



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID-  
TLEMCEM**

**MEMOIRE**

Présenté à:

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Pour l'obtention du diplôme de:

**MASTER EN PHYSIQUE**

Spécialité: Physique Computationnelle

Par:

**Mr Sokrane Mohamed Amin Abdelkadir**

Sur le thème

---

## **Modélisation et simulation numérique dans un milieu poreux**

---

Soutenu publiquement le 11 Juillet 2021 devant le jury composé de:

Mr BENTALHA Zinelabidin	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr AMEUR Djilali	Docteur	Université de Tlemcen	Encadreur
Mme DIB Joanna	Docteur	Université de Tlemcen	Examinatrice

*Laboratoire Automatique Tlemcen (LAT)  
Tlemcen – Algérie*



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فَدَلَّ بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

## *Dédicaces*

*À mes parents et*

*À ma grand-mère et ma tante (Karima)*

*À mes Frères*

*À mes chères amies :*

*H.T. Abderahim, Diden D. Othman,*

*Rafik, F. Cussama, F. Abderahim,*

*B. Meryem*



# **Remerciements**

*Avant tout, je remercie très fort mon Dieu ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.*

*Ce mémoire a été réalisé au sein de l'équipe du Laboratoire de Physique Théorique, Département de Physique, Faculté de sciences, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.*

*En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à mon encadreur Dr AMEUR Djilali pour avoir accepté d'être l'encadreur de ce mémoire et pour son soutien ainsi que sa disponibilité et ses encouragements qui m'ont été très utiles pour mener à bien ce travail, je le remercie très profondément.*

*Je remercie aussi Pr BENTALHA Zinelabidin pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury.*

*Je remercie vivement Dr DIB Joanna pour l'honneur qu'elle m'a fait d'avoir accepté d'examiner mon mémoire.*

*Je remercie également Pr CHIKHAOUI et Dr BRAHMI Badr eddine Nabil pour leur disponibilité et leurs précieux conseils.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude à tous mes enseignants et professeurs pour la formation qu'ils m'ont dispensé pendant toute mes années d'études.*

*Un grand remerciement à mes parents et mes frères pour leur soutien.*

*Je tiens à remercier tous mes amis qui m'ont aidé de loin ou de près dans la réalisation de ce travail.*

*Enfin, j'adresse mes vives reconnaissances à tous les étudiants de Master de ma promotion.*

*Mohamed Amin e*



## ***Table des Matières***

---

<b>I. Chapitre I : Généralités et Synthèse Bibliographique .....</b>	<b>17</b>
I.1 Introduction .....	18
I.2 Généralités sur la convection influencée par l'effet Soret .....	18
I.2.1 Convection naturelle, forcée et mixte .....	18
I.2.2 L'effet Soret ou Ludewig .....	19
I.2.3 Intérêt pratique et industriel de l'effet Soret .....	20
I.3 Généralités sur les milieux poreux .....	21
I.3.1 Ecoulement d'eau dans les milieux poreux .....	21
I.3.1.1 La loi de Darcy .....	22
I.3.1.2 Vitesse réelle et vitesse apparente .....	24
I.3.1.3 Perméabilité intrinsèque .....	24
I.3.1.4 Loi de Darcy généralisée .....	25
I.3.1.5 Milieu hétérogène : Notion de tenseur .....	26
I.3.1.6 Équation de la continuité .....	26
I.3.1.7 Théorie de la continuité .....	29
I.3.2 La granulométrie .....	30
I.3.3 La porosité .....	31
I.3.3.1 Propriétés géométriques de la porosité .....	31
I.3.4 La porosité et la circulation de fluide .....	32
I.3.4.1 Porosité cinématique .....	32
I.3.4.2 Conductivité hydraulique .....	32
I.3.5 Volume élémentaire représentatif .....	33
I.3.5.1 Surface spécifique .....	35
I.3.6 La porosité et la circulation de fluide .....	35
I.3.6.1 Caractéristiques physiques d'un milieu poreux .....	35
I.3.7 Perméabilité .....	36
I.3.8 Tortuosité .....	37
I.3.9 Conductivité thermique équivalente .....	37
I.4 Méthodes de résolution numérique .....	42
I.5 Hétérogénéité des milieux poreux .....	42
I.6 Description de l'hétérogénéité .....	43
I.7 Changement d'échelle et homogénéisation .....	43
<b>II. Chapitre 2 : Modélisation du problème de Darcy .....</b>	<b>47</b>
<b>III. Chapitre 3 : Résultats numériques et discussion .....</b>	<b>52</b>
III.1 Application 1 .....	52
III.2 Application 2 .....	59
<b>Bibliographie .....</b>	<b>65</b>





## Liste des figures

---

<b>Figure 1.1</b> Schéma explicatif de l'expérience de Darcy (1856) [11] .....	21
<b>Figure 1.2</b> Schéma représentant l'écoulement au travers d'un matériel poreux[3].....	21
<b>Figure 1.3</b> Bilan des flux d'eau au travers d'un élément infinitésimal [3].....	25
<b>Figure 1.4</b> Courbe granulométrique cumulative. Calcul du diamètre efficace, $d_{10}$ et du.....	28
<b>Figure 1.5</b> Les deux types de porosité [4] .....	29
<b>Figure 1.6</b> Volume élémentaire représentatif du milieu poreux [6] .....	32
<b>Figure 1.7</b> Dimensions d'un VER [6] .....	33
<b>Figure 1.8</b> Isotropie (a) et anisotropie (b, c, d). Homogénéité (b, c) et hétérogénéité (d) [6]. .....	35
<b>Figure 1.9</b> Quelques phénomènes physico-chimiques [6]. .....	39
<b>Figure 3.1.</b> Représentation 3D de la vitesse théorique .....	52
<b>Figure 3.2.</b> Représentation 3D de la vitesse numérique .....	52
<b>Figure 3.3.</b> Représentation 3D de la pression théorique .....	53
<b>Figure 3.4.</b> Représentation 3D de la pression numérique .....	53
<b>Figure 3.5.</b> Estimation de l'erreur sur la vitesse .....	54
<b>Figure 3.6.</b> Estimation de l'erreur sur la pression.....	54
<b>Figure 3.7.</b> Estimation de l'erreur sur la vitesse en fonction de $\text{Log}(h)$ correspondant à un maillage grossier égal à $h= 130$ .....	56
<b>Figure 3.8.</b> Estimation de l'erreur sur la pression en fonction de $\text{Log}(h)$ correspondant à un maillage grossier égal à $h= 130$ .....	56
<b>Figure 3.9.</b> Estimation de l'erreur sur la vitesse en fonction de $\text{Log}(h)$ correspondant à un maillage grossier égal à $h= 150$ .....	57
<b>Figure 3.10.</b> Estimation de l'erreur sur la pression en fonction de $\text{Log}(h)$ correspondant à un maillage grossier égal à $h= 150$ .....	57
<b>Figure 3.11</b> Représentation 3D de la vitesse théorique .....	60
<b>Figure 3.12</b> Représentation 3D de la vitesse numérique .....	60
<b>Figure 3.13</b> Erreur $H^1$ entre la vitesse exacte et celle calculée .....	61
<b>Figure 3.14</b> Représentation 3D de la pression théorique .....	61
<b>Figure 3.15</b> Représentation 3D de la pression numérique .....	62
<b>Figure 3.16</b> Erreur $L^2$ entre la pression exacte et celle calculée .....	62



## *Liste des tableaux*

---

<b>Tableau 1.1</b> Ordre de grandeur des principaux paramètres hydrodynamiques (Katia Besnard.2003). ....	31
<b>Tableau 1.2</b> Un aperçu de quelques processus susceptibles de se produire. ....	39
<b>Tableau 1.3</b> Principaux processus physico-chimiques auxquels sont soumis les solutés .....	40
<b>Tableau 1.4</b> Variation de la vitesse et de la pression en fonction du maillage h variant entre h= 1/ 110 et h = 1/180.....	55
<b>Tableau 1.5</b> Variation de la vitesse et de la pression en fonction du maillage h variant entre h= 1/100 et h = 1/150.....	58



## *Liste des symboles*

<b>C</b>	Célérité du son	$m \cdot s^{-1}$
<b>i , j</b>	Nombre imaginaire	$\sqrt{-1}$
<b>K</b>	Perméabilité dynamique	$m^2$
<b>K'</b>	Perméabilité thermique	$m^2$
<b>Ka</b>	module d'incompressibilité isotherme du fluide	$p^{-1}$
<b>P</b>	Pression acoustique	$Pa$
<b>V</b>	Vitesse acoustique	$m \cdot s^{-1}$
<b>Z</b>	Impédance acoustique caractéristique	$kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$
<b><math>\eta</math></b>	Viscosité dynamique	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
<b>Q</b>	Débit volumique	$m^3 \cdot s^{-1}$
<b><math>\Sigma</math></b>	Résistivité au passage du fluide	$Kg \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}$
<b><math>V_T</math></b>	Volume totale du solide	$m^3$
<b><math>V_S</math></b>	Volume du solide	$m^3$
<b><math>V_V</math></b>	Volume du vide	$m^3$
<b><math>V_g</math></b>	Volume gravitaire du fluide	$m^3$
<b><math>\Phi</math></b>	Porosité	-
<b><math>\Phi_T</math></b>	Porosité totale	-
<b><math>\Phi_e</math></b>	Porosité effective	-
<b><math>\tau</math></b>	Tortuosité	-
<b><math>L_e</math></b>	Longueur réelle des capillaries	$m$
<b>L</b>	Longueur du milieu poreux	$m$

$\Omega$	Teneur en eau	-
----------	---------------	---

# *Introduction*



## *Introduction générale*

---

Le milieu poreux est un système multiphase (solide, liquide, vapeur). Les propriétés physiques de sa transmission microscopique et macroscopique sont déterminées par l'interaction entre la structure géométrique et le fluide. Le fluide existant dans le système de cavité est multi-physique et de composition selon l'échelle d'analyse. Il existe un couplage phénoménologique complexe entre l'absorption de vapeur, l'effet capillaire du liquide et la température.

Afin de déterminer la fonction caractéristique (adsorption isotherme-pression capillaire-perméabilité), ces phénomènes sont modélisés et simulés, auxquels s'ajoutent des informations géométriques simplifiables en fonction des caractéristiques physiques d'intérêt, tels que les problèmes isothermes et l'analyse locale.

La caractéristique de la solution au problème du transport du système vapeur/liquide dans les milieux poreux est l'échelle micro/macro, et un modèle représentatif de la structure géométrique est déterminé. La méthode actuelle de description de la forme géométrique (phase solide/poreux phase) est uniquement basée sur la mesure de la forme. La mesure dite de morphologie<sup>1</sup> et est caractérisée par des paramètres de porosité, de granulométrie et de texture.

L'objectif principal du travail présenté dans ce document est de développer des formules mathématiques fiables pour la structure complexe du support. Sur la base des concepts géométriques, une tentative est faite pour considérer la réalité géométrique dans le modèle de simulation des caractéristiques de transfert. Les principales conditions de la formule proposée sont: Réversibilité, diversité d'échelle et performances (rapidité et simplicité d'approximation théorique/numérique). Pour cela, une méthode géométrique euclidienne appelée géométrie discrète adaptée aux contraintes du traitement des données, est employée dans ce travail.

Sur la base de ces concepts, des outils mathématiques nécessaires pour mesurer la forme et les paramètres topologiques de la structure ont été développés, afin que la forme puisse être exprimée par des opérateurs géométriques. A partir de ces opérateurs géométriques, le deuxième objectif de ce travail est d'explorer des méthodes de simulation et d'appliquer ces concepts à l'étude de l'influence de la topologie sur le processus de transmission.

Ce mémoire a pour objectif la modélisation et la simulation numérique des équations qui gouvernent un écoulement de Darcy incompressible dans un milieu poreux. Le code de calcul

---

<sup>1</sup>La taille des éléments géométriques et la composition des matériaux solides



utilisé est un code maison qui existe déjà et fonctionnel. On considère dans notre étude que le volume des pores est entièrement rempli de fluide. Le domaine étudié est un carré muni des conditions aux limites. La méthode employée est celle de Gauss. Les champs de vitesse et de pression seront déterminés par le biais de cette étude purement numérique.

Le contenu du mémoire est le suivant:

Le premier chapitre introduit spécifiquement les concepts de base de la convection naturelle affectée par l'effet Soret et les milieux poreux, ainsi qu'une revue bibliographique de la théorie, de l'expérience et des travaux numériques sur la convection naturelle à double diffusion en milieu poreux.

Le chapitre 2 est réservé à l'introduction du problème de Darcy .

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de deux applications et la validation des résultats numériques en termes de convergence et précision de la méthode traduites par les estimations d'erreurs sur la vitesse et la pression.

