

الجمهورية  
الجزائرية الديمقراطية  
الشعبية  
REpubLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم  
العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة أبي بكر بلقايد  
- تلمسان -

Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

En : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Par : Seridje Chamsse Eddine

### Sujet

**Propriétés élastiques en dynamique transitoire**

Soutenu publiquement, le 04 / 11 / 2021 , devant le jury composé de :  
Devant le jury :

Pr HOUMAT Abderrahim	Pr	Univ. Tlemcen	: Président
Pr BOUKHALFA Abdelkarim	Pr	Univ. Tlemcen	: Examineur
Pr MEFTAH Khouane	Pr	Univ. Tlemcen	: Encadreur

Année universitaire : 2020 -2021

## Remerciement

Ce document présente les travaux effectués dans le cadre de mon projet de fin d'études de Master au Département de Génie mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen.

Avant tout, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Avec tout le respect, je tiens à remercier tout le corps enseignant de l'Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen qui m'a suivi tout au long de mes études

Je réserve une couronne de remerciements qui restera éternelle à mon professeur encadreur Monsieur Khouane MEFTAH qui a dirigé ce travail, pour son assistance et ses judicieuses orientations.

Je remercie également Monsieur Pr HOUMAT Abderrahim, , qui me fait l'honneur de présider mon jury de soutenance.

Je tiens également à adresser mes remerciements à Monsieur Pr BOUKHALFA Abdelkarim, pour avoir examiné ce travail.

Merci à tous mes amis et collègues pour leurs encouragements.

Merci enfin à tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé et ont contribué au succès de ce travail.

### ملخص

يقترح هذا العمل صياغة رياضية تسمح بحل مشكل عكسي احادي البعد في حالة الديناميكية العابرة. من خلال قياس نزوح النظام في المجال الزمكاني. يتمثل بحثنا في تعريف قيم الإجهاد الخارجية. لأجل هذا اخذنا القياسات عن طريق حساب مباشر بواسطة طريقة العناصر المحدودة من اجل قيم مرجعية للإجهاد. من خلال هذه القيم التي نحصل عليها نحاول إعطاء قيم تقريبية للإجهاد الخارجي باستعمال طريقة المربعات الصغرى.

### Résumé

Ce travail propose une formulation mathématique permettant de résoudre un problème inverse unidimensionnel dans le cas de la dynamique transitoire. A partir des mesures du champ de déplacement en temps et en espace, on cherche à identifier le terme des sollicitations extérieures, pour la mise en œuvre, nous avons d'abord créé les mesures par un calcul direct pour une valeur de référence du terme sollicitation en utilisant la méthode des éléments finis ; à partir de ces valeurs, nous avons identifié le terme sollicitation extérieure en utilisant l'approximation au sens des moindres carrés.

### Abstract

This work proposes a mathematical formulation allowing to solve a one-dimensional inverse problem in the case of transient dynamics. By measuring the displacement of the system in the space-time domain. Our research consists in defining the external stress values. For this we take measurements directly by finite element method for reference values of stress. . Through these values we get, we try to give approximate values of the external stress using the least squares method.

---

## TABLE DES FIGURES

Figure (1.1)	Fitte un nuage de points par une droite
Figure (1.2)	Fitte un nuage par une exponentielle $y = ae^{bx}$
Figure (2.1)	(a) Élément de barre unidimensionnel ; (b) ferme ; (c) cadre.
Figure (2.2)	Force interne dans une barre unidimensionnelle due à la force externe appliquée F
Figure (2.3)	Courbe contrainte/déformation pour un matériau linéaire-élastique (loi de Hooke)
Figure(2.4)	élément barre a deux 1, 2
Figure (2.5)	Éléments unidimensionnels
Figure (3.1)	Intégration numérique (approximation de la dérivée en $t_i$ )
Figure (3.2)	Organigramme pour la Méthode de différence centrale
Figure (3.3)	Organigramme pour la méthode de nyomark
Figure (4.1)	barre a des extrémités libres
Figure (4.2)	Valeurs en temps et espace du terme sollicitation de référence
Figure (4.3)	bars soumis à une force dépendante du temps et de l'espace
Figure (4.4)	déplacement $u(x, t)$ mesures et sa 1et 2 dérivée
Figure (4.5)	Valeurs bruitées du champ de déplacement.
Figure (4.6)	Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec m=1
Figure (4.7)	Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec m=3
Figure (4.8)	Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec m=3
Figure (4.9)	Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec m=8

## Liste de tableau

---

Tableau (1.1)	un ensemble de fonctions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres
Tableau (4.1)	Paramètres de barre et les choix de calcul
Tableau (4.2)	résultats donnés par des méthodes numériques Wilson et D.C sur le domaine de 0,75 s à 0,775 s. Pour le nœud 51

---

---

## Sommaire

Remerciement.....	II
ملخص.....	III
Résumé.....	III
Abstract .....	III
TABLE DES FIGURES.....	IV
Liste de tableau .....	V
Sommaire .....	VI
Introduction générale.....	1
Problème inverse.....	3
I.1    Définition d'un problème inverse : .....	4
I.2    Problèmes inverses en longitudinale vibration : .....	4
I.2.1  Reconstitution de l'état passé : .....	5
I.2.2  Identification du module de Young : .....	5
I.2.3  Identification des conditions aux limites : .....	5
I.2.4  Détermination du terme sollicitation : .....	5
I.2.5  Définition d'un problème mal posé : .....	5
I.2.6  Formulation d'un problème inverse : .....	5
I.3    Difficultés des problèmes inverses : .....	6
I.4    Approximation au sens des moindres carrés : .....	7
Méthode des éléments finis.....	11
I.5    Méthode des éléments finis : .....	12
I.6    Éléments unidimensionnels : .....	12
I.7    Principe de l'énergie potentielle minimale : .....	13
I.8    Méthode des éléments finis pour les vibrations longitudinales de l'élément barre : .....	14
Méthodes Numérique d'intégration en Analyse vibratoire .....	19
I.9    Méthodes Numérique d'intégration en Analyse vibratoire : .....	20
I.9.1  Méthode de différence centrale : .....	20
I.9.2  Méthode de Newmark : .....	24

I.9.3	La méthode de Wilson :.....	26
	Problème inverse unidimensionnel en dynamique transitoire.....	30
I.10	Problème inverse unidimensionnel en dynamique transitoire.....	31
I.11	Problème direct :.....	32
I.11.1	Calculer avec la Méthode de Wilson :.....	32
I.11.2	Calculer avec la Méthode Newmark : .....	34
I.11.3	Calcul par la méthode de différence centrale : .....	35
I.12	Problème inverse :.....	38
I.12.1	Méthodes des moindres carrés :.....	39
I.12.2	Choix de la forme du terme sollicitation <b>St</b> : .....	39
I.12.3	Avantage du modèle polynomiale :.....	39
I.12.4	Régularisation d'un problème inverse : .....	40
	Conclusion générale .....	48
I.13	Conclusion générale : .....	49
	Bibliographie.....	50



## Introduction générale

La réponse des objets physiques aux charges dynamiques (charges dépendantes du temps) est un domaine d'étude important en physique et en ingénierie. De ce dernier, la réponse vibratoire,

l'analyse de la réponse vibratoire est d'une grande importance dans la conception des structures pouvant être soumises à des perturbations dynamiques. Dans certaines situations, les vibrations peuvent provoquer des déplacements importants et des contraintes sévères dans la structure, Cela peut se produire lorsque la fréquence de la force d'excitation coïncide Avec la fréquence naturelle de la structure. Il provoque des vibrations qui donnent également des résultats indésirables, Aujourd'hui, les progrès de la conception technique s'orientent vers la production de matériaux plus légers et plus résistants. Cela gaspillera donc moins d'énergie, la réponse vibratoire dans ce cas est plus forte, donc l'analyse de la réponse vibratoire devient plus importante avec ce progrès.

Dans une analyse de la réponse du système aux charges appliquées statiquement, nous devons considérer uniquement les charges appliquées et les forces élastiques internes. La réponse dynamique est plus compliquée, car en plus des forces élastiques, on a des forces d'inertie et des forces d'amortissement. Dans le travail que nous ferons, nous négligerons la force d'amortissement. Les forces appliquées prennent la forme d'une exponentielle. Il est lié au temps ( $t$ ) et à l'espace ( $x$ ).

Avant d'effectuer toute analyse, le système physique considéré doit être représenté par un modèle mathématique le plus approprié pour obtenir les paramètres de réponse souhaités. Dans notre étude les paramètres de réponse importants, sont les déplacements et les efforts ou les contraintes internes. Les valeurs critiques de ces paramètres sont requises dans la conception. Pour le régime permanent, la réponse est fonction d'une ou plusieurs coordonnées spatiales ; Pour le cas dynamique, la réponse dépend à la fois des variables d'espace et de temps.

C'est pourquoi notre étude est basée sur la prédiction des déplacements du système dans l'espace-temps avec une bonne précision par des méthodes numériques, afin que le déplacement puisse être mesuré à partir de la force appliquée. Les méthodes inverses permettent également de calculer la force à partir des valeurs réelles du déplacement. Dans [chapitre 1](#), nous présenterons une définition de la méthode inverse dans le sens des moindres carrés et pour la vibration longitudinale de la barre. Nous allons essayer de trouver une formulation permettant de résoudre un problème inverse unidimensionnel dans le cas de la dynamique transitoire. Dans le [chapitre 2](#), nous donnons une brève définition de la méthode des éléments finis et utilisons le principe de l'énergie potentielle minimale. Afin d'extraire la matrice de rigidité et la matrice de masse en cas de vibration longitudinale de la barre.

Parce que le problème que nous résolvons dépend du temps. Le [chapitre 3](#) est consacré aux méthodes d'intégration numérique dans l'analyse vibrations. Dans ce chapitre, nous avons listé les équations qui construisent ces méthodes numériques et comment elles sont appliquées à la résolution des problèmes dynamiques étape par étape. Dans le [chapitre 4](#), nous présentons un exemple d'analyse dynamique. Où nous créons des programmes qui permettent de calculer les déplacements dans le système par des méthodes numériques, ainsi que la sollicitations  $S$  par la méthode inverse.

## **Problème inverse**

## I.1 Définition d'un problème inverse

Un problème inverse consiste à déterminer une ou plusieurs causes de ce problème en ayant connaissance des effets[10]. On peut opposer les problèmes inverses aux problèmes directs dans lesquels on cherche une solution à partir de paramètres connus. Les problèmes directs nous semblent plus naturels car les mêmes causes conduisent aux mêmes effets. En revanche, il semble moins évident qu'un effet soit la conséquence d'une unique cause. C'est cette caractéristique qui fait toute la difficulté des problèmes inverses.

Les problèmes inverses interviennent dans plusieurs domaines :

- Transfert thermique
- Vibration
- Traitement d'image (restauration d'images floues)

On différencie les problèmes linéaires où l'on se ramène à la résolution d'équation intégrale de première espèce des problèmes non-linéaires qui interviennent dans les équations aux dérivées partielles.

On peut considérer plusieurs types de problèmes inverses non linéaires :

- La reconstitution de l'état passé d'un système à partir de son état actuel,
- L'identification de paramètres qui consiste à déterminer un ou plusieurs paramètres du système en connaissant une partie de son évolution.

Dans ce travail de recherche, nous nous intéresserons à l'identification de paramètres pour l'équation de la vibration longitudinal .

## I.2 Problèmes inverses en longitudinale vibration

L'équation unidimensionnelle de la dynamique transitoire[1] d'une barre libre en vibration forcée. Le problème est régi par les équations suivantes :

$$A\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = s(x, t) \quad (1.1)$$

Différents problèmes inverses autour de l'équation de vibration :

### **I.2.1 Reconstitution de l'état passé :**

On peut essayer de retrouver la condition initiale  $u_0(x)$  à partir d'une mesure de  $u$  en choisissant quelques points du domaine à un temps donné et en connaissant les paramètres  $\rho$  et  $E$  connus.

### **I.2.2 Identification du module de Young :**

Pour l'identification du paramètre  $E$ , on peut par exemple prendre comme données connues : Plusieurs mesures du déplacement à différents moments ainsi qu'en différents points en supposant également que  $\rho$  connue.

### **I.2.3 Identification des conditions aux limites :**

Le but de ce problème inverse est de retrouver les conditions aux bords qui sont des conditions de Neumann.

