laminated composite circular plates with rectilinear fibers. Contour plots of frequency as a function of fiber orientation angles for laminated composite circular plates with curvilinear fibers are presented. The fiber material and boundary conditions are shown to influence the distribution of frequency throughout the design space. Frequency curves as a function of fiber orientation angles for the first five modes of laminated composite circular plates with curvilinear fibers are also presented. They reveal that none of the first five modes of clamped and soft simply supported laminates is affected by crossing but modes 3 and 4 of clamped graphite/epoxy and boron/epoxy laminates are affected by veering.

1 Introduction

Modern technology requires high-performance materials that combine high stiffness, high strength, and low weight. Composite materials provide the best combination of these properties. Layers with high-stiffness and high-strength fibers can be combined in different orientations to create a composite laminate that can be tailored to specific dynamical loading conditions.

In conventional laminated composite plates with rectilinear fibers, each layer has fiber orientation that remains constant throughout the layer. In laminated composite plates with curvilinear fibers, the fiber orientation varies throughout each layer. Curvilinear fibers allow the laminate to be accommodated to a wider range of applications than rectilinear fibers.

Circular plates find many applications in modern technology. Various researchers have investigated the free vibration of circular plates. Leissa [1] summarized a literature review on the vibration of plates of various shapes including plates of circular plan form. Soni and Amba-Rao [2] studied the free axisymmetric vibration of orthotropic circular plates with linearly varying thickness using the first-order shear deformation theory and the Chebyshev collocation technique. Venkatesan and Kunukkasseril [3] analyzed the free vibration of layered circular plates using the first-order shear deformation theory in polar coordinates. Narita et al. [4] used the first-order shear deformation theory and the Ritz method to study the free vibration of moderately thick laminated composite circular and elliptical plates. Wu et al. [5] investigated the free vibration of circular plates using the generalized differential quadrature rule. Nallim and Grossi [6] used the Ritz method and the classical thin plate theory to solve the vibration problem of symmetrically laminated composite elliptical and circular plates with several complicating

*Corresponding author: Abderrahim Houmat, Department of Mechanical Engineering, University of Tlemcen, BP 213, Tlemcen 13000, Algeria, e-mail: ahoumat@hotmail.com

Ahmed Guenanou: Department of Mechanical Engineering, University of Tlemcen, BP 213, Tlemcen 13000, Algeria

effects. Nguyen-Van et al. [7] investigated the free vibration of laminated composite plate/shell structures using a four-node quadrilateral finite element and the first-order shear deformation theory. Ngo-Cong et al. [8] studied the vibration of laminated composite plates of various shapes using the first-order shear deformation theory and a one-dimensional integrated radial basis function network method.

Few researchers applied the hierarchical finite element method to linear and nonlinear vibrations of laminated composite plates with curvilinear fibers. Honda and Narita [9] presented an analytical method for determining natural frequencies and vibration modes of laminated plates having curvilinear reinforcing fibers. Akhavan and Ribeiro [10] developed a hierarchical finite element based on the third-order shear deformation theory for the linear vibration of laminated composite rectangular plates with curvilinear fibers. Ribeiro and Akhavan [11] analyzed the nonlinear vibration of laminated composite rectangular plates using the first-order shear deformation theory and a hierarchical finite element. Houmat [12] developed a hierarchical finite element based on thin plate theory for the nonlinear vibration of symmetrically and antisymmetrically laminated composite rectangular plates with curvilinear fibers. To the best of the authors' knowledge, solutions to the free vibration of symmetrically laminated composite circular plates with curvilinear fibers are not available in the literature.

In this paper, a curved hierarchical square finite element based on the first-order shear deformation theory is developed for the free vibration of symmetrically laminated composite circular plates with curvilinear fibers. The blending function method is used to model accurately the geometry of the circular plate. The shape functions are derived from Legendre orthogonal polynomials. The fiber orientation is chosen from an appropriate range due to manufacturing constraint. This limitation arises from the fact that the curvature of fibers should not exceed a specific value to prevent the occurrence of fiber kinking [13]. Results for the fundamental frequency are obtained for clamped and soft simply supported laminated composite circular plates. The convergence of frequency as a function of the polynomial order is studied. A comparison is made with published data for isotropic and laminated composite circular plates with rectilinear fibers. Contour plots of frequency as a function of fiber orientation angles for laminated composite circular plates with curvilinear fibers are shown. The effects of fiber material and boundary conditions on frequency are explored. Frequency curves as a function of fiber orientation angles for the first five modes

of laminated composite circular plates with curvilinear fibers are also shown. The existence of mode crossing and mode veering is investigated.

2 Laminated composite circular plate with curvilinear fibers

The creation of a laminated composite circular plate with curvilinear fibers begins with the description of a reference fiber path. This reference fiber path will serve as a basis for creating other fiber paths that together will form a single layer.

2.1 Reference fiber path

A laminated composite circular plate with curvilinear fibers requires an appropriate method for describing the fiber orientation at any point in a single layer. The plate has radius a . The fiber orientation angle θ is defined as a linear function of x between two angles T_0 and T_1 along the x -axis, where T_0 denotes the fiber orientation angle at the center and T_1 denotes the fiber orientation angle at a distance $a/\sqrt{2}$ from the center. The orientation of a single curvilinear fiber path is symbolized by $\langle T_0/T_1 \rangle$. The reference fiber path and orientation are shown in Figure 1. The reference fiber path equation $y(x)$ and orientation $\theta(x)$ are as follows:

