

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIC ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة عبد القادر بن صالح
تلمسان
Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –
Faculté de TECHNOLOGIE



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT 3^{ème} Cycle

En : Génie Mécanique

Spécialité : Mécanique Computationnelle

Par : Necira Abdelkrim

Sujet

Etude des vibrations libres des nano-plaques arbitraires

Soutenue publiquement, le 18/01/2022, devant le jury composé de :

M. HAMZA CHERIF Sidi Med	MCA	Univ. Tlemcen	Président
M. BELALIA Sid Ahmed	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
M. BOUKHALFA Abdelkrim	Professeur	Univ. Tlemcen	Co- Directeur de thèse
M. BELDJLILI Youcef	MCA	Univ. Sidi Belabbes	Examineur 1
M. SERDOUNE Med Nadjib	MCA	ESSA. Tlemcen	Examineur 2



" اللهم اجعل هذا العمل خالصا لوجهك الكريم "

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à toute ma famille et en particulier aux honorables parents que Dieu prolonge leur vie et leur assure santé et bien-être. A ma femme vertueuse et à mes deux filles Alaa Errahman et Tasnim.

..... Je prie Dieu de les protéger tous.

Remerciements



Au début, louange à Dieu et merci à Dieu Seigneur des mondes pour son succès en moi pour l'achèvement de cette humble œuvre.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur BELALIA Sid Ahmed et Monsieur BOUKHALFA Abdelkrim pour la confiance que vous m'avez accordé et pour votre accord pour superviser ce travail

Je tiens à vous remercier en particulier messieurs pour vos conseils et votre soutien tout au long de mes recherches scientifiques, pour votre noble moralité et pour votre sympathie pour moi. J'ai beaucoup appris de vous. Je vous offre ma plus profonde gratitude.

Je tiens à remercier les membres du jury surtout Monsieur HAMZA CHERIF Sidi Med qui m'ont honoré en tant que président du jury. J'exprime également ma gratitude aux professeurs BELDJLILI Youcef et SERDOUNE Med Nadjib qui ont accepté d'étudier et examiner ma thèse, et sans oublier de remercier les invites.

En fin, Je voudrais remercier tous les amis et collègues qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Je leur suis reconnaissant pour leur soutien moral et leur sympathie pour moi.

Résumé

Dans le cadre de l'analyse des vibrations libres d'une nano-plaque par la version- p de la méthode des éléments finis, les difficultés de la représentation des bords arbitrairement courbés sont souvent prédominantes. Ces obstacles seront surmontés dans cette thèse en développant un nouveau élément- p courbé. Il permet une représentation exacte d'un domaine courbé sans affecter indûment la précision de l'approximation locale à l'aide des fonctions "Mapping". La géométrie de l'élément- p quadrilatérale courbé est représentée exactement par la méthode de la fonction de mélange. La théorie de l'élasticité non locale d'Eringen et la théorie des plaques de Mindlin sont utilisées pour la modélisation dynamique des nano-plaques de formes géométriques arbitraires. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Un programme est élaboré pour le calcul des fréquences et modes propres des nano-plaques. Les résultats obtenus comparés avec ceux disponibles dans la littérature montrent la rapidité de la convergence, l'exactitude et l'efficacité de l'élément proposé. Une discussion est établie pour montrer l'influence des différents paramètres physiques et géométriques et des conditions aux limites sur le comportement linéaire.

Mots clés : Vibration libre des nano-plaques ; Nano-plaque de forme géométrique arbitraire ; Élément- p quadrilatérale courbé ; Théorie des plaques de Mindlin ; Théorie de l'élasticité non local d'Eringen.

Abstract

In the framework of the analysis of the free vibrations of a nano-plate by the p -version of the finite element method, the difficulties of the representation of arbitrarily curved edges are often predominant. These obstacles will be overcome in this thesis by developing a new curved p -element. It allows an exact representation of a curved domain without unduly affecting the precision of the local approximation using the mapping functions. The geometry of the curved quadrilateral p -element is represented exactly by blending function method. Eringen's non-local elasticity theory and Mindlin's plate theory are used for dynamic modeling of nano-plates of arbitrary geometrical forms. A program is elaborated for the calculation of the eigenvalues and eigenvectors of the system. The results obtained are compared with those available in the literature and show the fast convergence, exactitude and effectiveness of the proposed element. A discussion is established to show the influence of different physical and geometric parameters and boundary conditions on linear behavior.

Key words: Free vibration of nano-plates; Nano-plate arbitrary geometrical forms; Curved quadrilateral p -element; Mindlin plate theory; Eringen's non-local elasticity theory.

ملخص

في إطار تحليل الاهتزازات الحرة لصفحة نانو باستعمال الإصدار - p من طريقة العناصر المتناهي، غالبًا ما تكون صعوبات تمثيل الحواف المنحنية بشكل كفي سائدة. هذه العقبات سيتم التغلب عليها في هذه الأطروحة من خلال تطوير عنصر - p منحنى جديد. يسمح بالتمثيل الدقيق للمجال المنحني دون التأثير على دقة التقريب المحلي بواسطة دالات «Mapping». يتم تمثيل هندسة العنصر الرباعي المنحني بدقة باستخدام طريقة «fonction de mélange». تستخدم نظرية «Eringen» للمرونة الغير المحلية ونظرية صفحة «Mindlin» في النمذجة الديناميكية لصفائح النانو ذات الأشكال الهندسية الكيفية. يتم الحصول على معادلات الحركة الاهتزازية باستخدام مبدأ «des déplacements virtuels». تم اعداد برنامج لحساب الذبذبات الخطية الخاصة للصفائح ذوات الاشكال الكيفية. النتائج المحصل عليها والمقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في المراجع بينت سرعة التقارب، الدقة وفعالية العنصر - p المنحني المستعمل. عدة أمثلة عولجت ومناقشة حقتت من أجل تحديد تأثير مختلف العوامل الفيزيائية، الهندسية والشروط الحدودية على الصفحة.

الكلمات المفتاحية: الاهتزاز الحر لصفائح النانو ؛ صفائح النانو ذوات الاشكال الكيفية ؛ عنصر - p رباعي منحنى؛ نظرية الصفائح ل «Mindlin» ؛ نظرية «Eringen» للمرونة الغير المحلية.

Sommaire

Sommaire	i
Liste des figures	v
Liste des tableaux	ix
Liste des symboles	xiii
Introduction	1
Introduction et problématique.....	1
Motivation et objectif.....	3
Organisation de la thèse.....	4

Chapitre 1 : Revue bibliographique

Objectif.....	6
1.1. La version- p de la méthode des éléments finis.....	7
1.2. Bref historique de la vibration des plaques épaisses.....	11
1.3. Bref historique des plaques avec des formes géométriques arbitraires.....	13
1.4. La vibration de nano-plaques basée sur la théorie d'élasticité non-locale.....	16
1.5. Quelle est l'importance d'étudier la vibration des nano-plaques arbitraires, et pourquoi l'élément- p quadrilatéral courbé a été choisi pour cela ?.....	20

Chapitre 2 : Théorie de plaques locales et non locales

Objectif.....	21
2.1. Introduction.....	22
2.2. Théorie des plaques selon la prise en compte du cisaillement.....	23
2.2.1. Théorie des plaques minces.....	24
2.2.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	24
2.2.2. Théorie des plaques épaisses	26
2.2.2.1. Théorie du premier ordre des plaques (FSDT)	26
2.2.2.2. Interprétation et calcul de facteur de correction du cisaillement transversal..	28
2.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	29
2.2.4. Avantages et limitations.....	31
2.2.5. Pourquoi choisir la théorie FSDT pour la modélisation de nano-plaque?.....	32

2.3. Théories des plaques selon la prise en compte de l'effet d'échelle.....	33
2.3.1. La théorie locale d'élasticité.....	33
2.3.2. La théorie non locale d'élasticité.....	34
2.3.2.1. Limites de la théorie classique et intérêt de l'approche non-locale.....	34
2.3.2.2. Théories non-locales à gradient.....	35
2.3.2.3. Théories non-locales intégrales.....	36

Chapitre 3 : Version - p de la méthode des éléments finis

Objectif.....	38
3.1. Introduction.....	39
3.2. Avantage de la version- p	39
3.3. Inconvénients de la version- p	41
3.4. Comparaison entre la version- p et - h	41
3.5. Adaptation du maillage.....	44
3.6. Mise en œuvre de la version- p	46
3.6.1. Polynômes de Legendre.....	46
3.6.2. Polynômes de Legendre déplacés.....	47
3.6.3. Version- p et fonctions d'interpolation hiérarchique.....	48
3.6.3.1. Éléments unidimensionnels.....	49
3.6.3.2. Éléments- p bidimensionnels.....	51
3.6.3.2.1. Espaces polynomiaux.....	51
3.6.3.3. Élément- p quadrilatéral.....	52
3.7. Modélisation géométrique.....	55
3.7.1. Concepts de mappage “mapping”.....	55
3.7.2. Méthode de la fonction de mélange.....	56
3.7.3. Les fonctions “mapping”.....	56
3.7.3.1. Fonctions “mapping” linéaires.....	57
3.7.3.2. Fonctions “mapping” curvilignes.....	58
3.7.4. Carreaux de Coons.....	58
3.7.5. Élément- p quadrilatéral courbé.....	59
3.7.6. Exemples.....	62

Chapitre 4 : Modélisation des nano-plaques arbitraires par l'élément- p courbé

Objectif.....	65
4.1. Introduction.....	66
4.2. Plaque de forme géométrique arbitraire.....	66
4.3. Equations cinématique de théorie FSDT.....	68
4.4. Relations déformation–déplacement.....	68
4.5. Relations contrainte–déformation.....	69
4.6. Efforts et moments résultants.....	70
4.7. Modèle d'élasticité non locale pour plaque isotrope.....	72
4.8. Equations du mouvement.....	74
4.8.1. Principe des déplacements virtuels.....	74
4.8.1.1. Énergie de déformation virtuelle.....	75
4.8.1.2. Travail virtuel des forces d'inerties.....	76
4.8.2. Formulation par l'élément- p courbé.....	77
4.8.2.1. Détermination des matrices de rigidité et de masse.....	79
4.8.2.2. Equations du mouvement périodique	83

Chapitre 5 : Elaboration d'un programme de calcul

Objectif.....	85
5.1. Introduction.....	86
5.2. Environnement de la programmation.....	86
5.3. Organigramme du programme principal	87
5.4. Description du programme.....	87
5.4.1. Fichier de données.....	87
5.4.1.1. Paramètres géométriques.....	87
5.4.1.2. Paramètres physiques.....	89
5.4.1.3. Paramètres des éléments.....	89
5.4.1.4. Conditions aux limites.....	90
5.4.2. Programmation.....	91
5.4.2.1. Description géométrique de la nano-plaque par l'élément- p	91
5.4.2.2. Matrice Jacobienne.....	92
5.4.2.3. L'exécution des conditions aux limites.....	92

5.4.2.4. Intégration numérique.....	92
5.4.2.5. Listes de degrés de liberté.....	92
5.4.2.6. Formation des matrices élémentaires.....	93
5.4.2.7. Calcul des valeurs et des vecteurs propres par la méthode de Jacobi.....	93
5.4.2.8. Fonctions de formes et leurs dérivées.....	93
5.4.3. Fichier de sortie.....	93

Chapitre 6 : Validation et interprétation des résultats

Objectif.....	95
6.1. Introduction.....	96
6.2. Convergence et validation des résultats.....	96
6.2.1. Nano-plaques rectangulaires.....	97
6.2.2. Nano-plaques sectorielles annulaires.....	103
6.2.3. Nano-plaques elliptiques et circulaires.....	108
6.2.4. Plaques biaises.....	111
6.2.5. Plaques trapézoïdales.....	114
6.2.6. Plaques sectorielles elliptiques et circulaires.....	116
6.3. Étude paramétrique de la nouvelle nano-plaque sectorielle annulaire elliptique.....	119
6.3.1. Paramètre et rapport de fréquence.....	119
6.3.2. Effet du rapport d'excentricité.....	122
6.3.3. Effet de l'angle de secteur.....	124
6.3.4. Effet du paramètre no local.....	126
6.3.5. Effet du rapport d'épaisseur.....	127
6.3.6. Effet du numéro de mode.....	128
6.4. Fréquences linéaires des nano-plaques de formes géométriques arbitraires....	129
Conclusion générale et perspectives.....	142
Références bibliographiques.....	145
Annexe A.....	167
Annexe B.....	168

Liste des figures

<i>Figure 2.1</i> : Plaque de forme géométrique arbitraire	23
<i>Figure 2.2</i> : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy (2004)].....	25
<i>Figure 2.3</i> : Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation selon la théorie du premier ordre des plaques [Reddy(1997)].....	28
<i>Figure 2.4</i> : Distribution de contrainte du cisaillement transversal de la théorie FSDT [Reddy (2004)].....	29
<i>Figure 2.5</i> : Géométrie avant et après déformation d'un élément de la plaque dans le cas de HSDT [Reddy(1997)].....	31
<i>Figure 2.6</i> : Microscope électronique à balayage à grossissement élevé de nanoplaques d'or monocristallin [Karličić et al.(2016)].....	33
<i>Figure 3.1</i> : Polynôme de Legendre déplacé	48
<i>Figure 3.2</i> : Élément unidimensionnel	49
<i>Figure 3.3</i> : Structure hiérarchique d'une matrice de rigidité correspondant au degré du polynôme $p=3$	50
<i>Figure 3.4</i> : Fonctions de forme hiérarchiques.....	50
<i>Figure 3.5</i> : Famille de Serendipity.....	51
<i>Figure 3.6</i> : Famille de Lagrange.....	51
<i>Figure 3.7</i> : Élément bidimensionnel quadrilatéral.....	52
<i>Figure 3.8</i> : Fonctions de forme nodales sur l'élément Q4	53
<i>Figure 3.9</i> : Fonctions de forme quadratiques des côtés sur l'élément Q4	53
<i>Figure 3.10</i> : Fonctions de forme cubiques des côtés sur l'élément Q4	54
<i>Figure 3.11</i> : Fonctions de forme quartiques des côtés sur l'élément Q4	54
<i>Figure 3.12</i> : Fonction de forme interne quadratique sur l'élément Q4	54
<i>Figure 3.13</i> : Fonction de forme interne cubique sur l'élément Q4	54
<i>Figure 3.14</i> : Fonctions de forme hiérarchiques de l'élément quadrilatéral	55
<i>Figure 3.15</i> : Surface de Coons.....	58
<i>Figure 3.16</i> : Élément quadrilatéral courbé.....	60

Figure 3.17 : Elément quadrilatéral avec quatre côtés courbés formant une plaque elliptique	63
Figure 3.18 : Elément quadrilatéral avec deux côtés courbés formant une plaque sectorielle annulaire elliptique	64
Figure 4.1 : Nano-plaques arbitraire.....	67
Figure 4.2 : les efforts et les moments résultants.....	72
Figure 5.1 : Organigramme du programme élaboré.....	89
Figure 5.2 : Numérotation des nœuds et côtés de l'élément- p	90
Figure 6.1 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d'une plaque carrée simplement appuyée ($h/b=0.1$).....	101
Figure 6.2 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d'une plaque carrée encastree ($h/b=0.1$)	102
Figure 6.3 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d'une plaque carrée EAAL ($h/b=0.1$).....	103
Figure 6.4 : Nano-plaque sectorielle annulaire.....	103
Figure 6.5 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d'une plaque sectorielle annulaire du type LELE ($b/a = 0.4, h/a = 0.1, \alpha = 90^0$)	106
Figure 6.6 : Convergence des six premiers paramètres de fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire du type AEAE ($b/a=0.25, h/a=0.2, K=0.8, \alpha=60^0$) ..	107
Figure 6.7 : Convergence des six premiers paramètres de fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire du type AEEA ($b/a=0.25, h/a=0.2, K=0.8, \alpha=60^0$) ..	108
Figure 6.8 : Nano-plaque elliptique.....	108
Figure 6.9 : Convergence des paramètres de fréquences fondamentales d'une nano-plaque elliptique encastree ($h/b=0.1, K=2$) pour différentes excentricités (a/b).....	111
Figure 6.10 : Géométrie et système de coordonnées des plaques biaise.....	111
Figure 6.11 : Plaque trapézoïdale.....	114
Figure 6.12 : Modélisation géométrique d'une plaque sectorielle elliptique: (a) par un élément- p triangulaire courbé [Belalia et Houmat (2012)] ; (b) par un élément- p quadrilatéral courbé.....	117

Figure 6.13 : Nano-plaque sectorielle annulaire elliptique avec $\alpha = 60^\circ$	119
Figure 6.14 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastrée en fonction de rapport d'excentricité pour différents paramètres no local ($h/b = 0.1, \alpha = 90^\circ$)	122
Figure 6.15 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique simplement appuyée en fonction de rapport d'excentricité pour différents paramètres no local ($h/b = 0.1, \alpha = 90^\circ$)	123
Figure 6.16 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique AEAE en fonction de rapport d'excentricité pour différents paramètres no local ($h/b = 0.1, \alpha = 60^\circ$)	123
Figure 6.17 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique AEAA en fonction du rapport d'excentricité pour différents paramètres no local ($h/b = 0.1, \alpha = 60^\circ$)	124
Figure 6.18 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastrée en fonction de l'angle de secteur pour différents paramètres no local ($\lambda = 2, h/b = 0.1$).	125
Figure 6.19 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique simplement appuyée en fonction de l'angle de secteur pour différents paramètres no local ($\lambda = 2, h/b = 0.1$)	125
Figure 6.20 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique en fonction du paramètre no local pour différentes conditions aux limites ($\lambda = 2, h/b = 0.1, \alpha = 30^\circ$)	126
Figure 6.21 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastrée en fonction du paramètre no local pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur ($\lambda = 2, \alpha = 90^\circ$)	127
Figure 6.22 : Variation des quatre premiers paramètres de fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastrée en fonction du paramètre no local ($\lambda = 2, h/b = 0.1, \alpha = 120^\circ$)	128
Figure 6.23 : Graphes des trois premières modes de la nouvelle nano-plaque sectorielle avec $a/b=1, c/b=6/5$ et $\phi = \alpha + \beta =$: a) 80° ; b) 30°	137

Figure 6.24 : Graphes des trois premières modes de nano-plaque type 03
avec : a) $a/b=3$; b) $a/b=1$ 138

Figure 6.25 : Graphes des trois premières modes de nano-plaque type 02..... 139

Figure 6.26 : Graphes des trois premières modes de nano-plaque type 11..... 140

Figure 6.27 : Graphes des trois premières modes de nano-plaque type 08..... 141

Liste des tableaux

Tableau 3.1: Comparaison entre la version- p et $-h$	43
Tableau 5.1: Introduction des conditions aux limites des nœuds.....	91
Tableau 5.2: Introduction des conditions aux limites des côtés	91
Tableau 6.1: Comparaison des rapports de fréquences (RF) d'une plaque rectangulaire non locale simplement appuyée ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$, $h / b = 0.1$, $k_s = 0.86667$)	98
Tableau 6.2: Convergence et comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque carrée simplement appuyée ($\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, $a / b = 1$, $h / b = 0.1$, $k_s = 5 / 6$, $K = 0$)	100
Tableau 6.3: Convergence et comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque carrée encadrée ($\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, $a / b = 1$, $h / b = 0.1$, $k_s = 5 / 6$, $K = 0$)	100
Tableau 6.4: Convergence et comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque carrée EAAL ($\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, $a / b = 1$, $h / b = 0.1$, $k_s = 5 / 6$, $K = 0$)	101
Tableau 6.5: Convergence et comparaison des six premiers paramètres de fréquences ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une plaque sectorielle annulaire encadrée ($b / a = 0.25$, $h / a = 0.2$, $k_s = \pi^2 / 12$, $K = 0$, $\alpha = 120^\circ$)	104
Tableau 6.6: Convergence et comparaison des six premiers paramètres de fréquences ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une plaque sectorielle annulaire LELE ($b / a = 0.4$, $h / a = 0.2$, $k_s = \pi^2 / 12$, $K = 0$, $\alpha = 45^\circ$)	104
Tableau 6.7: Comparaison de paramètre de fréquence ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une nano-plaque sectorielle annulaire encadrée ($k_s = \pi^2 / 12$, $\alpha = 30^\circ$)	105
Tableau 6.8: Comparaison des paramètres de fréquences ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une nano-plaque circulaire épaisse encadrée ($a / b = 1$, $a = 10$, $k_s = 5 / 6$)	110

Tableau 6.9: Comparaison des trois premiers paramètres de fréquences $(\Omega = \omega(2a)^2 \sqrt{\rho h / D} / \pi^2)$ des plaques elliptiques encastées: Comparaison entre la théorie des plaques de Mindlin et la théorie classique ($a/b = 2, a = 5, k_s = 5/6, K = 0$) 110

Tableau 6.10: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise simplement appuyée ($a/b = 1, k_s = 5/6, \theta = 15^\circ$) 112

Tableau 6.11: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise encastée ($a/b = 1, k_s = 5/6, \theta = 15^\circ$) 113

Tableau 6.12: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise simplement appuyée ($a/b = 1, k_s = 5/6, \theta = 45^\circ$) 113

Tableau 6.13: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise encastée ($a/b = 1, k_s = 5/6, \theta = 45^\circ$) 114

Tableau 6.14: Comparaison des quatre premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega a^2 / 2\pi)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque trapézoïdale simplement appuyée ($c/a = 1, h/a = 0.001, k_s = 5/6$) 115

Tableau 6.15: Comparaison des quatre premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega a^2 / 2\pi)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque trapézoïdale encastée ($c/a = 1, h/a = 0.001, k_s = 5/6$) 116

Tableau 6.16: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque sectorielle elliptique encastée ($\phi = 90^\circ, k_s = \pi^2 / 12$) 118

Tableau 6.17: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque sectorielle circulaire encastrée ($a/b=1, k_s = \pi^2 / 12$)	118
Tableau 6.18: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, \alpha = 90^\circ$)	120
Tableau 6.19: Paramètres de fréquences fondamentales d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastrée pour différentes valeurs de paramètre no local.....	121
Tableau 6.20: Paramètres de fréquences fondamentales d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique LELE pour différentes valeurs de paramètre no local.....	122
Tableau 6.21: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) de la nouvelle nano-plaque sectorielle pour différentes conditions aux limites ($a/b = 1, c/b = 6/5, h/b = 0.1, k_s = \pi^2 / 12$)	130
Tableau 6.22: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 01 pour différentes conditions aux limites ($h = 0.1, k_s = 5/6$)	131
Tableau 6.23: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 02 pour différentes conditions aux limites ($h = 0.1, k_s = 5/6$)	132
Tableau 6.24: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 03 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	132
Tableau 6.25: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 04 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	133
Tableau 6.26: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 05 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	133

Tableau 6.27: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 06 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	134
Tableau 6.28: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 07 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	134
Tableau 6.29: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 08 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	135
Tableau 6.30: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 09 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	135
Tableau 6.31: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 10 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	135
Tableau 6.32: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 11 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	136
Tableau 6.33: Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 12 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$)	136

Liste des symboles

\bar{u}	Déplacement longitudinale dans la direction x.
\bar{v}	Déplacement longitudinale dans la direction y.
\bar{w}	Déplacement transversale dans la direction z.
θ_x	Rotation de la section droite par rapport à l'axe x.
θ_y	Rotation de la section droite par rapport à l'axe y.
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation.
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte.
$[C]$	Matrice d'élasticité.
t	Temps.
x, y	Coordonnées Cartésiennes.
ξ, η	Coordonnées locales.
h	Epaisseur de la plaque.
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	Efforts normaux par unité de longueur.
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	Moments de flexion par unité de longueur.
Q_x, Q_y	Efforts tranchants par unité de longueur.
ρ	Densité de masse.
E	Module de Young.
$G = E/2(1 + \nu)$	Module de cisaillement.
$D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$	Rigidité à la flexion.
ν	Coefficient de Poisson.
k_s	Facteur de correction de cisaillement transversal.
$K = e_0 a$	facteur de taille (non local).
∇	Opérateur Laplace.
δU	Energie de déformation virtuelle.
δW	Travail virtuel.
A_{ij}	Termes de rigidité d'extension.

D_{ij}	Termes de rigidité de flexion.
I_i	Terme d'inertie.
q	Vecteur de déplacement ou rotation.
$[K]$	Matrices de rigidité globale.
$[M]$	Matrices de masse globale.
P_r^*	Polynôme de Legendre déplacé d'ordre r.
n	Nombre des fonctions de forme.
ω	Pulsation propre.
$\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$	Paramètre de fréquence pour les plaques.
$RF = \Omega^{nl} / \Omega^l$	Rapport de fréquence.

Introduction générale

Introduction et problématique :

En raison de leur rôle important dans différents domaines de l'ingénierie et de la technologie moderne tels que la mécanique, l'aérospatiale, le nucléaire, la biomécanique, l'électronique, les communications, les systèmes nano-électromécaniques (NEMS) et micro-électromécaniques (MEMS), le micro et nano plaques ont suscité un intérêt considérable. Ces structures ont des propriétés mécaniques, électriques et thermiques supérieures comparant à d'autres structures à l'échelle normale. Grâce à leurs propriétés, ils conviennent parfaitement aux appareils hautement sensibles et à haute fréquence destinés à différentes applications.

Afin de concevoir un modèle réaliste d'une micro ou d'une nanostructure et de bien comprendre, optimiser et améliorer leurs performances, il convient de prendre en compte les effets à petite échelle et les forces atomiques. Dans les objets aux micros et nano échelles, les dimensions, les longueurs d'onde et les tailles de ces structures ne sont plus considérées comme étant beaucoup plus grandes que les dimensions caractéristiques de la microstructure. Dans ces cas, les échelles de longueur internes du matériau sont comparables avec la taille de la structure. De plus, les particules s'influencent mutuellement par des forces de cohésion à longue portée en plus des forces de contact et de la diffusion de chaleur. Par conséquent, l'échelle de longueur interne doit être considérée comme un paramètre matériel, appelé paramètre non local, dans les équations et relations constitutives et gouvernantes.

Bien que les modèles et les simulations expérimentales et atomistiques soient capables de montrer les effets de la petite échelle sur les propriétés mécaniques des micro/nanostructures, ces méthodes sont coûteuses et restreintes par la capacité de calcul. Il est bien connu que les théories locales sur la mécanique des milieux continus des poutres (Euler et Timoshenko) et des plaques (Kirchhoff et Mindlin) sont sans échelle. Par conséquent, ils ne sont pas capables de capturer l'effet à petite échelle sur les propriétés mécaniques, électriques et thermiques de très petites structures en forme de poutre ou de plaques. Cela les rend inadéquats pour décrire le comportement dynamique de ces structures.

Afin d'appliquer l'approche de la mécanique des milieux continus dans l'analyse des micro et nanostructures, des modifications logiques et raisonnables tenant compte de l'effet d'échelle devraient être proposées. À cette fin, plusieurs modèles théoriques ont été suggérés. Parmi elles se trouvent la théorie du gradient de déformation, la théorie du couple contrainte modifiée et la théorie de l'élasticité non locale qui seront utilisées dans cette thèse pour analyser le problème de la vibration libre des nano-plaques de Mindlin de formes géométriques arbitraires.

Dans la théorie de l'élasticité non locale, les forces entre les atomes et la longueur de l'échelle intérieure sont inclus dans les expressions des équations constitutives. Contrairement aux théories d'élasticité locales (théories classiques) qui supposent que la contrainte dans un point est fonction de la déformation au niveau du même point, les théories d'élasticités non locales (les théories non classiques) proposées par Eringer (1972 et 1983) supposent que la contrainte dans un point dépend des contraintes de tous les points du milieu continu.

Dans le cadre de calcul des nano-plaques à l'usage mécanique, biomécanique, électronique, communication, nucléaire et aérospatiale, La géométrie de la plaque joue un rôle très important dans le choix des méthodes de résolution des problèmes de vibration des plaques. La modélisation des formes géométries arbitraires n'est certainement pas une tâche facile, mais c'est une étape nécessaire pour modéliser des trous, des défauts géométriques quelconques, ou des formes arbitraires complexes. Toutefois, le problème auquel nous sommes maintenant confrontés est l'incapacité de la

version- p à résoudre le problème de modélisation cité précédemment puisque cette version est basée sur les formes géométriques régulières (carré, rectangle, cercle, etc...).

Bien qu'un certain nombre de chercheurs aient étudié la vibration libre de plaques de formes géométriques simples avec les bords libres, simplement appuyées ou encastées, il reste nécessaire d'obtenir des résultats fiables avec un effort raisonnable pour étudier l'analyse de vibration libre de nano-plaques à bords arbitrairement courbés. Les solutions exactes pour les fréquences propres des nano-plaques ne sont disponibles que pour des domaines simples (rectangulaire, circulaire, sectorielle, biaise, trapézoïdale et triangulaire...)...!?

Motivation et objectif :

Pour la modélisation dynamique des nano-plaques, il faut utiliser des méthodes approximatives telles que la méthode des éléments finis hiérarchique basé sur un élément- p quadrilatérale courbé. Afin de remédier le problème de domaines arbitraires, il est indispensable d'introduire des fonctions "mapping" plus élaborées où la position d'un élément est définie à partir des fonctions géométriques pour décrire exactement le modèle. La combinaison entre la version- p et la méthode des fonctions de mélange permet de rendre plus simple la modélisation des formes géométries arbitraires des nano-plaques.

Dans cette thèse, un nouveau élément- p courbé est développé pour la modélisation dynamique des nano-plaques de formes géométriques arbitraires, et plus précisément, le comportement vibratoire linéaire des nano-plaques avec la prise en compte des effets de cisaillement transversal, inertie de rotation et paramètres physiques et géométriques. Sa formulation est basée sur les hypothèses de Mindlin dans une approche bidimensionnelle de l'élasticité non locale.

L'objectif de cette thèse est l'élaboration d'un programme fiable et robuste pour le calcul des fréquences et modes propres des nano-plaques de formes géométriques arbitraires. En conséquence, certains nouveaux résultats obtenus à partir de la technique proposée pour l'analyse des vibrations des nano-plaques arbitraires sont exprimés en tant que solutions de référence (benchmark solutions) pour la validation de nouvelles techniques de calcul à l'avenir.

Organisation de la thèse :

Cette thèse est organisée en six chapitres :

Le début de premier chapitre est réservé à un aperçu de l'évolution de la version- p de la méthode des éléments finis, son historique et ses domaines d'utilisation. Dans cette partie, on présente aussi une synthèse bibliographique donne une vision globale de la dynamique des plaques basée sur la théorie du premier ordre et les vibrations des plaques avec des formes géométriques arbitraires, et enfin l'état de l'art dans le domaine de la vibration de nano-plaques basée sur la théorie d'élasticité non locale.

Le deuxième chapitre se focalise sur les différentes théories des plaques (mince et épaisse) et leurs hypothèses fondamentales (hypothèses de Kirchhoff et Mindlin). Nous terminons ce chapitre par une présentation des différents types de théories non locales.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la version- p de la méthode des éléments finis, par une description détaillée de ses particularités. Cette partie commence par une introduction à la version- p avec ses avantages et ses inconvénients suivie d'une comparaison entre la version- p et h et description des fonctions de formes hiérarchiques unidimensionnelles et bidimensionnelles utilisées dans cette version. La fin de ce chapitre est consacrée à la présentation de modélisation géométrique des éléments- p par des fonctions "mapping".

Le quatrième chapitre concerne la modélisation des nano-plaques arbitraires en vibration libre par un élément- p quadrilatéral courbé. Sa formulation est basée sur les hypothèses de Mindlin dans une approche bidimensionnelle d'élasticité non locale pour obtenir les matrices de rigidité linéaires et de masse des nano-plaques de formes géométriques arbitraires. Les équations du mouvement vibratoire libre sont obtenues en appliquant le principe des déplacements virtuels.

Les différentes étapes de l'organisation du programme de calcul sont montrées dans le cinquième chapitre. Ce chapitre décrit l'organigramme, le dictionnaire des paramètres, les sous-programmes les plus importants, et les fichiers d'entrée et de sortie.

Le sixième chapitre présente les résultats numériques et graphiques obtenus par l'éléments- p quadrilatérale courbé. Afin d'assurer l'exactitude et l'efficacité de l'élément- p quadrilatéral courbé, plusieurs études de validation et de convergence des fréquences de plaques non locale et locale sont inclus dans ce chapitre. Ensuite, la vibration linéaire de la nouvelle nano-plaque sectorielle annulaire elliptique est étudiée en fonction des paramètres physiques, géométriques, et des conditions aux limites. Cela mène à une discussion profonde sur l'effet de ces paramètres sur les fréquences fondamentales. En fin, certains nouveaux résultats obtenus à partir de la technique proposée pour l'analyse des vibrations des nano-plaques arbitraires sont exprimés en tant que solutions de référence (benchmark solutions) pour la validation de nouvelles techniques de calcul à l'avenir.

La présente thèse se clôture par une conclusion générale recensant les principales avancées du travail effectué et expose brièvement les futures perspectives.

Chapitre 1

Revue bibliographique

Objectif

Le premier chapitre comprend quatre parties, la première partie est consacrée à l'historique détaillé du développement et la mise en œuvre de la version-p et la méthode des fonctions de mélange. La deuxième partie de ce chapitre donne un bref historique de l'analyse de vibrations des plaques épaisses. Un résumé des travaux trouvés dans la littérature consacrée aux plaques de formes géométriques arbitraires a été donné dans la troisième partie. Dans la quatrième partie un état de l'art très riche de l'évolution et l'application de la théorie d'élasticité non-locale, l'accent étant mis en particulier sur l'étude de la vibration des nano-plaques. Enfin, ce chapitre se conclut par une réponse à la question ; Quelle est l'importance d'étudier la vibration des nano-plaques arbitraires, et pourquoi l'élément-p quadrilatéral courbé a été choisi pour cela...?

1.1. La version- p de la méthode des éléments finis

Cette partie passe brièvement en revue le développement de la méthode- p dans une perspective de mise en œuvre. Les leçons tirées des efforts des auteurs pour développement des calculs par éléments finis basé sur la version- p sont présentées. L'utilisation de la version- p de la méthode des éléments finis est devenue plus répandue au cours des 30 dernières années, comme en témoigne l'ajout d'éléments - p à un certain nombre de codes commerciaux bien connus. Ceci reflète l'importance des procédures d'assurance qualité pour la pratique des éléments finis car les estimations d'erreur peuvent être facilement introduites lors de l'utilisation de la méthode- p [Szabo (1986)]. Les autres avantages majeurs de la méthode- p hiérarchique sont la rétention des coefficients de rigidité à mesure que l'ordre d'interpolation augmente [Zienkiewicz et al. (1983)], et les taux élevés de convergence possibles sans nécessiter de raffinement de maillage [Babuska (1988), Babuska et Suri (1990)].

Au début des années 1970, le développement de la version- p de la méthode des éléments finis a commencé par Zienkiewicz et al. (1970), ils ont introduit le concept de maillage hiérarchique qui est le fondement de l'implémentation de la version- p , ils ont proposé l'utilisation des éléments avec des ordres variables (appelés éléments de mélange) pour l'analyse tridimensionnelle comme manière efficace d'ajouter des degrés de liberté supplémentaires dans les régions des gradients élevés. Au lieu de créer des nœuds, ils ont créé des variables de bord pour aboutir à une interpolation d'ordre élevé. Les familles des fonctions hiérarchiques d'interpolation pour les éléments triangulaire ont été présentées par Peano (1975,1976). Au moyen d'une nouvelle interprétation de coordonnées triangulaires (aussi appelé "area coordinates"), des fonctions de forme correspondant à des polynômes de degré arbitraire sont formulées. Les fonctions d'interpolation ont été mappées directement sur l'élément réel en utilisant les coordonnées triangulaires. Basé sur le travail de Peano, le traçage des transformations pour les côtés droits de l'élément triangulaire a été présenté par Katz et al. (1978) et Rossow et Katz (1978). Dans leur étude, l'idée d'un élément de référence a été utilisée pour améliorer l'efficacité informatique.

Zienkiewicz et al. (1981) ont montré comment des éléments quadrilatéraux hiérarchiques ont pu être formulés et ont ressuscité les fonctions d'interpolation

présentées en 1970. Les avantages de cette approche étaient les matrices bien conditionnées, la facilité d'application de la compatibilité lors de l'utilisation d'un ordre polynomial gradué et la facilité d'introduction d'indicateurs d'erreur. Babuska et *al.* (1981) ont exposé le fondement de la version- p de la méthode des éléments finis dans un travail primordial. Cette étude présente la base mathématique rigoureuse de la version- p et montre que lorsque le degré de polynôme augmente la convergence de version- p était garantie à condition que les fonctions d'interpolation soient correctement choisies. Le taux asymptotique de convergence de la version- p a été présenté. Cette évaluation a conclu que le taux de convergence de la version- p est deux fois de celui de la version- h .

Le concept hiérarchique des fonctions de forme des éléments finis a été introduit en tant que dispositif pratique d'interpolation d'ordre mixte par Zienkiewicz et *al.* (1983). Afin d'aborder la question du raffinement adaptatif et de l'estimation des erreurs et amélioration du conditionnement. De nombreux travaux ont été effectués dans les années soixante-dix et quatre-vingt, afin de développer la méthode des éléments finis basés sur la version- p , et cela la rend bien conçue en théorie et en calcul, avec une utilisation croissante dans le milieu d'ingénierie. Cependant, il a fallu plus de 15 ans pour que ses mérites soient reconnus au niveau commercial. Il existe de nombreux codes éléments finis basés sur la version- p , certains ont été commercialisés, nous mentionnons deux cas à titre d'exemple Probe [Szabo (1985)] où le système hiérarchique des fonctions de forme pour les éléments quadrilatéraux a été implémenté dans le programme PROBE et FIESTA [Babuska et Suri (1990)]. Actuellement, les programmes commerciaux basés sur la version- p sont disponibles sur le marché. Parmi les plus utilisés, Ansys, Pro/Mechanica et StressCheck [ESRD 1998]. Gui et Babuska (1986) ont publié une série de travaux en trois parties, qui aborde en détail les bases et les propriétés des trois versions (p , h , et hp) de la méthode des éléments finis. La première partie contient une discussion sur la performance de la version- p et de l'analyse des erreurs de cette méthode. En 1991, Szabo et Babuska ont résumé leurs recherches dans un livre intitulé (Finite Element Analysis). Ce livre entièrement consacré à la version- p et contient la formulation des éléments- p pour les plaques et les coques et un examen de la version- p dans une et deux dimensions, en plus des chapitres sur l'application élasto-statique de cette version en deux et en trois dimensions.

La méthode (auxiliary mapping) introduite par Babuska et Oh (1992) a été appliquée aux problèmes elliptiques avec les interfaces. Cette méthode donne de bien meilleurs résultats que ceux du raffinement des maillages en termes de coût et de précision (lorsque les deux méthodes sont appliquées dans la version- p de la méthode des éléments finis). L'amélioration obtenue par cette méthode est particulièrement remarquable lorsque les singularités de l'interface sont très fortes.

Campion et Jarvis (1996) ont présenté les détails de la version- p de la méthode des éléments finis, les auteurs ont pu développer un programme pour la résolution des problèmes élasto-statiques bidimensionnels. Cette étude a confirmé que par utilisation des solutions avec des polynômes d'ordre élevé la version- p rapproche la variation inconnue. Les éléments- p sont plus grands que les éléments- h et le nombre d'éléments requis lors de l'utilisation de la version- p est nettement inférieur à celui qu'on utiliserait dans la version- h car ces approximations d'ordre élevé peuvent modéliser des variations plus complexes. Une différence importante entre la version- h et la version- p de la méthode des éléments finis réside dans les exigences de mappage géométrique. La taille de l'élément n'étant pas réduite dans la version- p lorsque le degré du polynôme est augmenté, la description de la géométrie doit être indépendante du nombre d'éléments. Cela se traduit par la nécessité de construire des éléments avec une représentation exacte de la limite. Ainsi, le mappage géométrique en conséquence est plus exigeant pour les éléments- p . L'approche standard du mappage géométrique isoparamétrique de la version- h ne suffit pas, pour cela les auteurs ont utilisé la méthode de la fonction de mélange (the blending function method) pour modéliser avec précision une variété de géométries courbées. Suivant ces idées, les limites des éléments peuvent être implémentées comme des arêtes et des faces courbées arbitrairement.

L'application de techniques de fonction de mélange en la conception assistée par ordinateur de surfaces à forme libre a été explorée par Coons (1964), Forrest (1968, 1971) et Gordon (1969a). Coons est le premier à développer la méthode de la fonction de mélange (Blending Function Method) pour décrire avec précision des domaines curvilignes arbitraires et pour présenter des méthodes pour construire des surfaces utilisées pour la conception assistée par ordinateur. En plus de ces applications géométriques, il a été noté dans [Gordon (1969b), pp. 947-948] que ces formules

d'interpolation et d'approximation constituent la base du développement de nouveaux schémas numériques pour l'intégration approximative de fonctions à plusieurs variables. D'autres applications potentielles discutées dans [Gordon (1968)] sont le lissage de données à plusieurs variables et la solution approchée d'équations intégrales, d'équations aux dérivées partielles et de problèmes variationnels.

Gordon (1971) a présenté les notions de base d'une nouvelle classe prometteuse de méthodes pour l'approximation des fonctions à plusieurs variables. Ces méthodes sont des extensions des schémas d'interpolation par "fonction de mélange" introduits il y a plusieurs années par Coons (1964) en relation avec des problèmes de conception assistée par ordinateur. Où il a utilisé une variété de fonctions de mélange dans son document, y compris les fonctions d'Hermitte et de Lagrange. En 1973, Gordon et Hall (1973a-b) ont publié deux articles. L'objet et le but de ces articles sont d'expliquer comment la méthode de la fonction de mélange pourrait être utilisée pour construire des systèmes de coordonnées curvilignes, et aussi pour décrire des géométries arbitraires.

Szabo et Babuska (1990) ont présenté la première étude dans laquelle la méthode de la fonction de mélange a été introduite dans la version- p de la méthode des éléments finis. À la lumière de cette combinaison, certaines études et recherches à base la méthode de mélange, ont utilisé les éléments- p qui assure une représentation exacte des bords arbitrairement courbés. Kiralyfalvi et Szabo. (1997) et Dey et *al.* (1997) ont abordé les questions relatives à la représentation géométrique précise des éléments- p pour des domaines bidimensionnels et tridimensionnels courbés. Düster et *al.* (2001) ont présenté une implémentation en trois dimensions d'une version- p pour des problèmes structurels de solides avec des surfaces arbitraires courbées.

De nombreuses études sur le développement d'éléments finis courbée version- p pour l'analyse vibratoire de membranes et plaques ont été publiées au cours de ces dernières années. L'élément- p quadrilatéral courbé basé sur des fonctions de forme trigonométriques a été développée et appliquée à l'analyse vibratoire libre de membranes de forme arbitraire par Houmat (2006). À l'aide d'un élément- p triangulaire courbé, le même auteur (2008a) a présenté l'analyse de vibration libre dans le plan pour des plaques de formes curvilignes. Belalia et Houmat (2010, 2012) ont également étudié l'analyse de vibration libre linéaire et non linéaire des plaques sectorielles elliptiques

isotropes et en matériaux à gradient fonctionnel à l'aide de la version- p de la MEF basée sur un élément- p triangulaire courbe. Belalia a continué à développer la version- p de la MEF jusqu'en 2017 quand il a publié un nouvel article. Dans cet article, la version- p est utilisée pour étudier la vibration libre non linéaire des plaques sandwichs en FGM. Le même auteur dans son travail de (2018) a employé un élément- p hiérarchique courbé pour étudier la vibration libre non linéaire d'une plaque elliptique sandwichs en FGM.

1.2. Bref historique de la vibration des plaques épaisses

L'étude de la vibration libre des plaques a commencé au début du 19^{ème} siècle. Chladni a observé le comportement vibratoire d'une plaque carrée avec des cotés complètement libres et cela grâce à une étude réalisée en 1802. La méthode de Rayleigh appliqué à la résolution générale de problèmes de vibration de plusieurs structures pour la détermination des fréquences propres a été présentée en 1877. Après avoir amélioré la méthode de Rayleigh en supposant un ensemble de nouvelles fonctions test admissibles, Ritz a présenté la méthode de Rayleigh-Ritz ou la méthode de Ritz en 1909. Cette méthode d'approximatives est largement utilisée dans l'analyse des vibrations des structures. Après cela, de nombreuses recherches et études ont été publiées sur la vibration des plaques de différentes formes géométriques, avec différentes conditions aux limites et chargements, notamment : Timoshenko et Gere (1961), Kim (1988), Hinton (1988), Liew (1990a), Xiang (1993). Dickinson et Di Blasio (1986), Mizusawa et Leonard (1990). La plupart de ces publications traitent de plaques minces pour lesquelles l'effet de déformation par cisaillement est négligé, comme le montre la série des références de Leissa (1969, 1977a-b, 1981a-b, 1987), également une série d'études réalisées par Bert sur les plaques composites et sandwichs [Bert (1976, 1979, 1982, 1985, 1991a-b)] et d'autres références sur le même sujet [Reddy (1985), Kapania et Raciti (1989)]. D'autre part, l'effet de cisaillement est significatif dans les plaques plus épaisses [Mindlin (1951), Srinivas et Rao (1970)]. Pour obtenir des solutions précises pour la vibration des plaques, il convient de prendre en compte l'effet de cisaillement. Il existe de nombreuses théories sur l'incorporation de l'effet cisaillement transversal pour les plaques, la plus importante étant la théorie du premier ordre des plaques ou de Reissner-Mindlin [Mindlin (1951), Srinivas et Rao (1970), Reissner (1945)]. On trouvera la théorie modifiée de plaque de Mindlin dans les références [Bergan et Wang

(1984), Yang et *al.* (1966) et Whitney et Pagano (1970)]. La théorie d'ordre supérieur suppose que les champs de déplacements sont développables suivant les puissances de coordonnées d'épaisseur. Diverses théories d'ordre supérieur ont été proposées dans les références [Nelson et Lorch (1974), Lo et *al.* (1977), Levinson (1980), Murthy (1981), Reddy (1984), Senthilnathan (1989) et Doong et *al.* (1991)].