### **I.2.4 Détermination du terme sollicitation :**

Connaissant déplacement  $u(t, x)$ , on doit déterminer le terme sollicitation  $s(t, x)$ , les autres paramètres sont supposés connus.

### **I.2.5 Définition d'un problème mal posé :**

Un problème mal posé est un problème qui vérifie au moins une des trois propriétés suivantes :

- Le problème n'admet pas de solution,
- Le problème admet plusieurs solutions,
- La solution ne dépend pas continûment des données.

Le problème direct de l'équation de la vibration longitudinale est un problème bien posé. En revanche, certains problèmes inverses peuvent être mal posés, nous verrons plus tard comment y remédier.

### **I.2.6 Formulation d'un problème inverse :**

Pour donner une formulation abstraite des problèmes inverses, nous allons considérer trois espaces :

- L'espace des paramètres  $M$  ;

- L'espace d'état  $U$ ;
- L'espace des données  $D$ ;

Nous allons également définir deux applications :

L'équation d'état relie l'état et les paramètres, nous l'écrivons :

$$F(a, u) = 0, a \in M ; u \in U \quad (1.2)$$

On notera la solution de l'équation d'état :

$$u = S(a) = u_a \quad (1.3)$$

L'équation d'observation extrait de l'état la partie correspondant aux mesures. Elle s'écrit :

$$d = H(u) \quad (1.4)$$

En injectant (1.3) dans (1.4), on a :

$$d = H(S(a)) = \Phi(a) \quad (1.5)$$

Le problème inverse consiste à résoudre l'équation étant donné une observation  $d$  :

$$\Phi(a) = d \quad (1.6)$$

Pour résoudre le problème (1.6), nous utiliserons la méthode des moindres carrés, qui consiste à minimiser :

$$\underbrace{\min}_a J(a) = \underbrace{\min}_a \frac{1}{2} \|\Phi(a) - d\|^2 \quad (1.7)$$

$J(a)$  est appelée fonction coût.

### I.3 Difficultés des problèmes inverses

On peut citer quatre difficultés pour les problèmes inverses :

- La fonction coût peut être non convexe. Cela entraîne l'existence de minima locaux. La méthode d'optimisation peut donc converger vers n'importe lequel de ces minima.
- Un manque de données que l'on peut avoir. En effet, un manque de données peut entraîner un problème inverse sous-déterminé. Il peut donc y avoir plusieurs solutions, c'est à dire plusieurs paramètres produisant les mêmes observations.

- La qualité des données peut également être une difficulté. En effet, les données peuvent être bruitées et entraîner un manque de continuité qui produit une instabilité. On ne peut donc garantir de réussir à résoudre le problème pour des données fortement bruitées.
- La dernière difficulté réside dans le coût de l'algorithme. La méthode de résolution va nous forcer à résoudre à chaque itération la fonction d'état, c'est à dire une ou plusieurs équations aux dérivées partielles.

On peut voir que les données jouent un rôle essentiel dans les problèmes inverses. Malheureusement, les contraintes réelles telles que le nombre d'instruments de mesure ou la précision des mesures entraînent généralement des difficultés dans la résolution du problème.

#### I.4 Approximation au sens des moindres carrés

Souvent en physique, on obtient des points de mesures  $f(x_i)$  aux points  $x_i$ , et par conséquent les  $f(x_i)$  sont des valeurs approchées :

Exemple :

- déplacement d'un solide en fonction du temps
- valeur du courant électrique en fonction de la résistance
- etc...

Si les  $f_i$  sont des points de mesures, ils sont soumis à des erreurs, des fluctuations (on appelle cela un bruit) qui rend une interpolation exacte **instable** et **fausse**.

Dans ce genre de problème, typiquement on veut trouver quelle est la meilleure fonction mathématique qui représente les données. Elle ne passe pas exactement par les points, mais elle s'en approche (Figures). On appelle souvent cela « fitter » une fonction (en français « adapter »).

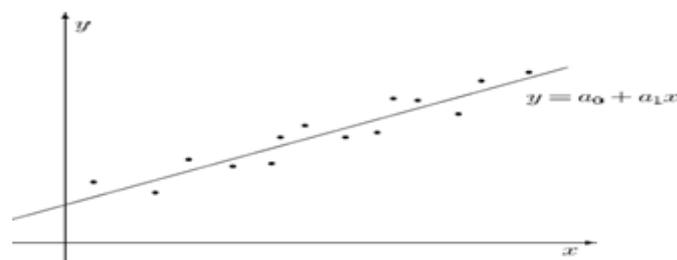


Figure 1.1 : Fitter un nuage de points par une droite

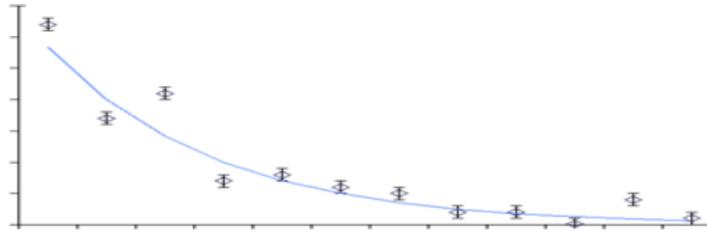


Figure 1.2 : Fitter un nuage par une exponentielle  $y = ae^{bx}$

Le problème ici n'est donc pas d'interpoler mais de trouver le meilleur modèle mathématique qui représente les données.

Ce modèle sera choisi en fonction :

- Soit de la physique du problème
- Soit de la forme des données expérimentales

On choisit donc un modèle mathématique :

C'est un ensemble de fonctions qui dépend d'un ou plusieurs paramètres.

Exemples :

Tableau 1.1 : un ensemble de fonctions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres.

Modèle	Description	Paramètres
$y = a_0 + a_1x$	Droite	$a_0, a_1$
$y = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$	Polynôme de degré $m \ll n$	$a_0, a_1, \dots, a_m$
$y = a_0e^{a_1x}$	Exponentielle	$a_0, a_1$
$y = a_0 \sin(a_1x + a_2)$	Sinus/cosinus	$a_0, a_1, a_2$

Moins on a de paramètres libres, plus robuste sera le modèle (moins sujet aux instabilités), mais le fit sera plus difficile.

L'objectif n'est pas de reproduire tous les points exactement mais l'objectif est de trouver la fonction qui passe au plus près des points de mesure.

Minimiser la distance entre chaque point de la fonction et chaque point de mesure.

On doit donc se donner une MESURE de la distance entre les points et la fonction. On peut en imaginer de nombreuses ... Une mesure courante : MOINDRES CARRES.

Pour calculer les paramètres cités dans le tableau précédent, la méthode des moindres carrés consiste à minimiser la fonction :

$$E(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \dots) = \sum_{\text{tous les pts}} (\mathbf{y}_i^* - \mathbf{y}(x_i))^2 \quad (1.8)$$

$y_i^*$  = mesure au point  $x_i$

$y(x_i)$  = Modèle (qui dépend des paramètres  $a_0, a_1 \dots$ ) au point  $x_i$

$E(a_0, a_1, \dots)$  représente la somme des carrés des erreurs.

Pour calculer les paramètres  $a_0, a_1, \dots$ , on minimise  $E$ , ce qui revient à poser :

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \dots, \quad \frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \dots \quad (1.9)$$

Si le modèle mathématique est un polynôme de degré  $m$ ,  $y(x)$  s'écrit :

$$y(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_jx^j + \dots + a_mx^m = \sum_{k=0}^m a_kx^k \quad (1.10)$$

Au point  $x_i$ , on a :

$$y(x_i) = a_0 + a_1x_i + \dots + a_jx_i^j + \dots + a_mx_i^m = \sum_{k=0}^m a_kx_i^k \quad (1.11a)$$

Et par conséquent :

$$\frac{\partial y(x_i)}{\partial a_j} = x_i^j \quad (1.11b)$$

Rappelons qu'on a  $n$  points de mesure ( $x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ ) :

$$E(a_j) = \sum_{\text{tous les pts}} \frac{1}{2} (y_i^* - y(x_i))^2 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^{n-1} -2 \frac{\partial y(x_i)}{\partial a_j} (y_i^* - y(x_i))$$

Remplaçons  $y(x_i)$  et  $\frac{\partial y(x_i)}{\partial a_j}$  par les équations (3.12a) et (3.12b) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_j} &= \sum_{i=0}^{n-1} -2x_i^j \left( y_i^* - \sum_{k=0}^m a_kx_i^k \right) \\ \frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 &\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} x_i^j y_i^* = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^j \sum_{k=0}^m a_kx_i^k = \sum_{k=0}^m \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{j+k} \right) a_k \end{aligned}$$

Si on pose :

$$\mathbf{M}_{jk} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{j+k} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^j y_i^* \quad (1.12)$$

On obtient :

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{M}_{jk} a_k = \mathbf{b}_j, \quad j = 0, 1, \dots, m$$

L'équation précédente peut s'écrire sous une forme matricielle :

$$[\mathbf{M}](\mathbf{a}) = (\mathbf{b}) \quad (1.13)$$

Remarque : la matrice  $[M]$  est symétrique.

La résolution du système par les méthodes décrites au chapitre 1 permet de calculer les paramètres  $a_i$ , puis la fonction  $y(x)$ .

## **Méthode des éléments finis**

## I.5 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qui peut être utilisée pour la solution précise de problèmes complexes de vibrations mécaniques et structurelles. Dans cette méthode, la structure réelle est remplacée par plusieurs pièces ou éléments, dont chacun est supposé se comporter comme un élément structurel continu appelé élément fini. Les éléments sont supposés être interconnectés en certains points appelés joints ou nœuds. Comme il est très difficile de trouver la solution exacte (comme les déplacements) de la structure d'origine sous les charges spécifiées, une solution approximative pratique est supposée dans chaque élément fini. L'idée est que si les solutions des divers éléments sont sélectionnées correctement, elles peuvent être amenées à converger vers la solution exacte de la structure totale à mesure que la taille de l'élément est réduite. Au cours du processus de résolution, l'équilibre des forces au niveau des articulations et la compatibilité des déplacements entre les éléments sont satisfaits pour que l'ensemble de la structure (assemblage d'éléments) est conçu pour se comporter comme une seule entité.

## I.6 Éléments unidimensionnels

Lorsque les déplacements à l'intérieur de l'élément dépendent d'une seule coordonnée spatiale, un élément unidimensionnel est utilisé[7]. Un tel élément est long par rapport à ses dimensions transversales et peut être représenté par une ligne droite, comme le montre la figure 2.1. La coordonnée spatiale unique est dirigée le long de l'axe de l'élément. Les éléments unidimensionnels sont utilisés pour modéliser les fermes et les charpentes, comme illustré aux figures 2.2 et 2.3, respectivement:

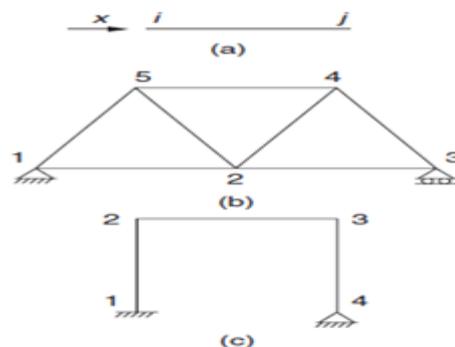


Figure 2.1 (a) Élément de barre unidimensionnel ; (b) ferme ; (c) cadre.