# *Chapitre 1 :*

## *Généralités et Synthèse Bibliographique*



### **I. Chapitre I : Généralités et Synthèse Bibliographique**

## **I.1 Introduction**

L'étude et la modélisation des propriétés physiques de transfert des fluides dans le milieu poreux sont étroitement liées à la description de la géométrie micro et macro poreuse. Les phénomènes de transfert fluide et vapeur ont des spécificités liées au problème d'échelles et d'observation de la structure [1].

Le but de ce chapitre est d'introduire diverses analyses phénoménologiques et couplages qui y sont liés.

## **I.2 Généralités sur la convection influencée par l'effet Soret**

Dans la solution initialement homogène contenant au moins deux substances, le gradient thermique génère le transfert de matériaux au sein du mélange par simple diffusion. Cela conduit à la formation d'un gradient de concentration (Effet Soret).

La chaleur qui en résulte constitue la poussée d'Archimède pour provoquer un flux convectif dans la solution. Si cette dernière est confinée dans une enceinte adaptée, le couplage de la convection et de la diffusion thermique, appelé attraction thermique, peut conduire à la séparation des composants du mélange. Ce principe naturel simple a été largement utilisé dans la recherche et les applications industrielles.

### **I.2.1 Convection naturelle, forcée et mixte**

Le terme convection est utilisé pour définir le mouvement dû à l'agitation thermique qui provoque la différence de densité entre les molécules de fluide. Le mot fluide est un terme pour un liquide ou un gaz : Un objet pur ou un mélange dont les molécules ont suffisamment de liberté pour se déplacer les unes par rapport aux autres. En ce qui concerne l'agitation des fluides causée par des forces (volume ou surface) agissant dans le volume d'étude, nous l'appelons convection naturelle.

Dans le cas de la convection thermique et/ ou de la convection naturelle de convection de masse, le mouvement résultant est le résultat de changements locaux de densité du fluide avec des changements de température et/ ou de concentration.

La convection forcée fait référence au mouvement convectif qui se produit sous le mouvement d'une source externe (telle qu'une pompe) ou d'un objet dans le fluide. Le mouvement provoqué par la différence de pression est un mouvement de convection forcée. Même en l'absence de débit, le mouvement l'écoulement continue d'exister avec un gradient de température. Lorsque la convection est provoquée par l'effet de couplage mentionné ci-dessus, nous l'appelons convection mixte.

### **I.2.2 L'effet Soret ou Ludwig**

Dans le cas d'un fluide qui subit un gradient de température, il y a un gradient de concentration provoqué par le gradient de température. Il s'agit de l'effet Solet ou également connu sous le nom d'effet Ludwig (plus généralement, le nom de diffusion thermique fait référence au milieu gazeux de ce effet). Le terme effet Soret sera plus utilisé pour les liquides.

Ludewig découvrit cet effet au même moment en 1856, et fut découvert par C. Soret en 1879, d'où le nom pour ce phénomène.

Dans le domaine de la gravité, la convection dans un fluide pur est provoquée par un changement local de densité qui dépend non seulement de la température, mais également de sa composition. Généralement, la convection et la diffusion thermique ne peuvent pas être éliminées. Ce couplage est appelé diffusion gravitationnelle thermique. Il est important de prêter attention aux travaux de Dufour, qui avait découvert l'effet inverse de l'effet Soret en 1872.

L'effet Soret porte également son nom comprenant l'apparition de gradients de température provoqués par des gradients de concentration. Cependant, l'influence en dehors de la phase gazeuse est négligeable. Dans nos recherches, cet effet sera ignoré avant l'effet Soret.

### **I.2.3 Intérêt pratique et industriel de l'effet Soret**

Généralement, la convection et la diffusion thermique ne peuvent pas être éliminées. Ce couplage est monophasé et implique un flux multi-composants. Il est présent dans de nombreux secteurs industriels : Dans le cas de carburant stocké sous forme liquide ou solide pour utilisation dans les moteurs à combustion interne ou pour les moteurs de fusée.

De plus, le couplage de convection naturelle à la diffusion thermique peut améliorer considérablement le degré de séparation. Il est également très important de maîtriser la quantification de ces flux utilisé par les métallurgistes lors de la réalisation de traitements thermochimiques sur les métaux Bain de sel.

La thermodiffusion modifie la répartition de certains isotopes dans la glace et permet ainsi de mieux appréhender les brusques changements climatiques (Grachev et Severinghaus 2003 et G. Galliéro 2003). Elle est par ailleurs impliquée dans des phénomènes aussi divers que la météorologie ou l'astrophysique. De plus, son influence sur le comportement de la combustion semble être relativement importante [3]. Certains lui attribuent également une influence dans le transport biologique à l'intérieur du corps humain. Elle est même évoquée comme un possible mécanisme pour l'évolution prébiotique. En ce qui nous concerne, elle nous permis d'estimer la répartition des hydrocarbures dans les réservoirs pétroliers[2].

La thermodiffusion peut également avoir un intérêt économique et servir dans différents procédés industriels. La plus importante des applications de ce processus croisé en phase gazeuse est la séparation des isotopes par une méthode de colonne thermogravitationnelle, qui couple la convection et la thermodiffusion proposée par Clusius et Dickel. De la même manière

elle a servit à l'enrichissement isotopique de l'uranium pendant la seconde guerre mondiale. Par ailleurs, de par son rendement assez faible, elle n'est utilisée que pour la séparation de produits à haute valeur ajoutée, comme certains produits pharmaceutiques ou pétroliers [2].

### **I.3 Généralités sur les milieux poreux**

Le transport de milieux poreux est un processus rencontré dans la vie quotidienne, qui peut aller de l'eau qui coule à travers le lit de café à l'eau qui s'infiltré dans le sol. Selon la taille du milieu, les recherches qui lui sont consacrées peuvent être divisées en deux catégories:

- Les recherches effectuées à l'échelle chromatographique, dont le but est de réaliser des techniques ou procédés de mesure dans un réacteur à lit fixe et
- les recherches menées sur le l'échelle de l'aquifère à l'échelle publique. À des fins d'ingénierie ou d'environnement. Cependant, dans ce dernier cas, la première expérience de laboratoire est généralement une recherche.

Nous nous intéressons particulièrement à la pollution des sols dans les zones à activités industrielles ou agricoles fréquentes. Dans ces zones, de grandes quantités de métaux lourds, d'hydrocarbures et de déchets radioactifs sont déposées et débordées par des aérosols dans l'atmosphère, des produits accidentels et même des déversements délibérés de déchets dans le environnement naturel. Une fois entrés dans la zone inférieure, les polluants seront évacués avec l'écoulement de l'eau, affectant ainsi la qualité des eaux souterraines et des produits agricoles. Cependant, en raison des interactions physiques et/ ou bio-chimiques avec le substrat solide, le mouvement de ces polluants est généralement retardé par rapport à l'eau.

#### **I.3.1 Ecoulement d'eau dans les milieux poreux**

Un support poreux est un matériau composé d'une matrice solide et de vides appelés pores. Les vides de la roche définissent sa porosité totale. Ces vides peuvent être occupés par de l'eau, de l'air ou d'autres fluides. Dans nos recherches, nous nous intéressons aux milieux

remplis d'eau, c'est-à-dire que tous les vides sont remplis d'eau. L'analyse de la porosité n'est pas seulement géométrique, mais implique également l'eau contenue dans le milieu poreux, sa liaison physique avec le substrat solide et son éventuel mouvement.

### I.3.1.1 La loi de Darcy

En 1856, G. Le Dr H. Darcy a effectué des observations expérimentales et dérive l'expression relationnelle qui représente le flux total  $Q$ . La différence du rapport du produit de la partie  $S$  à travers la colonne la charge totale  $\Delta H$  et le coefficient proportionnel  $K_s$  existant entre les deux extrémités de sa longueur  $L$

$$Q = S K_s \frac{\Delta H}{L} [\text{m}^3/\text{s}]$$

La différence de charge totale représente la somme algébrique des potentiels partiels

$$\Phi = \Phi_g + \Phi_m + \Phi_p$$

où

- $\Phi_g$  est le potentiel gravitationnel
- $\Phi_m$  est le potentiel de la matrice (potentiel d'adsorption et potentiel Capillaire)
- $\Phi_p$  potentiel de pression (dû à la pression du gaz externe).

La phase gazeuse est considérée comme étant à une pression uniforme égale à la pression atmosphérique.

Ensuite, le potentiel total est généralement décrit par la charge de pression capillaire  $h$  et la

charge :

$$\Phi = H = h + zl$$

Selon la définition, la vitesse d'écoulement hypothétique est exprimée par le rapport du débit total de la section :

$$q = \frac{Q}{S} = K_s \frac{\Delta H}{L} \text{ [m/s]}$$

Lorsque la charge est utilisée pour exprimer la force motrice du flux, elle est exprimée par  $(\Delta H / L)$ . D'autre part, si le potentiel total est exprimé en énergie, ce n'est plus une unité de poids, mais une unité. En volume, le facteur de proportionnalité entre débit et force motrice ne correspond plus à la vitesse.

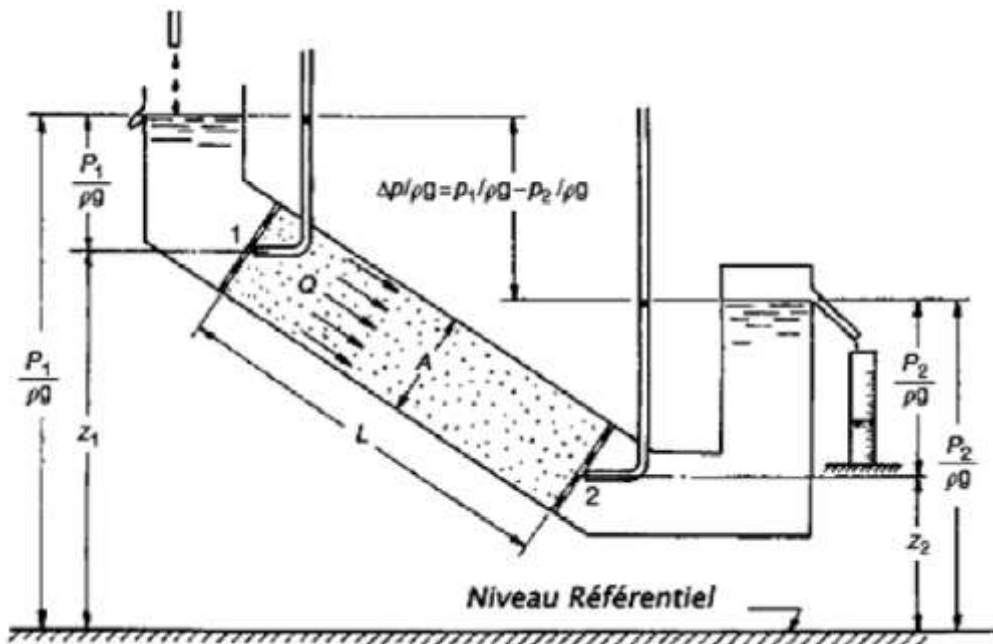


FIGURE 1.1 :Schéma explicatif de l'expérience de Darcy (1856) [11]

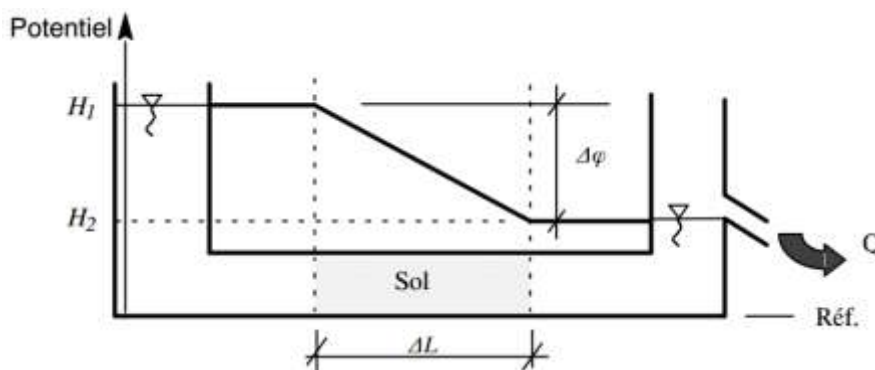


FIGURE 1.2 :SCHEMA REPRESENTANT L'ECOULEMENT AU TRAVERS D'UN MATERIEL POREUX [3]



La figure 1.2 présente aussi le diagramme des potentiels. À l'entrée de l'échantillon, la pression est  $H_1$  et le potentiel d'élévation est nul si le bas de l'échantillon est considéré comme référence. À la sortie de l'échantillon, la pression est  $H_2$  et le potentiel d'élévation est aussi nul. Ainsi, les potentiels totaux ou charges hydrauliques à l'entrée et à la sortie de l'échantillon sont respectivement  $H_1$  et  $H_2$  [3].

L'équation de Darcy montre que la perte de charge ou de potentiel varie linéairement dans un milieu de section constante. Ainsi, si le potentiel est connu en deux points, il variera linéairement entre ces deux points et le diagramme des potentiels peut être facilement tracé.

