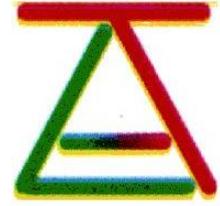


*République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

*Université Aboubekr Belkaid Tlemcen  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Électrique et Électronique*

*Laboratoire d'Automatique de Tlemcen*



# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Tlemcen**

présentée par

**Fayssal Arichi**

**Titre :**

**Estimation d'état pour des systèmes décrits  
par les réseaux de Petri : des systèmes à  
événements discrets aux systèmes  
dynamiques hybrides**

Soutenue en Mars 2015 devant le jury :

Président	N. Ghouali	Professeur à l'Université de Tlemcen.
Examineur	K. Busawon	Professeur à Northumbria University.
Examineur	H. Haffaf	Professeur à l'Université Es sénia Oran.
Examineur	F. Plestan	Professeur à l'École centrale de Nantes.
Directeur de thèse	B. Cherki	Professeur à l'Université de Tlemcen.
Co-directeur de thèse	M. Djemaï	Professeur à l'Université de Valenciennes.



# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Automatique de Tlemcen sous la direction conjointe du Professeur Brahim Cherki de l'université de Tlemcen et du Professeur Mohammed Djemai de l'université de valenciennes.

Je tiens à remercier très vivement le Professeur Brahim Cherki et le Professeur Mohammed Djemai pour avoir dirigé cette thèse et m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions. Je tiens particulièrement à les remercier pour leurs patientes et rigoureuses directions et leurs conseils et soutien tout au long de ce travail. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance profonde à Monsieur Noureddine Ghouali Professeur de l'université de Tlemcen, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. J'adresse également mes plus sincères remerciements à Monsieur Krishna Busawon, professeur à Northumbria University Newcastle, à Monsieur Hafid Haffaf professeur de l'université Es sénia Oran, et à Monsieur Franck Plestan professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs et les membres du jury de ce mémoire. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont montré pour mes travaux.

Je tiens à remercier tous mes collègues du Laboratoire d'Automatique de Tlemcen pour la bonne humeur et l'ambiance conviviale autour desquelles s'est déroulé ce travail.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements envers ma très chère mère, mon très cher père, mes frères (Mohamed et sa femme fathia, Réda et sa femme Nadia et Farouk), mes sœurs (Wassila et son mari Farouk, Nawal et son mari Abdelkarim et Soulaf et son mari Hamza), et mes oncles (Abdelmoumen et sa femme Farida et Ahmed et sa femme Djamila) qui m'ont toujours soutenu tout au long de mon parcours depuis le premier jour.

Je tiens également à remercier mon cousin le docteur Abdelkarim Hebbar qui m'a énormément aidé pour la mise en forme de la thèse et pour ses judicieux conseils.

Un grand merci à tous ce qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>1 Généralités sur les SED et les SDH</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction	15
1.2 Systèmes à évènements discrets	15
1.2.1 Automate à états finis	17
1.2.2 Les réseaux de Petri	19
1.3 Les systèmes dynamiques hybrides	25
1.3.1 Modélisation des SDH	26
1.3.2 Définition formelle	30
1.3.3 Classification des phénomènes hybrides	32
1.3.4 Exécution des SDH	33
1.3.5 Les classes des SDH	34
1.4 Conclusion	37
<b>2 Etat de l'art sur l'observation des SED et SDH</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction	39
2.2 Principe d'observation	40
2.3 Observabilité	41
2.3.1 Observabilité des systèmes linéaires	41
2.3.2 Observabilité des systèmes non linéaires :	41
2.4 Observabilité et observateurs pour les systèmes à évènements discrets	42
2.4.1 Observabilité des systèmes à évènements discrets	42
2.4.2 Observateurs pour les systèmes à évènements discrets	44
2.5 Observabilité des systèmes dynamiques hybrides	45
2.5.1 Observabilité des systèmes hybrides linéaires à commutations	46
2.5.2 Observabilité des systèmes hybrides non linéaires à commutations	54
2.6 Synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides	56
2.6.1 Observateur avec état discret connu	56
2.6.2 Observateur avec état continu connu	58
2.6.3 Observateur pour l'état hybride	58
2.7 Conclusion	60
<b>3 Estimation d'état pour les SED et détection du mode actif pour les SDH</b>	<b>61</b>
3.1 Introduction	61
3.2 Présentation des SED modélisés par les réseaux de Petri partiellement observables :	62

3.2.1	Réseaux de Petri partiellement observables . . . . .	62
3.2.2	Représentation d'état d'un Réseau de Petri partiellement observable . . . . .	63
3.3	Observabilité des SED modélisés par les RdPPO . . . . .	66
3.3.1	Rappel sur l'observabilité des systèmes descripteurs . . . . .	66
3.3.2	Observabilité des réseaux de Petri partiellement observables . . . . .	68
3.4	Synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par les RdPPO . . . . .	73
3.4.1	Observateur d'ordre réduit pour les RdPPO . . . . .	73
3.4.2	Observateur à entrée inconnue pour les RdPPO . . . . .	74
3.5	Résultats de simulation . . . . .	77
3.5.1	Exemple 1 . . . . .	77
3.5.2	Exemple 2 . . . . .	80
3.6	Détection du mode actif pour les systèmes dynamiques hybrides . . . . .	83
3.6.1	Présentation de la classe de SDH considérée . . . . .	83
3.6.2	Détection du mode actif . . . . .	86
3.6.3	Exemple d'application . . . . .	87
3.7	Conclusion . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Synthèse d'observateurs hybrides pour quelques classes de SDH</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction . . . . .	91
4.2	Synthèse d'observateur pour des systèmes linéaires à commutations . . . . .	93
4.2.1	Formulation du problème . . . . .	93
4.2.2	Analyse d'observabilité . . . . .	95
4.2.3	Synthèse de l'observateur hybride . . . . .	96
4.2.4	Résultats de simulation . . . . .	101
4.2.5	Conclusion . . . . .	105
4.3	Synthèse d'observateur pour des systèmes non linéaires à commutations . . . . .	105
4.3.1	Formulation de problème . . . . .	106
4.3.2	Synthèse de l'observateur hybride . . . . .	108
4.3.3	Résultats de simulation . . . . .	111
4.3.4	Conclusion . . . . .	113
4.4	Conclusion . . . . .	113
	<b>Conclusion générale et Perspectives</b>	<b>115</b>
	<b>Annexe</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

# Table des figures

1.1	Changement d'état par occurrence des événements dans un SED . . . . .	16
1.2	Graphe de transition d'états d'un automate fini . . . . .	18
1.3	Le séquençage des saisons modélisé par un RdP. . . . .	20
1.4	Un RdP généralisé . . . . .	21
1.5	Un exemple d'un RdP . . . . .	23
1.6	Système hybride : interaction du continu et du discret . . . . .	25
1.7	Principe d'un réseau de Petri hybride . . . . .	28
1.8	Représentation graphique d'un SDH . . . . .	31
1.9	Saut autonome . . . . .	33
1.10	Exemple de la balle bondissante . . . . .	34
1.11	Caractéristique de la boîte de vitesse . . . . .	36
1.12	Trajectoire d'état continu $x(t)$ dans l'espace d'état . . . . .	37
2.1	Schémas de commande d'un système industriel . . . . .	40
2.2	Schéma d'observations de l'état continu . . . . .	56
2.3	Schéma d'observations de l'état discret . . . . .	57
2.4	Schéma d'observations de l'état continu et de l'état discret . . . . .	57
3.1	Le modèle du RdP . . . . .	77
3.2	<b>Haut</b> Le mode réel et estimé du $p_1$ en fonction de $k$ . <b>Milieu</b> Le mode réel et estimé du $p_2$ en fonction de $k$ . <b>Bas</b> Le mode réel et estimé du $p_3$ en fonction de $k$ . . . . .	79
3.3	<b>Haut</b> Le mode réel et estimé du $p_4$ en fonction de $k$ . <b>Milieu</b> Le mode réel et estimé du $p_5$ en fonction de $k$ . <b>Bas</b> Le mode réel et estimé du $p_6$ en fonction de $k$ . . . . .	80
3.4	Le système de production . . . . .	81
3.5	Le modèle RdP du système de production . . . . .	81
3.6	Le mode réel et le mode estimé de $p_3$ . . . . .	82
3.7	Le mode réel et le mode estimé de $p_4$ . . . . .	82
3.8	Interaction entre la partie discrète et la partie continue . . . . .	84
3.9	L'évolution de la partie discrète . . . . .	85
3.10	Schéma d'observation d'état discret . . . . .	86
3.11	Conjoncteur-disjoncteur électromécanique . . . . .	87
3.12	Le modèle RdP de la partie discrète du système électromécanique . . . . .	88
3.13	<b>Haut</b> Le mode réel et estimé du $p_1$ en fonction de $k$ . <b>Milieu</b> Le mode réel et estimé du $p_2$ en fonction de $k$ . <b>Bas</b> Le mode réel et estimé du $p_3$ en fonction de $k$ . . . . .	89

3.14	<b>Haut</b> Le mode réel et estimé du $p_4$ en fonction de $k$ . <b>Milieu</b> Le mode réel et estimé du $p_5$ en fonction de $k$ . <b>Bas</b> Le mode réel et estimé du $p_6$ en fonction de $k$ . . . . .	90
4.1	Structure de l'observateur hybride 1 . . . . .	92
4.2	Structure de l'observateur hybride 2 . . . . .	92
4.3	Structure de l'observateur hybride proposé . . . . .	94
4.4	Schéma du principe de l'observabilité sur un intervalle de temps hybride. . . . .	96
4.5	Le modèle RdP et les conditions de transition associées. . . . .	102
4.6	Le mode réel $q$ et le mode estimé $\hat{q}$ . . . . .	103
4.7	Les états continus réels $x_j$ et les états estimés $\hat{x}_j$ avec $j = 1, \dots, 4$ . . . . .	104
4.8	Les erreurs d'estimation $\hat{x}_j - x_j$ avec $j = 1, \dots, 4$ . . . . .	105
4.9	Structure de l'observateur hybride . . . . .	107
4.10	Structure de l'observateur "Super Twisting Algorithm" . . . . .	109
4.11	Structure du différentiateur étape par étape . . . . .	110
4.12	Le modèle RdP et les conditions de transitions associées . . . . .	112
4.13	Les états continus réels $x_j$ et les états estimés $\hat{x}_j$ avec $j = 1, 2$ . . . . .	112
4.14	Le mode réel $q$ et le mode estimé $\hat{q}$ . . . . .	113

# Introduction Générale

## Contexte et motivations

Dans de nombreux domaines d'application de l'Automatique (la pneumatique, la mécanique, l'électricité, la chimie,...), le système est souvent représenté par un modèle continu ou par un modèle à événements discrets selon les variables utilisées pour décrire l'état du système et la variable caractérisant le temps.

Pour décrire les systèmes continus par des modèles continus, différents selon la finalité (statique ou dynamique continu pour l'optimisation, dynamique échantillonné pour la commande autour d'un point de fonctionnement), on utilise des outils mathématiques tels que les équations différentielles, équations aux différences, les fonctions de transferts, ou encore les équations d'états. Tandis que, les systèmes à événements discrets (SED) représentent la classe de systèmes dynamiques dont les états et les transitions sont modélisés de manière discrète où le comportement est vu comme l'ensemble des transitions possibles entre différents états. Ces transitions ne sont plus fonction du temps mais dépendent de l'occurrence asynchrone d'événements. Les SED sont classiquement représentés par l'Algèbre de Boole combinée à des formalismes états–transitions ayant une représentation graphique [33, 108, 113] (les réseaux de Petri, les automates à états finis, Grafset,...).

En raison d'une modernisation incessante des outils de production, la majorité des systèmes deviennent de plus en plus complexes et sophistiqués. Ces systèmes combinent généralement des processus continus dans lesquels l'état évolue d'une façon continue par rapport au temps avec des processus à événements discrets où l'évolution de l'état est ordonné suivant une séquence d'événements. L'interaction entre les deux systèmes a conduit à l'émergence d'une nouvelle classe qui ne peut être classée ni dans la catégorie des systèmes continus ni dans la catégorie des systèmes à événements discrets. Cette classe est dite hybride. Le terme "hybride" est utilisé lorsqu'un système ou un phénomène est composé de plusieurs composantes de nature différente. Un système dynamique hybride (SDH) permet de représenter globalement l'interdépendance d'éléments dynamiques continus-discrets au sens classique d'équations différentielles ou d'équations aux différences, soumis à des éléments décisionnels discrets ou à événements discrets qu'ils soient de types déterministes et/ou stochastiques. Ainsi, les systèmes hybrides permettent de représenter une large classe de systèmes réels dans de nombreux domaines applicatifs tels que les systèmes mécatroniques, les systèmes embarqués, les convertisseurs de puissance, les procédés chimiques, ...

En effet, durant ces dernières décennies, des efforts particuliers de recherche se sont portés sur la modélisation des SDH afin d'obtenir des modèles hybrides mieux adaptés permettant la prise en compte à la fois des dynamiques continues et des dynamiques discrètes ainsi que l'interaction entre eux. Ces recherches s'articulent principalement sur deux formalismes per-

mettant la modélisation de l'aspect hybride : les automates hybrides [80] ou bien les réseaux de Petri hybrides [96, 54]. Un automate hybride se présente, fondamentalement, comme un automate à état fini avec des équations différentielles associées à ses états discrets. Malgré le fait que l'automate hybride représente un puissant formalisme de modélisation des SDH, leurs avantages sont néanmoins atténués par leur grande sensibilité au problème de l'explosion combinatoire du nombre d'états (même dans le cas de systèmes simples). D'où le besoin de disposer de mécanismes de structurations plus puissants comme les réseaux de Petri (RdP). Le choix de RdP pour décrire l'aspect discret du SDH offre la possibilité de dépasser cet inconvénient, en fournissant des structures de modélisation beaucoup plus riches et un net gain d'échelle. Les RdP sont un outil bien adapté pour modéliser les SED, et pour les études de sûreté de fonctionnement des systèmes dynamiques car ils possèdent deux caractéristiques importantes [108, 7]. D'abord, de nature graphique, il permet de modéliser et d'analyser les primitives de comportement telles que la synchronisation, le parallélisme, le partage de ressources etc. Puis, les résultats théoriques qui les concernent sont abondants et les propriétés de ces réseaux ont été et sont encore largement étudiées.

L'évolution temporelle des systèmes hybrides est donc caractérisée par l'évolution de ses variables d'état continues et discrètes qui dépendent des signaux d'excitation appliqués et des conditions initiales. La connaissance de ces états nécessite la disponibilité de capteurs physiques, provenant de l'instrumentation. Ces capteurs peuvent être soumis parfois à des contraintes d'ordre technique, technologique ou économique (instrumentation difficile du système, capteur indisponible ou très onéreux,...). Par contre, le besoin d'information sur l'état hybride est motivé par le fait qu'elle est une étape importante voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour la modélisation (identification), la détection et le diagnostic de défauts ou la supervision des systèmes industriels.

## Objectifs de la thèse

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'analyse d'observabilité et la recherche de méthodes de synthèse d'observateurs pour quelques classes de systèmes décrits par les RdP. Nos travaux portent particulièrement sur les SED modélisés par les RdP et les SDH dont la partie discrète est régie par un RdP. L'estimation d'état pour les SED et les SDH a déjà attiré beaucoup l'attention des chercheurs et a été étudiée avec un intérêt particulier. Toutefois, ce problème est un problème non encore complètement résolu.

Le problème de l'estimation d'état pour les SED n'est pas limité à l'estimation d'état, mais aussi au problème de la reconstitution de la séquence de franchissement de transitions qui conduisent à un état donné. En effet, plusieurs travaux ont été présentés dans le cadre d'estimation d'état notamment dans le cas où seules des informations partielles sur les événements sont disponibles. Dans ce cas l'estimation de l'état généralement n'est pas unique, car les informations peuvent être très limitées et donc l'estimation de l'état est représentée par un ensemble des états qui sont cohérents avec les séquences d'observations du système [76, 77, 56, 120, 4]. Dans le cas où des informations partielles des états et des événements sont disponibles, l'estimation de l'état doit être unique et exacte [93, 121].

Plusieurs travaux ont été présentés dans la cadre de l'estimation d'état pour les SDH. Ces travaux peuvent être classés en trois types d'approches, la principale différence entre ces ap-

proches est liée à la connaissance de l'état discret ou continu. Dans le premier type où l'état discret est supposé connu, un observateur de type Luenberger commuté est largement utilisé pour les hybrides à commutations [5, 26, 39, 79]. Dans le deuxième type, l'état continu est supposé connu et le problème d'estimation revient à identifier le mode actif et les instants de commutations [42, 24, 67, 110]. Un cas plus difficile est présenté dans le troisième type, particulièrement, lorsque le mode discret doit être identifié et une estimation de vecteur d'état continu devrait également être donnée au même temps. Dans ce dernier type, la majorité des approches existant dans la littérature sont basées sur la combinaison de deux observateurs : un observateur continu et un observateur discret ainsi que l'interaction entre eux. On peut citer les observateurs à mode glissant d'ordre supérieur [133, 63], le différentiateur robuste [123, 28], l'observateur algébrique [141], et l'observateur à mémoire fini [95].

## Contributions de la thèse

Nous abordons dans cette thèse les points suivants :

- La présentation d'une nouvelle caractérisation algébrique d'observabilité et la synthèse d'un observateur à entrée inconnue pour une classe de SED modélisée par un RdP. L'idée principale est basée sur l'utilisation des techniques d'observation des systèmes descripteurs. L'utilisation de la théorie des systèmes descripteur est motivée par la capacité de formuler l'évolution du marquage d'un RdP sous forme d'un système descripteur. Le traitement que nous allons présenter est purement algébrique et donc facile à comprendre. Parallèlement à l'élaboration de résultats théoriques, une attention est également accordée à la facilité des résultats pour le calcul numérique.
- L'exploitation des résultats d'observation des RdP, pour l'estimation de l'état discret pour une large classe de systèmes hybrides où l'état continu, peut être complètement ou partiellement mesuré. Cette classe peut avoir plusieurs sous-systèmes évoluant simultanément avec des dimensions différentes.
- La synthèse d'un observateur hybride pour une classe de systèmes hybrides linéaires à commutations. Cette classe est caractérisée par des sous-systèmes qui ne vérifient pas les conditions classiques d'observabilité.
- La synthèse d'un observateur hybride capable de fournir une estimation simultanée de l'état continu et de l'état discret à chaque instant pour une classe de systèmes hybrides non linéaires à commutations.

## Organisation des chapitres

Cette thèse est organisée en quatre chapitres, comme suit :

Dans le premier chapitre, nous introduirons les notions fondamentales relatives aux SED et SDH dans lesquels nous souhaitons orienter nos travaux. D'abord, nous présenterons quelques outils habituellement utilisés pour la modélisation des SED telle que les automates à états finis et les RdP. Ensuite, nous donnerons une définition générale permettant

de représenter une large classe de SDH ainsi que leurs classifications. Nous présenterons également les différentes approches offertes pour la modélisation des SDH, en signalant que notre attention s'est particulièrement portée sur les modèles dont la partie événementielle s'appuie sur les réseaux de Petri.