## I.7 Principe de l'énergie potentielle minimale

Nous présentons maintenant le principe de l'énergie potentielle minimale pour dériver les équations des éléments de barre. L'énergie potentielle totale  $\pi$  a été définie comme la somme de l'énergie de déformation interne  $U$  et de l'énergie potentielle des forces externes  $\Omega$  :

$$\pi = U + \Omega \quad (2.1)$$

Pour évaluer l'énergie de déformation d'une barre, nous considérons uniquement le travail effectué par les efforts internes lors de la déformation, Parce que nous avons affaire à une barre unidimensionnelle, la force interne agissant sur un élément différentiel de côtés  $\Delta x; \Delta y; \Delta z$  ; est donné dans la Figure 2-1 comme  $\sigma_x (\Delta y) (\Delta z)$ , due uniquement à la contrainte normale  $\sigma_x$ . Le déplacement de la face  $x$  de l'élément est  $\Delta x (\varepsilon_x)$  ; le déplacement de la  $x + \Delta x$  la face est  $\Delta x(\varepsilon_x + d\varepsilon_x)$ . Le changement de déplacement est alors  $\Delta x d\varepsilon_x$ , où  $d\varepsilon_x$  est la variation différentielle de la déformation se produisant sur la longueur  $\Delta x$  ; Le travail interne différentiel  $dU$  est la force interne multipliée par le déplacement par lequel la force se déplace, donnée par :

$$dU = \sigma_x (\Delta x) (\Delta y) (\Delta z) d\varepsilon_x \quad (2.2)$$

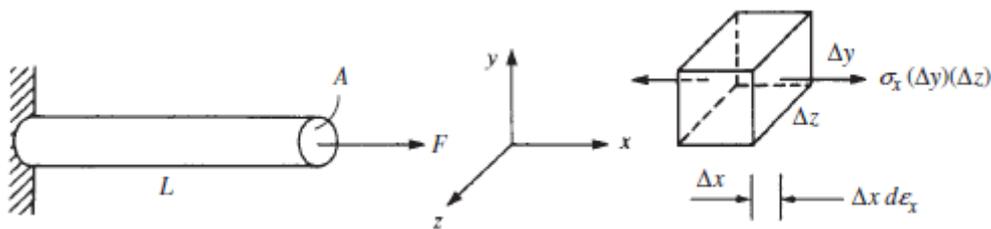


Figure 2.2 Force interne dans une barre unidimensionnelle due à la force externe appliquée

En réarrangeant et en laissant le volume de l'élément approcher de zéro, nous obtenons, à partir de l'Eq (2.2)

$$dU = \sigma_x dV d\varepsilon_x \quad (2.3)$$

Pour toute la barre, on a alors :

$$U = \iiint \left\{ \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x \right\} dV \quad (2.4)$$

Maintenant, pour un matériau linéaire-élastique (loi de Hooke) comme le montre la figure (2.2) on voit que  $\sigma_x = E \varepsilon_x$ . Par conséquent, en substituant cette relation dans l'équation. (2.4), intégrant par rapport à  $\varepsilon_x$  puis en remplaçant  $\sigma_x$  par  $E\varepsilon_x$ , on a :

$$U = \frac{1}{2} \iiint \sigma_x d\varepsilon_x dV \quad (2.5)$$

Comme expression de l'énergie de déformation pour une contrainte unidimensionnelle.

Pour une section transversale uniforme A d'une barre avec une contrainte et une déformation dépendant uniquement de la coordonnée x, l'Eq. (2.5) peut être simplifié en :

$$U = \frac{A}{2} \iint \sigma_x d\varepsilon_x dx \quad (2.6)$$

Nous observons à partir de l'intégrale dans l'équation. (2.6) que l'énergie de déformation est décrite comme l'aire sous la courbe contrainte/déformation.

L'énergie potentielle des forces externes, étant de signe opposé au travail externe expression parce que l'énergie potentielle des forces externes est perdue lorsque le travail est effectué par les forces extérieures, est donnée par :

$$\Omega = - \iiint X_c u dV - \iint T_x u_s ds - \sum_{i=1}^M f_{ix} u_i \quad (2.7)$$

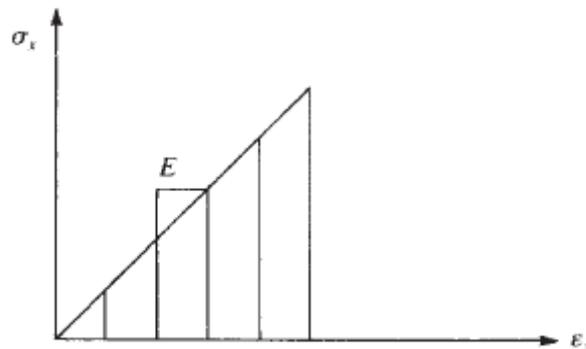


Figure 2.3 Courbe contrainte/déformation pour un matériau linéaire-élastique (loi de Hooke)

## I.8 Méthode des éléments finis pour les vibrations longitudinales de l'élément barre

L'analyse d'un problème par FEM se compose de sept étapes de base. Elles sont :

- Étape 1 : Écriture de la forme intégrale faible (ou vibrationnelle) des équations régir le problème

Nous étudions la vibration longitudinale de tiges prismatiques La tige, qui a la longueur  $l$  et la section transversale  $A$ . est supposée un matériau ayant un module d'élasticité  $E$  et une masse volumique  $\rho$  et est soumis à une force intérieur répartie  $F(x, t)$  par unité de longueur.. Et nous prenons en compte les hypothèses suivantes :

- Les sections transversales de la barre qui étaient initialement planes restent planes pendant déformation.
- Les composants de déplacement dans la barre (sauf pour le composant parallèle au l'axe longitudinal de la barre) sont négligeables.

L'équation différentielle partielle de la vibration longitudinale de la tige peut s'écrire :

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x)$$

- Étape 2 : Sélectionnez le type d'élément

Le type d'élément Basé sur les hypothèses mentionnées précédemment.

La figure (2.3) montre l'élément de barre typique de longueur  $L$ , de section transversale  $A$  et de masse volumique  $\rho$ , avec les nœuds 1 et 2 soumis à des charges  $f_x(t)$ .

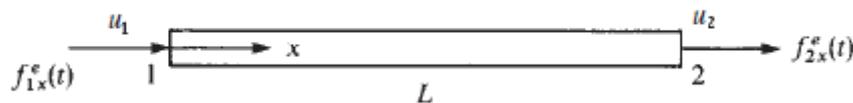


Figure 2.4 : élément barre à deux nœuds 1, 2

- Étape 3 : Sélectionnez une fonction de déplacement :

Encore une fois, nous supposons une fonction de déplacement linéaire le long de l'axe  $x$  de la barre. C'est-à-dire que nous laissons :

$$U = a_1 + a_2 x$$

Peut-être exprimé en termes de fonctions de forme comme :

$$U = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

Où

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad ; \quad N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$

- Étape 4 : Définissez les relations déformation / déplacement et contrainte / déformation

La relation déformation / déplacement est donnée par :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \frac{du}{dx} \right\} = [B] \{u\}$$

Où

$$[B] = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Et la relation contrainte / déformation est donnée par :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{u\}$$

- Étape 5 : Calculez les matrices de rigidité des éléments et les matrices de masse :

On sait que l'énergie potentielle totale  $\pi_p$  a été définie comme la somme de l'énergie de déformation interne  $U$  et de l'énergie potentielle des forces externes :

$$\pi_p = U + \Omega$$

$$U = \iiint \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \iiint \left[ E \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dV = \frac{1}{2} \iiint [\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}] dV$$

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T \iiint [B]^T [D] [B] dV \{u\}$$

L'énergie potentielle des forces externes, étant de signe opposé à l'expression du travail externe car l'énergie potentielle des forces externes est perdue lorsque le travail est effectué par les forces externes, est donnée par :

$$\Omega = - \iiint X_c u dV - \iint T_x u_s ds - \int f_{ix} u_i$$

Nous introduisons la force effective du corps  $X_c$  comme :

$$\{X_c\} = -\rho\{\ddot{u}\}$$

:

$$f_{ix} = \{F_i\}[N_i]$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{d\}} = \iiint \rho \{\ddot{u}\} [N]^T [N] dV - \iint \{F_i\} [N]^T [N] dx + \frac{1}{2} \iiint [B]^T [D] [B] dV \{u\} = 0$$

$$= \{\ddot{u}\} \iiint \rho \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dV - \{F_i\} \iint \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx + \{u\} \frac{AE}{L} \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \{\ddot{u}\} [u] \iiint \rho \begin{bmatrix} \frac{L^2+x^2-2Lx}{L^2} & \frac{-x^2+Lx}{L^2} \\ \frac{-x^2+Lx}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} dV - [u] \{F_i\} \int \begin{bmatrix} \frac{L^2+x^2-2Lx}{L^2} & \frac{-x^2+Lx}{L^2} \\ \frac{-x^2+Lx}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} dx + \{u\} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \int_0^L \frac{1}{L^2} dx & \int_0^L \frac{-1}{L^2} dx \\ \int_0^L \frac{-1}{L^2} dx & \int_0^L \frac{1}{L^2} dx \end{bmatrix}$$

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{AK}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$m_e \ddot{u} + uk_e = m_e s$$

$$m_e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad k_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Étape 6 : Assembler les équations des éléments à obtenir les équations globales et introduire des conditions aux limites :

Nous assemblons les équations des éléments en utilisant la méthode de rigidité directe de telle sorte que la continuité inter éléments des déplacements soit à nouveau satisfaite aux nœuds communs et, de plus, la continuité inter éléments des accélérations soit également satisfaite ; c'est-à-dire que nous obtenons les équations globales.

$$Ms = Ku + M\ddot{u} \quad (2.8)$$

Ou :

$$[k] = \sum_{e=1}^N k^{(e)} ; \quad [m] = \sum_{e=1}^N m^{(e)} ; \quad [F] = \sum_{e=1}^N F^{(e)}$$

## **Méthodes Numérique d'intégration en Analyse vibratoire**

## I.9 Méthodes Numérique d'intégration en Analyse vibratoire

Lorsque l'équation différentielle régissant la vibration libre ou forcée d'un système ne peut être intégrée sous forme fermée, une approche numérique est à utiliser pour l'analyse vibratoire. La méthode des différences finies, qui est basée sur l'approximation des dérivées apparaissant dans l'équation du mouvement et les conditions aux limites, est présentée. Plus précisément, la méthode de différence centrale est décrite pour les systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté. La solution en vibration libre des systèmes continus est également considérée en utilisant la méthode des différences finies dans le contexte de la vibration longitudinale des barres et de la vibration transversale des poutres avec des conditions aux limites différentes. Les méthodes, Wilson et Newmark sont présentées pour la résolution générale des systèmes à plusieurs degrés de liberté. Enfin, des programmes MATLAB sont donnés pour la résolution de systèmes à plusieurs degrés de liberté avec plusieurs exemples numériques.

### I.9.1 Méthode de différence centrale

La méthode des différences centrales [4] est basée sur des expressions aux différences finies en temps pour la vitesse et l'accélération au temps  $t$  données par :

$$\{\dot{d}_i\} = \frac{\{d_{i+1}\} - \{d_{i-1}\}}{2(\Delta t)} \quad (3.1)$$

$$\{\ddot{d}_i\} = \frac{\{\dot{d}_{i+1}\} - \{\dot{d}_{i-1}\}}{2(\Delta t)} \quad (3.2)$$

En utilisant les développements de Taylor, l'accélération peut être exprimée comme :

$$\{\ddot{d}_i\} = \frac{\{d_{i+1}\} - 2\{d_i\} + \{d_{i-1}\}}{(\Delta t)^2} \quad (3.3)$$

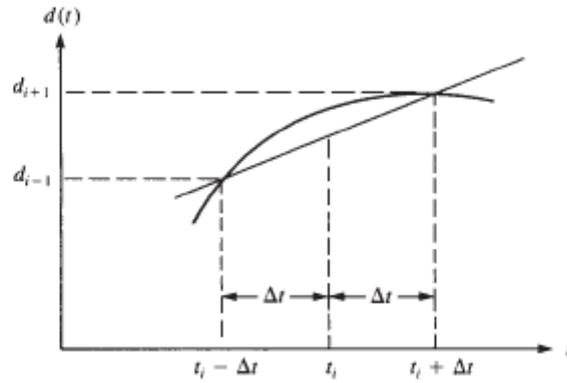


Figure (3.1 ) Intégration numérique (approximation de la dérivée en  $t_i$ )

Parce que nous voulons évaluer les déplacements nodaux, il est plus approprié d'utiliser l'Eq. (3.3) sous la forme

$$\{d_{i+1}\} = \{\ddot{d}_i\}(\Delta t)^2 + 2\{d_i\} - \{d_{i-1}\} \quad (3.4)$$

L'équation (3.4) sera utilisée pour déterminer les déplacements nodaux au prochain pas de temps  $i + 1$ , connaissant les déplacements aux pas de temps  $i$  et  $i - 1$  et l'accélération au temps  $i$ . nous exprimons l'accélération comme :

$$\{\ddot{d}\} = [M]^{-1}(\{F_i\} - [K]\{d\}) \quad (3.5)$$

Pour obtenir une expression pour  $\{d_{i-1}\}$ , nous multiplions d'abord l'Eq. (3.4) par la matrice de masse  $[M]$

Puis substituer l'Eq. (3.1.5) pour  $\{d_i\}$  dans cette équation pour obtenir :

$$[M]\{d_{i+1}\} = (\{F_i\} - [K]\{d\})(\Delta t)^2 + 2[M]\{d_i\} - [M]\{d_{i-1}\} \quad (3.6)$$

En combinant les mêmes termes de l'Eq. (3.6), on obtient :

$$[M]\{d_{i+1}\} = (\{F_i\}(\Delta t)^2 + (2[M] - (\Delta t)^2[K])\{d_i\} - [M]\{d_{i-1}\} \quad (3.7)$$

Pour démarrer les calculs pour déterminer  $\{d_{(i+1)}\}$ ,  $\{\dot{d}_{i+1}\}$  et  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$  nous avons besoin du déplacement  $\{d_{i-1}\}$  initialement, comme indiqué par l'Eq. (3.7). En utilisant les équations. (3.1) et (3.4), on résout pour  $\{d_{i-1}\}$  comme :

$$\{d_{i-1}\} = \{d_i\} - (\Delta t)\{\dot{d}_i\} + \frac{(\Delta t^2)}{2}\{\ddot{d}_i\} \quad (3.8)$$

La procédure de résolution est alors la suivante :

➤ Étape 1 :

Soit :  $\{d_0\}$ ,  $\{\dot{d}_0\}$  et  $\{F_i(t)\}$ .