Le rapport de la perte de charge ou de potentiel par unité de longueur est appelé gradient hydraulique  $i$ :

$$i = \frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta L}$$

### **I.3.1.2 Vitesse réelle et vitesse apparente**

Le flux est la vitesse apparente d'un écoulement, i.e. la vitesse de déplacement du fluide dans l'espace comme s'il n'y avait pas de matériel poreux. Le flux ou vitesse apparente s'exprime alors :

$$q = \frac{Q}{A} = -k \frac{\Delta H}{\Delta L} = -k \frac{\Delta \varphi}{\Delta L}$$

où  $q$  est le flux ou vitesse apparente d'écoulement (m/j).

La vitesse réelle est la vitesse de circulation de l'eau dans les pores du sol. Cette vitesse moyenne réelle est obtenue en divisant la vitesse apparente par la porosité.

### **I.3.1.3 Perméabilité intrinsèque**

La conductivité hydraulique à saturation apparaissant dans l'équation de Darcy est une manifestation de la résistance à l'écoulement que provoquent les forces de frottement. La conductivité hydraulique est fonction de la perméabilité intrinsèque du sol  $\kappa$ , de la masse volumique du liquide  $\rho_w$ , de la viscosité dynamique du liquide  $\eta_w$  et de la gravité comme le montre l'équation suivante [3] :

$$K = k \frac{\rho_w g}{\eta_w}$$

La perméabilité intrinsèque représente l'effet de la matrice solide face à un liquide. Elle est fonction des caractéristiques du sol comme la granulométrie, la structure du sol, la distribution porale, la tortuosité, etc...

La perméabilité représente les caractéristiques intrinsèques d'un milieu à laisser circuler tout liquide alors que la conductivité hydraulique représente cette capacité pour un liquide en particulier l'eau.

#### **I.3.1.4 Loi de Darcy généralisée**

La généralisation de la loi de Darcy en milieu saturé s'effectue en prenant la limite de l'équation suivante :

$$\vec{q} = \lim_{\Delta L} -K \frac{\Delta H}{\Delta L} = -K \frac{\Delta H}{\Delta l} = -K \frac{\Delta \varphi}{\Delta l}$$

Le long de l'axe des x, le flux s'exprime comme suit :

$$\vec{q}_x = -K \frac{\Delta \varphi}{\Delta l}$$

Le flux est directionnel et son expression vectorielle est la suivante :

$$\vec{q}_x = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}$$

$$\vec{q}_x = -K_x \frac{d\varphi}{dx} \vec{i} - K_y \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} - K_z \frac{d\varphi}{dz} \vec{k}$$

Pour un milieu homogène et isotrope, l'équation s'écrit :

$$\vec{q} = -k \left[ \frac{d\varphi}{dx} \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \vec{k} \right]$$

$$\vec{q} = -K = \langle d\varphi \rangle \{i\} = -K \vec{\nabla} \varphi$$

### I.3.1.5 Milieu hétérogène : Notion de tenseur

En milieu hétérogène et anisotrope, les flux selon les axes orthogonaux sont :

$$\vec{q}_x = -K_{xx} \frac{d\varphi}{dx} - K_{xy} \frac{d\varphi}{dy} - K_{xz} \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{q}_y = -K_{yx} \frac{d\varphi}{dx} - K_{yy} \frac{d\varphi}{dy} - K_{yz} \frac{d\varphi}{dz}$$

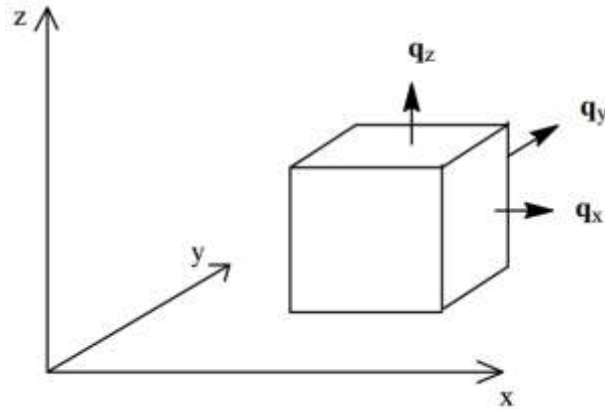
$$\vec{q}_z = -K_{zx} \frac{d\varphi}{dx} - K_{zy} \frac{d\varphi}{dy} - K_{zz} \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{q} = -[K] \{ \vec{\nabla} \varphi \}$$

### I.3.1.6 Équation de la continuité

L'équation de Darcy ne permet pas de résoudre des problèmes complexes car elle ne permet pas d'évaluer le potentiel des différents points du domaine. Il s'agit alors de comprendre le potentiel du trafic estimé.

L'équation de la continuité permet d'évaluer les potentiels. La figure ci-dessous permet de définir le bilan sur un élément de référence infinitésimal :



**FIGURE 1.3 :BILAN DES FLUX D'EAU AU TRAVERS D'UN ELEMENT INFINITESIMAL [3]**

Compte tenu que le milieu est saturé et que le fluide (ici l'eau) est incompressible, la somme des débits entrants et sortants de cet élément est nul :

$$\Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z = 0$$

Le débit est le produit du flux  $q$  par la section d'écoulement  $A$  :

$$Q_x = q_x A$$

La variation de débit selon l'axe  $x$  est :

$$\Delta Q_x = Q_{x+\frac{\Delta x}{2}} - Q_{x-\frac{\Delta x}{2}} = \left( q_{x+\frac{\Delta x}{2}} - q_{x-\frac{\Delta x}{2}} \right) \Delta y \Delta z$$

En utilisant l'expansion de Taylor, cette équation s'écrit :

$$\Delta Q_x = \left[ \left( q_x + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (q_x) \Delta x \right) - \left( q_x - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (q_x) \Delta x \right) \right] \Delta y \Delta z$$

$$\Delta Q_x = \left[ \frac{d}{dx} (q_x) \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

La loi de Darcy permet d'estimer le flux :

$$q_x = -K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Cette équation s'écrit encore :

$$\Delta Q_x = \left[ \frac{d}{dx} \left( -K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \left[ -K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

Les variations de débit selon les axes y et z sont dérivées de la même façon et s'écrivent :

$$\Delta Q_y = \left[ \frac{d}{dy} \left( -K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \left[ -K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta Q_z = \left[ \frac{d}{dz} \left( -K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \left[ -K_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

En utilisant les différentes expressions de la variation des débits, l'équation de la continuité s'écrit :

$$\left[ -K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - K_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

$$K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Si le sol est isotrope ( $K_x = K_y = K_z$ ), l'équation de la continuité devient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

L'équation de Laplace ou de la continuité a comme caractéristiques :

- Le potentiel est défini en tout point du domaine.
- La solution est unique en chaque point, i.e. une seule valeur de potentiel en un point donné.

- La solution particulière est déterminée avec les conditions limites particulières du problème [3].

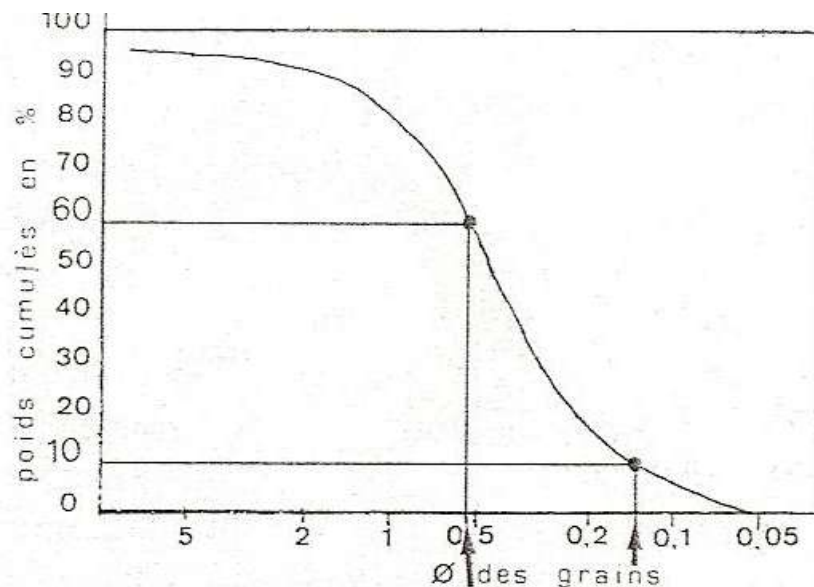
### **I.3.1.7 Théorie de la continuité**

Les milieux poreux naturels se caractérisent par une distribution de pores extrêmement complexe, des formes et des tailles irrégulières. Si le système peut théoriquement être décrit à l'échelle des pores, au fur et à mesure que l'échelle du système augmente, cette description s'avère utopique. Par conséquent, il est nécessaire de passer de la micro-échelle où les lois fondamentales de la physique sont appliquées mais les variables ne peuvent être mesurées à la macro-échelle où les phénomènes sont observés. Les propriétés physiques caractéristiques des milieux poreux peuvent être définies en utilisant le concept de volume de base représentatif (VER) ou la théorie de la continuité. Dans cette théorie, le système physique réel discret est remplacé par un système continu, et ses caractéristiques physiques sont décrites dans le système continu pour changer continuellement dans l'espace [4].

Les équations qui gouvernent l'évolution des grandeurs macroscopiques ne sont pas nécessairement de la même forme que celles s'appliquant au niveau microscopique. Afin de pouvoir établir de telles équations, nous introduisons la notion du volume élémentaire représentatif (VER) à partir duquel le milieu poreux peut être considéré comme un milieu continu (Bear, 1979). Dans cette théorie, le système physique réel discret est remplacé par un système continu dans lequel les propriétés physiques le décrivant varient continûment dans l'espace. La théorie de la continuité repose sur l'hypothèse qu'un système physique réel peut être approximé par un système dans lequel les variations dans l'espace des propriétés étudiées sont suffisamment lisses pour permettre l'utilisation de calculs différentiels. L'intérêt est donc de pouvoir formuler les changements dans le système en terme d'équations différentielles décrivant les processus qui ont lieu [4].

### I.3.2 La granulométrie

L'analyse granulométrique permet non seulement d'accéder à la géométrie du milieu mais également de classer quantitativement les milieux poreux et de calculer des paramètres granulométriques. Les dimensions des grains s'étalent sur toute une gamme, en général continue. L'analyse granulométrique a ainsi pour but de trier par tamisage les grains en fourchettes de diamètres conventionnels. Le couple de données granulométriques, diamètre et poids, obtenu après tamisage, est porté sur un graphique constituant la courbe granulométrique cumulative [6].



**FIGURE 1.4 :** COURBE GRANULOMETRIQUE CUMULATIVE. CALCUL DU DIAMETRE EFFICACE, D10 ET DU DIAMETRE D60 [6].

Cette courbe permet de calculer notamment deux paramètres : Le diamètre efficace et le coefficient d'uniformité. Le diamètre efficace ou diamètre moyen d10 (en mm) est la valeur lue en abscisses correspondant au pourcentage de 10% en poids cumulé.

Le coefficient d'uniformité U est calculé par l'expression :

$$U = \frac{d_{60}}{d_{10}}$$

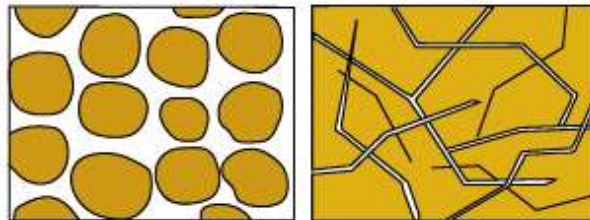
Par convention, si U est compris entre 1 et 2, la granulométrie est dite uniforme [5].

### I.3.3 La porosité

La porosité d'un milieu poreux noté  $\varepsilon^*$ , désigne le rapport du volume des pores sur le volume total du milieu poreux:

$$\varepsilon^* = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume des poreux}}$$

#### I.3.3.1 Propriétés géométriques de la porosité



**FIGURE 1.5** LES DEUX TYPES DE POROSITE [4].

La porosité peut avoir deux formes. La porosité interstitielle (côté gauche de la Figure I.5) représente les vides restants autour des particules minérales solides, qui sont plus ou moins cimentées, tandis que la porosité de fracture correspond à l'existence de fissures, qu'il y ait des fissures ou non Dialysat bloqué. avec des glaçons. Généralement, dans les roches naturelles, ces deux types de pores coexistent. Le tableau I.1 montre la valeur moyenne de la porosité totale de la roche [4].



### **I.3.4 La porosité et la circulation de fluide**

#### **I.3.4.1 Porosité cinématique**

Le volume poreux dans lequel l'eau peut circuler est inférieur au volume vide total. La porosité cinématique est la fraction de la porosité totale contenant l'eau qui peut circuler.