Le deuxième chapitre sera consacré à un état de l'art sur l'observabilité et la synthèse d'observateurs pour les SED et SDH. Après un rappel sur le principe d'estimation d'état des systèmes continus linéaires et non linéaires, nous décrirons quelques approches bien connues dans la littérature pour les SED, notamment pour les systèmes décrits par les RdP. Ces approches sont souvent basées sur l'observation des événements ou bien sur des hypothèses inespérées des propriétés des RdP. Ainsi, nous présenterons dans la deuxième partie quelques travaux concernant l'observabilité de quelques classes des SDH en temps continu et en temps discret. Finalement, un bref aperçu du problème de la synthèse d'observateur pour les systèmes hybrides est abordé dans un cadre général.

Dans le troisième chapitre, nous allons nous intéresser dans la première partie à l'étude d'observabilité et la synthèse d'un observateur pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables. Une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité basée sur l'utilisation des techniques d'observation des systèmes descripteurs sera présentée. Nous proposerons par la suite un observateur à entrée inconnue afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur des transitions. Nous allons montrer dans la deuxième partie de ce chapitre comment exploiter ces résultats pour la détection du mode actif pour une classe de systèmes hybrides qui peut avoir plusieurs sous-systèmes évoluant simultanément avec des dimensions différentes.

Dans le quatrième chapitre, nous allons aborder le problème de l'estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret à chaque instant pour quelques classes de systèmes hybrides où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP. Nous présenterons dans un premier temps, un observateur hybride pour une classe de systèmes hybrides linéaires à commutations. Cette classe est caractérisée par des sous-systèmes qui ne vérifient pas les conditions classiques d'observabilité. Nous proposerons par la suite un autre observateur hybride pour une classe de systèmes non linéaires à commutations. Les deux observateurs que nous proposons sont composés d'un observateur continu et d'un observateur discret en interaction.

## Références personnelles

### Revue internationale avec comité de lecture

- F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, Current configuration detection in hybrid systems : Application to a Conjunction-Disjunction mechatronics system, *Mechatronics*, Vol. 24, pp. 1262-1268, 2014.
- F. Arichi, M. Djemai, B. Cherki and N. Manamanni, Continuous and Discrete State Estimation for a Class of Nonlinear Switched Systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, accepté.
- F. Arichi, M. Petreczky, B. Cherki, M. Djemai and A. Giua, Observability and obser-

ver design of discrete event systems modeled by partially observed Petri nets, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems (soumis).

### Conférences internationales avec comité de lecture

- F. Arichi, J. Van Gorp, M. Djemai, M. Defoort and B. Cherki, Hybrid state estimation for a class of switched system using Petri Nets, 13th European Control Conference, Strasbourg, France, June 24-27, 2014.
- F. Arichi, H. kebabti, B. Cherki and M. Djemai, Failure components detection in discrete event systems modeled by Petri net, IEEE 3rd International Conference on Systems and Control (ICSC13), Algiers, Algeria, 2013.
- F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, State and sequence firing estimation of Petri net application to : Manufacturing systems, IEEE conference on control, decision and information technologies, Tunisia, 2013.
- F. Arichi, M. Djemai and B. Cherki, Active mode detection for a Class of hybrid dynamic systems, ICSSEE, Dubai, Dec 2012.
- F. Arichi, M. Djemai, B. Cherki and N. Manamanni, Observateur d'un système hybride décrit par un réseau de Petri, Grenoble, France CIFA 2012.
- F. Arichi, M. Djemai, B. Cherki and N. Manamanni, State Estimation for a Class of Nonlinear Switched Systems Using Petri Net, 2nd International symposium on environment friendly energies and applications, EFEA 2012, Newcastle upon Tyne, UK, 25-27 June 2012.
- F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, Discrete states estimation in hybrid photovoltaic systems, 2nd International symposium on environment friendly energies and applications, EFEA 2012, Newcastle upon Tyne, UK, 25-27 June 2012.
- F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, Active mode detection in hybrid mechatronic systems, International conference on Automatics and Mechatronics, Oran, Algeria, 2011.



# Chapitre 1

## Généralités sur les SED et les SDH

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Systèmes à évènements discrets</b>	<b>15</b>
1.2.1	Automate à états finis	17
1.2.2	Les réseaux de Petri	19
<b>1.3</b>	<b>Les systèmes dynamiques hybrides</b>	<b>25</b>
1.3.1	Modélisation des SDH	26
1.3.2	Définition formelle	30
1.3.3	Classification des phénomènes hybrides	32
1.3.4	Exécution des SDH	33
1.3.5	Les classes des SDH	34
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>

---

### 1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous introduirons une présentation générale sur les systèmes vers lesquels nous souhaitons orienter nos travaux. Il s'agit des SED et des SDH. Nous présenterons dans la première partie du chapitre, une définition générale permettant d'introduire une large classe de SED ainsi que les deux classes de modèles habituellement utilisées pour représenter les SED : les automates à états finis et les RdP. Nous commençons dans la deuxième partie par une définition et une classification des systèmes hybrides. Nous y abordons également la notion d'exécution d'un système hybride et nous exposons quelques classes des SDH auxquelles on s'intéresse dans ce mémoire. La dernière partie du chapitre sera consacrée aux différentes approches offertes pour la modélisation des SDH. Signalons enfin que notre attention s'est particulièrement portée sur les modèles dont la partie événementielle s'appuie sur les RdP, formalisme sur lequel est basé le modèle développé dans nos travaux.

### 1.2 Systèmes à évènements discrets

Le terme "système à évènements discrets" a été introduit au début des années 1980 pour identifier une classe de plus en plus importante des systèmes dynamiques en fonction de leur caractéristique la plus critique : le fait que leur comportement est régi par des évènements discrets qui se produisent de manière asynchrone dans le temps et uniquement responsable

de la génération des transitions d'état. Le domaine de SED est actuellement très actif. Il fait l'objet de nombreuses manifestations scientifiques, et a déjà son propre journal spécialisé (Discrete Event Dynamic Systems journal).

Les SED sont des systèmes dynamiques dont l'état évolue avec l'occurrence d'événements [51]. Ainsi, tant qu'il n'y a pas d'occurrence d'un événement, l'état du système reste inchangé. Un événement représente indifféremment une action (une personne appuyant sur un bouton d'urgence), un début ou une fin de tâche (fin de cycle de nettoyage d'une machine à laver) ou l'arrivée d'un problème inopiné (impossibilité de sortir le train d'atterrissage). Un événement peut être provoqué par un être humain, par une machine, par la nature ou par toute combinaison possible d'actions. Quel qu'il soit, un événement est asynchrone, il n'est pas synchronisé à une horloge, et instantané. En effet, au lieu de s'intéresser au déroulement continu des phénomènes, on ne prend en considération que leurs débuts et leurs fins ainsi que leur enchaînement dynamique. Le temps dans les SED n'est codé que par la suite des événements, il est donc discrétisé [33].

De nombreuses applications industrielles (systèmes de production, les chaînes logistiques, les

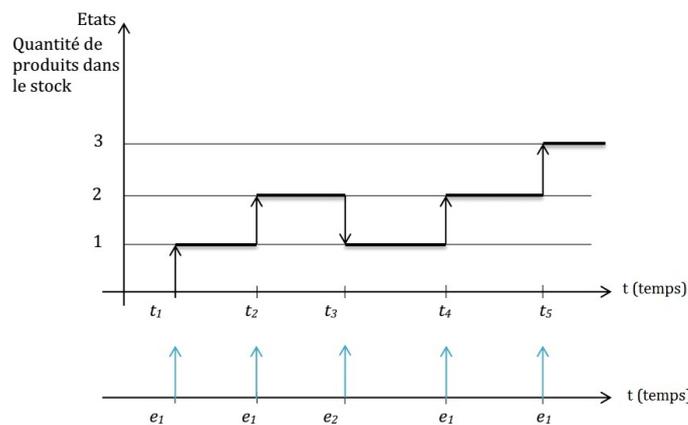


FIGURE 1.1 – Changement d'état par occurrence des événements dans un SED

systèmes de transport, les réseaux de communication, l'informatique, . . .) sont caractérisées par une forte complexité et flexibilité; selon un certain point de vue, elles peuvent être spécifiées par des modèles à événements discrets. Ce type de systèmes peut être modélisé sur la base d'événements. Il s'agit de systèmes dont le comportement est vu comme des transitions possibles entre différents états suite à l'occurrence d'événements.

Un SED est un système dynamique défini par un ensemble d'états discrets et des évolutions, nommées trajectoires, basées sur une succession des états et des transitions. Les transitions sont étiquetées par des symboles, appelés événements, définis avec les éléments d'un alphabet. Une approche courante pour l'étude de ces systèmes consiste à ignorer la valeur explicite du temps et à ne s'intéresser uniquement qu'à l'ordre d'occurrence des événements.

A titre d'exemple, considérons l'exemple du stockage de produits finis au sein d'un système de production [100]. Quand un nouveau produit est fini, il arrive à la section de stockage. L'arrivée d'un camion entraîne le chargement d'un produit dans le camion pour sa distribution. Ces deux actions qui respectivement incrémentent et décrémentent le nombre de produits stockés sont considérées comme des événements et sont étiquetées par :

$e_1$  : arrivée au stockage d'un produit terminé.

$e_2$  : départ d'un produit terminé de la section de stockage.

La trajectoire de la Fig (1.1) représente l'évolution du nombre de produits stockés par rapport à l'occurrence d'événements ( $e_1, e_2$ ). L'état du système représente la quantité de produits dans le stock, il est incrémenté de 1 à chaque événement  $e_1$  et il est décrémenté de 1 à l'occurrence de l'évènement  $e_2$ . La quantité initiale est supposée être nulle.

Une telle simplification est justifiée lorsque le modèle est utilisé pour l'étude des propriétés dynamiques indépendantes du temps. Par contre, dans certaines applications, les informations temporelles sont cruciales et doivent être intégrées au modèle de manière à spécifier les trajectoires d'événements et leur temps. La théorie des SED peut être divisée en deux grandes approches [50] :

- L'approche qualitative (logique) : qui ne s'intéresse qu'à l'occurrence des événements ou l'impossibilité de cette occurrence (blocage), et à la succession de ces événements [118, 138].
- L'approche quantitative : qui s'intéresse à l'aspect évaluation des performances (nombres d'événements survenant dans un intervalle de temps donné), et à l'optimisation de ces performances [82].

L'étude des SED peut être menée avec différents outils tels que : les langages de programmation parallèle/temps réel, les modèles dynamiques algébriques, comme l'algèbre Max Plus, les automates à états finis et les RdP. Ces deux derniers seront présentés en détail dans la suite de ce chapitre.

### 1.2.1 Automate à états finis

La technique la plus ancienne et la plus classique pour représenter les comportements dynamiques d'un SED est d'utiliser un automate à états finis. Un automate est une machine à états constituée des états et des transitions associées aux événements. Son comportement dépend du mot fourni en entrée : l'automate passe d'un état à l'autre, suivant les transitions, à la lecture de chaque symbole de l'entrée. L'automate est dit "fini" car il possède un nombre fini d'états distincts [33]. Avant de présenter les automates à états finis, nous rappelons quelques notions de base de la théorie des langages.

Un alphabet, souvent désigné par  $\Sigma$ , est un ensemble fini de symboles. C'est à partir de cet ensemble, et des symboles qui le constituent, qu'il est possible de construire des mots. Un mot (chaîne), noté  $s$ , sur l'alphabet  $\Sigma$ , est une suite finie, fabriquée par concaténation,  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de symboles inclus dans  $\Sigma$ . Pour la simplification, l'écriture  $s_1 s_2$  : est considéré comme équivalente à  $s_1.s_2$ . Le mot vide est un mot particulier et est communément noté  $\varepsilon$ . L'ensemble de tous les mots qu'il est possible de créer avec les symboles de l'alphabet  $\Sigma$  est appelé  $\Sigma^*$  ( $\varepsilon$  est inclus dans  $\Sigma^*$ ).

La concaténation de deux mots  $u$  et  $v$  tels que  $u_1, u_2, \dots, u_n$  et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  est le mot noté  $u.v$ , ou  $uv$  égal à  $u_1, u_2, \dots, u_n v_1, v_2, \dots, v_n$  obtenu par simple juxtaposition. Cette opération est associative et non commutative. Lorsqu'un mot  $s$  constitué par concaténation de trois autres mots  $t, u, v$  tel que  $s = tuv$ , la terminologie est la suivante :  $t$  est appelé le préfixe de  $s$ ,  $u$  est appelé le sous mot de  $s$ , et  $v$  est appelé le suffixe de  $s$ .

Un langage, noté  $L$ , est un ensemble de mots constitués avec les symboles de l'alphabet

$\Sigma$ . Par conséquent, un langage  $L$  est inclus ou égal à l'ensemble  $\Sigma^*$  constitué par tous les mots réalisables sur l'alphabet  $\Sigma$ .

De façon générale, un automate est une machine qui a des entrées et des sorties discrètes et qui réagit à une modification de ses entrées en changeant ses sorties. Formellement un automate fini  $A$  peut être défini de la façon suivante :

**Définition 1.** Un automate fini  $A$  est un quintuplet  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_m)$  où :

$Q$  est l'ensemble fini des états.

$\Sigma$  est un ensemble fini de symboles d'entrée (ensemble des événements), appelé alphabet d'entrée.

$\delta$  est la fonction de transition d'états de  $Q \times \Sigma \rightarrow Q$  qui associe un état d'arrivée  $q_k$ , à un état de départ  $q_i$  et à un symbole d'entrée  $\sigma_j$  :  $\delta(q_i, \sigma_j) = q_k$ .

$q_0 \in Q$  est l'état initial.

$Q_m \subseteq Q$  est l'ensemble des états marqués (états finaux).

Un automate à états finis peut être décrit par son graphe de transition d'états. Dans ce graphe, les états sont symbolisés par des cercles et la fonction de transition d'états est représentée par des arcs orientés associés aux événements de  $\Sigma$ . L'état initial est figuré par un cercle avec une flèche entrante et les états finaux sont indiqués par des doubles cercles. La figure (1.2) présente le graphe de transition d'états d'un automate fini déterministe  $A$ .

Nous pouvons identifier  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  et  $Q_m = \{q_3\}$ . La transition d'état  $\delta(q_0, a) = q_1$  est figurée par un arc orienté de  $q_0$  à  $q_1$  et étiqueté par le symbole  $a$ .

Plusieurs chemins sont possibles pour arriver de l'état initial  $q_0$  à l'état final  $q_3$ , comme par exemple :  $(q_0, aa)$  ou  $(q_0, abb)$  ou bien  $(q_0, cb)$ . On remarque aussi que dans le cas de ce modèle, la fonction de transition d'état est partielle, dès lors qu'elle n'est pas définie pour tout élément de produit cartésien  $Q \times \Sigma$ . Par exemple  $\delta(q_0, b) = \emptyset$ .

Un état  $q \in Q$  est dit accessible s'il existe une chaîne  $s \in \Sigma^*$  telle que  $q = \delta(q_0, s)$ , c'est-

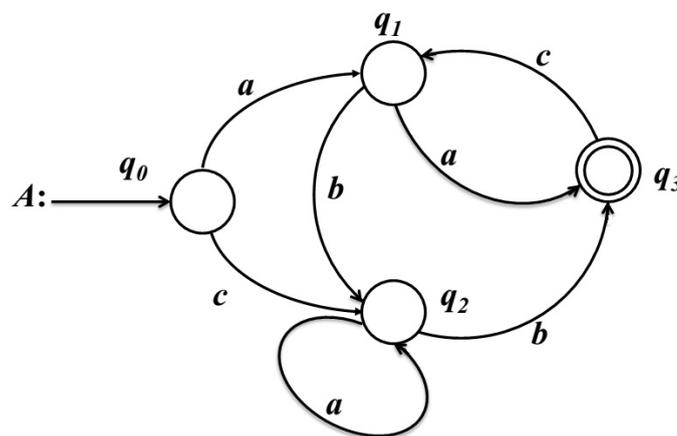


FIGURE 1.2 – Graphe de transition d'états d'un automate fini

à-dire que l'automate peut y accéder depuis l'état initial. Par extension, l'automate  $A$  est accessible si tout état  $q \in Q$  est accessible.

Un état  $q \in Q$  est dit co-accessible s'il existe une chaîne  $s \in \Sigma^*$  telle que  $\delta(q, s) \in Q_m$ , c'est-à-dire qu'à partir de cet état l'automate peut atteindre un état marqué. Par extension, l'automate  $A$  est co-accessible si tout état  $q \in Q$  est co-accessible.

**Définition 2.** *Un automate est dit déterministe, si l'état initial est unique, et si la relation de transition, appliquée à un couple  $(q_i, \sigma)$ , définit toujours un état unique  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ . On remarque que, l'automate de la figure (1.2) satisfait cette condition donc, il est déterministe. Au contraire, un automate non déterministe est défini de la même façon qu'un automate déterministe, excepté qu'il peut avoir plusieurs états initiaux, et sa relation de transition est définie par  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ . Ce qui veut dire qu'à état donné, un même symbole permet d'atteindre deux états différents, au moins.*

## 1.2.2 Les réseaux de Petri

Les réseaux de Petri ont été créés en 1962 par le mathématicien Carl Adam Petri. Au début, cet outil permettait de décrire des relations existant entre des conditions et des événements. Par la suite, les RdP ont fait l'objet d'enrichissements portant sur tous les aspects liés à la modélisation des comportements parallèles et distribués [113, 114]. Les RdP sont des outils graphiques et mathématiques permettant de modéliser le comportement dynamique des SED. Leur représentations graphique permet de visualiser d'une manière naturelle la synchronisation, le parallélisme, le partage de ressources [7, 108]. Leur représentations mathématique permet d'établir les équations d'états, à partir desquelles il est possible d'apprécier les propriétés du modèle et de le comparer avec le comportement du système modélisé [92, 108].

De plus, l'un des avantages des réseaux de Petri, par rapport aux autres formalismes du même type, est qu'ils reposent sur des fondements théoriques permettant de vérifier les propriétés générales d'un modèle (vérifier que le modèle est vivant, sans blocage, borné, etc.) ainsi que l'accessibilité de certains marquages [108]. En outre, les RdP ont, par rapport aux automates, l'avantage d'être un modèle beaucoup plus général, bénéficiant de structures beaucoup plus riches, s'adaptant parfaitement à la description de certains types de SED.

Concevoir un système (ensemble de procédures, processus ou éléments physiques constituant une installation industrielle) ou étudier un système existant (en vue de l'améliorer, le dépanner, etc.) sont les deux situations les plus rencontrées par l'automaticien. Dans le premier cas, les RdP facilitent la conception de l'architecture du système, en fournissant un outil de représentation graphique. Ils permettent de poser les problèmes susceptibles d'intervenir (blocages, incohérences des données, contraintes de temps, conflits d'accès aux ressources, etc.) et de leur apporter des solutions optimales.

Dans le deuxième cas, ils permettent de réaliser un modèle qui servira à l'analyse du système, la recherche de ses propriétés et l'évaluation de ses performances. Les RdP peuvent aussi générer des modèles de référence pour le diagnostic [45].

Parmi les diverses extensions des réseaux de Petri développées pour prendre en compte de la contrainte du temps pour l'étude des processus, on trouve deux catégories d'approches : les réseaux de Petri temporisés [104] et les réseaux de Petri temporels [104]. De même, la notion du marquage réel est introduite à travers les RdP continus.

La prise en compte de l'aspect hybride apparaît dans les réseaux de Petri hybrides [6] et les réseaux de Petri associés à des équations différentielles ou/et algébriques [54]. Dans la première approche, les variables continues sont représentées par le marquage des places conti-

nues. Dans la deuxième approche, un système d'équations différentielles et/ou algébriques est associé à chaque place du RdP pour décrire les variables continues.