➤ Étape 2 :

Si  $\{\ddot{d}_0\}$  n'est pas initialement donné, résolvez l'équation. (3.5) à  $t = 0$  pour  $\{\ddot{d}_0\}$  ; C'est,

$$\{\ddot{d}_0\} = [M]^{-1}(\{F_0\} - [K]\{d_0\})$$

➤ Étape 3 :

Résoudre l'équation (3.8) à  $t = -\Delta t$  pour  $\{d_{-1}\}$  ; C'est :

$$\{d_{-1}\} = \{d_0\} - (\Delta t)\{\dot{d}_0\} + \frac{(\Delta t^2)}{2}\{\ddot{d}_0\}$$

➤ Étape 4 :

Après avoir résolu  $\{d_{-1}\}$  à l'étape 3, résolvez maintenant  $\{d_1\}$  en utilisant l'équation. (3.7) comme :

$$\{d_1\} = [M]^{-1}\{(\{F_0\}(\Delta t)^2 + (2[M] - (\Delta t)^2[K])\{d_0\} - [M]\{d_{-1}\})\}$$

➤ Étape 5 :

Avec  $\{d_0\}$  initialement donné et  $\{d_1\}$  déterminé à partir de l'étape 4, utilisez l'équation. (3.7) pour obtenir :

$$\{d_2\} = [M]^{-1}\{(\{F_1\}(\Delta t)^2 + (2[M] - (\Delta t)^2[K])\{d_1\} - [M]\{d_0\})\}$$

➤ Étape 6 :

En utilisant l'éq. (3.5), résoudre pour  $\{\ddot{d}_1\}$  comme :

$$\{\ddot{d}_1\} = [M]^{-1}(\{F_1\} - [K]\{d_1\})$$

➤ Étape 7 :

En utilisant le résultat de l'étape 5 et la condition aux limites pour  $\{d_0\}$  donnée à l'étape 1, déterminer la vitesse au premier pas de temps par Eq. (3.1) comme :

$$\{d_1\} = \frac{\{d_2\} - \{d_0\}}{2(\Delta t)}$$

➤ Étape 8 :

Utilisez les étapes 5 à 7 à plusieurs reprises pour obtenir le déplacement, l'accélération et la vitesse pour tous autres pas de temps.

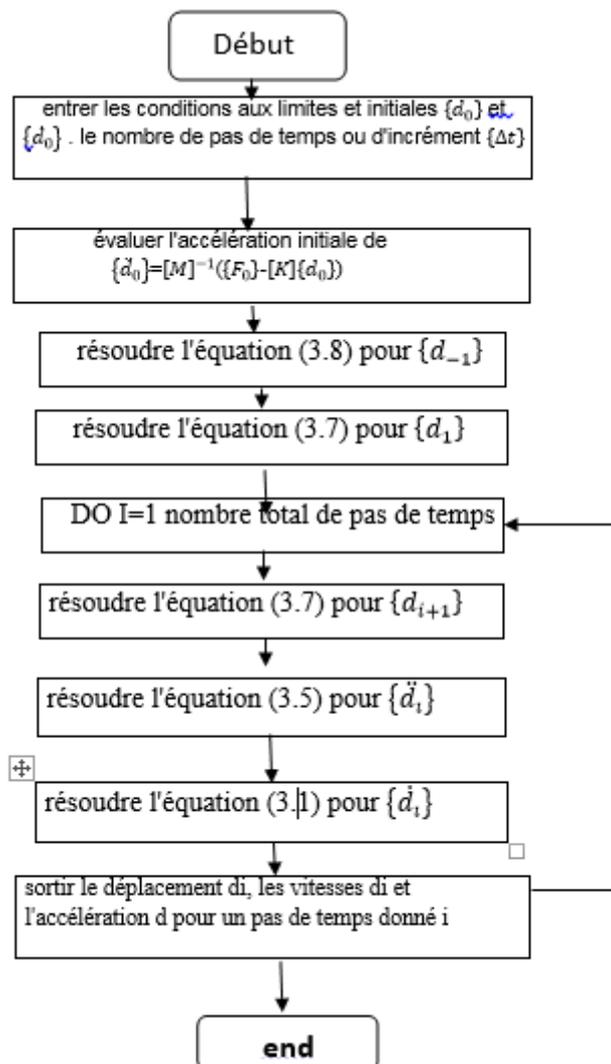


Figure (3. 2) : Organigramme pour la méthode de différent central[4]

## I.9.2 Méthode de Newmark :

La méthode d'intégration de Newmark[4] repose également sur l'hypothèse que l'accélération varie linéairement entre deux instants de temps.

Les équations de Newmark sont données par :

$$\{\dot{d}_{i+1}\} = \{\dot{d}_i\} + \Delta t [(1 - \gamma)\{\ddot{d}_i\} + \gamma\{\ddot{d}_{i+1}\}] \quad (3.9)$$

$$\{d_{i+1}\} = \{d_i\} + (\Delta t)\{\dot{d}_i\} + \Delta t^2 [(\frac{1}{2} - \beta)\{\ddot{d}_i\} + \beta\{\ddot{d}_{i+1}\}] \quad (3.10)$$

Où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres choisis par l'utilisateur. Le paramètre  $\beta$  est généralement choisi

Entre 0 et  $\frac{1}{4}$ , et  $\gamma$  est souvent pris égal à  $\frac{1}{2}$ , Par exemple, en choisissant  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$ , il

Peut être montré que les équations. (3.9) et (3.10) se réduisent à la différence centrale Eqs.

(3.1) et (3.2). Si  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{6}$  sont choisis, Éq. (3.9) et (3.10) correspondent à ceux pour

lesquels une hypothèse d'accélération linéaire est valide dans chaque intervalle de temps intervalle. Pour

$\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ , il a été montré que l'analyse numérique est stable ; c'est-à-dire que les quantités calculées telles que le déplacement et les vitesses ne deviennent pas illimitées quel que soit le pas de temps choisi.

Pour trouver  $\{d_{i+1}\}$ , nous multiplions d'abord Eq (3.10) par la matrice de masse  $[M]$  puis remplacer Éq. (3.5), pour  $\{d_{i+1}\}$  dans cette équation pour obtenir :

$$[M]\{d_{i+1}\} = [M]\{d_i\} + (\Delta t)[M]\{\dot{d}_i\} + (\Delta t)^2 [M](\frac{1}{2} - \beta)\{\ddot{d}_i\} + \beta(\Delta t)^2 [\{F_{i+1}\} - [K]\{d_{i+1}\}] \quad (3.11)$$

En combinant les mêmes termes de l'Eq. (3.11), on obtient :

$$([M] + \beta (\Delta t)^2 [K])\{d_{i+1}\} = \beta(\Delta t)^2 \{F_{i+1}\} + [M]\{d_i\} + (\Delta t) [M]\{\dot{d}_i\} + (\Delta t)^2 [M] \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \{\ddot{d}_i\} \quad (3.12)$$

Enfin, en divisant Eq (3.12) par  $\beta(\Delta t)^2$ , on obtient :

$$[K']\{d_{i+1}\} = \{F'_{i+1}\} \quad (3.13)$$

$$[K'] = [K] + \frac{[M]}{\beta(\Delta t)^2}$$

$$\{F'_{i+1}\} = \{F_{i+1}\} + \frac{[M]}{\beta(\Delta t)^2} \left[ \{d_i\} + (\Delta t)\{\dot{d}_i\} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (\Delta t)^2 \{\ddot{d}_i\} \right]$$

La procédure de résolution à l'aide des équations de Newmark est la suivante :

Étape 1 :

À partir de l'instant  $t = 0$ ,  $\{d_0\}$  est connu à partir des conditions aux limites données sur le déplacement, et  $\{\dot{d}_0\}$  est connu à partir des conditions de vitesse initiales.

Étape 2 :

Résoudre l'équation (3.5) à  $t = 0$  pour  $\{\ddot{d}_0\}$  (sauf si  $\{\ddot{d}_0\}$  est connu à partir d'une condition d'accélération initiale) ; C'est,

$$\{\ddot{d}_0\} = [M]^{-1} (\{F_0\} - [K]\{d_0\})$$

Étape 3 :

Résoudre l'équation (3.13) pour  $\{d_1\}$ , car  $\{F_{i+1}\}$  est connu pour tous les pas de temps et  $\{d_0\}$ ,  $\{\dot{d}_0\}$ ,  $\{\ddot{d}_0\}$  sont maintenant connus dans les étapes 1 et 2

Étape 4 :

Utilisez l'éq. (3.10) pour résoudre  $\{\ddot{d}_1\}$  comme :

$$\{\ddot{d}_1\} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \left[ \{d_1\} - \{d_0\} - (\Delta t)\{\dot{d}_0\} - (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \{\ddot{d}_0\} \right]$$

Étape 5 :

Résoudre l'équation (3.9) directement pour  $\{\dot{d}_1\}$ .

Étape 6 :

En utilisant les résultats des étapes 4 et 5, revenez à l'étape 3 pour résoudre  $\{d_2\}$  puis aux étapes 4 et 5 pour résoudre  $\{\ddot{d}_2\}$  et  $\{\dot{d}_2\}$ . Utilisez les étapes 3 à 5 à plusieurs reprises pour résoudre  $\{d_{i+1}\}$ ,  $\{\dot{d}_{i+1}\}$  et  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$ .