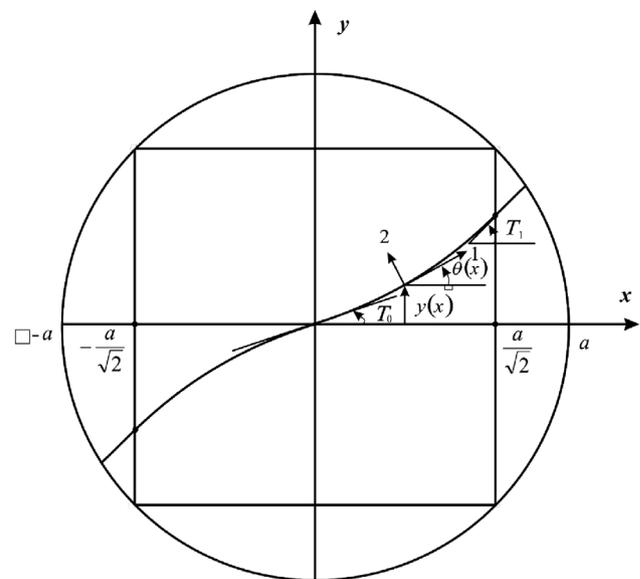


Figure 1: Reference fiber path and orientation.

Q1: Please check and confirm that bold, italic and roman have been applied correctly in equations and text throughout

$$y(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}(T_1-T_0)} \left\{ -\ln[\cos(T_0)] + 2\ln[\cos(T_1)] - \ln \left[\cos \left(-T_0 + 2T_1 + \frac{\sqrt{2}(T_1-T_0)}{a} x \right) \right] \right\} & \text{for } -\frac{2a}{\sqrt{2}} \leq x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}(T_1-T_0)} \left\{ -\ln[\cos(T_0)] + \ln \left[\cos \left(T_0 - \frac{\sqrt{2}(T_1-T_0)}{a} x \right) \right] \right\} & \text{for } -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}(T_1-T_0)} \left\{ \ln[\cos(T_0)] - \ln \left[\cos \left(T_0 + \frac{\sqrt{2}(T_1-T_0)}{a} x \right) \right] \right\} & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}(T_1-T_0)} \left\{ \ln[\cos(T_0)] - 2\ln[\cos(T_1)] + \ln \left[\cos \left(-T_0 + 2T_1 - \frac{\sqrt{2}(T_1-T_0)}{a} x \right) \right] \right\} & \text{for } \frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{2a}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (1)$$

Q2: Please supply the missing value/ notation within parentheses in the last line of Equation (2): $-\frac{\sqrt{2}}{a}(T_1-T_0)x+T_0+2(T_1-T_0)$ for $\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{2a}{\sqrt{2}}$.

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{a}(T_1-T_0)x+T_0+2(T_1-T_0) & \text{for } -\frac{2a}{\sqrt{2}} \leq x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{a}(T_1-T_0)x+T_0 & \text{for } -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{a}(T_1-T_0)x+T_0 & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{a}(T_1-T_0)x+T_0+2(T_1-T_0) & \text{for } \frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{2a}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{y''(x)}{[1+(y'(x))^2]^{3/2}}, \quad (3)$$

where $y'(x)$ and $y''(x)$ denote the first and second derivatives of $y(x)$ with respect to x .

Equation (3) yields

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{a}(T_1-T_0) \cos \left[T_0 + \frac{\sqrt{2}}{a}(T_1-T_0)x \right]. \quad (4)$$

The rest of fiber paths are defined using the method of shifted paths [13]. In this method, the reference fiber path is used to create a layer. Because tow paths are identical, all that is necessary to model the layer is to duplicate the reference tow path and shift the duplicate tow paths the correct distance along the y -axis. A tow placement machine can be used to spatially change the fiber orientation within a single layer.

2.2 Fiber curvature constraint

A laminated composite circular plate with curvilinear fibers is created by curving the tow paths. To prevent a tow from kinking, the magnitude of the largest curvature in any layer must not exceed a specified maximum value. The fiber paths of a layer made of shifted fibers are identical to the reference fiber path. It is therefore sufficient to apply the fiber curvature constraint only to the reference fiber path. The curvature κ of a function $y(x)$ is

At each location along the reference fiber path, the curvature κ is required not to exceed the maximum allowable curvature of 3.28 m^{-1} [13]. The design space for a circular layer made of shifted fibers and of radius $a=0.5 \text{ m}$ is shown in Figure 2. The fiber curvature constraint is

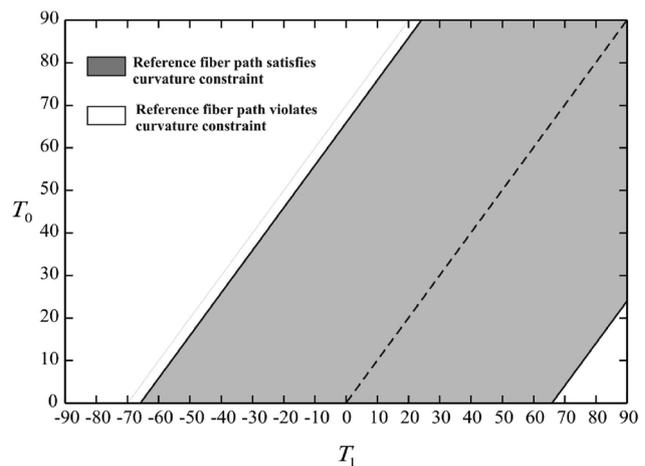


Figure 2: $[\mp(30^\circ/60^\circ)]_s$ layer with shifted curvilinear fibers.

satisfied everywhere in the gray region. The orientation angles T_0 and T_1 are equal along the dashed line.