Dans cette section nous présenterons d'abord les notions de base de RdP dont nous avons besoin dans notre travail.

### Notations et définitions de base

Un RdP est un graphe orienté comprenant deux types de sommets : les places et les transitions (figure (1.3)). Une place est représentée par un cercle et une transition par un trait ou par un rectangle. Les places et les transitions sont reliées entre elles par des arcs. Le nombre de places est fini et non nul et le nombre de transitions est également fini et non nul. Un arc relie soit une transition à une place soit une place à une transition. Les

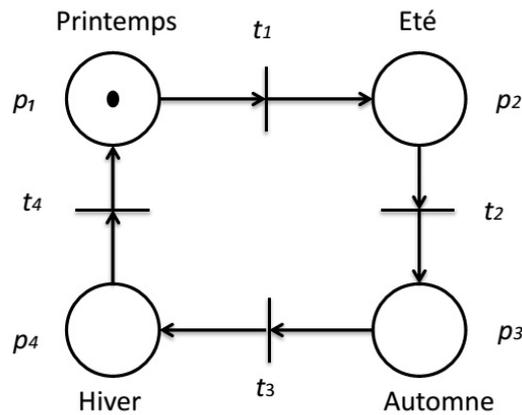


FIGURE 1.3 – Le séquençage des saisons modélisé par un RdP.

places représentent des conditions spécifiques pour chaque état du système. Elles peuvent correspondre, soit à l'état booléen d'un dispositif (par exemple, une ressource est disponible ou pas), soit à un nombre entier (par exemple le nombre de pièces dans un stock). Les transitions (symbolisées par des traits) représentent les actions qui peuvent provoquer le changement d'état du système. De manière plus formelle un RdP est défini comme :

**Définition 3.** *Un RdP ordinaire non marqué est défini par un quadruplet  $R = \{P, T, Pré, Post\}$  tel que :*

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un ensemble fini non vide de places où  $|P|$  est le nombre fini de places du réseau.
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  un ensemble fini non vide de transitions où  $|T|$  est le nombre fini de transitions du réseau.  $P \cap T = \emptyset$  c'est-à-dire que les ensembles  $P$  et  $T$  sont disjoints (avec  $P \cup T \neq \emptyset$ ).
- $Pré : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$  est l'application places précédentes qui définit les arcs allant des places vers les transitions.
- $Post : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$  est l'application places suivantes qui définit les arcs des transitions vers les places.

$Pré(p, t)$  : est le poids de l'arc (orienté) reliant la place  $p$  à la transition  $t$ ,  $Post(p, t)$  : est le poids de l'arc reliant la transition  $t$  à la place  $p$ .

**Exemple 1.** Le RdP de la figure (1.3) décrit le séquençement des saisons. L'ensemble des places est  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  et l'ensemble des transitions est  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ . La présence d'une marque dans une place indique la saison actuelle. Nous pouvons remarquer que ce réseau ne peut contenir qu'un jeton et un seul puisqu'une seule saison à la fois a lieu. Le franchissement (ou tir) d'une transition, indique le passage d'une saison à l'autre. Le tir de  $t_1$  indique la fin du printemps et le début de l'été.

**Définition 4.** Un RdP généralisé  $\mathcal{R}$  est défini comme un RdP ordinaire non marqué  $R$ , sauf que :  $Pré : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  et  $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels).

Les applications  $Pré$  (respectivement  $Post$ ), font correspondre à tout couple  $(p_i, t_j) \in P \times T$  (respectivement  $(t_j, p_i) \in P \times T$ ) un entier qui est le poids de l'arc. Lors de la représentation graphique, en règle générale, si un arc n'a pas de poids associé (appelé aussi valuation), c'est que ce poids vaut 1, sinon l'arc est biffé et une valuation lui est attribuée.

Par exemple, dans la figure (1.4), on a  $Pré(p_1, t_1) = 1$ ,  $Pré(p_2, t_1) = 2$  et  $Post(t_1, p_3) = 1$ . La dynamique d'un RdP est liée à son marquage. Le marquage d'un RdP est une application

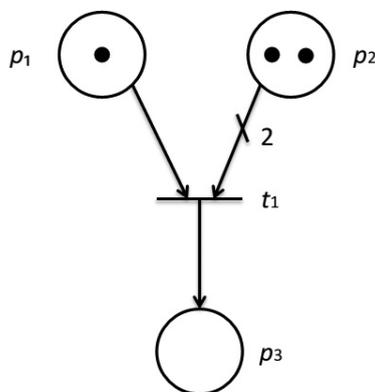


FIGURE 1.4 – Un RdP généralisé

de l'ensemble des places  $P$  vers  $\mathbb{N}$ . Chaque place pourra contenir à un instant donné une, plusieurs ou pas de marques (jetons). La distribution des jetons dans les places détermine le marquage du réseau. Ce marquage  $M$  associe un nombre entier  $M(p_i)$  (positif ou nul) à chaque place  $p_i$  du réseau. On dira qu'un marquage  $M$  est binaire si toutes les places du réseau contiennent au plus un jeton.

**Définition 5.** Un RdP marqué est défini par  $\langle \mathcal{R}, M \rangle$  avec  $\mathcal{R}$  un RdP généralisé,  $M$  une application de  $P$  dans  $\mathbb{N}$  où pour toute place  $p_i \in P$ ,  $M(p_i)$  est le nombre de marques contenues par la place  $p_i$ . Le marquage initial est noté  $M_0$ .

Les notations suivantes sont adoptées :

${}^*t_j$  : l'ensemble des places en amont de la transition  $t_j$  (appelées aussi places en entrée de  $t_j$ ).

$t_j^*$  : l'ensemble des places en aval de la transition  $t_j$  (appelées aussi places en sortie de  $t_j$ ).

${}^*p_j$  : l'ensemble des transitions en amont de la place  $p_i$  (appelées aussi transitions en entrée de  $p_i$ ).

$p_j^*$  : l'ensemble des transitions en aval de la place  $p_i$  (appelées aussi transitions en sortie de  $p_i$ ).

L'évolution du marquage simule la dynamique du système. Ce changement d'état se fait par franchissement de transitions. Le franchissement d'une transition peut s'effectuer seulement si les places en amont de cette transition contiennent au moins un nombre de jeton égal au poids de l'arc reliant la place à la transition. Le franchissement de la transition consiste à retirer des places amont, une quantité de jetons égale au poids de l'arc entrant dans la transition, et à ajouter un nombre égal au poids de l'arc sortant de la transition dans les places en aval de la transition.

**Définition 6.** Une transition est validée si et seulement si la pré-condition suivante est satisfaite :

$$\forall p_i \in {}^*t_j \quad M(p_i) \geq \text{Pré}(p_i, t_j)$$

Une séquence de franchissement  $S$  est représentée par une suite de transitions validées et franchies séquentiellement à partir d'un marquage donné. Si nous considérons le RdP de la figure (1.3) et son marquage initial  $M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , nous dirons que nous sommes passés de  $M_0$  à  $M_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  en effectuant le tirage de la séquence  $S = \langle t_1 t_2 t_3 \rangle$  et nous écrivons  $M_0 \xrightarrow{S} M_3$ .

Le nouveau marquage  $M'$  obtenu par le franchissement de la transition  $t_j$  est donné :

$$M'(p_i) = M(p_i) - \text{Pré}(p_i, t_j) + \text{Post}(t_j, p_i) \quad (1.1)$$

Avec l'application d'incidence avant  $\text{Pré}$  peut être représentée par une matrice  $n \times m$  ( $n = |P|$  et  $m = |T|$ ) notée  $W^- \in \mathbb{N}^{n \times m}$ ) comme suit :

$$W^-(p_i, t_j) = \begin{matrix} & t_1 & \cdots & t_m \\ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{Pré}(p_1, t_1) & \cdots & \text{Pré}(p_1, t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{Pré}(p_n, t_1) & \cdots & \text{Pré}(p_n, t_m) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

L'application d'incidence arrière peut être représentée par une matrice notée  $W^+ \in \mathbb{N}^{n \times m}$  comme suit :

$$W^+(p_i, t_j) = \begin{matrix} & t_1 & \cdots & t_m \\ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \text{Post}(p_1, t_1) & \cdots & \text{Post}(p_1, t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{Post}(p_n, t_1) & \cdots & \text{Post}(p_n, t_m) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

On peut alors introduire la matrice d'incidence  $W \in \mathbb{N}^{n \times m}$  telle que :

$$W(p_i, t_j) = \text{Post}(t_j, p_i) - \text{Pré}(p_i, t_j) \quad \forall p_i \in P \quad \text{et} \quad \forall t_j \in T$$

$$W = W^+ - W^-$$

On en déduit alors que l'équation fondamentale qui permet de représenter l'évolution du marquage d'un RdP  $M$  s'écrit comme suit [8] :

$$M_k = M_i + W\sigma \quad (1.2)$$

Avec  $\sigma$  est un vecteur caractéristique associé à la séquence de franchissement  $S$ . C'est un vecteur de dimension  $m$  (le nombre de transitions) où, la composante numéro  $j$  correspond au nombre de franchissements de la transition  $t_j$  dans la séquence  $S$ .

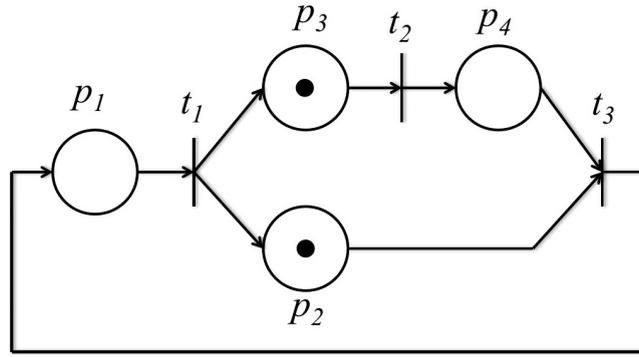


FIGURE 1.5 – Un exemple d'un RdP

**Exemple 2.** Soit le RdP de la figure (1.5). Le vecteur du marquage initial est donné par  $M_0 =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A partir du marquage initial de ce RdP, on peut avoir les séquences de transitions suivantes :  $S_1 = \langle t_2 t_3 \rangle$  ou  $S_2 = \langle t_2 t_3 t_1 \rangle$ . On associe un vecteur caractéristique (le vecteur de franchissement) à chacune de ces séquences. Le vecteur caractéristique de  $S_1$  est  $\sigma_1 =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ et celui de } S_2 \text{ est } \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice d'incidence avant de ce RdP est :  $W^- =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ celle d'incidence arrière est : } W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et la matrice d'incidence est :}$$

$W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$  Le franchissement de la transitions  $t_2$  depuis le marquage initial

$$\text{permet d'atteindre le marquage } M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### Propriétés des réseaux de Petri

Dans cette section, Nous présentons quelques propriétés des RdP [33, 61, 116] :

**Accessibilité** Un marquage  $M_k$  est accessible à partir du marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissement  $S$  à partir de  $M_0$  et on note :  $M_0[S]M_k$ . Cette propriété permet de savoir si un état non désiré risque de se produire.

**Bornitude** Une place  $p_i$  est dite bornée pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel  $k$ , tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $p_i$  est inférieur ou égal à  $k$  (on dit que  $p_i$  est  $k$ -borné).

Un RdP est borné pour un marquage initial  $M_0$  si toutes les places sont bornées pour  $M_0$

(le réseau est  $k$  – borné si toutes les places sont  $k$  – bornées).

Un RdP est dit *sauf* (ou *binaire*) pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage  $M$  accessible, chaque place contient au plus une marque.

**Vivacité** Une transition  $t_j$  est vivante pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage  $M$  accessible à partir de  $M_0$ , il existe une séquence de franchissement  $S$  qui inclut la transition  $t_j$ .

Un RdP est *vivant* pour un marquage initial  $M_0$  si toutes ses transitions sont vivantes pour  $M_0$ .

**Persistence** Un RdP est appelé *persistant* si, pour n'importe quelle paire de transitions validées, le franchissement de l'une ne rend pas l'autre infranchissable.

**Blocage** Un blocage est un marquage tel qu'aucune transition ne peut être validée.

**Conflit structurel** Un conflit structurel correspond à un ensemble d'au moins 2 transitions  $t_1$  et  $t_2$  qui ont une place  $p_i$  d'entrée en commun.

**Conflit effectif** Un conflit effectif est l'existence d'un conflit structurel et d'un marquage  $M$ , tel que le nombre de marque dans  $p_i$  est inférieur au nombre de transitions de sortie de  $p_i$  qui sont validées par  $M$ .

**Réversibilité** Un RdP est dit *réversible* si, à partir de n'importe quel marquage accessible  $M$ , il existe une séquence de transitions franchissables  $S$  qui permet de revenir au marquage initial  $M_0$ .

**Réinitialisabilité et état d'accueil** Un RdP a un état d'accueil  $M_a$  pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage  $M$  accessible à partir de  $M_0$ , il existe une séquence de franchissement  $S$  tel que  $M_a$  est accessible depuis  $M$  en franchissant  $S$ . Le RdP est dit *réinitialisable* pour un marquage initial  $M_0$  si  $M_0$  est un état d'accueil.

## Les réseaux de Petri temporisés et temporels et stochastiques

Les SED en général et les RdP en particulier ne prennent pas en compte la notion de temps car ces systèmes sont décrits avec leur dynamique et l'enchaînement des états accessibles. Cependant, il est difficile de concevoir un outil de production indépendant des contraintes de temps. La prise en compte des aspects quantitatifs du temps dans les réseaux de Petri a donné naissance aux RdP temporisés, aux RdP temporels et aux RdP stochastiques.

Dans les RdP temporisés, les temporisations ont d'abord été associées aux transitions [119] (on dira qu'on a un RdP T-temporisés), puis aux places [126] (on dira qu'on a un RdP P-temporisés) et le jeton est indisponible pendant toute la durée de la temporisation ; il est réservé. La temporisation représente alors la durée minimale de tir ou le temps de séjour minimum d'un jeton dans une place [52].

Les RdP temporisés ne permettent que de spécifier une durée minimale de traitement [36, 115]. Différents types de réseaux temporels ont été introduits. Ils diffèrent par l'élément

auquel est associée une contrainte temporelle de type intervalle (et non plus ponctuel comme dans le modèle d'un RdP temporel) : il peut tout aussi bien s'agir des arcs (RdP A-temporels [1]), des places (RdP P-temporels [92]) ou des transitions (RdP T-temporels [104]). Contrairement aux RdP temporels, les jetons marquant les places d'entrée de la transition sont ici disponibles et peuvent éventuellement être engagés dans une autre transition en conflit avec la transition  $t$ .

Les réseaux de Petri stochastiques ont été introduits dans [73, 74, 103] afin de modéliser efficacement les phénomènes aléatoires. Ainsi, dans un RdP stochastique, les durées de sensibilisation associées aux transitions résultent d'un tirage aléatoire. L'hypothèse la plus couramment employée est que cette durée est distribuée selon des lois exponentielles.

### 1.3 Les systèmes dynamiques hybrides

Ces dernières années, le thème des SDH a connu un essor considérable, en effet, les communautés scientifiques des informaticiens et des automaticiens se sont rejoints pour créer une nouvelle branche. Ceci est très important du fait de l'enjeu économique présenté par les technologies de l'information et de la communication.

En général, le terme "hybride" est utilisé lorsqu'un système ou un phénomène est composé de plusieurs composantes de nature différentes. Formellement, un SDH est considéré dans le domaine de l'automatique, comme un système dynamique dans lequel interagissent à la fois des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et événementiel (Figure (1.6)).

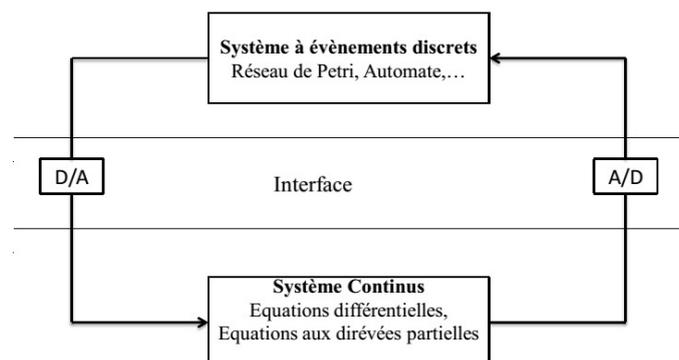


FIGURE 1.6 – Système hybride : interaction du continu et du discret

Un SDH permet de représenter globalement l'interdépendance d'éléments dynamiques continus-discrets au sens classique d'équations différentielles ou d'équations aux différences, soumis à des éléments décisionnels discrets ou à événements discrets qu'ils soient de types déterministes et/ou stochastiques [10, 11]. De telles représentations sont caractéristiques de diverses situations :

- Couplage entre un niveau décisionnel discret et des dynamiques continues ; c'est le cas de la commande hiérarchisée de systèmes de transport par exemple [75].
- Couplage intervenant lors d'une synthèse par bouclage avec multi-régulateurs où le choix du régulateur dépend du comportement lié au point de fonctionnement du système ;

- c'est le cas par exemple de la commande multi-objectifs [2].
- Couplage entre différents modes de système incluant des commutations entre ces différents modes ; c'est le cas d'un système faisant intervenir des commutateurs (ou une diode) par exemple [142].
  - Système continu commandé en mode de fonctionnement sain ou dégradé, ici la variable discrète est stochastique et représente la défaillance [83].

L'aspect hybride est pris en compte dans l'interface entre les deux modèles. La figure (1.6) illustre une approche d'un SDH où la partie continue est décrite par des équations différentielles ou aux différences et la partie discrète est régie par un automate à états finis ou un réseau de petri. Chaque modèle reçoit des entrées (discrète  $\sigma$ , continue  $u$ ) et fournit des sorties (discrète  $\psi$ , continue  $y$ ). L'interface (D/C-C/D) permet l'interaction des variables discrètes et des variables continues.

### 1.3.1 Modélisation des SDH

Avec la naissance des SDH, plusieurs travaux ont été consacrés à la modélisation de ces systèmes afin d'obtenir des modèles hybrides mieux adaptés permettant la prise en compte à la fois des dynamiques continues et des dynamiques discrètes ainsi que l'interaction entre eux. Ils peuvent être classés en trois groupes principaux. Le premier groupe contient toutes les approches basées sur une extension de techniques de modélisation de systèmes continus [106, 107], en introduisant des variables discrètes par l'ajout de variables booléennes afin de recouvrir toutes les configurations, par exemple le formalisme de bond-graph mixte. Le deuxième groupe comprend des approches basées sur l'extension de modèles de systèmes à événements discrets où de nouveaux éléments sont introduits pour représenter la dynamique continue, tel les réseaux de Petri hybrides [8]. Le dernier groupe contient des approches mixtes [54, 136, 137] qui combinent un formalisme continu, décrit par des systèmes d'équations, avec un formalisme discret tel que les réseaux de Petri ou les automates. Nous pouvons citer les automates hybrides [80] et les réseaux de Petri Prédicats Transitions Différentiels (RdPPTD) [105, 55].

Dans ce contexte, la partie suivante est consacrée aux différentes approches offertes pour la modélisation des SDH. Signalons enfin que notre attention s'est particulièrement portée sur les modèles dont la partie événementielle s'appuie sur les réseaux de Petri, formalisme sur lequel est basé le modèle développé dans nos travaux.