Sont donc exclus de la porosité cinématique :

- Les espaces poreux occupés par l'eau liée, i.e. l'eau attachée à la surface des grains par le jeu des forces d'attraction moléculaire, qui peut donc être considérée comme faisant partie du solide
- Les pores non connectés. En fait, l'importance de la porosité cinématique est en effet liée à la notion d'interconnexion
- Les pores en culs-de-sac dans lesquels l'eau est quasi immobile

Des ordres de grandeur de la valeur de la porosité cinématique des roches sont indiqués dans le tableau 1.1[4].

#### **I.3.4.2 Conductivité hydraulique**

La conductivité hydraulique est une mesure de la capacité du milieu à laisser circuler l'eau en général, elle dépend du sens de l'écoulement de l'eau. Elle s'exprime sous la forme d'un tenseur symétrique de second ordre[4] :

$$K = \begin{vmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{vmatrix}$$

La conductivité hydraulique dépend des caractéristiques du milieu, via la perméabilité intrinsèque  $k$ , ainsi que des caractéristiques du fluide :

$$K = \frac{\rho g}{\mu} k$$

avec

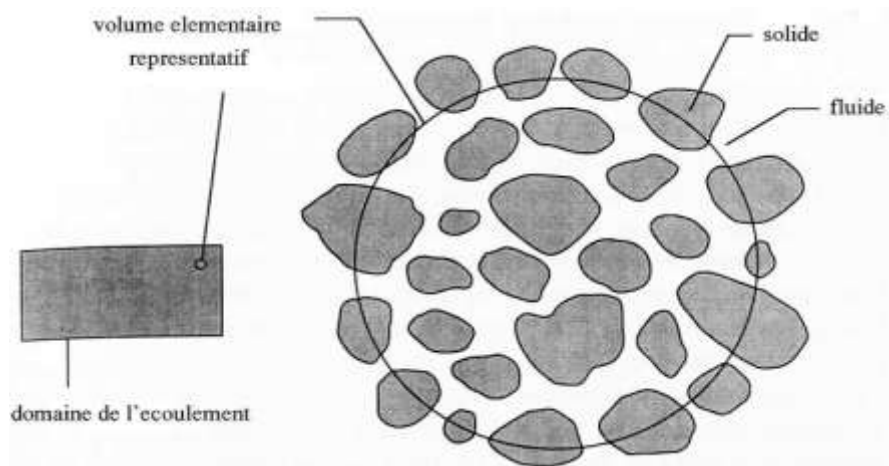
- $g$  l'accélération de la pesanteur
- $\rho$  la masse volumique du fluide
- $\mu$  la viscosité dynamique du fluide

### I.3.5 Volume élémentaire représentatif

Les milieux poreux sont caractérisés par une extrême complexité de la distribution des pores irrégulière, aussi bien en forme qu'en taille. Ainsi si en théorie, il est possible de décrire ce système à l'échelle du pore, du fait de cette forte hétérogénéité, une telle description se révèle vite utopiste lorsque la taille du système augmente et que de plus en plus de volumes poreux sont mis en jeu.

Les propriétés physiques qui caractérisent le milieu poreux peuvent être définies à l'aide de la notion de volume élémentaire représentatif (VER) ou théorie de continuité (Figure 1.6). Selon cette théorie, le système physique réel discret est remplacé par un système continu dans lequel les propriétés physiques le décrivant varient continuellement dans l'espace.

La théorie de continuité repose sur l'hypothèse qu'un système physique réel peut être approximé par un système dans lequel les variations dans l'espace des propriétés étudiées sont suffisamment lisses pour permettre l'utilisation de calculs différentiels pour décrire le processus s'y déroulant [6].



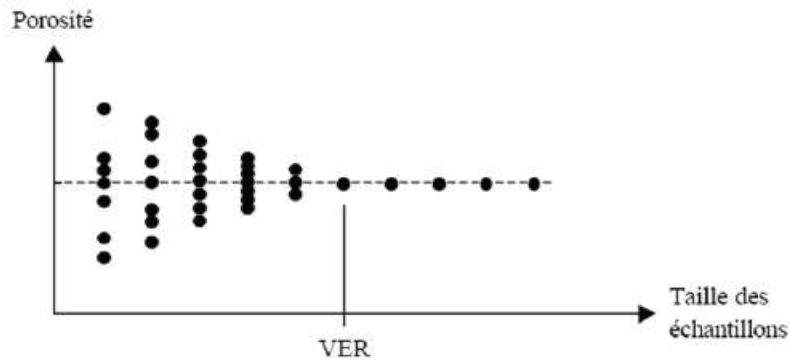
**FIGURE 1.6 : VOLUME ELEMENTAIRE REPRESENTATIF DU MILIEU POREUX [6]**

Dans la présentation continue d'un milieu poreux, les variables physiques décrivant le milieu, discontinues à l'échelle microscopique, sont remplacées par des fonctions continues à l'échelle macroscopique. La valeur de chaque variable physique affectée à un point mathématique dans l'espace continu est obtenue en moyennant la propriété physique sur un volume élémentaire représentatif (VER).

Les dimensions du VER sont généralement suffisamment grandes par rapport à la taille du grain, pour contenir un grand nombre de pores et pouvoir ainsi définir une propriété moyenne globale avec l'assurance d'une fluctuation négligeable d'un pore à l'autre; mais suffisamment petites pour que les variations du paramètre d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues [4].

Les dimensions du VER dépendent des propriétés étudiées et sont généralement plus grandes que à la taille du grain, pour pouvoir définir une propriété moyenne globale avec l'assurance d'une fluctuation négligeable d'un pore à l'autre.

Cependant ces dimensions sont petites par rapport à la longueur caractéristique sur laquelle les quantités considérées varient[6].



**FIGURE 1.7 : DIMENSIONS D'UN VER [6]**

### **I.3.5.1 Surface spécifique**

Tout comme la porosité, la surface spécifique est une caractéristique géométrique des milieux poreux. Elle est défini comme étant le rapport de la surface totale du vide au volume total de la roche.

Considérons un volume  $V$  rempli de  $N$  sphères de rayon  $R$ , de sorte que  $b_3$  puisse être associé à chaque sphère (y compris les pores). La surface spécifique est un paramètre important du modèle de transport réactif, notamment pour la quantification de la réaction eau-roche. La surface spécifique par unité de volume de fluide correspond à la surface réactive.

### **I.3.6 La porosité et la circulation de fluide**

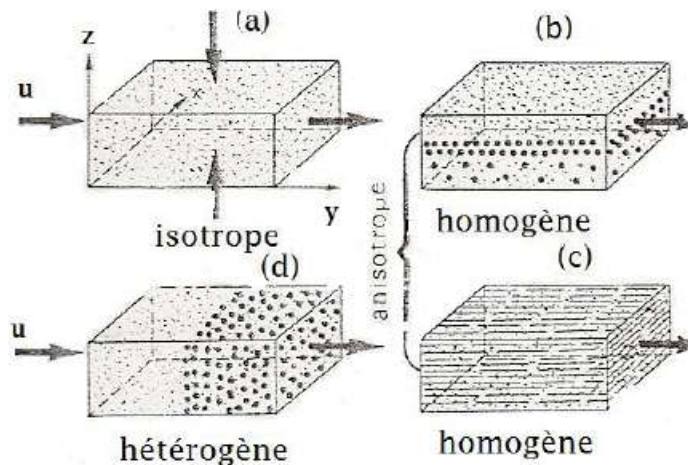
#### **I.3.6.1 Caractéristiques physiques d'un milieu poreux**

Le milieu poreux présente deux couples de caractéristiques physiques [5] :

- ❖ **Isotropie ou anisotropie** : Un milieu est dit isotrope lorsque ses caractéristiques physiques (granulométrie en particulier) sont constantes dans les trois directions de l'espace. Dans le cas contraire, il est anisotrope.

- ❖ **Homogénéité ou hétérogénéité** : Un milieu est homogène lorsqu'il présente, en tous points dans le sens de l'écoulement, des caractéristiques physiques constantes. dans le cas contraire, le milieu est hétérogène.

Un milieu poreux homogène peut être isotrope ou anisotrope. Un milieu poreux hétérogène est toujours anisotrope (voir Figure 1.8).



**FIGURE 1.8** : ISOTROPIE (A) ET ANISOTROPIE (B, C, D). HOMOGENEITE (B, C) ET HETEROGENEITE (D)[6].

### 1.3.7 Perméabilité

La perméabilité  $K$  des milieux poreux dépend de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. La valeur de la perméabilité est déterminée par une mesure expérimentale. La perméabilité est donnée en fonction de la géométrie du milieu poreux.

La perméabilité d'un milieu poreux, notée  $k$ , caractérise l'aptitude de se laisser traverser par un fluide sous l'effet d'un gradient pression. Cette constante caractéristique d'un milieu poreux, dépend de la forme des grains, de la porosité et de la connectivité des pores[7], par suite elle est indépendante des caractéristiques du fluide. Elle représente le volume de fluide traversant en une unité de temps, sous l'effet d'une unité de gradient de pression.

Une corrélation généralement de la forme  $k = N \cdot d_{10}^2$  qui permet le calcul de la perméabilité d'un milieu poreux [5].

### **I.3.8 Tortuosité**

La description de la géométrie du trou implique la connectivité, correspondant à la complexité du chemin continu à travers l'espace poreux.

### **I.3.9 Conductivité thermique équivalente**

La conductivité équivalente est la conductivité électrique des solides et des fluides. Habituellement, il est impossible d'évaluer la valeur précise de la conductivité. Le moyen efficace est de mesurer l'expérience dans des conditions d'utilisation à l'état d'équilibre.

### **L'équation de conservation de la masse**

La conservation de la masse d'un fluide en mouvement sur un VER déduite de l'équation de transfert est exprimée par :

$$\frac{\partial \omega \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = \rho f$$

où  $f$  représente le terme puits/sources par unité de volume.

Si le milieu poreux est indéformable, la porosité est constante. Le terme d'accumulation peut s'écrire pour une température constante par [6] :

$$\frac{\partial \omega \rho}{\partial t} = \frac{\partial \omega \rho}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t} = \rho S \frac{\partial p}{\partial t}$$

Où  $S$  est le coefficient d'emmagasinement qui représente la capacité du milieu poreux à libérer du fluide sous l'effet d'une diminution de la pression [5].

En introduisant cette dernière équation dans l'équation précédente et en admettant que le fluide est incompressible, on obtient une forme de l'équation de continuité en fonction de la pression donnée par :

$$S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot u = f$$

Si la charge ne varie pas avec le temps, c'est le cas du régime permanent, l'équation précédente se réduit à la forme :

$$\nabla \cdot u = f$$

Les conditions aux limites permettant d'intégrer les équations et sont généralement de deux types

- ❖ Conditions de Dirichlet, la charge est imposée sur la frontière  $\Gamma_{Du}$

$$p = p_d \text{ sur } \Gamma_{Du}$$

- ❖ Conditions de Neumann, le flux est imposé sur la frontière  $\Gamma_{Nu}$

$$u \cdot n = -K \frac{\partial p}{\partial n} = q_d \text{ sur } \Gamma_{Nu}$$

où

- ❖  $n$  est la normale unitaire à la frontière
- ❖  $q_d$  est le flux imposé au long de cette frontière. Ce flux est nul lorsque la frontière est imperméable.

### **Equation de mouvement**

Le mouvement des fluides en milieu poreux est gouverné par les principes de conservation de la quantité de mouvement. A l'échelle microscopique, la conservation de la quantité de mouvement s'exprime par les équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire d'un fluide Newtonien.