3 Formulation

3.1 Elastic parameters

The stresses and strains of the k th layer in the principal material directions under plane stress conditions are related by

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}^{(k)}. \quad (5)$$

The material stiffnesses Q_{ij} are defined as

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (6)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (7)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (8)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (9)$$

$$Q_{44} = G_{13} \quad (10)$$

$$Q_{55} = G_{23}, \quad (11)$$

where

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{E_1}. \quad (12)$$

The stresses of the k th layer in local and global coordinates are related by

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)}. \quad (13)$$

The stresses and strains of the k th layer in global coordinates are related by

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)}, \quad (14)$$

where the material stiffnesses \bar{Q} are written in terms of $m=\cos(\theta)$ and $n=\sin(\theta)$ as

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \quad (15)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \quad (16)$$

$$\bar{Q}_{16} = Q_{11}m^3n - Q_{22}mn^3 - 2(Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \quad (17)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \quad (18)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})n^3m + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \quad (19)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \quad (20)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \quad (21)$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn \quad (22)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2. \quad (23)$$

3.2 Shape functions

The laminated composite circular plate is modeled as one curved hierarchical square finite element as shown in Figure 3. The coordinates of a vertex i are symbolized by X_i, Y_i . The sides 1-2, 2-3, 3-4, and 4-1 are numbered 1, 2, 3, and 4, respectively.

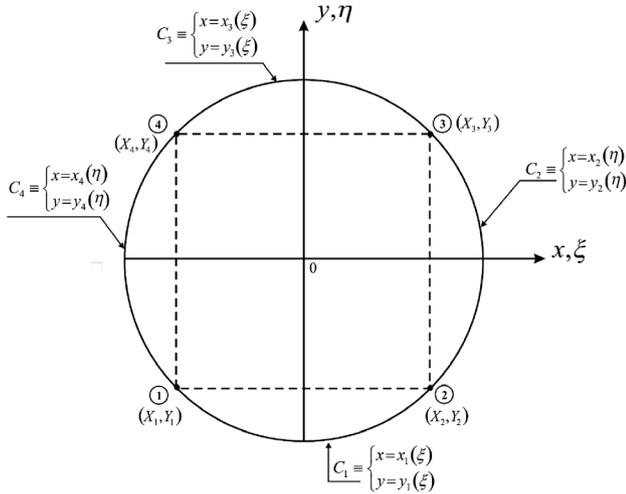


Figure 3: The curved hierarchical square finite element.

Using the hierarchical square finite element, the transverse displacement and rotations of cross-sections about the x and y axes will be expressed as

$$w = \sum_{\beta=1}^{(p+1)^2} q_{3\beta-2}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \quad (24)$$

$$\theta_x = \sum_{\beta=1}^{(p+1)^2} q_{3\beta-1}(t) N_{\beta}(\xi, \eta) \quad (25)$$

$$\theta_y = \sum_{\beta=1}^{(p+1)^2} q_{3\beta}(t) N_{\beta}(\xi, \eta), \quad (26)$$

where t is time and p is the polynomial order.

The shape functions N_{β} are

$$N_{\beta} = g_k(\xi) g_l(\eta) \quad (k, l=1, 2, \dots, p+1), \quad (27)$$

where the subscript β is defined as

$$\beta = l + (k-1)(p+1). \quad (28)$$

The shape functions $g_i(\xi)$ ($i=1, 2, \dots, p+1$) are

$$g_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (29)$$

$$g_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (30)$$

$$g_{j+1}(\xi) = \int_{-1}^1 P_{j-1}(\zeta) d\zeta \quad (j=2, 3, \dots, p), \quad (31)$$

where $P_{j-1}(\xi)$ is the Legendre orthogonal polynomial of order $j-1$.

3.3 Stiffness and mass matrices

Using the blending function method, the curved sides of the hierarchical square finite element will be expressed in the parametric forms

$$x = x_i(\xi), \quad y = y_i(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (i=1, 3) \quad (32)$$

$$x = x_i(\eta), \quad y = y_i(\eta) \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (i=2, 4), \quad (33)$$

where the subscript i denotes the side number.

The mapping functions of the curved hierarchical square finite element are

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} [(1-\eta)x_1(\xi) + (1+\xi)x_2(\eta) + (1+\eta)x_3(\xi) \\ & + (1-\xi)x_4(\eta)] \\ & - \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta)X_1 + (1+\xi)(1-\eta)X_2 \\ & + (1+\xi)(1+\eta)X_3 + (1-\xi)(1+\eta)X_4] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} y(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} [(1-\eta)y_1(\xi) + (1+\xi)y_2(\eta) + (1+\eta)y_3(\xi) \\ & + (1-\xi)y_4(\eta)] \\ & - \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta)Y_1 + (1+\xi)(1-\eta)Y_2 \\ & + (1+\xi)(1+\eta)Y_3 + (1-\xi)(1+\eta)Y_4]. \end{aligned} \quad (35)$$

The derivatives with respect to local and global coordinates are related by

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

The Jacobian matrix is

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

The coefficients of \mathbf{J} are

$$\begin{aligned} J_{1,1}(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} \left[(1-\eta) \frac{dx_1}{d\xi} + x_2(\eta) + (1+\eta) \frac{dx_3}{d\xi} - x_4(\eta) \right] \\ & + \frac{1}{4} [(1-\eta)X_1 - (1-\eta)X_2 - (1+\eta)X_3 + (1+\eta)X_4] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} J_{1,2}(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} \left[(1-\eta) \frac{dy_1}{d\xi} + y_2(\eta) + (1+\eta) \frac{dy_3}{d\xi} - y_4(\eta) \right] \\ & + \frac{1}{4} [(1-\eta)Y_1 - (1-\eta)Y_2 - (1+\eta)Y_3 + (1+\eta)Y_4] \end{aligned} \quad (39)$$

$$J_{2,1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[-x_1(\xi) + (1+\xi) \frac{dx_2}{d\eta} + x_3(\xi) + (1-\xi) \frac{dx_4}{d\eta} \right] + \frac{1}{4} [(1-\xi)X_1 + (1+\xi)X_2 - (1+\xi)X_3 - (1-\xi)X_4] \quad (40)$$

$$J_{2,2}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[-y_1(\xi) + (1+\xi) \frac{dy_2}{d\eta} + y_3(\xi) + (1-\xi) \frac{dy_4}{d\eta} \right] + \frac{1}{4} [(1-\xi)Y_1 + (1+\xi)Y_2 - (1+\xi)Y_3 - (1-\xi)Y_4]. \quad (41)$$