#### Extension des modèles continus

Dans le cadre de l'extension des modèles continus vers les systèmes dynamiques hybrides, une première approche proposée repose sur l'utilisation de variables mixtes. L'extension des modèles continus est basée sur l'intégration de l'aspect discret au sein de la représentation continue. Cette intégration consiste à introduire des variables booléennes ou entières au sein du modèle continu. Par exemple, l'état "ouvert" ou "fermé" d'une vanne tout ou rien peut être représenté par une variable booléenne égale respectivement à un ou à zéro. L'inconvénient de cette approche est que le système peut rapidement devenir complexe lorsque le nombre de variables booléennes augmente [143].

Une autre extension consiste à introduire des éléments de commutation dans le modèle continu. Cela donne naissance à des graphes d'états représentant les modes de fonctionnement du système. Ils sont associés d'une part, à des systèmes d'équations différentielles modélisant le comportement de la partie continue, et d'autre part, à des fonctions de saut traduisant les discontinuités lors des changements de modes.

## Extension des modèles à événements discrets

Les modèles à événements discrets sont basés sur des états discrets et un temps discret explicité sous la forme d'une suite d'événements qui sont les changements d'états (fonction "état suivant" d'un automate fini ou franchissement de transition dans un RdP). Un tel modèle est particulièrement bien adapté pour décrire la succession des configurations d'un système hybride nécessaire à la fabrication d'un produit. Les SED ont été étendus de diverses façons pour expliciter le temps de manière quantitative comme les RdP temporisés, temporels et stochastiques (présentés dans les sections précédentes). Le modèle hybride est alors formé d'un modèle discret (RdP) qui est complété d'une seule variable continue : le temps. La condition pour que cette approche soit possible est que toutes les variables d'état continues soient des fonctions linéaires du temps, calculables à tout instant à partir de l'état discret. Le champ d'application des RdP a été étendu aux systèmes continus par l'introduction de nouvelles classes de RdP au sein desquelles la notion de marquage dans l'espace des réels est apparue. La possibilité d'une évolution continue du marquage en fonction du temps qui en résulte permet la modélisation de phénomènes continus (franchissement d'une transition par quantités infinitésimales). Les modèles mixtes dérivés des RdP continus et RdP ordinaires que sont les RdP hybrides, permettent alors de représenter explicitement l'interaction entre la partie continue et la partie discrète par l'intermédiaire d'arcs.

**Réseaux de Petri continus** Les RdP continus ont été introduits par David et Alla [59] à partir des RdP discrets. Un RdP continu est un modèle dans lequel les nombres de marques dans les places sont des nombre réels positifs. Le franchissement s'effectue comme un flot continu en introduisant la notion de vitesse traduite par le nombre de marques franchies pendant une unité de temps. Une transition continue avec une place continue d'entrée et une place continue de sortie est l'image exacte d'un sablier, où le jeton s'écoule continument de la place d'entrée vers la place de sortie. Le modèle de RdP continu peut modéliser soit un système continu, soit constituer une approximation d'un modèle discret, plus au moins finement selon la classe utilisée. Dans ce dernier cas, il permet de réduire les durées de simulations qui deviennent importantes lorsqu'un modèle RdP discret contient un grand nombre de marques. Ainsi l'évolution du marquage discret décrit par l'équation (1.2) devient :

$$\frac{dM}{dt} = Wv(t)$$

où  $v(t)$  représente le vecteur des vitesses de franchissement des transitions en cours de franchissement à l'instant  $t$ .

Selon la nature de ces vitesses de franchissement, plusieurs modèles dérivent des RdP continus. On peut citer les RdP continus à vitesses constantes [60], les RdP continus à vitesses variables [60], les RdP continus asymptotiques [97].

**Réseaux de Petri hybrides** Un RdP hybride [96] est une combinaison de la sémantique d'un RdP continu et celle d'un RdP ordinaire (discret). Un RdP hybride [62] est constitué :

- des places et des transitions discrètes représentant la partie discrète du SDH.
- des places continues dont le marquage est un nombre positif ou nul et des transitions continues qui correspondent à des écoulements continus. L'ensemble décrit la partie continue.

Afin d'illustrer le modèle basé sur les RdP hybrides, considérons comme exemple le cas d'un transfert de matière à travers une vanne, dont le flux continu est à débit constant en régime permanent. Ce débit est traduit par une vitesse maximale de franchissement d'une transition.

La figure (1.7) illustre l'interaction entre la partie discrète et la partie continue. Les places et transitions discrètes, et les places et les transitions continues ont un graphisme différent ; elles sont respectivement représentées en trait simple et en trait double.

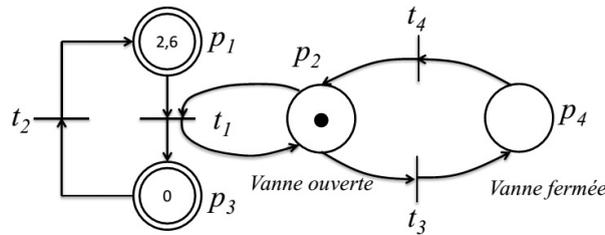


FIGURE 1.7 – Principe d'un réseau de Petri hybride

Les places continues sont  $p_1$  et  $p_3$ , les transitions continues sont  $t_1$  et  $t_2$ , les places discrètes  $p_2$  et  $p_4$ , et les transitions discrètes  $t_3$  et  $t_4$ . Les transitions  $t_1$  et  $t_3$  sont validées, donc franchissables. Alors, si la transition continue  $t_1$  sera franchie avec une vitesse maximale, pour une quantité de franchissement 0.1 on obtient le marquage  $(2.5, 1, 0.1, 0)$ . On a retiré donc une quantité de marquage 0.1 de  $p_1$  et  $p_2$  qui sont les places d'entrée, et l'on a ajouté la même quantité à  $p_3$  et  $p_2$  qui sont les places de sortie. On voit que le marquage de la place discrète  $p_2$  est encore un entier, puisque l'on a retiré et ajouté la même quantité. Si la transition discrète  $t_3$  est validée (qui correspond à la fermeture de la vanne), la vitesse maximale correspondante devient alors nulle.

Plusieurs applications utilisant ce formalisme ont été réalisées. Citons par exemple la modélisation d'un système de production de la société Motorola [6], la modélisation d'un réseau d'eau potable constitué de réservoirs interconnectés par des vannes deux états [7] ou la modélisation d'un système de production d'énergie hydraulique [8].

### Modèles mixtes

Il est bien évident que le formalisme mixte semble le plus précis dans l'interprétation du comportement hybride. En effet, ce dernier combine les modèles discrets et continus dans une même représentation. Chacune des deux parties (continue et discrète) est représentée de façon rigoureuse et explicite et leur interaction est traitée au sein de l'interface qui les relie. Les modèles mixtes combinent un formalisme continu, décrit par des systèmes d'équations, avec un formalisme discret tel que les RdP ou les automates (par exemple, les automates hybrides [9], les RdP prédicats-transitions différentiels [54]). La résolution du modèle continu déclenche l'évolution des variables au cours du temps et valide certaines transitions. L'évolution du modèle discret engendre alors la mise en place d'un nouvel état discret qui se traduit par l'élaboration d'un nouveau système d'équations.

**Réseaux de Petri mixtes** Les RdP mixtes sont un type de RdP associés à des systèmes d'équations différentielles et algébriques. Un RdP mixte est constitué d'une partie discrète, une partie continue et d'une interface hybride qui assure la collaboration entre la dynamique continue et la dynamique événementielle. La partie discrète est représentée par l'ensemble de RdP interprétés [61, 58] synchronisés par des événements internes et la partie continue décrit par un ensemble des variables continues et des équations.

L'évolution des variables continues est directement, et globalement, définie par un ensemble d'équations différentielles et algébriques. L'ensemble des équations est défini à partir du

marquage du RdP et le franchissement des transitions dépend de l'apparition de seuils sur les variables continues ou leurs dérivées. Dans cette représentation, la place peut être interprétée soit comme une activité (un système algébro-différentiel lui est alors associé et le nombre de jetons qu'elle peut accepter est limité à un afin de garantir la cohérence du modèle), soit comme une condition logique, une ressource disponible ou l'état d'un stock (aucune équation ne lui est attribuée et le nombre de jetons est illimité).

Cette approche a notamment été utilisée par [130] pour modéliser une unité de stockage de gaz. Cependant, notons que l'inconvénient majeur des réseaux de Petri mixtes réside dans l'utilisation de variables globales, ce qui ne contribue aucunement à la structuration des modèles.

**Réseaux de Petri prédicats-transitions différentiels** Les Réseaux de Petri Prédicats-Transitions Différentiels (RdP PTD) combinent un formalisme continu, décrit par des systèmes d'équations, avec un formalisme discret régi par un RdP. Les systèmes d'équations dans les RdP PTD sont associés uniquement aux places car les variables continues ne sont pas globales mais associées localement aux jetons. Le principe du couplage et de l'interaction entre la partie discrète et la partie continue du SDH s'effectue de la façon suivante [54] : un jeton mis dans une place déclenche l'intégration des équations correspondantes. Parallèlement à l'intégration, un certain nombre de seuils sont surveillés. Chaque seuil est associé à une transition aval d'une place marquée. Quand le seuil est franchi, cela signifie que l'événement correspondant est apparu, et la transition associée à ce seuil est franchie. Un nouveau marquage est calculé et l'intégration du nouveau système démarre.

Les places de RdP PTD représentent les différentes configurations du système hybride. Pour chaque configuration (état discret), est associé un ensemble d'équations. Le passage d'une configuration à l'autre se fait par le franchissement de transitions. Deux fonctions sont associées à ces transitions :

- Une fonction de sensibilisation définit des seuils sur les variables continues mises en jeu dans les équations associées aux places d'entrées. Lorsque la variable atteint le seuil défini pour la fonction de sensibilisation, la transition sensibilisée à laquelle est associée cette fonction est franchie.

- fonction de jonction, permet de calculer les valeurs initiales des variables en accord avec l'état suivant.

Un RdP PTD est défini par le triplet  $\langle P, T, M \rangle$  où  $P$  est l'ensemble des places,  $T$  l'ensemble des transitions et  $M$  le marquage. Les places de ce modèle sont décrites par la paire  $\langle P, F \rangle$  où  $P$  correspond aux places du réseau ( $|P| = n, n$  étant le nombre de places), et où  $F$  est l'ensemble des fonctions associées aux places.  $F$  est défini comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} F_1(\dot{X}_1, X_1, t) \\ \vdots \\ F_n(\dot{X}_n, X_n, t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$X_i$  étant l'ensemble des variables manipulées par les fonctions  $F_i$  associées à la place  $P_i$ . Nous avons :

$$F_i(\dot{X}_i, X_i, t) = \begin{bmatrix} f_{i1}(\dot{X}_i, X_i, t) \\ \vdots \\ f_{il}(\dot{X}_i, X_i, t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

qui sont des équations représentant l'évolution des variables continues. Ainsi, chaque place du réseau (qui représente un état discret) peut décrire l'évolution de l'ensemble des variables

continues  $X_i$  (grâce au système d'équations  $F_i$ ).

Les transitions de ce réseau sont quant à elles décrites par le triplet  $\langle T, \Xi, \mathcal{J} \rangle$ , où  $T$  représente l'ensemble des transitions du réseau ( $|T| = m$ ,  $m$  étant le nombre de transitions),  $\Xi$  est l'ensemble des fonctions de sensibilisation, et  $\mathcal{J}$  est l'ensemble des fonctions de jonction associées aux transitions. Nous avons alors  $\Xi$  qui est défini comme suit :

$$\Xi = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Le seuil  $E_j$  associé à la transition  $T_j$  est défini comme étant la première solution de :

$$E_j(\dot{X}_j, X_j, t) = 0 \quad (1.6)$$

$X_j$  étant l'ensemble des variables continues utilisées par  $E_j$ . Cette fonction permet de détecter les événements d'état (une variable atteint une valeur prédéterminée), aussi bien qu'un événement de temps ( $t$  atteint une valeur pré-définie). Les fonctions de sensibilisation sont activées lorsque leurs transitions correspondantes sont sensibilisées. Lors du franchissement de transitions, les fonctions de jonction associées sont activées. Elles sont définies par :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

La fonction  $J_j$  associée à la transition  $T_j$  lors du franchissement de  $T_j$  à la date  $t$  calcule les valeurs des variables ainsi que de leurs dérivées.

$$J_j : \begin{cases} \dot{X}_j(t^+) = J_{j\dot{X}}(\dot{X}_j, X_j, t^-) \\ X_j(t^+) = J_{jX}(\dot{X}_j, X_j, t^-) \end{cases} \quad (1.8)$$

Ce qui signifie que les valeurs des variables et de leurs dérivées juste après  $t$  (à  $t^+$ ) sont calculées à partir des valeurs des variables et de leurs dérivées juste avant  $t$  (à  $t^-$ ).

Le dernier élément de ce modèle est  $M$ , qui représente le marquage du réseau. Les variables du système se trouvent réparties dans l'ensemble des jetons du réseau. Lorsqu'une place comporte plusieurs jetons, chaque jeton instancie le système d'équations correspondant avec l'ensemble des variables qu'il transporte. Prenons par exemple le cas d'une place  $P_i$  contenant deux jetons  $a$  et  $b$ . Les équations suivantes seront actives, soit  $2l$  équations :

$$\begin{bmatrix} f_{i1}(\dot{X}_{ia}, X_{ia}, t) \\ \vdots \\ f_{il}(\dot{X}_{ia}, X_{ia}, t) \\ f_{i1}(\dot{X}_{ib}, X_{ib}, t) \\ \vdots \\ f_{il}(\dot{X}_{ib}, X_{ib}, t) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

### 1.3.2 Définition formelle

Les SDH constituent l'ensemble des systèmes où interagissent des composantes continues et des composantes discrètes. En effet, plusieurs définitions des SDH existent dans la littérature. La définition suivante est motivée par [9, 48, 80, 125].

**Définition 7.** Un système dynamique hybride est défini comme [9, 48, 80, 125] :

$$\mathcal{H} = (Q, \mathcal{E}, X, U, In, S, G, Re) \quad (1.10)$$

ou :

- $Q$  est un ensemble fini et non vide d'états discrets (modes discrets).
- $\mathcal{E} \subseteq Q \times Q$  est un ensemble des arrêtes (transitions).
- $X = \{X_q, q \in Q\}$  est la collection des domaines d'évolution des états continus,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\forall q \in Q, X_q$  est un sous ensemble de  $X$  d'intérieur non vide qui représente le domaine d'évolution de la variable d'état continue quand l'état discret du système est  $q$  (nommé aussi par certains "invariant").
- $U = \{U_q, q \in Q\}$  est la collection des domaines de contrôle continu.
- $S$  est la collection des champs de vecteurs, à chaque état discret est associé un système dynamique  $\dot{x}(t) = f_q(x(t), u(t)), q \in Q$ .
- $In \in X \times Q$  l'état initial hybride qui indique le mode discret initial  $q_0$  et l'état continu initial  $x_0$ .
- $G = \{G_e, e \in \mathcal{E}\}$  est une collection de domaines de conditions de garde.
- $Re = \{Re_e, e \in \mathcal{E}\}$  une collection de fonctions d'actualisation (ou d'initialisation) qui permettent, lors du franchissement d'une transition discrète, d'actualiser la variable d'état continu à  $x = Re(., x)$ .

Un SDH est défini par un état hybride  $(x, q)$  où l'évolution de l'état continu est décrite par un ensemble d'équations différentielles (ou aux différences) et l'évolution de l'état discret est régie par un automate à état fini ou un RdP. A partir de cette définition, le système peut être représenté par un graphe orienté où l'état discret est représenté par des sommets afin de présenter les différents modes de configurations du SDH.

A chaque mode est associé une dynamique continue (un sous-système continu) et les arcs modélisent les transitions permises entre les configurations. La figure (1.8) montre une représentation graphique d'un SDH.

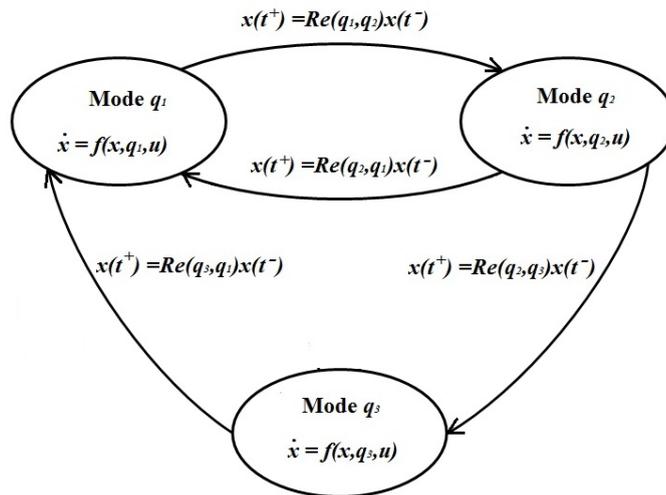


FIGURE 1.8 – Représentation graphique d'un SDH

Le système évolue suivant le champ de vecteur  $f(x, q, u)$  jusqu'à ce que la condition de garde soit atteinte. A cet instant  $t$ , une transition change le système d'un mode à l'autre

et la fonction reset  $Re$  met à jour l'état continu  $x(t^-)$  à  $x(t^+)$  avec  $t^-$  et  $t^+$  représentant respectivement les instants juste avant et après la commutation. Cette opération est répétée pour chaque commutation.

Parfois, les équations différentielles ou aux différences associées à chaque état discret  $q$  sont indépendantes de la commande continue  $u$ . On parle dans ce cas de système hybride autonome.

Le passage d'un sous-système à l'autre se fait par le franchissement de transitions (ou commutations). Ces commutations peuvent être autonomes ou déclenchées par des événements externes. Le franchissement d'une commutation autonome est déclenché par des variables continues atteignant un certain seuil. Lorsque le franchissement est forcé par un événement provenant de l'extérieur on parlera d'une commutation contrôlable.

Dans le paragraphe suivant, une classification de ces phénomènes physiques sera donnée selon le type de l'évènement.

### 1.3.3 Classification des phénomènes hybrides

De façon générale, un SDH est défini par la donnée d'un ensemble de modèles correspondant aux modes du système et une loi de commutation permettant de passer d'un mode de fonctionnement à un autre. La représentation mathématique d'un SDH contrôlé dans l'espace d'état s'écrit sous la forme [34] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), q(t), u(t)) \\ q^+(t) = g(x(t), q(t), u_d(t)) \end{cases} \quad (1.11)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état continu,  $u \in \mathbb{R}^p$  la commande continue,  $q \in Q \subset \mathbb{N}$  l'état discret et  $u_d \in Q \subset \mathbb{N}$  la commande discrète. Les champs de vecteurs  $f$  sont des vecteurs de fonctions continues. La fonction  $g$  permet de présenter le changement d'un mode  $q$  à un mode successeur  $q^+$ . Le passage d'un état discret à l'autre peut se faire par un changement de la dynamique continue (ce qui est véritablement un phénomène de commutation), ou par un changement de l'état à un instant donné (un phénomène de type saut). Chacun de ces phénomènes peut se produire de façon autonome ou contrôlée.

#### Commutation autonome

Ces commutations résultent d'une évolution interne du système, cela veut dire que les champs de vecteur décrivant le comportement des grandeurs continues changent brusquement lorsque l'état atteint certaines valeurs. Ce type de commutations est trouvé souvent dans les systèmes électriques, c'est le cas, par exemple de changement de la configuration du système quand la tension aux bornes d'une diode change de signe.