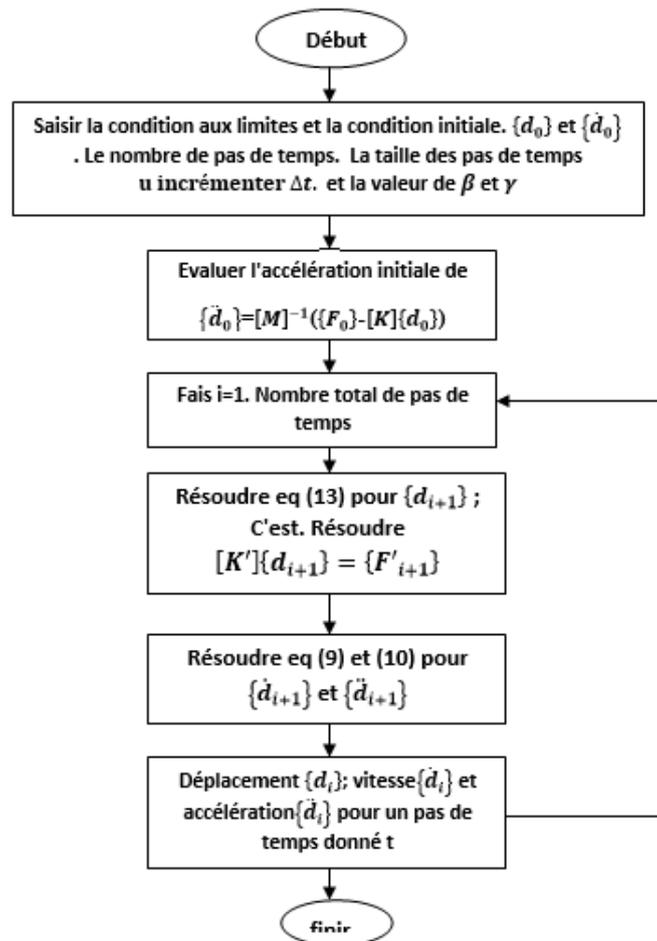


Figure (3. 3 ) Organigramme de L'intégration numérique Dans le temps à l'aide des Équations de Newmark

### I.9.3 La méthode de Wilson :

La méthode de Wilson[4] est une extension de la méthode d'accélération linéaire dans lequel l'accélération est supposée varier linéairement dans chaque intervalle de temps pris maintenant à partir de  $t$  à  $t+\Delta t$  où  $\theta \geq 1.0$  pour  $\theta = 1.0$ , la méthode se réduit au schéma d'accélération linéaire, Cependant, pour une stabilité inconditionnelle dans l'analyse numérique. Nous devons utiliser  $\theta \geq 1.37$ , En pratique  $\theta = 1.4$  est souvent sélectionné Les

équations de Wilson sont données sous une forme similaire aux équations de Newmark précédentes, Eqs (3.10) ;( 3.9)

$$\{\dot{d}_{i+1}\} = \{\dot{d}_i\} + \frac{\theta\Delta t}{2} (\{\dot{d}_{i+1}\} + \{\dot{d}_i\}) \quad (3.15)$$

$$\{d_{i+1}\} = \{d_i\} + \theta\Delta t\{\dot{d}_i\} + \frac{\theta^2(\Delta t)^2}{6} (\{\ddot{d}_{i+1}\} + 2\{\ddot{d}_i\}) \quad (3.16)$$

Où  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$ ,  $\{\dot{d}_{i+1}\}$  et  $\{d_{i+1}\}$  représentent respectivement l'accélération, la vitesse et le déplacement, à l'instant  $t + \theta\Delta t$ . On cherche une équation matricielle de la forme Eq (3.13), qui peut être résolu pour le déplacement  $\{d_{i+1}\}$ , Pour obtenir cette équation, résolvez d'abord les équations. (3.15) et (3.6) pour  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$  et  $\{\dot{d}_{i+1}\}$

En termes de  $\{d_{i+1}\}$  comme suit :

Résoudre l'équation (3.16) pour  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$  pour obtenir :

$$\{\ddot{d}_{i+1}\} = \frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2} (\{d_{i+1}\} - \{d_i\}) - \frac{6}{\theta\Delta t} \{\dot{d}_i\} - 2\{\ddot{d}_i\} \quad (3.17)$$

Maintenant, utilisez l'équation. (3.17) dans l'éq. (3.15) et résoudre pour  $\{\dot{d}_{i+1}\}$  pour obtenir

$$\{\dot{d}_{i+1}\} = \frac{3}{\theta\Delta t} (\{d_{i+1}\} - \{d_i\}) - 2\{\dot{d}_i\} - \frac{\theta\Delta t}{2} \{\ddot{d}_i\} \quad (3.18)$$

Pour obtenir le déplacement  $\{d_{i+1}\}$  au moment  $t + \theta\Delta t$ ,

Nous avons :

$$\{F_{i+1}\} = [M]\{\ddot{d}_{i+1}\} + [k]\{d_{i+1}\} \quad (3.19)$$

Maintenant, en remplaçant Eq (3.17) pour  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$  dans l'éq. (3.19) on obtient :

$$[M] \left[ \frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2} (\{d_{i+1}\} - \{d_i\}) - \frac{6}{\theta\Delta t} \{\dot{d}_i\} - 2\{\ddot{d}_i\} \right] + [k]\{d_{i+1}\} = \{F_{i+1}\} \quad (3.20)$$

La combinaison de termes similaires et la réécriture sous une forme similaire à l'Eq. (3.13) on obtient :

$$[K']\{d_{i+1}\} = \{F'_{i+1}\} \quad (3.21)$$

Où

$$[K'] = [k] + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} [M] \quad (3.22)$$

$$\{F'_{i+1}\} = \{F_{i+1}\} + \frac{[M]}{(\theta\Delta t)^2} [6\{d_i\} + 6\theta\Delta t\{\dot{d}_i\} + 2(\theta\Delta t)^2\{\ddot{d}_i\}]$$

Vous noterez les similitudes entre les équations de Wilson. (3.22) et les équations de Newmark. (3.14). Comme l'accélération est supposée varier linéairement, le vecteur de charge est exprimé sous la forme :

$$\{F''_{i+1}\} = \{F_i\} + \theta(\{F_{i+1}\} - \{F_i\}) \quad (3.23)$$

Où  $\{F''_{i+1}\}$  remplace  $\{F_{i+1}\}$  en éq. (3.22). Notez que si  $i = 1$ ,  $\{F''_{i+1}\} = \{F_{i+1}\}$ , De plus, la méthode de Wilson (comme celle de Newmark) est une méthode d'intégration implicite, car les déplacements apparaissent comme multipliés par la matrice de rigidité et nous résolvons implicitement les déplacements au temps  $t+\Delta t$ .

La procédure de résolution utilisant les équations de Wilson est la suivante :

Étape 1 :

À partir de l'instant  $t=0$ ,  $\{d_0\}$  est connu à partir des conditions aux limites données sur le déplacement, et  $\{\dot{d}_0\}$  est connu à partir des conditions de vitesse initiales.

Étape 2 :

Résoudre l'équation (3.5) pour  $\{\ddot{d}_0\}$  (sauf si  $\{\ddot{d}_0\}$  est connu à partir d'une condition d'accélération initiale).

Étape 3 :

Résoudre l'équation (3.21) pour  $\{d_1\}$ , car  $\{F'_{i+1}\}$  est connu pour tous les pas de temps, et  $\{d_0\}$ ,  $\{\dot{d}_0\}$  et  $\{\ddot{d}_0\}$  sont maintenant connus à partir des étapes 1 et 2.

Étape 4 :

Résoudre l'équation (3.17) pour  $\{\ddot{d}_1\}$ .

Étape 5 :

Résoudre l'équation (3.18) pour  $\{\dot{d}_1\}$ .

Étape 6 :

En utilisant les résultats des étapes 4 et 5, retournez à l'étape 3 pour résoudre  $\{d_2\}$ , puis revenez à étapes 4 et 5 pour résoudre  $\{\ddot{d}_2\}$  et  $\{\dot{d}_2\}$ . Utilisez les étapes 3 à 5 à plusieurs reprises pour résoudre  $\{d_{i+1}\}$ ,  $\{\dot{d}_{i+1}\}$  et  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$

**Problème inverse unidimensionnel en dynamique  
transitoire**

## I.10 Problème inverse unidimensionnel en dynamique transitoire

Pour illustrer la solution inverse au problème des vibrations longitudinales par la méthode des éléments finis, nous allons résoudre le problème de la barre unidimensionnelle illustré à la Fig. (4.2). Qui porte les caractéristiques de dureté et de masse extraites dans le deuxième chapitre. Il est indiqué que la solution inverse doit être lorsque les données de sollicitation sont inconnues et que les données dont nous disposons sont des valeurs réelles d'un ensemble discontinu de déplacements provoqués par cette sollicitation afin d'obtenir des valeurs approchées continues de la sollicitation sur le domaine d'Etude. Nous présentons l'exemple afin de tester l'équation dans le premier chapitre, nous avons donc initialement présenté des données que nous considérons comme réelles pour la sollicitation  $s(x,t)$  Fig. (4.1) et de manière directe nous obtenons les valeurs de déplacements ; puis supposons à nouveau que ces valeurs sont réelles .En utilisant la méthode inverse, nous essayons d'arriver à la conclusion de valeurs de contraintes identiques à celles que nous avons présentées au début.

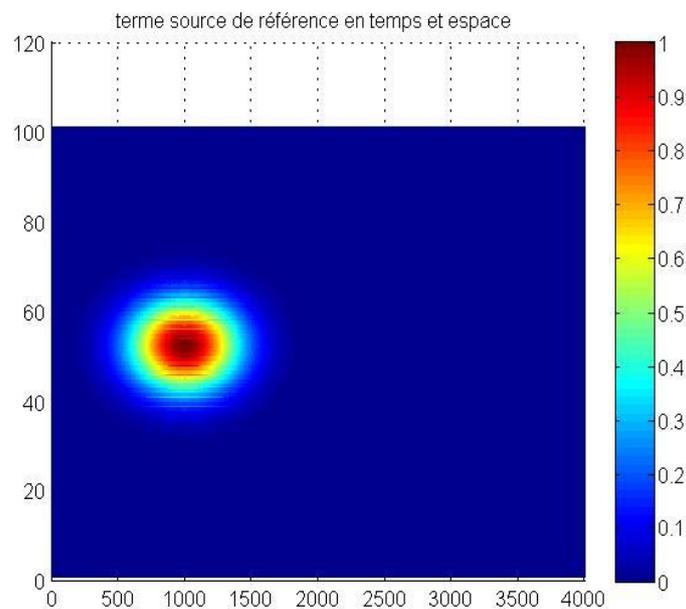


Figure 4.1 : Valeurs en temps et espace du terme sollicitation de référence[11]

## I.11 Problème direct

Afin de résoudre le problème direct par la méthode des éléments finis, nous divisons le domaine d'étude (la barre) en 100 parties (Figure 4.3) qui ont les caractéristiques de rigidité et de masse extraites dans le deuxième chapitre. Nous calculons directement les déplacements et les accélérations par des méthodes numériques dans le troisième chapitre. Pour des calculs numériques ultérieurs, nous laissons les paramètres Table (4.1) :

Table 4.1 : Paramètres de barre et les choix de calcul

Masse volumétrique $\rho$	7800 Kg/m <sup>3</sup>
module de rigidité E	200 Gpa
Surface A	0.002 m <sup>2</sup>
la longueur L	1 m
le pas de temps $\Delta t$	0.00025 s
temps de simulation	1 s
le nombre de pas N	4000
$X_0$	0.5
$L_0$	0.1
$T_0$	0.04
$t_0$	0.5
$S(x, t)$	$S(x, t) = e^{\left(\frac{X_0-x}{L_0}\right)} * e^{\left(\frac{t_0-t}{T_0}\right)}$

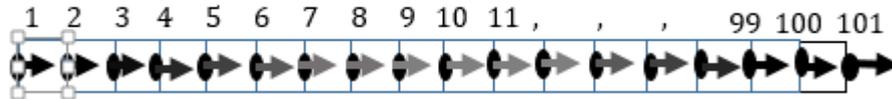


Figure 4.2 : bars soumis à une force dépendante du temps et de l'espace

### I.11.1 Calculer avec la Méthode de Wilson

La méthode Wilson est une extension de la méthode d'accélération linéaire dans laquelle l'accélération est supposée Varier linéairement dans chaque intervalle de temps pris de  $t$  à  $t + \theta\Delta t$ , Pour  $\theta = 1$ , la méthode se réduit au schéma d'accélération linéaire. On donne

$$U_0 = 0 \quad , \quad \dot{U}_0 = 0 \quad , \quad \theta = 1$$

- le programme Matlab

```

=====
%           IV.1.1 Calculer avec la Méthode de Wilson           %
=====
clear all
% Ponnes du probleme
E=18000000;    rho=7800;    A=001;    T=1
% Choix de la méthode: imeth=1(Euler explicite),2=Euler implicite),
imeth=2;
L=1;           % L = longueur totale du domaine
ne=100;        % Nombre total des éléments
he=L/ne;       % Taille de l'élément
N=ne+1;        % N = nombre total des nœuds
dt=0.00025;    % Pas de temps
Nt=4000;       % Nombre de pas de temps
Tfinal = dt*Nt; % Temps de simulation
%
% Lecture des conditions initiales
U(1:N,2)=0 ; V(1:N,2)=0;
% Lecture du terme sollicitation de référence
t0 = Tfinal/4; T0 = Tfinal/10;
X0 = L/2; L0 = L/10;
for k=1:Nt
    t=k*dt;
    for ix=1:N
        x=(ix-1)*he;
        Sr(ix,k) = exp(-(x - X0).^2/L0^2)*exp(-(t-t0).^2/T0^2);
    end
end
%
% Calcul des matrices M, K
% Initialiser à zéro les matrices
M=zeros(N,N); K=zeros(N,N);
Me=[2 1;1 2]*A*rho*L/6 ; % Equation (28)
Ke=E*A*[1 -1;-1 1]/L; % Equation (29)
%Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément
    loce=[e e+1]; % Connectivités de l'élément e
    M(loce,loce)=M(loce,loce)+Me; % Assemblage de M
    K(loce,loce)=K(loce,loce)+Ke; % Assemblage de M
end
%
% Boucle sur les pas de temps
invM=inv(M);
invK=inv(K);
F=M*Sr/(rho*A);
a(:,2)= invM*(F(:,2)-K*U(:,2));
g=K+M*6/(T*dt)^2;
invg=inv(g)
f(:,3)= F(:,3)+ 1/(T*dt)^2*(M*6*U(:,2)+M*6*T*dt*V(:,2)+M*2*(T*dt)^2*a(:,2));
U(:,3)=invg*f(:,3);
a(:,3)=6/(T*dt)^2*(U(:,3)-U(:,2))-6/(T*dt)*V(:,2)-2*a(:,2);