Equation (36) gives

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

where

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{2,2} & -J_{1,2} \\ -J_{2,1} & J_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

The determinant of \mathbf{J} is

$$|\mathbf{J}| = J_{1,1}J_{2,2} - J_{1,2}J_{2,1}. \quad (44)$$

The strains, transverse displacement, and rotations in global coordinates are related by

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (45)$$

$$\varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (46)$$

$$\gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (47)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \quad (48)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x. \quad (49)$$

The strain energy U of the curved hierarchical square finite element is

$$U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 - 2D_{12} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + 2D_{16} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta,$$

$$-2D_{26} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + k_s A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + k_s A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 + 2k_s A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) \Big] |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (50)$$

where k_s is the transverse shear correction factor and

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j=4, 5) \quad (51)$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz \quad (i, j=1, 2, 6). \quad (52)$$

The kinetic energy T of the curved hierarchical square finite element is

$$T = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial t} \right)^2 \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta. \quad (53)$$

The constants of inertia are

$$I_1 = \rho h \quad (54)$$

$$I_3 = \frac{\rho h^3}{12}, \quad (55)$$

where h and ρ are the thickness and density, respectively.

Using Lagrange's method, the equations of motion will be obtained as

$$[\mathbf{K}_{\alpha,\beta} - \omega^2 \mathbf{M}_{\alpha,\beta}] \mathbf{q}_\beta = \mathbf{0} \quad (\alpha, \beta=1, 2, \dots, p+1), \quad (56)$$

where

$$\mathbf{K}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} K_{3\alpha-2,3\beta-2} & K_{3\alpha-2,3\beta-1} & K_{3\alpha-2,3\beta} \\ K_{3\alpha-1,3\beta-2} & K_{3\alpha-1,3\beta-1} & K_{3\alpha-1,3\beta} \\ K_{3\alpha,3\beta-2} & K_{3\alpha,3\beta-1} & K_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{M}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} M_{3\alpha-2,3\beta-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3\alpha-1,3\beta-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3\alpha,3\beta} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

The coefficients of the block stiffness and mass matrices $\mathbf{K}_{\alpha,\beta}$ and $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}$ are given in Appendix 1.

Applying boundary conditions, Equation (56) will take the form

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (59)$$

The symmetric generalized eigenvalue problem in Equation (59) can be solved for the frequencies using known routines.

4 Results

Results are presented for the fundamental frequency of isotropic and symmetrically laminated composite circular plates with rectilinear and curvilinear fibers. Clamped and soft simply supported boundary conditions are chosen. The layers are assumed to have identical thicknesses. Results for the non-dimensional frequency parameter $\Omega = \omega a \sqrt{\rho/E_2}$ are presented. The transverse shear correction factor k_s is taken as 5/6. The plate is modeled as one curved hierarchical square finite element. Convergence is achieved by increasing the polynomial order.

4.1 Convergence test and comparison with published data

Because of the unavailability of results for laminated composite circular plates with curvilinear fibers, a comparison is made with published data for isotropic and symmetrically laminated composite circular plates with rectilinear fibers.

Table 1 shows the first five frequency parameters Ω of an isotropic circular plate with $\nu=0.3$. A comparison is made with values from [4]. A fast convergence is seen to occur as the polynomial order p is increased. The comparison of the results obtained with $p=10$ with values from [4] shows excellent agreement.

Table 2 shows the first five frequency parameters Ω of the clamped $[30^\circ, -30^\circ, 30^\circ]$ composite circular plate with $h/a=0.02$. The composite material has the mechanical parameters $E_1=15.4E_2$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.792E_2$, $\nu_{12}=0.3$. A comparison is made with the values from [4]. As can be seen in the table, a fast convergence occurs as the polynomial order p is increased. The results obtained with $p=10$ compare very well with the values from [4].

Table 1: Convergence and comparison of the first five frequency parameters Ω of the clamped isotropic circular plate.

P	1	2	3	4	5
4	0.078	1.196	2.842	2.892	4.278
6	0.062	0.138	0.271	0.287	0.483
8	0.062	0.129	0.214	0.244	0.327
10	0.062	0.128	0.210	0.240	0.309
Reference [4]	0.062	0.128	0.210	0.240	0.307

Table 2: Convergence and comparison of the first five frequency parameters Ω of the clamped laminated composite $[30^\circ, -30^\circ, 30^\circ]$ circular plate.

P	1	2	3	4	5
4	0.169	1.727	2.795	3.479	4.082
6	0.150	0.236	0.405	0.407	0.564
8	0.149	0.215	0.320	0.380	0.475
10	0.148	0.213	0.312	0.377	0.449
Reference [4]	0.149	0.214	0.312	0.377	0.441

Accordingly, subsequent calculations are performed using $p=10$.

4.2 Free vibration analysis

The fundamental frequency parameter Ω is calculated for symmetrically laminated four-layer composite circular plates with E-glass, graphite, and boron fibers in epoxy matrices. The mechanical parameters of composite materials are given in Table 3. The material properties E_m , G_m , and ν_m (for matrix) and E_f , G_f , and ν_f (for fiber) are taken from [14]. The material properties E_1 , E_2 , G_{12} , and ν_{12} are calculated from E_m , G_m , ν_m , E_f , G_f , and ν_f using the rule of mixtures, as described in [15]. The average volume fraction of fiber is taken as 66.7%. It is well known that $G_{13}=G_{12}$, but G_{23} is not necessarily equal to G_{12} ; it can be different. In this work, it is assumed that $G_{12}=G_{13}=G_{23}$. The radius a and thickness h are taken as 0.5 m and 0.005 m, respectively. The symmetrically laminated composite circular plate is symbolized by $[\mp \langle T_0/T_1 \rangle]_s$ or equivalently by $[\langle T_0/T_1 \rangle, -\langle T_0/T_1 \rangle, -\langle T_0/T_1 \rangle, \langle T_0/T_1 \rangle]_s$. The angle T_0 is increased from 0° to 90° and the angle T_1 is increased from -90° to 90° . The increment is taken as 5° .