#### Commutation Contrôlée

Dans ce cas, le changement est dû à une action extérieure. Le champ de vecteurs change de façon instantanée suite à une commande afin d'obtenir un comportement désiré. A titre d'exemple, considérons le modèle d'une transmission manuelle [143] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = [-a(x_2/v) + u]/(1 + v) \end{cases}$$

Où  $x_1$  est la vitesse relative par rapport à un point fixe,  $x_2$  la vitesse de rotation de l'engin,  $v$  la position du levier de vitesse  $v \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $u \in \{0, 1\}$  la position d'accélération et  $a$  un

paramètre du système. Dans cet exemple, le champ de vecteur est commuté par la valeur de  $v$ .

### Saut autonome

Lorsque la variable d'état atteint une certaine région de l'espace d'état appelée surface de commutation, au moment de la commutation, la variable d'état passe de façon discontinue de sa valeur courante à une autre de façon que sa valeur soit réinitialisée à l'activation de la deuxième configuration (mode) comme indiquée dans la figure (1.9). C'est le cas dans l'exemple de la balle rebondissant dans lequel la vitesse change de signe au moment du choc.

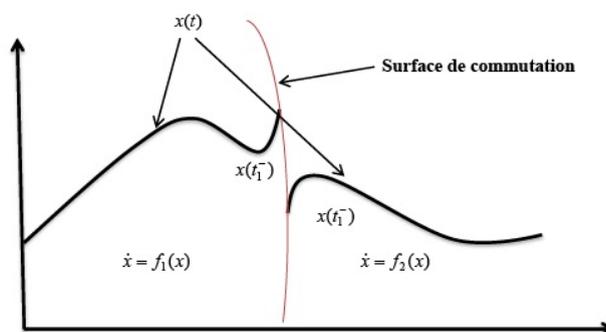


FIGURE 1.9 – Saut autonome

### Saut Contrôlé

Ce type de phénomène correspondant à un changement de l'état de façon discontinue sous l'effet d'une commande. C'est le cas par exemple, pour le débit lors de l'ouverture et la fermeture d'une vanne dans un procédé physico-chimique sous l'hypothèse que la fermeture et l'ouverture des vannes sont des gestes instantanés.

#### 1.3.4 Exécution des SDH

Pour la mise en œuvre de la notion d'exécution, on considère qu'un SDH est défini à chaque instant par une évolution de l'état discret  $q(t)$  et une évolution de l'état continu  $x(t)$ . La variable discrète  $q(t)$  est constante par intervalles de temps  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ , et est donc entièrement donnée par les séquences des points de discontinuité  $\{t_i\}$ ,  $i = 0, \dots, N$  ( $N$  est le nombre de commutations) et de ses valeurs successives qui traduisent l'état discret  $q(t)$ . Pour chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  est associé un système dynamique continu décrivant la trajectoire  $x_i(t)$ . Ainsi, pour bien décrire la séquence des instants de transition du système on définit une trajectoire temporisée.

**Définition 8.** Une trajectoire temporisée  $\tau$  d'un SDH est une séquence finie ou infinie d'intervalles sur lesquels les variables du système hybride  $q(t)$  et  $x(t)$  évoluent continûment.

$$\tau = (t_0, t_1, \dots, t_N)$$

On peut la définir aussi comme une séquence non vide semi-ouverte.

$$\tau = ([t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots) = (\tau_0, \tau_1, \dots)$$

Une trajectoire temporisée  $\tau$  peut être séparée en quatre classes principales :

- Finie et limitée : le système hybride effectue un nombre fini de transitions en un temps fini.
- Finie et illimitée : le système hybride effectue un nombre fini de transitions en un temps infini.
- Infinie et illimitée : le système hybride effectue une infinité de transitions en un temps infini.
- Infinie et limitée : le système hybride effectue une infinité de transitions en un temps fini (exécution de Zenon).

Nous pouvons maintenant définir la notion d'exécution d'un SDH. Une trajectoire de l'état hybride, nommée aussi exécution hybride, d'un SDH est le triplet  $(\tau, q, x)$  formé par la trajectoire temporisée hybride  $\tau = ([t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots)$ , la séquence d'états discrets  $q$  et la séquence  $x$  absolument continue et différentiable dans le temps de valeur dans  $\mathbb{R}^n$ . Les bornes des intervalles de la trajectoire temporisée  $\tau$  représentent les instants auxquels les transitions se produisent.

**Exemple 3.** Prenons comme exemple une balle de masse  $m$  soumise à l'action de la gravité terrestre  $g$  située à une hauteur  $h_0$  avec une vitesse initiale nulle [85]. L'attitude de la balle  $h(t)$  suit donc l'équation différentielle  $m\ddot{h} = -mg$ . Lors du contact avec le sol la balle perd une fraction de son énergie, et sa vitesse change instantanément en  $\dot{h}(t^+) = -c\dot{h}(t^-)$  avec  $0 < c < 1$ , le coefficient de restitution d'énergie.

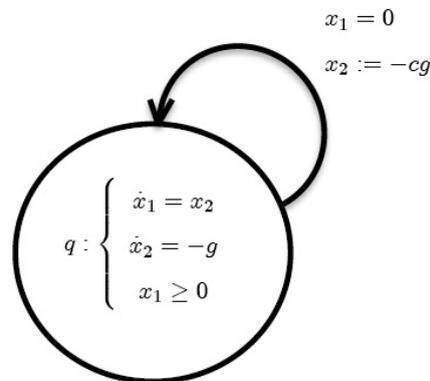


FIGURE 1.10 – Exemple de la balle bondissante

Posons :  $x_1(t) = h(t)$  et  $x_2(t) = \dot{h}(t)$  nous obtenons l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g \end{cases}$$

L'exemple de la balle rebondissante correspond à un système hybride avec un seul mode ( $Q = q$ ) et une seule transition  $(q, \sigma, q)$  (due la condition de  $G(q, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 = 0\}$  et  $X(q) = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0\}$ ). Lors du franchissement de la transition, la variable continue  $x_2$  est actualisée par  $-cx_2$ .

### 1.3.5 Les classes des SDH

Plusieurs efforts ont porté sur l'étude des classes des SDH. En effet, le formalisme des SDH est très général et englobe de nombreuses classes de modèles telles que les systèmes à

commutations [48, 44, 131], les systèmes affines par morceaux [35], les SDH stochastiques [43], les SDH impulsifs [78]. . . Par conséquent, nous présentons dans ce travail celles qui sont les plus courantes dans la littérature et dans la réalité. Il s'agit des systèmes à commutations et des systèmes dynamiques affines par morceaux.

### Systèmes dynamiques hybrides à commutations

Les systèmes à commutation (SAC) représentent une large classe de SDH. Cette classe est définie en général par la donnée d'un ensemble de modèles continus correspondant aux modes discrets du système et une loi de commutation permettant de passer d'un mode de fonctionnement à un autre. Pour cette raison, on peut dire que ces systèmes sont des systèmes hybrides où la variable discrète  $q(t)$  n'est pas vue comme une variable d'état discrète mais comme une variable de contrôle de la dynamique continue.

Nous avons mentionné dans les paragraphes précédents que le passage d'un mode discret à l'autre peut se faire par un changement de la dynamique continue (phénomène de commutation), ou par un changement de l'état à un instant donné (un phénomène de saut). Chacun de ces phénomènes peut se produire de façon autonome ou contrôlée. Le franchissement d'une commutation autonome est déclenché par des variables continues atteignant un certain seuil. Lorsque le franchissement est forcé par un événement provenant de l'extérieur ou par un événement temporel on parlera d'une commutation contrôlable.

Selon la classification de Branicky, les SAC peuvent être séparés en deux classes [48] :

- Systèmes hybrides autonomes à commutation avec ou sans saut [12, 64, 122].
- Systèmes hybrides contrôlés à commutation avec ou sans saut [25, 47, 139].

Dans cette classification, les termes "autonome" et "contrôlé" dépendent du système (c.à.d. le système qui est autonome et non la commutation).

**Systèmes hybrides autonomes à commutation avec ou sans saut** Les systèmes hybrides autonomes à commutation se décrivent par l'évolution de la variable continue  $x(t)$  régie par une équation différentielle sans entrée (un système autonome) et par l'évolution de l'état discret  $q(t)$  définie par une loi de commutation permettant le passage d'un mode à l'autre. Ces commutations sont présentées par des contraintes temporelles, des variables continues atteignant un certain seuil et/ou par des variables externes. Lorsque la variable  $x(t)$  passe de façon discontinue de sa valeur courante à une autre, le système est dit avec saut.

Les sauts des systèmes à commutations peuvent être dus à une variation physique d'énergie dans le système d'origine comme dans le cas des systèmes impulsionsnels [124] qui sont une classe particulière de systèmes à commutations avec sauts. Ce sont des systèmes possédant un seul mode et une transition autorisant la réinitialisation de la variable continue via la fonction de reset  $Re$ . A titre d'exemple, on considère l'exemple classique d'une balle rebondissant (présenté précédemment).

Formellement, un système autonome à commutation est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_q(x(t)) \\ y = h_q(x(t)) \end{cases} \quad (1.12)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état continu,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système,  $q$  est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices  $q \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$ , avec  $s$  le nombre de sous-systèmes continus et  $f_q$  les champs des vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système.

**Systèmes hybrides contrôlés à commutation avec ou sans saut** La classe des systèmes hybrides contrôlés à commutations est une classe de SDH caractérisée par un état hybride composé d'un état continu  $x(t)$  où l'évolution est régie par une collection de sous-systèmes continus (linéaire ou non linéaire) et d'un état discret  $q(t)$  où l'évolution est régie par une loi de commutation.

Les systèmes à commutations contrôlés en temps continu sont représentés mathématiquement dans le cas non linéaire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_q(x(t), u(t)) \\ y = h_q(x(t)) \end{cases} \quad (1.13)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état continu,  $u \in \mathbb{R}^p$  est l'entrée du système,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système,  $q$  est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices  $q \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$ , avec  $s$  le nombre de sous-systèmes continus,  $f_q$  les champs des vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système.

A titre d'exemple, on considère un véhicule motorisé en déplacement sur un axe [34]. On note  $x_1(t)$  la position du véhicule sur l'axe et  $x_2(t)$  sa vitesse de déplacement. Le conducteur agit sur ce véhicule de deux façons différentes. D'abord, via la pédale d'accélération, il contrôle l'alimentation en carburant représentée par la variable  $u(t) \in [0, u_{max}]$ , ensuite avec la boîte à vitesses, il change le rapport actif de la vitesse.

Pour simplifier le modèle du système véhicule, on suppose que la boîte à vitesses a seulement deux rapports actifs que l'on note  $q(t) \in \{1, 2\}$  et que le conducteur peut passer ces rapports de vitesse librement. Le système est alors décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t)g_q(x_2(t)) - kx_2(t) \end{cases}$$

Les deux rapports de la boîte de vitesse sont caractérisés par les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  (figure (1.11)). Elles représentent le rendement du moteur et relient l'accélération du véhicule, sa vitesse, l'apport de carburant et le rapport de sélection.

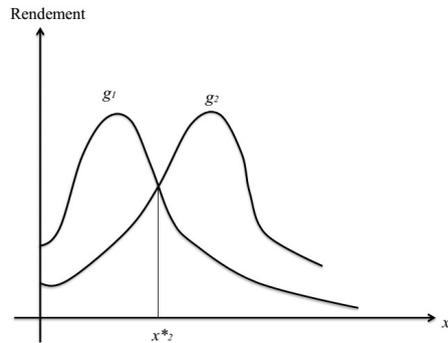


FIGURE 1.11 – Caractéristique de la boîte de vitesse

D'après la définition (7), le véhicule peut donc être modélisé par le système hybride suivant :

$$Q = \{1, 2\}.$$

$$\mathcal{T} = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

$$Inv_1 = Inv_2 = \mathbb{R}^2.$$

$$U_1 = U_2 = [0, u_{max}]$$

$$f_q(x_1, x_2, u) = (x_2(t), u(t)g_q(x_2(t)) - kx_2(t)), q \in Q.$$

$$G_{(1,2)} = G_{(2,1)} = \mathbb{R}^2.$$

$$Re_{(1,2)} = Re_{(2,1)} = x.$$

### Systèmes dynamiques affines par morceaux :

Les systèmes dynamiques affines par morceaux sont utilisés pour modéliser un grand nombre de processus physiques, ou pour approximer une dynamique non linéaire via la linéarisation du comportement non linéaire en différents points de fonctionnement. Cette classe présente une classe particulière des SDH, caractérisée par l'évolution d'un ensemble de sous-systèmes linéaires (affine) partageant un même état continu. Chaque dynamique est définie dans une région (sous-domaines d'invariant  $X(q), q \in Q$ ) déterminée par une partition de l'espace entrée/état du système. Ainsi, l'ensemble des domaines est délimité par des frontières où les sous-systèmes peuvent évoluer. Ces limites constituent les conditions portées sur l'invariant définissant le domaine de validité de chaque sous-système.

La figure (1.12) montre un exemple de trajectoire du vecteur d'état continu  $x(t)$  dans deux régions voisines  $D_{q_1}$  et  $D_{q_2}$  avec deux dynamiques continues  $S_{q_1}$  et  $S_{q_2}$ . Si  $x(t_0)$  appartient à l'intérieur du domaine  $D_{q_1}$ , alors  $x(t)$  est solution de l'équation différentielle associée au sous-système  $S_{q_1}$  jusqu'à l'instant  $t_1$  où  $x(t)$  atteint la frontière séparant le domaine  $D_{q_1}$  du domaine  $D_{q_2}$ , alors  $x(t)$  devient solution de l'équation différentielle associée au sous-système  $S_{q_2}$ .

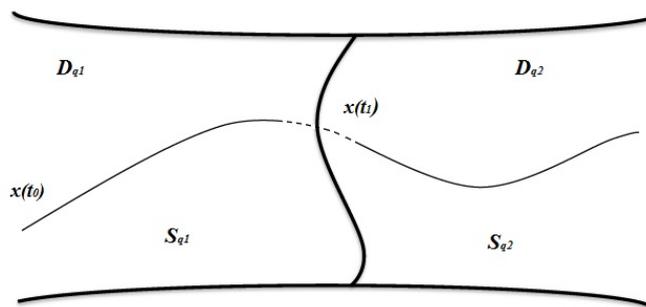


FIGURE 1.12 – Trajectoire d'état continu  $x(t)$  dans l'espace d'état

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre présente une introduction aux systèmes à événements discrets et les systèmes dynamiques hybrides dans lesquels nous souhaitons orienter nos travaux. Nous avons donné dans la première partie du chapitre un aperçu sur les systèmes à événements discrets en mettant l'accent sur les RdP, formalisme sur lequel est basé le modèle développé dans nos travaux. Ensuite, une définition générale a été présentée permettant de passer en revue une large classe des systèmes dynamiques hybrides. Nous avons présenté également quelques notions relatives aux systèmes hybrides tels que la notion d'exécution et les phénomènes hybrides. La dernière partie du chapitre a été consacré aux différentes approches de modélisation utilisées dans le développement du modèle de systèmes hybrides.

Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons aux méthodes d'analyse d'observabilité et synthèse d'observateur pour les SED et les SDH.



# Chapitre 2

## Etat de l'art sur l'observation des SED et SDH

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Principe d'observation</b>	<b>40</b>
<b>2.3</b>	<b>Observabilité</b>	<b>41</b>
2.3.1	Observabilité des systèmes linéaires	41
2.3.2	Observabilité des systèmes non linéaires :	41
<b>2.4</b>	<b>Observabilité et observateurs pour les systèmes à évènements discrets</b>	<b>42</b>
2.4.1	Observabilité des systèmes à évènements discrets	42
2.4.2	Observateurs pour les systèmes à évènements discrets	44
<b>2.5</b>	<b>Observabilité des systèmes dynamiques hybrides</b>	<b>45</b>
2.5.1	Observabilité des systèmes hybrides linéaires à commutations	46
2.5.2	Observabilité des systèmes hybrides non linéaires à commutations	54
<b>2.6</b>	<b>Synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides</b>	<b>56</b>
2.6.1	Observateur avec état discret connu	56
2.6.2	Observateur avec état continu connu	58
2.6.3	Observateur pour l'état hybride	58
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un état de l'art sur l'observabilité et la synthèse d'observateurs pour quelques classes de SED et de SDH. Nous rappellerons dans un premier temps le principe d'estimation et quelques concepts d'observabilité des systèmes continus linéaires et non linéaires. Nous présentons dans la deuxième partie quelques travaux concernant l'observation des SED. Ensuite, plusieurs approches concernant l'observabilité de quelques classes des SDH en temps continu et discret seront détaillées. Il s'agit des systèmes hybrides à commutations linéaires et non linéaires auxquels nous nous intéressons plus particulièrement dans cette thèse. Finalement, nous terminons par un aperçu sur la conception des observateurs afin d'estimer l'état continu et/ou l'état discret des SDH.

## 2.2 Principe d'observation

Le comportement dynamique d'un système physique peut être décrit à l'aide d'un modèle mathématique qui fait intervenir un ensemble d'équations différentielles mettant en relation un nombre fini de variables internes, appelées également variables d'état. L'évolution temporelle du système est donc caractérisée par l'évolution de ses variables d'état qui dépendent des signaux d'excitation appliqués et des conditions initiales [111]. La connaissance de ces états nécessite la disponibilité de capteurs physiques, provenant de l'instrumentation. Ces capteurs peuvent parfois être soumis à des contraintes d'ordre technique, technologique ou économique (instrumentation difficile du système, capteur indisponible ou très onéreux,...). Par contre, le besoin d'information sur l'état est motivé par le fait qu'elle est une étape importante voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour la modélisation (identification), la détection et le diagnostic de défauts ou la supervision des systèmes industriels [37]. Ceci est illustré par la figure (2.1) [38, 140]. Les processus physiques sont très

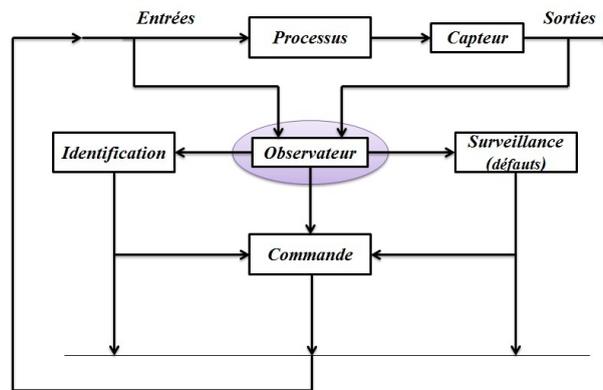


FIGURE 2.1 – Schémas de commande d'un système industriel

souvent représentés par des modèles décrits sous la forme suivante (représentation d'état dans le cas linéaire) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie.  $A, B, C$  sont des matrices constantes de dimension appropriée.

En général, seules les variables d'entrée et de sortie sont connues. La question que l'on doit poser est la suivante : "Peut-on déterminer l'état du système à partir de la connaissance des variables d'entrée-sortie sur un intervalle de temps fini ?" Si la réponse est oui, alors le système est dit observable. Dans ce cas, un observateur ou estimateur d'état, qui donne une estimation de l'état complet, à partir des mesures et des entrées, doit alors être utilisé. Un observateur peut également servir à la surveillance des systèmes, en particulier la détection de panne, ou même à l'identification de paramètres, en considérant un système augmenté, avec ces paramètres comme nouvelles variables d'état [140].