```

```

V(:,3)= 3/(T*dt)*(U(:,3)- U(:,2))-2*V(:,2)-T*dt/2*a(:,2);
for k=3:Nt
f(:,k+1)=
F(:,k+1)+1/(T*dt)^2*M*(6*U(:,k)+6*T*dt*V(:,k)+(2*(T*dt)^2*a(:,k)));
U(:,k+1)=invG*f(:,k+1);
a(:,k+1)=6/(T*dt)^2*(U(:,k+1)-U(:,k))-6/(T*dt)*V(:,k)-2*a(:,k);
V(:,k+1)= 3/(T*dt)*(U(:,k+1)- U(:,k))-2*V(:,k)-T*dt/2*a(:,k);
end

```

### I.11.2 Calculer avec la Méthode Newmark

Nous présentons maintenant le programme Matlab pour calculer les déplacements et les accélérations en utilisant la méthode de Newmark. Nous prenons pour le calcul :

$$\gamma = 0.5 \quad ; \quad \beta = 0.25 \quad ; \quad U_0 = 0 \quad ; \quad \dot{U}_0 = 0$$

- **Program Matlab :**

```

%=====
%                               Calculer avec la Méthode Newmark :
%=====
clear all
% Ponnes du probleme
E=18000000; rho=7800; A=0.001;bita=0.25 ;lamda=0.5
% Choix de la méthode: imeth=1(Euler explicite),2=Euler implicite),
imeth=2;
L=1;           % L = longueur totale du domaine
ne=100;       % Nombre total des éléments
he=L/ne;      % Taille de l'élément
N=ne+1;       % N = nombre total des nœuds
dt=0.00025;   % Pas de temps
Nt=4000;      % Nombre de pas de temps
Tfinal = dt*Nt; % Temps de simulation
%
% Lecture des conditions initiales
U(1:N,2)=0 ; V(1:N,2)=0;
% Lecture du terme sollicitation de référence
t0 = Tfinal/4; T0 = Tfinal/10;
X0 = L/2; L0 = L/10;
for k=1:Nt
    t=k*dt;
    for ix=1:N
        x=(ix-1)*he;
        Sr(ix,k) = exp(-(x - X0).^2/L0^2)*exp(-(t-t0).^2/T0^2);
    end
end
end
%
% Calcul des matrices M, K

```

```

% Initialiser à zéro les matrices
M=zeros(N,N); K=zeros(N,N);
Me=[2 1;1 2]*A*rho*L/6 ; % Equation (28)
Ke=E*A*[1 -1;-1 1]/L; % Equation (29)
%Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément
    loce=[e e+1]; % Connectivités de l'élément e
    M(loce,loce)=M(loce,loce)+Me; % Assemblage de M
    K(loce,loce)=K(loce,loce)+Ke; % Assemblage de M
end
%
% Boucle sur les pas de temps
invM=inv(M);
invK=inv(K);
F=M*Sr;
a(:,2)= invM*(F(:,2)-K*U(:,2))
g=K+M/(bita*dt^2);
invg=inv(g)
f(:,3)= F(:,3)+ M/(bita*dt^2)*(U(:,2)+dt*V(:,2)+(0.5-bita)*dt^2*a(:,2))
U(:,3)=invg*f(:,3);
a(:,3)=1/(bita*dt^2)*(U(:,3)-U(:,2)-dt*V(:,2)-dt^2*(0.5-bita)*a(:,2));
V(:,3)=V(:,2)+dt*((1-lamda)*a(:,2)+lamda*a(:,3))
for k=3:Nt
f(:,k+1)= F(:,k+1)+ (1/(bita*dt^2)*M*(U(:,k)+dt*V(:,k)+(0.5-
bita)*dt^2*a(:,k)))
U(:,k+1)=invg*f(:,k+1)
a(:,k+1)=1/(bita*dt^2)*(U(:,k+1)-U(:,k)-dt*V(:,k)-dt^2*(0.5-bita)*a(:,k));
V(:,k+1)=V(:,k)+dt*((1-lamda)*a(:,k)+lamda*a(:,k+1))
end

```

### I.11.3 Calcul par la méthode de différence centrale

Nous présentons maintenant le programme Matlab pour calculer les déplacements et les accélérations en utilisant la Méthode de différence centrale. Nous prenons pour le calcul :

$$; U_0 = 0 \quad ; \dot{U}_0 = 0$$

- **Program Matlab :**

```

%=====
%          Calculer avec la Méthode de différence centrale
%=====
clear all
% Ponnees du problème
E=180000000 ; rho=7800;A=0.001;
imeth=2 ;
L=1; % L = longueur totale du domaine
ne=100; % Nombre total des éléments
he=L/ne; % Taille de l'élément

```

```

N=ne+1;           % N = nombre total des nœuds
dt=0.00025;      % Pas de temps
Nt=4000;         % Nombre de pas de temps
Tfinal = dt*Nt;  % Temps de simulation
%
% Lecture des conditions initiales
U(1:N,2)=0 ; V(1:N,2)=0;
% Lecture du terme sollicitation de référence
t0 = Tfinal/4; T0 = Tfinal/10;
X0 = L/2; L0 = L/10;
for k=1:Nt
    t=k*dt;
    for ix=1:N
        x=(ix-1)*he;
        Sr(ix,k) = exp(-(x - X0).^2/L0^2)*exp(-(t-t0).^2/T0^2);
    end
end
%
% Calcul des matrices M, K
% Initialiser à zéro les matrices
M=zeros(N,N); K=zeros(N,N);
Me=[2 1;1 2]*A*rho*L/6 ; % Equation (28)
Ke=E*A*[1 -1;-1 1]/L; % Equation (29)
%Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément
    loce=[e e+1]; % Connectivités de l'élément e
    M(loce,loce)=M(loce,loce)+Me; % Assemblage de M
    K(loce,loce)=K(loce,loce)+Ke; % Assemblage de M
end
%
% Boucle sur les pas de temps
invM=inv(M);
F=M*Sr/(A*rho);
a(:,2) = invM*(F(:,2)-K*U(:,2));
U(:,1) = U(:,2)-dt*V(:,2)+dt^2/2*a(:,2);
U(:,3) = invM*(dt^2*F(:,2)+(2*M-dt^2*K)*U(:,2)-M*U(:,2));
for k=3:Nt
    U(:,k+1) = (dt^2*Sr(:,k)+invM*(2*M-dt^2*K)*U(:,k)-U(:,k-1));
    a(:,k) = Sr(:,k)-invM*K*U(:,k);
    V(:,k) = (U(:,k+1)-U(:,k-1))/2*dt;
end

```

- Résultats :

Nous présentons ici quelques résultats donnés par des méthodes numériques sur le domaine de 0,75 s à 0,775 s. Pour le nœud 51 :

Tableau (4.2) : résultats donnés par des méthodes numériques Wilson et D.C sur le domaine de 0,75 s à 0,775 s. Pour le nœud 51[11]

METHODE DE DIFFERENCE CENTRALE		LA METHODE DE WILSON	
$U_{51}$	$\ddot{U}_{51}$	$U_{51}$	$\ddot{U}_{51}$
0.0326	-0.02807	0.0326	-0.02807
0.0326	-0.0279	0.0326	-0.02796
0.0326	-0.0278	0.0326	-0.02784
0.0326	-0.0277	0.0326	-0.02773
0.0326	-0.0276	0.0326	-0.02761
0.0326	-0.0275	0.0326	-0.02750
0.0326	-0.0273	0.0326	-0.02739
0.0326	-0.0272	0.0326	-0.02727
0.0326	-0.0271	0.0326	-0.02716
0.0326	-0.0270	0.0326	-0.02705
0.0326	-0.0269	0.0326	-0.02694
0.0326	-0.0268	0.0326	-0.02682
0.0326	-0.0267	0.0326	-0.02671
0.0326	-0.0266	0.0326	-0.02660
0.0326	-0.0264	0.0326	-0.02649
0.0326	-0.0263	0.0326	-0.02638
0.0326	-0.0262	0.0326	-0.02627

Tableau (4.3) : résultats donnés par les méthodes de Newmark sur le domaine de 0,75 s à 0,775 s. Pour le nœud 51[11]

LA METHODE NEWMARK	
$U_{51}$	$\ddot{U}_{51}$
0.0326	-0.0280
0.0326	-0.0279
0.0326	-0.0278
0.0326	-0.0277
0.0326	-0.0276
0.0326	-0.0275
0.0326	-0.0273
0.0326	-0.0272
0.0326	-0.0271
0.0326	-0.0270
0.0326	-0.0269
0.0326	-0.0268
0.0326	-0.0267
0.0326	-0.0266
0.0326	-0.0264
0.0326	-0.0263
0.0326	-0.0262
0.0326	-0.0261

## I.12 Problème inverse :

L'inconnu du problème inverse est le terme sollicitation décrit par la fonction  $s(x, t)$ , le champ de déplacement  $u(x, t)$  est obtenu grâce aux mesures Fig (4.4). Reprenons l'équation (2.8) :

$$M \ddot{U} + KU - MS = 0$$

Rappelez-vous que dans l'équation précédente,  $U$  connu et  $\ddot{U}$  peuvent être calculés avec développements de Taylor Eqe 3.3 :

$$\{\ddot{d}_i\} = \frac{\{d_{i+1}\} - 2\{d_i\} + \{d_{i-1}\}}{(\Delta t)^2}$$

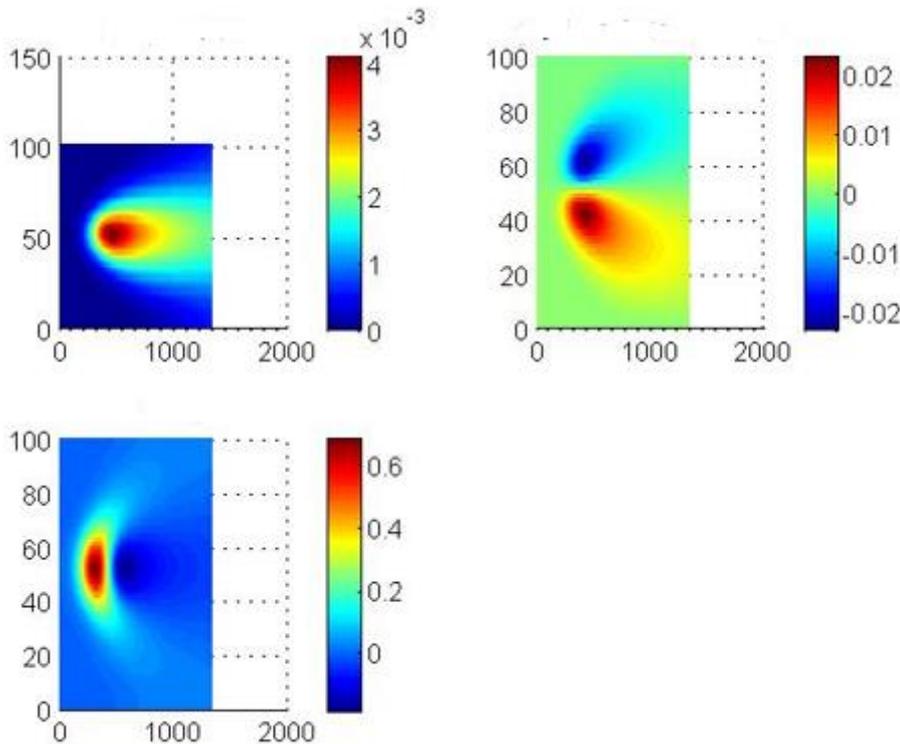


Figure (4.3) : le déplacement  $u(x, t)$  mesures et sa 1et 2 dérivée[11]

et  $S$  est l'inconnu. En posant :

$$Z = M \ddot{U} + KU \tag{4.1}$$

En' écrit :

$$Z(t_k) = M S(t_k), \quad k = 0,1,2, \dots N_t \quad (4.2)$$

Ou par soucis de simplification, on écrit :

$$y^k = M \ddot{U}_k + K U_k \quad , \quad k = 0,1,2, \dots N_t \quad (4.3)$$

### I.12.1 Méthodes des moindres carrés :

Par un calcul direct, on calcule  $\ddot{U}^k$ , et puis à l'aide de l'équation (4.1) on calcule  $y^k$ .