La théorie classique des plaques (CPT), qui néglige l'effet des déformations de cisaillement, peut induire des résultats imprécis pour l'analyse de plaques épaisses. La théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin rend compte de la déformation par l'épaisseur de la plaque et nécessite un facteur de correction du cisaillement afin de satisfaire la contrainte de cisaillement transversale nulle au sommet et à la base des plaques. Ce facteur a été illustré par Srinivas et Rao (1970) et Senthilnathan (1989). Les valeurs de ce facteur est prise comme $k = 5/6$ dans [Reissner (1945)] et $k = \pi^2/12$ dans [Mindlin (1951)]. Cependant, le facteur de correction de cisaillement exprimé en fonction du coefficient de Poisson $k = 20(1+\nu)/(24+25\nu+\nu^2)$ dans le travail de Nanni (1971). Noor et Burton (1989) ont présenté les différentes approches utilisées pour la modélisation de plaques composites multicouches en utilisant la théorie des plaques de Mindlin. En 1995, Liew et *al.* ont achevé une excellente recherche sur le développement de la théorie du premier ordre des plaques intitulées " Research On Thick Plate Vibration: A Literature Survey", pour en savoir plus à ce sujet, consultez cette étude.

Le premier travail qui applique la méthode des éléments finis hiérarchiques (HFEM) à l'analyse de la vibration libre de plaques est celui de Bardell (1991). Le même auteur dans son travail de (1992) a employé la méthode (HFEM) pour étudier la vibration libre d'une plaque biaise. Houmat (1997a-b) a étudié la vibration linéaire des plaques et des membranes par HFEM et comparé les fonctions de forme trigonométriques aux polynômes de Legendre. Leung et Chan (1998) ont utilisé des polynômes et des fonctions trigonométriques pour analyser les vibrations linéaires des poutres et des plaques et ont constaté que la précision est obtenue avec un nombre réduit de fonctions de forme. Beslin et Nicolas (1997) ont proposé un ensemble de fonctions trigonométriques hiérarchiques permettant de prédire le mouvement de flexion de structures en forme de plaque dans la gamme des moyennes fréquences. Bardell et *al.* (1998,1999) appliqué ces fonctions pour étudier les vibrations linéaires des coques.

Tenant compte des effets de l'inertie rotative, du cisaillement transversal et de la non-linéarité géométrique, la version- p a été présentée pour l'étude de vibration libre des plaques isotropes modérément épaisses par Ribeiro (2003). Leung et Zhu (2004) ont introduit un élément fini hiérarchique trapézoïdal pour la vibration non-linéaire libres et forcées des plaques biaises et trapézoïdales de Mindlin.

L'équipe de recherche composée de " Belalia et Houmat " a développé un élément- p courbé basé sur des fonctions de forme appliquée à la vibration libre de formes arbitraires de membranes et des plaques isotropes et en matériaux à gradient fonctionnel. La version- p de la méthode des éléments finis a été utilisée pour analyser la vibration libre non linéaire à grandes d'amplitudes des plaques sectorielles annulaires composites stratifiées avec des plis orthotropiques [Houmat (2008b)]. Houmat (2009) a présenté un élément- p sectorielle annulaire pour analyser la vibration libre non-linéaire d'une plaque elliptique annulaire composite stratifiée avec des plis orthotropiques elliptiques. Un élément- p triangulaire courbé est développé par Belalia et Houmat (2010) pour l'analyse de la vibration libre linéaire et non-linéaire des plaques sectorielles elliptiques isotropes modérément épaisses. Les mêmes auteurs (2012) a fait une analyse de vibration libre non linéaire des plaques sectorielles en matériaux à gradient fonctionnel en utilisant le même type d'élément. Toutefois, Belalia (2017a) a présenté une étude des propriétés mécaniques de vibration libre à grandes d'amplitudes des plaques sandwich en FGM. Le même auteur dans son travail de (2017b) a analysé le comportement vibratoire libre non linéaire de plaques rectangulaires sandwich bi-fonctionnellement graduées à l'aide de la version- p de la méthode des éléments finis. Récemment, le même auteur (2018) a fait une analyse de vibration libre non linéaire d'une plaque elliptique sandwiches en FGM à l'aide d'un élément- p hiérarchique courbé.

1.3. Bref historique des plaques avec des formes géométriques arbitraires

En tant qu'éléments structurels de base, les plaques minces et épaisses sont largement utilisées dans les structures mécaniques, civiles, nucléaires et aérospatiales. Une bonne compréhension des comportements dynamiques de ces composants structurels est cruciale pour la conception et l'évaluation des performances des systèmes mécaniques. Les problèmes de vibration des plaques sont importants dans de nombreuses branches de l'ingénierie et de nombreux problèmes ont été résolus par

diverses méthodes analytiques et numériques. Dans de telles analyses, la géométrie de la plaque joue un rôle majeur dans le choix des approches et des méthodes de résolution des problèmes. Les tentatives visant à obtenir des solutions analytiques pour les plaques arbitraires peuvent entraîner des tâches extrêmement fastidieuses (bien que pas impossibles) en raison de la nature complexe du problème découlant d'une limite courbée.

Un vaste corpus de littérature est disponible sur les études de vibrations des plaques de formes simples. Détails de la littérature existante couvrant la vibration des plaques ayant des formes simples (plaques carrées, rectangulaires, circulaires, rhombes, triangulaires, etc...) peuvent être trouvés dans les excellentes recherches de Leissa (1969,1977a-b,1981a-b,1987) pour les plaques minces et Liew et *al.* (1995) pour les plaques épaisses. Bogner et *al.* (1966) ont traité un élément très précis mais uniquement pour les plaques rectangulaires. Laura et Gutierrez (1976) ont utilisé le mappage conforme (Conformal Mapping) [Schinzin (1991)] et ont résolu les vibrations des plaques de formes polygonales régulières. Bucco et Mazumdar (1979) ont étudié le mouvement harmonique des flexions des plaques avec des formes arbitraires en combinant la méthode des contours de déflexion et la méthode des bandes finie. On notera en particulier que la méthode de Bucco ne donne que la fréquence fondamentale de la plaque. Nagaya (1980a-b,1981a-b,1984) a donné une méthode simplifiée (Fourier expansion collocation method) pour résoudre les problèmes de vibration et réponse dynamique des plaques de formes géométriques arbitraires. De nombreux problèmes de vibrations liés aux formes arbitraires ont été résolus en utilisant la méthode des bandes finies [Cheun et Chong (1984)] et la méthode des bandes finies spline [Cheung et *al.* (1989)]. Geannakakes et *al.* (1990) ont analysé la vibration des plaques quadrilatérales à l'aide de la méthode des bandes finies semi-analytiques. La fonction de Serendipity "Serendipity functions" a été utilisée pour transformer la plaque en système de coordonnées naturelles. Le même auteur dans son travail de (1995) a obtenu les fréquences naturelles des plaques de formes arbitraires en utilisant des polynômes orthogonaux normalisés et la méthode de Rayleigh-Ritz. Liew et *al.* (1990b, 1992, 1993) ont employé un ensemble de fonctions polynomiales bidimensionnelles comme fonction admissible dans l'approche de Rayleigh-Ritz pour l'analyse de la vibration des plaques biaises, elliptiques, circulaires et trapézoïdales. Kitipornchai et al (1994a) ont

employé la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour l'étude des vibrations des plaques de Mindlin arbitraires. En outre, les vibrations de plaques arbitraires de plate-forme trapézoïdale ont été étudiées par Kitipornchai et al. (1994b) et Lim et al. (1996). Liew et Liu (1997,1998) ont appliqué la méthode de cubature différentielle pour l'analyse de flexion des plaques minces et épaisses avec des formes géométriques arbitraires. Wu et al. (2003,2005) ont utilisé la même méthode pour résoudre les problèmes de flambage et vibration des plaques épaisses arbitraires. Kang and Lee (2001) ont fait une analyse de vibration libre pour des plaques encastrees avec des formes arbitraires en utilisant une nouvelle fonction (wave-type functions). De plus, Kang et al. (2002,2008) ont utilisé des fonctions d'influence dynamique non dimensionnelles pour étudier la vibration libre des plaques arbitraires avec différents types de conditions aux limites. Une méthode de convolution singulière discrète (DSC) à quatre nœuds a été développée par Civalek (2009) pour l'analyse de vibration libre des plaques quadrilatérales à côtés arbitraires. Malekzadeh et al. (2011) ont appliqué la méthode de quadrature différentielle (DQM), la théorie d'élasticité non locale d'Eringen et la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) pour analyser le problème de la vibration libre des nano-plaques quadrilatérales arbitraires. En 2015, une méthode de solution a été proposée pour l'analyse vibratoire de plaques triangulaires avec des formes géométriques arbitraires à bords restreints élastiquement [Zhang et Li (2015)]. Récemment, Battaglia et al. (2018a-b) ont employé deux méthodes Rayleigh – Ritz et nouvelle méthode (Line Element-Less Method) pour étudier la vibration libre des plaques arbitraires, respectivement. Shi et al. (2018) ont étudié les caractéristiques de vibration libre des plaques quadrilatérales à côtés droits arbitraires à l'aide d'une simple théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (SFSDT) et la technique de Rayleigh-Ritz.

La méthode des éléments finis a été rigoureusement testée et prouvée comme un outil puissant pour l'analyse de structures avec des descriptions mathématiques simples ainsi que pour les structures complexes. Dans l'analyse par éléments finis de plaques avec des configurations géométriques arbitraires, le problème principal réside dans le choix d'un élément approprié en raison des lacunes de nombreux éléments disponibles dans la modélisation de la nature arbitraire de la géométrie de la plaque. Dans l'antécédent, de nombreux chercheurs ont utilisé divers éléments en essayant de tenir

compte des bords arbitraires de la plaque. Les approches les plus courantes consistaient à approximer les bords courbés avec un grand nombre d'éléments triangulaires à côtés droits [Anderson (1968), Argyris (1966), Herman (1966), Petyt (1968)] ou de développer des éléments spéciaux permettant une représentation exacte des bords courbés [Olson et Lindberg (1969)]. Un élément triangulaire avec un des côtés modifiés pour inclure un côté courbé ont été utilisé par Chernuka et al. (1972). Barik et Mukhopadhyay (1998, 2002) ont présenté un nouvel élément pour l'analyse de vibrations libres, flambage et flexion des plaques avec des formes géométriques arbitraires. La version- p de la méthode des éléments finis basée sur les deux éléments- p (quadrilatéral et triangulaire) courbés est développée et appliquée pour l'analyse de vibration libre des membranes et des plaques avec des formes arbitraires [Houmat (2006,2008), Belalia et Houmat (2010,2012)]. Récemment, Basé sur un élément quadrilatéral hiérarchique courbé, Necira et al. (2020) ont appliqué le principe des déplacements virtuels, la théorie des plaques de Mindlin et les relations non locales pour l'analyse du problème de vibration libre des nano-plaques avec des formes géométriques arbitraires.

1.4. La vibration de nano-plaques basée sur la théorie d'élasticité non-locale

Actuellement, les dispositifs de micro et nano-échelle ont été largement utilisés dans de nombreuses applications d'ingénierie et biomédicales. Aussi ces équipements ont des nombreux domaines de potentiels des applications dans les industries modernes. En raison du développement rapide de la technologie, en particulier dans les domaines micro et nanométriques, les nano-plaques sont utilisées dans les systèmes micro ou nano-électromécaniques (MEMS ou NEMS) pour leurs propriétés supérieures mécaniques, thermiques et électriques. Ces systèmes comprennent les équipements biomédicaux et biochimiques, et équipement micro-électronique pour des mesures à échelle réduite dans la mécanique et les applications biologiques, tels que la vibration et la stabilité de ces dispositifs sont une tâche importante pour la conception.

Il est bien connu que, pour la structure à l'échelle nanométrique, la théorie classique de l'élasticité ne peut prédire le comportement mécanique des nanostructures. Ainsi, il est nécessaire de modifier un modèle de la mécanique des milieux continus pour étudier les réponses mécaniques des nanostructures. L'élasticité non locale a été largement

développée pour analyser les comportements mécaniques de diverses nanostructures en raison de ses résultats fiables et précis. La théorie de l'élasticité non locale est une théorie bien connue dans la mécanique du milieu continu, cette théorie introduite par Eringen (1972a-b, 1983, 2002) explique les effets à petite échelle survenant au niveau nanométrique. Contrairement aux théories classiques qui supposent que les contraintes en un point est une fonction de la déformation de ce point, la théorie de l'élasticité non local suppose que la contrainte à un point est une fonction de la déformation à tous les points voisins du corps. Ces théories contiennent des informations sur les forces entre les atomes, et l'échelle de longueur interne est introduite dans les équations constitutives en tant que paramètre matériel. Un certain nombre d'études réalisées ces dernières années sur les plaques à l'échelle nanométrique via un continuum non local ont été publiées.

Pin Lu et *al.* (2007) ont publié une recherche intitulée (Nonlocal elastic plate theories). Dans cet article, les équations et relations générales des modèles de plaques élastiques non locales ont été présentées, et les équations de base de deux théories des plaques non locales modifiées à partir de la théorie des plaques locales de Kirchhoff et de la théorie des plaques locales de Mindlin correspondantes. Les théories non locales peuvent être appliquées à l'analyse de structures en plaques de taille micro et nanométrique, dans lesquelles les effets à petite échelle deviennent importants. Aghababaei et Reddy (2009) ont étudié la flexion et la vibration d'une plaque en utilisant la théorie de troisième ordre de déformation de cisaillement, y compris l'effet non local. La théorie de plaques de Mindlin est basée sur l'hypothèse cinématique des sections droites ou planes. L'influence des déformations de cisaillement transversal est prise en compte : cette théorie inclut ainsi celle de Kirchhoff basée sur l'hypothèse de conservation des normales (en supposant négligeable l'influence des déformations de cisaillement transversal). À l'aide des relations constitutives différentielles non locales d'Eringen, Pradhan et Phadikar (2009) ont formulé la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT). Les effets du paramètre non local, la longueur et l'épaisseur de la nano-plaque, module d'élasticité et la rigidité de la fondation de Winkler fixée à la nano-plaque sur les fréquences propres de la nano-plaque sont ensuite étudiés.

De nombreux chercheurs ont appliqué les méthodes numériques à l'étude de la vibration des nano-plaques. Par conséquent, dans différentes études, les équations qui régissent sont résolues en utilisant la méthode de quadrature différentielle. Par exemple, Murmu et Pradhan (2009a) ont mis en œuvre la théorie de l'élasticité non locale pour étudier la réponse aux vibrations des nano-plaques dans des conditions de précontrainte uniaxiale. Dans leur étude, la DQM (Differential quadrature method) a été utilisé pour obtenir les fréquences propres fondamentales des nano-plaques simplement appuyées et encastées. Pour l'application de l'élasticité non locale à l'étude de la performance des nano-plaques, les mêmes auteurs dans leur travail (2009b) ont étudié l'influence de l'effet à petite échelle sur la vibration libre dans le plan en utilisant un modèle de continuum non local. Hashemi et Samaei (2011) ont proposé une solution analytique pour l'analyse de flambement de nano-plaques rectangulaires. Pour extraire les équations caractéristiques de la plaque micro / nanométrique sous une charge dans le plan, la procédure d'analyse est basée sur la théorie de plaque non locale de Mindlin prenant en compte les effets à petite échelle. Aksencer et Aydogdu (2011) ont présenté l'effet de petite échelle et différentes conditions aux limites sur les vibrations et le flambement des plaques non locales par la méthode de Levy. Malekzadeh et al. (2011) ont appliqué la méthode de quadrature différentielle (DQM), la théorie d'élasticité non locale d'Eringen et la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT) pour analyser le problème de la vibration libre des nano-plaques quadrilatérales. Farajpour et al. (2011) ont étudié le comportement en flambage de nano-plaques d'épaisseurs variables sous compression biaxiale, et ont résolu le problème par la méthode de Galerkin. Jomehzadeh et Saidi (2011) ont étudié la vibration tridimensionnelle de nano-plaques en utilisant la mécanique du continuum non locale. Wang et Li (2012) ont étudié le comportement en flexion d'une nano-plaque reposant sur un milieu élastique. Satish et al. (2012) ont analysé la vibration thermique de nano-plaques orthotropes en utilisant la théorie raffinée des plaques (RPT) à 2 variables et la mécanique du milieu continu non local. Dans le travail de Malekzadeh and Shojaee (2013), la vibration libre des nano-plaques est étudiée en utilisant la théorie raffinée des plaques à deux variables en combinaison avec la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen.

Basé sur la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale, Zenkour et Sobhy (2013) ont étudié le flambage thermique de nano-plaques reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. À l'aide de la théorie des plaques non locales en incluant l'effet de la fondation viscoélastique, les caractéristiques vibratoires d'une nano-plaques orthotropes viscoélastiques sont étudiées par Pouresmaeli et *al.* (2013). Assadi (2013) a présenté une méthode analytique pour étudier la vibration forcée de nano-plaques rectangulaires soumises à une charge externe en utilisant une forme généralisée du modèle de plaque de Kirchhoff. Hashemi et *al.* (2013) ont étudié les solutions analytiques exactes pour l'analyse des vibrations libres de nano-plaque rectangulaire de type Levy en utilisant la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement. Chakraverty et Behera (2014) ont étudié la vibration libre de nano-plaques rectangulaires et résolu les problèmes par la méthode de Rayleigh – Ritz. La vibration non locale d'une nano-plaque polymère piézoélectrique portant des nanoparticules via la théorie des plaques de Mindlin ont étudié par Haghshenas and Ghorbanpour Arani (2014). Panyatong et *al.* (2015) ont étudié le comportement en flexion de nano-plaques reposant sur un milieu élastique, y compris l'élasticité non locale et les contraintes de surface. Sari (2015) a appliqué la méthode de collocation de Chebyshev et la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen pour étudier la vibration libre des plaques annulaires sectorielles de Mindlin. Basé sur la théorie de plaque non locale de Mindlin, Anjomshoa et Tahani (2016) ont étudié l'analyse vibratoire de nano-plaques orthotropes circulaires et elliptiques reposant sur un milieu élastique en utilisant la méthode de Galerkin.

Il existe déjà différentes études sur l'utilisation de la modélisation de continuum non locale en analyse vibratoire de nano-plaques sandwiches. Arefi et Zenkour (2017) ont appliqué le principe de Hamilton, la théorie de plaque de Kirchhoff et les relations non locales électro-magnéto-élastiques à l'analyse du problème de vibration libre de nano-plaques sandwiches reposant sur la fondation de visco-Pasternak. Récemment, en 2020, l'équipe de recherche composée de Necira et *al.* (2020) ont publié une nouvelle étude intitulée "Size-dependent free vibration analysis of Mindlin nano-plates with curvilinear plan-forms by a high order curved hierarchical finite element". Dans leurs études, la théorie non-locale d'Eringen est utilisée dans la théorie des plaques de Mindlin pour étudier la vibration libre des nano-plaques avec des formes géométriques arbitraires. La méthode des éléments finis hiérarchiques (HFEM) basée sur un élément quadrilatéral

courbé est développée et appliquée à l'analyse de vibration libre de nano-plaques arbitraires. La géométrie de l'élément- p est représentée exactement par la méthode de la fonction de mélange. Le principe des déplacements virtuels est utilisé pour dériver les équations de mouvement des nano-plaques de formes géométriques arbitraires. Les résultats pour les fréquences linéaires des nano-plaques arbitraires ont montré la convergence rapide et l'exactitude élevée de l'élément proposé. Les effets des variations de paramètre non local, rapport d'excentricité, rapport d'épaisseur, numéro de mode, angle de secteur et des conditions aux limites sur les valeurs de fréquence d'une nano-plaque sont ensuite étudiés.

1.5. Quelle est l'importance d'étudier la vibration des nano-plaques arbitraires, et pourquoi l'élément- p quadrilatéral courbé a été choisi pour cela.....?

L'analyse des vibrations des nano-plaques arbitraires étant un élément important pour une conception et une utilisation efficace de nombreux systèmes micro ou nano-électromécaniques (MEMS ou NEMS) tels que des capteurs et des actionneurs, pour leurs propriétés supérieures mécaniques, thermiques et électriques. La modélisation des formes géométriques arbitraires des nano-plaque par la version- p est impossible, puisque cette version est basée sur les formes géométriques régulières (carré, rectangle, cercle, etc...). Afin de surmonter les difficultés de maillage par éléments finis des nano-plaques avec des formes géométriques complexes, un nouvel élément quadrilatéral courbé a été développé dans notre étude. Il permet une représentation exacte d'un domaine courbé sans affecter indûment la précision de l'approximation locale à l'aide des fonctions de mélange.

Chapitre 2

Théorie de plaques locales et non locales

Objectif

Le présent chapitre aborde le sujet de la modélisation des plaques et les théories d'élasticité existées dans ce domaine. Ces théories sont divisées en deux parties, selon deux critères. Selon la prise en compte du cisaillement ou non : on trouve globalement trois types dans la littérature, la théorie classique des plaques (CPT), la théorie du premier ordre des plaques (FSDT) et la théorie d'ordre élevé (HSDT). Un deuxième critère est la prise en compte de l'effet d'échelle: on trouve deux théories, la théorie locale et la théorie non locale (théories non-locales à gradient et théories non-locales intégrales). Dans ce travail, on va utiliser la théorie non-locale intégrale.

2.1. Introduction

Les plaques sont considérées comme un volume compris entre deux surfaces planes de telle sorte que la distance h (épaisseur) entre ces deux surfaces, soit petite par rapport aux deux autres dimensions. Suite à cette caractéristique géométrique très importante, le modèle tridimensionnel se réduit à un modèle bidimensionnel. La plaque admet aussi un plan de symétrie passant par le milieu de l'épaisseur appelé surface moyenne (figure 2.1). Le comportement des plaques peut être défini selon de sa théorie appliquée (CPT, FSDT...etc.). Les théories des plaques sont classées en fonction de la nature de son matériau (isotrope, composite...etc.) et de sa géométrie principalement son épaisseur (mince, modérément épaisse et épaisse).

Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur h varie en sens inverse de l'influence de cisaillement transversal.

Ces plaques sont souvent suivies de l'adjectif mince ou épais suivant la grandeur de l'épaisseur h , nous admettons généralement.

$$\text{➤ pour les plaques épaisses. } \frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{4} \quad (2.1)$$

$$\text{➤ Pour les plaques minces. } \frac{h}{L} < \frac{1}{20} \quad (2.2)$$

Dans le domaine élastique, l'étude du comportement statique et dynamique des structures mécaniques comme des poutres et des plaques nécessite de choisir la meilleure théorie et la méthode de résolution appropriée afin d'obtenir une bonne modélisation et identification de ces structures.

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés suivant les besoins du site industriel d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique d'analyse: (a) les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée. (b) plaques modérées

ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée. (c) la théorie d'ordre élevé est basée sur une variation non linéaire de champ de déplacement dans l'épaisseur. Cette théorie est particulièrement bien adaptée à la modélisation du comportement des plaques épaisses telles que l'effet de cisaillement est prises en compte.

La théorie des plaques repose sur les hypothèses suivantes :

H.1 : Les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes : $\sigma_{zz} = 0$.

H.2 : Les pentes de la surface moyenne après déformation, sont supposées petites par rapport à l'unité (Petite déflexion du plan moyen).

H.3 : Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation, restent sur cette normale au cours de la déformation ; ceci permet de négliger l'effet de cisaillement transversal. Dans ce cas, on a : $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

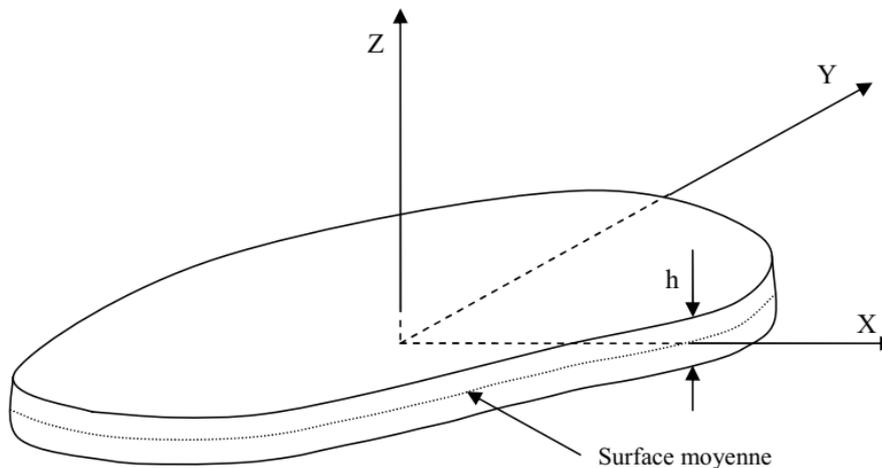


Figure 2.1 : Plaque de forme géométrique arbitraire.

2.2. Théorie des plaques selon la prise en compte du cisaillement :

La construction d'une théorie de plaques nécessite l'introduction de certaines hypothèses, qui représentent des simplifications acceptables de la réalité. Plusieurs théories dans la littérature jouent sur la prise en compte ou non du cisaillement. Afin

d'améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques, quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature seront discutés dans ce chapitre.

2.2.1. Théorie des plaques minces:

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier, les transports, le génie civil ou encore les instruments de musique. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit...). En ingénierie ou en recherche, la plus part des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement vibratoire.

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Le premier modèle des plaques minces, a été donné en 1850 par Kirchhoff et reconnu comme, la théorie classique des plaques minces CPT. La théorie de Kirchhoff est généralement admise comme étant la théorie des plaques minces dont la caractéristique principale, est de permettre l'expression des déformations et des contraintes en fonction de la flèche w de la surface moyenne. La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élancement de la plaque ($\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$).

2.2.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Puisque ce modèle adopte l'hypothèse de contraintes planes de Love-Kirchhoff, les déformations dues au cisaillement transverse n'est pas prise en compte. Cette théorie est caractérisée par la distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [Reissner et Stavsky (1961), Yang et al. (1966)] et suppose que la normale reste droite perpendiculaire à la surface moyenne après déformation (figure 2.2). Elle énonce les hypothèses suivantes [Kirchhoff (1850)] :

- 1) La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre et aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.

- 2) La contrainte normale σ_{zz} dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.
- 3) Comme illustré dans la figure 2.2, les sections droites, initialement normales au plan moyen de la plaque non déformée restent perpendiculaire au plan moyen déformé. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.
- 4) L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

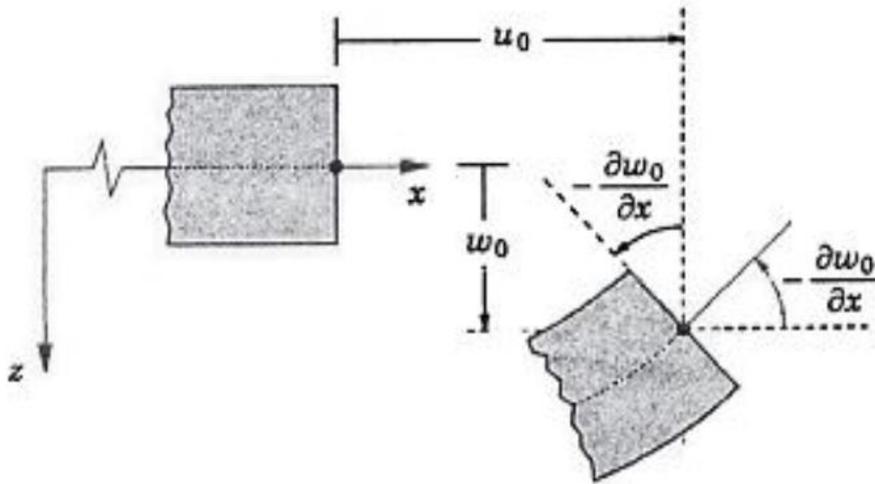


Figure 2.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy (2004)].

Ce modèle de plaque peut être référé à [Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger, (1959)], et [Reddy. J.N (1997,1999)].

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.5)$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

2.2.2. Théorie des plaques épaisses

Lorsque les plaques ont des épaisseurs significatives il devient nécessaire de tenir compte des effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation pour décrire leur comportement dynamique. Mais la théorie classique de Love-Kirchhoff néglige ces effets, et donne par conséquent des résultats imprécis pour les plaques épaisses. Pour surmonter ces limitations, plusieurs auteurs ont proposé des modèles plus raffinés. Reissner a été l'un des premiers, et Mindlin et d'autres ont suivi. En 1945, Reissner a présenté la théorie de plaque épaisse. Cette théorie tient en compte l'effet de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin (1951) a présenté un travail différent de Reissner, une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans la littérature, les vibrations des plaques fondées sur les hypothèses du premier ordre de cisaillement transversal sont largement mentionnées sous le nom de plaques de Mindlin, Reissner-Mindlin ou Hencky-Mindlin.

2.2.2.1. Théorie du premier ordre des plaques (First Order Shear Plate Theory FSDT):

Puisque les résultats des plaques épaisses obtenues par CPT sont non précis, la théorie classique des plaques est étendue par la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Selon cette théorie, les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque, donc il est important d'introduire un facteur de correction de cisaillement.

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points (1 et 2) de celles de Kirchhoff. Les points 3 et 4 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets. Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie de Mindlin détend l'hypothèse de normalité de sorte que :

- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite (figure 2.3), mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen déformée. Cette hypothèse signifie que les déformations et les contraintes sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, mais cela contredit la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces extérieures. Pour corriger cette déficience, Mindlin (1951) a proposé un facteur k_s de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. De plus, la quatrième hypothèse a été modifiée par Mindlin (1951) afin que :

- L'effet de l'inertie rotation est inclus.

Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre est donné sous la forme suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \quad (2.6)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (2.7)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.8)$$

Les quantités u , v et w qui sont des fonctions inconnues, sont appelées déplacements généralisés du système. Quant aux fonctions $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$, elles peuvent s'interpréter comme des rotations des normales à la surface de la plaque autour des axes ox et oy , et elles seront avec la déflexion w les inconnues du problème.

L'application de la substitution suivante : $\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$ dans le champ de déplacement définis (2.6-8) par la théorie du premier ordre permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la section précédente.

Les éléments basés sur la théorie Mindlin-Reissner sont les mieux adaptés dans le cas des plaques d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des trois variables indépendantes w , θ_x , θ_y .

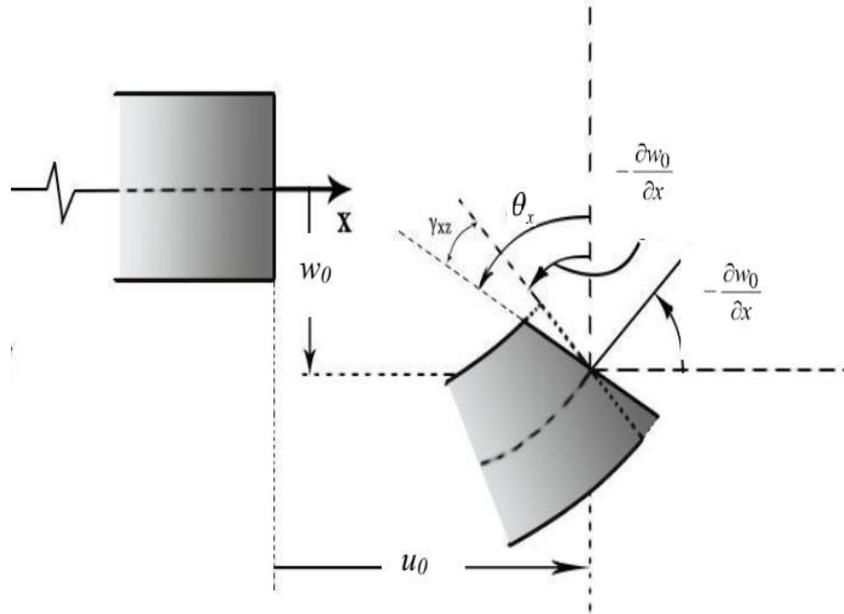


Figure 2.3 : Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation selon la théorie du premier ordre des plaques [Reddy(1997)].

2.2.2.2. Interprétation et calcul de facteur de correction du cisaillement transversal

Dans la théorie de Mindlin, l'hypothèse de contraintes de cisaillement (σ_{xz}, σ_{yz}) sont constantes suivant toute l'épaisseur de la plaque est contradictoire au fait que la contrainte de cisaillement est nulle sur les surfaces extérieures, ce qui nous amène à utiliser un facteur de correction du cisaillement k_s pour corriger cette insuffisance [Jaouen (2002)].

Le facteur k_s est calculé de sorte que l'énergie de déformation due aux efforts de cisaillement transversal obtenue par la théorie de premier ordre des plaques est égale (ou équivalente) à l'énergie de déformation due aux efforts de cisaillement transversal prévus par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

Mindlin (1951) a conclu que ce facteur était lié au coefficient de poisson ν où, dans le cas d'un matériau isotrope, les valeurs les plus généralement admises pour k_s varient linéairement de 0,76 pour $\nu = 0$ à 0,91 pour $\nu = 0,5$. Suivant la suggestion de Mindlin, nous pouvons montrer que le facteur k_s est solution d'une équation polynomiale d'ordre 3 suivante [Liew et al. (1998)] :

$$k_s^3 - 8k_s^2 + \frac{8(2-\nu)k_s}{1-\nu} - \frac{8}{1-\nu} = 0 \quad (2.9)$$

Par exemples : si $\nu = 0.3$, alors $k_s = 0.86$ et si $\nu = 0.176$, alors $k_s = \pi^2/12$

Wittrick a étudié le cas d'une plaque simplement supportée en 1987, proposant une approximation de k_s comme suit :

$$k_s = \frac{5}{6-\nu} \quad (2.10)$$

En s'appuyant sur les résultats de l'étude de Mindlin et Reissner (1945) qui adopte une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, nous pouvons obtenir l'expression suivante du facteur de correction du cisaillement transversal : $k_s=5/6$.

Bien que tous les auteurs s'accordent sur l'influence du facteur k_s sur les résultats, cela reste un sujet de débat quand il a été utilisé à ce jour.

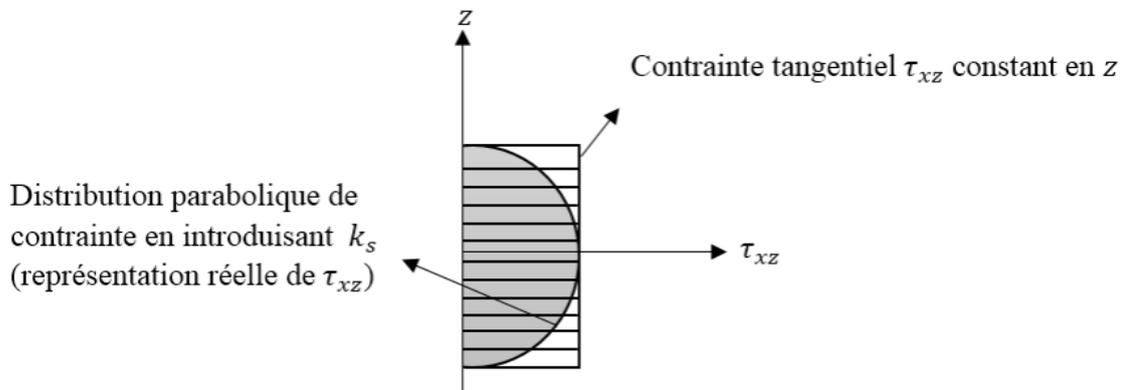


Figure 2.4 : Distribution de contrainte du cisaillement transversal de la théorie FSDT [Reddy (2004)].

2.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Comme mentionné précédemment, la distribution des déplacements suivant l'épaisseur est linéaire dans le cas de la théorie classique des plaques (CPT) et le cisaillement transversal est uniforme à travers l'épaisseur selon la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).

Afin d'obtenir une meilleure représentation des déformations et contraintes de cisaillement transverse sans recours à l'utilisation de facteurs de correction de CT, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par Reddy (1984), Reissner (1975), Iyengar et al. (1974), Iyengar et Pandya (1982), et Krishna Murty (1977) parmi lesquelles la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur HSDT qui se caractérise par une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur.

Selon cette théorie, pas besoin d'introduire les facteurs de correction de cisaillement, car la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur de la plaque. Les hypothèses qui sont à la base du développement de ces théories sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation (figure 2.4).
- Le cisaillement existe non corrigé par un coefficient de correction k_s mais introduit par des fonctions cubiques.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

Le champ des déplacements de la théorie *HSDT*, s'écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \quad (2.11)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \quad (2.12)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.13)$$

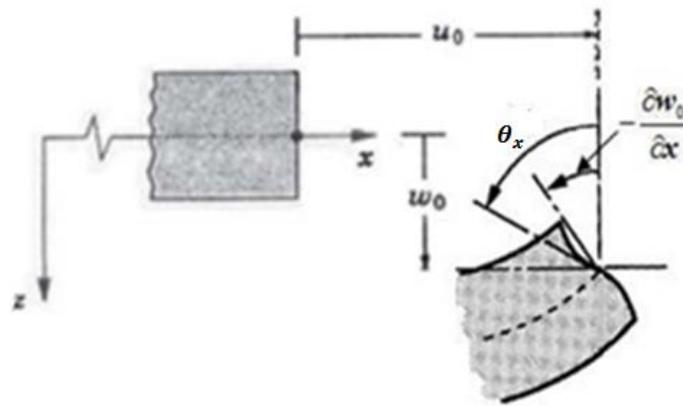


Figure 2.5 : Géométrie avant et après déformation d'un élément de la plaque dans le cas de HSDT [Reddy(1997)].

Avec (u_0, v_0, w_0) et (θ_x, θ_y) sont les déplacements et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x$ et $\phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y)$. $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant $f(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z)=z$.

2.2.4. Avantages et limitations

À travers notre lecture de la littérature en matière de théories des plaques, il existe deux théories largement utilisées, et qui sont fondées sur une distribution linéaire globale: la théorie classique des plaques (CPT), qui est basée principalement sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles la distribution des déplacements suivant l'épaisseur est linéaire et les déformations de cisaillement transverse sont également négligés, ainsi que la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) qui permet d'intégrer le cisaillement transversal d'une façon uniforme à travers l'épaisseur.

Contrairement aux deux théories précédentes avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé (HSDT) repose sur la distribution non linéaire des champs le long de l'épaisseur de la plaque.

L'évaluation globale des études antérieures dans la littérature pour l'analyse des plaques montrent qu'il n'y a pas de modèle parfait qui garantisse la description correcte de comportement statique et dynamique de la plaque telle que chaque théorie des plaques comporte plusieurs avantages et inconvénients. Le problème de la théorie CPT est que la supposition de la déformation de section de la plaque n'est pas évidente dans les autres cas comme les plaques épaisses et d'autre part le cisaillement est négligé malgré qu'il existe en réalité.

Les résultats obtenus par la théorie HSDT sont précis numériquement c'est grâce à l'utilisation des fonctions mathématiques pour estimer le cisaillement. Mais d'autre part, les fonctions qui sont données par les chercheurs donnent un développement continu de cette théorie et causent des perturbations dans les résultats et des erreurs de calcul. Les théories d'ordre élevé sont aussi considérées comme coûteuses en temps de calcul et assez complexes en matière de formulations.

2.2.5. Pourquoi choisir la théorie du premier ordre pour la modélisation des nano-plaques ?

Par rapport aux deux méthodes (CPT et HSDT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT tient compte de l'effet du cisaillement transversal, où elle suppose que les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur. Cela oblige l'introduction d'un facteur de correction. Mais le problème est que ce facteur n'a pas de valeur précise et est difficile à déterminer à cause de sa dépendance au coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, de la géométrie, des conditions aux limites et charges appliquées. Cependant, la théorie FSDT est également assez précise numériquement pour l'estimation de diverses réponses obtenues dans le domaine de la macro-mécanique et nano-mécanique, telles que les déflexions, les fréquences et modes propres et charges critiques de flambage. C'est pourquoi nous avons choisi la théorie FSDT pour la modélisation dynamique des nano-plaques de formes géométriques arbitraires, et plus précisément, le comportement vibratoire avec la prise en compte des effets de cisaillement transversal, inertie de rotation, et paramètres physiques et géométriques.

2.3. Théories des plaques selon la prise en compte de l'effet d'échelle :

L'effet d'échelle a une grande influence sur le comportement des structures au niveau micro et nano-métrique et moindre influence pour macro-métrique, de sorte que la précision de la modélisation pour chaque structure (micro et nano) dépend en grande partie de l'influence de l'effet d'échelle.

Les nano plaques sont un nouveau sous-groupe de nanostructures ascendantes avec une forme bidimensionnelle. Des exemples de nano plaques minces sont des feuilles de graphène, des nano plaques d'or, etc. Une image typique de nano-plaque est illustrée à la figure 2.6. Les nanostructures bidimensionnelles ont une application potentielle dans le stockage de l'information, le catalyseur, les transducteurs, les cellules solaires, les MEMS / NEMS et les composants dans les nano machines, etc.

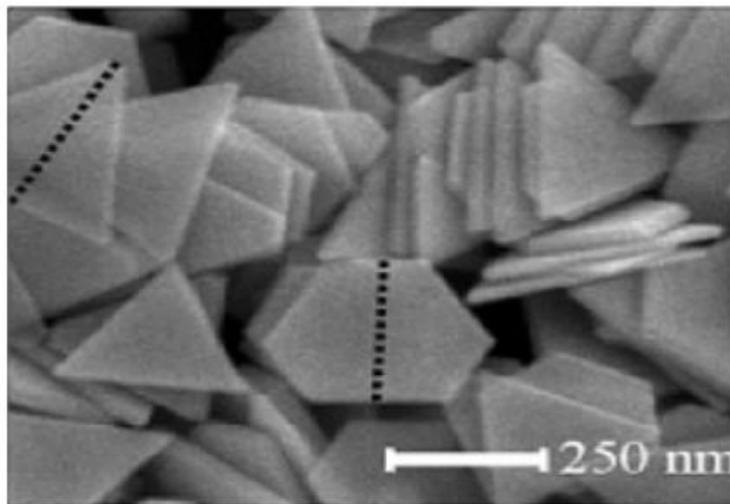


Figure 2.6 : Microscopie électronique à balayage à grossissement élevé de nano-plaques d'or monocristallin [Karličić et al. (2016)].

2.3.1. La théorie locale d'élasticité :

Cette théorie néglige les forces entre atomiques et ne tient pas en compte de l'effet d'échelle. Cependant, la théorie classique de l'élasticité est appliquée pour la modélisation des structures macro-métriques mais ne permet pas d'étudier des structures micro ou nanométriques.

2.3.2. La théorie non locale d'élasticité

La croissante importance des nanotechnologies a mis en évidence le besoin accru des modèles mathématiques ont la capacité de capturer les effets de la petite taille de ces structures. A cet effet, il s'est avéré que les modèles classiques des plaques semblent insatisfaisants pour modéliser un tel système. En conséquent, il est préférable d'après les chercheurs de prendre une nouvelle théorie dit « Non locale » capable de résoudre un tel problème. Les théories de l'élasticité non locale sont concernées par la physique des corps matériels dont le comportement à un point matériel est influencé par l'état de tous les points du corps. Ainsi, l'état de contraintes en un point intérieur d'un corps est considéré comme fonction de déformations de tous les points dans les régions voisines.

2.3.2.1. Limites de la théorie classique et intérêt de l'approche non locale

Les limites de la théorie classique de l'élasticité résident dans son incapacité à traiter des problèmes pour lesquels les évènements produisant à une échelle microscopique ou microstructurale ont une influence significative. Eringen (1987, 2002) a attribué cette incapacité à l'absence d'une longueur interne caractéristique du matériau, dans le modèle de comportement élastique classique. La communauté scientifique a présenté plusieurs explications physiques [Di Paola et al. (2010)] pour comprendre les limites de la théorie classique de l'élasticité. L'une de ces explications est l'influence croissante de l'énergie de surface aux petites échelles ou bien le rôle non négligeable de la microstructure interne du matériau.

Dans ce contexte, L'idée principale est d'utiliser un modèle de milieu continu capable prendre en compte l'influence de la microstructure. À cet effet, il s'est avéré que l'approche non locale se présente comme une alternative intéressante, à mi-chemin entre les théories atomiques et la mécanique classique. Les théories non locales sont une généralisation des théories classiques pour lesquelles le comportement en un point matériel est influencé par l'état en chaque point du solide.

Ce type d'approche, dont La formulation mathématique induit naturellement une longueur interne caractéristique du matériau, permet de décrire plus finement le comportement élastique par la prise en compte des interactions à longue distance.

On peut grossièrement classer les théories non locales en deux catégories

- Les théories non locales à gradient
- Les théories non locales intégrales

2.3.2.2. Théories non locales à gradient

Il existe deux types légèrement différents de cette théorie

Pour matérialiser l'influence de la microstructure interne, le premier type de cette théorie reconnaît que chaque point matériel du solide possède des degrés de liberté supplémentaires, qui correspondent à des micro-contraintes et des micro-déformations additionnelles. Cette théorie a été posée dans les années 60 par plusieurs auteurs. [Krumhansl (1967), Kunin (1967)]. Dès le début des années 1970, Eringen a lui aussi contribué à son développement (Eringen 1972).

Dans ce type de modèle, le solide est constitué d'un ensemble de particules matérielles qui sont susceptibles de se dilater, se contracter ou tourner sur elles-mêmes. Ces degrés de libertés supplémentaires engendrent des micro-contraintes qui viennent s'ajouter à la contrainte classique prévue par la théorie locale. Grâce à cette théorie ont été étudiés de nouveaux modèles (le comportement, à travers notamment, la définition des milieux micromorphes microstretches ou micropolaires) [Eringen (2002)].

À cet égard, Gao (1999-a, 1999-b) a introduit dans les équations d'équilibre non locales les moments liés aux rotations relatives de particules les unes par rapport aux autres.

D'autre part, la deuxième approche est évidente dans les travaux de de Aifantis (1992, 1994), Askas et Aifantis (2002) ou encore, Altan et Aifantis (1997). Cette formulation est basée sur l'introduction de gradients de la déformation dans l'équation de comportement élastique. Ces auteurs remarquent que la singularité au voisinage de la pointe de fissure disparaît lorsqu'on utilise une loi de comportement dans laquelle les contraintes ne dépendent pas uniquement du tenseur de déformation, mais aussi de ses dérivées secondes.

Selon ces auteurs, l'introduction de gradients d'ordre Supérieur permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau sur la loi de comportement.

L'équation de comportement de la théorie des gradients s'écrit :

$$\sigma = C(\varepsilon - l^2 \nabla^2 \varepsilon) \quad (2.14)$$

Où σ et ε correspondant respectivement au tenseur de contrainte de Cauchy et au tenseur de déformation linéaire. Rappelons que l'opérateur nabla $\nabla(\cdot)$ pour composantes en coordonnées cartésiennes. $\nabla(\cdot) = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial y} + \frac{\partial \cdot}{\partial z} \right)$

Le paramètre (l) est homogène à une longueur, représentative de la microstructure interne du matériau. On peut d'ores et déjà remarquer que lorsque (l) s'annule, on retrouve le modèle classique de comportement élastique (loi de Hooke généralisée).