Un observateur est un système dynamique qui fournit en sortie une estimation de l'état du processus à partir des entrées, des sorties et du modèle du système. Pour les systèmes linéaires, les observateurs ont habituellement la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Le gain de l'observateur  $L$  est à déterminer pour que l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  converge vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. Lorsque cette propriété est satisfaite, l'observateur est dit asymptotique. En conséquence, il faudra choisir  $L$  telle que la matrice  $A - LC$  est stable. Si la paire  $(A, C)$  est observable, alors les valeurs propres de  $A - LC$  peuvent être fixées arbitrairement.

## 2.3 Observabilité

Dans cette section, nous discuterons certaines conditions requises sur le système pour avoir les solutions possibles au problème d'observation. Ces conditions correspondent à ce que l'on appelle généralement "observabilité du système". L'observabilité d'un système, est la possibilité de reconstruire l'état initial à partir des mesures et des entrées effectuées sur le système pendant un intervalle de temps fini.

Avant de passer en revue différents travaux concernant l'observabilité des SED et des SDH, nous rappellerons la notion d'observabilité d'un système linéaire continu, et nous en donnerons également la généralisation aux systèmes non linéaires.

### 2.3.1 Observabilité des systèmes linéaires

La notion d'observabilité a été introduite par Kalman [90] pour les systèmes linéaires. Le système (2.1) est dit observable à l'instant  $t_1$  si à partir de la connaissance du vecteur de sortie  $y$  et du vecteur d'entrée  $u$ , il est possible en un temps fini  $t_2 > t_1$  de déterminer l'état  $x(t_1)$ . Le critère d'observabilité de Kalman est donné par la matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

La dimension du sous-espace d'état observable est égale au rang de la matrice d'observabilité. Le résultat classique d'observabilité du système (2.1) énoncé par Kalman est le suivant :

**Théorème 1.** [90] Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité pour (2.1) est :

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n$$

avec  $n$  étant la dimension du vecteur d'état  $x(t)$ .

**Remarque 1.** A noter que l'observabilité du système (2.1) est indépendante de l'entrée  $u$  et/ou de la matrice  $B$ .

### 2.3.2 Observabilité des systèmes non linéaires :

L'observabilité est caractérisée par le fait qu'à partir de la sortie mesurée, il faut être capable de discerner les différents états initiaux. De ce fait, l'observabilité des systèmes non linéaires est définie à partir de la notion d'indiscernabilité [41, 81]. Un système non linéaire est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente l'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  l'entrée et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  la sortie du système. Les champs de vecteurs  $f(.,.)$  et  $h(t)$  sont des fonctions analytiques supposées suffisamment différentiables.

**Définition 9.** [41] (*Indiscernabilité*) Deux états initiaux  $x(t_0) = x_1$  et  $x(t_0) = x_2$  sont dit indiscernables pour le système (2.3) si  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , les sorties correspondantes  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont identiques quelle que soit l'entrée admissible  $u(t)$  du système.

La notion d'indiscernabilité de deux conditions initiales a permis de donner une nouvelle définition de l'observabilité :

**Définition 10.** [41] (*Observabilité*) Le système non linéaire (2.3) est dit observable s'il n'admet pas de paire indiscernable.

Un système est observable s'il n'existe pas d'états initiaux distincts qui ne puissent être distingués à partir de la sortie du système. Contrairement au cas linéaire.

Une condition équivalente à celle du théorème (1), est donnée pour le système non linéaire (2.3) par le théorème suivant :

**Théorème 2.** [102] Le système non linéaire (2.3) est dit observable si :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix} = n$$

où  $L_f h$  est la dérivée de Lie de la fonction  $h$  dans la direction du champ de vecteurs  $f$ .

**Remarque 2.** La condition donnée par le théorème (1) peut être obtenue par la condition du théorème (2), en posant :

$f(x, u) = Ax + Bu$  et  $h(x) = y = Cx$ , Ce qui signifie que :

$$\begin{cases} dh(x) = C \\ dL_f h = d\left(\frac{dh}{dx}\dot{x}\right) = d(CAx) = CA \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h = CA^{n-1} \end{cases} \quad (2.4)$$

## 2.4 Observabilité et observateurs pour les systèmes à évènements discrets

### 2.4.1 Observabilité des systèmes à évènements discrets

L'observabilité est une propriété importante des systèmes dynamiques, car elle implique la possibilité d'estimer les états du système qui ne peuvent être mesurés directement. L'observabilité est définie dans les systèmes continus linéaires comme la possibilité de déterminer l'état initial du système en un temps fini en utilisant la connaissance des entrées du système, des sorties et de la structure. Dans le domaine des SED, plusieurs définitions et notions d'observabilité ont été présentées.

Pour les SED modélisés par les automates à états finis, Ramadge [117] aborde le problème de la détermination de l'état actuel du système sous l'hypothèse de la connaissance partielle

de l'état du système et d'une partie des événements. Dans [112], l'observabilité est définie comme ayant une parfaite connaissance de l'état actuel à des instant séparés par un nombre borné de transitions à partir de l'observation d'un sous-ensemble des événements.

Une approche présentée dans [49] pour reconstruire un ensemble des états cohérents avec le comportement observé à l'aide des informations fournies par les séquences d'observations précédentes. Certaines définitions de l'observabilité ont été exposées en terme de langage régulier, où le concept d'observabilité a été lié au problème de l'existence de superviseur. Par exemple, dans [138] le problème de l'observabilité a été étudié de point du vue du contrôle utilisant des machines à états finis sous l'observation partielle d'événements.

Une propriété appelée observabilité locale est donnée par Tripakis dans [129], Tripakis a montré que la propriété est décidable pour les langages arbitraires quand les mots sont d'une longueur limitée. Au contraire, dans le cas où la longueur d'un mot peut être arbitrairement longue, la propriété est indécidable même lorsque les langages sont réguliers. Finalement, l'observabilité est définie dans [109] comme la capacité de déterminer l'état actuel du système basé uniquement sur la sortie du système et les événements liés à l'état actuel courant.

Dans le cadre des SED représentés par des RdP, le problème de l'observabilité a attiré beaucoup d'attention et plusieurs résultats sont disponibles dans la littérature. En général, les capteurs dans un RdP peuvent être classés en deux grandes catégories [121] : capteurs de places (par exemple, des capteurs qui comptent les jetons contenus dans une place, par exemple, les capteurs de vision) et des capteurs de transitions (capteurs qui peuvent détecter l'occurrence d'un événement, par exemple, des détecteurs de mouvement). En effet, plusieurs travaux ont été présentés dans le cadre d'estimation d'état notamment dans le cas où seulement des informations partielles sur les transitions sont disponibles.

En particulier, dans [76], plusieurs notions d'observabilité ont été présentées. La notion, "uniformément observable" signifie qu'il possible de récupérer le marquage des places s'il existe une observation de séquence de franchissement et si le marquage initial est connu. Contrairement à l'observabilité uniforme qui repose sur la connaissance du marquage initial, l'observabilité structurelle est donnée dans le même papier [76] et ne dépend que de la structure du RdP. L'observabilité structurelle est définie de telle sorte que l'état actuel peut être reconstruit s'il existe une observation de séquence de franchissement pour n'importe quel marquage initial. Une autre définition de l'observabilité a été donnée dans [120] comme la possibilité de récupérer le marquage initial d'un RdP lorsque, seules des informations partielles de la séquence de franchissement de transitions sont disponibles.

Dans le cas où les capteurs des places et des transitions sont disponibles, l'estimation du vecteur du marquage doit être unique et exact. Dans ce cas, le RdP dite un RdP partiellement observable. Dans ce contexte, une notion d'observabilité structurelle est formulée dans [121] comme la capacité de déterminer de façon unique le vecteur du marquage à chaque instant, en se basant sur la connaissance du marquage initiale et sur les informations fournies par les capteurs des places et des transitions. Cette approche a été utilisée pour choisir le nombre minimal des capteurs afin de maintenir l'observabilité structurelle.

Dans un RdP, les changements du marquage se font par les franchissements des transitions. Ainsi, si chaque changement produit une modification dans le symbole de sortie, alors

l'apparition d'un événement du système peut être détectée par ces modifications. Cela signifie que les informations fournies par les capteurs des places sont suffisantes pour distinguer le passage d'un état à un autre et, en conséquence, la détection des franchissements des transitions. Cette discussion motive la notion de détectabilité des événements. Cette notion est définie comme suite :

**Définition 11.** *Un RdP est dit événement détectable si tout franchissement de transitions peut être déterminé uniquement en se basant sur des informations fournies par les capteurs des places et des transitions.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la notion de détectabilité des événements sont données dans le lemme suivant :

**Lemme 1.** [3, 101] *Un RdP est dit événement détectable si et seulement si :*

1.  $\forall t_i, t_j \in T$  tel que  $\eta(t_i) = \eta(t_j)$  ou  $\eta(t_i) = \varepsilon \Rightarrow \varphi W(:, i) \neq \varphi W(:, j)$ , et
2.  $\forall t_x \in T \Rightarrow \varphi W(:, x) \neq 0$ .

Avec  $\eta(t)$  est une fonction de franchissement de la transition  $t$ ,  $\varepsilon$  représente une transition non observable et  $\varphi W(:, i)$  est la  $i^{eme}$  colonne de la matrice formée par la ligne de la matrice d'incidence  $W$  correspondant aux places mesurables du RdP.

Ce résultat peut être expliqué comme suit : Si la matrice  $\varphi W$  a une colonne nulle, cela veut dire que la transition associée à cette colonne n'a pas une place d'entrée ou de sortie mesurable et dans ce cas, le franchissement de cette transition ne produit pas un changement dans la sortie. Donc, le franchissement de la transition ne peut pas être détecté. D'autre part, s'il y a deux colonnes égales dans la matrice  $\varphi W$ , les transitions correspondantes ont une ou plusieurs places mesurables communes et cela veut dire que leurs franchissements produisent le même effet dans la sortie du système. Alors, les franchissements de ces transitions ne peuvent pas être distingués les uns des autres, à moins que leurs symboles d'entrée soient différents. En se basant sur la notion de détectabilité des événements, une caractérisation géométrique de l'observabilité a été généralisée dans [101] de sorte que la séquence de marquage atteinte par le système peut être déterminée de façon unique pour toute séquence des signaux d'entrée-sortie. Une autre définition de l'observabilité a été donnée dans [120] comme la possibilité de récupérer le marquage initial d'un RdP lorsque seules des informations partielles de la séquence de franchissement de transitions sont disponibles.

## 2.4.2 Observateurs pour les systèmes à évènements discrets

Le problème de la synthèse d'observateur pour les systèmes à évènements discrets n'est pas limité à l'estimation d'état, mais aussi au problème de la reconstitution de la séquence de franchissement de transitions qui conduisent à un état donné.

Pour les SED représentés par des automates finis, Ramadge [117] a été le premier à montrer comment un observateur pourrait être synthétisé pour un système partiellement observé. Caines et al [49] ont montré comment il est possible d'utiliser l'information contenue dans la séquence d'observations passées pour calculer l'ensemble des états cohérents avec l'observation. Une approche similaire a également été présentée dans [144] lorsque la définition d'observateurs est donnée dans le cadre de surveillance par des contrôleurs dynamiques. Dans [112], une approche a été proposée pour la construction d'observateurs afin de reconstruire l'état des automates finis après l'observation d'un mot de longueur finie. Dans le même papier, les auteurs montrent que l'observateur peut avoir un nombre exponentiel d'états.

Pour les SED modélisés par les RdP, le problème d'estimation d'état revient à déterminer

le vecteur du marquage des places. Les places dans un RdP représentent des conditions spécifiques pour chaque état du système, elles peuvent correspondre, soit à l'état booléen d'un dispositif (par exemple : marche, arrêt, panne, une ressource est disponible ou pas, . . .), soit à une quantité physique (par exemple le nombre de pièces dans un stock, nombre de bobines, . . .). Les transitions représentent les actions qui peuvent provoquer le changement d'état du système (les événements discrets). Comme mentionné précédemment, les capteurs dans un RdP peuvent être classés en deux grandes catégories [121] : capteurs des places et capteurs des transitions. En effet, plusieurs travaux ont été présentés dans le cadre d'estimation d'état notamment dans le cas où seules des informations partielles sur les transitions sont disponibles. Dans ce cas l'estimation de l'état généralement n'est pas unique, car les informations peuvent être très limitées et donc l'estimation de l'état est représentée par un ensemble des marquages qui sont cohérents avec les séquences d'observations de système.

Un algorithme a été présenté par Guia [76], pour estimer le marquage actuel d'un RdP basée sur l'observation des transitions et la connaissance de la structure du réseau mais sans connaissance du marquage initial. Dans un autre travail, Guia et al [77] ont abordé le problème de l'estimation du marquage d'un RdP dans la présence des transitions non déterministes (transitions qui partagent la même étiquette et qui peuvent être franchies simultanément). Les auteurs montrent qu'un ensemble de marquages cohérents peut être la solution d'un système linéaire. Ce système linéaire dépend de certains paramètres qui peuvent être calculés de manière récursive. Cette approche a été utilisée dans [56] pour résoudre le problème d'estimation d'état pour les RdPs avec transitions silencieuses (transitions dont le franchissement ne peut pas être observé).

Dans [120], Ramirez et al tentent de résoudre le problème du calcul du marquage initial d'un RdP lorsque seulement des informations partielles de la séquence de franchissement de transitions sont disponibles. Dans ce cas, une définition de l'observabilité a été donnée et un observateur prend en compte les informations de sortie du système a été synthétisé. Une procédure de construction d'un observateur asymptotique sous l'observation partielle de l'état est fournie dans [4] pour une classe de SED représentée par les RdP interprétés.

Dans le cas où les capteurs des places et des transitions sont disponibles, l'estimation du vecteur du marquage doit être unique et exact. Un observateur d'ordre réduit a été proposé dans [93] pour un RdP généralisé où l'évolution du jeton dans le réseau est donnée par une équation d'état similaire à celle utilisée pour les systèmes dynamiques discrets. Ce travail est à la base de nos travaux dans le prochain chapitre.

## 2.5 Observabilité des systèmes dynamiques hybrides

Les systèmes dynamiques hybrides faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et événementiel. C'est une collaboration de deux sous modèles, le premier décrit l'aspect événementiel, qu'on appellera partie discrète, et le deuxième est formalisé par des équations d'état, qu'on appellera partie continue [143].

Parmi les problèmes à traiter pour les SDH, celui de l'observation est particulièrement important pour le contrôle et le diagnostic. La notion d'observabilité dans les SDH concerne à la fois l'évolution de l'état continu et l'état discret, cela consiste en l'établissement des conditions sur lesquelles il est possible de reconstruire d'une manière unique les états du SDH à partir des mesures disponibles des sorties et des entrées du système hybride.

L'étude d'observabilité des systèmes dynamiques hybrides a déjà attiré beaucoup l'attention des chercheurs et a été étudié avec un intérêt particulier. Toutefois, ce problème est un problème non encore complètement résolu. En effet, diverses recherches se sont focalisées sur l'étude et l'analyse d'observabilité des systèmes hybrides. Parmi lesquels on peut citer [71] dont les auteurs ont étudié l'observabilité et la contrôlabilité de la classe des systèmes linéaires à commutation en temps continu où les commutations sont connues et périodiques. Une méthodologie a été présentée dans [26, 27] pour la conception d'observateurs pour les systèmes hybrides. Dans [134, 135], une définition de l'observabilité basée sur le concept de l'indiscernabilité des états initiaux continus pour la classe de systèmes à commutations avec saut en temps continu a été donnée. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité de cette classe ont été présentées et sont vérifiées par des tests de rang de matrices liées aux paramètres du système.

Une approche présentée dans [127], où l'observabilité est considérée comme propriété duale de l'atteignabilité. Les auteurs ont donné des conditions d'observabilité pour la classe particulière des systèmes à commutations où l'état discret est connu. Dans [23], l'observabilité d'un système à commutation en temps discret sans imposer un temps de séjour minimum dans chaque mode est étudiée. Selon la possibilité d'observer le mode courant, et la possibilité de récupérer l'état continu ou la séquence de mode, plusieurs concepts d'observabilité sont définis.

Dans [70], les auteurs ont introduit la notion de  $\Delta$ -observabilité, qui est basée sur la reconstruction de l'état hybride au moins dans certains (mais pas nécessairement tous) intervalles de temps. Il faut que  $\delta > \Delta$ , où  $\Delta$  est le temps limite (après cela le  $\Delta$ -observateur est capable d'estimer l'état du système) et où  $\delta$  représente le temps de séjour minimum. Il faut noter que l'existence du  $\Delta$ -observateur nécessite que le système hybride soit  $\Delta$ -observable, par contre, la  $\Delta$ -observabilité n'implique pas l'existence de  $\Delta$ -observateur.

Une approche algébrique a été adaptée dans [53] à une classe de systèmes hybrides linéaires dont l'évolution de l'état discret est régit par une fonction de commutation linéaire. Les auteurs présentent dans le même papier, des conditions géométriques pour des systèmes hybrides non linéaires avec une fonction de commutation non linéaire. Un autre travail pour les systèmes hybrides non linéaires a été donné dans [29, 30]; il porte sur des systèmes dont le mode a une dynamique linéaire, contrairement à l'état continu. Les instants de commutation y sont, à la différence du mode, supposés connus. Un observateur à modes glissants est également synthétisé. Un nouveau concept d'observabilité pour une classe de systèmes hybrides où les sous-systèmes ne sont pas observables a été présenté dans [128].

L'objectif de cette partie est de donner quelques approches concernant l'observabilité de quelques classes de systèmes dynamiques hybrides les plus souvent rencontrés dans la littérature et dans la réalité. Il s'agit des systèmes à commutations linéaires et non linéaires.

### 2.5.1 Observabilité des systèmes hybrides linéaires à commutations

Cette section est réservée à la présentation de quelques travaux récents consacrés à l'observabilité de quelques systèmes à commutation (SAC) qui représentent une large classe de SDH. Il s'agit des systèmes hybrides linéaires autonomes à commutations, des systèmes

hybrides linéaires contrôlés à commutations et des systèmes hybrides non linéaires à commutations.

### Observabilité des systèmes linéaires autonomes à commutations

Contrairement aux systèmes linéaires classiques, il existe des différences entre le cas temps discret et continu pour les systèmes à commutations linéaires, et il est donc obligatoire de les étudier indépendamment. Nous allons présenter dans un premier temps les résultats concernant l'observabilité de cette classe de systèmes en temps continu. Ensuite, le cas temps discret sera considéré.

**Cas temps continu** Un système hybride linéaire autonome à commutations en temps continu est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) \\ y(t) = C_q x(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état continu,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système,  $q$  est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices  $q \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$ , avec  $s$  est le nombre de sous-systèmes continus,  $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $C_q \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

Nous allons présenter les conditions d'observabilité proposées dans [134]. Dans ce travail, une analyse d'observabilité a été principalement réalisée sous l'hypothèse d'un temps de séjour minimum  $\delta_m > 0$  séparant deux commutations consécutives. Le but de cette approche est de récupérer l'état hybride initial  $(q_0, x_0)$ , et le premier instant de commutation, en utilisant la sortie  $y(t)$  et ses dérivées successives. Pour comprendre ce résultat, nous allons d'abord donner quelques définitions.

**Définition 12.** (Matrice d'observabilité étendue d'ordre  $\gamma$ ) Pour un sous-système  $S_q = (A_q, C_q)$ , la matrice définie par :

$$\mathcal{O}_\gamma(i) = \begin{bmatrix} C_q \\ C_q A_q \\ \vdots \\ C_q A_q^{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

est appelée matrice d'observabilité étendue.