Pour calculer le terme sollicitation S, nous avons opté pour la méthode des moindres carrés qui consiste à minimiser le carré de l'erreur (différence entre la valeur mesurée  $Y^k$  et la valeur calculée  $Z^k$ ) :

$$\min (E(\mathbf{S})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N_t} \|\mathbf{Y}^k - \mathbf{Z}^k\|^2 \quad (4.4)$$

$$\min (E(\mathbf{S})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N_t} \|\mathbf{Y}^k - \mathbf{M} \mathbf{S}^k\|^2 \quad (4.5)$$

### I.12.2 Choix de la forme du terme sollicitation S(t) :

On choisit un modèle polynomiale de degré  $m$ , soit :

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_0 + t \mathbf{S}_1 + t^2 \mathbf{S}_2 + \dots + t^m \mathbf{S}_m = \sum_{i=0}^m t^i \mathbf{S}_i \quad (4.6)$$

$$\mathbf{S}^k = \sum_{i=0}^m t_k^i \mathbf{S}_i \quad (4.7)$$

### I.12.3 Avantage du modèle polynomiale :

Obtention d'un système d'équations linéaires L'équation (1.10) devient :

$$E(\mathbf{S}_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N_t} \left\| \mathbf{Y}^k - \mathbf{M} \sum_{i=0}^m t_k^i \mathbf{S}_i \right\|^2$$

En dérivant par rapport à  $\mathbf{S}_j$ , on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{S}_j} = - \sum_{k=1}^{k=N_t} \mathbf{M} t_k^j \left( \mathbf{Y}^k - \mathbf{M} \sum_{i=0}^m t_k^i \mathbf{S}_i \right), \quad j = 1:m$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{S}_j} = 0 &\Rightarrow \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j \sum_{i=0}^m \mathbf{M} t_k^i \mathbf{S}_i = \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j \mathbf{Y}^k \\ \mathbf{M} \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^{j+i} \mathbf{S}_i &= \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j \mathbf{Y}^k \\ \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^{j+i} \mathbf{S}_i &= \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j \mathbf{Y}^k \end{aligned}$$

En posant :

$$A_{ji} = \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^{j+i} \quad \text{et} \quad B_j = \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j \mathbf{Y}^k$$

L'équation (4.4) devient :

$$A_{ji} \mathbf{S}_i = B_j$$

#### I.12.4 Régularisation d'un problème inverse :

La résolution du problème inverse passe le calcul de la dérivée de la fonction  $U(x, t)$  dont les valeurs expérimentales ne sont connues qu'approximativement. Si la fonction  $U(x, t)$  est bruitée, alors le calcul de sa dérivée devient très imprécis, le problème inverse est donc susceptible d'instabilité.

Pour ajouter du bruit à notre champ de déplacement obtenu par le calcul direct, nous avons utilisé la fonction Matlab randn, ainsi, le champ de déplacement bruité s'écrit :

$$U=U.*(ones(N, Nt) +sqrt(0.1)*randn(N,Nt));$$

Sur la figure (4.5), nous avons les données bruitées de la déplacement et de ses deuxième dérivées. la figure (4.5) montre qu'une petite erreur sur la mesure de  $U$  s'est traduite par une grande erreur sur le calcul de sa deuxième dérivée  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$

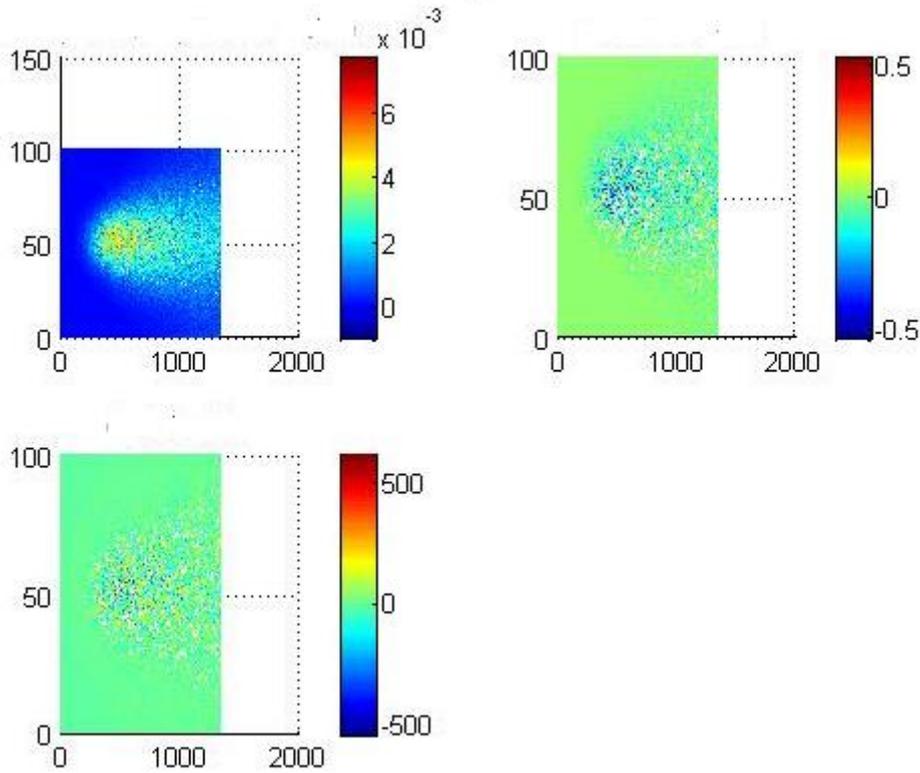


Figure (4.4) : Valeurs bruitées du champ de déplacement.[11]

Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre, bien posé, de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. Bien entendu, ceci demande à être quantifiée. La principale difficulté dans l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même.

Pour résoudre l'instabilité évoquée, nous nous introduisons un estimé à priori  $\mathbf{S}_0$ . Pour un nombre  $\varepsilon > 0$  (le coefficient de régularisation), nous remplaçons (4.7) par le problème régularisé :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N_t} \{ \|\mathbf{Y}^k - \mathbf{M} \mathbf{S}^k\|^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{S}^k - \mathbf{S}_0^k\|^2 \} \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N_t} \left\{ \left\| \mathbf{Y}^k - \mathbf{M} \sum_{i=1}^m t_k^i \mathbf{S}_i \right\|^2 + \varepsilon^2 \left\| \sum_{i=0}^m t_k^i \mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0^k \right\|^2 \right\} \quad (4.12)$$

Ce problème admet une solution unique, qui dépend de  $\mathbf{Y}$ , et qui converge, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers la solution la plus proche de  $\mathbf{S}_0$  de l'équation (4.7). Si  $\varepsilon$  est choisi trop petit, le problème

régularisé sera proche de (4.7), donc mal posé, alors que si  $\varepsilon$  est trop grand (4.11) ne sert qu'à forcer  $\mathbf{S}$  à être proche de  $\mathbf{S}_0$ . Le choix optimal de  $\varepsilon$  est donc délicat.

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{S}_j} = \sum_{k=1}^{k=N_t} \mathbf{M} t_k^j \left( \mathbf{M} \sum_{i=0}^m t_k^i \mathbf{S}_i - \mathbf{Y}^k \right) + \varepsilon^2 t_k^j \left( \sum_{i=0}^m t_k^i \mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0^k \right), j = 1:m$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{S}_j} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j (\mathbf{M}^2 + \varepsilon^2 \mathbf{I}) \sum_{i=0}^m t_k^i \mathbf{S}_i = \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j (\mathbf{M} \mathbf{Y}^k + \varepsilon^2 \mathbf{S}_0^k)$$

$$(\mathbf{M}^2 + \varepsilon^2 \mathbf{I}) \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^{j+i} \mathbf{S}_i = \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j (\mathbf{M} \mathbf{Y}^k + \varepsilon^2 \mathbf{S}_0^k)$$

En posant :

$$\mathbf{C} = (\mathbf{M}^2 + \varepsilon^2 \mathbf{I}); A_{ji} = \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^{j+i}; B_j = \mathbf{C}^{-1} \sum_{k=1}^{k=N_t} t_k^j (\mathbf{M} \mathbf{Y}^k + \varepsilon^2 \mathbf{S}_0^k)$$

L'équation (4.9) devient :

$$A_{ji} \mathbf{S}_i = B_j \text{ avec } i = 1:m; j = 1:m$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

- **le programme Matlab :**

```

=====
%                               Calculer avec la Méthode de différence centrale
=====
clear all
% Ponnees du problème
E=180000000 ; rho=7800;A=0.001;
imeth=2 ;
L=1;                               % L = longueur totale du domaine
ne=100;                             % Nombre total des éléments
he=L/ne;                             % Taille de l'élément
N=ne+1;                             % N = nombre total des nœuds
dt=0.00025;                         % Pas de temps
Nt=4000;                             % Nombre de pas de temps
Tfinal = dt*Nt;                     % Temps de simulation
%
% Lecture des conditions initiales
U(1:N,2)=0 ; V(1:N,2)=0;
% Lecture du terme sollicitation de référence
t0 = Tfinal/4; T0 = Tfinal/10;

```

```

X0 = L/2; L0 = L/10;
for k=1:Nt
    t=k*dt;
    for ix=1:N
        x=(ix-1)*he;
        Sr(ix,k) = exp(-(x - X0).^2/L0^2)*exp(-(t-t0).^2/T0^2);
    end
end
%
% Calcul des matrices M, K
% Initialiser à zéro les matrices
M=zeros(N,N); K=zeros(N,N);
Me=[2 1;1 2]*A*rho*L/6 ; % Equation (28)
Ke=E*A*[1 -1;-1 1]/L; % Equation (29)
%Boucle sur les éléments
for e=1:ne
    % Extraire les connectivités de l'élément
    loce=[e e+1]; % Connectivités de l'élément e
    M(loce,loce)=M(loce,loce)+Me; % Assemblage de M
    K(loce,loce)=K(loce,loce)+Ke; % Assemblage de K
end
%
% Boucle sur les pas de temps
invM=inv(M);
F=M*Sr/(A*rho);
a(:,2)= invM*(F(:,2)-K*U(:,2));
U(:,1)= U(:,2)-dt*V(:,2)+dt^2/2*a(:,2);
U(:,3)= invM*(dt^2*F(:,2)+(2*M-dt^2*K)*U(:,2)-M*U(:,2));
for k=3:Nt
    U(:,k+1)= (dt^2*Sr(:,k)+invM*(2*M-dt^2*K)*U(:,k)-U(:,k-1));
    a(:,k)= Sr(:,k)-invM*K*U(:,k);
    V(:,k)=(U(:,k+1)-U(:,k-1))/2*dt;
end

%*****
% Ajouter un bruit aux mesures
%*****
%U=awgn(U,10);
%U = awgn(U,20,'measured');
V=U.*(ones(N,Nt)+sqrt(0.1)*randn(N, Nt)); % ajouter le bruit
windowSize = 10;
%U=filter(ones(1,windowSize)/windowSize,1,V); % filtrer le signal
%U = awgn(U,20,'measured',1);
%*****
for k=2:Nt
    dUdt(:,k-1) = (1/dt)*(U(:,k)-U(:,k-1));
    gradU(1:(N-1),k) = (diff(U(:,k)))/he;
    dVdt(:,k-1) = (1/dt)*(V(:,k)-V(:,k-1));
end
dUdt(:,Nt) = dUdt(:,Nt-1); % pas complètement vrai
dVdt(:,Nt) = dVdt(:,Nt-1); % pas complètement vrai

%
%---Résolution du problème inverse
Y=M*dUdt+K*U;
Z=M*dVdt+K*V; % Z bruité
m=9;
B=zeros(N,m+1); A=zeros(m+1,m+1);
for j=1:m+1