Pour prendre en considération la friction entre le fluide et le solide, le modèle de Brinkman-Forchheimer est largement utilisé pour simuler les écoulements en milieux poreux [8] :

$$\frac{\partial \omega \rho u_p}{\partial t} + \nabla(\omega \rho u_p u_p) = -\omega \nabla P + \omega \mu \nabla^2 u_p + \omega F$$

$$F = -\frac{\mu u}{k} - \beta \rho u^2$$

Où

- $u_p$  la vitesse interstitielle (pore vélocité) exprimée en  $[LT^{-1}]$
- $u$  la vitesse superficielle(= $\omega u_p$ ) exprimée en  $[LT^{-1}]$
- $P$  la pression globale(= $P+\rho gz$ ) exprimée en  $[ML^{-1}T^{-2}]$
- $P$  la pression statique exprimée en  $[ML^{-1}T^{-2}]$
- $\rho$  la masse volumique du fluide exprimée en  $[ML^{-3}]$
- $\mu$  la viscosité exprimée en  $[ML^{-1}T^{-2}]$
- $F$  la force de friction exprimée en  $[MLT^{-2}]$
- $\beta$  le facteur de turbulence exprimé en  $[L^{-1}]$
- $g$  la gravité exprimée en  $[LT^{-2}]$
- $z$  la hauteur exprimée en  $[L]$

Le nombre de Reynolds dans le cas de l'écoulement en milieu poreux constitué de particules sphériques est donné par [9] :

$$Re = \frac{\rho u d_p}{6\mu(1 - \omega)}$$

En régime d'écoulement laminaire  $Re \leq 2$  (les forces d'inertie sont négligeables devant les forces visqueuses et si on néglige les forces visqueuses dans le fluide devant les forces de friction entre le fluide et le solide, en régime permanent, on écrit:



$$0 = -\omega \nabla P - \omega \frac{\mu u}{k}$$

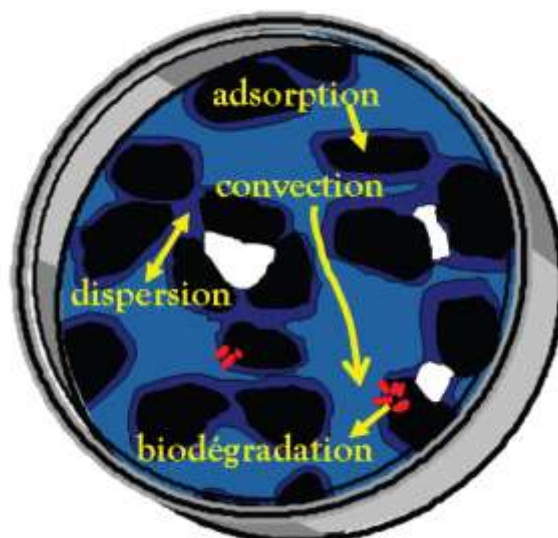
Ce qui donne après arrangement :

$$u = -\frac{k}{\mu} \nabla (P + \rho g z)$$

### Equation de transport

Les éléments transportés sont dits en solution lorsqu'ils ne constituent pas une phase mobile différente de la phase fluide principale, mais s'y intègrent en modifiant éventuellement les propriétés physico-chimiques. Les éléments sont alors caractérisés par leurs concentrations dans cette phase principale. Par la suite, la concentration en solution sera considérée comme étant la variable principale.

Un élément conservatif (ou inerte ou non réactif ou traceur parfait) est un élément en solution ne subissant aucune modification et n'interagissant pas avec la phase solide lorsqu'il est transporté à travers le milieu poreux. La migration d'un soluté en solution est généralement le résultat de nombreux processus physiques, chimiques et biologiques [6].



*FIGURE 1.9: QUELQUES PHENOMENES PHYSICO-CHIMIQUES [6].*

Le tableau 1.2 donne un aperçu de quelques processus susceptibles de se produire.

<b>Processus physiques</b>	<b>Processus (bio)chimiques</b>
<b>Convection</b>	Sorption
<b>Dispersion</b>	Dissolution/Précipitation
<b>Diffusion moléculaire</b>	Oxydo-réduction
<b>Filtration</b>	Décroissance radioactive

**Tableau 1.2** :Principaux processus physico-chimiques auxquels sont soumis les solutés [6]

*DANS LES MILIEUX POREUX.*

Au cours de leur trajet, les solutés peuvent subir trois sortes de phénomènes :

- ❖ Retard via une immobilisation, souvent réversible (sorption, échange d'ions, filtration, précipitation)
- ❖ Atténuation c'est à dire une disparition irréversible ou transformation (oxydoréduction chimiques, oxydo-réductions biologiques i.e. biodégradation, volatilisation, hydrolyse)
- ❖ Augmentation de la mobilité : Vitesse accélérée (dissolution, ionisation, complexation).

L'impact de ces processus sur le transport est résumé dans le tableau suivant :

<b>Processus</b>	<b>Impact sur le transport</b>
<b>Convection</b>	L'entraînement du soluté par le fluide
<b>Diffusion</b>	Etalement du panache mais souvent négligeable
<b>Dispersion</b>	Diminue la concentration du pic, augmente la taille du panache et diminue le premier temps d'arrivée
<b>Sorption</b>	Réduit la vitesse apparente du soluté (retardation)
<b>Décroissance radioactive</b>	Diminue la concentration en solution

**Tableau 1.3** :Impact des processus physico-chimiques sur le transport de soluté dans un milieu poreux [6].

Les quatre principaux processus contrôlant le mouvement des solutés sont la convection, la dispersion, le transfert de masse entre les deux phases et la réaction chimique au sens large [6].

#### **I.4 Méthodes de résolution numérique**

L'application des méthodes numériques permet de remplacer une équation aux dérivées partielles ou un ensemble d'équations aux dérivées partielles, par un système d'équations algébriques ou un ensemble de systèmes d'équations algébriques. La résolution de l'équation originelle se résume alors à la résolution du système d'équations obtenues par application de ces méthodes.

Pour ce faire, plusieurs méthodes efficaces existent, et diffèrent principalement par la manière avec laquelle sont obtenus les systèmes d'équations algébriques équivalentes et parfois aussi de l'approche du problème [10].

Les méthodes numériques sont principalement basées sur les différences finies ou les éléments finis. Une introduction à la modélisation numérique en hydrogéologie est disponible dans bon nombre de livres de base. D'autres méthodes numériques sont aussi employées telles que les différences finies intégrées (volumes finis) ou la méthode de l'équation de l'intégrale de la frontière (boundary integral equation method) [10].

#### **I.5 Hétérogénéité des milieux poreux**

Bien que l'hétérogénéité concerne de nombreux paramètres physiques des milieux géologiques, nous nous intéressons ici plus particulièrement à l'hétérogénéité de la conductivité hydraulique, voire de la porosité.

La conductivité hydraulique est communément le paramètre qui intéresse le plus les hydrogéologues de part de l'ampleur des variations de sa valeur dans la plupart des systèmes naturels et de son importance fondamentale dans le contrôle du champ de vitesse du fluide et de la migration des éléments [4].

De nombreuses expériences, sur site ou en laboratoire, ont montré que cette hétérogénéité structurale du milieu peut influencer le flux d'eau et le transport de soluté. Dans le reste de l'étude, nous négligerons cette hétérogénéité à l'échelle du pore et considérons le fluide et les solutés comme des continuums[4].

Ces variations sont irrégulières spatialement et concernent des distances bien supérieures à l'échelle du laboratoire. Ainsi, le long d'un transect d'environ 70 mètres dans l'Illinois, on trouve une conductivité hydraulique variant de quatre ordres de grandeur et une porosité variant de 1 à 20%. De nombreuses autres études montrent une variabilité du même ordre [4].

## **I.6 Description de l'hétérogénéité**

Les milieux sont donc caractérisés par une forte hétérogénéité spatiale, en particulier de la conductivité hydraulique. Cette hétérogénéité ne peut pas être mesurée en détails (accès indirects ou ponctuels au milieu souterrain) pourtant son impact sur les écoulements d'eau est important est il l'est probablement autant sur le transport des éléments. Dans la perspective d'une modélisation du comportement des contaminants dans le milieu, il faut décrire cette hétérogénéité de la façon la plus représentative possible du milieu naturel [4].

Trois approches sont généralement utilisées pour décrire l'hétérogénéité du milieu :

- ❖ Approche stochastique
- ❖ Approche "milieu stratifié"
- ❖ Approche "double porosité".

Dans un milieu stratifié, on fait l'hypothèse que l'aquifère est composé d'un certain nombre de couches horizontales dont les propriétés diffèrent [4].

## **I.7 Changement d'échelle et homogénéisation**

Comme nous l'avons vu, l'énorme complexité des supports poreux rend impossible la caractérisation, et il est nécessaire d'introduire des modèles aléatoires pour décrire les propriétés des supports à travers des variables aléatoires. Le changement d'échelle pose un problème, c'est-à-dire de calculer la perméabilité à plus grande échelle (et les paramètres descriptifs de transport ultérieurs), car on sait que la perméabilité n'est pas un paramètre supplémentaire.

Le concept d'homogénéisation consiste à trouver un moyen de décrire et prédire le comportement global à grande échelle de systèmes hétérogènes en termes de propriétés effectives en fonction de la structure et du degré d'hétérogénéité. Il s'agit en fait de remplacer le milieu poreux hétérogène par un milieu homogène équivalent de sorte que le comportement global du milieu hétérogène soit équivalent au comportement du milieu homogène à l'échelle macroscopique. Cela constitue l'approche de changement d'échelle la plus simple [4].

En conclusion de ce chapitre, les milieux poreux naturels se caractérisent par un degré élevé d'hétérogénéité. En termes de débit d'eau, la forte variabilité spatiale de la conductivité hydraulique conduira à une forte variabilité spatiale de la vitesse d'écoulement et à un chemin préférentiel. Compte tenu du degré d'hétérogénéité, il semble raisonnable de supposer que la transmission de polluants inertes ou réactifs ne peut être comprise sans considérer le débit et sa relation avec l'hétérogénéité du milieu [4].

En raison de la grande complexité de la structure environnementale et de son inaccessibilité, il est impossible de mesurer avec précision l'hétérogénéité dans le milieu naturel, et il est impossible d'effectuer une caractérisation complète. Afin de modéliser le transport d'éléments dans des milieux poreux, nous nous intéressons à la description quantitative de cette hétérogénéité. La méthode que nous utiliserons dans ce travail est la méthode statique, dans laquelle la vitesse et le champ de dispersion sont considérés comme variables.

En pratique, il est difficile de faire une description complexe de l'hétérogénéité de l'environnement. Le changement d'échelle a entraîné une gamme plus large de paramètres représentatifs du transport. Par conséquent, la prise en compte de l'hétérogénéité implique généralement de trouver un environnement physique homogène équivalent. C'est un problème de trouver une description continue du macro-équivalent.

## *Chapitre 2 :*

# *Modélisation du problème de Darcy*



## II. Chapitre 2 : Modélisation du problème de Darcy

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un écoulement de fluide dans un milieu poreux. Nous proposons alors de résoudre l'ensemble des équations qui régissent un écoulement de Darcy dans un domaine de milieu poreux carré avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann. Nous nous concentrons sur un problème dont la résolution est équivalente à l'évaluation des contributions élémentaires sur chacun des rectangles formant la triangulation, et discrétisée par la méthode des différences finies.

Ainsi, nous présentons une étude analytique et proposons une solution analytique et la méthode est validée par comparaison avec des résultats analytiques. Nous décrivons des indicateurs d'erreur et prouvons qu'ils fournissent un outil approprié pour l'adaptabilité du maillage, puisque les estimations permettent de les comparer à l'erreur.

Depuis quelques décennies, les problèmes liés à l'étude de l'écoulement des fluides en présence d'un milieu poreux saturé attirent l'attention des chercheurs et font l'objet de nombreuses études appliquées pour l'industrie. Nous considérons le problème de l'écoulement de Darcy qui est d'une importance pratique considérable en génie civil, géotechnique et pétrolière. Nos préoccupations dans ce mémoire sont de résoudre l'ensemble des équations qui régissent un écoulement de Darcy dans un domaine de milieu poreux carré avec des conditions aux limites de Dirichlet et Neumann.

Étant donné un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de frontière suffisamment régulière  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  où  $\Gamma_D$  est le bord de Dirichlet et  $\Gamma_N$  le bord de Neumann et une fonction scalaire  $f$  défini sur  $\Omega$ , à valeurs réelles et de carré intégrable, nous proposons de résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = f, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = -K\check{p}, & \text{dans } \Omega, \\ p = \bar{p}, & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g, & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Nous rappelons que le gradient et le div sont définis par :

$$\vec{\nabla} p(\mathbf{x}) = (\partial p / \partial x, \partial p / \partial y)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y)$$



$$\operatorname{div}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y)$$

où

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_2 \end{bmatrix}$$

tel que

$$0 < \underline{\kappa} \leq (K\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \bar{\kappa}, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

En pratique,

- $\mathbf{u}$  est une vitesse de Darcy d'un fluide
- $p$  représente la pression d'écoulement du fluide
- La fonction  $f$  modélise une source de chaleur située à l'extérieur
- Si le fluide évolue dans un milieu poreux,  $K$  est le tenseur de perméabilité, une constante intrinsèque au milieu poreux considéré dans notre étude. Elle contient les informations relatives à la topologie de l'espace poreux, ou au moins suffisamment d'informations pour être représentatives de sa géométrie.

On définit les espaces suivants :

$$W_h = \{ \mathbf{v}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega), \mathbf{v}_h|_T \in P_1 \text{ et } T \in \tau_h \}$$

$$W_{hg} = \{ \mathbf{v} \in W_h, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_N \}$$

$$M_h = \{ q_h \in M, q|_T = c|_T \}$$

Ainsi, le problème de Darcy se lit comme suit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (K^{-1} \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} p_h \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}_h = - \int_{\Omega} (\bar{p} \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{v}_h \in W_{hg} \\ \int_{\Omega} q_h \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}_h = \int_{\Omega} f \cdot q_h, & q_h \in M_h \end{cases}$$

On note par

- $A_h$  l'ensemble des bords
- $N_e$  le nombre de cellules ou mailles
- $N_a$  le nombre d'arêtes
- La dimension de l'espace  $M_h$  est  $N_e$

Une base est formée des fonctions  $\chi_T$  associées aux rectangles  $T$  définis par :

$$\chi_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in T \\ 0 & \text{si } x \notin T \end{cases}$$

On écrit :

$$p_h = \sum_{T \in \tau_h} p_T \chi_T$$

Les scalaires  $p_T$  sont entièrement déterminés par les valeurs qu'ils prennent dans chacun des points barycentres des rectangles  $T$ .