**Définition 13.** (Matrice commune d'observabilité étendue) Pour deux sous-systèmes différents  $S_{q_1}, S_{q_2}$ , la matrice commune d'observabilité étendue associée aux deux sous-systèmes est obtenue par la concaténation de deux matrices d'observabilité étendues :

$$\mathcal{O}_\gamma(q_1, q_2) = [ \mathcal{O}_\gamma(q_1) \quad \mathcal{O}_\gamma(q_2) ]$$

**Définition 14.** (Indice commun d'observabilité) L'indice commun d'observabilité est le plus petit entier  $\gamma$  tel que le rang de la matrice  $\mathcal{O}_\gamma(q_1, q_2)$  cesse d'augmenter. Il est noté par  $\gamma(q_1, q_2)$ .

**Observabilité de l'état hybride initial** On commence par l'observabilité de l'état initial. Rappelons que deux états hybrides initiaux  $(q_1, x_1); (q_2, x_2)$  sont indiscernables sur l'intervalle  $t \in [t_0, t_1]$  si leurs sorties respectives sont identiques, c'est-à-dire :

$$C_{q_1} e^{A_{q_1}(t-t_0)} x_1 = C_{q_2} e^{A_{q_2}(t-t_0)} x_2 \quad t \in [t_0, t_1] \quad (2.6)$$

On réécrit cette condition après le développement en série de Taylor autour de  $t_0$  des deux côtés de l'égalité :

$$C_{q_1} A_{q_1}^i x_1 = C_{q_2} A_{q_2}^i x_2 \quad i = \{0, 1, 2, \dots\}$$

En utilisant la notion de matrice commune d'observabilité étendue et l'indice commun d'observabilité  $\gamma = \max_{q_1 \neq q_2 \in Q} \{\gamma(q_1, q_2)\}$ , l'état initial est observable si :

$$\forall q_1, q_2 \in Q; \text{ si } q_1 \neq q_2, \text{ rang}([\mathcal{O}_\gamma(q_1) \quad \mathcal{O}_\gamma(q_2)]) = 2n$$

Ainsi la condition d'indiscernabilité peut être exprimée par :

$$\mathcal{Y}_\gamma(t_0) = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \vdots \\ y^{\gamma-1}(t_0) \end{bmatrix} = \mathcal{O}_\gamma(q_1(t_0))x_1(t_0) = \mathcal{O}_\gamma(q_2(t_0))x_2(t_0) \quad (2.7)$$

Avant d'énoncer le résultat de [134], nous rappelons un résultat bien connu sur la résolution des systèmes linéaires  $Ax = y$ .

**Théorème 3.** *Le système  $Ax = y$  est soluble si et seulement si :*

$$\text{rang}(A) = \text{rang}([\ A \quad y \ ])$$

L'ensemble des solutions  $x$  est donné par :

$$x = A^\dagger y + (I_n - A^\dagger A)z$$

où  $A^\dagger$  est une inverse généralisée de  $A$  et  $z \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur arbitraire.

A partir de l'équation (2.7) et Théorème 3, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

**Lemme 2.** [134] (Observabilité de l'état hybride initial) étant donné le système (2.5), si l'hypothèse de temps séjour est respectée  $t_1 - t_0 < \delta$ , alors l'état hybride initial  $(q(t_0), x(t_0))$  est observable si pour tout  $q_1 \neq q_2 \in \{1, 2, \dots, s\}$ , nous avons :

$$\text{rang}([\mathcal{O}_\gamma(q_1) \quad \mathcal{O}_\gamma(q_2)]) = 2n \quad (2.8)$$

l'état discret initial est donné par :

$$q(t_0) = \{q_i \in Q : \text{rang}([\mathcal{O}_\gamma(q_i) \quad \mathcal{Y}_\gamma(t_0)]) = n\} \quad (2.9)$$

l'état continu initial est donné par :

$$x(t_0) = \mathcal{O}_\gamma q(t_0)^+ \mathcal{Y}_\gamma(t_0) \quad (2.10)$$

où  $()^+$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose donnée par  $()^+ = ((\ )^T)^{-1}(\ )^T$ .

**Remarque 3.**

- La condition  $\text{rang}([\mathcal{O}_\gamma(q_1) \quad \mathcal{O}_\gamma(q_2)]) = 2n$  implique que chaque sous-système linéaire doit être observable, parce qu'elle implique que  $\text{rang}([\mathcal{O}_\gamma(q_1)]) = n$  pour tout  $q_1 \in Q$ .
- La condition  $\text{rang}([\mathcal{O}_\gamma(q_1) \quad \mathcal{O}_\gamma(q_2)]) = 2n$  implique que l'intersection des sous-espaces d'observabilité de chaque paire  $(A_q, C_q)$  de systèmes linéaires doit être triviale.

**Observabilité du premier instant de commutation** Puisque  $q(t)$  est constant entre deux instants de commutation, nous allons nous focaliser sur les conditions pour lesquelles le premier instant de commutation  $t_1$  peut être observé (ou détecté). Les sorties  $y(t)$  sur les intervalles  $[t_0, t_1)$  (avant la commutation) et  $[t_1, t_2)$  (après la commutation) s'expriment comme :

$$y(t) = \begin{cases} C_{q(t_0)} e^{Aq(t_0)(t-t_0)} x(t_0) & \text{pour } t \in [t_0, t_1) \\ C_{q(t_1)} e^{Aq(t_1)(t-t_1)} e^{Aq(t_0)(t_1-t_0)} x(t_0) & \text{pour } t \in [t_1, t_2) \end{cases}$$

L'instant de commutation  $t_1$  est donc indiscernable sur l'intervalle  $[t_1; t)$  si :

$$C_{q(t_0)} e^{Aq(t_0)(t-t_1)} e^{Aq(t_0)(t_1-t_0)} x(t_0) = C_{q(t_1)} e^{Aq(t_1)(t-t_1)} e^{Aq(t_0)(t_1-t_0)} x(t_0)$$

Le développement en série de Taylor autour de  $t_1$  des deux côtés de l'égalité donne :

$$C_{q(t_1)} A_{q(t_1)}^\gamma x(t_1) = C_{q(t_0)} A_{q(t_0)}^\gamma x(t_0), \quad \gamma = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Nous pouvons exprimer la condition d'indiscernabilité de l'instant  $t_1$  comme :

$$\mathcal{O}_\gamma(q(t_0))x(t_0) = \mathcal{O}_\gamma(q(t_1))x(t_0)$$

Nous pouvons maintenant annoncer le deuxième résultat de Vidal et al :

**Lemme 3.** [134] (*Observabilité du premier instant de commutation*)

étant donné un système à commutations (2.5), si  $t_1 - t_0 < \delta_m > 0$  alors le premier instant de commutation  $t_1$  est observable si pour tout  $q_1 \neq q_2 \in \{1, 2, \dots, s\}$  nous avons :

$$\text{rang}([\mathcal{O}_\gamma(q_1) - \mathcal{O}_\gamma(q_2)]) = n$$

le premier instant de commutation  $t_1$  est donné par :

$$t_1 = \min\{t \mid y_\gamma(t^-) \neq y_\gamma(t^+)\}$$

Une fois l'état hybride initial  $(q(t_0), x(t_0))$  et le premier instant de commutation  $t_1$  obtenus, il est évident que la même démarche sera utilisée pour les commutations suivantes. Il suffit de répéter la même procédure en considérant  $(q(t_1), x(t_1))$  comme le nouvel état initial et l'instant  $t_2$  comme le nouveau premier instant de commutation.

**Cas temps discret** Un système hybride linéaire autonome à commutations en temps discret est donné par :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_q x(k) \\ y(k) = C_q x(k) \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $q \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$  est l'indice du sous-système actif à l'instant de temps  $k$ .

Contrairement à [134], Babaali et Egerstedt [23] ont amélioré l'analyse de l'observabilité du système (2.11) sans imposer un temps de séjour minimum dans chaque mode. Avant de présenter leurs travaux, nous allons présenter la notion de chemin utilisée dans le travail de [23].

Une séquence d'indice de mode (ou une séquence de commutation)  $\theta = q_1 q_2 \dots q_N$  forme un chemin de longueur  $N$  où  $N$  est la longueur de la séquence  $\theta$ . Le chemin  $\theta_{[1;N']}$  représente le chemin obtenu en ne considérant que les  $N'$  premiers modes du chemin  $\theta$  et  $\Theta_N$  désigne l'ensemble des chemins de longueur  $N$ .

Dans [23], l'observabilité des systèmes hybrides linéaires autonomes à commutations en temps

discret (2.11) est formulée en termes de détermination de l'état continu sous un chemin connu et l'état discret sous un chemin inconnu.

Les sorties  $y(k)$ ;  $k = 1, \dots, N$ , à partir de l'état initial  $x_1 \in \mathbb{R}$  suivant le chemin discret  $\theta \in \Theta_N$  sont définies par :

$$\mathcal{Y}_\theta(x_1) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{q_1} \\ C_{q_2} A_{q_1} \\ \vdots \\ C_{q_N} A_{q_{N-1}} \cdots A_{q_1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}_\theta} x_0 \quad (2.12)$$

Nous remarquons que la matrice  $\mathcal{O}_\theta$  est semblable à la matrice d'observabilité de Kalman pour les systèmes linéaires. cette matrice  $\mathcal{O}_\theta$  est la matrice d'observabilité associée au chemin  $\theta \in \Theta_N$ .

Si le chemin  $\theta$  est connu, l'état continu initial  $x_0$  ne peut alors être reconstruit à partir des mesures  $\mathcal{Y}_\theta(x_1)$  que si et seulement si :

$$\text{rang}(\mathcal{O}_\theta) = n.$$

Pour caractériser l'observabilité de l'état lorsque les modes successifs sont connus, [23] ont introduit la notion d'observabilité par chemin.

**Définition 15.** [23] (*Observabilité par chemin*) Un chemin est observable si et seulement si la matrice d'observabilité associée à ce chemin est de rang plein.

L'ensemble des paires  $(A_q, C_q), \dots, (A_s, C_s)$  sont observables sur un chemin si et seulement s'il existe un nombre entier  $N$  tel que tous les chemins de longueur  $N$  sont observables.

Considérons maintenant deux chemins  $\theta^1, \theta^2 \in \Theta_N$  inconnus, avec  $\Theta_N$  l'ensemble de tous les chemins de longueur  $N$ . Les deux chemins différents  $\theta^1$  et  $\theta^2$  sont indiscernables si à partir de deux conditions initiales différentes  $x_1, x_2$ , les sorties associées aux deux chemins sont identiques. Pour cela, Babaali et Egerstedt [23], ont donné une définition pour l'observabilité du mode du système (2.11).

**Définition 16.** [23] Les modes du système (2.11) sont observables sur tout chemin de longueur  $N$  s'il existe un entier  $N'$  tel que pour tout  $\theta^1, \theta^2 \in \Theta_{N+N'}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\theta_{[1,N]}^1 \neq \theta_{[1,N]}^2 \implies \mathcal{Y}_{\theta^1}(x_1) \neq \mathcal{Y}_{\theta^2}(x_2)$$

L'indice d'observabilité en  $N$  du mode est le plus petit indice  $N'$  vérifiant cette condition.

En utilisant la propriété donnée dans le Théorème 3, nous pouvons donc trouver un chemin  $\theta \in \Theta_N$  en utilisant l'équation suivante :

$$\theta = \arg_{\eta \in \Theta_N} \{ \text{rang}([\mathcal{Y}_\eta(x_1) \quad \mathcal{O}_\eta]) = \text{rang}(\mathcal{O}_\eta) \}$$

Les auteurs de [23] se sont également intéressés à l'observabilité de l'état continu en se basant sur la définition suivante :

**Définition 17.** L'état continu du système (2.11) est observable s'il existe un entier  $N$  tel que :  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta_N$ ,

$$x_1 \neq x_2 \implies \mathcal{Y}(\theta_1, x_1) \neq \mathcal{Y}(\theta_2, x_2)$$

En d'autres termes, l'état continu d'un système est observable si n'importe quelle séquence de  $N$  mesures consécutives  $\mathcal{Y}(\theta_1, x_1)$  permet en ne connaissant pas le mode  $q$  de déduire une unique valeur de  $x_1$ .

## Observabilité des systèmes linéaires contrôlés à commutations

Nous nous intéressons dans cette partie à l'observabilité des systèmes linéaires contrôlés à commutations en temps continu ainsi que dans le cas temps discret.

**Cas temps continu** Un système hybride linéaire contrôlé à commutations en temps continu est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) \\ y(t) = C_q x(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état continu,  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée du système,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système,  $q$  est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices  $q \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$ , avec  $s$  est le nombre de sous-systèmes continus,  $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $B_q \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C_q \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

Deux approches seront présentées dans le cadre de l'observabilité des systèmes hybrides linéaires contrôlés en temps continu. La première est celle de Sun et al [127] où la notion observabilité est abordée en terme de conditions permettant de reconstruire l'état initial continu à partir des sorties et des entrées continues sachant que l'état discret est connu. La deuxième approche est algébrique présentée dans [53]. Cette approche est adaptée à une classe de systèmes hybrides dont l'évolution de l'état discret est régie par une fonction de commutation linéaire.

**Approche de Sun et al [127]** Dans l'article de Sun et al [127], les problèmes de commandabilité et d'atteignabilité des systèmes linéaires à commutation (2.13) sont d'abord discutés. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité énoncées par les auteurs ne sont qu'une transposition des conditions déjà établies pour caractériser l'atteignabilité. Pour expliquer ce résultat il est nécessaire de présenter quelques notations.

Nous allons noter  $\mathcal{R}(\Pi)$  pour désigner le sous-espace engendré par les lignes de la matrice  $\Pi$ . Pour deux matrices  $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un sous espace  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  nous définissons :

$$\Gamma_{\Pi_1} S = S + \Pi_1 S + \dots + \Pi_1^{n-1} S \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{\Pi_2} \Gamma_{\Pi_1} S = \Gamma_{\Pi_2} (\Gamma_{\Pi_1} S) \quad (2.15)$$

Le résultat de [127] sur l'observabilité de la classe des systèmes SLS s'énonce comme suit :

**Théorème 4.** [127] (observabilité des systèmes linéaires à commutation) *Le système (2.13) est observable si et seulement si  $\Omega = \mathbb{R}^n$  où*

$$\Omega = \sum_{j=0}^{\infty} \Omega_j; \Omega_1 = \sum_{q \in Q} \mathcal{R}(C_q^T); \text{ et } \Omega_{j+1} = \sum_{q \in Q} \Gamma_{A_q^T} \Omega_j$$

On peut voir assez facilement que ce test d'observabilité est déduit de l'atteignabilité. En effet, au début nous construisons un sous-espace  $\Omega_1$  union de toutes les combinaisons linéaires des lignes des matrices  $C_q^T$ ;  $q = 1, \dots, s$ . Ensuite, à partir de  $\Omega_1$ , nous calculons l'ensemble des sous-espaces atteignables :

$$\Gamma_{A_q^T} \Omega_1 = \Omega_1 + A_q^T \Omega_1 + \dots + (A_q^{n-1})^T \Omega_1$$

L'union des ensembles des sous-espaces atteignables donne  $\Omega_2$ . Nous répétons la même procédure avec  $\Omega_2$  afin obtenir  $\Omega_3$ . Finalement, nous testons si tous les sous-espaces  $\Omega_j = 1, \dots, \infty$  forment  $\mathbb{R}^n$ . Autrement dit  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , l'état continu est observable.

**Approche de Chaib et al [53]** Dans cette approche, l'étude d'observabilité est limitée aux systèmes hybrides bi-modèles c. à. d  $q \in Q = \{1, 2\}$ . Cette approche s'appuie sur la reconstruction de la frontière de la fonction de commutation. L'état discret est régi par :

$$\begin{cases} q = 1 \text{ si } Hx(t) \leq 0 \\ q = 2 \text{ si } Hx(t) > 0 \end{cases}$$

où  $H$  est une matrice  $1 \times n$ . L'hyperplan défini par le noyau de  $H$  sépare donc les deux moitiés de l'espace dans lequel l'état évolue.

Sous l'hypothèse de temps de séjour minimum c'est-à-dire que la durée d'évolution  $\tau_q$  "temps de séjour" pour chaque sous-système de (2.13) est mesurable, la matrice d'observabilité  $\mathbb{O}_q$  de chaque sous système  $q$  est donnée par :

$$\mathbb{O}_q = \begin{pmatrix} C_q \\ C_q A_q \\ \vdots \\ C_q A_q^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Définissons pour tout entier  $r \geq 1$  la matrice suivante :

$$\mathbb{G}_r = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 A_1 & C_2 A_2 \\ \vdots & \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} & C_2 A_2^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Comme on travaille dans un espace de dimension finie  $\mathbb{R}^n$  alors, il existe  $\mu \leq 2n$ , tel que :

$$\text{rang}(\mathbb{G}_r) = \begin{cases} r & \forall r < \mu \\ \mu & \forall r \geq \mu \end{cases} \quad (2.18)$$

Nous appellerons  $\mu$  l'indice global d'observabilité jointe si  $\mu = \text{Max}_{r \geq 1} [\text{rang}(\mathbb{G}_r)]$ , et  $\mathbb{G}_\mu$  la matrice d'observabilité jointe associée au système (2.13).

Pour  $\alpha > 0$ , on pose :

$$h_\alpha = ( H \quad \alpha H )$$

et finalement notons par :

$$\mathcal{Y}(t) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_q B_q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_q A_q B_q & C_q B_q & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_q A_q^{n-1} B_q & C_q A_q^{n-2} B_q & \cdots & C_q B_q & 0 \end{pmatrix}$$

La dérivation successive de la sortie de chaque sous-système nous donne la relation suivante :

$$\mathcal{Y}(t) = \mathbb{O}_q x(t) + \mathcal{B}_q \mathcal{U}(t) \quad (2.19)$$

Nous pouvons maintenant donner les conditions suffisantes pour l'observabilité de l'état discret du système (2.13) dans le théorème suivant :

**Théorème 5.** [53] L'état discret du système hybride (2.13) est observable pour toute commande  $u$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $\exists \alpha > 0$ , et  $\exists k$ ,  $0 \leq k \leq \mu$  tel que  $h_\alpha^T \in \text{Im} [\mathbb{G}_k^T]$   
 ii)  $C_1 A_1^i B_1 = C_2 A_2^i B_2$ ,  $\forall i = \{0, \dots, k-1\}$ .

La condition  $h_\alpha^T \in \text{Im} [\mathbb{G}_k^T]$  signifie que  $\text{rang} [\mathbb{G}_k^T \quad h_\alpha^T] = k$  cela veut dire que le vecteur  $h_\alpha$  est une combinaison linéaire des lignes de  $\mathbb{G}_k$ . Donc, il existe  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{k-1})^T$  solution des équations algébriques suivantes :

$$\mathbb{G}_k^T \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{pmatrix} = h_\alpha^T \quad (2.20)$$

Alors, nous pouvons écrire l'équation (2.20) sous la forme :

$$h_\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i ([C_1 A_1^i \quad C_2 A_2^i]) \quad (2.21)$$

ce qui donne deux valeurs pour  $Hx(t)$  :

$$\begin{aligned} H_1 x(t) &= \beta^T \mathbb{O}_{q_1} x(t) \\ &= \beta^T [\mathcal{Y}(t) - \mathcal{B}_{q_1} \mathcal{U}(t)] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \alpha H_2 x(t) &= \beta^T \mathbb{O}_{q_2} x(t) \\ &= \beta^T [\mathcal{Y}(t) - \mathcal{B}_{q_2} \mathcal{U}(t)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les deux équations (2.22) et (2.23) deviennent :

$$H_1 x(t) = \beta_0 y + \sum_{m=1}^k \beta_m \left( y^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} C_1 A_1^{m-1-i} B_1 u^{(i)} \right) \quad (2.24)$$

$$H_2 x(t) = \frac{1}{\alpha} \left[ \beta_0 y + \sum_{m=1}^k \beta_m \left( y^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} C_2 A_2^{m-1-i} B_2 u^{(i)} \right) \right] \quad (2.25)$$

A partir de la condition ii) du Théorème 5 et pour  $\alpha > 0$ , les deux équations (2.24) et (2.25) seront de même signe. Pour  $\alpha = 1$ , on obtient  $Hx(t) = H_1 x(t) = H_2 x(t)$  et l'évaluation du signe de  $Hx(t)$  nous permet de détecter le mode actif à l'instant  $t$ .