Figures 4–6 show the contour plots of the frequency parameter Ω for the clamped four-layer laminated composite circular plate. As can be seen in the figures, the dashed lines do not cross the largest and smallest frequency parameters. Thus, the largest and smallest frequency parameters are obtained with curvilinear fibers rather than with rectilinear ones. The largest frequency parameters are calculated for the $[\mp \langle 90^\circ/25^\circ \rangle]_s$ circular

Table 3: Mechanical parameters of composite materials.

Fiber/matrix	E_1/E_2	G_{12}/E_2	G_{13}/E_2	G_{23}/E_2	ν_{12}
E-glass/epoxy	5.2750	0.3735	0.3735	0.3735	0.26
Graphite/epoxy	18.3275	0.3714	0.3714	0.3714	0.25
Boron/epoxy	27.2216	0.3716	0.3716	0.3716	0.25

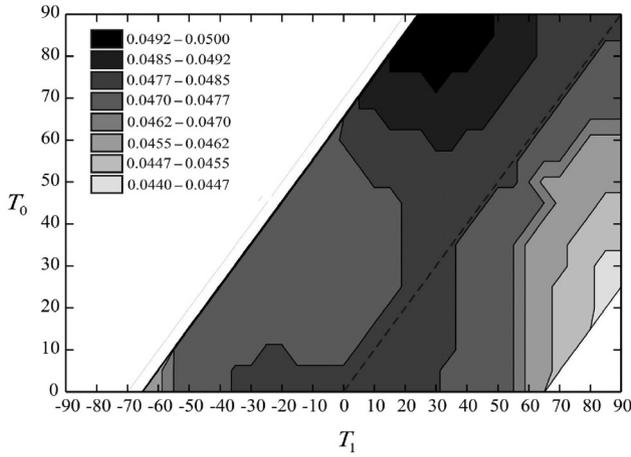


Figure 4: Contour plot of Ω for the clamped E-glass/epoxy $[\mp\langle T_0/T_1 \rangle]_s$ circular laminate.

laminate with E-glass, graphite, and boron fibers as 0.050, 0.085, and 0.102, respectively. The smallest frequency parameters are calculated for the $[\mp\langle 20^\circ/85^\circ \rangle]_s$ circular laminate with E-glass, graphite, and boron fibers as 0.044, 0.070, and 0.083, respectively. The percentage changes are computed for E-glass, graphite, and boron fibers as 14%, 21%, and 23%, respectively.

Figures 7–9 show the contour plots of the frequency parameter Ω of the soft simply supported laminated composite circular plate. In this case, the dashed lines cross the smallest frequency parameters. The dashed line crosses the largest frequency parameters for the sole case of boron/epoxy. This can be explained by the fact that boron/epoxy has the highest E_1/E_2 . The largest frequency parameters are calculated for the $[\mp\langle 5^\circ/70^\circ \rangle]_s$

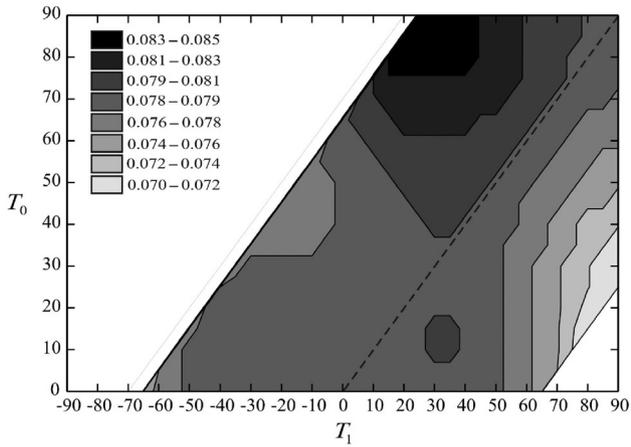


Figure 5: Contour plot of Ω for the clamped graphite/epoxy $[\mp\langle T_0/T_1 \rangle]_s$ circular laminate.

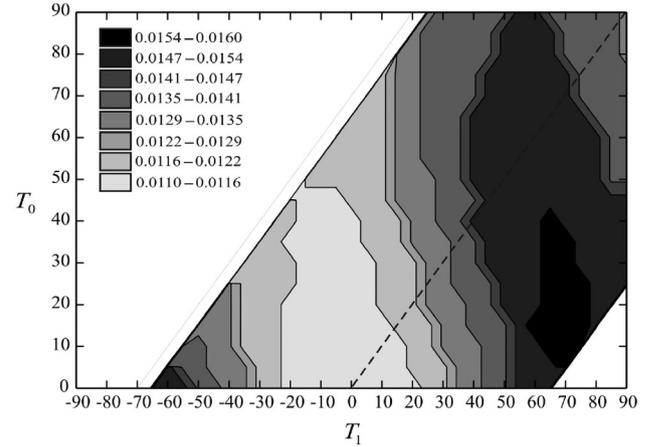


Figure 7: Contour plot of Ω for the soft simply supported E-glass/epoxy $[\mp\langle T_0/T_1 \rangle]_s$ circular laminate.