La dimension de l'espace  $W_h$  est  $N_a$ . Une base est formée par les fonctions  $\{\mathbf{v}_E\}_{E \in A_h}$  et définie par :

$$\int_F \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_F = \delta_{E,F}, \quad F \in A_h$$

$u_E$  est une approximation du flux externe de  $\mathbf{u}$  à travers l'arête  $E$  et défini par :

$$u_E = \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_E, \quad E \in A_h$$

et on écrit

$$\mathbf{u}_h = \sum_{E \in A_h} u_E \mathbf{v}_E$$

Nous proposons l'ensemble d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{-1} \int_{\Omega} \sum_{E \in A_h} u_F \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{v}_E - \int_{\Omega} \sum_{T \in \tau_h} p_T X_T \operatorname{div} \mathbf{v}_E = \int_{\Gamma_D} -p \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n} \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \sum_{E \in A_h} u_E \mathbf{v}_E X_T = \int_{\Omega} f \cdot X_T \\ u_E = g|E| \end{array} \right.$$

équivalent à l'ensemble des équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{F \in A_h} u_F \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{v}_E - \sum_{T \in \tau_h} p_T \int_{\Omega} X_T \operatorname{div} \mathbf{v}_E = - \int_{\Gamma_D} p \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n} \\ \sum_{E \in A_h} u_E \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_E X_T = \int_{\Omega} f \cdot X_T \\ u_E = g|E| \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle est équivalente à la résolution d'un ensemble linéaire dont les inconnues sont les composantes de la vitesse et de la pression. La structure des matrices formant les deux membres de cet ensemble linéaire se lit comme suit :

$$\begin{bmatrix} A & {}^{-t}D \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v \\ F_q \end{bmatrix}$$

où

$$A = ((A_{E,F}))_{E,F \in A_h}, A_{E,F} = \int_{\Omega} K^{-1} \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{v}_E$$

$$D = ((D_{\tau_h,E}))_{T \in \tau_h, E \in A_h}, D_{\tau_h,E} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_E X_T$$

$$F_v = (((F_v)_E))_{E \in A_h}, (F_v)_E = \int_{\Gamma_D} -p \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}$$

$$F_q = \left( ((F_q)_{T_k}) \right)_{T \in \tau_h}, (F_q)_{T_k} = \int_{\Omega} f \cdot X_T$$

*Chapitre 3 :*  
*Résultats numériques et discussion*



### III. Chapitre 3 : Résultats numériques et discussion

#### III.1 Application 1

Étant donné un domaine  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  de frontière suffisamment régulière  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  où  $\Gamma_D$  est le bord de Dirichlet et  $\Gamma_N$  le bord de Neumann, nous proposons de résoudre le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{u} = 8, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = (4x - 2, 4y - 2), & \text{dans } \Omega, \\ p = x(1 - x) + y(1 + y), & \text{dans } \Omega, \\ p = y(1 - y), & \text{sur } \Gamma_1 = \Gamma_D, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 2, & \text{sur } \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_N. \end{array} \right.$$

On donne

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

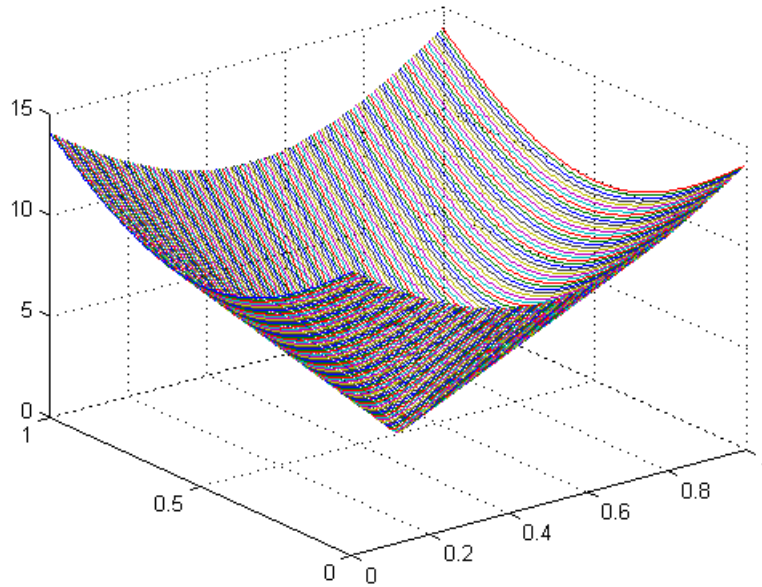
avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \{x = 0\} \times (0 \leq y \leq 1) \\ \Gamma_2 = (0 \leq x \leq 1) \times \{y = 0\} \\ \Gamma_3 = \{x = 1\} \times (0 \leq y \leq 1) \\ \Gamma_4 = (0 \leq x \leq 1) \times \{y = 1\} \end{array} \right.$$

L'intégration numérique des équations de Darcy a été réalisée à l'aide de la formule d'intégration de Simpson d'ordre 2. La triangulation de  $\Omega$  est obtenue en le décomposant en petits rectangles formés en partition de l'intervalle  $[0,1]$  en  $n$  intervalles de longueurs identiques.

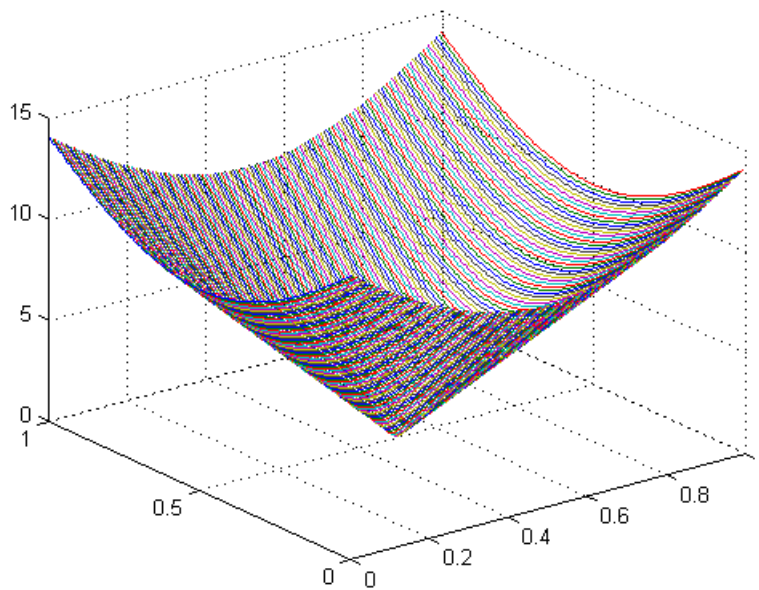
Le paramètre  $h$  est ici égal à  $1/100$ , ce qui correspond à un maillage régulier de  $10^4$  rectangles. Nous présentons ci-dessous une comparaison des couleurs entre les solutions exactes et numériques de la vitesse et de la pression.

Les figures 3.1 et 3.2 illustrent la représentation en dimension 3 de la vitesse théorique et



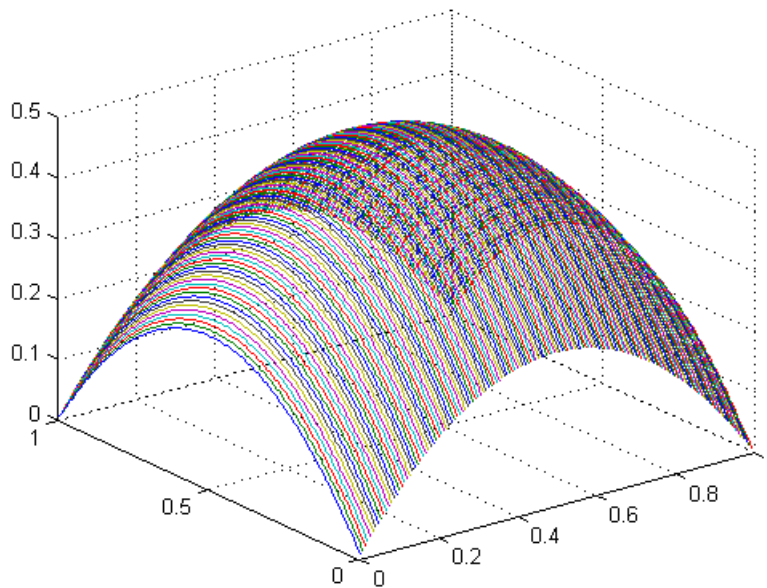
numérique.

**FIGURE 3.1 :** Représentation 3D de la vitesse théorique

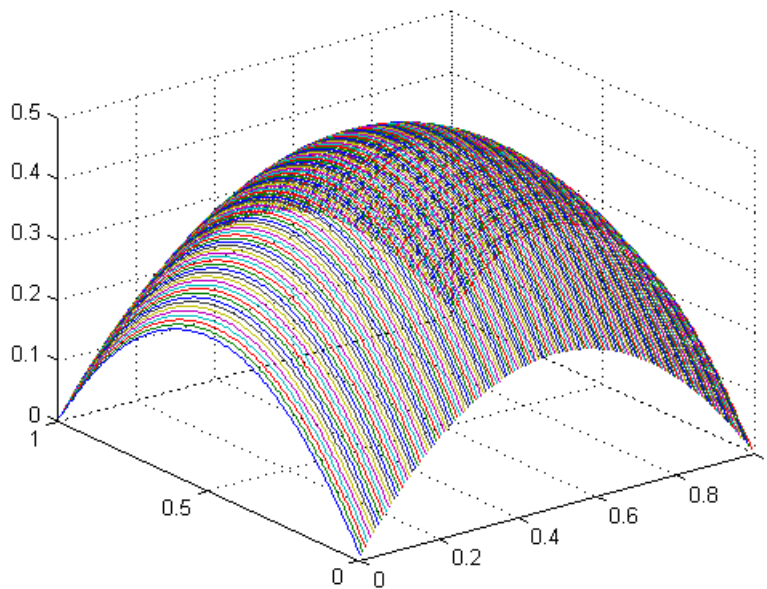


**FIGURE 3.2 :** Représentation 3D de la vitesse numérique

Les figures 3.3 et 3.4 illustrent la représentation en dimension 3 de la pression théorique et numérique.

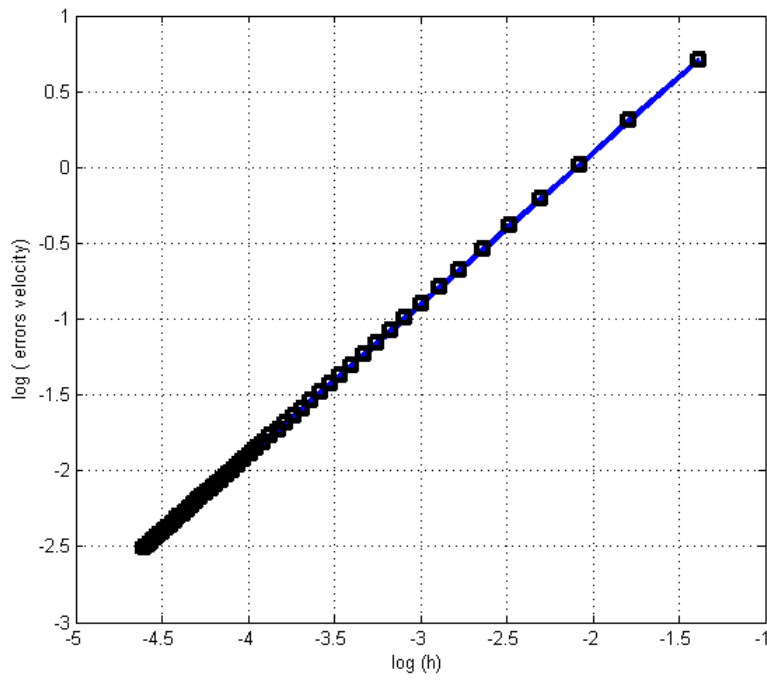


**FIGURE 3.3 :** Représentation 3D de la pression théorique

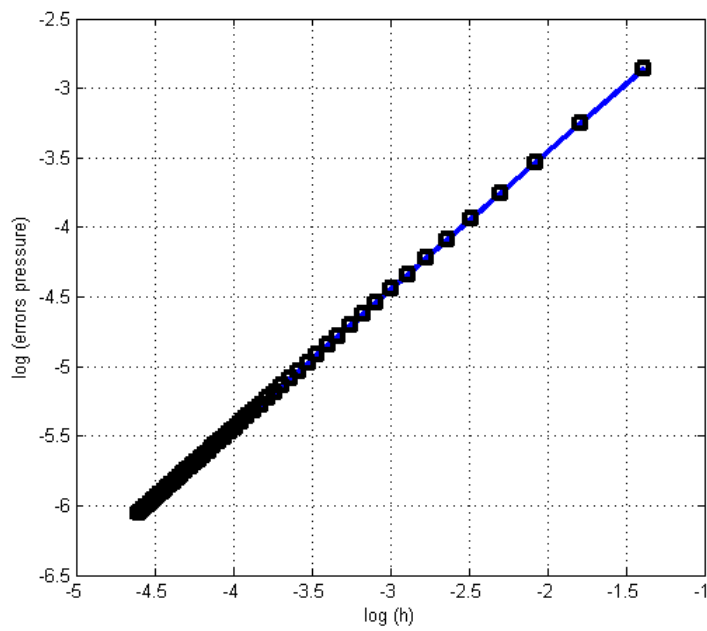


**FIGURE 3.4 :** Représentation 3D de la pression numérique

Sur les figures 3.5 et 3.6, sont tracées les courbes des erreurs sur la vitesse et la pression en fonction de  $\text{Log}(h)$ .