2.3.2.3. Théories non locales intégrales

Dans cette dernière partie, nous nous intéressons particulièrement à l'approche non locale intégrale ou « théories non locales forte ». Cette formulation a été développée initialement dans les années 1960 par Krumhansl (1963). Kroner (1967) et Kunin (1967). Krumhansl a travaillé sur la conversion de la théorie des réseaux en une théorie continue. De son côté, Kroner propose d'affiner la théorie des milieux continus élastiques en y introduisant des forces d'interaction à longue distance.

Au début des années 1970, une formulation améliorée de l'approche non locale, qui précise les relations de comportement dans le cadre de la thermodynamique est présentée par Eringen et Edelen (1972). Un certain nombre d'auteurs [Gao (1999), Polizzotto (2001)] ont soumis des contributions plus récentes qui ont enrichi cette formulation. En conséquence, dans le contexte de non local, l'énergie interne en un point dépend du champ de déformation dans tout le solide. En conséquence, il est devenu nécessaire d'intégrer le premier principe de la thermodynamique dans l'ensemble du domaine d'étude.

Plusieurs auteurs [Edelen et Laws (1971), Edelen et al (1971)] ont proposé une formulation « locale » du premier principe dans laquelle un terme d'énergie résiduel

supplémentaire apparaît. Ce résidu non local représente l'énergie transmise en un point par tous les autres points du solide.

Eringen et Kim (1974) proposent une approche non locale pour le cas particulier d'un solide élastique non local, isotrope et linéaire. Cette approche ne diffère de l'approche continue classique que par la relation entre les déformations et les contraintes de manière à ce que le champ de contrainte soit exprimé par l'intégrale pondérée des déformations sur l'ensemble du domaine d'étude.

Le modèle de comportement comprend également un paramètre (l) qui définit la portée des interactions et permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau.

La loi de comportement proposée par Eringen peut se mettre sous la forme suivante

$$t_{ij}(x) = C_{ijkl} \int_V \alpha(|x' - x|, l) \varepsilon_{kl}(x') dV(x') \quad (2.15)$$

Où t et ε sont respectivement le tenseur de contrainte non local et le tenseur de déformation.

$$\varepsilon_{kl}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.16)$$

(C) Correspond au tenseur d'élasticité et $\alpha(|x' - x|, l)$ est la fonction de caractérisation non locale (la fonction du noyau). le paramètre (l) représente une longueur interne caractéristique du matériau.

D'après, l'équation (2.15) le tenseur de contrainte au point x dépend des déformations en tout point à l'intérieur du domaine V . Ce modèle est donc très différent de la loi de Hooke généralisée où la contrainte dépend de la déformation en un point uniquement. La fonction de caractérisation dépend de (l) et de la distance euclidienne entre x et x' .

En outre, nous sommes particulièrement intéressés par la théorie non locale intégrale d'Eringen, qui sera discutée en détail dans le quatrième chapitre.

Chapitre 3

Version- p de la méthode des éléments finis

Objectif

Le but de ce chapitre est d'étudier les particularités de la version- p de la méthode des éléments finis afin de les utiliser pour modéliser des nano-plaques arbitraires en vibration libre par un élément- p quadrilatéral courbé. Ce chapitre contient plusieurs parties où il commence par une introduction à la version- p avec ses avantages et ses inconvénients suivie d'une comparaison entre les deux versions p et h . La technique d'adaptation du maillage est présentée dans la cinquième partie. La sixième partie est consacrée aux fonctions de formes hiérarchiques utilisées dans la version- p pour les éléments unidimensionnels et bidimensionnels. En termine ce chapitre par les procédures de la modélisation géométrique de l'élément- p quadrilatérale courbé par la version- p . Alors que, la description théorique de l'élément est faite par la méthode des fonctions de mélange (Blending Function Method).

3.1. Introduction

La version- p de la méthode des éléments finis est issue des travaux de Babuška [Babuška et al. (1981), Babuška et Suri (1990)] et Szabó (1986, 1990). Elle consiste, en conservant le maillage initial, à introduire de nouveaux degrés de liberté en augmentant dans certaines zones le degré de l'interpolation des fonctions de forme. L'historique de la version- p de la méthode des éléments finis a été marqué par des étapes marquantes suivantes : la proposition de concept des fonctions de forme hiérarchiques et l'utilisation des fonctions de Lagrange de degrés élevés [Zienkiewicz et al. (1970), Zienkiewicz (1979)], respectivement. L'introduction des fonctions hiérarchiques dans les éléments finis pour déceler la naissance d'une version- p efficace [Peano (1975)]. L'étude de la convergence de la version- p et l'établissement de la base théorique de la méthode- p [Babuska et al. (1981)]. L'analyse d'erreur de la méthode- p et le premier enseignement de la méthode des éléments finis basé sur la méthode- p en 1991 [Szabo et Babuska (1991)].

La version- p a une exigence de maillage simple, une base théorique solide et la réputation de fournir des solutions robustes, précises et convergence de manière exponentielle aux différents problèmes. Ainsi, la version- p est en plein essor, et les codes- p sont maintenant disponibles sur le marché [Probe (1985), Fiesta (1990), ESRD (1998) et Ansys].

3.2. Avantage de la version- p

La version- p de la méthode des éléments finis présente de nombreux attraits [Babuska et Szabo (1982), Babuska et Suri (1990), Szabo et Babuska (1991) et Szabo (1991)].

Elle est plus précise et sa convergence est plus rapide que celle de la version- h . Le taux de convergence est cependant intimement lié au type de problème à résoudre. En effet, pour différents problèmes, on observe les caractéristiques suivantes:

- Lorsque la solution exacte est partout analytique (problèmes de Catégorie A), le taux de convergence de la version- p est exponentiel alors que celui de la version- h n'est qu'algébrique.

- Lorsque la solution exacte contient un nombre fini de points singuliers (problèmes de Catégorie B), le taux de convergence de la version- p est algébrique, mais il est deux fois plus élevé que celui de la méthode- h lorsque ces points singuliers sont aussi des noeuds-sommets du maillage. Notons que la plupart des problèmes de statique linéaire rencontrés dans la pratique appartiennent à cette catégorie.
- Lorsque la solution contient un nombre infini de points singuliers (problèmes de Catégorie C), le taux de convergence de la version- p est identique à celui de la version- h .

La qualité des solutions est peu sensible aux distorsions des éléments, ce qui permet l'utilisation d'éléments aplatis ou de grand rapport de côtés sans trop pénaliser la précision.

Aucun verrouillage numérique dû au quasi incompressibilité de certains matériaux n'est observé. Cependant, lorsque le coefficient de Poisson est plus proche de 0.5, la convergence asymptotique de la version- p s'obtient à partir d'un degré plus élevé.

Comme une formulation hiérarchique est adoptée pour la représentation des déplacements, la matrice de rigidité relative à un degré donné imbrique celles de degrés inférieurs. Ceci permet d'obtenir de manière économique une séquence de solutions au lieu d'une seule solution comme le cas de la version- h . Il est donc possible d'utiliser des techniques d'extrapolation pour le contrôle de la qualité des analyses : les solutions convergent de manière strictement monotone, ce qui permet d'estimer l'énergie potentielle totale exacte du problème à partir de trois solutions consécutives en utilisant une procédure d'extrapolation de Richardson. L'erreur globale peut ainsi être estimée.

En termes de coûts de réalisation de maillage, cette méthode est très séduisante car un seul maillage est nécessaire. De plus le maillage utilisé comporte toujours très peu d'éléments et peut être directement obtenue par division des structures en macro-éléments ; donc la tâche de modélisation facile à réaliser.

L'utilisation de la version- p permet d'éviter les erreurs liées à la modélisation, cela est dû à la représentation exacte de la géométrie (voir la partie 3.7).

3.3. Inconvénients de la version- p

La version- p présente toutefois certaines limitations.

Tout d'abord, la version- p convient bien pour une analyse détaillée des composantes d'une structure complexe. En effet, dans ce cas le nombre de points singuliers est souvent réduit et l'on bénéficie pleinement de la vitesse de convergence élevée de la méthode. Un champ de contrainte de qualité supérieure est obtenu avec peu de degrés de liberté, ce qui permet une analyse locale précise. Par contre, la version- h semble plus adéquate pour obtenir une solution globale car le maillage structuré d'une pièce mécanique comportant plusieurs niveaux de détails est très difficile à réaliser et aboutit souvent à un grand nombre d'éléments.

Pour des problèmes dont la solution contient un nombre infini de points singuliers (problèmes de Catégorie C), la version- p n'est pas meilleure que la version- h du point de vue de la convergence. A noter que les structures composées de plusieurs matériaux et les structures en régime élastoplastique font partie des problèmes de la Catégorie C.

Pour un même nombre de degrés de liberté, la matrice de rigidité relative à la version- p est plus dense. Ceci signifie que, pour le même nombre de degrés de liberté, les demandes en mémoire centrale et en temps de calcul seront plus importantes. Mais en choisissant des méthodes de résolution appropriées, le gain de précision l'emporte sur l'augmentation du temps de calcul [Carnevali et al. 1993].

Enfin, la version- p n'est pas facile à intégrer dans un code existant parce que celui-ci ne prévoit généralement pas d'outils de pré- et post-traitement pour des éléments de degré élevé.

3.4. Comparaison entre la version- p et - h

La précision de l'approximation par éléments finis peut être améliorée de deux manières. La première, la plus courante, consiste à raffiner le maillage d'éléments finis tout en maintenant le degré des éléments. C'est ce qu'on appelle la version- h de la méthode des éléments finis ou simplement la méthode des éléments finis (FEM). La deuxième méthode consiste à maintenir la taille du maillage constante et à laisser le degré d'approximation des fonctions polynomiales tendre à l'infini [Peano (1976),

Babuska et al. (1981)]. Cette approche est mieux connue sous le nom de version- p de la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments finis hiérarchiques (HFEM).

Les éléments de la version- p présentent plusieurs avantages par rapport à la version- h :

1. Ils ont des matrices mieux conditionnées.
2. Ils ne nécessitent pas de changement de maillage et peuvent facilement être utilisés dans l'analyse adaptative [Peano et al. (1979), Papadrakakis et Babilis (1994)].
3. Un seul élément de version- p peut prédire des solutions précises pour une structure simple.
4. Les éléments de la version- p ont tendance à donner les mêmes résultats précis avec beaucoup moins de degrés de liberté que la version- h [(Houmat (1997a-b), (2000), (2001a-b), (2004)].
5. Les éléments de la version- p peuvent surmonter certains problèmes de verrouillage [Zienkiewicz et Taylor (1989)].

Le tableau 3.1 montre la comparaison entre la version- p et - h selon de plusieurs aspects discutés précédemment

Tableau 3.1: Comparaison entre la version- p et - h .

Aspect	Version- h	Version - p
1. Convergence		
Catégorie A	Taux algébrique	Taux exponentiel
Catégorie B	Taux algébrique	Taux algébrique supérieur
Catégorie C	Taux algébrique	Taux algébrique
2. Précision		
Distorsion des éléments	sensible	Peu sensible
Quasi incompressibilité	Verrouillage	Pas de verrouillage
3. Contrôle de la qualité		
Nombre de solution	l	p
Estimation de l'énergie potentielle totale	Impossible	Possible si $p \geq 3$
Estimation de la précision globale	Estimateur d'erreur	Extrapolation de Richardson et estimateur d'erreur
Estimation de la précision locale	Estimateurs d'erreur	Indicateurs d'erreur et estimateurs d'erreur
Vérification de la convergence des tensions	Impossible	Possible
Erreurs géométrique	Non négligeable	Nulle
Erreurs sur les données	Difficile à détecter	Facile à détecter
4. Tâche de modélisation		
Génération de maillage	Souvent difficile : nécessite des programmes de maillage automatique	Facile : division en macro-élément
5. Autre		
Domaine d'application	Structure complexes	Composante individuelles
Méthode de résolution	Directes ou itératives	Itérative
Visualisation de résultat	Facile	Traitements spéciaux

3.5. Adaptation du maillage

Afin d'améliorer la précision d'une solution éléments finis d'un problème d'élasticité linéaire, la modification des paramètres de la discrétisation est nécessaire. Ainsi le maillage peut être raffiné, le degré d'interpolation utilisé sur les éléments peut être augmenté, soit les deux simultanément. Différentes procédures existent pour le raffinement des solutions d'éléments finis. En gros, ceux-ci se divisent en deux catégories :

- I. Le raffinement $-h$ dans lequel la même classe d'éléments continue d'être utilisée mais dont la taille change, l'agrandissement et la réduction de la taille à certains endroits, afin de permettre une économie maximale dans la recherche de la solution souhaitée.
2. Le raffinement $-p$ dans lequel nous continuons à utiliser la même taille d'élément et à simplement augmenter, généralement hiérarchiquement, l'ordre du polynôme utilisé dans leur définition.

Pour résoudre un problème physique par la méthode des éléments finis, l'ingénieur doit faire une série de suppositions et d'approximations afin de transformer l'objet réel en un modèle numérique. La discrétisation ainsi obtenue - définie par un maillage et par les degrés d'approximation des éléments, permet alors d'obtenir une solution approchée. En fonction de ce qui précède, nous cherchons le champ de déplacement de l'élément et l'équation de vibration correspondante.

Chaque élément a un champ de déplacement continu qui est exprimé par des fonctions d'approximation et des déplacements aux points choisis dans l'espace de l'élément. Ces points sont souvent les nœuds aux sommets. Le champ des déplacements $\{u\}$ de l'élément, d'après la fonction d'approximation la plus simple sous forme linéaire peut être écrite comme suit [Cook et al. (1989)] :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i = [N_i] \{d_i\} \quad (3.1)$$

où $[N_i]$ comprend les fonctions de forme de l'élément d'ordre 1, $\{d_i\}$ est le vecteur des déplacements nodaux inconnus, "i" et "n" indiquent le numéro et le nombre de nœuds de sommet, respectivement.

En utilisant l'équation de Lagrange appliquées aux énergies (déformation et cinétique), l'équation de vibration libre obtenue par élément fini est [Belalia (2011)]:

$$[[K_{ii}] - \omega^2 [M_{ii}]] \{d_i\} = 0 \quad (3.2)$$

où $[K_{ii}]$ et $[M_{ii}]$ sont les matrices de rigidité et de masse élémentaires.

Dans le cadre de la représentation d'un champ continu pour une structure étudiée par des champs de plusieurs morceaux, les erreurs géométriques et de discrétisation sont souvent prédominantes. Pour remédier à ces problèmes, ces erreurs peuvent être réduites par diminution des tailles des éléments, ou par utilisation des champs d'approximation d'ordre plus élevé.

L'élément- h d'ordre plus élevé (habituellement cet ordre ne dépasse pas trois) qui sera présenté consiste à ajouter plus de nœuds afin de développer un élément d'ordre plus élevé. À partir des polynômes de Lagrange, il est possible de développer un nouvel ensemble de fonctions de forme de l'élément pour tous les nœuds [Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Les champs de déplacement et l'équation de l'élément fini correspondante illustrés dans les équations (3.1) et (3.2), respectivement, peuvent s'écrire comme suit :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^m N_i' d_i' = [N'] \{d'\} \quad (3.3)$$

$$[[K'] - \omega^2 [M']] \{d'\} = 0 \quad (3.4)$$

où $[N']$ contient toutes les nouvelles fonctions de forme de l'élément d'ordre supérieur à 1, $\{d'\}$ est le vecteur de déplacements nodaux, et (m) est le nombre de tous les nœuds de l'élément, $[K']$ est la nouvelle matrice de rigidité élémentaire et $[M']$ est la nouvelle matrice masse élémentaire. Les inconvénients majeurs de cette technique sont :

1. Chaque changement dans l'ordre de l'élément nécessite un nouvel ensemble de fonctions de forme.
2. La nécessité de répéter tous les calculs, en particulier les matrices masse et de rigidité élémentaires.

Une autre manière d'améliorer la précision est d'augmenter le degré d'approximation des éléments tout en conservant la topologie du maillage. Si l'ordre du polynôme accroît sans changer l'ordre des polynômes inférieurs existants, il s'agit d'une méthode-p. L'ordre de l'élément évolué peut être obtenu en ajoutant des fonctions de forme d'ordre plus élevé dans les fonctions de forme actuelles de l'élément. Dans le cadre de la méthode-p, les fonctions de forme hiérarchiques générées à partir du polynôme de Legendre, gardent la propriété d'orthogonalité afin de développer l'éléments-p d'ordre plus élevé [Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Les champs de déplacement et l'équation de l'élément fini correspondante illustrés dans les équations (3.3) et (3.4), respectivement, peuvent s'écrire comme suit :

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i + \sum_{j=1}^s N_{h,j} d_{h,j} = [N_i] \{d_i\} + [N_h] \{d_h\} \quad (3.5)$$

$$\left[\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ih} \\ K_{ih}^T & K_{hh} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ih} \\ M_{ih}^T & M_{hh} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_h \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

où $[N_h]$ contient toutes les nouvelles fonctions de forme hiérarchiques introduites, $\{d_h\}$ est le vecteur des déplacements-p, "s" est le nombre de fonctions de forme hiérarchiques, $[K_{ih}]$, $[K_{hh}]$, $[M_{ih}]$ et $[M_{hh}]$ sont les sous-matrices de rigidité et de masse élémentaires correspondantes au nouvelles fonctions de forme hiérarchiques introduites. Dans cette méthode, tous les calculs ne doivent pas être répétés, tels que La sous-matrice $[K_{ii}]$ dans l'équation (3.2) est réutilisée dans l'équation (3.6). Sauf $[K_{ih}]$ et $[K_{hh}]$ sont calculées dans l'équation (3.6). Un inconvénient d'utiliser la méthode-p est que la difficulté qui n'est pas correctement résolue, est de prévoir le degré d'interpolation à utiliser pour respecter une qualité donnée tout en minimisant le coût des calculs.

3.6. Mise en œuvre de la version-p

3.6.1. Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre orthogonaux $P_i(\xi)$ pour un domaine défini entre [-1,+1] sont définis par :

$$P_0(\xi) = 1 \quad (3.7)$$

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

Ils sont solutions de l'équation différentielle suivante pour $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (3.9)$$

3.6.2. Polynômes de Legendre déplacés

Les fonctions de forme utilisées sont construites à partir des polynômes de Legendre déplacés [Abramowitz et Stegun (1965)]. Les polynômes de Legendre déplacés forment un ensemble de fonctions analogues aux polynômes de Legendre, mais définis sur l'intervalle $[a, b]$:

$$P_n^*(\xi) = P_n\left(\frac{2\xi - a - b}{b - a}\right) \quad (3.10)$$

Ils sont orthogonaux sur l'intervalle $[a, b]$.

Contrairement aux polynômes de Legendre définis dans $[-1, 1]$, les polynômes de Legendre déplacés sont définis dans $[0, 1]$. Pour cela l'équation (3.10) devient :

$$P_n^*(\xi) = P_n(2\xi - 1) \quad (3.11)$$

Les polynômes de Legendre déplacés possèdent les propriétés suivantes :

➤ *Orthogonalité :*

$$\int_0^1 P_n^*(\xi) \cdot P_m^*(\xi) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{1}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases} \quad (3.12)$$

➤ *Formule de récurrence :*

$$P_{n+1}^*(\xi) = \frac{1}{n+1} \left[(-2n-1 + (4n+2)\xi) P_n^*(\xi) - n P_{n-1}^*(\xi) \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

➤ *Normalisation :*

$$P_n^*(1) = 1 \quad (3.14)$$

➤ *Encadrement :*

La figure 3.1 montre le graphe du polynôme de Legendre déplacé $P_n^*(\xi)$ avec $n = 1, 2, \dots, 7$ et $0 \leq \xi \leq 1, \forall n$:

$$|P_n^*(\xi)| \leq 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.15)$$

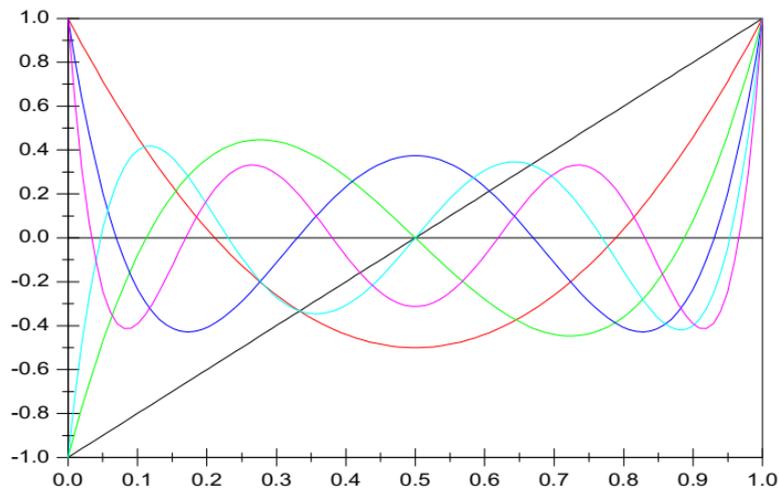


Figure 3.1 : Polynôme de Legendre déplacé.

3.6.3. Version-p et fonctions d'interpolation hiérarchique

Dès l'apparition de la méthode des éléments finis, des degrés d'interpolation élevés ont été testés avec plus ou moins de succès. Il s'agissait des prémisses de la version-p mais il a fallu attendre l'introduction d'une formulation dite hiérarchique [Peano (1975)] pour atteindre toute l'efficacité escomptée. Sous l'impulsion de plusieurs équipes scientifiques [Babuska et al. (1989), Szabo et Babuska (1991), Zienkiewicz et Taylor (1994)], la formulation hiérarchique est arrivée à maturité au milieu des années 1980 et trouve aujourd'hui des applications ((Pro/MECHANICA, StressCheck, ANSYS, etc.)) au sein des bureaux d'études. Une approximation éléments finis

$u_h = \sum_{i=1}^n N_i a_i$, est dite hiérarchique si le passage de n à $n+1$ n'altère pas les fonctions de

forme N_i ($i = 1$ à n). Parmi les avantages de la version-p, la formulation hiérarchique :

- autorise l'exploitation d'un maillage « industriel » dont la taille des éléments est conservée tout au long des calculs,
- permet d'obtenir des solutions moins sensibles aux imprécisions numériques,
- maintien un taux de convergence la plupart du temps favorable,
- offre un indicateur d'erreur économique et nécessaire à la mise en œuvre d'une procédure d'automatisation des calculs.

3.6.3.1. Éléments unidimensionnels

L'élasticité linéaire et d'autres problèmes peuvent être formulés et résolus en utilisant des formes d'éléments très simples. Une fois que l'élément et les fonctions de forme correspondantes sont déterminés, les opérations suivantes suivent un chemin standard bien défini.

Si nous voulons interpoler le problème sur chaque élément. Pour ce faire, il faut prendre une base sur chaque élément. Plusieurs choix sont possibles, mais en général, les fonctions de base utilisées pour les éléments finis sont dites interpolantes, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont les valeurs des grandeurs inconnues aux nœuds, et que c'est à partir de ces valeurs que l'on effectue l'interpolation.

La méthode la plus simple consiste à utiliser les polynômes de Legendre déplacés. Dans cette méthode les caractéristiques des polynômes de Legendre déplacés emploient pour obtenir les fonctions de forme hiérarchiques d'un élément unidimensionnel (figure 3.2) :

$$N_1(\xi) = 1 - \xi \quad (3.16.1)$$

$$N_2(\xi) = \xi \quad (3.16.2)$$

$$N_{i+1}(\xi) = \sqrt{2i-1} \int_0^\xi P_{i-1}^*(t) dt \quad i \geq 2 \quad (3.16.3)$$

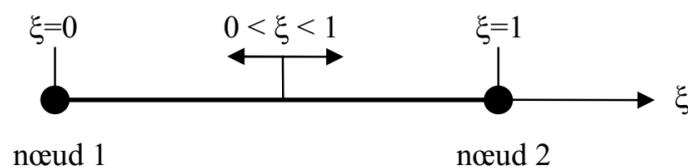


Figure 3.2 : Élément unidimensionnel.

où N_1 et N_2 sont les fonctions de forme nodales ou externes des nœuds (1 et 2) de l'élément- p unidimensionnel. N_i , $i = 3, 4, \dots$ sont des fonctions de forme internes. Les fonctions de forme internes sont nommées 'hiérarchiques' car l'ensemble des fonctions de forme de degré p inclut ceux des degrés inférieurs $p-1, p-2, \dots, 1$. Les fonctions de forme nodales permettent de se connecter avec d'autres éléments pour assurer la continuité des déplacements, tandis que les fonctions de forme hiérarchiques permettent d'enrichir le champ de déplacements à l'intérieur de l'élément. La figure 3.3 illustre la structure hiérarchique d'une matrice de rigidité correspondant au degré du polynôme $p=3$. La figure 3.4 illustre les six premières fonctions de forme hiérarchiques interne d'un élément unidimensionnel.

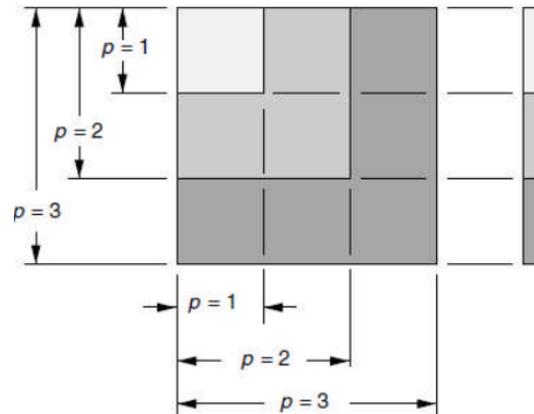


Figure 3.3: Structure hiérarchique d'une matrice de rigidité correspondant au degré du polynôme $p=3$.

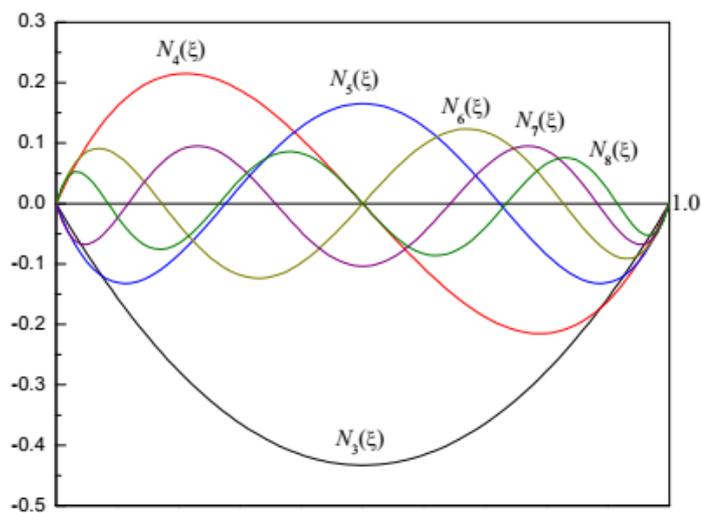


Figure 3.4 : Fonctions de forme hiérarchiques.

3.6.3.2. Eléments-p bidimensionnels

3.6.3.2.1. Espaces polynomiaux

Pour un domaine carré $\Pi = \{0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$, il existe trois espaces polynomiaux bidimensionnels fréquemment utilisés [Côté et Charron (2001)].

➤ *Espace ou famille Serendipity $S^p(\Pi)$*

Il correspond à l'ensemble des monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i, j = 0, 1, \dots, p$ et $i + j = 0, 1, \dots, p$. y compris le monôme $\xi \eta$ si $p = 1$ et les monômes $\xi^p \eta$ et $\xi \eta^p$ si $p \geq 2$. En utilisant le triangle de pascal et pour un élément hiérarchique quadrangulaire cet espace polynomial peut être représenté comme suit :

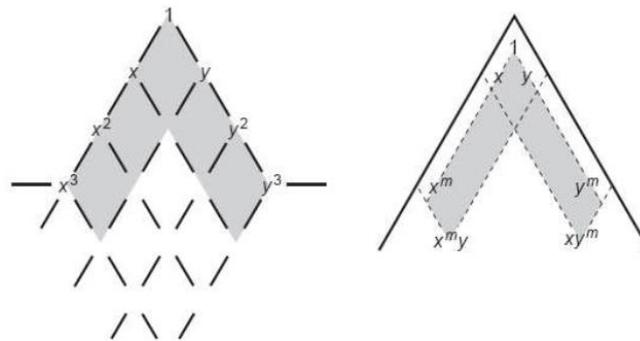


Figure 3.5 : Famille de Serendipity.

➤ *Espace ou famille de Lagrange $S^{p,q}(\Pi)$*

Il correspond à l'ensemble des monômes $\xi^i \eta^j$ avec $i = 0, 1, \dots, p$ et $j = 0, 1, \dots, q$. Cet espace polynomial peut être représenté comme suit :

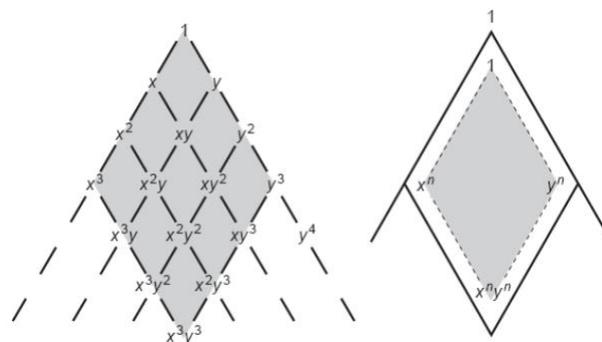


Figure 3.6 : Famille de Lagrange.

➤ Espace ou famille mixte $\tilde{S}^{p,q}$

Il est composé de l'ensemble des monômes communs aux deux espaces polynomiaux précédents ; formellement $\tilde{S}^{p,q} = S^p \cap S^{p,q}$. Côté et Charron (2001) ont mené une comparaison entre la famille Lagrange et Serendipity dans le cas des vibrations des plaques en utilisant la version- p de la MEF. Ils ont conclu une meilleure convergence de la famille Lagrange par rapport à la famille serendipity, et ils ont développé une autre famille polynomiale qui dérive de la famille serendipity appelée famille serendipity- enrichie

3.6.3.3. Élément- p quadrilatéral

L'intersection de quatre éléments unidimensionnels de directions différentes forme un élément carré qui contient quatre nœuds aux sommets, quatre côtés et une face (figure 3.7). La combinaison des fonctions de forme de deux éléments unidimensionnels avec deux directions différentes (ξ et η) donne des fonctions de forme d'élément quadrilatéral qui sont divisées en trois groupes correspondant à la géométrie de l'élément comme suit :

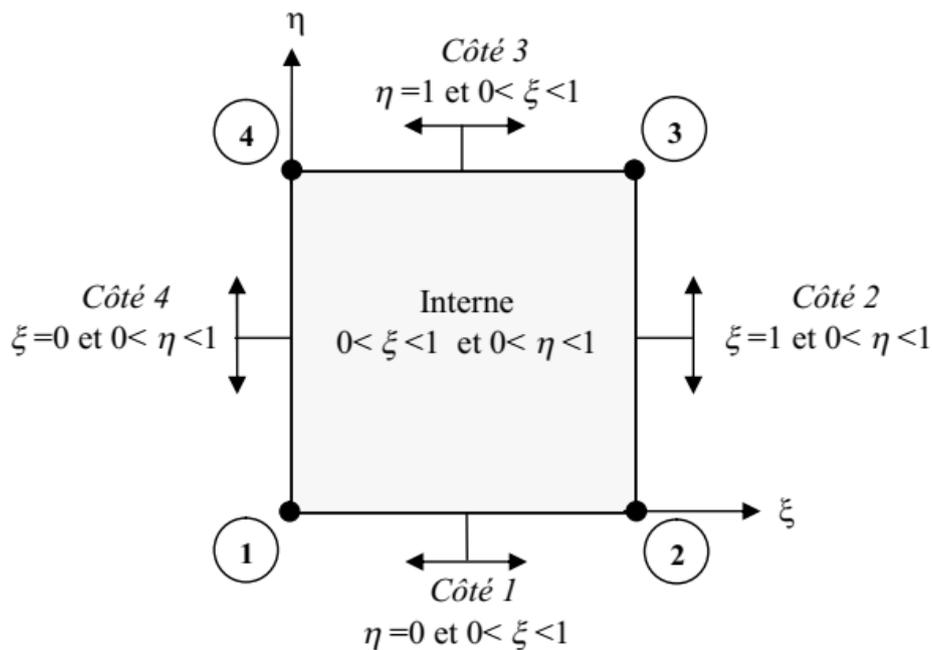


Figure 3.7 : Élément bidimensionnel quadrilatéral.

a) *Fonctions de forme nodales*

Chaque nœud aux sommets de l'élément quadrilatéral contient une fonction de forme bilinéaire :

$$\text{Nœud 1 : } N^{n1}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_1(\eta) \quad (3.17.1)$$

$$\text{Nœud 2 : } N^{n2}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_1(\eta) \quad (3.17.2)$$

$$\text{Nœud 3 : } N^{n3}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_2(\eta) \quad (3.17.3)$$

$$\text{Nœud 4 : } N^{n4}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_2(\eta) \quad (3.17.4)$$

comme illustré figure 3.8.

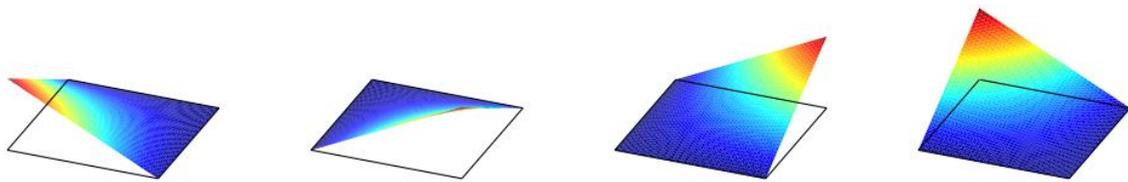


Figure 3.8 : Fonctions de forme nodales sur l'élément **Q4**.

b) *Fonctions de forme des côtés*

Il existe $(p-1)$ fonctions de formes pour chaque côté de l'élément, comme visible sur les figures 3.9, 3.10 et 3.11:

$$\text{Côté 1 : } N^{c1}(\xi, \eta) = N_1(\eta)N_{i+2}(\xi) \quad (3.18.1)$$

$$\text{Côté 2 : } N^{c2}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_{i+2}(\eta) \quad (3.18.2)$$

$$\text{Côté 3 : } N^{c3}(\xi, \eta) = N_2(\eta)N_{i+2}(\xi) \quad (3.18.3)$$

$$\text{Côté 4 : } N^{c4}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_{i+2}(\eta) \quad (3.18.4)$$

avec : $i=1, \dots, p$

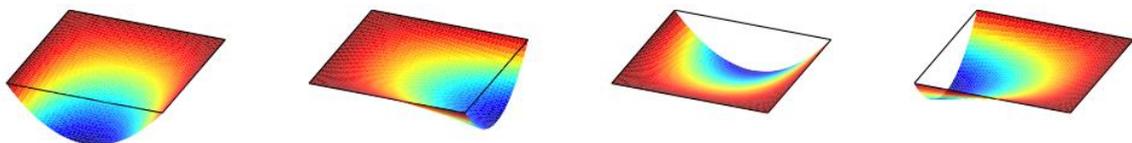


Figure 3.9 : Fonctions de forme quadratiques des côtés sur l'élément **Q4**.

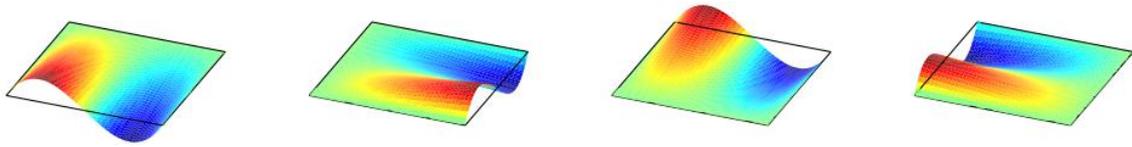


Figure 3.10 : Fonctions de forme cubiques des côtés sur l'élément **Q4**.

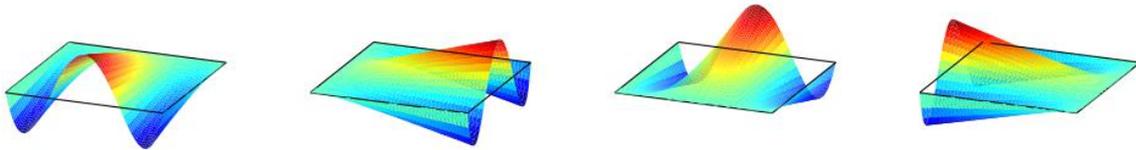


Figure 3.11 : Fonctions de forme quartiques des côtés sur l'élément **Q4**.

c) **Fonctions de forme internes**

Il existe $(p-1)(p-1)$ fonctions de formes internes correspondantes à la face de l'élément, comme visible sur les figures 3.12 et 3.13:

$$\text{Face : } N^{\text{int}}(\xi, \eta) = N_{i+2}(\xi)N_{j+2}(\eta) \quad (3.19)$$

avec $i, j = 1, \dots, p$; $i + j = 2, \dots, p$

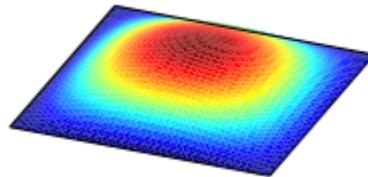


Figure 3.12 : Fonction de forme interne quadratique sur l'élément **Q4**.

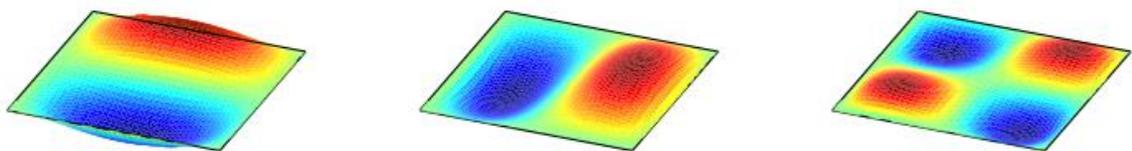


Figure 3.13 : Fonction de forme interne cubiques sur l'élément **Q4**.

L'ensemble des fonctions de forme hiérarchique de l'élément quadrilatéral, tel qu'implémenté dans le programme informatique MSC / PROBE, est présenté à la Figure 3.14. À $p = 8$, il y a 47 fonctions de forme (quatre fonctions de forme nodales, 28 fonctions de forme des côtés et 15 modes internes). Ainsi, en augmentant le degré polynomial de 1 à 8, le nombre de degrés de liberté par élément augmente [Szabo et Babuska (1991)].

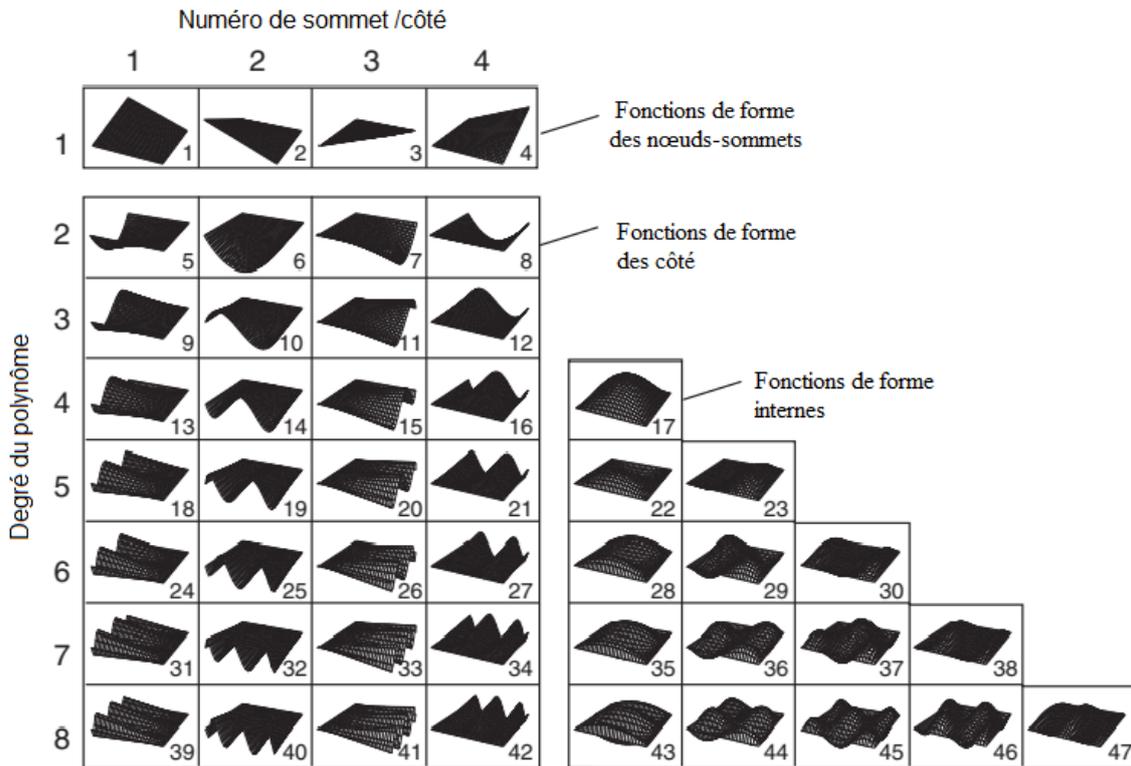


Figure 3.14 : Fonctions de forme hiérarchiques de l'élément quadrilatéral.

3.7. Modélisation géométrique

3.7.1. Concepts de mappage “mapping”

Il est important de distinguer les différents concepts de mappage car la précision d'une solution d'éléments finis est non seulement donnée par l'approximation des inconnues (c'est-à-dire les déplacements), mais dépend également de la description de la géométrie. En aide des fonctions utilisées pour l'approximation des variables de champ indépendantes et la description de la géométrie (mapping), on peut distinguer trois formulations d'éléments : (i) *isoparamétrique*, (ii) *sous-paramétrique* et (iii) *super-paramétrique*. Le concept *d'isoparamétrique* implique que les fonctions de forme décrivant la variation des inconnues soient les mêmes que celles appliquées pour la définition de la géométrie [Zienkiewicz et Taylor (1994)]. Si la description de la fonction inconnue est par ailleurs plus générale que celle de la géométrie, le concept de mappage est dit *sous-paramétrique*. Où les fonctions permettant d'approcher la géométrie et les fonctions permettant d'interpoler les inconnues doivent se trouver dans le même espace fonctionnel. En outre, les fonctions permettant de décrire les inconnues

sont d'ordre supérieur. Si les fonctions de forme utilisées pour la description de la géométrie sont plus complexes que celles de la fonction inconnue, le concept de mappage est appelé *superparamétrique*. C'est le cas, par exemple, si la description de la géométrie est donnée par un polynôme de degré supérieur à celui utilisé pour approximer la fonction inconnue ou si la géométrie est basée sur des non-polynômes.

3.7.2. Méthode de la fonction de mélange (Blending Function Method)

Dans l'analyse par éléments finis d'ordre faible, la technique de mappage la plus utilisée pour la description géométrique du domaine de calcul est l'application d'éléments isoparamétriques dans lesquels les fonctions de forme standard sont utilisées pour la description géométrique des éléments. Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour l'approximation de la solution inconnue et pour la forme des éléments. En utilisant des éléments d'ordre $p = 1$ ou $p = 2$, la limite du domaine est approximée par une courbe polygonale ou par une courbe parabolique par morceaux, respectivement. Au fur et à mesure que le maillage est raffiné, la limite du domaine est approchée de plus en plus précisément. Par contre, lorsque vous utilisez la version- p , le maillage reste fixe. Il est donc important de modéliser précisément la géométrie de la structure avec le nombre fixe d'éléments. Cela nécessite une méthode capable de décrire des géométries complexes en utilisant seulement quelques éléments. Gordon et Hall (1973a-b) ont proposé la méthode de la fonction de mélange (Blending Function Method) qui est généralement utilisée pour décrire les côtés courbés des éléments finis de version- p . Les applications de cette méthode à des problèmes complexes d'analyse structurelle sont illustrées dans les références [Szabó et Babuška (1991), Kirfilyfalvi et Szabo (1997), Düster et al. (2001), Dey (1997), Bröker (2001), Heisserer (2008), Yosibash (2012)].

3.7.3. Les fonctions "mapping"

La définition géométrique des éléments constitue un des points clés de l'implémentation de la version- p . En effet, Le nombre d'éléments requis pour utiliser la version- p est nettement inférieur à celui qu'on utiliserait dans la version- h , parce que les approximations d'ordre supérieur permettent de modéliser des variations plus complexes. Ainsi, les éléments- p sont plus grands que les éléments- h , et le mappage

géométrique en conséquence est plus exigeant pour les éléments- p . L'approche standard du mappage géométrique isoparamétrique (basée sur les positions des noeuds sommets et des noeuds d'interfaces) de la version- h n'est plus suffisante pour représenter la géométrie souvent complexe des éléments. La surface du domaine maillé est seulement approchée et des singularités géométriques artificielles sont introduites à cause de la faible continuité au niveau des interfaces des éléments [ESRD (1998)]. Afin de remédier à ce problème, il est indispensable d'introduire des fonctions "mapping" plus élaborées où la position d'un élément est définie à partir des fonctions géométriques pour décrire exactement le modèle.

Les fonctions "mapping" des côtés courbés ou des faces dans l'élément- p diffèrent de celle utilisée pour l'élément- h . Il est nécessaire d'utiliser des fonctions "mapping" spéciales dans le cas de l'élément- p pour obtenir des géométries exactes et très précises. Alors que dans le cas de l'élément- h isoparamétrique, les fonctions d'interpolation utilisées sont les mêmes dans le champ de déplacement de l'élément et dans les fonctions "mapping" [Szabo et Babuska (1991), Campion et Jarvis (1996)].