```

```

for k=1:Nt
    tk=k*dt;
    B(:,j)=B(:,j)+(tk^(j-1))*Y(:,k);
end
B(:,j)=invM*B(:,j);
end
%
for i=1:m+1
for j=1:m+1
for k=1:Nt
    tk=k*dt;
    A(i,j)=A(i,j)+tk^(i+j-2);
end
end
end

S=A\B'; % Equation (56)
%-----Postraitement
s=zeros(N,Nt);
for k=1:Nt
    tk=k*dt;
    for i=1:m+1
        s(:,k)=s(:,k)+(tk^(i-1))*S(i,:)' ;
    end
end
figure
mesh(s([1:N],[1:Nt]))
view(2)
colorbar
title('terme sollicitation estimé S0')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Régularisation
% Calcul de S0
ep=0.2; I=eye(N);
S0=zeros(N,Nt);
for k=1:Nt
    tk=k*dt;
    for i=1:m+1
        S0(:,k)=S0(:,k)+(tk^(i-1))*S(i,:)' ;
    end
end
%
C=M*M+ep^2*I;
BB=zeros(N,m+1);
for j=1:m+1
for k=1:Nt
    tk=k*dt;
    BB(:,j)=BB(:,j)+(tk^(j-1))*(M*Z(:,k)+ep^2*S0(:,k));
end
BB(:,j)=inv(C)*BB(:,j);
end

S=A\BB';

%-----Postraitement
s=zeros(N,Nt);
for k=1:Nt
    tk=k*dt;

```

```

    for i=1:m+1
        s(:,k)=s(:,k)+(tk^(i-1))*S(i,:)' ;
    end
end
%
figure
mesh(Sr([1:N],[1:Nt]))
view(2)
colorbar
title('terme sollicitation de référence en temps et espace')
%
figure
mesh(s([1:N],[1:Nt]))
view(2)
colorbar
title('terme sollicitation calculé en temps et espace pour m=8,
epsilon=0.02')

```

Résultats :

Les figures 6-7 donnent les valeurs du terme sollicitation avant régularisation et les figures 8-9 donnent les valeurs du terme sollicitation après régularisation pour trois valeurs de  $\varepsilon$ . La valeur de  $\mathbf{S}_0$  a été calculée à partir du champ de déplacement non bruité.

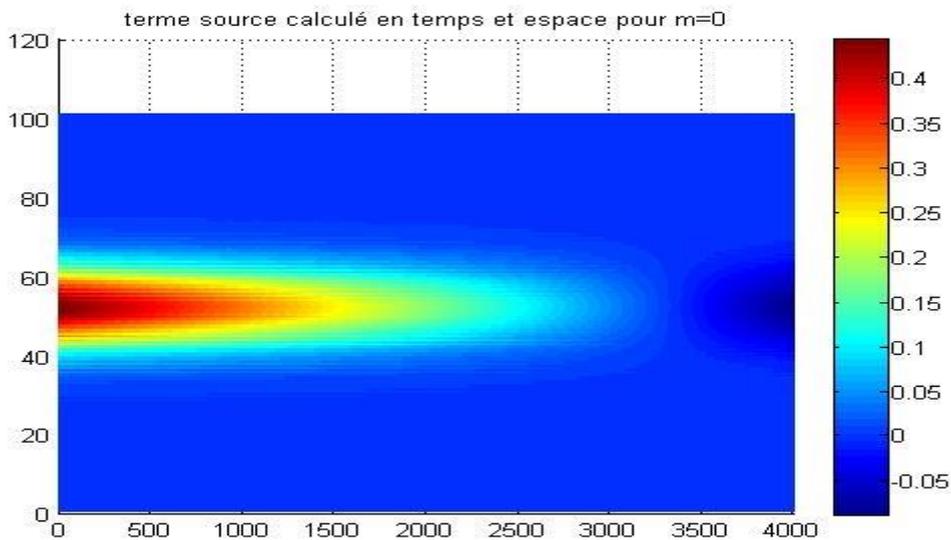


Figure (4.5) : Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec  $m=1$ [11]

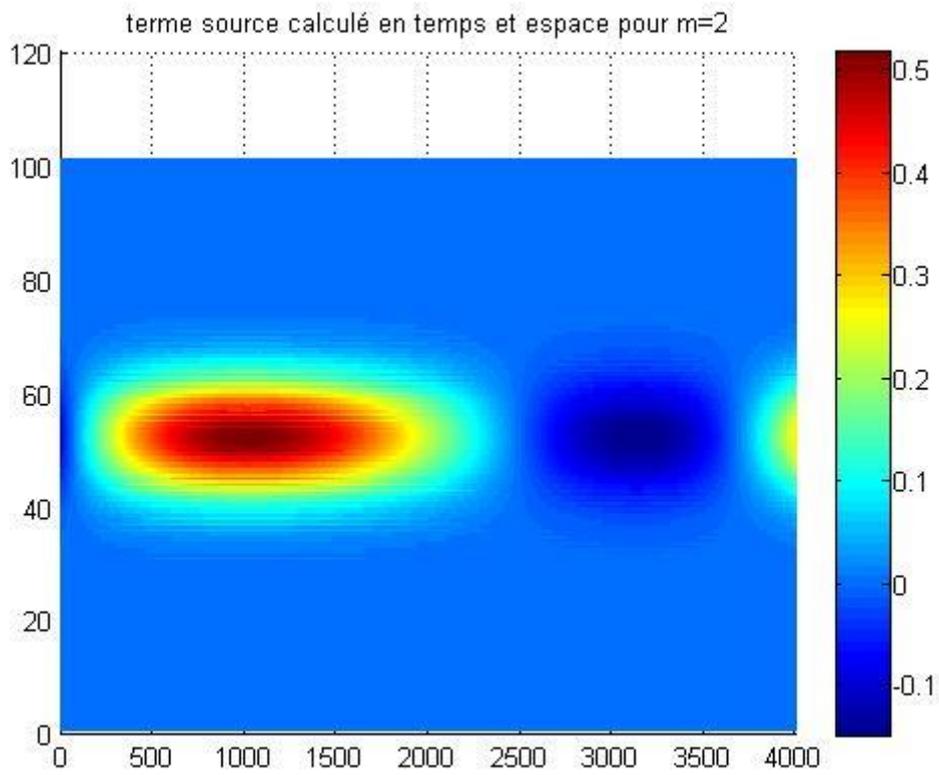


Figure (4.6) : Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec  $m=3$ [11]

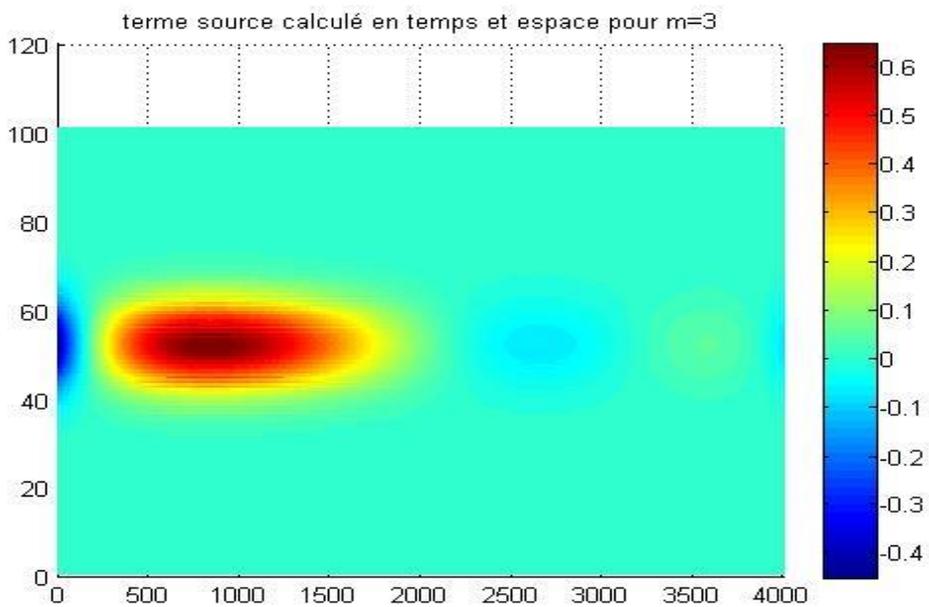


Figure (4.7) : Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec  $m=3$ [11]

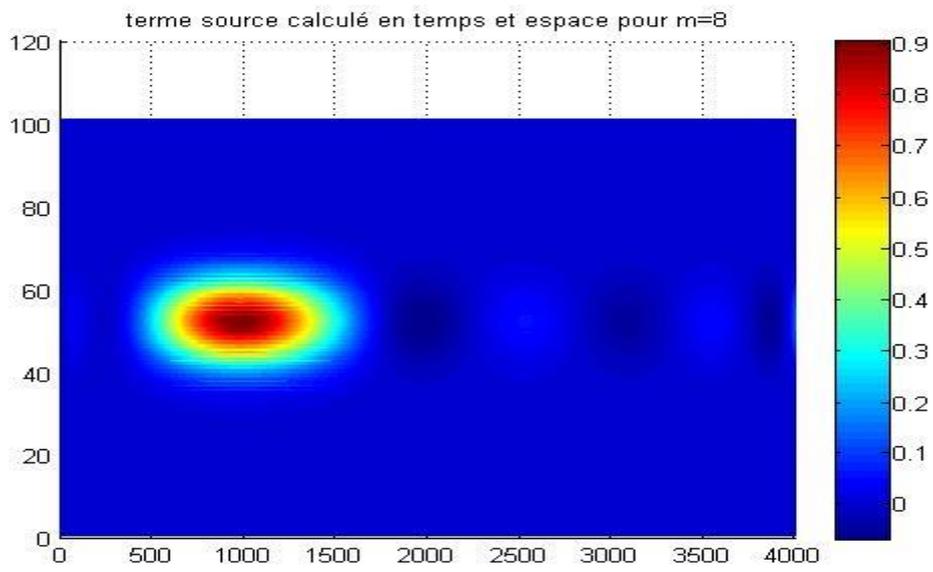


Figure (4.8) : Valeurs en temps et espace du terme sollicitation calculé avec  $m=8$ [11]

## **Conclusion générale**

### **I.13 Conclusion générale :**

La méthode inverse permet de déduire l'état précédent du modèle où la valeur réelle d'un de ses paramètres, à partir de son état actuel, ou de mesurer la valeur vraie d'un de ses paramètres afin de résoudre inversement un des problèmes d'équation de vibration longitudinale. Nous avons présenté une formule mathématique pour cela, nous avons donné des informations complètes sur les valeurs de la sollicitation, et en utilisant la méthode des éléments finis, nous avons pu prédire les valeurs des déplacements et des accélérations. Afin de tester la formule mathématique, nous avons encore une fois supposé que les valeurs des déplacements et des accélérations sont réelles, et à la méthode inverse nous avons essayé d'atteindre les valeurs de sollicitation que nous avons supposées au départ. Enfin, la formule nous a aidé à résoudre le problème inverse et à déduire la valeur de l'incertitude qui peut être considérée dans la problème inverse pour ce modèle lorsque les paramètres de sollicitation sont manquants.

## Bibliographie

- [1] Ahmed Shabana. (2019). *Vibration of Discrete and Continuous Systems*. Chicago, IL, USA: Springer.
- [2] Attaway, S. (2020). *Matlab A Practical Introduction to Programming and Problem Solving*.
- [3] Attaway, S. (2020). *A Practical Introduction to Programming and Problem Solving*.
- [4] Daryl L. Logan. (2017). *A First Course in the Finite Element Method*. Wisconsin-Platteville: cengage.
- [5] Fantuzzi, A. J. (2012). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis Solids and Structures*. .
- [6] Humar, J. L. (2015). *Dynamics of Structures*. Carleton University, Ottawa, Canada: Works press.
- [7] Kim, M. P. (2019). *Structural Dynamics Theory and Computation*.
- [8] Khouane MEFTAH . Février (2015) ANALYSE NUMERIQUE et PROGRAMMATION Math5 .Méthodes Numériques Appliquées. polycopié
- [9] Minkowycz, W. J. *The Finite Element Method Basic Concepts and Applications with MATLAB®, MAPLE, and COMSOL*.
- [10] Neto, F. D. (2010). *An Introduction to Inverse Problems with Applications*.livre.
- [11] programme. Matlab version 2017
- [12] <https://www.mathworks.com/help/matlab>