**FIGURE 3.5 :** Estimation de l'erreur sur la vitesse



**FIGURE 3.6 :** Estimation de l'erreur sur la pression



Des simulations ont été réalisées pour différents maillages variant entre  $\frac{1}{10}$  et  $\frac{1}{80}$ . Le tableau 1 montre que plus le pas d'espace  $h$  diminue, meilleure est l'estimation de l'erreur. C'est-à-dire que même avec un choix raisonnable de solution exacte, un maillage grossier peut entraîner une perte d'estimations d'erreurs.

**Tableau 3.1 :** Variation de la vitesse et de la pression en fonction du maillage  $h$

variant entre  $h = \frac{1}{10}$  et  $h = \frac{1}{80}$

Maillage	Valeur de la vitesse	Valeur de la pression
$h = \frac{1}{10}$	1.988	0.976
$h = \frac{1}{20}$	1.009	0.985
$h = \frac{1}{30}$	0.971	0.988
$h = \frac{1}{40}$	1	0.989
$h = \frac{1}{70}$	1	0.991
$h = \frac{1}{80}$	1	0.991

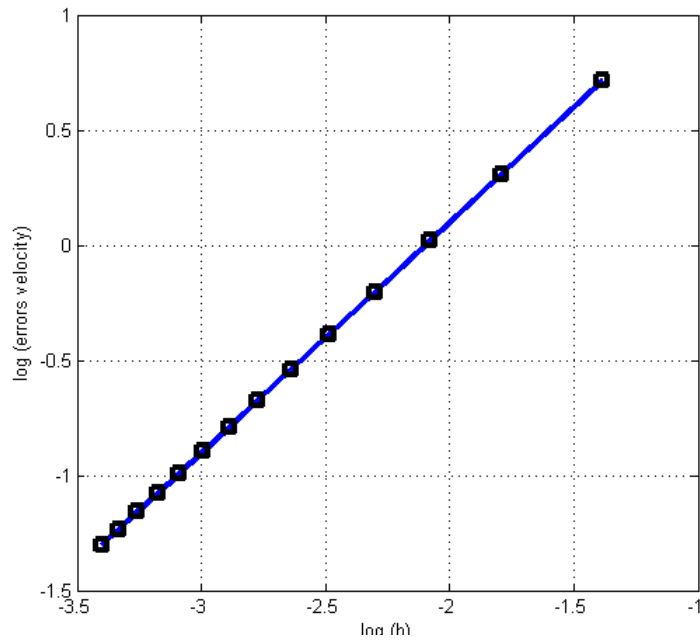


FIGURE 3.7 : Estimation de l'erreur sur la vitesse en fonction de  $\text{Log}(h)$  correspondant à un maillage grossier égal à  $h = \frac{1}{30}$

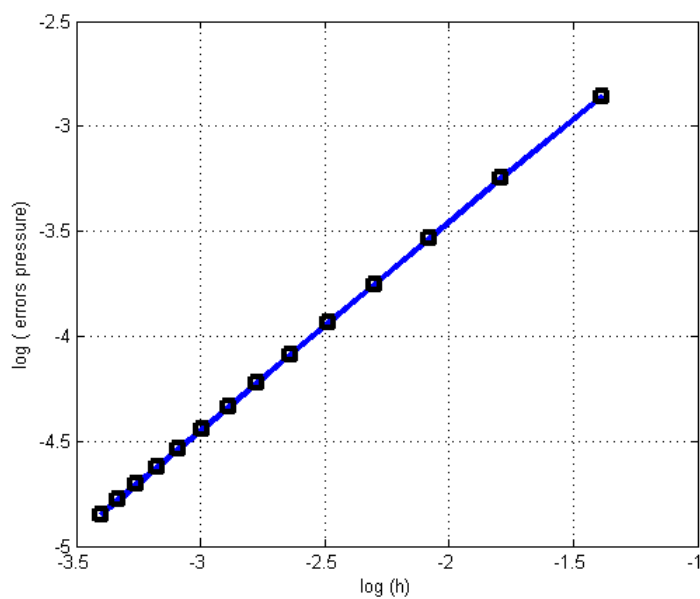
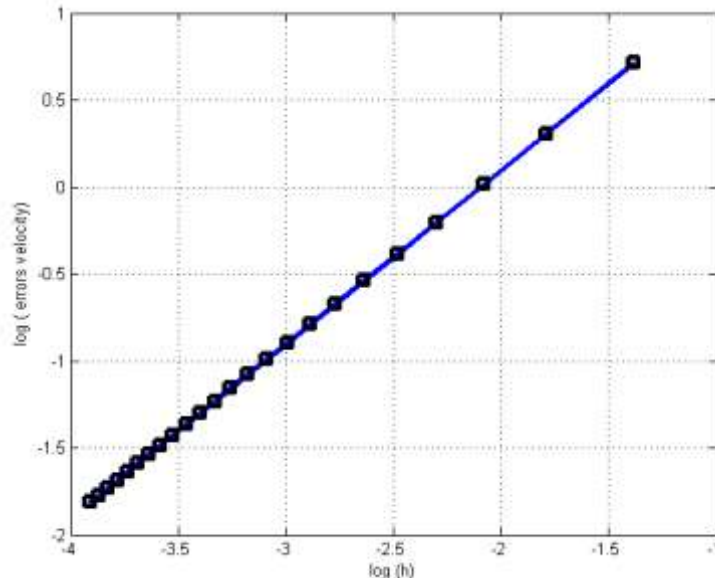
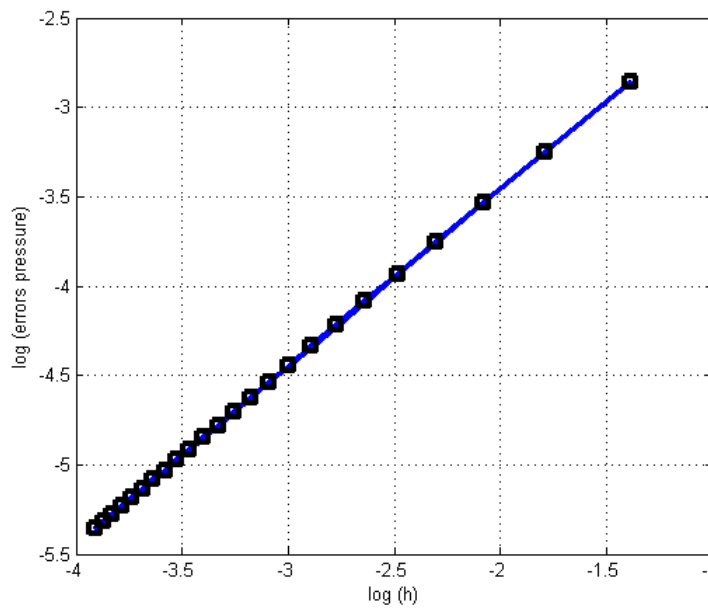


FIGURE 3.8 : Estimation de l'erreur sur la pression en fonction de  $\text{Log}(h)$  correspondant à un maillage grossier égal à  $h = \frac{1}{30}$



**FIGURE 3.9 :** Estimation de l'erreur sur la vitesse en fonction de  $\text{Log}(h)$  correspondant à un maillage grossier égal à  $h = \frac{1}{60}$



**FIGURE 3.10 :** Estimation de l'erreur sur la pression en fonction de  $\text{Log}(h)$  correspondant à un maillage grossier égal à  $h = \frac{1}{60}$

Afin de confirmer numériquement ces résultats, nous calculons la solution pour différents maillages variant entre  $\frac{1}{10}$  et  $\frac{1}{150}$ . Les graphiques relatifs aux estimations d'erreurs de vitesse et

de pression ont été étudiés. Les valeurs de ces estimations d'erreur sont données par le tableau suivant :

<i>Maillage</i>	<i>Valeur de la vitesse</i>	<i>Valeur de la pression</i>
$h=\frac{1}{100}$	1	1.133
$h=\frac{1}{110}$	1	0.992
$h=\frac{1}{120}$	1	0.993
$h=\frac{1}{130}$	1.024	0.993
$h=\frac{1}{140}$	1	0.993
$h=\frac{1}{150}$	1	0.993

**Tableau 3.2 :** Variation de la vitesse et de la pression en fonction du maillage  $h$  variant entre

$$h = \frac{1}{100} \text{ et } h = \frac{1}{150}$$

Le tableau 3.2 montre qu'à partir d'une certaine valeur du maillage, la solution devient plus stable en terme d'erreur d'estimation sur la vitesse ainsi que sur la pression.

Les résultats obtenus dans notre étude montrent que la méthode employée est validée par comparaison avec les résultats analytiques. De plus, de ce fait, on constate que le pas d'espace a une influence décisive sur les estimations d'erreur de pression ainsi que de vitesse même si la méthode est validée.

### III.2 Application 2

Étant donné un domaine  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  de frontière suffisamment régulière  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  où  $\Gamma_D$  est le bord de Dirichlet et  $\Gamma_N$  le bord de Neumann, nous proposons de résoudre le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{u} = 40, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = (20x - 10, 20y - 10), & \text{dans } \Omega, \\ p = x(1 - x) + y(1 - y), & \text{dans } \Omega, \\ p = y(1 - y), & \text{sur } \Gamma_1 = \Gamma_D, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 10, & \text{sur } \Gamma_2 = \Gamma_N, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 10, & \text{sur } \Gamma_3 = \Gamma_N, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 10, & \text{sur } \Gamma_4 = \Gamma_N, \end{array} \right.$$

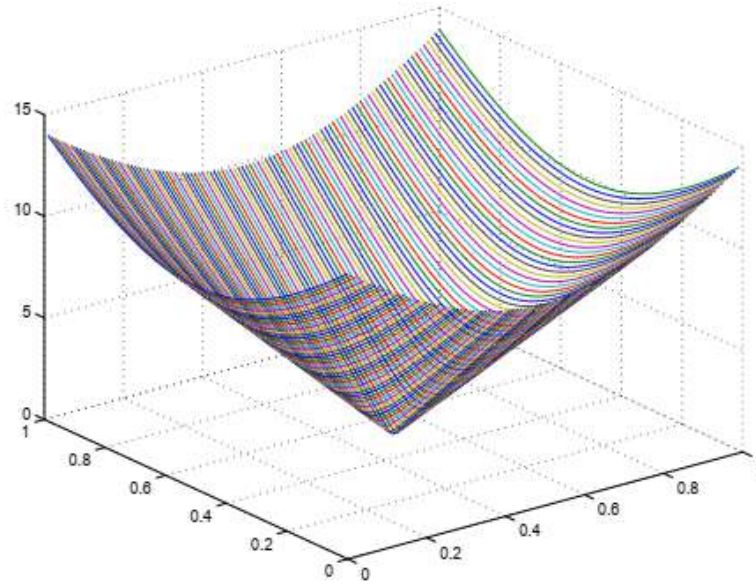
On donne

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

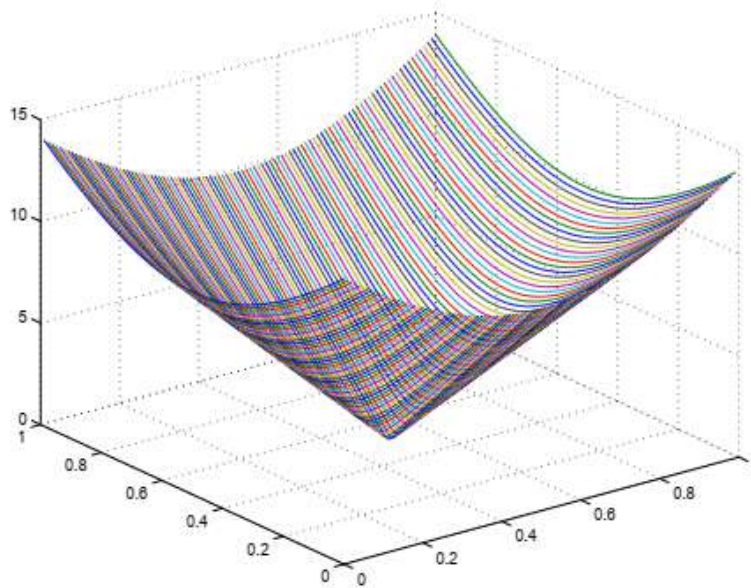
avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \{x = 0\} \times (0 \leq y \leq 1) \\ \Gamma_2 = (0 \leq x \leq 1) \times \{y = 0\} \\ \Gamma_3 = \{x = 1\} \times (0 \leq y \leq 1) \\ \Gamma_4 = (0 \leq x \leq 1) \times \{y = 1\} \end{array} \right.$$

Les figures 3.11 et 3.12 illustrent la représentation en dimension 3 de la vitesse théorique et numérique.