Les deux livres [Cook et *al.* (1989), Zienkiewicz et Taylor (1994)] contiennent plus de détails sur les fonctions "mapping" et le calcul de la matrice jacobienne et leur utilisation dans la formulation des éléments- h isoparamétriques. Selon les côtés de l'élément- p quadrilatéral (droits ou courbés), Szabo et Babuska (1991) ont classé les fonctions "mapping" en deux catégories:

3.7.3.1. Fonctions "mapping" linéaires

Les fonctions "mapping" linéaires tracent exactement les coordonnées (x,y) d'un élément- p quadrilatéral ayant des côtés droits dans le système de coordonnées x, y à partir d'un élément carré dans le système de coordonnées ξ, η , qui peuvent être écrites comme suit [Szabo et Babuska (1991)] :

$$x = [N_i(\xi, \eta)]\{X\} \quad (3.20.1)$$

$$y = [N_i(\xi, \eta)]\{Y\} \quad (3.20.2)$$

où $[N_i]$ sont les fonctions de forme de l'élément, $\{X\}$ et $\{Y\}$ sont les coordonnées des noeuds aux sommets de l'élément. Pour un élément- p quadrilatéral à côtés droits (un

élément quadrilatéral à quatre nœuds), les fonctions "mapping" de coordonnées (x, y) sont des fonctions linéaires des coordonnées du nœud aux sommets.

3.7.3.2. Fonctions "mapping" curvilignes

Les fonctions "mapping" curvilignes représentent un élément- p quadrilatéral avec des cotés courbés dans le système de coordonnées x, y à partir d'un élément de forme carrée dans le système de coordonnées ξ, η . La forme générale des fonctions "mapping" curvilignes peut être écrite comme suit [Szabo et Babuska (1991)] :

$$x = Q_x(\xi, \eta) \quad (3.21.1)$$

$$y = Q_y(\xi, \eta) \quad (3.21.2)$$

avec Q_x et Q_y sont les fonctions "mapping" des coordonnées (x, y) . Ces fonctions curvilignes sont appliquées à un élément particulier qui a des côtés courbés.

3.7.4. Carreaux de Coons

Coons a proposé dans les années 60 une formulation puissante pour la représentation des surfaces transfinite [S.A. Coons (1964)]. Par suite de plusieurs améliorations [Coons (1987)], celle-ci s'est avérée être une méthode générale pour la représentation des surfaces. Chaque surface de Coons est définie par les caractéristiques des 4 courbes qui la composent, ainsi que de ses sommets (figure 3.15). De nombreuses surfaces simples peuvent alors être considérées comme des cas particuliers des carreaux de Coons (cylindre, surface réglée, surface de révolution, ...).

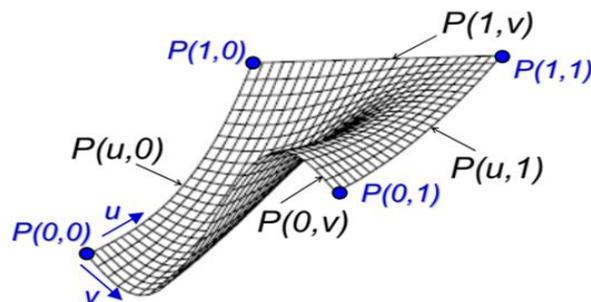


Figure 3.15 : Surface de Coons.

On définit alors la surface par un réseau de courbes croisées. Ceci nous permet de définir des "carreaux". Soient u et v les deux paramètres utilisés pour définir le carreau ;

ils varient entre 0 et 1. Si $\vec{P}(0,0)$, $\vec{P}(0,1)$, $\vec{P}(1,1)$ et $\vec{P}(1,0)$ définissent les vecteurs position des quatre coins et $\vec{P}(0, v)$, $\vec{P}(u, 1)$, $\vec{P}(1, v)$ et $\vec{P}(u,0)$ les quatre courbes frontières. Alors, la formule de Coons bi-linéaire s'écrit [Yamagushi (1988)] :

$$S(u, v) = \vec{P}(u,0)(1-v) + \vec{P}(u,1)v + \vec{P}(0,v)(1-u) + \vec{P}(1,v)u - \vec{P}(0,0)(1-u)(1-v) - \vec{P}(0,1)(1-u)v - \vec{P}(1,0)u(1-v) - \vec{P}(1,1)u \quad (3.22)$$

De manière plus compacte :

$$\vec{S}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\vec{P}(0,0) & -\vec{P}(0,1) & \vec{P}(0,v) \\ -\vec{P}(1,0) & -\vec{P}(1,1) & \vec{P}(1,v) \\ \vec{P}(u,0) & \vec{P}(u,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\vec{S}(u, v) = [U]^T [\vec{P}] [V] \quad (3.24)$$

Grâce à cette technique, la modélisation géométrique de surfaces complexes est devenue moins difficile. Pour ça, la formulation des carreaux de Coons bilinéaires est utilisée dans notre étude pour décrire l'élément- p quadrilatéral courbé.

3.7.5. Élément- p quadrilatéral courbé

L'élément utilisé pour la modélisation des formes géométries arbitraires des nano-plaque par la version- p est un quadrangle à quatre courbes. Les coordonnées cartésiennes d'un point peuvent être calculées à partir de ses coordonnées intrinsèques selon une formule de "mapping" [Gordon (1971), Kirfilyfalvi et Szabo. (1997)]. Un quadrangle est constitué d'un domaine limité par quatre courbes $(C_1(\xi), C_2(\eta), C_3(\xi), C_4(\eta))$ (figure 3.16). Il peut être défini par ses quatre nœuds sommets dont les coordonnées sont désignées par (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$ qui sont des points de passage des quatre courbes. Deux nœuds-sommets consécutifs sont reliés par une courbe.

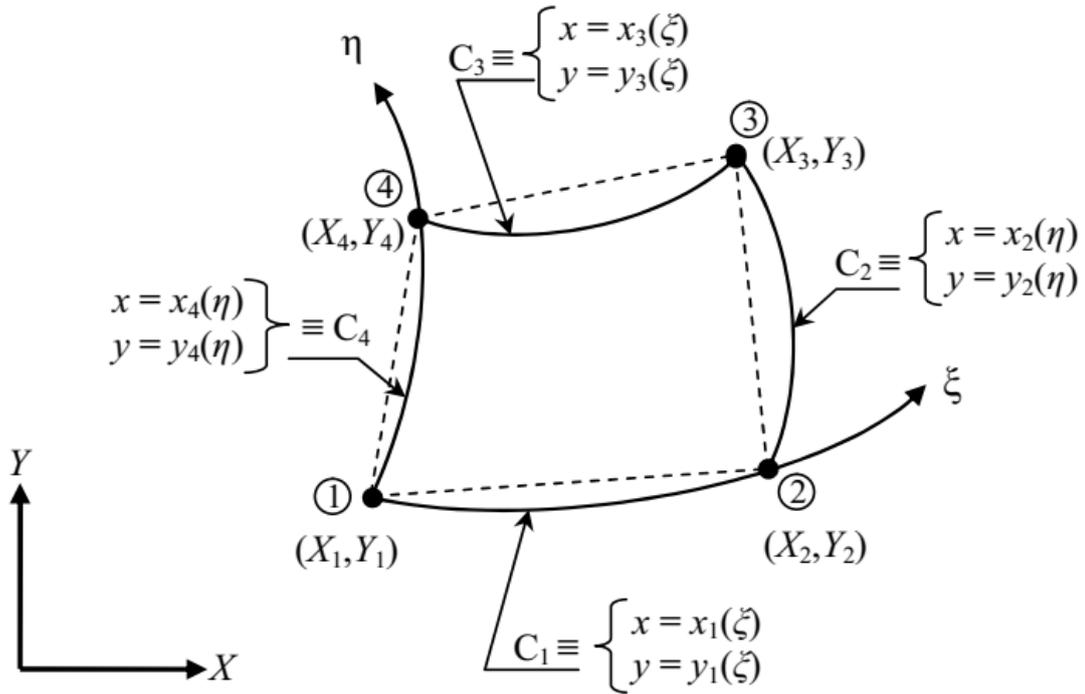


Figure 3.16 : Élément quadrilatéral courbé.

Les côtés courbés peuvent être exprimés sous la forme paramétrique suivante :

$$x = x_i(\xi), \quad y = y_i(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (i = 1, 3) \quad (3.25.1)$$

$$x = x_i(\eta), \quad y = y_i(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (i = 2, 4) \quad (3.25.2)$$

Les fonctions de mélange sont généralement développées pour simplifier la description géométrique dans les coordonnées local (ξ, η) ou l'espace de calcul. En basant sur le principe de fonctions de mélange qui a été amélioré par Gordon et Hall (1973a-b), Les coordonnées cartésiennes d'un point (ξ, η) sont évaluées via les fonctions de transformation du carreau transfini, appelées aussi "blending function method":

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) = & (1-\eta)x_1(\xi) + \xi x_2(\eta) + \eta x_3(\xi) + (1-\xi)x_4(\eta) \\ & - (1-\xi)(1-\eta)X_1 - \xi(1-\eta)X_2 - \xi\eta X_3 - (1-\xi)\eta X_4 \end{aligned} \quad (3.26.1)$$

$$\begin{aligned} y(\xi, \eta) = & (1-\eta)y_1(\xi) + \xi y_2(\eta) + \eta y_3(\xi) + (1-\xi)y_4(\eta) \\ & - (1-\xi)(1-\eta)Y_1 - \xi(1-\eta)Y_2 - \xi\eta Y_3 - (1-\xi)\eta Y_4 \end{aligned} \quad (3.26.2)$$

La matrice de transformation à partir de système cartésien (x, y) vers les coordonnées locales (ξ, η) est réalisée à l'aide de la matrice de Jacobienne. La chaîne de la transformation Jacobienne dans le cas bidimensionnel est exprimée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Où \mathbf{J} est appelé la matrice Jacobienne de la transformation, et exprimé selon la matrice suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,1}(\xi, \eta) & J_{1,2}(\xi, \eta) \\ J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{2,2}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La matrice Jacobienne de transformation est la matrice des dérivées partielles des coordonnées réelles $(x$ et $y)$ par rapport aux coordonnées locales $(\xi$ et $\eta)$ dans l'élément de référence. Cette matrice est unique et indépendante du degré d'approximation de l'élément- p . Les termes de la matrice Jacobienne pour l'élément- p quadrilatéral courbé sont obtenus à partir des équations (3.28)

$$J_{1,1}(\xi, \eta) = (1-\eta) \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} + x_2(\eta) + \eta \frac{dx_3(\xi)}{d\xi} - x_4(\eta) + (1-\eta) X_1 - (1-\eta) X_2 - \eta X_3 + \eta X_4 \quad (3.29.1)$$

$$J_{1,2}(\xi, \eta) = (1-\eta) \frac{dy_1(\xi)}{d\xi} + y_2(\eta) + \eta \frac{dy_3(\xi)}{d\xi} - y_4(\eta) + (1-\eta) Y_1 - (1-\eta) Y_2 - \eta Y_3 + \eta Y_4 \quad (3.29.2)$$

$$J_{2,1}(\xi, \eta) = -x_1(\xi) + \xi \frac{dx_2(\eta)}{d\eta} + x_3(\xi) + (1-\xi) \frac{dx_4(\eta)}{d\eta} + (1-\xi) X_1 + \xi X_2 - \xi X_3 - (1-\xi) X_4 \quad (3.29.3)$$

$$J_{2,2}(\xi, \eta) = -y_1(\xi) + \xi \frac{dy_2(\eta)}{d\eta} + y_3(\xi) + (1-\xi) \frac{dy_4(\eta)}{d\eta} + (1-\xi)Y_1 + \xi Y_2 - \xi Y_3 - (1-\xi)Y_4 \quad (3.29.4)$$

L'équation (3.27) devient

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

D'où l'inverse de la matrice Jacobienne \mathbf{J}^{-1} est devenu comme suit :

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{2,2}(\xi, \eta) & -J_{1,2}(\xi, \eta) \\ -J_{2,1}(\xi, \eta) & J_{1,1}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} & -\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Où, le déterminant de la matrice Jacobienne est obtenu par :

$$|\mathbf{J}| = J_{1,1}(\xi, \eta)J_{2,2}(\xi, \eta) - J_{1,2}(\xi, \eta)J_{2,1}(\xi, \eta) \quad (3.32)$$

3.7.6. Exemples

Afin de mieux comprendre l'application d'élément- p quadrilatéral courbé aux plaques de formes géométriques arbitraires, on considère deux exemples simples :

- **Le premier exemple** est un élément quadrilatéral avec quatre côtés courbés pour donner une représentation géométrique exacte d'une plaque elliptique. On suppose une plaque elliptique située dans un plan x - y , dont les dimensions sont $2a \times 2b$, comme indiqué sur la figure 3.17. Demi-majeur a dans la direction x et demi-mineur b dans la direction y .

Les coordonnées des quatre nœuds-sommets de l'élément sont données par :

$$\text{Nœud 1 :} \quad X_1 = 0, \quad Y_1 = -b \quad (3.33.1-2)$$

$$\text{Nœud 2 :} \quad X_2 = a, \quad Y_2 = 0 \quad (3.34.1-2)$$

$$\text{Nœud 3 :} \quad X_3 = 0, \quad Y_3 = b \quad (3.35.1-2)$$

$$\text{Nœud 4 :} \quad X_4 = -a, \quad Y_4 = 0 \quad (3.36.1-2)$$

Les équations des côtés sont obtenues par un calcul purement géométrique

$$\text{Côté 1 :} \quad x_1(\xi) = a \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right), \quad y_1(\xi) = -b \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \quad (3.37.1-2)$$

$$\text{Côté 2 :} \quad x_2(\eta) = a \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad y_2(\eta) = b \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (3.38.1-2)$$

$$\text{Côté 3 :} \quad x_3(\xi) = -a \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right), \quad y_3(\xi) = b \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \quad (3.39.1-2)$$

$$\text{Côté 4 :} \quad x_4(\eta) = -a \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad y_4(\eta) = -b \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (3.40.1-2)$$

On injecte les équations obtenues ($X_i, Y_i, x_i(\xi; \eta)$ et $y_i(\xi; \eta)$ avec $i = 1, \dots, 4$) dans les fonctions de mélange du rectangle données par les équations (3.26.1-2), on obtient le traçage de la plaque elliptique (figure 3.17).

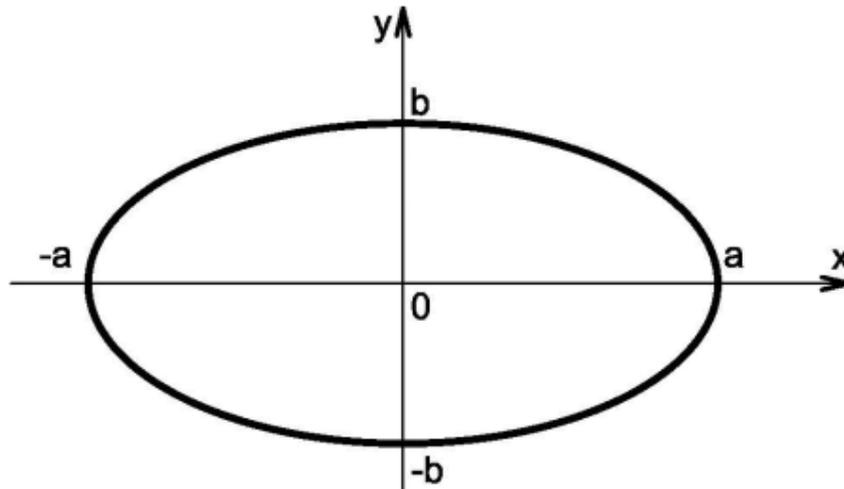


Figure 3.17 : Élément quadrilatéral avec quatre côtés courbés formant une plaque elliptique.

- **Le deuxième exemple** est un élément quadrilatéral avec deux côtés courbés pour donner une représentation géométrique exacte d'une plaque sectorielle annulaire elliptique (figure 3.18), la plaque possède deux arcs elliptiques (ab) et (cd) et l'angle du secteur est $\alpha = \pi/2$.

Les coordonnées des trois nœuds-sommets de l'élément sont données par :

$$\text{Nœud 1 :} \quad X_1 = c, \quad Y_1 = 0 \quad (3.41.1-2)$$

$$\text{Nœud 2 :} \quad X_2 = a, \quad Y_2 = 0 \quad (3.42.1-2)$$

$$\text{Nœud 3 :} \quad X_3 = 0, \quad Y_3 = b \quad (3.43.1-2)$$

$$\text{Nœud 4 :} \quad X_4 = 0, \quad Y_4 = d \quad (3.44.1-2)$$

Les équations des côtés sont données par :

$$\text{Côté 1 :} \quad x_1(\xi) = (a-c)\xi + c, \quad y_1(\xi) = 0 \quad (3.45.1-2)$$

$$\text{Côté 2 :} \quad x_2(\eta) = a \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad y_2(\eta) = b \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (3.46.1-2)$$

$$\text{Côté 3 :} \quad x_3(\xi) = 0, \quad y_3(\xi) = (b-d)\xi + d \quad (3.47.1-2)$$

$$\text{Côté 4 :} \quad x_4(\eta) = c \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad y_4(\eta) = d \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (3.48.1-2)$$

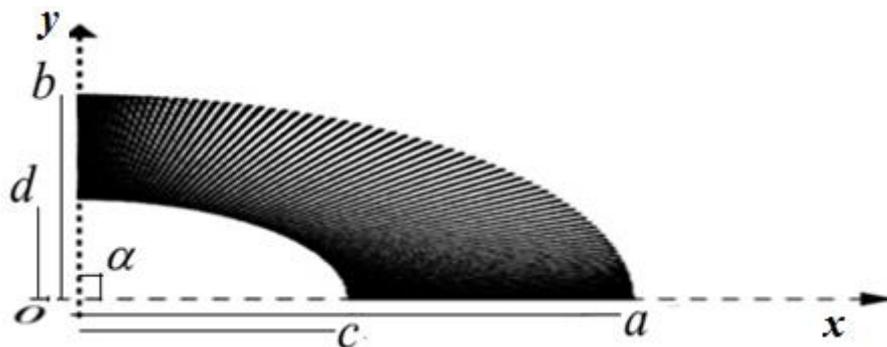


Figure 3.18 : Élément quadrilatéral avec deux côtés courbés formant une plaque sectorielle annulaire elliptique.

Chapitre 4

Modélisation des nano-plaques arbitraires par l'élément- p quadrilatéral courbé

Objectif

Ce chapitre est consacré à la modélisation des nano-plaques arbitraires en vibration libre par un élément- p quadrilatéral courbé. Sa formulation est basée sur les hypothèses de Mindlin dans une approche bidimensionnelle d'élasticité non locale. À partir de la théorie du premier ordre des plaques, les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés sont données. Le tenseur de contraintes pour les plaques est obtenu en introduisant le champ de déformation dans la loi de Hooke généralisée. La présentation de la théorie d'élasticité non locale est donnée, suivie par les relations des efforts et moments résultants non local. Le principe des déplacements virtuels est utilisé pour l'obtention de l'équation du mouvement vibratoire libre de la nano-plaque arbitraire. Les matrices de rigidité et de masse sont obtenues à partir des équations d'énergie de déformation et travail virtuel. Etape par étape, les termes de ces matrices vont apparaître comme des blocs dans les matrices globales. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues.

4.1. Introduction

La méthode des éléments finis devient un outil indispensable dans l'analyse du comportement des phénomènes des sciences mécaniques et même en sciences de la vie. L'évolution de cette méthode, durant les trois dernières décennies, consistait dans le développement de nouveaux types de maillage plus optimaux (*h*-version) ou l'utilisation d'éléments finis dont l'interpolant est d'ordre plus élevé (*p*-version). La version-*p* de la méthode des éléments finis s'est imposée ces dernières années par sa robustesse et sa bonne convergence pour marquer une étape importante dans le développement des calculs par éléments finis.

Dans le cadre de calcul des nano-plaques à l'usage mécanique, électronique et communication, La géométrie de la plaque joue un rôle très important dans le choix des méthodes de résolution des problèmes de vibration des plaques. La modélisation des formes géométries arbitraires n'est certainement pas une tâche facile, mais c'est une étape nécessaire pour modéliser des trous, des défauts géométriques quelconques, ou des formes arbitraires complexes. Toutefois, le problème auquel nous sommes maintenant confrontés est l'incapacité de la version-*p* à résoudre le problème de modélisation cité précédemment puisque cette version est basée sur les formes géométriques régulières (carré, rectangle, cercle, etc...). Afin de remédier à ce problème, il est indispensable d'introduire des fonctions "mapping" plus élaborées où la position d'un élément est définie à partir des fonctions géométriques pour décrire exactement le modèle. La combinaison entre la version-*p* et la méthode des fonctions de mélange permet de rendre plus simple la modélisation des formes géométries arbitraires des nano-plaques. Dans ce chapitre, un nouveau élément-*p* courbé est développé pour la modélisation dynamique des nano-plaques de formes géométriques arbitraires, et plus précisément, le comportement vibratoire linéaire des nano-plaques avec la prise en compte des effets de cisaillement transversal. Sa formulation est basée sur les hypothèses de Mindlin dans une approche bidimensionnelle de l'élasticité non locale.

4.2. Plaque de forme géométrique arbitraire

A travers notre lecture de la littérature en matière des nano-plaques, nous constatons que l'étude de vibrations des nano-plaques ne sont disponibles que pour des formes

simples (rectangulaire, circulaire, sectorielle, biaise, trapézoïdale et triangulaire.....). Bien qu'un certain nombre de chercheurs aient étudié la vibration libre de plaques de formes géométriques simples avec les bords libres, simplement appuyées ou encastées, il reste nécessaire d'obtenir des résultats fiables avec un effort raisonnable pour étudier l'analyse de vibration libre de nano-plaques à bords arbitrairement courbés. Pour enlever cette contrainte, l'idée consiste à développer des éléments-p courbés polyvalents pour traiter, avec un seul type d'élément, le problème de modélisation des formes géométries arbitraires complexes.

Dans ce chapitre, la formulation par la version- p de la méthode des éléments finis a été utilisée pour obtenir les matrices de rigidité et de masse des nano-plaques arbitraire épaisses. Les équations du mouvement vibratoire sont obtenues en appliquant la théorie des plaques de Mindlin, principe des travaux virtuels et la théorie non locale.

La figure 4.1 représente certains exemples des nano-plaques de forme géométriques arbitraires étudiés dans le cadre de cette thèse.

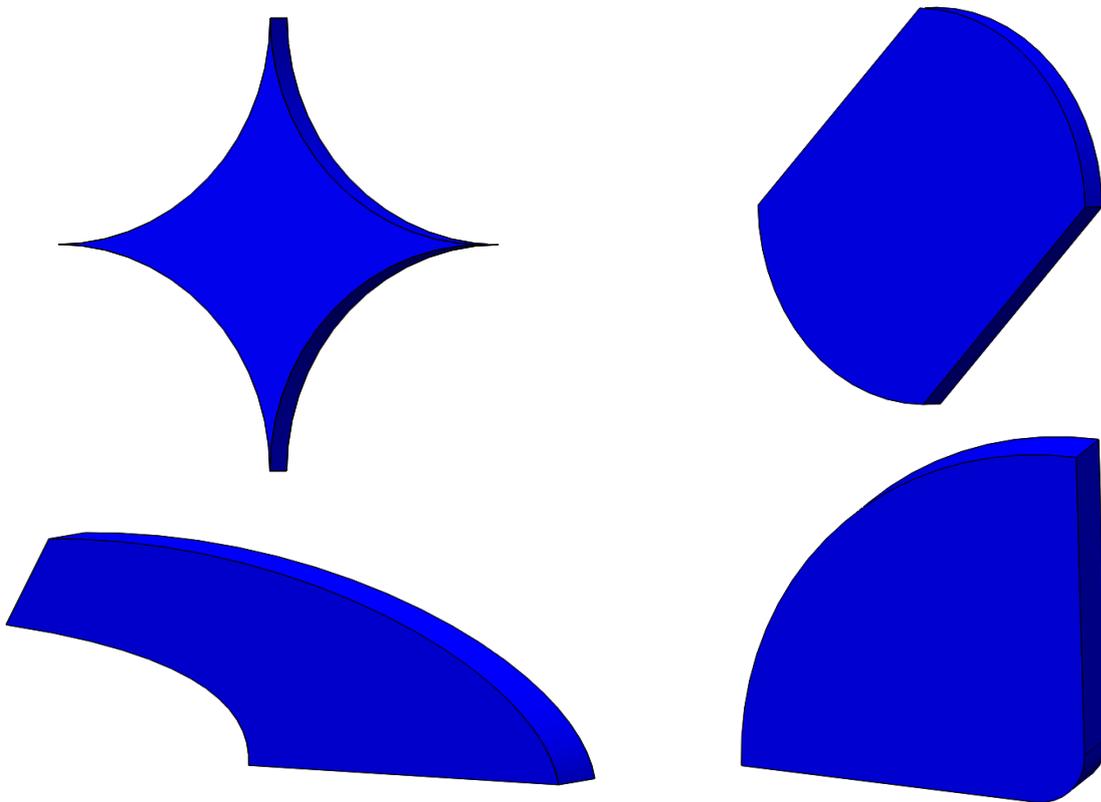


Figure 4.1 : Nano-plaques arbitraire.

4.3. Equations cinématique de théorie FSDT

Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre de déformations de cisaillement FSDT est choisi sur la base de l'hypothèse que les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque (corrige par un facteur de correction du cisaillement transversal k_s). D'après le FSDT des plaques, le déplacement dans le plan composants $\bar{u}(x, y, z, t)$ (le long de la direction x), $\bar{v}(x, y, z, t)$ (le long de la direction y) et la composante de déplacement transversal $\bar{w}(x, y, z, t)$ (le long de la direction z) sont approchées à travers l'épaisseur de la plaque comme suit [Mindlin (1951)]:

$$\bar{u}(x, y, z, t) = +z\theta_y(x, y, t) \quad (4.1)$$

$$\bar{v}(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t) \quad (4.2)$$

$$\bar{w}(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (4.3)$$

Les quantités u , v , w , θ_x et θ_y qui sont des fonctions inconnues. u , v et w sont appelées déplacements généralisés du système. Quant aux fonctions $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$, elle peuvent s'interpréter comme des rotations des normales à la surface de la plaque autour des axes ox et oy , et elles seront avec la déflexion w les inconnues du problème.

4.4. Relations déformation–déplacement

Le tenseur de déformation est défini en termes de dérivées partielles de déplacement comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

où $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$

La relation entre les déformations et les déplacements dans le cas de la théorie de l'élasticité linéaire des plaques, en se basant sur les hypothèses de théorie FSDT, tout en négligeant la déformation ε_{zz} (hypothèse des déformations planes), est donnée sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{xx} = z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \quad (4.6)$$

$$\gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \quad (4.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \quad (4.9)$$

L'introduction des équations de champ de déplacement généralisé des théories FSDT (4.1-3) dans l'équation (4.4) donne les relations déformations-déplacements sous la forme vectorielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

A noter que les déformations ε_{xx} , ε_{yy} et γ_{xy} sont linéaires à travers l'épaisseur de la plaque tandis que les déformations γ_{xz} et γ_{yz} sont constantes.

4.5. Relations contrainte-déformation

D'après la loi de Hooke, La relation d'élasticité linéaire entre les contraintes et les déformations peuvent être écrites sous la forme condensée :

$$[\sigma] = [C] \{\varepsilon\} \quad (4.11)$$

d'où l'écriture matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Pour une plaque isotrope les coefficients C_{ij} de la matrice élastique $[C]$ sont donnés en fonction de E , G et ν qui sont : le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson, respectivement.

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (4-13-1)$$

$$C_{12} = C_{21} = \nu C_{11} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (4-13-2)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4-13-3)$$

4.6. Efforts et moments résultants

Les forces et moments résultants (N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} , M_{xx} , M_{yy} et M_{xy}) sont définies par

l'intégrale des termes des contraintes sur l'épaisseur (h):

$$N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \quad (4.14)$$

$$N_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz \quad (4.15)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (4.16)$$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz \quad (4.17)$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \cdot z \cdot dz \quad (4.18)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (4.19)$$

Les résultantes des charges du cisaillement (Q_x et Q_y) sont définies par les intégrales des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque (h) :

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (4.20)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (4.21)$$

Dans la théorie des plaques de Mindlin les déformations angulaires (γ_{xz} et γ_{yz}) et les contraintes tangentielles de cisaillement sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Ce ci contredit la nullité des contraintes à la surface supérieure et inférieure de la plaque tel que les contraintes tangentielles de cisaillement sont paraboliques (c-à-d équation quadratique) à travers l'épaisseur de la plaque (figure 2.4), ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement pour éliminer le problème de la distribution constante de la contrainte de cisaillement transversale.

k_s est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces libres.

En conséquence, les efforts tranchants Q_x et Q_y ont été corrigés en multipliant les intégrales dans les équations (4.20-21) par le paramètre k_s :

$$Q_x = k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (4.22)$$

$$Q_y = k_s \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (4.23)$$

La figure suivante représente une coupe dans une plaque et définit les différents moments « fléchissant et résultants » et efforts « normaux, tangentiels & résultants »

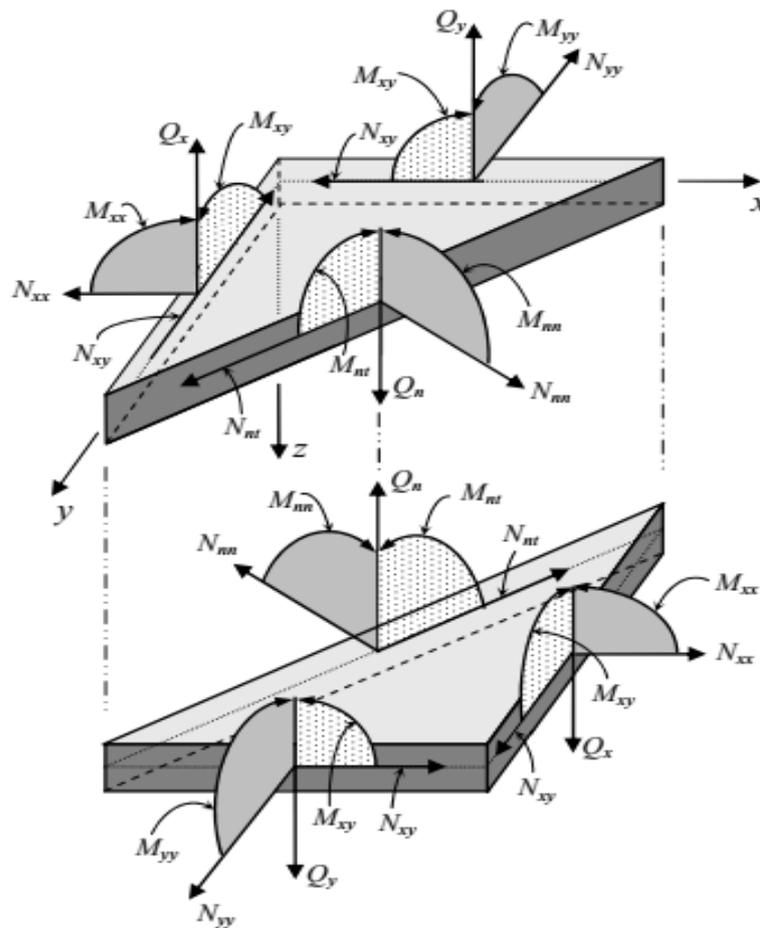


Figure 4.2 : les efforts et les moments résultants.

4.7. Modèle d'élasticité non locale pour plaque isotrope

L'approche non locale se présente comme une alternative intéressante, à mi-chemin entre les théories atomiques et la mécanique classique. L'idée principale est d'utiliser un modèle de milieu continu capable prendre en compte l'influence de la microstructure. Les théories non locales sont une généralisation des théories classiques pour lesquelles le comportement en un point matériel est influencé par l'état en chaque point du solide.

Selon la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen (1972, 1983), le champ des contraintes en un point x dans un milieu élastique continu ne dépend pas uniquement du champ de contrainte à ce point, mais aussi de la contrainte dans tous les autres points du milieu continu. En effet, les composantes du tenseur des contraintes non-local ($t_{ij} = \sigma_{ij}^{nl}$) en un point x sont exprimées par :

$$t_{ij}(x) = \int_V \alpha(|x' - x|, l) \sigma_{ij}(x') dV(x') \quad (4.24)$$

($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^l$) sont les composantes du tenseur de contrainte local au point x qui sont exprimés par rapport à la déformation (ε_{kl}) par la loi de Hooke, et la fonction de caractérisation non locale (la fonction du noyau) $\alpha(|x' - x|, l)$ représente le module non local, $|x' - x|$ est la distance (selon la norme Euclidienne) et l est la constante matérielle, elle dépend de la caractéristique de la longueur interne et externe.

En se basant sur le travail présenté par Eringen (1983), le tenseur de contrainte local au point est donné par :

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right) \sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij}^l = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.25)$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ représente l'opérateur Laplace dans un système cartésien à deux dimensions. Par conséquent, la longueur de l'échelle ou le paramètre non local ($K = e_0 a$) considère les effets de la petite taille sur le comportement des nanostructures, a est la longueur caractéristique interne et e_0 est une constante appropriée à chaque matériau. Ainsi, les relations constitutives de la théorie non locale pour une nano-plaque peuvent être écrites comme suit :

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right) \sigma^{nL} = \sigma^L \quad (4.26)$$

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right) N^{nL} = N^L \quad (4.27)$$

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right) M^{nL} = M^L \quad (4.28)$$

En substituant les relations locales de σ^L , N^L , M^L , Q_x^L et Q_y^L exprimées par les équations (4.12), (4.14-19) et (4.22-23) dans les équations (4.26-28), les efforts résultants non local et les moments résultants non local sont définis comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} - \mathbf{K}^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - \mathbf{K}^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Et les efforts tranchants sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Avec les rigidités d'extension et de flexion sont exprimés comme suit :

$$(A_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (1, z^2) C_{ij} dz = \left(h, \frac{h^3}{12} \right) C_{ij} \quad (4.32)$$

4.8. Equations du mouvement

4.8.1. Principe des déplacements virtuels

En utilisant le principe des déplacements virtuels, les équations de mouvement vibratoire libre peuvent être écrites comme suit :

$$\delta U = \delta W \quad (4.33)$$

où δU est l'énergie de déformation virtuelle des contraintes internes et δW les travaux virtuels des forces d'inerties du corps.

4.8.1.1. Énergie de déformation virtuelle

La variation de l'énergie de déformation s'écrit comme suit :

$$\delta U = \delta \int_V \{\sigma\}^T [\varepsilon] dV \quad (4.34)$$

Après le développement de l'équation (4.34), l'énergie de déformation sera sous la forme suivante :

$$\delta U = \int_V \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \right) dV \quad (4.35)$$

En remplaçant les relations (4.5-9) dans la relation (4.35) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta U = \int_V \left[\sigma_{xx} \delta \left(z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \sigma_{yy} \delta \left(-z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \delta \left(z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) + \right. \\ \left. \tau_{xz} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) + \tau_{yz} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) \right] dV \end{aligned} \quad (4.36)$$

A partir des relations (4.14-19) et (4.22-23), en intégrant la relation (4.36) par rapport à l'épaisseur on obtient :

$$\begin{aligned} \delta U = \int_s \left[M_{xx} \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - M_{yy} \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + M_{xy} \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - M_{xy} \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. Q_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + Q_x \delta \theta_y + Q_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - Q_y \delta \theta_x \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.37)$$

Après la substitution des relations des efforts résultants non locaux, les moments résultants non locaux et les efforts tranchants non locaux (4.29-31) dans l'équation (4.37) de l'énergie de déformation, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta U = \int_s & \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \right. \\
& + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\
& + A_{44} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_{44} k_s \theta_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_{44} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \theta_y + A_{44} k_s \theta_y \delta \theta_y \\
& \left. + A_{55} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - A_{55} k_s \theta_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - A_{55} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \theta_x + A_{55} k_s \theta_x \delta \theta_x \right] ds
\end{aligned} \quad (4.38)$$

4.8.1.2. Travail virtuel des forces d'inerties

D'après le principe de d'Alembert, le travail virtuel des forces d'inertie s'écrit sous la forme :

$$\delta W = - \left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right) \int_s \left[I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y \right] ds \quad (4.39)$$

par simplification on a :

$$\begin{aligned}
\delta W = - \int_s & \left[I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - K^2 \nabla^2 I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x - K^2 \nabla^2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x + \right. \\
& \left. I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y - K^2 \nabla^2 I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y \right] ds
\end{aligned} \quad (4.40)$$

Où le terme d'inertie I_i est exprimé par :

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho \cdot z^i \cdot dz \quad (i = 0, 2) \quad (4.41)$$

dans lequel ρ représente la densité de la plaque.

Après le développement de l'équation (4.40), le travail virtuel des forces d'inertie sera sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\delta W = - \int_s \left[I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w - K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w - K^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right. \\
+ I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x - K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x - K^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x \\
\left. + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y - K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y - K^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y \right] ds
\end{aligned} \quad (4.42)$$

Les termes contenant des dérivées secondes par rapport à x et y dans l'équation (4.42) peut être intégré par parties pour donner

$$\begin{aligned}
\delta W = - \int_s \left[I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x + K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\
\left. + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y + K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] ds
\end{aligned} \quad (4.43)$$

La méthode d'intégration par parties est exprimée dans l'annexe A.

4.8.2. Formulation par l'élément- p courbé

L'élément utilisé pour la modélisation dynamique des nano-plaques de formes géométriques arbitraires par la version- p est un quadrangle à quatre courbes. En se basant sur l'élément- p quadrilatéral courbé présenté dans le troisième chapitre (figure 3.16), les matrices de rigidité et masse élémentaires sont formulées en utilisant les équations (4.38) et (4.43) obtenues précédemment.

Dans le cas de la version- p , les déplacements et les rotations d'un point de l'élément- p peuvent être exprimés par :

$$w = \sum_{j=1}^n q_{3j-2}(t) N_j(\xi, \eta) \quad (4.44)$$

$$\theta_x = \sum_{j=1}^n q_{3j-1}(t) N_j(\xi, \eta) \quad (4.45)$$

$$\theta_y = \sum_{j=1}^n q_{3j}(t) N_j(\xi, \eta) \quad (4.46)$$

$q_{3j-2}(t), q_{3j-1}(t)$ et $q_{3j}(t)$ sont les vecteurs des déplacements généralisés relatifs au déplacement flexionnel w et aux deux rotations θ_x et θ_y , respectivement, tandis que $N_j(\xi, \eta)$ sont les fonctions de forme, (ξ, η) sont les coordonnées locales et n est l'ordre des fonctions des formes hiérarchiques (Equations 3.17-19).

En introduisant les coordonnées locales adimensionnelles pour l'élément quadrilatéral ainsi que la matrice Jacobienne dans l'expression de l'énergie de déformation (4.38) et le travail virtuel (4.43) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta U = & \iint_{0,0}^1 \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \right. \\ & + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) - D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) - D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \\ & + A_{44} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + A_{44} k_s \theta_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + A_{44} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \delta \theta_y + A_{44} k_s \theta_y \delta \theta_y \\ & \left. + A_{55} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - A_{55} k_s \theta_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - A_{55} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \delta \theta_x + A_{55} k_s \theta_x \delta \theta_x \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \delta W = & - \iint_{0,0}^1 \left[I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + K^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x + K^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) + \\ & \left. I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y + K^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.48)$$

A partir des équations (4.44-46), on obtient les dérivées partielles des déplacements et des rotations par rapport aux coordonnées locales telles que :

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^n q_{3j-2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^n q_{3j-2} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \quad (4.49.1-2)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^n q_{3j-1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^n q_{3j-1} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \quad (4.50.1-2)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^n q_{3j} \frac{\partial N_j}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^n q_{3j} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \quad (4.51.1-2)$$

4.8.2.1. Détermination des matrices de rigidité et de masse

En combinant les relations d'énergie de déformation (4.47) et le travail virtuel (4.48) en fonction des coordonnées locales et en substituant les relations des déplacements et des rotations et leurs dérivées partielles par rapport aux coordonnées locales, afin d'obtenir les matrices de rigidité et de masse.

Dans les équations (4.47) et (4.48) on peut séparer les termes contenant seulement les déplacements flexionnel (δw), les termes contenant seulement la rotation ($\delta \theta_x$) et les termes contenant seulement la rotation ($\delta \theta_y$), dans le but d'obtenir les matrices de rigidité et de masse élémentaire linéaire flexionnelle due au cisaillement transversal.

1. δw :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left[A_{44} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + A_{44} k_s \theta_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + A_{55} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) - A_{55} k_s \theta_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + K^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

En introduisant les équations (4.44-46) et (4.49-51) dans l'équation (4.52), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left[A_{44} k_s \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + A_{44} k_s \left(\sum_{i=1}^n q_{3i} N_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right. \\ \left. + A_{55} k_s \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-2} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) - A_{55} k_s \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-1} N_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-2} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + I_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i-2}}{dt} N_i \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j-2}}{dt} N_j \right) + K^2 I_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i-2}}{dt} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j-2}}{dt} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right. \\ \left. + K^2 I_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i-2}}{dt} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j-2}}{dt} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Les composantes de la matrice de rigidité linéaire élémentaire flexionnelle due au le déplacement flexionnel (w) sont données par :

$$k_{3i-2,3j-2} = \iint_{00}^{11} \left[A_{44} k_s \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + A_{55} k_s \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.54.1)$$

$$k_{3i-1,3j-2} = \iint_{00}^{11} \left[-A_{55} k_s N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.54.2)$$

$$k_{3i,3j-2} = \iint_{00}^{11} \left[A_{44} k_s N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.54.3)$$

La composante de la matrice masse élémentaire flexionnelle est données par :

$$M_{3i-2,3j-2} = \iint_{00}^{11} \left[(I_0 N_i N_j) + K^2 I_0 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + K^2 I_0 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.55)$$

En conséquence, la première équation de mouvement peut être exprimée comme suit :

$$M_{3i-2,3j-2} \frac{d^2 q_{3j-2}}{dt^2} + \begin{Bmatrix} k_{3i-2,3j-2} \\ k_{3i-1,3j-2} \\ k_{3i,3j-2} \end{Bmatrix} q_{3j-2} = \{0\} \quad (4.56)$$

2. $\delta\theta_x$:

$$\begin{aligned} & \iint_{00}^{11} \left[-D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) - A_{55} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \delta \theta_x + A_{55} k_s \theta_x \delta \theta_x + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \delta \theta_x \right. \\ & \left. + K^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

En insérant les équations (4.44-46) et (4.49-51) dans l'équation (4.57), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \left[-D_{66} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + D_{66} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-1} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right. \\
& - D_{12} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-1} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) + D_{22} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-1} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \\
& - A_{55} k_S \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-1} N_j \right) + A_{55} k_S \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-1} N_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j-1} N_j \right) \\
& + I_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i-1}}{dt} N_i \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j-1}}{dt} N_j \right) + K^2 I_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i-1}}{dt} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j-1}}{dt} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \\
& \left. + K^2 I_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i-1}}{dt} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j-1}}{dt} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta = 0
\end{aligned} \tag{4.58}$$

D'où les composantes de la matrice de rigidité linéaire élémentaire flexionnelle due au la rotation (θ_x) sont données par :

$$k_{3i-2,3j-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[-A_{55} k_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) N_j \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{4.59.1}$$

$$k_{3i-1,3j-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[D_{66} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) + A_{55} k_S (N_i N_j) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{4.59.2}$$

$$k_{3i,3j-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[-D_{66} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{4.59.3}$$

On obtient La composante de la matrice masse élémentaire flexionnelle due au la rotation (θ_x):

$$M_{3i-1,3j-1} = \int_0^1 \int_0^1 \left[(I_2 N_i N_j) + K^2 I_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + K^2 I_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{J} |d\xi d\eta \tag{4.60}$$

Ainsi, La deuxième équation du mouvement peut être exprimée dans une forme matricielle comme suit :

$$M_{3i-1,3j-1} \frac{d^2 q_{3j-1}}{dt^2} + \begin{Bmatrix} k_{3i-2,3j-1} \\ k_{3i-1,3j-1} \\ k_{3i,3j-1} \end{Bmatrix} q_{3j-1} = \{0\} \quad (4.61)$$

3. $\delta\theta_y$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left[D_{66} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) - D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \quad - D_{12} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + A_{44} k_s \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \delta \theta_y + A_{44} k_s \theta_y \delta \theta_y + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \delta \theta_y \\ & \quad \left. + K^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \right) \right] |J| d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Après la substitution les relations de déplacements, rotations (4.44-46) et leurs dérivées partielles par rapport aux coordonnées locales (4.49-51) dans l'équation (4.62), nous trouvons:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left[D_{66} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) - D_{66} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \quad + D_{11} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) - D_{12} \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \\ & \quad + A_{44} k_s \left(\sum_{i=1}^n q_{3i-2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j} N_j \right) + A_{44} k_s \left(\sum_{i=1}^n q_{3i} N_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_{3j} N_j \right) \\ & \quad + I_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i}}{dt} N_i \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j}}{dt} N_j \right) + K^2 I_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i}}{dt} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j}}{dt} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \\ & \quad \left. + K^2 I_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \partial q_{3i}}{dt} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n \partial q_{3j}}{dt} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] |J| d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Les composantes de la matrice de rigidité linéaire élémentaire flexionnelle dues aux rotations (θ_y) sont données par :

$$k_{3i-2,3j} = \iint_{00}^{11} \left[A_{44} k_s \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) N_j \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.64.1)$$

$$k_{3i-1,3j} = \iint_{00}^{11} \left[-D_{66} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) - D_{12} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.64.2)$$

$$k_{3i,3j} = \iint_{00}^{11} \left[D_{66} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + A_{44} k_s (N_i N_j) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.64.3)$$

La composante de la matrice masse élémentaire flexionnelle due au la rotation (θ_y) est données par:

$$M_{3i,3j} = \iint_{00}^{11} \left[\left(I_2 N_i N_j \right) + K^2 I_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + K^2 I_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.65)$$

Nous pouvons exprimer la troisième équation du mouvement comme suit :

$$M_{3i,3j} \frac{d^2 q_{3j}}{dt^2} + \begin{Bmatrix} k_{3i-2,3j} \\ k_{3i-1,3j} \\ k_{3i,3j} \end{Bmatrix} q_{3j} = \{0\} \quad (4.66)$$

4.8.2.2. Equations du mouvement périodique

Après l'application de principe des déplacements virtuels, les matrices de rigidité et de masse élémentaire sont obtenues à partir des équations d'énergie de déformation et travail virtuel. L'équation du mouvement de la vibration libre de la nano-plaque arbitraire est donnée par l'assemblage des matrices élémentaires de rigidité et de masse.