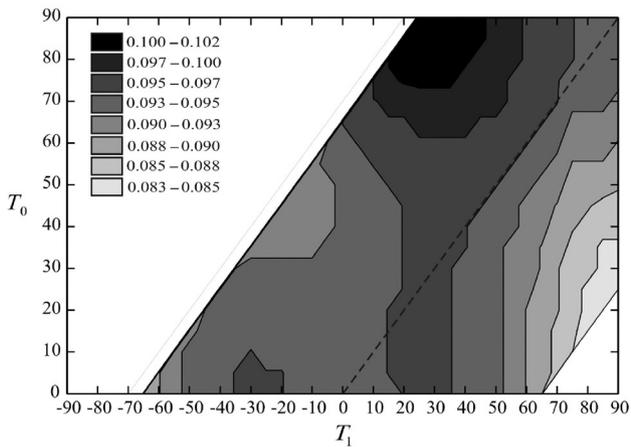


Figure 6: Contour plot of Ω for the clamped boron/epoxy $[\mp\langle T_0/T_1 \rangle]_s$ circular laminate.

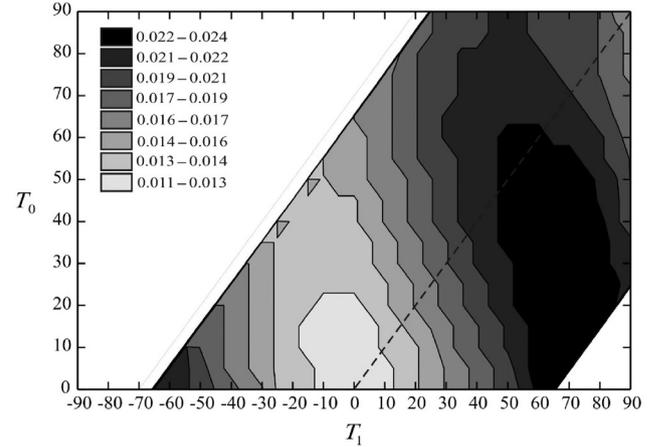


Figure 8: Contour plot of Ω for the soft simply supported graphite/epoxy $[\mp\langle T_0/T_1 \rangle]_s$ circular laminate.

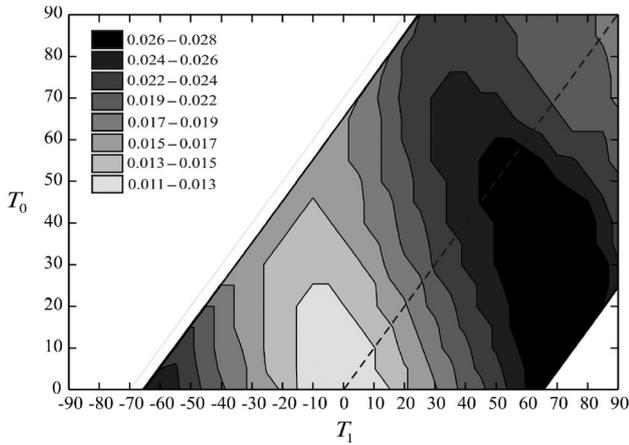


Figure 9: Contour plot of Ω for the soft simply supported boron/epoxy $[\mp(T_0/T_1)]_s$ circular laminate.

circular laminate with E-glass, graphite, and boron fibers as 0.016, 0.024, and 0.028, respectively. The smallest frequency parameter is calculated for the $[\mp(0^\circ/0^\circ)]_s$ circular laminate as 0.011 regardless of the type of composite material. As can be seen in the figures, the fiber material and boundary conditions influence the distribution of frequency throughout the design space.

To investigate the existence of mode crossing and mode veering, the variation of the frequency parameter Ω with the fiber orientation angle T_0 ($T_1=30^\circ$) for the first five modes of clamped and soft simply supported E-glass/epoxy, graphite/epoxy, and boron/epoxy laminated composite circular plates is found. The frequency curves are represented in Figures 10–15. It can be seen that none of the modes is affected by crossing but modes 3 and 4 of clamped graphite/epoxy and boron/epoxy circular laminates are affected by veering.

5 Conclusion

The frequencies of the free vibration of symmetrically laminated composite circular plates with curvilinear fibers are calculated using the first-order shear deformation theory and a curved hierarchical square finite element. Clamped and soft simply supported boundary conditions are chosen. The geometry of the circular laminate is represented accurately using the blending function method. The hierarchical shape functions are derived from Legendre orthogonal polynomials. The equations of motion are obtained using Lagrange’s method. Results for the frequencies of isotropic and laminated composite circular plates with rectilinear fibers illustrate the efficiency of the curved hierarchical square finite element. The contour plots of frequency as a

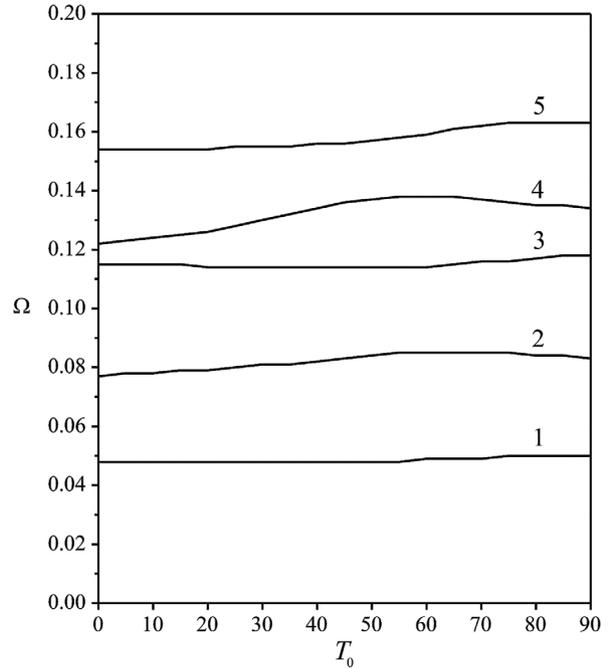


Figure 10: Frequency parameter Ω versus T_0 ($T_1=30^\circ$) for the first five modes of the clamped E-glass/epoxy $[\mp(T_0/T_1)]_s$ circular laminate.