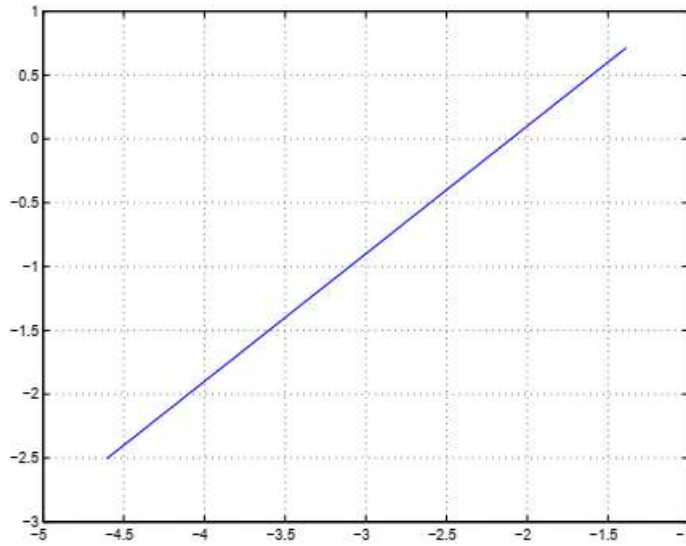


**FIGURE 3.11 :** Représentation 3D de la vitesse théorique



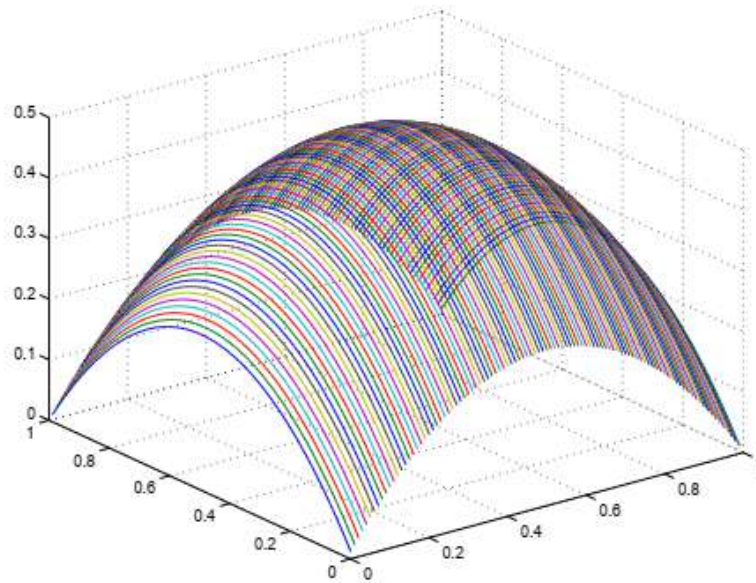
**FIGURE 3.12 :** Représentation 3D de la vitesse numérique

La figure 3.13 représente l'évolution du logarithme de l'erreur entre la vitesse théorique et celle numérique en fonction de  $\text{Log}(h)$ .

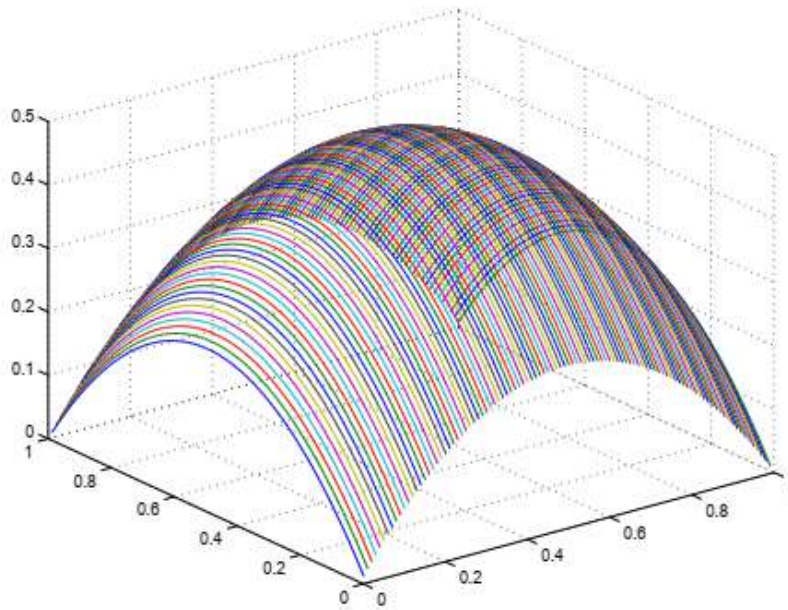


**FIGURE 3.13 :** Erreur entre la vitesse exacte et celle calculée

Les figures 3.14 et 3.15 illustrent la représentation en dimension 3 de la pression théorique et numérique.

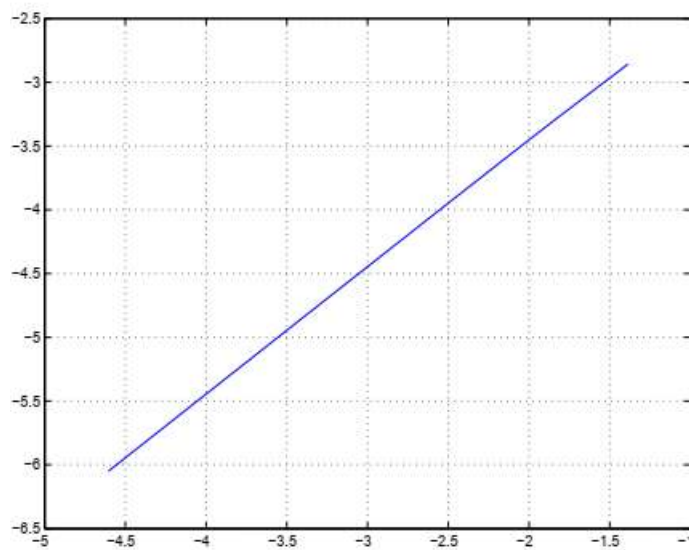


**FIGURE 3.14 :** Représentation 3D de la pression théorique



**FIGURE 3.15 :** Représentation 3D de la pression numérique

La figure 3.16 représente l'évolution du logarithme de l'erreur entre la pression théorique et celle numérique en fonction de  $\text{Log}(h)$ .



**FIGURE 3.16 :** Erreur entre la pression exacte et celle calculée

Ce qui montre que l'erreur pour la pression et la vitesse est d'ordre 1.



## *Conclusion générale*

---

Dans ce mémoire, nous proposons de résoudre les équations gouvernant un écoulement incompressible de Darcy dans un domaine carré de milieu poreux avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann. On considère dans notre travail que le milieu poreux est totalement imbibé, autrement dit que le volume des pores est entièrement rempli de fluide. L'équation générale des écoulements en milieux poreux est déduite du principe de conservation de masse et de la loi de Darcy s'appliquant à un milieu homogène et isotrope poreux parcouru par un écoulement à faible vitesse exprimant le débit d'un fluide incompressible filtrant au travers d'un milieu poreux. La méthode employée dans ce mémoire est celle de Gauss équivalent à la résolution d'un système linéaire qui s'écrit sous une forme matricielle. Une fois les matrices calculées, il est facile de résoudre le système en deux étapes successives, la première qui est consacrée à la résolution d'un système linéaire, puis la deuxième où nous évaluons la précision de la méthode ainsi que sa convergence. Cette écriture montre que le calcul des coefficients des matrices se ramène à l'évaluation des contributions élémentaires sur chacun des rectangles formant la triangulation.

## Bibliographie

- [1] André PIERITZ Romeu, « Modélisation et Simulation de Milieux Poreux par Réseaux Topologiques », THESE DOCTEUR, Fédérale de Santa Catarina, Brésil, 1992.
- [2] Z. AOUF, « Contribution à L'étude des Phénomènes de la Thermodiffusion (effet Soret) Lors de la Convection Naturelle dans un Milieu Poreux Membres du », Mémoire présenté pour l'Obtention du Diplôme de Magister en Génie Mécanique, Université Abou Bekr BELKAID, Tlemcen, 2013.
- [3] « Lois de base de l'écoulement », *grr.ulaval.ca*.  
[http://www.grr.ulaval.ca/gaa\\_7003/Documents/Notes\\_cours\\_2012/CH\\_2\\_Lois.pdf](http://www.grr.ulaval.ca/gaa_7003/Documents/Notes_cours_2012/CH_2_Lois.pdf).
- [4] A. E. KHITER, « Modélisation du transport réactif dans les aquifères. Application aux processus d'adsorption cinétique non linéaires. », MEMOIRE MAGISTER, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Algérie, 2011.
- [5] G. CASTANY, « G. Castany, Principes et méthodes de l'hydrogéologie ». Dunos, 1982.
- [6] S. Ouacil, « Simulation du transport de solutés réactifs en milieux poreux hétérogènes », THÈSE Docteur, UNIVERSITÉ MENTOURI, CONSTANTINE.
- [7] S. N. Z. et T. J. F., « Mathematical modeling of ground water pollution, Springer-Verlag, . . », Berlin, 1996.
- [8] L. AUGIER, *Application of computational fluid dynamics to fixed bed adsorption calculations*. Effect of hydrodynamics at laboratory and industrial scale: Separation and Purification Technology, 2008.
- [9] C. M. et R. J. F., *Chemical engineering Fifth Edition*, . Butterworth-Heinemann, 2002.
- [10] A. A. BITAR, « Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D / 3D, avec couplages surface / souterrain et densitaires - oatao ». <https://oatao.univ-toulouse.fr/7712/> (consulté le mars 16, 2021).
- [11] F. BENOSMAN, « Contribution à L'étude des Phénomènes de transferts dans les milieux poreux fracturés », Mémoire présenté pour l'Obtention du Diplôme de Magister en Génie Mécanique, Université Abou Bekr BELKAID, Tlemcen, 2012.

**Résumé.** Ce mémoire a pour objectif la modélisation et la simulation numérique des équations qui gouvernent un écoulement de Darcy incompressible dans un milieu poreux. Le code de calcul utilisé est un code maison qui existe déjà et fonctionnel. On considère dans notre étude que le volume des pores est entièrement rempli de fluide. Le domaine étudié est un carré muni des conditions aux limites. La méthode employée est celle de Gauss. Ici, la loi de Darcy s'applique à un milieu poreux homogène parcouru par un écoulement à faible vitesse. Les champs de vitesse et de pression seront déterminés par le biais de cette étude purement numérique.

**Mots Clés :** Modélisation, simulation numérique, écoulements de Darcy, milieux poreux

**Abstract.** This thesis aims at the modeling and the numerical simulation of the equations which govern an incompressible Darcy flow in a porous medium. The calculation code used is a house code which already exists and is functional. We consider in our study that the pore volume is completely filled with fluid. The studied domain is a square provided with the boundary conditions. The method used is that of Gauss. Here, Darcy's law applies to a homogeneous porous medium traversed by a flow at low speed. The velocity and pressure fields will be determined through this purely numerical study.

**Keywords:** Modeling, numerical simulation, Darcy flux, porous medium

**ملخص .** تهدف هذه الرسالة إلى النمذجة والمحاكاة العددية للمعادلات التي تحكم تدفق دارسي غير القابل للضغط في وسط مسامي . رمز الحساب المستخدم هو رمز منزل موجود بالفعل ويعمل. نعتبر في دراستنا أن حجم المسام مملوء تمامًا بالسوائل . المجال المدروس هو مربع مزود بشروط الحدود. الطريقة المستخدمة هي طريقة Gauss. هنا ، ينطبق قانون دارسي على وسط مسامي متجانس يجتازه تدفق بسرعة منخفضة . سيتم تحديد مجالات السرعة والضغط من خلال هذه الدراسة العددية البحتة.

**الكلمات المفتاحية:** النمذجة ، المحاكاة العددية ، تدفقات دارسي ، الوسائط المسامية