L'équation de mouvement de la vibration libre globale peut être exprimée comme :

$$[M] \left\{ \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} \right\} + [K] \{ \mathbf{q} \} = \{ \mathbf{0} \} \quad (4.67)$$

où $[K]$ et $[M]$ sont les matrices de rigidité et de masse globale. L'équation (4.67) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M_{3i-2,3j-2} & 0 & 0 \\ 0 & M_{3i-1,3j-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{3i,3j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^2 q_{3j-2}}{dt^2} \\ \frac{d^2 q_{3j-1}}{dt^2} \\ \frac{d^2 q_{3j}}{dt^2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{3i-2,3j-2} & k_{3i-2,3j-1} & k_{3i-2,3j} \\ k_{3i-1,3j-2} & k_{3i-1,3j-1} & k_{3i-1,3j} \\ k_{3i,3j-2} & k_{3i,3j-1} & k_{3i,3j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{3j-2} \\ q_{3j-1} \\ q_{3j} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.68)$$

Il est supposé que le mouvement est périodique, seuls les harmoniques impairs sont pris en compte. Par conséquent, pour une première approximation la solution q est exprimée comme suit :

$$q = q \cos(\omega t) \quad (4.69)$$

où ω est la pulsation propre du système.

L'équation (4.69) est injectée dans les équations du mouvement (4.67) pour donner une équation de la forme :

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q_w \\ q_{\theta_x} \\ q_{\theta_y} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.70)$$

Le problème généralisé de valeurs propres donné par l'équation (4.70) peut être résolu itérativement en utilisant la méthode Jacobi.

Chapitre 5

Elaboration d'un programme de calcul

Objectif

L'objectif principal de ce chapitre est d'exploiter intelligemment des formules mathématiques présentées dans les chapitres précédents en vue de l'élaboration du programme de calcul. Basé sur la théorie du premier ordre des plaques, théorie de l'élasticité non local d'Eringen et la formulation par l'élément-p quadrilatérale courbé, ce code de calcul écrit en langage Fortran 90 permettra de déterminer les fréquences et modes propres linéaires de vibrations des nano-plaques de formes géométriques arbitraires. Tout d'abord, nous présentons l'environnement de programmation, les logiciels et le matériel utilisés, suivis d'un organigramme du programme pour expliquer les étapes d'élaboration de ce programme. Une description générale du dictionnaire des paramètres, fichier de données et fichier de sortie sont présentés dans ce chapitre. La dernière partie inclut une explication détaillée sur la tâche de chaque sous-programme pour exécuter le code de calcul.

5.1. Introduction

La version- p de la méthode des éléments finis a connu un essor considérable ces dernières années. Les avantages de la version- p résident dans la capacité technique qui lui permet de représenter facilement des domaines de formes géométriques arbitraires et de traiter de façon consistante les conditions aux limites.

L'analyse des structures s'effectue généralement à l'aide de codes de calcul. À cet effet, Les dernières années ont été marquées par le développement de codes éléments finis basés sur la version- p . C'est dans le cadre de cette méthode que s'inscrivent les réalisations numériques du problème étudié en vue de traiter sur micro-ordinateur des structures relativement complexes. La programmation numérique permet d'évaluer avec plus de précisions les comportements des structures et des matériaux permettant ainsi un gain de coût. Cela en fait un outil qui est utilisé sur un cadre large lors des différentes phases de conception et de validation des pièces et structures industrielles.

Pour résoudre le problème des nano-plaques avec des formes géométriques arbitraires, nous avons adopté au notre étude une série de suppositions et d'approximations dans le but de transformer la structure réelle en un modèle mathématique. Afin d'accomplir les calculs vibratoires pour des structures plaques avec de formes géométriques arbitraires, nous avons élaboré un code- p de la méthode des éléments finis qui nous permet d'utiliser différents degrés d'interpolations p , et diverses conditions aux limites.

5.2. Environnement de la programmation

À partir les formules mathématiques détaillées dans le chapitre précédent, un programme écrit en FORTRAN 90, basé sur la version- p de la méthode des éléments finis pour détermine les fréquences propres d'une nano-plaque arbitraires suivant différents paramètres physiques et géométriques et différentes conditions aux limites.

Les logiciels utilisés dans cette étude, l'Origin 9.0 pour le traçage des graphes et des modes propres, le Matlab pour le calcul symbolique des fonctions de forme et leurs dérivées. L'exécution de notre programme a été effectuée sur PC avec un processeur Core i3 (2.30 GHz) et 4 Go de la capacité de RAM.

Le programme de calcul comprend trois parties principales :

- Des fichiers d'entrée
- Le programme de calcul.
- Un fichier de sortie.

5.3. Organigramme du programme principal

Les différentes étapes d'élaboration d'un programme de calcul sont illustrées dans l'organigramme suivant (figure 5.1) :

5.4. Description du programme

5.4.1 Fichier de données

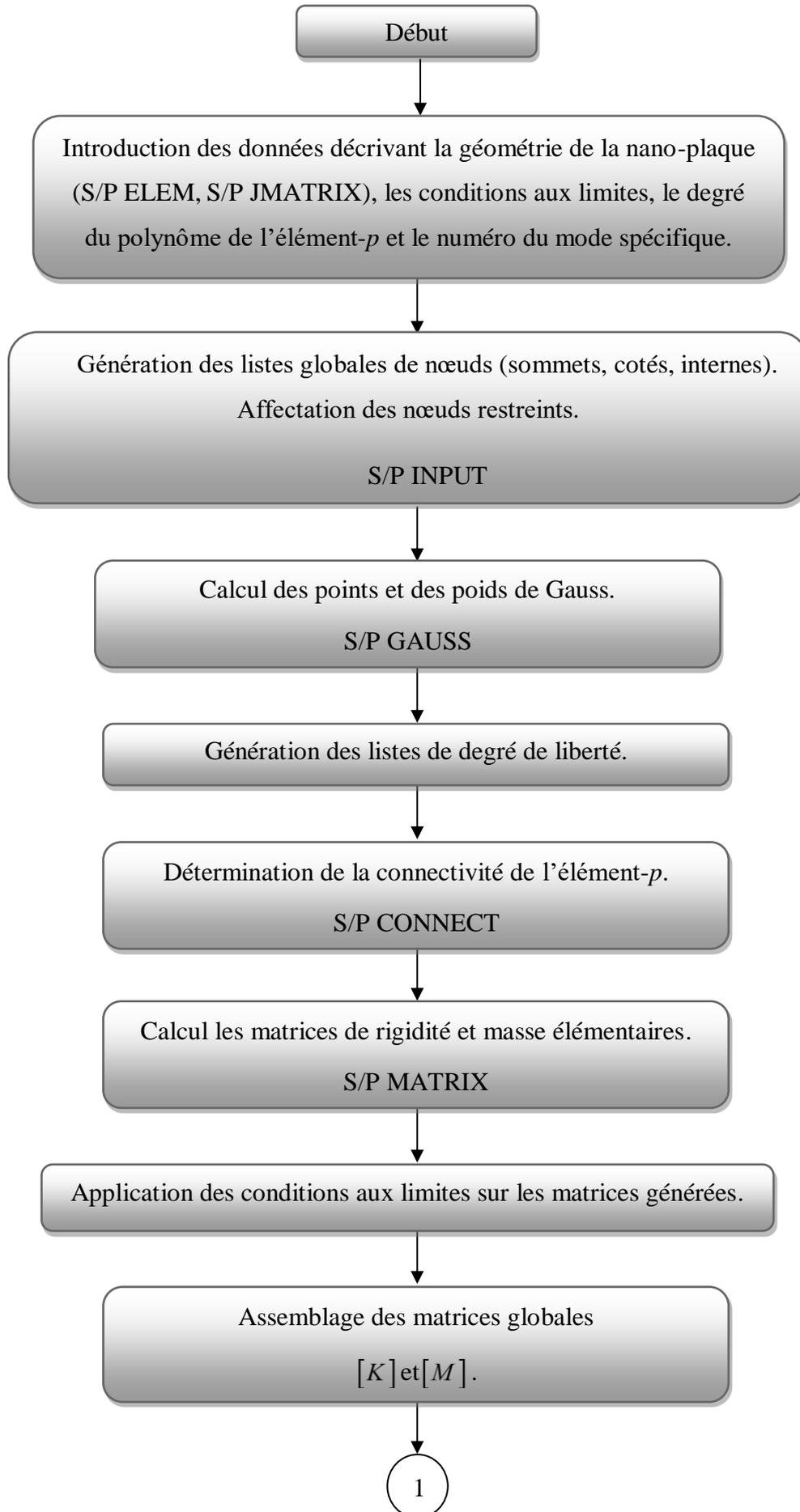
Toutes les données nécessaires à la mise en œuvre du programme de calcul se trouvent dans le fichier de données. Ces données peuvent être divisées en quatre catégories :

- Les données liées à la géométrie de nano-plaque,
- les données pour définir les paramètres physiques,
- Les données nécessaires pour décrire avec précision l'élément- p et les connections des nœuds et cotés,
- Les données concernant le type de conditions aux limites utilisé.

5.4.1.1. Paramètres géométriques

Les paramètres nécessaires pour définir la géométrie de nano-plaque sont :

- h : Epaisseur de la plaque.
- $X(i), Y(i)$: Les coordonnées des nœuds aux sommets des éléments, où ils sont employés dans les fonctions de mélange (voir le chapitre 03).



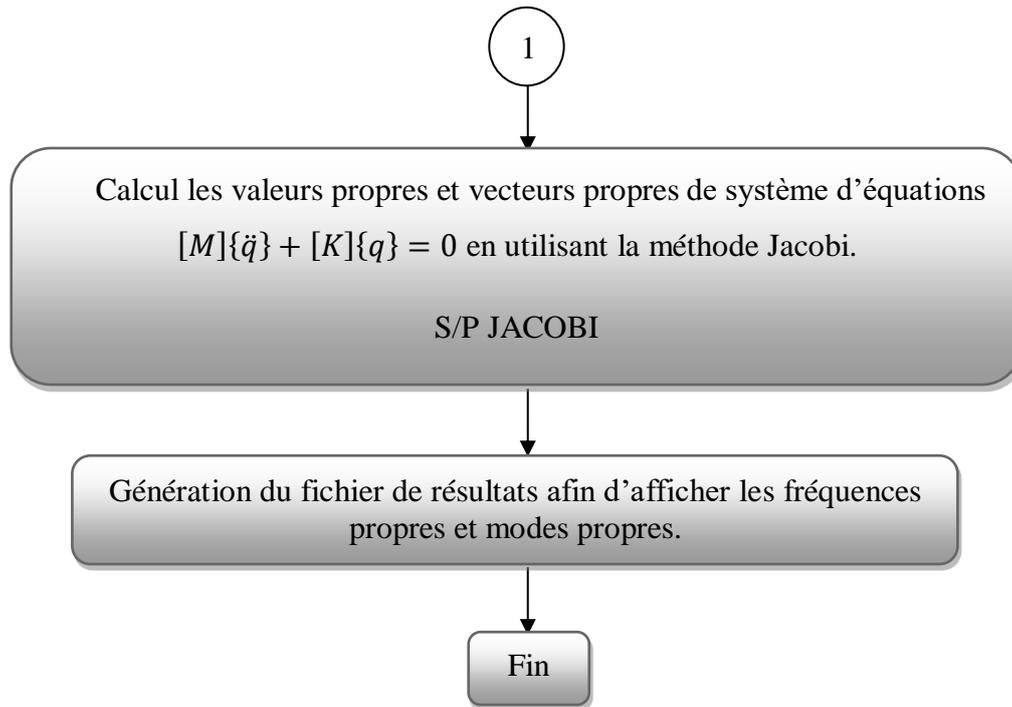


Figure 5.1 : Organigramme du programme élaboré.

5.4.1.2. Paramètres physiques

Les paramètres physiques qui ont été utilisés dans le programme sont :

- PR : Coefficient de Poisson.
- SC : Facteur de correction de cisaillement.
- E : Module de Young.
- RO : Masse surfacique (ρh).
- XK : Paramètre non local.

5.4.1.3. Paramètres des éléments

Tous les paramètres nécessaires qui identifient l'élément- p sont stockés dans le fichier de données :

- NTE : Nombre total d'éléments.
- NTN : Nombre total de nœuds.
- NTC : Nombre total de côtés.
- NNR : Nombre de nœuds restreints.
- NCR : Nombre de côtés restreints.
- NMH : Degré du polynôme de l'élément- p .
- NMODE : Numéro du mode spécifique.

5.4.1.4. Conditions aux limites

Afin de faciliter la résolution du problème généralisé de valeurs propres, nous devons prendre en compte l'importance des conditions aux limites. Pour pouvoir résoudre le système d'équations, Il suffit de reporter les valeurs imposées (nulles) des déplacements des nœuds de frontière dans ces équations. L'élément- p quadrilatérale représenté dans la figure 5.2 contient 4 nœuds aux sommets et 4 côtés, et chaque nœud possède 3 degrés de liberté :

- w : Déplacement suivant l'axe z .
- θ_x : Rotation de la section droite autour de l'axe x .
- θ_y : Rotation de la section droite autour de l'axe y .

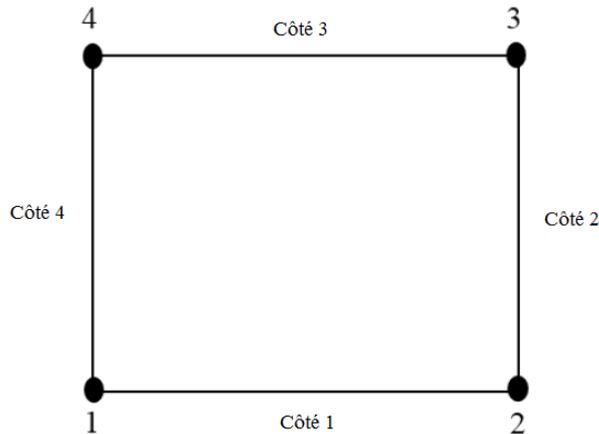


Figure 5.2 : Numérotation des nœuds et côtés de l'élément- p .

Dans le sous – programme (S/P INPUT), un ordre de numérotation des nœuds et des côtés de l'élément- p quadrilatérale existe pour l'affectation exacte des conditions aux limites.

L'introduction des conditions aux limites de l'élément plaque dans le fichier des données se fait par la disposition indiquée dans les tableaux 5.1 et 5.2.

Dans les tableaux ci-dessous, la valeur (0 ou 1) définit l'état du degré de liberté des nœuds et des côtés de l'élément- p . La valeur « 1 » signifie que le degré de liberté est restreint et « 0 » signifie que le degré de liberté est libre. Dans le cadre d'application des

conditions aux limites dans le programme de calcul, la ligne et la colonne des matrices de rigidité et de masse correspondant aux degrés de liberté restreints sont supprimées.

Tableau 5.1: Introduction des conditions aux limites des nœuds.

Nœuds	w	θ_x	θ_y
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
4	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

Tableau 5.2: Introduction des conditions aux limites des côtés.

Côtés	w	θ_x	θ_y
1	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
2	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
3	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0
4	1 ou 0	1 ou 0	1 ou 0

5.4.2. Programmation

Le programme de calcul élaboré dans notre travail permet d'étudier la vibration libre linéaire des nano-plaques avec des formes géométriques arbitraires par un élément- p quadrilatéral courbé. Il permet de déterminer les fréquences et vecteurs propres et les rapports entre la fréquence locale et non locale. L'organigramme de la figure 5.1 illustre les principaux sous-programmes et les étapes d'élaboration de ce programme. Les sous-programmes ci-après sont jugés essentiels pour exécuter le programme de calcul.

5.4.2.1. Description géométrique de la nano-plaque par l'élément- p

Le sous-programme ELEM réalise la tâche de description géométrique de la nano-plaque à l'aide des coordonnées cartésiennes (x, y) des nœuds aux sommets et les fonctions paramétriques des cotés décrivant les frontières de la plaque et leurs dérivées par rapport les coordonnées locales (ξ, η) .

5.4.2.2. Matrice Jacobienne

Le sous-programme JMATRIX permet de calculer le déterminant et les composantes de la matrice Jacobienne afin de les utiliser dans le calcul des matrices de rigidité et masse élémentaires.

5.4.2.3. L'exécution des conditions aux limites

Le sous-programme INPUT est responsable de l'exécution de deux tâches principales :

- La première tâche est la génération des listes globales de nœuds (réels et fictifs). La première liste est consacrée aux nœuds réels de sommets. La deuxième est réservée aux nœuds fictifs sur les côtés, tandis que le troisième contient tous les nœuds à l'intérieur d'élément- p . De plus, les listes des nœuds ont été conçues en fonction du degré du polynôme d'interpolation p .
- La seconde tâche réalisée par S/P INPUT est l'affectation des degrés de liberté des nœuds restreints.

5.4.2.4. Intégration numérique

Par l'utilisation de la quadrature de Gauss-Legendre, les intégrales présentées dans les matrices de rigidité et masse élémentaires ont été calculées numériquement et cela est dû à l'impossibilité de calculer ces intégrales analytiquement. Le sous-programme GAUSS permet de calculer les abscisses des points de Gauss et les poids correspondants nécessaires pour l'intégration numérique.

5.4.2.5. Listes de degrés de liberté

Après avoir assuré la connectivité des nœuds et cotés, les affectations des listes de degrés de liberté sont réalisées par le sous-programme CONNECT dans le but d'obtenir une hiérarchie des degrés de liberté. Comme ces listes de degrés de liberté ont été identifiées précédemment par S/P INPUT.

5.4.2.6. Formation des matrices élémentaires

Basé sur les composantes des matrices élémentaires obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels dans le chapitre précédent et la formulation de l'élément- p quadrilatérale courbé présenté dans la section (4.8.2), les matrices de rigidité et masse élémentaires sont calculées dans le sous-programme S/P MATRIX.

5.4.2.7. Calcul des valeurs et des vecteurs propres par la méthode de Jacobi

Une fois les matrices élémentaires formées, elles sont assemblées en matrices globales en négligeant les lignes et les colonnes correspondant aux nœuds et les côtés restreints qui ont été précédemment lus à partir du fichier de données. Ainsi, l'équation de mouvement de la vibration libre globale peut être exprimée comme :

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right] \mathbf{Q} = 0 \quad (5.1)$$

Dans le sous-programme JACOBI, le système d'équations a été résolu à partir l'algorithme de Jacobi afin d'obtenir les valeurs et vecteurs propres correspondants.

5.4.2.8. Fonctions de formes et leurs dérivées

Les fonctions de forme hiérarchiques pour l'élément- p quadrilatérale sont données en fonction des polynômes orthogonaux de Legendre déplacés. Les expressions de ces fonctions sont données dans l'annexe B.

Dans notre programme de calcul, les fonctions de forme et leurs dérivées par rapport les coordonnées locales (ξ, η) sont calculées par le sous-programme GFUNCT.

5.4.3. Fichier de sortie

Tous les paramètres calculés par le programme élaboré sont stockés dans un fichier de sortie tels que :

- NMH : Degré du polynôme de l'élément- p .
- NEQ : Nombre d'équation du système.
- NMODE : Numéro du mode spécifique.
- XKK : Paramètre non local.

- OMLOC : Paramètre de fréquence local.
- OMNLC : Paramètre de fréquence non local.
- FR : Rapports entre le paramètre de fréquence local et non local.
- TEMPS : Temps d'exécution en secondes.

Chapitre 6

Validation et Interprétation des Résultats

Objectif

Afin de prouver l'efficacité de notre modèle, ce chapitre présente les résultats obtenus par l'éléments- p quadrilatérale courbé, dans lequel, sont inclus plusieurs études de validation et de convergence des fréquences propres de plaques non locales (rectangulaires, sectorielles annulaires, elliptiques et circulaires) et locales (biaises, trapézoïdales, sectorielles elliptiques et circulaires). Ensuite, une étude paramétrique de la nouvelle nano-plaque sectorielle annulaire elliptique est menée pour objectif de montrer l'effet des plusieurs paramètres physiques, géométriques et conditions aux limites sur les fréquences fondamentales. Pour la première fois certains nouveaux résultats obtenus à partir de la technique proposée pour l'analyse des vibrations des nano-plaques arbitraires sont exprimés en tant que solutions de référence (benchmark solutions) pour la validation de nouvelles techniques de calcul à l'avenir. A la fin de ce chapitre, une représentation à deux et trois dimensions des trois premiers modes pour les nano-plaques de formes arbitraires est illustrée.

6.1. Introduction

Bien qu'un certain nombre de chercheurs ont étudié la vibration libre de plaques de formes géométriques simples avec les bords libres, simplement appuyées ou encastées, il reste nécessaire d'obtenir des résultats fiables avec un effort raisonnable pour étudier l'analyse de vibration libre de nano-plaques à bords arbitrairement courbés. Les solutions exactes pour les fréquences propres des nano-plaques ne sont disponibles que pour des domaines simples (rectangulaire, circulaire, sectorielle, biaise, trapézoïdale et triangulaire...). Pour des domaines arbitraires, il faut utiliser des méthodes approximatives telles que le très précis la méthode des éléments finis hiérarchique basé sur un élément- p quadrilatérale courbé.

Par conséquent, cette étude présente le MEFH basé sur un élément quadrilatère courbé pour l'analyse de vibration libre de nano-plaques de Mindlin de formes géométriques arbitraire. L'élément est basé sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen. La méthode de la fonction de mélange est utilisée pour décrire avec précision la géométrie de la nano-plaque.

Dans ce chapitre, la convergence et la précision de l'élément fini quadrilatéral hiérarchique courbé proposé sont examinées. Des comparaisons sont faites avec les résultats publiés. L'effet du rapport de dimensions, du paramètre non local, de l'épaisseur, du numéro de mode, de l'angle du secteur et des conditions aux limites sur les fréquences propres a été étudié en détail.

6.2. Convergence et validation des résultats

Pour démontrer la validité de la présente étude, nous avons comparé les résultats des auteurs obtenus à l'aide de la formulation actuelle basée sur un élément- p quadrilatérale courbé avec ceux de la littérature. Dans cette partie, la convergence de la présente formulation est étudiée pour assurer l'exactitude et la précision des résultats avec un temps optimal.

Une étude comparative des rapports de fréquence et des paramètres de fréquence de la présente méthode est réalisée avec les résultats des références disponibles dans la

littérature. Les résultats sont donnés pour le paramètre de fréquence Ω exprimé en fonction de la pulsation propre de vibration, par :

$$\Omega = \omega b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (6.1)$$

Dans les discussions suivantes, nous considérons un paramètre qui définit la relation entre la théorie non locale et la théorie locale en vibration libre comme suit :

$$\text{Rapports de Fréquence}(RF) = \frac{\Omega \text{ calculé par la théorie non locale}}{\Omega \text{ calculé par la théorie locale}} = \frac{\Omega^{nl}}{\Omega^l} \quad (6.2)$$

Pour les résultats numériques, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ est utilisé tout au long d'étude.

6.2.1. Nano-plaques rectangulaires

Les résultats obtenus en utilisant le modèle présent pour les plaques rectangulaire simplement appuyée sur les quatre bords (AAAA), complètement encasté EEEE, et EAAL (E : encasté, A : appuis simple, L : libre) sont montrés dans les tableaux 6.1-4 avec les résultats trouvés dans la littérature qui traitent le même problème avec différentes théories et méthodes.

Le tableau 6.1 présente quelques résultats numériques de comparaison pour le rapport de fréquence de plusieurs modes de la nano-plaque rectangulaire simplement appuyées (a et b sont la longueur et la largeur de la nano-plaque). Dans cet exemple, le rapport d'aspect de la plaque prend les valeurs $a/b = 1, 0.5$ et 0.4 . Plusieurs valeurs du paramètre non local ($K = 0, 0.2, 0.4$ et 0.6) sont considérées et le rapport d'épaisseur sur longueur (h/a) est pris égale à $0,1$. Comme on le voit, les résultats obtenus par la présente solution sont en excellent accord avec la solution Navier de la théorie des plaques de Reddy [Aghababaei et Reddy (2009)], de théorie du premier ordre des plaques FSDT [Lu et al. (2007)] et la solution analytique exacte [Hosseini et al. (2013)]. De plus, tous les résultats actuels sont en bon accord avec ceux de la théorie de la plaque locale lorsque $K = 0$.

Tableau 6.1: Comparaison des rapports de fréquences (RF) d'une plaque rectangulaire non locale simplement appuyée ($\Omega = \alpha\alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$, $h / b = 0.1, k_s = 0.86667$)

a/b	Méthode	K			
		0	0.2	0.4	0.6
1.0	Présent	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512
	Aghababaei et Reddy (2009)	1.0000	0.7477	0.4904	0.3512
	Lu et al. (2007)	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512
	Présent	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308
	Aghababaei et Reddy (2009)	1.0000	0.5801	0.3353	0.2309
	Lu et al. (2007)	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308
	Présent	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308
	Aghababaei et Reddy (2009)	1.0000	0.5801	0.3353	0.2309
	Lu et al. (2007)	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308
0.5	Présent	1.0000	0.8183	0.5799	0.4287
	Aghababaei et Reddy (2009)	1.0000	0.8183	0.5799	0.4287
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.8183	0.5798	0.4287
	Présent	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512
	Aghababaei et Reddy (2009)	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512
	Present	1.0000	0.6111	0.3601	0.2492
	Aghababaei et Reddy (2009)	1.0000	0.6111	0.3601	0.2492
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.6111	0.3601	0.2492
	Présent	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308
	Aghababaei et Reddy (2009)	1.0000	0.5799	0.3353	0.2309
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.5799	0.3353	0.2309
0.4	Présent	1.0000	0.8282	0.5942	0.4419
	Lu et al. (2007)	1.0000	0.8282	0.5942	0.4419
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.8279	0.5941	0.4417
	Présent	1.0000	0.7791	0.5278	0.3827
	Lu et al. (2007)	1.0000	0.7791	0.5278	0.3827
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.7631	0.517	0.3749
	Présent	1.0000	0.6152	0.3635	0.2517
	Lu et al. (2007)	1.0000	0.6152	0.3635	0.2517
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.6152	0.3635	0.2518
	Présent	1.0000	0.5942	0.3465	0.2391
	Lu et al. (2007)	1.0000	0.5942	0.3465	0.2319
	Hosseini et al. (2013)	1.0000	0.5942	0.3465	0.2319

Le tableau 6.2 présente les études de convergence et de comparaison pour les huit premiers paramètres de fréquence $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, pour les plaques Mindlin carrées simplement appuyées. Les résultats sont obtenus pour les valeurs suivantes de degré du polynôme d'interpolation ($P = 5, 6, 7, 8, 9, 10$). Un excellent taux de convergence peut être observé et on constate également que des résultats convergés raisonnables pour des plaques Mindlin simplement appuyées sont obtenus par la méthode actuelle lorsque $P \geq 7$. En comparant les résultats obtenus et ceux obtenus avec la méthode Pb2-Ritz (la méthode classique de Ritz avec les fonctions d'essai comme produit de polynômes bidimensionnels) [Liew et al. (1993)] et de solutions exactes [Hosseini et Arsanjani (2004)], on peut conclure que les solutions ont une excellente précision lorsque $P = 10$.

Dans le tableau 6.2, les résultats de la formulation mixte FE-DQ (une formulation simple et précise d'éléments finis mixte en quadrature différentielle) [Eftekhari et Jafari (2013)], méthode de Ritz basée sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT-Ritz) [Lim et al. (1998)], MEF avec un élément de flexion de plaque triangulaire à 24 nœuds [Manna (2005)], un couplage de la procédure de Ritz avec la méthode de convolution singulière discrète (DSC-Ritz) [Hou et al. (2005)] et la méthode DSC-élément [Xiang et al. (2010)] sont également inclus pour la comparaison.

On peut voir que les résultats générés par le présent procédé sont plus en accord avec les solutions de Liew et al. (1993) et les solutions analytiques de Hosseini et Arsanjani (2004) que celles de la méthode HSDT-Ritz de Lim et al. (1998), MEF de Manna (2005), et la méthode d'élément DSC de Xiang et al. (2010).

Les huit premiers paramètres de fréquence des plaques Mindlin avec les conditions aux limites EEEE et EAAL sont tabulés dans les tableaux 6.3-4. Une comparaison des résultats obtenus avec les valeurs existantes de la théorie des plaques épaisses [Eftekhari et Jafari (2013), Liew et al. (1993), Manna (2005), Xiang et al. (2010), Sheikh et al. (2002), Hou et al. (2005)] est présentée dans ces tableaux. Les résultats d'Eftekhari et Jafari (2013) et de Liew et al. (1993) ont une bonne corrélation avec les résultats actuels. On constate que le taux de convergence de la méthode proposée n'est pas très satisfaisant lorsque le degré du polynôme est faible. Donc, pour obtenir des algorithmes efficaces en termes de calcul utilisant la méthode actuelle, le degré du polynôme

d'interpolation doit prendre des valeurs supérieures à sept ($P \geq 7$). Dans cet exemple, un excellent taux de convergence peut être observé.

Tableau 6.2 : Convergence et comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque carrée simplement appuyée ($\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, $a/b = 1$, $h/b = 0.1$, $k_s = 5/6$, $K = 0$).

Méthode	P	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8
Présent	5	1,9318	4,6202	4,6202	7,0871	10,2784	10,2784	12,2484	12,2484
	6	1,9317	4,614	4,614	7,0797	8,7166	8,7166	10,8911	10,8911
	7	1,9317	4,6084	4,6084	7,0717	8,6656	8,6656	10,8508	10,8508
	8	1,9317	4,6084	4,6084	7,0717	8,6176	8,6176	10,8104	10,8104
	9	1,9317	4,6084	4,6084	7,0716	8,6166	8,6166	10,8097	10,8097
	10	1,9317	4,6084	4,6084	7,0716	8,6162	8,6162	10,8093	10,8093
Eftekhari et Jafari (2013)		1,9319	4,6084	4,6097	7,0725	8,6162	8,6199	10,8099	10,8123
Liew et al. (1993)		1,9317	4,6084	4,6084	7,0716	8,6162	8,6162	10,8093	10,8093
Lim et al. (1998)		1,9317	4,6088	4,6088	7,0731	8,6189	8,6189	10,8144	10,8144
Manna (2005)		1,932	4,609	4,609	7,0750	8,622	8,622	—	—
Hou et al. (2005)		1,9317	4,6084	4,6084	7,0716	8,6162	8,6162	—	—
Xiang et al. (2010)		1,9318	4,6084	4,6087	7,0722	8,6139	8,6154	10,8074	10,8074
Hosseini et Arsanjani (2004)		1,9317	4,6084	4,6084	7,0716	8,6162	8,6162	10,8093	10,8093

Tableau 6.3 : Convergence et comparaison des paramètres de fréquences d'une plaque carrée encadrée ($\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, $a/b = 1$, $h/b = 0.1$, $k_s = 5/6$, $K = 0$).

Méthode	P	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8
Présent	5	3,2993	6,3437	6,3437	8,8574	14,3155	14,4813	15,8318	15,8318
	6	3,2960	6,3171	6,3171	8,8431	10,651	10,7622	12,7559	12,7559
	7	3,2960	6,2873	6,2873	8,8116	10,5273	10,6332	12,6639	12,6639
	8	3,2954	6,2864	6,2864	8,8115	10,3856	10,4852	12,5583	12,5583
	9	3,2954	6,2859	6,2859	8,8100	10,3815	10,4807	12,5551	12,5551
	10	3,2954	6,2858	6,2858	8,8099	10,3788	10,4779	12,5531	12,5531
Eftekhari et Jafari (2013)		3,2954	6,2858	6,2858	8,8098	10,3788	10,4778	12,5529	12,5529
Liew et al. (1993)		3,2954	6,2858	6,2858	8,8098	10,3788	10,4778	12,5529	12,5529
Manna (2005)		3,296	6,288	6,288	8,816	10,389	10,488	—	—
Hou et al. (2005)		3,2956	6,2867	6,2867	8,8122	10,3794	10,4783	—	—
Xiang et al. (2010)		3,2960	6,2873	6,2873	8,8123	10,3791	10,4776	12,5546	12,5546
Sheikh et al. (2002)		3,2942	6,2772	6,2772	8,7864	10,3397	10,4376	—	—

Tableau 6.4 : Convergence et comparaison des paramètres de fréquences d’une plaque carrée EAAL ($\Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, $a / b = 1$, $h / b = 0.1$, $k_s = 5 / 6$, $K = 0$).

Méthode	P	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8
Présent	5	1.6228	2.9281	4.7125	5.8601	6.0131	8.6988	11.4530	12.4365
	6	1.6208	2.9217	4.6812	5.7943	5.9909	8.6145	9.0822	10.2469
	7	1.6201	2.9187	4.6634	5.7715	5.9757	8.5840	8.9505	10.0449
	8	1.6197	2.9173	4.6620	5.7688	5.9729	8.5779	8.8598	9.9414
	9	1.6195	2.9167	4.6614	5.7679	5.9717	8.5755	8.8553	9.9348
	10	1.6194	2.9165	4.6612	5.7676	5.9712	8.5746	8.8536	9.9329
Eftekhari et Jafari (2013)		1.6194	2.9164	4.6611	5.7674	5.9710	8.5742	8.8533	9.9327
Liew et al. (1993)		1.6195	2.9165	4.6612	5.7675	5.9711	8.5744	8.8537	9.9328
Hou et al. (2005)		1.6197	2.9170	4.6617	5.7684	5.9723	8.5749	—	—
Xiang et al. (2010)		1.6214	2.9183	4.6622	5.7701	5.9727	8.5783	8.8546	9.9323

Les résultats des cinq premiers paramètres de fréquences flexionnels pour une plaque carrée modérément épaisse ($h/b=0.1$) en fonction du degré du polynôme d’interpolation P sont présentés dans les figures 6.1-3.

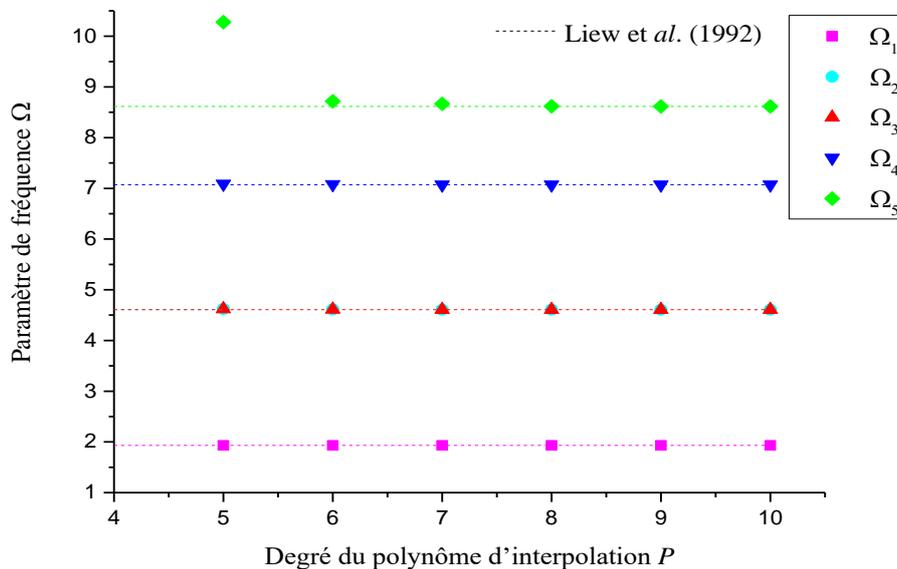


Figure 6.1 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d’une plaque carrée simplement appuyée ($h/b=0.1$).

Cette étude de convergence porte sur trois types de conditions aux limites (simplement appuyée (AAAA), complètement encastré EEEE et EAAL). Les allures des graphes dans ces figures montrent la rapidité de la convergence vers les solutions de la méthode Pb2-Ritz [Liew et *al.* (1993)] en augmentant le degré du polynôme d'interpolation ($P=5, \dots, 10$).

A partir de ces figures, nous remarquons que la convergence est très rapide en augmentant le degré du polynôme P . Et pour $P \geq 7$, les allures des courbes deviennent presque des droites.

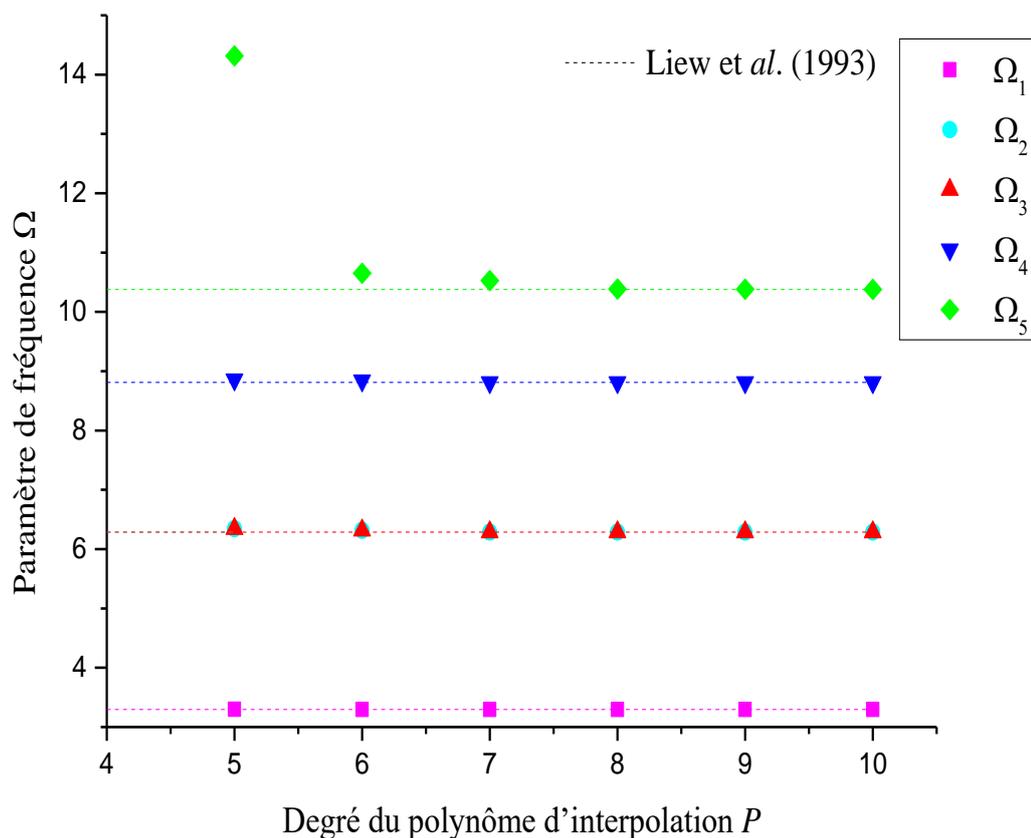


Figure 6.2 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d'une plaque carrée encastrée ($h/b=0.1$).

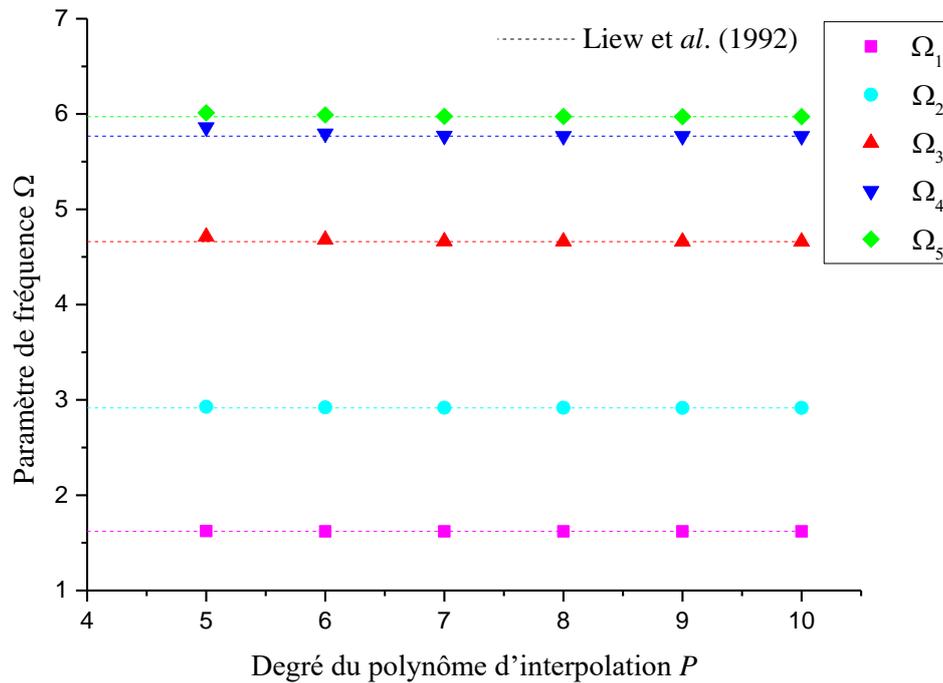


Figure 6.3 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d'une plaque carrée EAAL ($h/b=0.1$).

6.2.2. Nano-plaques sectorielles annulaires

Pour étudier l'efficacité et la précision de l'élément quadrilatère hiérarchique courbé pour la modélisation de plaques à formes planes curvilignes, une étude de convergence et de comparaison est réalisée pour le nano-plaque sectorielle annulaire (figure 6.4).

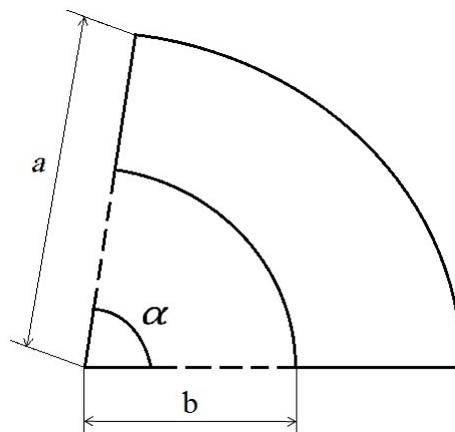


Figure 6.4 : Nano-plaque sectorielle annulaire.

Dans les Tableaux 6.5 et 6.6, les paramètres de fréquences linéaires ($\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$) de plaque sectorielle annulaire locale Mindlin avec des bords encastés et des conditions aux limites LELE sont comparés à ceux obtenus par la méthode de collocation de Chebyshev de Sari (2015) et des solutions de quadrature différentielle (DQM) de Liew et Liu (2000). L'analyse de convergence pour le plaque sectorielle annulaire encasté avec $\alpha = 120^\circ$, $b/a = 0,25$ et $h/a = 0,20$ et LELE avec $\alpha = 45^\circ$, $b/a = 0,4$ et $h/a = 0,20$ est aussi présentée dans les tableaux 6.5 et 6.6, respectivement. Dans tous les cas considérés dans la présente étude, le facteur de correction du cisaillement est pris comme $k_s = \pi^2 / 12$.

Tableau 6.5 : Convergence et comparaison des six premiers paramètres de fréquences ($\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une plaque sectorielle annulaire encastée ($b/a = 0.25$, $h/a = 0.2$, $k_s = \pi^2 / 12$, $K = 0$, $\alpha = 120^\circ$).

Méthode	P	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Présent	5	31.088	42.175	62.661	65.056	73.390	89.967
	6	31.064	41.923	56.864	62.482	73.045	85.455
	7	31.058	41.832	56.347	62.424	72.876	73.044
	8	31.057	41.815	55.997	62.421	72.159	72.867
	9	31.057	41.814	55.957	62.420	71.251	72.863
	10	31.057	41.814	55.951	62.420	71.160	72.863
Sari (2015)		31.057	41.814	55.951	62.420	71.127	72.862
Liew et Liu (2000)		31.056	41.814	55.951	62.420	71.127	72.862

Tableau 6.6 : Convergence et comparaison des six premiers paramètres de fréquences ($\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une plaque sectorielle annulaire LELE ($b/a = 0.4$, $h/a = 0.2$, $k_s = \pi^2 / 12$, $K = 0$, $\alpha = 45^\circ$).

Méthode	P	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Présent	5	37.320	42.461	71.732	77.869	85.942	111.852
	6	37.303	42.421	71.630	77.598	85.688	111.288
	7	37.300	42.411	71.615	77.542	85.606	110.983
	8	37.297	42.406	71.608	77.538	85.601	110.961
	9	37.296	42.405	71.605	77.537	85.597	110.953
	10	37.295	42.404	71.604	77.537	85.596	110.950
Liew et Liu (2000)		37.292	42.403	71.603	77.536	85.595	-

Les deux tableaux susmentionnés montrent qu'une convergence très rapide se produit lorsque le degré du polynôme P augmente de 5 à 10, et que la valeur suffisante de degré du polynôme d'interpolation pour obtenir des résultats précis jusqu'au sixième paramètre de fréquence est $P = 10$. La comparaison des résultats obtenus avec les valeurs des autres travaux montre un excellent accord.

Après une évaluation globale des études antérieures dans la littérature pour l'analyse des plaques, nous constatons qu'il n'y a pas de résultats pour les paramètres de fréquence des plaques Mindlin du nano-plaque sectorielle annulaire basés sur la théorie de l'élasticité non locale, à l'exception des résultats obtenus par Sari (2015).

Pour mieux valider notre travail, le tableau 6.7 donne une comparaison des paramètres de fréquences fondamentales d'une nano-plaque sectorielle annulaire épaisse encadré avec $\alpha = 30^\circ$ et le rapport d'épaisseur h/a variant du 0.1 au 0.2. Six paramètre non local $K=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ et 1 et trois rapport de rayon interne/externe $b/a=0.1, 0.25$ et 0.5 sont considérés pour cette étude.

Tableau 6.7 : Comparaison de paramètre de fréquence ($\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une nano-plaque sectorielle annulaire encadrée ($k_s = \pi^2 / 12, \alpha = 30^\circ$).

b/a	h/a	Méthode	K					
			0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.
0.1	0.1	Présent	128.289	54.080	28.856	19.482	14.677	11.766
		Sari (2015)	128.289	54.080	28.855	19.481	14.676	11.765
	0.2	Présent	81.178	35.332	18.933	12.789	9.636	7.725
		Sari (2015)	81.177	35.337	18.935	12.790	9.637	7.726
0.25	0.1	Présent	128.290	54.079	28.856	19.482	14.676	11.766
		Sari (2015)	128.290	54.080	28.855	19.481	14.676	11.765
	0.2	Présent	81.183	35.332	18.933	12.789	9.636	7.725
		Sari (2015)	81.183	35.338	18.935	12.790	9.637	7.726
0.5	0.1	Présent	131.375	54.438	28.999	19.573	14.744	11.819
		Sari (2015)	131.375	54.443	29.00	19.573	14.744	11.819
	0.2	Présent	83.457	35.631	19.049	12.862	9.690	7.768
		Sari (2015)	83.457	35.640	19.052	12.864	9.691	7.769

Nous remarquons une bonne corrélation du travail fait avec celui de la méthode de collocation de Chebyshev de Sari (2015). Ce qui confirme l'efficacité de l'élément- p courbé pour la modélisation des nano-plaques.