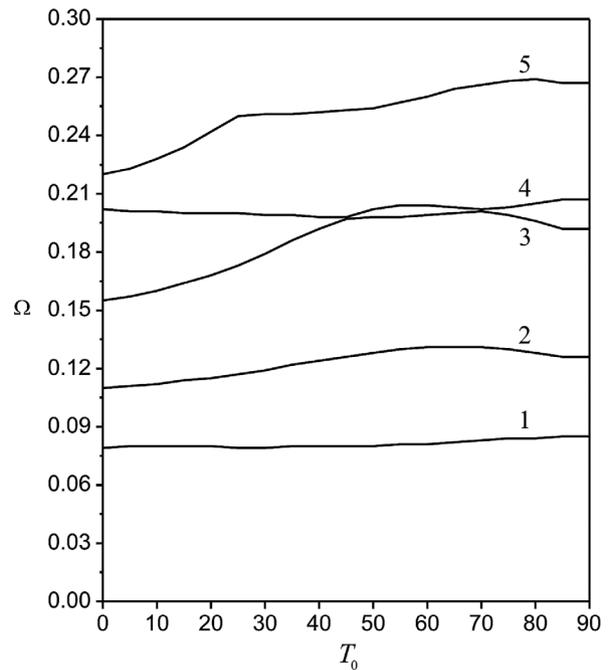


Figure 11: Frequency parameter Ω versus T_0 ($T_1=30^\circ$) for the first five modes of the clamped graphite/epoxy $[\mp(T_0/T_1)]_s$ circular laminate.

function of fiber orientation angles are presented for laminated composite circular plates with curvilinear fibers. The fiber material and boundary conditions are found to affect the distribution of frequency within the design space.

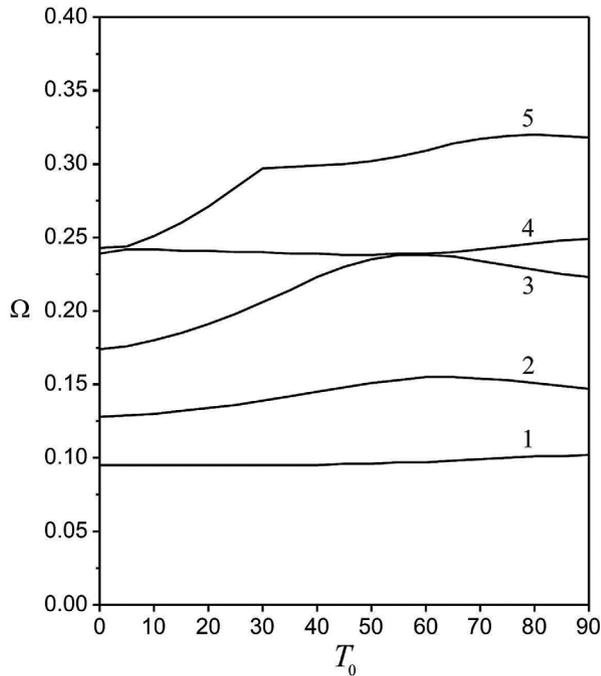


Figure 12: Frequency parameter Ω versus T_0 ($T_1=30^\circ$) for the first five modes of the clamped boron/epoxy $[\mp(T_0/T_1)]_s$ circular laminate.

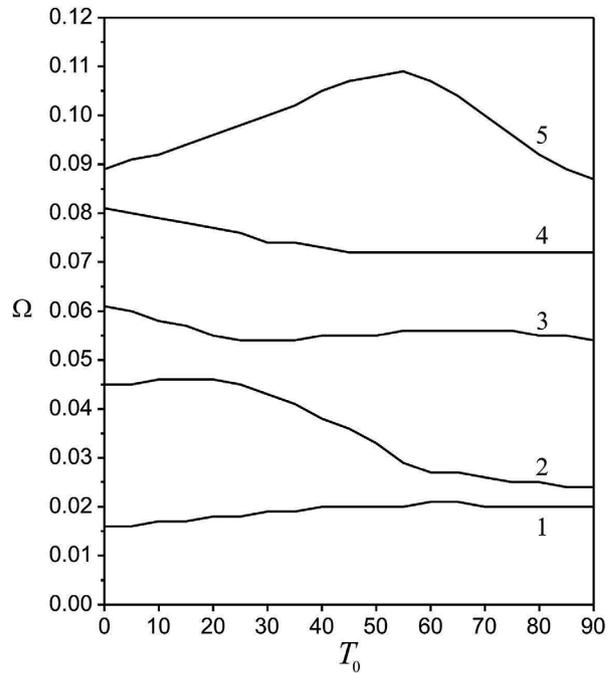


Figure 14: Frequency parameter Ω versus T_0 ($T_1=30^\circ$) for the first five modes of the soft simply supported graphite/epoxy $[\mp(T_0/T_1)]_s$ circular laminate.

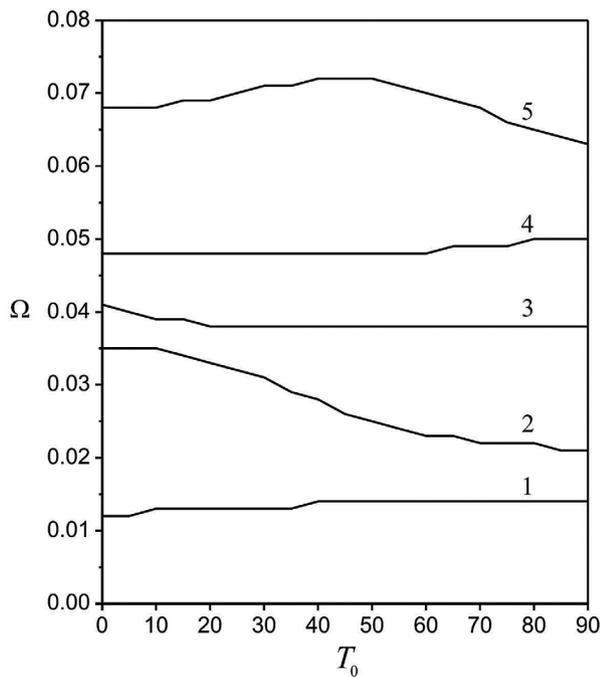


Figure 13: Frequency parameter Ω versus T_0 ($T_1=30^\circ$) for the first five modes of the soft simply supported E-glass/epoxy $[\mp(T_0/T_1)]_s$ circular laminate.