Les résultats des cinq premiers paramètres de fréquences pour de plaque sectorielle annulaire modérément épaisse ($h/a=0.1$) du type LELE avec $\alpha = 90^0$ et $b/a=0.4$ en fonction du degré du polynôme d'interpolation P sont présentés dans la figure 6.5.

Les allures des graphes dans cette figure montrent la rapidité de la convergence vers les solutions de quadrature différentielle [Liew et Liu (2000)] en augmentant le degré du polynôme d'interpolation ($P=5, \dots, 10$).

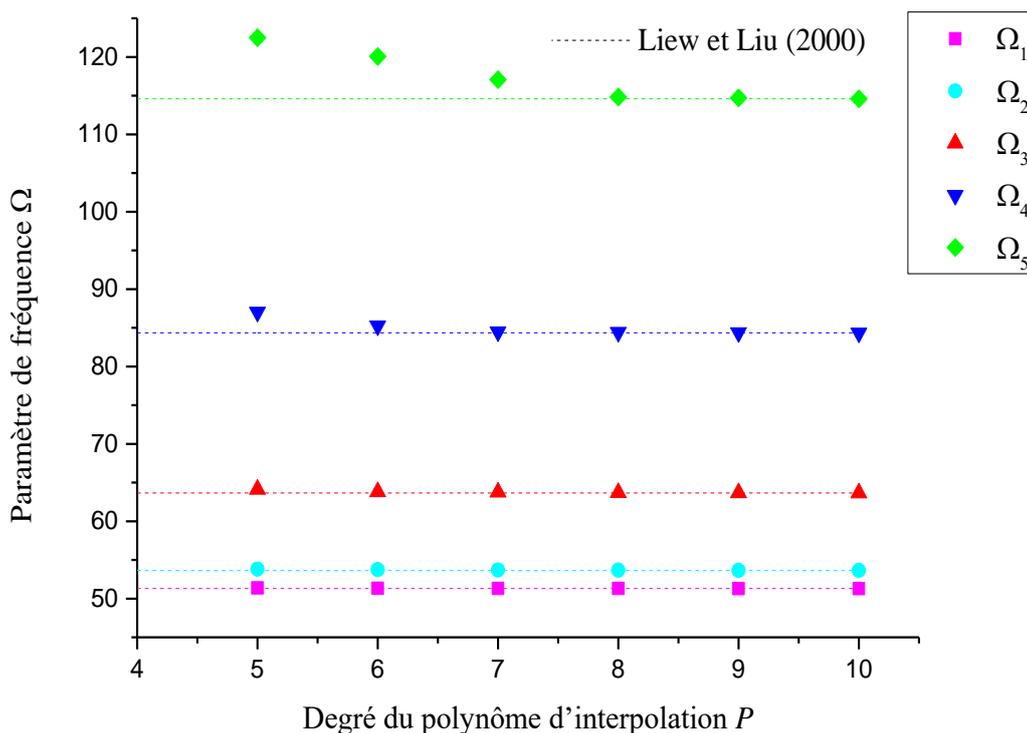


Figure 6.5 : Convergence des cinq premiers paramètres de fréquences d'une plaque sectorielle annulaire du type LELE ($b/a = 0.4, h/a = 0.1, \alpha = 90^0$).

Dans les figures 6.6 et 6.7, nous avons augmenté le degré du polynôme d'interpolation ($P=5, \dots, 10$) pour étudier la convergence des six premiers paramètres de fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire du type AEAE et AEEA avec $\alpha = 60^\circ$, $K = 0.8$, $h/a = 0.2$ et $b/a = 0.25$. D'après ces graphes nous constatons que l'augmentation du degré P du polynôme d'interpolation est nécessaire pour la stabilité de convergence notamment pour les modes ≥ 2 . Les allures des graphes dans ces figures montrent que les résultats de l'élément- p quadrilatéral courbé pour de plaque sectorielle annulaire non locale concordent très bien avec ceux de Sari (2015).

Une remarque générale concernant les résultats obtenus est que la convergence est toujours atteinte pour des différentes conditions aux limites. Et ceci implique que la méthode utilisée donne des bons résultats.

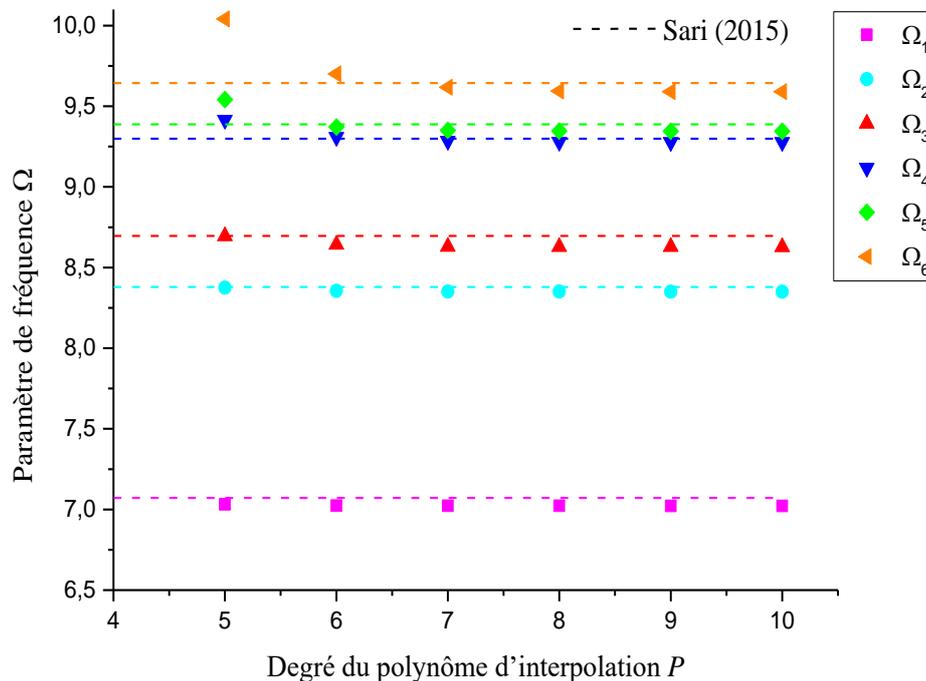


Figure 6.6 : Convergence des six premiers paramètres de fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire du type AEAE ($b/a = 0.25$, $h/a = 0.2$, $K = 0.8$, $\alpha = 60^\circ$).

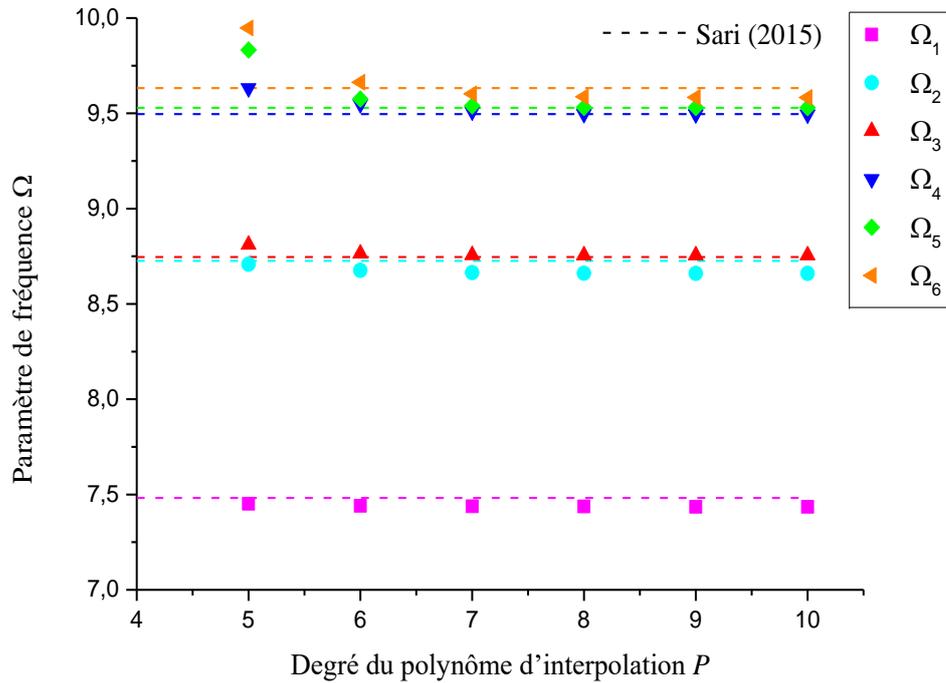


Figure 6.7 : Convergence des six premiers paramètres de fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire du type AEEA ($b/a = 0.25, h/a = 0.2, K = 0.8, \alpha = 60^\circ$).

6.2.3. Nano-plaques elliptiques et circulaires

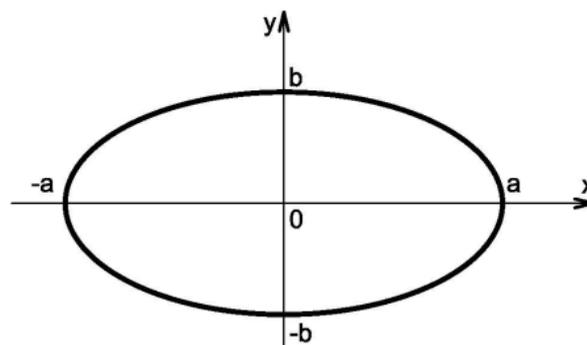


Figure 6.8 : Nano-plaque elliptique.

On suppose une plaque elliptique située dans un plan x - y , dont les dimensions sont $2a \times 2b$, comme indiqué sur la figure 6.8. Demi-majeur a dans la direction x et demi-mineur b dans la direction y . La nano-plaque elliptique est modélisée par un élément fini

quadrilatéral hiérarchique avec quatre côtés courbés. Pour montrer la validité de notre étude dans le cas de nano-plaques circulaires ($a/b=1$), les fréquences fondamentales d'une nano-plaque circulaire isotrope encadrée sont obtenues par la méthode proposée et sont comparées dans le tableau 6.8 avec celles de la théorie des plaques classiques non locales de Mohammadi et *al.* (2013) et la méthode de Galerkin d'Anjomshoa et Tahani (2016) pour différents paramètres non local ($K = 0, 1, 2$) et les rapports $a/h = 5, 10, 30$. On voit dans ce tableau que les fréquences propres du nano-plaque circulaire diminuent lorsque le paramètre non local K augmente. De plus, ce tableau montre que lorsque le rapport a/h augmente ou que la nano-plaque devient plus mince, les fréquences propres augmentent et convergent vers les fréquences classiques non locales. Ce tableau montre clairement que les résultats actuels concordent bien avec les résultats publiés dans la littérature.

Pour étudier la plaque elliptique, le tableau 6.9 présente les résultats des trois premiers paramètres de fréquences linéaires des plaques elliptiques encadrées pour la valeur d'excentricité de l'ellipse $a/b=2$ et pour les rapports d'épaisseur $a/h=5, 10, 30$. Une comparaison des résultats obtenus avec les valeurs existantes de la théorie des plaques de Mindlin [Anjomshoa et Tahani (2016)] et la théorie classique [Wang et *al.* (1994), Liew (1990a) et Decapua et Sun (1972)] est présentée dans ce Tableau. On peut voir que les résultats de l'élément- p quadrilatéral courbé sont plus en accord avec les solutions d'Anjomshoa et Tahani (2016) que celles de la théorie classique.

L'analyse des vibrations libres des nano-plaques elliptiques modérément épaisses encadrées est considérée. Dans cet exemple, nous étudions une nano-plaque elliptique modérément épaisse ($h/b=0.1$) encadrée avec différentes excentricités ($a/b= 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ et 2.0). La plaque est modélisée par un élément- p quadrilatéral courbé. Les résultats du mode fondamental ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$) pour la plaque elliptique en fonction du degré du polynôme d'interpolation P sont représentés dans la figure 6.9. Dans ce cas, le paramètre non local prend la valeur $K=2$ et $k_s = 5/6$. Les allures des graphes montrent que la convergence est toujours atteinte avec seulement quelques degrés du polynôme d'interpolation. A partir des résultats obtenus nous remarquons une stabilité de convergence, pour $P \geq 8$, deux paramètres de fréquences successives sont les mêmes jusqu'à trois ou quatre chiffres après la virgule.

Tableau 6.8 : Comparaison des paramètres de fréquences ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$) d'une nano-plaque circulaire épaisse encadrée ($a/b = 1, a = 10, k_s = 5/6$).

a/h	K	Présent	Anjomshoa et tahani (2016)	Mohammadi et al. (2013)
5	0	9.2500	9.2508	-
	1	8.9519	8.9527	-
	2	8.2008	8.2017	-
10	0	9.9440	9.9451	-
	1	9.6181	9.6192	-
	2	8.8005	8.8017	-
30	0	10.1846	10.1845	10.2158
	1	9.8490	9.8489	9.8784
	2	9.0082	9.0083	9.0348

Tableau 6.9 : Comparaison des trois premiers paramètres de fréquences ($\Omega = \omega(2a)^2 \sqrt{\rho h / D} / \pi^2$) des plaques elliptiques encadrées ($a/b = 2, a = 5, k_s = 5/6, K = 0$).

a/h	méthode	Ω_1	Ω_2	Ω_3
5	Présent	8.6069	11.7555	15.7277
	Anjomshoa et tahani (2016)	8.6068	11.7594	15.7500
10	Présent	10.2598	14.4803	20.0685
	Anjomshoa et tahani (2016)	10.2597	14.4936	20.0993
30	Présent	11.0001	15.8353	22.5296
	Anjomshoa et tahani (2016)	11.0110	15.8813	22.5276
	Wang et al. (1994)	11.100	16.008	22.689
	Liew (1990a)	11.136	16.008	22.687
	Decapua et Sun (1972)	11.097	16.005	22.684

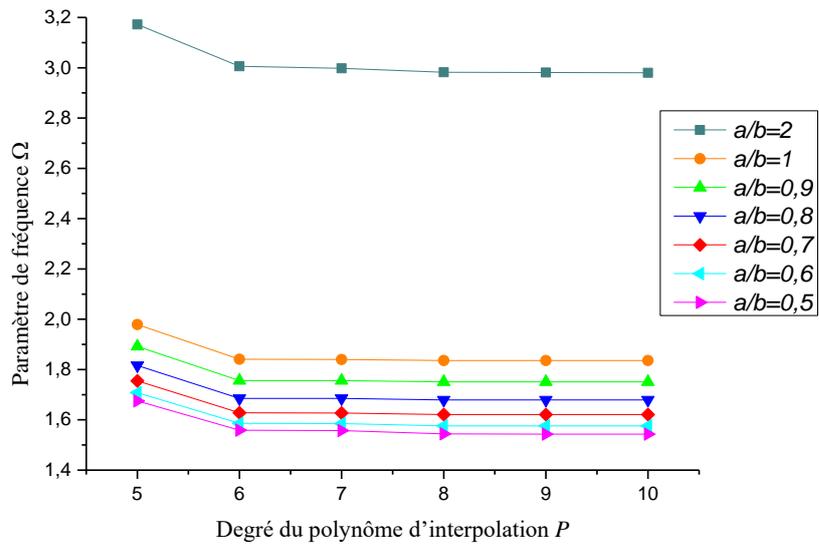


Figure 6.9 : Convergence des paramètres de fréquences fondamentales d'une nano-plaque elliptique encastrée ($h/b=0.1, K=2$) pour différentes excentricités (a/b).

6.2.4. Plaques biaises

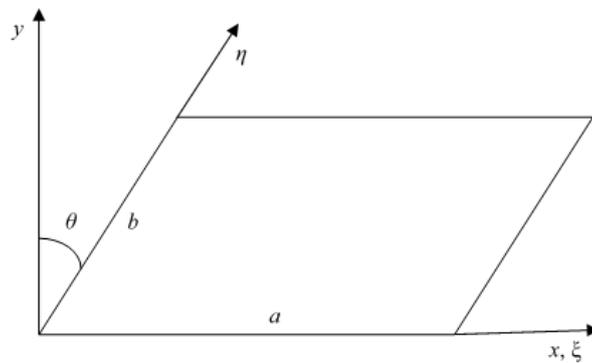


Figure 6.10 : Géométrie et système de coordonnées des plaques biaises.

L'élément fini version- p de plaque biaise développé dans ce travail devra être validé par comparaison des résultats avec la littérature (figure 6.10). Nous présentons dans cette partie une étude comparative de paramètres de fréquence $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise avec un rapport d'épaisseur (h/b) est 0,001 pour les plaques minces et 0,2 pour les plaques épaisses.

Le premier cas est celui d'une plaque biaise à 15^0 simplement appuyée et encastrée montré dans les tables 6.10 et 6.11, respectivement. Le second exemple concerne une plaque biaise à 45^0 simplement supportée sur ses bords et complètement encastrée, comme on peut le voir aux tableaux 6.12 et 6.13.

La validité des résultats de la plaque « mince » est confirmée par les solutions existantes calculées par Woo et *al.* (2003), Liew et *al.* (1993), Raju et Hinton (1980) et Huang et *al.* (1995), alors que les résultats pour les plaques « épaisse » se comparent bien à ceux obtenus par Woo et *al.* (2003), Raju et Hinton (1980) et Liew et *al.* (1993) qui prennent en compte les effets de la déformation par cisaillement et l'inertie de rotation. Les solutions de version-*p* obtenues avec un modèle à un élément quadrilatéral courbé et $P = 10$ sont en excellent accord avec les résultats en littératures.

Tableau 6.10: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise simplement appuyée ($a/b = 1, k_s = 5/6, \theta = 15^0$).

<i>h/b</i>	Mode	Méthode				
		Présent	Woo et <i>al.</i> (2003)	Liew et <i>al.</i> (1993)	Raju et Hinton (1980)	Huang et <i>al.</i> (1995)
0,001	1	2,1148	2,1149	2,1147	2,117	2,1144
	2	4,8841	4,8841	4,8842	4,903	4,8842
	3	5,6858	5,6872	5,6856	5,712	5,6848
	4	8,009	8,009	8,009	8,069	8,0087
	5	10,5372	10,5377	10,5372	10,76	10,5374
	6	11,034	11,0277	11,0337	—	—
0,2	1	1,7873	1,80256	1,856	1,86	—
	2	3,7268	3,72284	3,7856	3,803	—
	3	4,1993	4,21581	4,2763	4,3	—
	4	5,4687	5,43977	5,5784	5,617	—
	5	6,8012	6,78359	6,8385	6,947	—
	6	7,0171	7,01248	7,0702	—	—

Tableau 6.11: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise encastree ($a/b = 1, k_s = 5/6, \theta = 15^\circ$).

h/b	Mode	Méthode				
		Présent	Woo et al. (2003)	Liew et al. (1993)	Raju et Hinton (1980)	Huang et al. (1995)
0,001	1	3,8691	3,8679	3,8691	3,872	3,8692
	2	7,3858	7,3865	7,3858	7,421	7,3859
	3	8,3708	8,3757	8,3708	8,41	8,371
	4	11,1005	11,1094	11,1005	11,18	11,1009
	5	14,0814	14,1151	14,0806	14,37	14,081
	6	14,7071	14,7423	14,7064	—	14,707
0,2	1	2,8131	2,7882	2,8058	2,815	—
	2	4,6451	4,6108	4,6298	4,655	—
	3	5,1139	5,0869	5,0963	5,125	—
	4	6,3297	6,2708	6,307	6,346	—
	5	7,4337	7,3881	7,4052	7,493	—
	6	7,7482	7,7050	7,7179	—	—

Tableau 6.12 : Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise simplement appuyée ($a/b = 1, k_s = 5/6, \theta = 45^\circ$).

h/b	Mode	Méthode				
		Présent	Woo et al. (2003)	Liew et al. (1993)	Raju et Hinton (1980)	Huang et al. (1995)
0,001	1	3,5870	3,5871	3,5800	3,6648	3,5208
	2	6,7152	6,7168	6,7153	6,7632	6,7153
	3	10,1778	10,1984	10,1756	10,1979	10,1574
	4	10,9923	11,0746	10,9754	11,2467	10,8454
	5	14,2692	14,324	14,2662	14,8334	14,266
	6	17,0576	17,1028	17,0518	—	—
0,2	1	2,7776	2,87991	2,9129	2,968	—
	2	4,8044	4,79547	4,8736	4,909	—
	3	6,5465	6,50515	6,6622	6,767	—
	4	6,8824	6,98927	7,0148	7,129	—
	5	8,3755	8,36149	8,4831	8,698	—
	6	9,5395	9,50514	9,5878	—	—

Tableau 6.13 : Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega b^2 / \pi^2)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque biaise encastree ($a / b = 1, k_s = 5 / 6, \theta = 45^\circ$).

h/b	Mode	Méthode				
		Présent	Woo et al. (2003)	Liew et al. (1993)	Raju et Hinton (1980)	Huang et al. (1995)
0,001	1	6,653	6,65751	6,6519	6,665	6,651
	2	10,79	10,82592	10,7898	10,9	10,7902
	3	15,0315	15,22984	15,0276	15,36	15,0271
	4	15,9502	16,1277	15,9342	16,09	15,9313
	5	19,9818	20,5724	19,3995	20,77	19,9373
	6	23,3162	23,6701	23,2526	—	23,2523
0,2	1	4,1736	4,1622	4,159	4,178	—
	2	5,9249	5,9043	5,9021	5,947	—
	3	7,5728	7,4729	7,5422	7,628	—
	4	7,8237	7,8007	7,7907	7,849	—
	5	9,2553	9,2237	9,2159	9,374	—
	6	10,1364	10,1056	10,0921	—	—

6.2.5. Plaques trapézoïdales

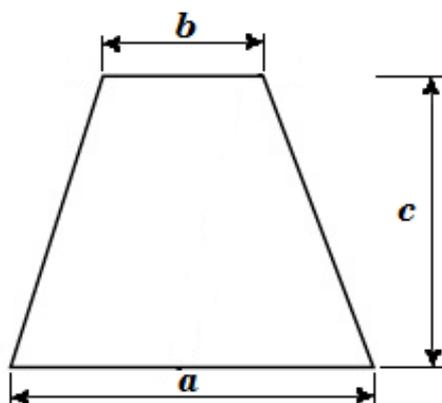


Figure 6.11 : Plaque trapézoïdale.

Les quatre premiers paramètres de fréquences linéaires d'une plaque trapézoïdale isotrope mince simplement appuyée avec différentes valeurs de rapport b/a ($b/a = 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5$ et 1.0) sont donnés dans le tableau 6.14. Le rapport $b/a = 0$ correspond à une plaque triangulaire isocèle et $b/a = 1$ est une plaque carrée. Les résultats actuels sont comparés avec les valeurs de Chopra et Durvasula (1972) et Liew et Lam (1991).

Dans ce tableau, les résultats de l'élément- p quadrilatéral courbé pour l'épaisseur $h/a=0.001$ s'accordent avec ceux des références.

Le deuxième ensemble de résultats disponibles pour la comparaison est le cas de la plaque trapézoïdale isotrope encastree. Les paramètres de fréquence non dimensionnels de la plaque trapézoïdale encastree ainsi que les solutions de Liew et Lam (1991) et les solutions (upper and lower bound solutions) de Kuttler et Sigillito (1981) sont présentés dans le tableau 6.15. Seules les deux premières fréquences étant publiées par Kuttler et Sigillito, les résultats actuels sont comparés avec ces deux valeurs. Pour les valeurs de rapport $b/a \geq 2/5$, la comparaison montre clairement que les résultats obtenus sont identiques avec ceux obtenus par Liew et Lam (1991) avec au moins trois chiffres significatifs. A noter que dans cette référence, les auteurs utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz.

Tableau 6.14: Comparaison des quatre premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega a^2 / 2\pi)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque trapézoïdale simplement appuyée ($c/a = 1, h/a = 0.001, k_s = 5/6$).

b/a	Méthode	Mode			
		1	2	3	4
0	Présent	7.29	16.36	17.67	28.26
	Chopra et Durvasula (1972)	7.30	16.37	17.69	28.26
	Liew et Lam (1991)	7.30	16.32	17.64	28.43
1/5	Présent	6.01	12.68	15.37	21.50
	Chopra et Durvasula (1972)	6.01	12.68	15.38	21.46
	Liew et Lam (1991)	6.01	12.69	15.34	21.73
2/5	Présent	4.90	10.17	13.19	18.06
	Chopra et Durvasula (1972)	4.90	10.17	13.19	18.05
	Liew et Lam (1991)	4.90	10.24	13.17	17.72
3/5	Présent	4.08	8.91	11.14	16.74
	Chopra et Durvasula (1972)	4.08	8.91	11.14	16.74
	Liew et Lam (1991)	4.08	8.91	11.12	16.72
4/5	Présent	3.52	8.24	9.31	14.16
	Chopra et Durvasula (1972)	3.52	8.24	9.31	14.16
	Liew et Lam (1991)	3.52	8.24	9.29	14.20
1.0	Présent	3.14	7.85	7.85	12.57
	Chopra et Durvasula (1972)	3.14	7.85	7.85	12.57
	Liew et Lam (1991)	3.14	7.84	7.84	12.59

Tableau 6.15: Comparaison des quatre premiers paramètres de fréquences $\Omega = (\omega a^2 / 2\pi)(\sqrt{\rho h / D})$ d'une plaque trapézoïdale encastrée ($c/a = 1$, $h/a = 0.001, k_s = 5/6$).

b/a	Méthode	Mode			
		1	2	3	4
0	Présent	13.73	25.45	27.02	40.96
	Liew et Lam (1991)	13.73	25.40	26.98	39.46
	Kuttler et Sigillito (upper bounds) (1981)	13.73	25.41	-	-
	Kuttler et Sigillito (lower bounds) (1981)	13.70	25.28	-	-
1/5	Présent	11.34	19.92	23.32	30.49
	Liew et Lam (1991)	11.32	19.45	23.30	30.57
	Kuttler et Sigillito (upper bounds) (1981)	11.35	19.93	-	-
	Kuttler et Sigillito (lower bounds) (1981)	11.31	19.77	-	-
2/5	Présent	9.22	15.59	19.88	24.56
	Liew et Lam (1991)	9.22	15.59	19.87	24.55
	Kuttler et Sigillito (upper bounds) (1981)	9.23	15.63	-	-
	Kuttler et Sigillito (lower bounds) (1981)	9.18	15.45	-	-
3/5	Présent	7.56	13.34	16.70	22.45
	Liew et Lam (1991)	7.55	13.34	16.70	22.42
	Kuttler et Sigillito (upper bounds) (1981)	7.57	13.39	-	-
	Kuttler et Sigillito (lower bounds) (1981)	7.52	13.27	-	-
4/5	Présent	6.44	12.27	13.88	19.44
	Liew et Lam (1991)	6.44	12.27	13.88	19.44
	Kuttler et Sigillito (upper bounds) (1981)	6.45	12.30	-	-
	Kuttler et Sigillito (lower bounds) (1981)	6.41	12.20	-	-
1.0	Présent	5.73	11.68	11.68	17.22
	Liew et Lam (1991)	5.73	11.68	11.68	17.22
	Kuttler et Sigillito (upper bounds) (1981)	5.73	11.10	-	-
	Kuttler et Sigillito (lower bounds) (1981)	5.72	11.61	-	-

6.2.6. Plaques sectorielles elliptiques et circulaires

Cette partie concerne la validation des résultats obtenus par l'élément- p quadrilatéral courbé pour les vibrations libres linéaires des plaques sectorielles elliptiques et circulaires minces et modérément épaisses.

Pour la première fois dans le domaine d'analyse des vibrations des plaques, un élément- p quadrilatéral courbé est développé pour l'analyse des vibrations des plaques sectorielles elliptiques. Pour mieux valider notre travail, le tableau 6.16 donne une comparaison des six premiers paramètres de fréquences d'une plaque sectorielle elliptique encastrée minces ($h/b=0.05$) et modérément épaisses ($h/b=0.1$) avec l'angle de secteur ($\phi = 90^\circ$) et un rapport d'excentricité ($a/b=2$). Nous remarquons une bonne

corrélation du travail fait avec celui de la méthode des éléments finis version- p basés sur un l'élément- p triangulaire courbé [Belalia et Houmat (2010)]. Ce qui confirme l'efficacité de l'élément- p quadrilatéral courbé pour la modélisation des plaques sectorielles.

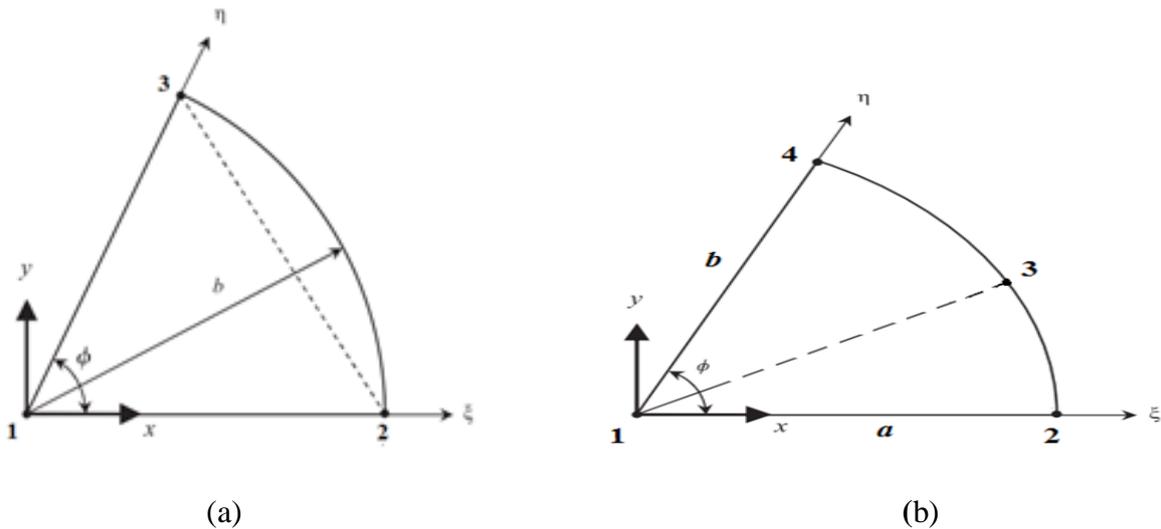


Figure 6.12 : Modélisation géométrique d'une plaque sectorielle elliptique : (a) par un élément- p triangulaire courbé [Belalia et Houmat (2012)] ; (b) par un élément- p quadrilatéral courbé.

Le tableau 6.17 donne les paramètres de fréquence linéaires des six premiers modes d'une plaque sectorielle circulaire encastrée et une comparaison avec les valeurs obtenues par Belalia et Houmat (2010). Trois valeurs de l'angle du secteur et deux rapports d'épaisseur sont prises en considération ($\phi = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$, et $h/b = 0.05, 0.1$). Les résultats de l'élément- p quadrilatéral courbé concordent très bien avec ceux de Belalia et Houmat (2010) qui sont basés sur la théorie des plaques de Mindlin.

Nous modélisons la plaque sectorielle par l'élément- p quadrilatéral avec deux côté courbé par contre dans le modèle de Belalia et Houmat (2010) la plaque est modélisée par l'élément- p triangulaire avec un seul côté courbé (voir figure 6.12).

Tableau 6.16: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque sectorielle elliptique encastrée ($\phi = 90^\circ, k_s = \pi^2 / 12$).

a/b	h/b	Méthode	Mode					
			1	2	3	4	5	6
2	0.05	Présent	30.182	42.806	59.117	71.827	80.787	89.811
		Belalia et Houmat (2010)	30.182	42.805	59.116	71.828	80.799	89.902
	0.1	Présent	28.230	39.305	53.157	63.487	70.592	77.862
		Belalia et Houmat (2010)	28.230	39.304	53.190	63.487	70.526	77.900

Tableau 6.17: Comparaison des six premiers paramètres de fréquences $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ d'une plaque sectorielle circulaire encastrée ($a/b = 1, k_s = \pi^2 / 12$).

ϕ	h/b	Méthode	Mode					
			1	2	3	4	5	6
90	0.05	Présent	46.991	82.715	97.964	126.01	149.56	163.09
		Belalia et Houmat (2010)	46.991	82.718	97.963	126.03	149.51	163.07
	0.1	Présent	42.746	71.963	83.861	105.15	122.19	132.05
		Belalia et Houmat (2010)	42.746	71.964	83.861	105.16	122.18	132.05
60	0.05	Présent	71.414	132.07	135.23	204.98	212.39	218.11
		Belalia et Houmat (2010)	71.420	132.07	135.25	204.99	212.44	217.95
	0.1	Présent	62.410	108.33	110.73	159.39	164.56	167.86
		Belalia et Houmat (2010)	62.410	108.33	110.73	159.37	164.56	167.81
30	0.05	Présent	164.94	249.89	333.11	342.40	451.32	452.66
		Belalia et Houmat (2010)	164.95	249.93	333.11	342.14	451.59	452.53
	0.1	Présent	128.29	183.35	234.42	240.39	301.97	304.42
		Belalia et Houmat (2010)	128.29	183.35	234.42	240.33	301.18	304.31

Enfin, les études de convergence et de comparaison que nous avons présentée dans cette partie montrent la rapidité de la convergence, l'exactitude et l'efficacité de l'élément- p quadrilatéral courbé développé pour différentes formes des plaques avec différents rapports géométriques et avec différentes conditions aux limites.

6.3. Étude paramétrique de la nouvelle nano-plaque sectorielle annulaire elliptique

Dans cette partie, un élément- p quadrilatéral courbé est développé pour l'analyse de vibration linéaire de la nouvelle nano-plaque sectorielle annulaire elliptique. A l'aide de ses cotés courbés, cet élément permet de modéliser la forme géométrique de ce type de plaque. La forme de cette plaque offre la possibilité de modifier les dimensions des côtés (a , b , c et d) et l'angle de secteur α . Cela n'était pas disponible auparavant dans la littérature, comme le montre la figure 6.13. Les effets des variations du rapport d'excentricité, de l'angle de secteur, du paramètre non local, du rapport de l'épaisseur, du nombre de modes et des conditions aux limites sur les valeurs de fréquence du nano-plaque sectorielle annulaire elliptique ont été étudiés en détail.

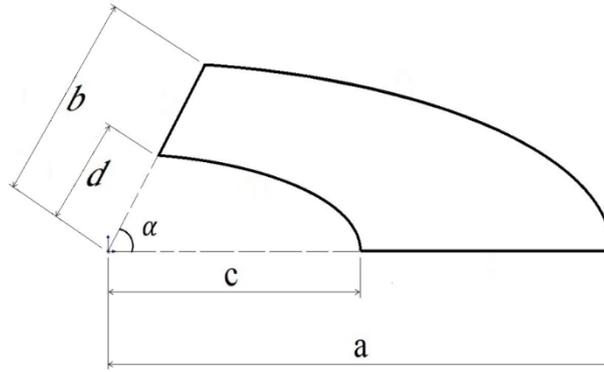


Figure 6.13 : Nano-plaque sectorielle annulaire elliptique avec $\alpha = 60^0$.

6.3.1. Paramètre et rapport de fréquence

Les résultats sont donnés pour le paramètre de fréquence exprimé en fonction de la pulsation propre de vibration, par : $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$. Dans les discussions suivantes, nous considérons le rapport d'excentricité comme suit : $\lambda = a / b = c / d$. Et $b = 1$, $d = 1/2$ est utilisé tout au long d'étude. Le facteur de correction du cisaillement est pris comme $k_s = \pi^2 / 12$.

Les rapports de paramètres de fréquences non locales aux fréquences locales ($RF = \Omega^{nl} / \Omega^l$) d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique pour les excentricités $\lambda = 2$ et 3 et pour les rapports d'épaisseur $h/b = 0.1$ et l'angle de secteur $\alpha = 90^0$ avec

les conditions aux limites (EEEE, EEEA, AAAA, AEAA, AEAE, AEAL, AAAL, EAAL et ALAA) sont présentés dans le tableau 6.18. Plusieurs valeurs de paramètre non local ($K = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8) sont considérées dans ce tableau.

Dans une étude plus approfondie, les tableaux 6.19 et 6.20 donnent la variation de paramètre de fréquence d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique pour différentes valeurs de paramètre non local. La plaque est considérée modérément épaisse avec deux rapports d'épaisseur $h/b = 0.1$ et 0.2 . Deux angle de secteur $\alpha = 30^\circ$ et 90° , et deux rapports d'excentricité $\lambda = 2$ et 3 sont choisis. Les conditions aux limites appliqués aux quatre bords sont ; totalement encastree EEEE et LELE, respectivement.

Tableau 6.18 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, \alpha = 90^\circ$).

λ	Conditions aux limites	Ω^l	K				
			0	0.2	0.4	0.6	0.8
2	EEEE	45.9921	1.0000	0.6569	0.3958	0.2752	0.2096
	EEEA	39.7779	1.0000	0.6641	0.4033	0.2812	0.2144
	AAAA	25.4725	1.0000	0.6939	0.4340	0.3058	0.2342
	AEAA	35.3855	1.0000	0.6708	0.4103	0.2868	0.2189
	AEAE	40.7651	1.0000	0.6580	0.3973	0.2765	0.2107
	AEAL	17.9087	1.0000	0.7518	0.4871	0.3459	0.2656
	AAAL	11.6451	1.0000	0.7963	0.5478	0.3991	0.3100
	EAAL	13.1731	1.0000	0.7843	0.5312	0.3844	0.2976
	ALAA	03.6453	1.0000	0.8508	0.6284	0.4738	0.3740
3	EEEE	39.0998	1.0000	0.6941	0.4308	0.3023	0.2311
	EEEA	34.9673	1.0000	0.6963	0.4330	0.3040	0.2324
	AAAA	21.1563	1.0000	0.7289	0.4698	0.3344	0.2572
	AEAA	29.5859	1.0000	0.7067	0.4450	0.3140	0.2406
	AEAE	32.6796	1.0000	0.6973	0.4348	0.3056	0.2338
	AEAL	14.8626	1.0000	0.7672	0.5050	0.3607	0.2776
	AAAL	08.2022	1.0000	0.8140	0.5716	0.4203	0.3278
	EAAL	08.8155	1.0000	0.8062	0.5607	0.4106	0.3196
	ALAA	02.4546	1.0000	0.8667	0.6552	0.5002	0.3973

Tableau 6.19: Paramètres de fréquences fondamentales d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encadrée pour différentes valeurs de paramètre non local.

α (deg)	λ	h/b	K					
			0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
30	2	0,1	89.6942	45.6583	25.2097	17.1445	12.9496	10.3938
		0,2	60.0463	31.4836	17.4818	11.8955	8.9857	7.2124
	3	0,1	90.9380	46.6764	25.8386	17.5844	13.2854	10.6647
		0,2	60.1433	31.7717	17.6761	12.0337	9.0919	7.2983
60	2	0,1	48.3629	31.1919	18.6396	12.9319	9.8409	7.9267
		0,2	36.4515	23.9630	14.4135	10.0083	7.6171	6.1356
	3	0,1	43.7707	29.3504	17.8738	12.4682	9.5081	7.6664
		0,2	33.3937	22.7788	13.9562	9.7411	7.4284	5.9892

Tableau 6.20: Paramètres de fréquences fondamentales d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique LELE pour différentes valeurs de paramètre non local.

α (deg)	λ	h/b	K					
			0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
30	2	0,1	33.9350	21.1198	12.3109	8.4772	6.4322	5.1737
		0,2	27.4230	17.6186	10.3474	7.1315	5.4121	4.3535
	3	0,1	27.6272	17.8523	10.6107	7.3472	5.5868	4.4984
		0,2	23.1104	15.4542	9.2841	6.4407	4.9002	3.9465
60	2	0,1	25.5974	18.2237	11.2391	7.8383	5.9738	4.8148
		0,2	21.1664	15.3090	9.4830	6.6127	5.0385	4.0604
	3	0,1	16.1532	12.3704	8.1159	5.7860	4.4493	3.6018
		0,2	14.1888	11.0204	7.2870	5.2026	4.0020	3.2401

On conclut que lorsque l'angle de secteur augmente, la fréquence diminue pour tous les valeurs du rapport d'épaisseur h/b , rapport d'excentricité λ et paramètre non local, en raison de la diminution de la rigidité flexionnelle du nano-plaque sectorielle annulaire elliptique.

De plus, il ressort de ces tableaux que la fréquence fondamentale diminue lorsque le paramètre non local K augmente et le rapport d'épaisseur augmente pour toutes les valeurs de l'angle de secteur.

6.3.2. Effet du rapport d'excentricité

L'effet du rapport d'excentricité λ sur le paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique pour différentes valeurs du paramètre non local est illustré aux figures 6.14-17. Dans cette discussion, nous examinerons quatre types de conditions aux limites (EEEE, AAAA, AEAE et AEAA) et deux angles de secteur ($\alpha = 90^0$ et $\alpha = 60^0$). Dans ces figures, le rapport d'excentricité λ est pris comme étant dans la gamme de [1, 4]. Il est évident que lorsque le rapport d'excentricité λ augmente, le paramètre de fréquence fondamentale diminue pour tous les valeurs du paramètre non local. Cependant, le taux décroissant diminue lorsque les valeurs de K sont élevées. Un point d'intérêt est qu'à $K = 0$, la diminution de paramètre de fréquence est plus significatif lorsque $\lambda < 2$. En outre, l'augmentation du paramètre non local diminue les paramètres de fréquence pour chaque valeur d'excentricité en raison du fait que la présence de non-localité rend la structure de la plaque plus souple. Les paramètres de fréquences fondamentaux utilisant le modèle non local ($K > 0$), sont toujours plus petits que le modèle local ($K = 0$). Cela signifie que l'analyse de nano-plaque basé sur la théorie locale entraînerait une prédiction excessive de la fréquence. En revanche, en augmentant les valeurs de paramètre non local K , les fréquences calculées par la théorie non locale deviennent plus petites par rapport à la théorie locale.

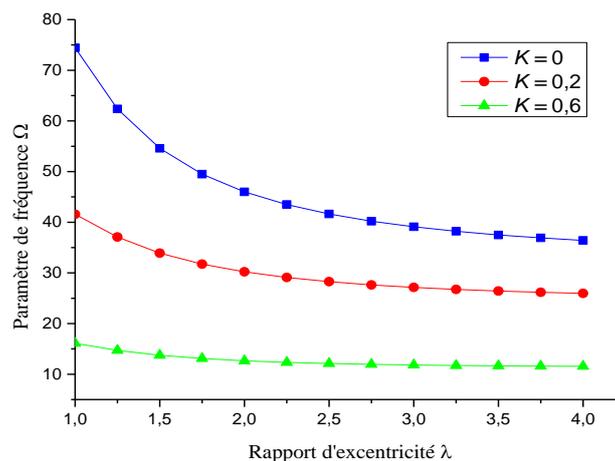


Figure 6.14 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastrée en fonction de rapport d'excentricité pour différents paramètres non local ($h/b = 0.1, \alpha = 90^0$).

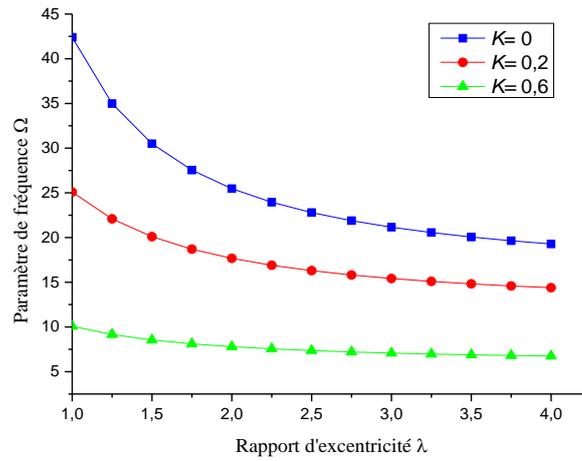


Figure 6.15 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d’une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique simplement appuyée en fonction de rapport d’excentricité pour différents paramètres non local ($h/b = 0.1, \alpha = 90^0$).

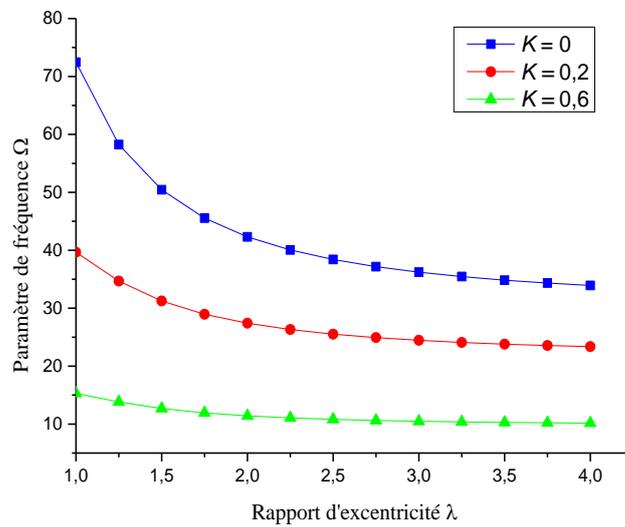


Figure 6.16 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d’une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique AEAE en fonction de rapport d’excentricité pour différents paramètres non local ($h/b = 0.1, \alpha = 60^0$).

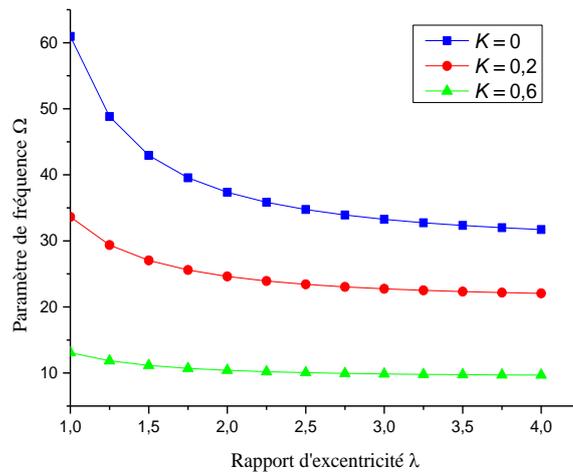


Figure 6.17 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique AEAA en fonction du rapport d'excentricité pour différents paramètres non local ($h/b = 0.1, \alpha = 60^0$).

6.3.3. Effet de l'angle de secteur

Les figures 6.18 et 6.19 montrent l'effet de l'angle de secteur α sur la fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastree et simplement appuyée avec $\lambda = 2$ et $h/b = 0,1$ pour les différentes valeurs du paramètre non local K . L'angle de secteur est considéré comme étant dans la gamme de 20^0 à 90^0 .

Sur ces figures on voit clairement que, lorsque l'angle de secteur augmente, la fréquence diminue et le taux de décroissance est d'autant plus significatif que α est dans la gamme de $[20^0, 60^0]$. De plus, la figure révèle le fait que lorsque le paramètre non local augmente, le taux de diminution de la fréquence est fortement réduit lorsque l'angle de secteur augmente. On s'attend à ce que l'effet de l'angle de secteur sur la fréquence disparaisse avec des valeurs relativement grandes du paramètre non local.

On constate que, le paramètre non local rend la plaque plus souple. Par conséquent, le modèle de plaque non locale fournit des résultats de fréquence inférieurs par rapport au modèle de plaque locale. En outre, l'étude basée sur le modèle local (classique) des plaques n'est pas convenable, et le modèle non local des plaques présente des approximations adéquates pour les structures à l'échelle nanométrique.

Enfin, à partir de graphes 6.14-19, les paramètres de fréquences diminuent lorsque l'angle et l'excentricité de l'ellipse augmentent.

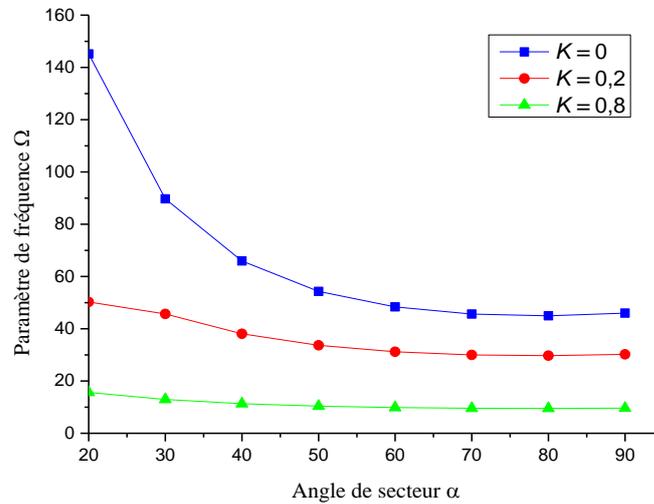


Figure 6.18 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastée en fonction de l'angle de secteur pour différents paramètres non local ($\lambda = 2, h/b = 0.1$).

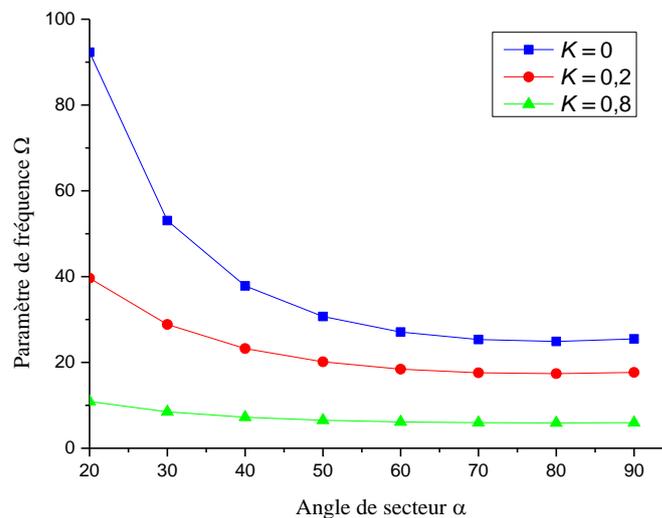


Figure 6.19 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique simplement appuyée en fonction de l'angle de secteur pour différents paramètres non local ($\lambda = 2, h/b = 0.1$).

6.3.4. Effet du paramètre non local

La figure 6.20 illustre la variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique par rapport à l'augmentation du paramètre non local pour différents types de conditions aux limites (EEEE, EEAA, AEAE et AAAA). Les plaques sectorielles annulaires modérément épaisses ($h/b = 0.1$) avec d'excentricité de l'ellipse et l'angle de secteur sont prises en considération ($\lambda = 2$ et $\alpha = 30^0$).

Dans tous les cas, il est observé qu'un accroissement du paramètre non local mène au décroissement du paramètre de fréquence, où la diminution est plus significative lorsque K est dans la gamme de $[0, 0,5]$. Ceci peut être interprété de manière à ce que, lorsque le paramètre non local augmente, l'effet à petite échelle augmente, ce qui entraîne une augmentation de la masse de la nano-plaque, et on sait que lorsque la masse augmente, les valeurs des fréquences diminuent. Ainsi, l'incorporation de paramètre d'échelle non local adoucit la nanostructure (réduit la rigidité).

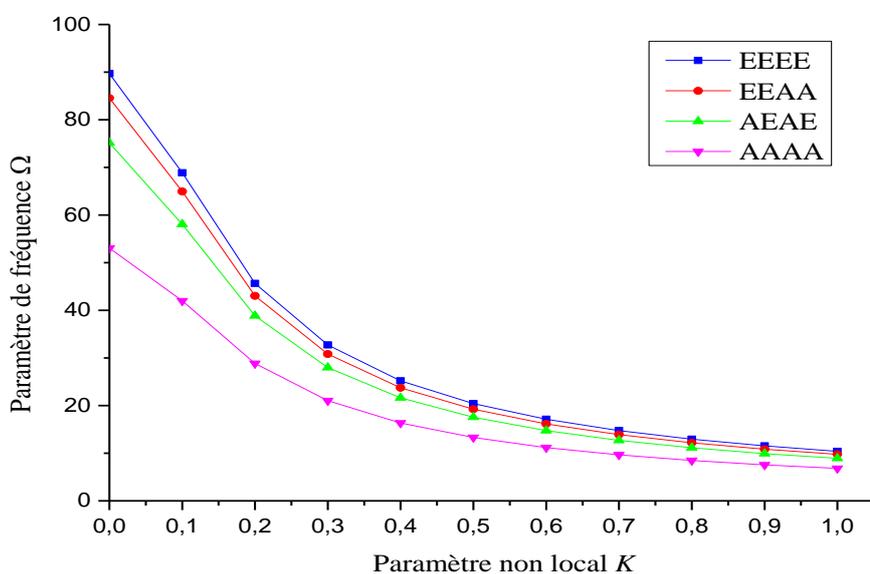


Figure 6.20 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique en fonction du paramètre non local pour différentes conditions aux limites ($\lambda = 2, h/b = 0.1, \alpha = 30^0$).

6.3.5. Effet du rapport d'épaisseur

L'étude actuelle montre que les fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique dépendent du rapport d'épaisseur (h/b). Pour illustrer cette dépendance, les paramètres de fréquences pour le mode fondamental des plaques sectorielles annulaires elliptiques encadrées minces ($h/b=0.001$) et modérément épaisses ($h/b=0.05, 0.1$ et 0.2) avec l'angle de secteur ($\alpha = 90^\circ$) et un rapport d'excentricité ($\lambda = 2$) sont tracés en fonction du paramètre non local dans la figure 6.21.

Pour toutes les valeurs du rapport d'épaisseur, nous observons que l'augmentation du paramètre non local K de 0 à 1 provoque une diminution de paramètre de fréquence. Cette diminution est plus importante pour des valeurs plus petites du paramètre non local ($K \leq 0.4$). On voit aussi que lorsque le rapport h/b diminue, la fréquence fondamentale augmente. En diminuant davantage le rapport h/b , les résultats convergent vers ceux obtenus avec une plaque mince ($h/b=0.001$). Par conséquent, le rapport (h/b) de la nano-plaque joue un rôle important dans la prédiction exacte du comportement vibratoire des nano-plaques.

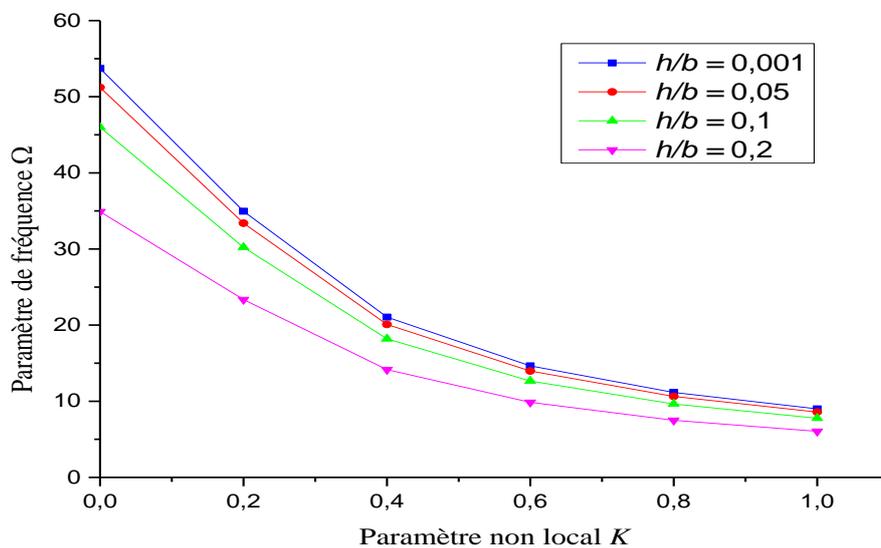


Figure 6.21 : Variation du paramètre de fréquence fondamentale d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encadrée en fonction du paramètre non local pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur ($\lambda = 2, \alpha = 90^\circ$).

6.3.6. Effet du numéro de mode

La figure 6.22 montre les variations des quatre premiers paramètres de fréquence par rapport à l'augmentation du paramètre non local pour les nano-plaques sectorielles annulaires elliptiques encastrées avec $\lambda = 2, h/b = 0.1$ et $\alpha = 120^\circ$.

On voit sur cette figure que le paramètre de fréquence décroît à mesure que le paramètre non local augmente dans tous les numéros de mode. Avec l'augmentation de paramètre non local, la diminution des fréquences des modes les plus élevés est plus significative, Ceci est dû au fait qu'une augmentation de paramètre non local entraîne une diminution de la rigidité de la nano-plaque.

En outre, on note qu'à $K \geq 0,5$, les quatre premiers paramètres de fréquence diminuent approximativement du même taux. De plus, les fréquences ont tendance à se rapprocher les unes des autres à des valeurs plus élevées du paramètre non local K .

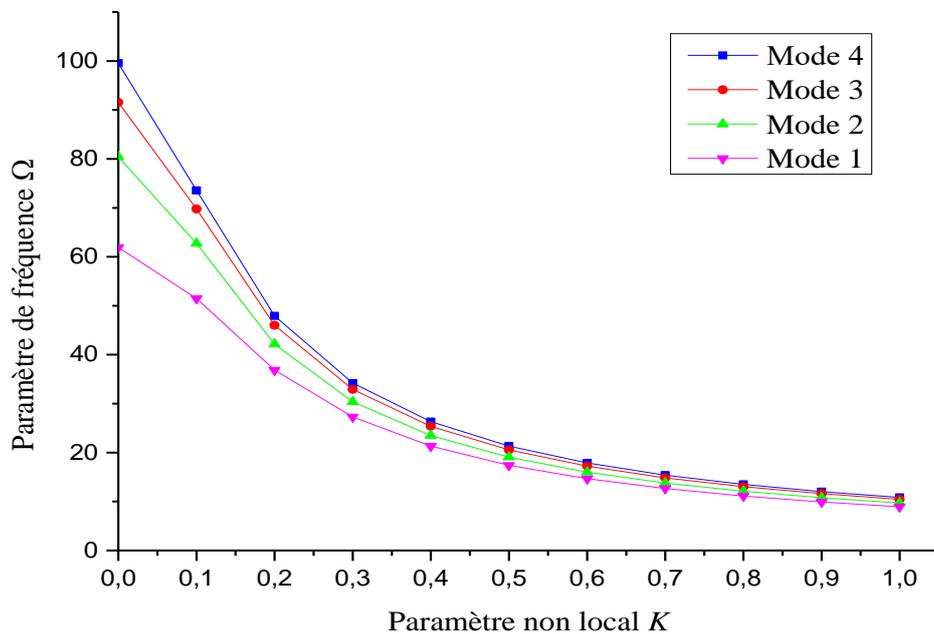


Figure 6.22 : Variation des quatre premiers paramètres de fréquences d'une nano-plaque sectorielle annulaire elliptique encastrée en fonction du paramètre non local ($\lambda = 2, h/b = 0.1, \alpha = 120^\circ$).

6.4. Fréquences linéaires des nano-plaques de formes géométriques arbitraires

En utilisant des côtés droits et courbes de l'élément fini quadrilatère hiérarchique, nous obtenons des nano-plaques de formes géométriques arbitraires. À la connaissance de l'auteur, aucun rapport n'a été trouvé dans la littérature sur l'analyse de la vibration libre linéaire de cette forme de nano-plaques.

Par conséquent, certains nouveaux résultats obtenus à partir de la technique proposée pour l'analyse des vibrations des nano-plaques arbitraires sont exprimés en tant que solutions de référence (benchmark solutions) pour la validation de nouvelles techniques de calcul à l'avenir.

Les fréquences locales et les rapports de fréquence d'une nano-plaque pour différentes conditions aux limites sont mentionnés dans les tableaux 6.21-33, où sont obtenus en appliquant la version- p basé sur un élément quadrilatéral courbé. Les fréquences sont examinées en variant le paramètre non local et les conditions aux limites. Les conditions aux limites utilisées sont : EEEE, EEEA, AAAA, AEAA, AEAE, AEAL, AAAL, EAAL et ALAA où, E, A et L sont, respectivement encastree, appuyée et libre. Alors que, le paramètre de fréquence utilisé est ; $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ et le facteur de correction du cisaillement est ; $k_s = \pi^2 / 12$, où $k_s = 5 / 6$. En outre, les valeurs obtenues pour $P = 10$ sont précises à au moins cinq chiffres significatifs.

Selon la définition de l'équation (6.2), pour la valeur zéro du paramètre non local, les fréquences locales et non locales sont égales. De plus, les fréquences locales sont données pour cette valeur de paramètre non local ($K=0$). La fréquence non dimensionnelle pour d'autres paramètres non local peut être obtenue en multipliant leur rapport de fréquence par leur propre Ω^l .

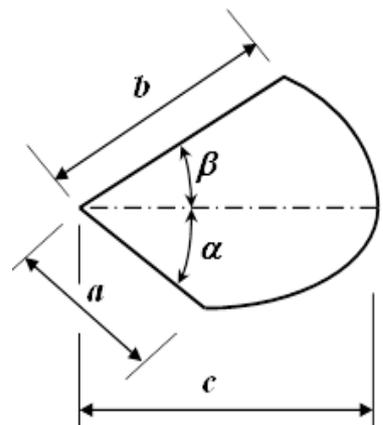
On peut observer que lorsque le paramètre non local augmente, l'effet de petite échelle augmente et les fréquences propres diminuent pour toutes les valeurs du rapport d'épaisseur (h/b), l'angle de secteur et rapport d'aspect ($a/b, c/b \dots$). Une explication de ce comportement est que les effets non local adoucissent la structure de la plaque et les rendent plus souples et moins rigidités. De plus, le paramètre d'échelle non locale a un

effet significatif, en particulier pour les modes de fréquence supérieure. Par conséquent, le paramètre d'échelle doit être pris en compte lors de la modélisation des nano-plaques.

En outre, on voit dans le tableau 6.21 que, lorsque l'angle de secteur du nouveau nano-plaque sectorielle augmente, la fréquence diminue pour toutes les valeurs de paramètres non local et différentes conditions aux limites. Aussi, le tableau 6.22 révèle que, la fréquence diminue à mesure que l'angle θ de nano-plaque type 01 augmente.

Les tableaux 6.24-27 montrent que lorsque le rapport d'aspect (a/b) augmente, la fréquence d'une nano-plaque (type 3 à 6) avec différentes conditions aux limites diminue. Cela implique que, lorsque le rapport d'aspect augmente ou que la nano-plaque devient plus petite, l'effet de petite échelle devient plus important, ce qui entraîne une diminution importante dans les valeurs des paramètres de fréquence.

Tableau 6.21 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) de la nouvelle nano-plaque sectorielle pour différentes conditions aux limites ($a/b = 1, c/b = 6/5, h/b = 0.1, k_s = \pi^2/12$).

Forme de nano-plaque	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$\alpha = 30^\circ$ $\beta = 30^\circ$	EEEE	46.5642	1.0000	0.6456	0.3867	0.2686	0.2045
		EEEE	40.1339	1.0000	0.6521	0.3932	0.2737	0.2085
		AAAA	25.7937	1.0000	0.6794	0.4201	0.2949	0.2255
		AEAA	30.6772	1.0000	0.6701	0.4109	0.2876	0.2197
		AEAE	38.0400	1.0000	0.6612	0.4021	0.2806	0.2141
		AEAL	14.4093	1.0000	0.7456	0.4829	0.3433	0.2638
		AAAL	13.3041	1.0000	0.7596	0.5001	0.3578	0.2756
		EAAL	21.0601	1.0000	0.7532	0.4903	0.3483	0.2673
		ALAA	23.3321	1.0000	0.7259	0.4619	0.3255	0.2489
		EEEE	37.1685	1.0000	0.6915	0.4291	0.3011	0.2302
		EEEE	32.1198	1.0000	0.6974	0.4354	0.3063	0.2344
		AAAA	20.3260	1.0000	0.7239	0.4645	0.3301	0.2537
		AEAA	25.6335	1.0000	0.7111	0.4504	0.3185	0.2443
		AEAE	31.4907	1.0000	0.7031	0.4414	0.3111	0.2382
AEAL	13.3218	1.0000	0.7858	0.5311	0.3835	0.2966		
AAAL	11.6864	1.0000	0.8026	0.5559	0.4061	0.3157		
EAAL	17.2956	1.0000	0.7911	0.5394	0.3907	0.3024		
ALAA	14.4587	1.0000	0.8007	0.5510	0.3998	0.3095		

De plus, les fréquences les plus hautes sont liées à la condition aux limites EEEE et les fréquences les plus basses peuvent être associées à l'une des conditions aux limites AAAL ou ALAA selon le rapport d'aspect et de la forme de la plaque.

Donc en conclusion, ces résultats numériques prouvent effectivement que l'incorporation de paramètre non local adoucit la nanostructure (réduit la rigidité) et entraîne une diminution de fréquence. De plus, les paramètres de fréquences diminuent lorsque le rapport d'aspect, le rapport d'épaisseur et l'angle de secteur augmentent.

En tant que tel, les influences de petite échelle et de différents rapports géométriques (h/b , a/b , c/b ...) et l'angle de secteur exercent un effet significatif sur les vibrations des plaques. Par conséquent, l'effet de la petite échelle ainsi que l'effet de rapports géométriques et l'angle de secteur devraient être pris en compte dans l'analyse et la modélisation du comportement mécanique des nanostructures.

Tableau 6.22 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 01 pour différentes conditions aux limites ($h = 0.1, k_s = 5/6$).

Forme de nano-plaque type 01	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$h/b = 1/10$ $c/b = 1/8$ $c/d = 1$ $\theta = 45^\circ$	EEEE	61.2339	1.0000	0.5896	0.3402	0.2339	0.1774
		EEEA	58.1025	1.0000	0.5998	0.3494	0.2410	0.1830
		AAAA	35.8594	1.0000	0.6251	0.3717	0.2579	0.1963
		AEAA	37.3933	1.0000	0.6237	0.3705	0.2570	0.1956
		AEAE	47.9327	1.0000	0.6070	0.3559	0.2458	0.1868
		AEAL	07.9627	1.0000	0.7412	0.4818	0.3437	0.2646
		AAAL	07.5395	1.0000	0.7443	0.4854	0.3467	0.2670
		EAAL	13.5690	1.0000	0.7117	0.4474	0.3152	0.2413
		ALAA	35.8588	1.0000	0.6249	0.3715	0.2577	0.1962
	$h/b = 1/30$ $c/b = 1/6$ $c/d = 1/2$ $\theta = 30^\circ$	EEEE	97.1741	1.0000	0.8815	0.6801	0.5244	0.4185
		EEEA	75.6451	1.0000	0.8875	0.6924	0.5380	0.4312
		AAAA	50.6283	1.0000	0.9001	0.7184	0.5671	0.4588
		AEAA	62.2447	1.0000	0.8952	0.7082	0.5555	0.4478
		AEAE	84.3727	1.0000	0.8885	0.6944	0.5403	0.4334
		AEAL	12.3709	1.0000	0.9366	0.7987	0.6603	0.5488
		AAAL	09.1174	1.0000	0.9436	0.8176	0.6863	0.5767
		EAAL	14.5230	1.0000	0.9309	0.7833	0.6399	0.5274
		ALAA	49.5554	1.0000	0.9061	0.7292	0.5778	0.4681

Tableau 6.23 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 02 pour différentes conditions aux limites ($h = 0.1, k_s = 5/6$).

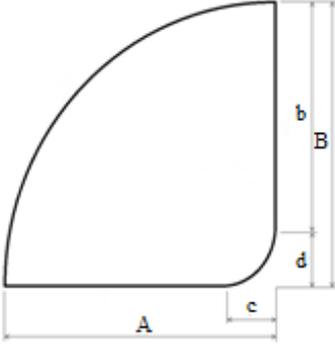
Forme de nano-plaque type 02	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
 <p> $h/b = 1/10$ $c/b = 1/8$ $c/d = 1$ $A/B = 1$ </p>	EEEE	34.6505	1.0000	0.7064	0.4437	0.3126	0.2394	
	EEEA	27.2681	1.0000	0.7153	0.4539	0.3210	0.2462	
	AAAA	19.3003	1.0000	0.7386	0.4805	0.3431	0.2642	
	AEAA	19.7793	1.0000	0.7380	0.4797	0.3425	0.2637	
	AEAE	26.4132	1.0000	0.7216	0.4610	0.3269	0.2510	
	AEAL	04.2775	1.0000	0.8618	0.6463	0.4911	0.3892	
	AAAL	04.1522	1.0000	0.8628	0.6482	0.4930	0.3909	
	EAAL	07.1992	1.0000	0.8407	0.6097	0.4545	0.3567	
	ALAA	19.2982	1.0000	0.7386	0.4804	0.3430	0.2641	
	EEEE	54.6436	1.0000	0.9291	0.7811	0.6390	0.5277	
	EEEA	41.3446	1.0000	0.9328	0.7906	0.6515	0.5409	
	AAAA	27.9433	1.0000	0.9408	0.8114	0.6792	0.5702	
	AEAA	31.5902	1.0000	0.9390	0.8066	0.6727	0.5631	
	AEAE	44.1824	1.0000	0.9338	0.7932	0.6549	0.5444	
	AEAL	05.9883	1.0000	0.9728	0.9024	0.8126	0.7221	
	AAAL	05.0098	1.0000	0.9743	0.9075	0.8212	0.7332	
	EAAL	07.3713	1.0000	0.9706	0.8955	0.8009	0.7073	
	ALAA	27.8580	1.0000	0.9415	0.8128	0.6808	0.5717	

Tableau 6.24 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 03 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

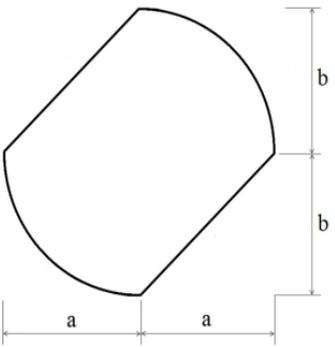
Forme de nano-plaque type 03	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
 <p> $a/b = 1$ </p>	EEEE	13.5612	1.0000	0.8547	0.6333	0.4777	0.3770	
	EEEA	12.5620	1.0000	0.8565	0.6360	0.4799	0.3787	
	AAAA	07.0242	1.0000	0.8748	0.6701	0.5157	0.4114	
	AEAA	08.0678	1.0000	0.8694	0.6600	0.5050	0.4017	
	AEAE	09.5852	1.0000	0.8671	0.6559	0.5009	0.3980	
	AEAL	05.1414	1.0000	0.9105	0.7379	0.5864	0.4753	
	AAAL	04.9666	1.0000	0.9133	0.7449	0.5955	0.4847	
	EAAL	06.9312	1.0000	0.8972	0.7041	0.5428	0.4311	
	ALAA	04.9666	1.0000	0.9133	0.7449	0.5955	0.4847	
	EEEE	07.4120	1.0000	0.9172	0.7533	0.6052	0.4942	
	EEEA	06.5408	1.0000	0.9179	0.7544	0.6061	0.4947	
	AAAA	03.7338	1.0000	0.9312	0.7875	0.6484	0.5383	
	AEAA	04.4231	1.0000	0.9264	0.7754	0.6329	0.5223	
	AEAE	05.5820	1.0000	0.9245	0.7709	0.6273	0.5167	
	AEAL	01.6340	1.0000	0.9466	0.8246	0.6946	0.5847	
	AAAL	01.6215	1.0000	0.9474	0.8268	0.6975	0.5876	
	EAAL	01.7613	1.0000	0.9428	0.8145	0.6810	0.5703	
	ALAA	01.6215	1.0000	0.9474	0.8268	0.6975	0.5876	

Tableau 6.25 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 04 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

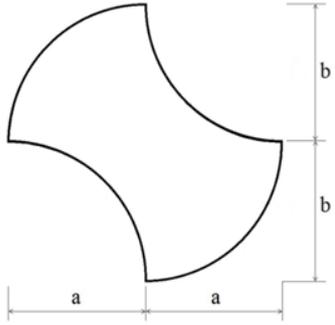
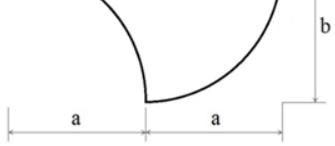
Forme de nano-plaque type 04	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
 $a/b = 1$	EEEE		26.8852	1.0000	0.7704	0.5125	0.3630	0.2786
	EEEA		21.2824	1.0000	0.7768	0.5227	0.3775	0.2921
	AAAA		14.2047	1.0000	0.7990	0.5533	0.4049	0.3151
	AEAA		18.8119	1.0000	0.7819	0.5294	0.3834	0.2969
	AEAE		23.9197	1.0000	0.7637	0.4931	0.3510	0.2699
	AEAL		08.1605	1.0000	0.8622	0.6435	0.4861	0.3837
	AAAL		06.0806	1.0000	0.8826	0.6832	0.5283	0.4225
	EAAL		07.4028	1.0000	0.8764	0.6710	0.5152	0.4103
	ALAA		06.0806	1.0000	0.8826	0.6832	0.5283	0.4225
	 $a/b = 3$	EEEE		12.9955	1.0000	0.8718	0.6622	0.5060
EEEA			10.1822	1.0000	0.8749	0.6683	0.5124	0.4078
AAAA			06.6565	1.0000	0.8917	0.7017	0.5489	0.4418
AEAA			08.4341	1.0000	0.8782	0.6740	0.5180	0.4127
AEAE			11.2825	1.0000	0.8738	0.6653	0.5000	0.3940
AEAL			02.3016	1.0000	0.9259	0.7725	0.2676	0.5159
AAAL			02.0666	1.0000	0.9331	0.7898	0.6490	0.5374
EAAL			02.2416	1.0000	0.9286	0.7787	0.6351	0.5233
ALAA			02.0666	1.0000	0.9331	0.7898	0.6490	0.5374

Tableau 6.26 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 05 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

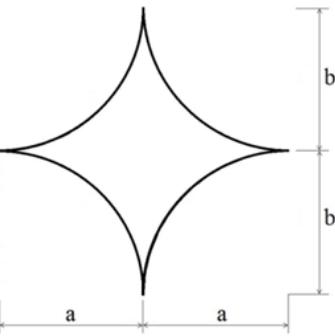
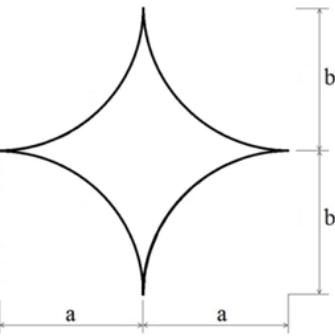
Forme de nano-plaque type 05	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
 $a/b = 1$	EEEE		44.1646	1.0000	0.6575	0.3973	0.2766	0.2108
	EEEA		39.6010	1.0000	0.6633	0.4031	0.2812	0.2145
	AAAA		26.3868	1.0000	0.6911	0.4313	0.3036	0.2325
	AEAA		30.6944	1.0000	0.6800	0.4200	0.2947	0.2253
	AEAE		36.2917	1.0000	0.6744	0.4144	0.2902	0.2217
	AEAL		13.8388	1.0000	0.7038	0.4363	0.3055	0.2333
	AAAL		13.1768	1.0000	0.7167	0.4491	0.3155	0.2412
	EAAL		19.5513	1.0000	0.6868	0.4067	0.2795	0.2118
	ALAA		13.1768	1.0000	0.7167	0.4491	0.3155	0.2412
	 $a/b = 3$	EEEE		19.7914	1.0000	0.8078	0.5629	0.4124
EEEA			17.5032	1.0000	0.8116	0.5685	0.4174	0.3253
AAAA			11.1554	1.0000	0.8326	0.6008	0.4480	0.3518
AEAA			13.1617	1.0000	0.8240	0.5874	0.4352	0.3406
AEAE			15.9758	1.0000	0.8199	0.5813	0.4296	0.3359
AEAL			04.9517	1.0000	0.8010	0.5271	0.3714	0.2837
AAAL			04.7941	1.0000	0.8106	0.5396	0.3814	0.2916
EAAL			06.0462	1.0000	0.7564	0.4655	0.3214	0.2438
ALAA			04.7941	1.0000	0.8106	0.5396	0.3814	0.2916

Tableau 6.27 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 06 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

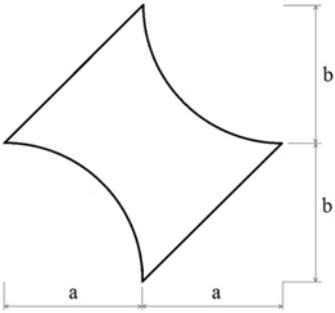
Forme de nano-plaque type 06	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$a/b = 1$	EEEE	31.3723	1.0000	0.7343	0.4725	0.3355	0.2577
		EEEE	25.5389	1.0000	0.7411	0.4811	0.3429	0.2638
		AAAA	17.5649	1.0000	0.7656	0.5114	0.3687	0.2852
		AEAA	22.5671	1.0000	0.7506	0.4927	0.3527	0.2719
		AEAE	28.6746	1.0000	0.7423	0.4823	0.3438	0.2640
		AEAL	08.7117	1.0000	0.8173	0.5736	0.4209	0.3278
		AAAL	07.0747	1.0000	0.8386	0.6071	0.4524	0.3549
		EAAL	09.6685	1.0000	0.8304	0.5920	0.4369	0.3411
	ALAA	07.0747	1.0000	0.8386	0.6071	0.4524	0.3549	
	$a/b = 3$	EEEE	14.2665	1.0000	0.8556	0.6345	0.4786	0.3777
		EEEE	11.5396	1.0000	0.8601	0.6426	0.4870	0.3852
		AAAA	07.6486	1.0000	0.8773	0.6746	0.5202	0.4156
		AEAA	09.7754	1.0000	0.8665	0.6541	0.4985	0.3956
		AEAE	12.6766	1.0000	0.8615	0.6453	0.4897	0.3877
AEAL		02.9606	1.0000	0.8820	0.6730	0.5123	0.4054	
AAAL	02.6609	1.0000	0.8962	0.7009	0.5411	0.4311		
EAAL	03.0795	1.0000	0.8799	0.6679	0.5064	0.4000		
ALAA	02.6609	1.0000	0.8962	0.7009	0.5411	0.4311		

Tableau 6.28 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 07 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

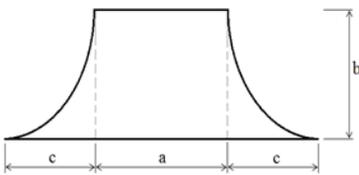
Forme de nano-plaque type 07	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$a/b = 1$ $c/b = 1/2$	EEEE	29.5043	1.0000	0.73.57	0.4745	0.3373	0.2592
		EEEE	27.0381	1.0000	0.7404	0.4801	0.3420	0.2630
		AAAA	17.0075	1.0000	0.7664	0.5124	0.3696	0.2859
		AEAA	19.5050	1.0000	0.7582	0.5020	0.3607	0.2785
		AEAE	22.7590	1.0000	0.7533	0.4961	0.3556	0.2743
		AEAL	11.4815	1.0000	0.7946	0.5418	0.3924	0.3038
		AAAL	10.8733	1.0000	0.8039	0.5552	0.4044	0.3139
		EAAL	16.4609	1.0000	0.7997	0.5500	0.3995	0.3094
		ALAA	10.8733	1.0000	0.8031	0.5552	0.4044	0.3139

Tableau 6.29 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 08 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

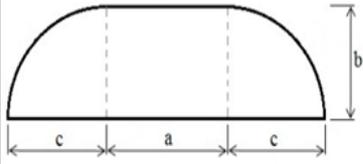
Forme de nano-plaque type 08	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$a/b = 1$ $c/b = 2$	EEEE	21.5960	1.0000	0.8082	0.5622	0.4110	0.3195
		EAEA	19.1741	1.0000	0.7936	0.5413	0.3925	0.3041
		AAAA	10.4985	1.0000	0.8356	0.6053	0.4522	0.3554
		AEAA	11.3612	1.0000	0.8286	0.5943	0.4417	0.3463
		AEAE	13.9841	1.0000	0.8292	0.5874	0.4351	0.3405
		AEAL	03.5125	1.0000	0.8804	0.6779	0.5221	0.4165
		AAAL	03.5118	1.0000	0.8804	0.6779	0.5222	0.4165
		EAAL	07.5888	1.0000	0.8638	0.6427	0.4835	0.3807
		ALAA	03.5118	1.0000	0.8804	0.6779	0.5222	0.4165

Tableau 6.30 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 09 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

Forme de nano-plaque type 09	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$a/b = 3$ $c/b = 2$	EEEE	21.2328	1.0000	0.8131	0.5693	0.4163	0.3228
		EAEA	21.1929	1.0000	0.8134	0.5698	0.4153	0.3217
		AAAA	10.2299	1.0000	0.8397	0.6117	0.4582	0.3606
		AEAA	10.6695	1.0000	0.8363	0.6062	0.4529	0.3560
		AEAE	10.8078	1.0000	0.8359	0.6056	0.4523	0.3555
		AEAL	09.8323	1.0000	0.8423	0.6146	0.4602	0.3619
		AAAL	09.7492	1.0000	0.8437	0.6170	0.4626	0.3640
		EAAL	13.6996	1.0000	0.8127	0.5694	0.4182	0.3260
		ALAA	03.6259	1.0000	0.8786	0.6744	0.5185	0.4132

Tableau 6.31 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 10 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

Forme de nano-plaque type 10	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$a/b = 2$ $c/b = 2$ $\theta = 45^\circ$	EEEE	21.4316	1.0000	0.8100	0.5649	0.4133	0.3211
		EAEA	21.3098	1.0000	0.8103	0.5638	0.4091	0.3164
		AAAA	10.4328	1.0000	0.8369	0.6074	0.4541	0.3571
		AEAA	11.1993	1.0000	0.8310	0.5981	0.4453	0.3494
		AEAE	11.5815	1.0000	0.8303	0.5969	0.4441	0.3484
		AEAL	08.5228	1.0000	0.8175	0.5682	0.4138	0.3210
		AAAL	08.5107	1.0000	0.8181	0.5689	0.4143	0.3214
		EAAL	13.6778	1.0000	0.8128	0.5695	0.4182	0.3260
		ALAA	03.6063	1.0000	0.8788	0.6749	0.5191	0.4137

Tableau 6.32 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 11 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

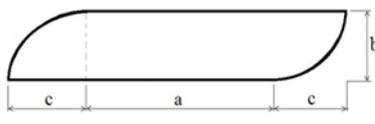
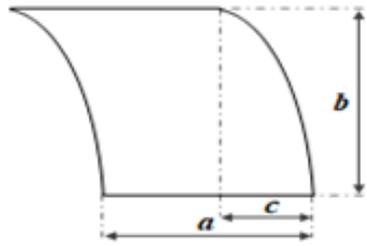
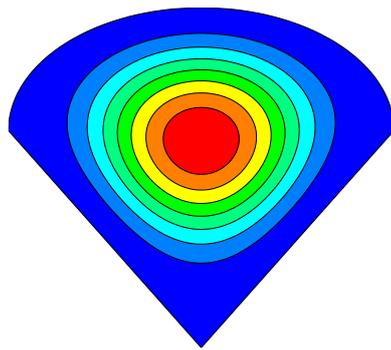
Forme de nano-plaque type 11	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$a/b = 2$ $c/b = 2$	EEEE	21.2408	1.0000	0.8133	0.5694	0.4174	0.3238
		EEEE	19.3214	1.0000	0.7945	0.5426	0.3936	0.3051
		AAAA	10.1789	1.0000	0.8401	0.6122	0.4587	0.3610
		AEAA	10.5582	1.0000	0.8367	0.6069	0.4535	0.3565
		AEAE	11.5529	1.0000	0.8327	0.6005	0.4474	0.3512
		AEAL	03.7135	1.0000	0.8773	0.6720	0.5160	0.4109
		AAAL	03.7118	1.0000	0.8773	0.6721	0.5160	0.4110
		EAAL	07.9124	1.0000	0.8611	0.6375	0.4783	0.3761
		ALAA	03.7080	1.0000	0.8772	0.6719	0.5159	0.4109

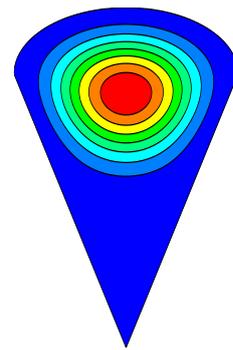
Tableau 6.33 : Variation de paramètre de fréquence fondamentale local (Ω^l) et de rapport de fréquence (RF) d'une nano-plaque type 12 pour différentes conditions aux limites ($h/b = 0.1, k_s = 5/6$).

Forme de nano-plaque type 12	Cas	CL	Ω^l	RF				
				K				
				0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	$a/b = 1$ $c/b = 1/2$	EEEE	33.8615	1.0000	0.7095	0.4469	0.3152	0.2414
		EEEE	30.0499	1.0000	0.7152	0.4533	0.3205	0.2457
		AAAA	19.0596	1.0000	0.7411	0.4832	0.3453	0.2660
		AEAA	24.4542	1.0000	0.7272	0.4672	0.3320	0.2551
		AEAE	29.2204	1.0000	0.7216	0.4606	0.3264	0.2505
		AEAL	12.7335	1.0000	0.7745	0.5158	0.3702	0.2855
		AAAL	11.0766	1.0000	0.7948	0.5439	0.3949	0.3062
		EAAL	15.2013	1.0000	0.7668	0.5022	0.3573	0.2744
		ALAA	10.0296	1.0000	0.8257	0.5868	0.4330	0.3381

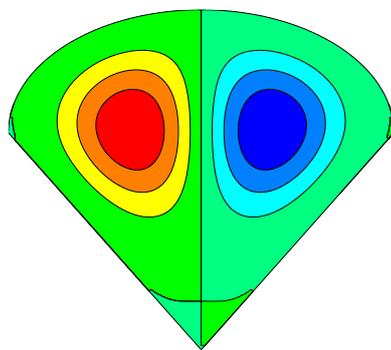
Les figures 6.23-27 montrent les trois premiers modes de certaines nano-plaques de formes géométriques arbitraires (à deux et trois dimensions) pour les conditions aux limites complètement encastées EEEE. L'épaisseur de la plaque est prise comme $h/b = 0.1$ et le paramètre non local $K=0.2$ est choisi. Le graphe montre clairement la différence entre les formes des modes de la nouvelle nano-plaque sectorielle avec l'angle du secteur 80° et celles des nano-plaques avec l'angle du secteur 30° (voir figure 6.23a-b). Nous constatons aussi que l'influence de rapport d'aspect sur les formes de mode de nano-plaque type 03 est plus importante, comme l'illustrent les cas $a/b=1$ et $a/b=3$ (voir figure 6.24a-b).



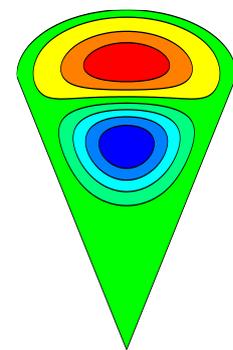
$$\Omega_1 = 24.5498$$



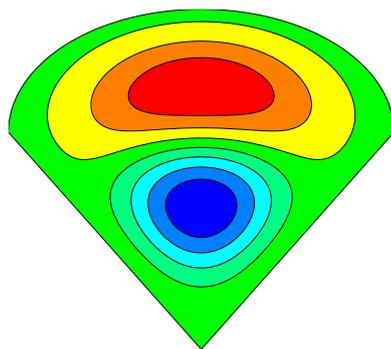
$$\Omega_1 = 48.0671$$



$$\Omega_2 = 34.6426$$

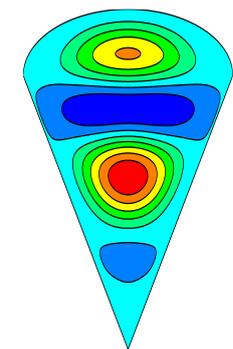


$$\Omega_2 = 54.9487$$



$$\Omega_3 = 36.2452$$

(a)



$$\Omega_3 = 60.9494$$

(b)

Figure 6.23 : Graphes des trois premières modes de la nouvelle nano-plaque sectorielle avec $a/b=1$, $c/b=6/5$ et $\phi = \alpha + \beta =$: a) 80° ; b) 30° .

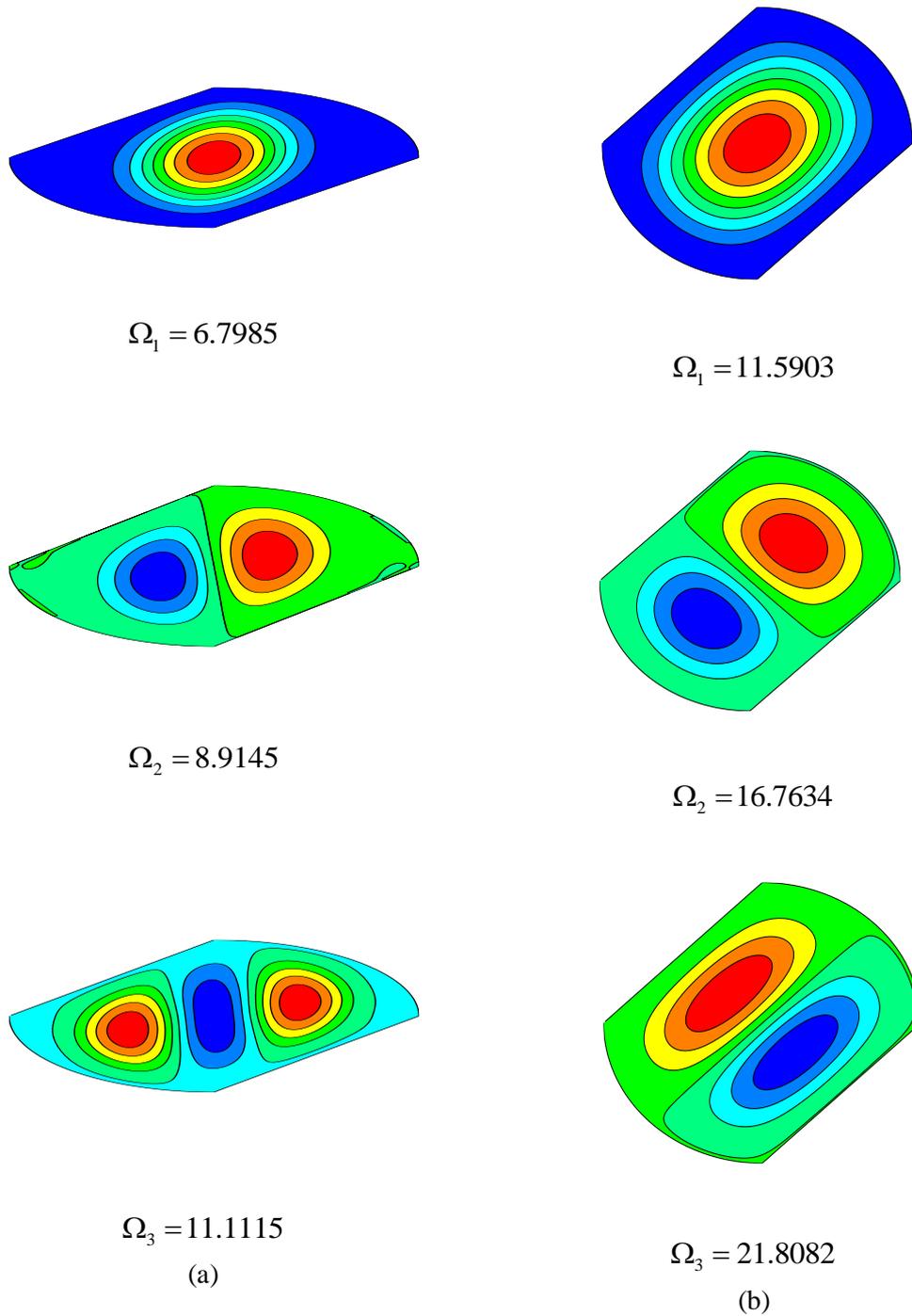
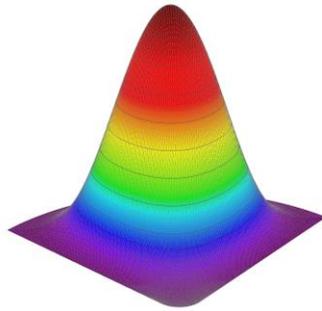
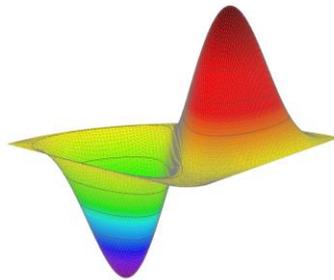


Figure 6.24 : Graphes des trois premières modes de nano-plaque type 03

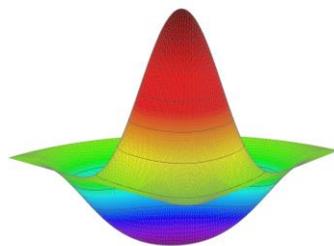
avec : a) $a/b=3$; b) $a/b=1$.



$$\Omega_1 = 24.4778$$

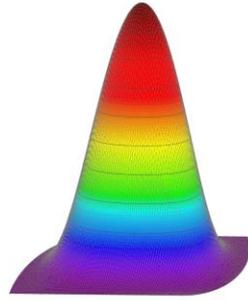


$$\Omega_2 = 33.5949$$

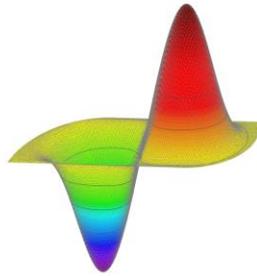


$$\Omega_3 = 36.7309$$

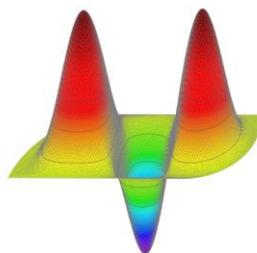
Figure 6.25 : Graphes des trois premières modes de nano-plaque type 02.



$$\Omega_1 = 17.2748$$

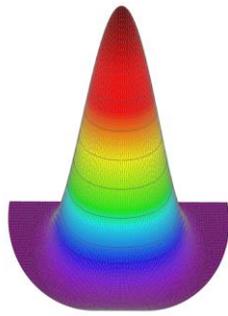


$$\Omega_2 = 17.8123$$

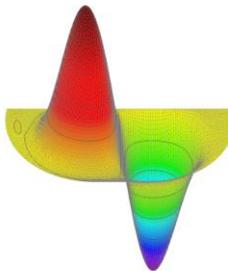


$$\Omega_3 = 18.8848$$

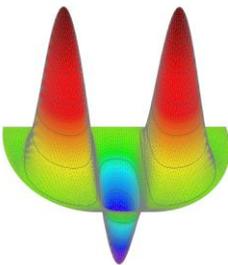
Figure 6.26 : Graphes des trois premiers modes de nano-plaque type 11.



$$\Omega_1 = 17.4533$$



$$\Omega_2 = 18.4762$$



$$\Omega_3 = 20.3431$$

Figure 6.27 : Graphes des trois premières modes de nano-plaque type 08.