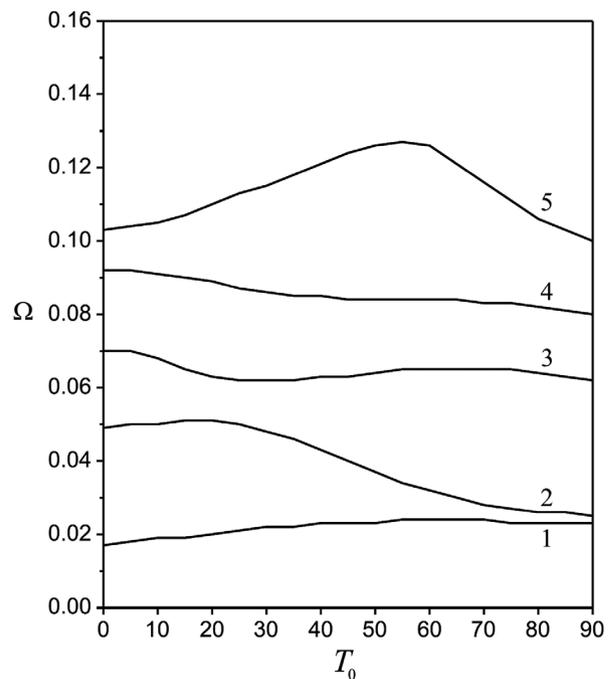


Figure 15: Frequency parameter Ω versus T_0 ($T_1=30^\circ$) for the first five modes of the soft simply supported boron/epoxy $[\mp(T_0/T_1)]_s$ circular laminate.

Frequency curves as function of fiber orientation angles for the first five modes of laminated composite circular plates with curvilinear fibers are also presented. It is shown that

none of the first five modes is affected by crossing but modes 3 and 4 of clamped graphite/epoxy and boron/epoxy circular laminates are affected by veering.

Appendix 1

The coefficients of the block stiffness and mass matrices $\mathbf{K}_{\alpha,\beta}$ and $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}$ are

$$K_{3\alpha-2,3\beta-2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_s \left(A_{44} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + A_{55} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.1})$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta-1} = k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{44} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta + A_{45} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.2})$$

$$K_{3\alpha-2,3\beta} = -k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{55} N_\beta \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} + A_{45} N_\beta \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.3})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-2} = k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{44} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + A_{45} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.4})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{22} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + k_s A_{44} N_\alpha N_\beta \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.5})$$

$$K_{3\alpha-1,3\beta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + k_s A_{45} N_\alpha N_\beta \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.6})$$

$$K_{3\alpha,3\beta-2} = -k_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_{55} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + A_{45} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.7})$$

$$K_{3\alpha,3\beta-1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{12} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + k_s A_{45} N_\alpha N_\beta \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.8})$$

$$K_{3\alpha,3\beta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(D_{11} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + k_s A_{55} N_\alpha N_\beta \right) |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.9})$$

$$M_{3\alpha-2,3\beta-2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_1 N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.10})$$

$$M_{3\alpha-1,3\beta-1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_3 N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.11})$$

$$M_{3\alpha,3\beta} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_3 N_\alpha N_\beta |J| d\xi d\eta, \quad (\text{A.12})$$

where

$$N_\alpha = g_i(\xi) g_j(\eta) \quad (i, j = 1, 2, \dots, p+1) \quad (\text{A.13})$$

The subscript α is defined as

$$\alpha = j + (i-1)(p+1). \quad (\text{A.14})$$

References

- [1] Leissa AW. NASA SP-160, 1969.
- [2] Soni SR, Amba-Rao CL. *J. Sound Vibr.* 1975, 42, 57–63.
- [3] Venkatesan S, Kunukkasseril VX. *J. Sound Vibr.* 1978, 60, 511–534.
- [4] Narita Y, Fukuchi K, Zhao X. *JSME Int. J. C* 2002, 45, 113–120.
- [5] Wu TY, Wang YY, Liu GR. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2002, 191, 5365–5380.
- [6] Nallim LG, Grossi RO. *Int. J. Mech. Sci.* 2008, 50, 1153–1167.
- [7] Nguyen-Van H, Mai-Duy N, Tran-Cong T. *J. Sound Vibr.* 2008, 313, 205–223.
- [8] Ngo-Cong D, Mai-Duy N, Karunasena W, Tran-Cong T. *Comput. Struct.* 2011, 89, 1–13.
- [9] Honda S, Narita Y. *J. Sound Vibr.* 2012, 331, 180–191.
- [10] Akhavan H, Ribeiro P. *Compos. Struct.* 2011, 93, 3040–3047.
- [11] Ribeiro P, Akhavan H. *Compos. Struct.* 2012, 94, 2424–2432.
- [12] Houmat A. *Compos. Struct.* 2013, 106, 211–224.
- [13] Waldhart C. MSc Thesis, VT Blacksburg, 1996.
- [14] Ashton JE, Halpin JC, Petit PH. Technomic Publishing, 1969.
- [15] Houmat A. *Compos. Struct.* 2012, 94, 3029–3036.

Q4:
Please
update
Ref. [1]

Q5:
Please
supply the
book title
and place of
publication
for Ref. [14]

Q3:
Please
supply a
heading to
Appendix 1