Conclusion Générale et Perspectives

La version- p de la méthode des éléments finis est employée pour l'analyse des vibrations libres d'une nano-plaque. Les difficultés constatées avec cette version est l'exactitude de la représentation des bords arbitrairement courbés. Afin de surmonter cette contrainte dans cette thèse, des éléments- p courbés polyvalents sont développés pour traiter, avec un seul type d'élément, le problème de modélisation de formes géométriques arbitraires. L'élément- p quadrilatérale courbé permet une représentation exacte d'un domaine courbé sans affecter indûment la précision de l'approximation locale à l'aide des fonctions "Mapping". La définition géométrique correcte de cet élément a été formulée avec précision en utilisant la méthode de la fonction de mélange (Blending Function Method). A l'aide de ces fonctions, les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque dans la plaque sont calculées à partir de ses coordonnées locales dans l'élément. Les fonctions de forme hiérarchiques pour l'élément- p quadrilatérale courbé sont construites à partir des polynômes orthogonaux de Legendre déplacés.

Dans ce travail de recherche, le comportement vibratoire linéaire des plaques de formes géométriques arbitraires est étudié en se basant sur la théorie du premier ordre des plaques et la théorie de l'élasticité non locale. Les effets de cisaillement transversal, inertie de rotation, et paramètres physiques et géométriques sont prises en compte. Les équations du mouvement vibratoire libre obtenues en appliquant le principe des déplacements virtuels.

Les résultats obtenus concordent avec ceux disponibles dans la littérature qui traitent le même problème avec différentes théories et méthodes. Les résultats obtenus montrent une haute précision, un calcul numérique stable et une convergence rapide. Une étude paramétrique en fonction des paramètres physiques, géométriques, et des conditions aux limites a été menée dans ce travail de recherche. Enfin, certains nouveaux résultats obtenus à partir de la technique proposée pour l'analyse des vibrations des nano-plaques arbitraires sont exprimés en tant que solutions de référence (benchmark solutions) pour la validation de nouvelles techniques de calcul à l'avenir. À partir cette étude, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

1. Les résultats de l'élément- p quadrilatérale s'accordent avec les solutions disponibles dans la littérature. La convergence monotone et uniforme de l'élément- p quadrilatérale courbé se produit lorsque le degré du polynôme d'interpolation augmente.
2. La méthode des éléments finis hiérarchique (HFEM) basé sur un élément- p quadrilatérale courbé convient à l'analyse de vibrations libres des nano-plaques avec des formes géométriques arbitraires.
3. La différence entre la théorie non locale et la théorie locale est significative pour les grandes valeurs du paramètre non local.
4. Les paramètres géométriques de la nouvelle nano-plaque sectorielle annulaire elliptique (rapport d'excentricité, angle de secteur, rapport d'épaisseur) et conditions aux limites influent sur le comportement vibratoire linéaire.
5. L'étude paramétrique linéaire en termes des paramètres physiques, géométriques, et des conditions aux limites montrent que le comportement vibratoire de la nouvelle nano-plaque sectorielle annulaire elliptique diminue en fonction de ces paramètres.
6. Les résultats numériques pour différents types des nano-plaques arbitraires prouvent effectivement que l'incorporation de paramètre non local adoucit la nanostructure (réduit la rigidité) et entraîne une diminution de fréquence. De plus, les paramètres de fréquences diminuent lorsque le rapport d'aspect, le rapport d'épaisseur et l'angle de secteur augmentent. Par conséquent, l'effet de la petite échelle ainsi que l'effet de

rappports géométriques et l'angle de secteur devraient être pris en compte dans l'analyse et la modélisation du comportement mécanique des nanostructures.

7. Les paramètres géométriques (l'angle de secteur et le rapport d'aspect) influent sur les modes des nano-plaques arbitraires encastées.

Les perspectives des études qui peuvent être menées dans le futur sont :

- L'étude des vibrations libres des nano-plaques arbitraires isotropes et composites reposant sur une fondation élastique.
- L'étude des vibrations libres et forcées des nano-plaques sandwichs en FGM avec des formes géométriques arbitraires.
- L'analyse thermique des vibrations libres et forcées des nano-plaques à gradient fonctionnel avec des formes géométriques arbitraires.
- Etude thermo-élastique en flexion des nano-plaques arbitraires en matériaux fonctionnellement graduent.

Références bibliographiques

Abramowitz, M., Stegun, I.A., (1965).

Handbook of Mathematical Functions.

Dover Publications, New York.

Aghababaei, R., and Reddy, J.N., (2009).

Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 326, pp. 277-289.

Aifantis, E.C., (1992).

On the role of gradients in the localization of deformation and fracture.

Int J. Eng. Sci, Vol. 30, pp. 1279-1299.

Aifantis, E.C., (1994).

Gradient effects at macro micro and nano scales.

Journal of the Mechanical Behavior of Materials, Vol. 5, pp. 355-375.

Aksencer, T., and Aydogdu, M., (2011).

Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory.

Physica E, Vol. 43, pp. 954-959.

Altan, B.S., and Aifantis, E.C., (1997).

On some aspects in the special theory of gradient elasticity.

Journal of the Mechanical Behavior of Materials, Vol. 8, pp. 231-282.

Anderson, R.G., Iron, B.M., and Zienkiewicz, O.C., (1968).

Vibration and stability of plates using finite elements.

Int. J. Solids Struct, Vol. 4, pp. 1031-1055.

Anjomshoa, A., and Tahani, M., (2016).

Vibration analysis of orthotropic circular and elliptical nano-plates embedded in elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory and using Galerkin method.

J. Mech. Sci. Tech, Vol. 30, pp. 2463-2474.

Aref, M., Zenkour, A. M., (2017).

Size-dependent free vibration and dynamic analyses of piezo-electro-magnetic sandwich nanoplates resting on viscoelastic foundation.

Physica B, Vol. 521, pp. 188-197.

Argyris, J.H., (1966).

Continua and discontinua.

Proc. Conf. Matrix Mth. Struct. Mech. Ohio, AFFDL-TR-66-80, pp. 11-189.

Askes, H., and Aifantis, E.C., (2002).

Numerical modeling of size effects with gradient elasticity - Formulation, meshless discretization and examples.

International Journal of Fracture, Vol. 117, pp. 347-358.

Assadi, A., (2013).

Size dependent forced vibration of nanoplates with consideration of surface effects.

Appl. Math. Model, Vol. 37, pp. 3575-3588.

Babuska, I., (1988).

The *p*- and *hp*-versions of the finite element method.

In: Dwoyer., D.L., Hussaini., M.Y., and Voigt., R.G (eds.), Finite Elements. Theory and Applications, Springer, New York, 1988, pp. 199-239.

Babuska, I., and Suri, M., (1990).

The *p*- and *hp*-versions of the finite element method, an overview.

Comput. Methods Appl. Mech. Eny, Vol. 80, pp. 5-26.

Babuska, I., and Szabo, B.A., (1982).

On the rates of convergence of the finite element method.

Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 18, pp. 323-341.

Babuska, I., Szabo, B.A., and Katz, I.N., (1981).

The *p*-version of the finite element method.

SIAM J. Numer. Anal, Vol. 18, pp. 515-545.

Bardell N.S., Dunsdon J.M., and Langley R.S., (1998).

Free vibration of thin, isotropic, open, conical panels.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 217, pp. 297-320.

Bardell N.S., Langley R.S., Dunsdon J.M., and Aglietti G.S., (1999).

An *h-p* finite element vibration analysis of open conical sandwich panels and conical sandwich frusta.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 226, pp. 345-377.

Bardell, N.S., (1991).

Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 151, pp.263-289.

Bardell, N.S., (1992).

The free vibration of skew plates using the hierarchical finite element method.

Computers & Structure, Vol. 45, pp. 841-874.

Barik, M., and Mukhopadhyay, M., (1998).

Finite element free flexural vibration analysis of arbitrary plates.

Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 29, pp. 137-151.

Barik, M., and Mukhopadhyay, M., (2002).

A new stiffened plate element for the analysis of arbitrary plates.

Thin-Walled Struct, Vol. 40, pp. 625-639.

Battaglia, G., Di Matteo, A., Micale, G., and Pirrotta, A., (2018a).

Vibration-based identification of mechanical properties of orthotropic arbitrarily shaped plates: Numerical and experimental assessment.

Composites Part B: Engineering, Vol.150, pp. 212-252.

Battaglia, G., Di Matteo, A., Micale, G., Pirrotta, A., (2018b).

Arbitrarily shaped plates analysis via Line Element-Less Method (LEM).

Thin-Walled Struct, Vol. 133, pp. 235-248.

BELALIA, S.A., (2011).

Développement d'Eléments Finis Courbés Version- p pour les Plaques de Formes Géométriques Arbitraires.

Thèse de doctorat, Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen.

Belalia, S.A., (2017a).

Investigation of the mechanical properties on the large amplitude free vibrations of the functionally graded material sandwich plates.

J. Sandw. Struct. Mater, Vol. 0, pp. 1-22.

Belalia, S.A., (2017b).

A new analysis of nonlinear free vibration behavior of bi-functionally graded sandwich plates using the p -version of the finite element method.

Mech. Adv. Mater. Struct, Vol. 0, pp. 1-14.

Belalia, S.A., (2018).

A curved hierarchical finite element method for the nonlinear vibration analysis of functionally graded sandwich elliptic plates.

Mech. Adv. Mater. Struct, Vol. 0, pp. 1-15.

Belalia, S.A., and Houmat, A., (2010).

Non-linear free vibration of elliptic sector plates by a curved triangular p -element.

Thin-Walled Struct, Vol. 48, pp. 316-326.

Belalia, S.A., and Houmat, A., (2012).

Nonlinear free vibration of functionally graded shear deformable sector plates by a curved triangular p -element.

Eur. J. Mech. A/Solids, Vol. 35, pp. 1-9.

Bergan, P.G., and Wang, X., (1984).

Quadrilateral plate bending elements with shear deformations.

Computers and Structures, Vol. 19, pp. 25-34.

Bert, C.W., (1976).

Dynamics of composite and sandwich panels, Parts I and II.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 8(11), pp. 15-24.

Bert, C.W., (1979).

Recent research in composite and sandwich plate dynamics.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 11(10), pp. 13-23.

Bert, C.W., (1982).

Research on dynamics of composite and sandwich plates.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 14(10), pp. 17-34.

Bert, C.W., (1985).

Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, part IV.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 17(11), pp. 3-25.

Bert, C.W., (1991a).

Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V: part I.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 23(6), pp. 3-14.

Bert, C.W., (1991b).

Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V: part II.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 23(7), pp. 9-21.

Beslin, O., and Nicolas, J., (1997).

Hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 202, pp.633-655.

Bogner, F.K., Fox, R.L., and Schmit, L.A., (1966).

The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas.

Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., AFFDF-TR-66-80, pp. 397-443.

Bröker, H., (2001).

Integration von geometrischer Modellierung und Berechnung nach der p -Version der FEM.

Doctoral thesis, Technical University Munich, German.

Bucco, D., and Mazumdar, J., (1979).

Vibration analysis of plates of arbitrary shape-a new approach.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 67, pp. 253-262.

- Carnevali, P., Morris, R.B., and Taylor, G., (1993).
New basis functions and computational procedures for p-version of finite element analysis.
Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 36, pp. 3759-3779.
- Chakraverty, S., and Behera, L., (2014).
Free vibration of rectangular nanoplates using Rayleigh–Ritz method.
Physica E, Vol. 56, pp. 357-363.
- Chen, J.L., and Chong, K.P., (1984).
Vibration of irregular plates by finite strip method with spined function in: A.P. Boresi, K.P. Chong, Engineering mechanics in civil engineering.
Proc. 5th Engineering Mechanic Div. ASCE 1, pp. 256-260.
- Chernuka, M.W., Cowper, G.R., Lindberg, G.M., and Olson, M.D., (1972).
Finite element analysis of plates with curved edges.
Int. J. Num. Methods Eng, Vol. 4, pp. 49-65.
- Cheung, Y.K., Tham, L.G., and Li, W.Y., (1989).
Free vibration and static analysis of general plate by spline strip,
Comput Mech, Vol. 3, pp. 187-197.
- Chladni, E.F.F., (1802).
Die Akustik . Leipzig.
- Chopra, I., and Durvasula, S., (1972).
Vibration of Simple-supported Trapezoidal Plates. Part II: Unsymmetrical Trapezoids.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 20, pp. 125-134.
- Civalek, O., (2009).
A four-node discrete singular convolution for geometric transformation and its application to numerical solution of vibration problem of arbitrary straight-sided quadrilateral plates.
Appl. Math. Model, Vol. 33, pp. 300-314.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., and Plesha, M.E., (1989).
Concepts and Applications of Finite Element Analysis.
John Wiley & Sons. Inc, New York, 3rd Ed.
- Coons, S.A., (1964).
Surfaces for computer-aided design of space forms.
Project MAC, Design Division, Department of Mechanical Engineering, MIT.
- Côté, A., and Charron, F., (2001).
On the selection of p-version shape function for plate vibration problems.
Computers and Structures, Vol. 79, pp. 119-130.
- CUGNON, F., (2000).
Automatisation des calculs éléments finis dans le cadre de la méthode-p.
Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique.

- Danilo Karličić., Tony Murmu., Sondipon Adhikari., and Michael McCarthy., (2016).
Non-local Structural Mechanics.
Book Wiley.
- Decapua, N.J., and Sun, B.C., (1972).
Transverse vibration of a class of orthotropic plates.
Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 613-615.
- Dey, S., (1997).
Geometry-Based Three-Dimensional *hp*-Finite Element Modelling and Computations.
Doctoral thesis, Rensselaer Polytechnic Institute Troy.
- Dey, S., Shephard., MS., and Flaherty., JE., (1997).
Geometry representation issues associated with *p*-version finite element computation.
Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, Vol.150, pp. 39-55.
- Di Paola, M., Failla, G., Zingales, M., (2010).
The mechanically-based approach to 3D nonlocal linear elasticity theory: long-range central interactions.
Int. J. Solids Struct, Vol. 47, pp. 2347 -2358.
- Dickinson, S.M., and Di, Blasio, A., (1986).
On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh–Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 108, pp. 51-62.
- Doong, J. L., LEE, C., and FUNG, C.P., (1991).
Vibration and stability of laminated plates based on a modified plate theory.
Journal of Sound and Vibration, Vol.151, pp.193-201.
- Düster, A., Bröker, H., Rank, E., (2001).
The *p*-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures.
Int. J. Numer. Methods Eng, Vol. 52, pp. 673-703.
- Edelen, D.G.B., and Laws, N., (1971).
On the thermodynamics of systems with nonlocality.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 43, pp. 24-35.
- Edelen, D.G.B., Green, A.E., and Laws, N., (1971).
Nonlocal continuum mechanics.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 43, pp. 36-44.
- Eftekhari, S, A., and Jafari, A, A., (2013).
A simple and accurate mixed FE-DQ formulation for free vibration of rectangular and skew Mindlin plates with general boundary conditions.
Meccanica, Vol. 48, pp. 1139-1160.

Eringen, A. C., (1972a).

Nonlocal polar elastic continua.

Int. J. Eng. Sci., Vol. 10, pp. 1-16.

Eringen, A. C., (1972b).

Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves.

Int. J. Eng. Sci., Vol. 10, pp. 425-435.

Eringen, A. C., (1983).

On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves.

Int. J. Appl. Phys., Vol. 54, pp. 4703-4710.

Eringen, A. C., (1987).

Theory of nonlocal elasticity and some applications.

Res Mechanica, Vol. 21, pp. 313-342.

Eringen, A. C., (2002).

Nonlocal Continuum Field Theories.

Springer-Verlag, New York.

Eringen, A. C., and Edelen, D.G.B., (1972).

On nonlocal elasticity.

Int. J. Eng. Sci., Vol. 10, pp. 233-248.

Eringen, A. C., and Kim, B.S., (1974).

Stress concentration at the tip of crack.

Mech. Res. Commun, Vol. 1, pp. 233-237.

Farajpour, A., Danesh, M., and Mohammadi, M., (2011).

Buckling analysis of variable thickness nanoplates using nonlocal continuum mechanics.

Physica E, Vol. 44, pp. 719-727.

Forrest, A. R., (1968).

Curves and surfaces for computer-aided design.

Doctoral thesis, The University Mathematical Laboratory, Cambridge Univ, England.

Forrest, A. R., (1971).

Coons surfaces and multivariable functional interpolation.

Cambridge University CAD Group Document 38, (Rev.).

Gao, J., (1999a).

An asymmetric theory of nonlocal elasticity. Part 1: Quasicontinuum theory.

Int. J. Solids Struct, Vol. 36, pp. 2947-2958.

Gao, J., (1999b).

An asymmetric theory of nonlocal elasticity. Part 2: Continuum field.

Int. J. Solids Struct, Vol. 36, pp. 2959-2971.

Geannakakes, G.N., (1995).

Natural frequencies of arbitrarily shaped plates using the Rayleigh-Ritz method together with natural co-ordinate regions and normalized characteristic orthogonal polynomials.

Journal of Sound and Vibration, Vol.182, pp. 441-478.

Geannakakes, GN., (1990).

Vibration analysis of arbitrarily shaped plates using beam characteristic orthogonal polynomials in the semi-analytical finite strip method.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 137, pp. 283-303.

Gordon, W.J., (1968).

Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation.

Res. Rep. GMR-834, General Motors, Warren, Mich.

Gordon, W.J., (1969a).

Free-form surface interpolation through curve networks.

Research Publication GMR-921, General Motor Research Labs., Warren. MI 48090.

Gordon, W.J., (1971).

Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation.

SLAM, J. Numer. Anal, Vol. 8(1), pp. 158-177.

Gordon, W.J., and Hall, C.A., (1973a).

Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation.

Int. J. Numer. Methods Eny, Vol. 7, pp. 461-477.

Gordon, W.J., and Hall, C.A., (1973b).

Transfinite element methods: blending-function interpolation over arbitrary curved element domains.

Numer. Math, Vol. 21, pp. 109-129.

Gordon., W.J., (1969b).

Spline-blended surface interpolation through curve networks.

J. Math. Mech, Vol. 18, pp. 931-952.

Gui, W., and Babuska, I., (1986).

The h , p and h - p versions of the finite element method in 1 dimension - Part I: The error analysis of the p -version.

Numerische Mathematik, Vol. 49, pp. 577-612.

Hae-Soo Oh., and Babuska, I., (1992).

The p -version of the finite element method for the elliptic boundary value problems with interfaces.

Comp. Meth. Appl. Mech. Eng, Vol. 97, pp. 211-231.

Haghshenas, A., and Ghorbanpour Arani, A., (2014).

Nonlocal vibration of a piezoelectric polymeric nanoplate carrying nanoparticle via Mindlin plate theory.

Proc. Instit. Mech. Eng, Part C: J. Mech. Eng. Sci, Vol. 228, pp. 907-920.

Han, W., and Petyt, M., (1997a).

Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method – I: The fundamental mode of isotropic plates.

Computers & Structures, Vol. 63, pp. 295-308.

Han, W., and Petyt, M., (1997b).

Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method – II: 1st mode laminated plates and higher modes of isotropic and laminated plate.

Computers & Structures, Vol. 63, pp. 309-318.

Hashemi, SH., and Samaei, AT., (2011).

Buckling analysis of micro/nanoscale plates via nonlocal elasticity theory.

Physica E, Vol. 43, pp. 1400-1404.

Heisserer, U., (2008).

High-Order Finite Elements for Material and Geometric Nonlinear Finite Strain Problems.

Doctoral thesis, Technical University Munich, German.

Herman, L.R., (1966).

A bending analysis for plates.

Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Ohio, AFFDL-TR-66-80, pp. 577-602.

Hinton, E., (1988).

Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells.

Swansea, U.K.: Pineridge Press.

Hosseini-Hashemi, S., and Arsanjani, M., (2004).

Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates.

Int. J. Solids Struct, Vol. 42, pp. 819-853.

Hosseini-Hashemi, S., Zare, M., and Nazemnezhad, R., (2013).

An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nano-plates via nonlocal elasticity.

Compos. Struct, Vol. 100, pp. 290-299.

Hou, Y., Wei, G.W., and Xiang, S.Y., (2005).

DSC-Ritz method for the free vibration analysis of Mindlin plates.

Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 62, pp. 262-288.

Houmat, A., (1997a).

Hierarchical finite element analysis of the vibration of membranes.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 201, pp. 465-472.

Houmat, A., (1997b).

An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 206, pp. 201-215.

Houmat, A., (2000).

A triangular Fourier p -element for the analysis of membrane vibrations.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 230, pp. 31-43.

Houmat, A., (2001a).

A sector Fourier p -element for free vibration analysis of sectorial membranes.

Computers & Structures, Vol. 79, pp. 1147-1152.

Houmat, A., (2001b).

A sector Fourier p -element applied to free vibration analysis of sectorial plates.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 243, pp. 269-282.

Houmat, A., (2004).

Three-dimensional hierarchical finite element free vibration analysis of annular sector plates.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 276, pp. 181-193.

Houmat, A., (2006).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p -version of the finite-element method.

Thin-Walled Struct, Vol. 44, pp. 943-951.

Houmat, A., (2006).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p -version of the finite-element method.

Thin-Walled Structures, Vol. 44; 943-951.

Houmat, A., (2006).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p -version of the finite-element method.

Thin-Walled Struct, Vol. 44, pp. 943-951.

Houmat, A., (2008a).

In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p -element.

Thin-Walled Struct, Vol. 46, pp. 103-111.

Houmat, A., (2008a).

In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p -element.

Thin-Walled Struct, Vol. 46, pp. 103-111.

Houmat, A., (2008b).

Large amplitude free vibration of shear deformable laminated composite annular sector plates by a sector p -element.

Int. J. Non Linear Mech, Vol. 43, pp. 834-843.

Houmat, A., (2009).

Nonlinear free vibration of shear deformable laminated composite annular elliptical plate.
Acta Mechanica, Vol. 208, pp. 281-29.

Houmat, A., (2016).

Nonlinear free vibration of non-prismatic single walled carbon nanotubes by a non-local shear deformable beam p -element.
Acta Mechanica, Vol. 277, pp. 1051-1065.

Huang, C.S., McGee, O.G., Leissa, A.W., and Kim, J.W., (1995).

Accurate vibration analysis of simply supported rhombic plates by considering stress singularities.
Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 117, pp. 245-251.

Jomehzadeh, E., and Saidi, A.R., (2011).

Decoupling the nonlocal elasticity equations for three dimensional vibration analysis of nanoplate.
Compos. Struct, Vol. 93, pp. 1015-1020.

Juc Jaouen., (2002).

Vibration de flexion des plaques.
Rapport de recherché, Université de Sherbrooke.

Kang, S.W., (2002).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with a mixed boundary condition using non-dimensional dynamic influence functions.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, pp. 533-549.

Kang, S.W., and Lee, J.M., (2001).

Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-types functions.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, pp. 9-26.

Kang, S.W., Kim, I.S., and Lee, J.M., (2008).

Arbitrarily shaped plates with smoothly varying free edges using NDIF method.
Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 130, pp. 041010-1-041010-8.

Kapania, R.K., and Raciti, S., (1989).

Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part II: vibrations and wave propagation.
American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 27, pp. 935-946.

Katz, I.N., Peano, A.G., and Rossow, M.P., (1978).

Nodal variables for complete conforming finite elements of arbitrary polynomial order.
Comp. Math, Appl, Vol. 4, pp. 85-112.

Kim, C.S., (1988).

The vibration of beams and plates studied using orthogonal polynomials.
Doctoral thesis, University of Western Ontario, Canada.

Kirchhoff, G., (1850).

Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 40, pp. 51-88.

Kirfilyfalvi, G., and Szabo, B., (1997).

Quasi-regional mapping for the p -version of the finite element method.

Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 27, pp. 85-97.

Kitipornchai, S., Xiang, Y., and Liew, K.M., (1994a).

Vibration analysis of corner supported Mindlin plates of arbitrary shape using the Lagrange multiplier method.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 173, pp. 457-470.

Kitipornchai, S., Xiang, Y., Liew, K.M., and Lim, M.K., (1994b).

A global approach for vibration of thick trapezoidal plates Original Research Article.

Computers & Structures, Vol. 53, pp. 83-92

Krishna Murty, A.V., (1977).

Higher-order theory for vibrations of thick plates.

AIAA Journal, pp. 1823-1824.

Krumhansl, J.A., (1967).

Some considerations of the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics, In: Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua.

Proc. IUTAM symposium, Springer-Verlag.

Kunin, I.A., (1967).

The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations, In: Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua.

Proc. IUTAM symposium, Springer-Verlag.

Kuttler, J.R., and Sigillito, V.G., (1981).

Upper and lower bounds for frequencies of trapezoidal and triangular plates.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 78, pp. 585-590.

Lam, K.Y., Liew, K.M., and Chow, S.T., (1992).

Use of two-dimensional orthogonal polynomials for vibration analysis of circular and elliptical plates.

J. Sound Vib, Vol. 154, pp. 261-269.

Lanhe Wu., Jun Liu., (2005).

Free vibration analysis of arbitrary shaped thick plates by differential cubature method.

International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 47, pp. 63-81.

Lanhe Wu., Wenjie Feng., (2003).

Differential cubature method for buckling analysis of arbitrary quadrilateral thick plates.

Structural Engineering and Mechanics, Vol. 16, pp. 259-274.

Laura, P.A.A., and Gutierrez, R., (1977).

Fundamental frequency of vibration of clamped plates of arbitrary shape subjected to a hydrostatic state of in-plane stress.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 48, pp. 327-332.

Leissa, A.W., (1969).

Vibration of Plates.

NASA SP -169 Washington, D.C.: Office of Technology Utilization.

Leissa, A.W., (1977a).

Recent research in plate vibrations: classical theory.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 9(10), pp. 13-24.

Leissa, A.W., (1977b).

Recent research in plate vibrations: complicating effects.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 9(11), pp. 21-35.

Leissa, A.W., (1981a).

Plate vibration research, 1976–1980: classical theory.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 13(9), pp. 11-22.

Leissa, A.W., (1981b).

Plate vibration research, 1976–1980: complicating effects.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 13(10), pp. 19-36

Leissa, A.W., (1987).

Recent research in plate vibrations, 1981–1985, Part II: complicating effects.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 19(3), pp. 10-24.

Leung, A.Y.T., and Chan, J.K.W., (1998).

Fourier *p*-element for the analysis of beams and plates.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, pp. 179-185.

Leung, A.Y.T., and Zhu, B., (2004).

Geometric nonlinear vibration of clamped Mindlin plates by analytically integrated trapezoidal *p*-element.

Thin-Walled Structures, Vol. 42, pp. 931-954.

Levinson, M., (1980).

An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates.

Mechanics Research Communications, Vol. 7, pp. 343-350.

Li, X., Bhushan, B., Takashima, K., Baek, C-W., and Kim, Y-K., (2003).

Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nano indentation techniques.

Ultramicroscopy, Vol. 97, pp. 481-494.

Liew, K.M., (1990a).

The development of 2-D orthogonal polynomials for vibration of plates.

Doctoral thesis, National University of Singapore.

Liew, K.M., and Liu, F.L., (2000).

Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 230, pp. 335-356.

Liew, K.M., Lam, K.Y., (1991).

A Rayleigh-Ritz approach to transverse vibration of isotropic and anisotropic trapezoidal plates using orthogonal plate functions.

International Journal of Solids and Structures, Vol. 27, pp. 189-203.

Liew, K.M., Lam, K.Y., (1990b).

Application of two-dimensional orthogonal plate function to flexural vibration of skew plates.

J. Sound Vib, Vol. 139, pp. 241-252

Liew, K.M., Lim, M.K., (1993).

Transverse vibration of trapezoidal plates of variable thickness: symmetric trapezoids.

J. Sound Vib, Vol. 165, pp. 45-67.

Liew, K.M., Liu, F.L., (1997).

Differential cubature method: A solution technique for Kirchhoff plates of arbitrary shape.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 145, pp. 1-10.

Liew, K.M., Wang, C.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., (1998).

Vibration of Mindlin plates: programming the p -version Ritz method.

Elsevier.

Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., (1993).

Transverse vibration of thick rectangular plates. I. Comprehensive sets of boundary conditions.

Comput. Struct, Vol. 49, pp. 1-29.

Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., (1995).

Research On Thick Plate Vibration: A Literature Survey.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 180, pp. 163-176.

Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., and Wang, C.M., (1993).

Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 168(4), pp. 39-69.

Lim, C.W., Liew, K.M., and Kitipornchai, S., (1998).

Numerical aspects for free vibration of thick plates Part I: Formulation and verification.

Comput. Methods. Appl. Mech. Eng, Vol. 156, pp. 15-29.

Lim, C.M., Liew, K.M., and Kitipornchai, S., (1996).

Vibration of arbitrarily laminated plates of general trapezoidal planform.

J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 100, pp. 3674-3685.

Liu, F.L., Liew, K.M., (1998).

Differential cubature method for static solutions of arbitrary shaped thick plates.

International Journal of Solids and Structures, Vol. 35, pp. 3655-3674.

Lo, K.H., Christensen, R.M., and Wu, E.M., (1977).

A higher-order theory of plate deformation, part 1: homogeneous plates/part 2: laminated plates.

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 663-676.

Malekzadeh, P., and Shojaee, M., (2013).

Free vibration of nanoplates based on a nonlocal two-variable refined plate theory.

Compos. Struct., Vol. 95, pp. 443-452.

Malekzadeh, P., Setoodeh, A.R., and Beni, A.A., (2011).

Small scale effect on the free vibration of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates.

Compos. Struct., Vol. 93, pp. 1631-1639.

Manna, M.C., (2005).

Free vibration analysis of isotropic rectangular plates using a high-order triangular finite element with shear.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 281, pp. 235-259.

Mindlin, R.D., (1951).

Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates.

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31-38.

Mizusawa, T., and Leonard J.W., (1990).

Vibration and buckling of plates with mixed boundary conditions.

Engineering Structures, Vol. 12, pp. 285-290.

Mohammadi, M., Ghayour, M., and Farajpour, A., (2013).

Free transverse vibration analysis of circular and annular graphene sheets with various boundary conditions using the nonlocal continuum plate model.

Compos. Part B: Eng., Vol. 45, pp. 32-42.

Murmu, T., and Pradhan, S. C., (2009a).

Vibration analysis of nanoplates under uniaxial prestressed conditions via nonlocal elasticity.

J. Appl. Phys., Vol. 106, pp. 104301-1-104301-9.

Murmu, T., and Pradhan, S. C., (2009b).

Small-scale effect on the free in-plane vibration of nanoplates by nonlocal continuum model.

Physica E, Vol. 41, pp. 1628-1633.

Murthy, M.V.V., (1981).

An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate.

NASA Technical Paper 1903.

Nagaya, K., (1980a).

Dynamic response of a plate with arbitrary shape.

Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, pp. 620-626.

Nagaya, K., (1980b).

Method for solving vibration problems of a plate with arbitrary shape.

Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 67, pp. 2029-2033.

Nagaya, K., (1981a).

Simplified method for solving problems of vibrating plates of doubly connected arbitrary shape, Part I: Derivation of the frequency equation.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, pp. 543-551.

Nagaya, K., (1981b).

Simplified method for solving problems of vibrating plates of doubly-connected arbitrary shape boundaries, Part II: Applications and experiments.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, pp. 553-564.

Nagaya, K., (1984).

Free vibration of a solid plate of arbitrary shape lying on an arbitrarily shaped ring support.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 94, pp. 71-85.

Nanni, J., (1971).

Das eulersche knickproblem unter berucksichtigung der querkrafte.

Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 22, pp. 156-185.

Necira, A., Belalia, S.A., and Boukhalifa, A., (2020).

Size-dependent free vibration analysis of Mindlin nano-plates with curvilinear plan-forms by a high order curved hierarchical finite element.

Mech. Adv. Mater. Struct, Vol. 27, pp. 55-73.

Nelson, R.B., and Lorch, D.R., (1974).

A refined theory for laminated orthotropic plates.

American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, pp. 177-183.

Noor, A.K., and Burton W.S., (1989).

Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates.

Applied Mechanics Reviews, Vol. 42, pp. 1-13.

- Olson, M.D., and Lindberg, G.M., (1969).
Annual and circular sector finite element for plate bending.
Int. J. Meth. Sci, Vol. 11, pp. 17-23.
- Panyatong, M., Chinnaboon, B., and Chucheepsakul, S., (2015).
Incorporated effects of surface stress and nonlocal elasticity on bending analysis of nanoplates embedded in an elastic medium.
Suranaree J. Sci. Technol, Vol. 22, pp. 21-33.
- Papadrakakis, M., and Babilis, G.P., (1994).
Solution techniques for the p-version of the adaptive finite element method.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 1413-1431.
- Peano, A., Pasini, A., Riccioni, R., and Sardella, L., (1979).
Adaptive approximations in finite element structural analysis.
Computers & Structures, Vol. 10, pp. 333-342.
- Peano, A.G., (1975).
Hierarchies of conforming finite elements.
Doctoral thesis, Washington University, St. Louis, MO.
- Peano, A.G., (1976).
Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending.
Comp. Maths. Appl, Vol. 2, pp. 211-224.
- Petyt, M., (1968).
Finite element vibration analysis of cracked plates in tension.
Technical report AFML-TR-67-396, Ohio.
- Pin Lu., Zhang, P.Q., Lee, H.P., Wang, C.M., and Reddy, J.N., (2007).
Nonlocal elastic plate theories.
Proc. Roy. Soc. A, Vol. 463, pp. 3225-3240.
- Pouresmaeeli, S., Ghavanloo, E., and Fazelzadeh, S.A., (2013).
Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium.
Compos. Struct, Vol. 96, pp. 405-410.
- Pradhan, S. C., and Phadikar, J. K., (2009).
Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates.
J. Sound Vib, Vol. 325, pp. 206-223.
- Raju, K.K., Hinton, E., (1980).
Natural frequencies and modes of rhombic Mindlin plates.
Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 8, pp. 55-62.
- Rayleigh, L., (1877).
Theory of Sound, Volume 1.
London: Macmillan; reprinted 1945 by Dover, New York.

Reddy, J.N., (1984).

A simple higher-order theory for laminated composite plates.

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, pp. 745-752.

Reddy, J.N., (1985).

A review of the literature on finite-element modelling of laminated composite plates and shells.

The Shock and Vibration Digest, Vol. 17(4), pp. 3-8.

Reddy, J.N., (1997).

Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis.

CRC Press, Boca Raton.

Reddy, J.N., (1999).

Theory and Analysis of Elastic plates.

Taylor & Francis, Philadelphia.

Reddy, J.N., (2004).

An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.

Oxford university press.

Reissner, E., (1945).

The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate.

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, pp. 69-77.

Reissner, E., (1975).

On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation.

Int. J. Solids Structures, Vol. 11, pp. 569-573.

Reissner, E., and Stavsky, Y., (1961).

Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate.

J. Appl. Mech, Vol. 28, pp. 402-408.

Ribeiro, P., (2003).

A hierarchical finite element for geometrically nonlinear vibration of thick plates.

Acta Mechanica, Vol. 38, pp. 115-130.

Ribeiro, P., (2003).

A hierarchical finite element for geometrically nonlinear vibration of thick plates,

Acta Mechanica, Vol. 38, pp. 115-130.

Ribeiro, P., and Petyt, M., (1999).

Geometrical non-linear, steady-state, forced, periodic vibration of plates. Part I: Model and convergence studies.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 226, pp. 955-983.

- Ribeiro, P., and Petyt, M., (1999).
Geometrical non-linear, steady-state, forced, periodic vibration of plates. Part II: Stability study and analysis of multi-modal, multi-frequency response.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 226, pp. 985-1010.
- Ribeiro, P., and Petyt, M., (1999).
Nonlinear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods.
Int. J. Mech. Sci, Vol. 41, pp. 437-459.
- Ribeiro, P., and Petyt, M., (2000).
Nonlinear free vibration of isotropic plates with internal resonance.
Int. J. Nonlinear Mech, Vol. 35, pp. 263-278.
- Ritz, W., (1909).
Methode zur losung gewisser variations probleme der mathematischen physik.
Journal für Reine und Angewandte Mathematik 135, pp. 1- 61. Über eine neue.
- Rossow, M.P., and Katz, I.N., (1978).
Hierarchical finite elements and precomputed arrays.
Int. J. Numer. Methods Eng, Vol. 12, pp. 977-999.
- Sari, M.S., (2015).
Free vibration analysis of non-local annular sector Mindlin plates.
Int. J. Mech. Sci, Vol. 96-97, pp. 25-35.
- Satish, N., Narendar, S., and Gopalakrishnan, S., (2012).
Thermal vibration analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal continuum mechanics.
Physica E, Vol. 44, pp. 1950-1962.
- Schinzin, R., and Laura, P.A.A., (1991).
Conformal mapping: Methods and applications.
Elsevier, Amsterdam.
- SCHWARTZ, M., (2012).
Contribution à la résolution de problèmes tridimensionnels de fissuration fragile – Vers l'utilisation d'un modèle non-local de comportement élastique.
Thèse de doctorat, INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, France.
- Senthilnathan, N.R., (1989).
A simple higher-order shear deformation plate theory.
Doctoral thesis, National University of Singapore.
- Shanmugam, N. E., and Wang, C. M., (2007).
Analysis and design of plated structures, Vol. 2 Dynamics.
Woodhead Publishing Limited, Cambridge England.
- Sheikh, A.H., Haldar, S., and Sengupta, D., (2002).
Vibration of plates in different situations using a high-precision deformable element.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 253, pp. 329-345.

- Shi, D., Liu, T., Wang, Q., and Lan, Q., (2018).
Vibration analysis of arbitrary straight-sided quadrilateral plates using a simple first-order shear deformation theory.
Results in Physics, Vol. 11, pp. 201-211.
- Simon, D., Campion, John L., Jarvis., (1996).
An investigation of the implementation of the p-version finite element method.
Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 23, pp. 1-21.
- Srinivas, S., and Rao, A.K., (1970).
Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates.
International Journal of Solids and Structures, Vol. 6, pp. 1463-1481.
- Sundara Raja Iyengar, K.T., and Pandya, S.K., (1983).
Analysis of orthotropic rectangular thick plates.
Fibre Science and Technology, Vol. 18, pp. 19-36.
- Sundara Raja Iyengar, K.T., Chandrashekhara, K., and Sebastian, V.K., (1974).
On the analysis of thick rectangular plates.
Ingenieur-Archiv, Vol. 43, pp. 317-330.
- Szabo, B.A., (1985).
Probe theoretical manual - Release 1.0.
Noetic Technologies Corp., St. Louis, MO
- Szabo, B.A., (1986).
Estimation and control of error based on p convergence.
In: Babuška., Gago., Oliveira., Zienkiewicz (eds.), Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations, Wiley, New York, 1986, pp. 61-78.
- Szabo, B.A., (1986).
Mesh design for the p -version of the finite element method.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 55, pp. 181-197.
- Szabo, B.A., (1990).
The p - and h - p versions of the finite element method in solid mechanics.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 80, pp. 185-195.
- Szabo, B.A., (1991).
Reliability in finite element computations.
Proceedings of the 18th MSC European User's Conference 1991.
- Szabo, B.A., and Babuska, I., (1990).
Finite Element Analysis.
Wiley-Interscience, New York, 1991.
- Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., (1961).
Theory of Elastic Stability.
New York: McGraw-Hill.
-

- Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Kreiger, S., (1959).
Theory of plates and Shells.
J. Appl. Mech, Vol. 28, pp. 402-408.
- Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Kreiger, S., (1989).
Theory of plates and Shells.
McGraw-Hill, New York.
- Wang, C.M., Wang, L., and Liew, K.M., (1994).
Vibration and buckling of super elliptical plates.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 171, pp. 301-314.
- Wang, Y-Z., and Li, F-M., (2012).
Static bending behaviors of nanoplate embedded in elastic matrix with small scale effects.
Mech. Res. Commun, Vol. 41, pp. 44-48.
- Whitney, J.M., and Pagano, N.J., (1970).
Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates.
American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, pp. 1031-1036.
- Wittrick, W.H., (1987).
Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on mindlin's plate theory.
Journal of Applied Mechanics, Vol. 23, pp. 441-464.
- Woo, K.S., Hong, C.H., Basu, P.K., and Seo, C.G., (2003).
Free vibration of skew Mindlin plates by p -version of F.E.M.
Journal of Sound and Vibration, Vol. 268, pp. 637-656.
- Xiang, Y., (1993).
The numerical developments in solving the buckling and vibration of Mindlin plates.
Doctoral thesis, The University of Queenslan.
- Xiang, Y., Lai, S.K., and Zhou, L., (2010).
DSC-element method for free vibration analysis of rectangular Mindlin plates.
Int. J. Mech. Sci, Vol. 52, pp. 548-560.
- Yamagushi, F., (1988).
Curves and surfaces in computer aided geometric design.
Springer-Verlag, Berlin.
- Yang, P.C., Norris, C.H., and Stavsky, Y., (1966).
Elastic wave propagation in heterogeneous plates.
International Journal of Solids and Structures, Vol. 2, pp. 665-684.
- Yang, P.C., Norris, C.H., and Stavsky, Y., (1966).
Elastic wave propagation in heteroge-neous plate.
Int. J. Sol. Struct, Vol. 2, pp. 665-684.

Yosibash, Z., (2012).

p-FEMs in biomechanics: Bones and arteries.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 249-252, pp. 169-184.

Zenkour, A.M., and Sobhy, M., (2013).

Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium.

Physica E, Vol. 53, pp. 251-259.

Zhang, X. F., and Li, W.L., (2015).

Vibration of arbitrarily-shaped triangular plates with elastically restrained edges.

Journal of Sound and Vibration, Vol. 357, pp. 195-206.

Zienkiewicz, O.C., (1979).

La méthode des éléments finis.

McGraw-Hill Book Inc, Paris.

Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., (1989).

The Finite Element Method.

McGrawHill, New York, 4th Edition.

Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., (1994).

The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Programs,

McGraw-Hill Book Company Europe

Zienkiewicz, O.C., Gago, J.P. de S.R., and Kelly, D.W., (1983).

The hierarchical concept in finite element analysis.

Computers and Structures, Vol. 16(1-4), pp. 53-65.

Zienkiewicz, O.C., Irons, B.M., Scott, F.C., and Campbell, J.S., (1970).

Three-dimensional stress analysis.

Proc. IUTAM Symp. High Speed Computing of Elastic Structures, Liege, pp. 413-431.

Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W., Gago, J., and Babuska, I., (1981).

Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement.

Proc. MAFELAP, Brunel University, pp. 313-346.

Webographie

ESRD, Inc. (1998).

Web Site. <http://www.esrd.com>

Annexe A

Rappel mathématique : intégration par partie $\int fg' = [fg] - \int f'g$. Intégrer chaque terme tous seul :

$$\int_s -K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w = -K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w + \int_s K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\int_s -K^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w = -K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w + \int_s K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\int_s -K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x = -K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x + \int_s K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\int_s -K^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x = -K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x + \int_s K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\int_s -K^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y = -K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y + \int_s K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\int_s -K^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y = -K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y + \int_s K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (\text{A.6})$$

Les conditions aux limites :

$$-K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \approx 0 \quad \text{et} \quad -K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \approx 0 \quad (\text{A.7.1-2})$$

$$-K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x \approx 0 \quad \text{et} \quad -K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) \delta \theta_x \approx 0 \quad (\text{A.8.1-2})$$

$$-K^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y \approx 0 \quad \text{et} \quad -K^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) \delta \theta_y \approx 0 \quad (\text{A.9.1-2})$$

Annexe B

Fonctions de formes et leurs dérivées

Les polynômes de Legendre ont une caractéristique d'orthogonalité d'un polynôme d'ordre p à tous les ordres inférieurs à p . Dans notre étude, les fonctions de forme hiérarchiques pour l'élément- p quadrilatérale sont construites à partir du polynôme de Legendre déplacés, gardent la propriété d'orthogonalité [Zienkiewicz et Taylor (1994)].

Les polynômes de Legendre sont définis dans $[-1, 1]$, tandis que les polynômes de Legendre déplacés sont définis dans $[0, 1]$. Où leur forme récurrente est exprimée comme suit :

$$\begin{cases} P_0(\tau) = 1 \\ P_1(\tau) = 2\tau - 1 \\ P_{r+1}(\tau) = \frac{1}{r+1} \left[(-2r-1 + (4r+2)\tau) P_r(\tau) - r P_{r-1}(\tau) \right], \quad r = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

En se basant sur les caractéristiques des polynômes de Legendre déplacés citée dans le chapitre 03, les fonctions de forme hiérarchiques d'élément- p sont exprimées comme :

$$g_1(\xi) = 1 - \xi, \quad g_2(\xi) = \xi, \quad g_{i+1}(\xi) = \sqrt{2i-1} \int_0^\xi P_{i-1}(\tau) d\tau \quad i \geq 2 \quad (\text{B.2})$$

$$g_1(\eta) = 1 - \eta, \quad g_2(\eta) = \eta, \quad g_{i+1}(\eta) = \sqrt{2i-1} \int_0^\eta P_{i-1}(\tau) d\tau \quad i \geq 2 \quad (\text{B.3})$$