**Remarque 4.** Si chaque sous-système est observable,  $\text{rang}(\mathbb{O}_q) = n$ , pour  $q = \{1, 2\}$  et si les conditions i) et ii) du Théorème (5) sont satisfaites, alors nous pouvons reconstruire tous les états : le continu et le discret.

**Cas temps discret** Un système hybride linéaire contrôlé à commutations en temps continu est donné par :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_q x(k) + Bu(k) \\ y(k) = C_q x(k) \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$  désignent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur des sorties à l'instant  $k$ . Les valeurs possibles pour l'état discret  $q \in Q = \{1, \dots, s\}$  de telle sorte que les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  peuvent prendre  $s$  valeurs différentes.

L'observabilité du système (2.26) a été caractérisée dans [23]. Ce travail montre l'intérêt de la commande pour l'observabilité du mode.

Soit la matrice  $\mathcal{O}_\theta$  définie de la façon suivante pour un chemin  $\theta = q_1 q_2 \cdots q_N$  donné :

$$\Delta_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_{q_2} B_{q_1} & \cdots & 0 & 0 \\ C_{q_3} A_{q_2} B_{q_1} & \cdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ C_{q_N} \Phi(\theta_{[2, N-1]}) B_{q_1} & \cdots & C_{q_N} B_{q_{N-1}} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

où  $\Phi(\theta_{[2, N-1]})$  est la matrice de transition donnée par  $\Phi(\theta_{[2, N-1]}) = A_{q_{N-1}} \cdots A_{q_2}$ .

Nous pouvons alors écrire :

$$\mathcal{Y}_\theta(x, \mathcal{U}) = \mathcal{O}_\theta x + \Delta_\theta \mathcal{U}$$

avec  $\mathcal{U} = [u_1^T \cdots u_N^T]^T$  un vecteur de commande dans  $\mathbb{R}^{m_N}$ .  $\mathcal{Y}_\theta(x, \mathcal{U})$  correspond aux  $N$  sorties consécutives obtenues par le système (2.26) qui, étant soumis aux entrées  $\mathcal{U}$ , évolue à partir de l'état continu  $x$  et dont le mode suit le chemin  $\theta$ .

Pour une entrée  $\mathcal{U}$  donnée, les ensembles  $\{\mathcal{Y}_{\theta^1}(x, \mathcal{U}) \mid x_1 \in \mathbb{R}^n\}$  et  $\{\mathcal{Y}_{\theta^2}(x, \mathcal{U}) \mid x_2 \in \mathbb{R}^n\}$  sont des sous-espace affines (respectivement :  $Im(\mathcal{O}_{\theta^1}) + \mathcal{O}_{\theta^1} \mathcal{U}$  et  $Im(\mathcal{O}_{\theta^2}) + \mathcal{O}_{\theta^2} \mathcal{U}$ ) qui d'après les résultats classiques d'algèbre linéaire peuvent être totalement disjoints si  $\mathcal{U} \neq 0$ . Ainsi les auteurs de [23] ont pu donner une définition plus forte de l'observabilité du mode lorsque des entrées sont appliquées.

**Définition 18.** [23] (*Observabilité forte des modes*) Les modes du système (2.26) sont fortement observables sur tout chemin de longueur  $N$  s'il existe un entier  $N'$  et un vecteur  $\mathcal{U}$  tels que pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $\theta^1 \in \Theta_{N+N'}$ ,

$$\theta_{[1, N]}^1 \neq \theta_{[1, N]}^2 \implies \mathcal{Y}_{\theta^1}(x_1, \mathcal{U}) \neq \mathcal{Y}_{\theta^2}(x_2, \mathcal{U}) \forall x_2 \in \mathbb{R}^n$$

Un tel vecteur  $\mathcal{U}$  est appelé une entrée discernante.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité du mode sont données dans le théorème suivant :

**Théorème 6.** [23] Les modes du système (2.26) sont observables sur tout chemin de longueur  $N$  si et seulement si il existe un entier  $N'$  tel que pour tous les chemins différents  $\theta^1, \theta^2 \in \Theta_N$  et pour  $\lambda^1, \lambda^2 \in \Theta_{N'}$  :

$$(I - \mathcal{P}(\theta^1 \lambda^1, \theta^2 \lambda^2))(\mathcal{O}_{\theta^1 \lambda^1} - \mathcal{O}_{\theta^2 \lambda^2}) \neq 0$$

où  $\mathcal{P}(\theta^1 \lambda^1, \theta^2 \lambda^2)$  est une matrice de projection sur  $Im(\mathcal{O}_{\theta^1 \lambda^1} \quad \mathcal{O}_{\theta^2 \lambda^2})$ .

## 2.5.2 Observabilité des systèmes hybrides non linéaires à commutations

La majeure partie des travaux sur l'observabilité des SDH s'est concentrée sur les systèmes hybrides linéaires. A notre connaissance, il y a très peu de résultats généraux pour les systèmes hybrides non linéaires. Deux approches géométriques basées sur la notion de transversalité ont été présentées dans [46] et [53] pour caractériser l'observabilité d'une classe de systèmes hybrides non linéaires à temps continu. Des conditions suffisantes ont été données dans le travail de [89] pour assurer l'observabilité des systèmes hybrides non linéaires en

temps discret. Les auteurs de ce papier se sont basés sur les notions d'observabilité introduites par Babaali et Egerstedt [23]. L'observabilité pour une classe particulière de systèmes hybrides non linéaires dite hybride en l'état a été abordée dans [29, 30]. Cette classe est caractérisée par des états continus et des états à temps discrets où les instants de commutation sont supposés connus.

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à rappeler l'approche présentée dans [46] qui nous semble la plus appropriée pour une classe qui sera étudiée dans la suite de ce chapitre. Cette approche est généralisée aux systèmes hybrides non linéaires bi-modèles ( $q \in \{1, 2\}$ ) de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_q(x) \\ y = h_q(x) \end{cases} \text{ pour } q = 1, 2 \quad (2.28)$$

avec  $q$  est l'indice de mode actif. Il est défini comme suit :

$$\begin{cases} q = 1 \text{ si } \sigma(x) \leq 0 \\ q = 2 \text{ si } \sigma(x) > 0 \end{cases}$$

$f_q(x), h_q(x)$  sont des fonctions suffisamment dérivables. et  $\sigma(x)$  est la fonction de commutation.

**Hypothèse 1.** *On suppose dans ce travail que chaque sous-système est observable c-à-d pour  $q = 1, 2$  :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} dh_q \\ dL_{f_q}h_q \\ \vdots \\ dL_{f_q}^{n-1}h_q \end{pmatrix} = n$$

avec  $L_f h$  est la dérivée de Lie de la fonction  $h$  dans la direction du champ de vecteurs  $f$ .

Cette hypothèse implique que le système (2.28) est localement faiblement observable et aussi le système (2.28) peut être transformé sous la forme canonique d'observabilité en utilisant le difféomorphisme suivant : Pour  $q = 1, 2$

$$z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \{h_q, dh_q, \dots, dL_{f_q}^{n-1}h_q\}$$

Le système hybride sous la forme canonique d'observabilité s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_i^q = z_2^q \\ \vdots \\ \dot{z}_n^q = g_q(z_1^q, \dots, z_n^q) \end{cases} \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (2.29)$$

avec :

$$\begin{cases} q = 1 \text{ si } \sigma = \phi^{-1}(z_1^1, \dots, z_n^1) \leq 0 \\ q = 2 \text{ si } \sigma = \phi^{-1}(z_1^2, \dots, z_n^2) > 0 \end{cases}$$

L'analyse d'observabilité dans cette approche est basée sur la comparaison de  $g_q$  ( $g_1$  et  $g_2$ ) d'une part, et de  $\sigma_q$  ( $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ) d'autre part. Pour cela, nous devons évaluer de telles fonctions par rapport aux mêmes variables. Ces variables sont données naturellement par la sortie  $y$  et ses dérivées successives. Considérons les ensembles suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{M} = \{\nu \in \mathbb{R}^n / g_1(\nu) = g_2(\nu)\} \\ \mathcal{S} = \{\nu \in \mathbb{R}^n / \sigma_1(\nu) = \sigma_2(\nu)\} \end{cases}$$

et l'ensemble des singularités communes des sous-systèmes de (2.28) :

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n / f_1(x) = f_2(x) = 0\}$$

Le résultat principal est rappelé dans le théorème suivant :

**Théorème 7.** [46] 1) Si  $\mathcal{M}$  est un ensemble discret alors le système (2.28) est observable pour toute commutation  $\sigma$  pour laquelle on a  $\sigma(\mathcal{L}) \leq 0$  ou sinon  $\sigma(\mathcal{L}) > 0$ .

2) Si les deux dynamiques de (2.29) pour  $q = 1, 2$  sont transverses par rapport à  $\mathcal{M}$  excepté dans un sous-ensemble discret alors le système est observable pour toute commutation  $\sigma$  pour laquelle on a  $\sigma(\mathcal{L}) \leq 0$  ou sinon  $\sigma(\mathcal{L}) > 0$ .

3) Si  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$  alors le système (2.28) est observable.

## 2.6 Synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides

Le problème d'estimation d'état pour les SDH est un problème non encore complètement résolu. En général, il existe trois types d'approches pour le problème de la synthèse de l'observateur pour les SDH. La principale différence entre ces approches est liée à la connaissance de l'état discret ou continu. Dans le premier type, le mode discret du SDH est supposé connu qui permet de modifier en conséquence le mode de l'observateur (figure (2.2)). Dans le se-

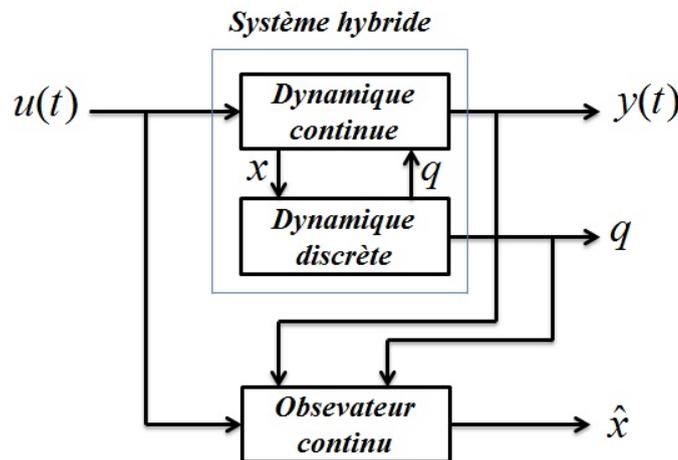


FIGURE 2.2 – Schéma d'observations de l'état continu

cond type d'approche où l'état continu est supposé connu, le problème d'estimation revient à détecter le mode actif du système à chaque instant (figure(2.3)). Un cas plus difficile est présenté dans le dernier type, particulièrement, lorsque le mode discret doit être identifié et une estimation de vecteur d'état continu devrait également être donnée au même temps (figure(2.4)).

Dans cette section, nous verrons quelques travaux sur l'estimation de l'état continu et/ou discret des SDH. En effet, divers travaux ont porté sur l'estimation de l'état hybride pour les SDH tels que, par exemple, observateurs de Luenberger [5, 26], les observateurs algébriques [72], observateurs à mode glissant [28, 32, 69, 123], observateurs Adaptatifs [65], observateurs d'ordre supérieur [31] et autres.

### 2.6.1 Observateur avec état discret connu

Dans le cas où l'état discret  $q(t)$  est disponible, l'estimation d'état pour un SDH revient à calculer une estimation du vecteur d'état continu suivant la structure de la figure (2.2).

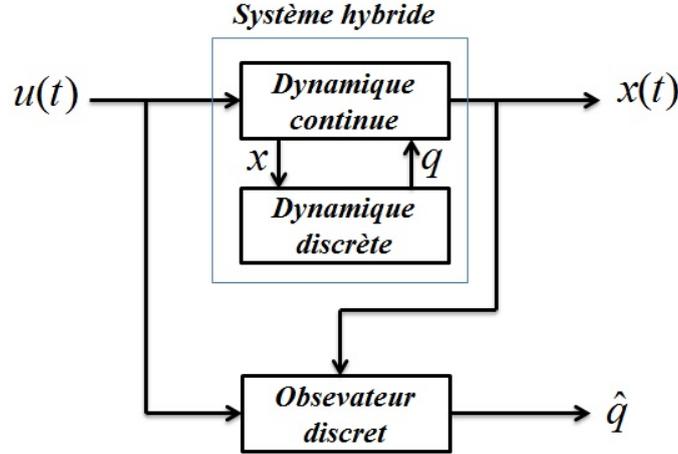


FIGURE 2.3 – Schéma d'observations de l'état discret

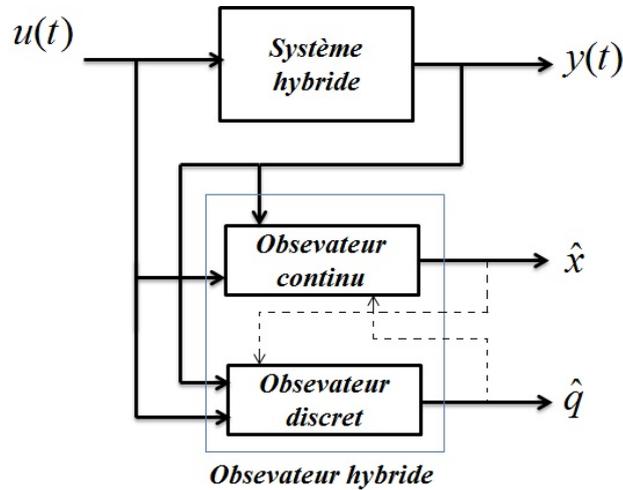


FIGURE 2.4 – Schéma d'observations de l'état continu et de l'état discret

Un observateur à mode glissant d'ordre supérieur a été proposé dans [32] afin de fournir une estimation de l'état continu en temps fini malgré la présence des entrées inconnues. De même dans [95], l'état continu est estimé par un observateur à mémoire fini pour les systèmes à commutations en temps discret sous l'hypothèse de l'inversibilité de la matrice d'état  $A_q$  pour chaque mode  $q$ .

Un observateur de type Luenberger commuté est largement utilisé pour les hybrides à commutations de type (2.13) [5, 26, 39, 79], il est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_q \hat{x}(t) + B_q u(t) - L_q (y - \hat{y}) \\ y(t) = C_q \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

La synthèse de cet observateur consiste à déterminer les gains  $L_q$  avec  $q = 1, \dots, s$  tels que la dynamique de l'erreur d'estimation  $e = x - \hat{x}$  dont l'évolution est donnée par :

$$\dot{e} = (A_q - L_q C_q) e \quad (2.31)$$

soit asymptotiquement stable. Cette dynamique se comporte comme un système à commutation, donc une fonction de Lyapunov commune est recherchée pour assurer la stabilité. Ainsi, nous énonçons le théorème suivant :

**Théorème 8.** *Considérons le système hybride à commutation (2.13) et son observateur (2.30). S'il existe une matrice définie positive  $P$  et des gains de l'observateur  $L_q$  avec  $q = 1, \dots, s$  tel que :*

$$(A_q - L_q C_q)^T P + P(A_q - L_q C_q) < 0, \text{ pour } q = 1, \dots, s.$$

*alors l'observateur est asymptotiquement stable.*

Cette approche consiste à déterminer la matrice de Lyapunov commune  $P$  qui garantit la stabilité de l'observateur, puis de déduire les gains  $L_q$  qui correspondent à chaque mode. La détermination d'une fonction de Lyapunov commune pour le système (2.13) peut être difficile lorsque le nombre de sous-systèmes est important. Donc, le choix de cette matrice est souvent ramené aux fonctions de Lyapunov quadratiques multiples même si le nombre de de sous-systèmes est supérieur à celui correspondant à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov commune.

## 2.6.2 Observateur avec état continu connu

L'estimation de l'état discret a fait l'objet de plusieurs travaux pour les SDH où l'état continu peut être complètement ou partiellement mesuré figure(2.3). Une approche pour l'identification du mode actif et les instants de commutations pour une classe des systèmes linéaires à commutations a été faite dans [42]. Dans [110], une méthode basée sur la théorie des modes glissants est présentée pour construire l'état discret pour une classe de systèmes non linéaires en supposant que l'état continu est mesuré. Les auteurs ont prouvé que le temps nécessaire pour la reconstruction de l'état discret peut être arbitrairement petit en augmentant suffisamment un certain paramètre d'observateur. D'autres travaux ont été présentés dans le cadre d'observation de l'état discret. On peut citer par exemple [67] pour les systèmes multi-robots, [13] pour les systèmes mécatroniques hybrides et [24] dans la présence des entrées inconnues.

## 2.6.3 Observateur pour l'état hybride

Malgré la difficulté du problème d'estimation de l'état hybride pour les SDH, divers approches ont été proposées afin de donner une estimation de l'état continu et de détecter en même temps le mode discret dans lequel évolue le système à chaque instant. Dans ce contexte, la majorité des approches existant dans la littérature sont basées sur la combinaison de deux observateurs : un observateur continu et un observateur discret pour les systèmes hybrides linéaires et non linéaires.

Une approche est présentée par [26] dans laquelle une combinaison de deux observateurs a été proposée. Un observateur discret basé sur la théorie des automates à états finis utilisant les entrées/sorties discrètes afin d'estimer l'état discret du SDH. Un banc d'observateurs de Luenberger a été synthétisé et les gains de différents observateurs sont fixés pour garantir leur convergence avant le changement du mode et donc l'hypothèse de temps de séjour minimal doit être respectée.

De même, [86] a également fait la synthèse d'un observateur de Luenberger pour une classe des systèmes hybrides linéaires où le mode discret dépend d'une fonction de commutation  $Hx(k)$ . L'état discret est déterminé à partir de la fonction de commutation  $Hx(k)$ . La convergence de l'observateur continu est assurée sous certaines hypothèses et si la dynamique du système est globalement continue. Dans le cas où la dynamique du système présente une discontinuité lors du changement du mode, il est toutefois possible d'assurer la bornitude de l'erreur d'estimation. Deux prototypes d'observateurs basés sur les erreurs de prédiction ont été proposés dans [68]. Le premier est basé sur l'observation d'un système en temps discret augmenté. Le second estime l'état des sous-systèmes continus à chaque instant à partir des conditions initiales.

Dans [40], est définie une méthode combinant une approche par mode glissant pour la reconstruction du mode avec un observateur de Luenberger pour l'estimation de l'état continu. Cette méthode se base sur la reconstruction de loi de commutation à partir des sorties du système sur un horizon fini. Sous les hypothèses que la condition de temps de séjour minimum dans chaque mode est respectée et que chaque sous-système est observable, l'auteur a montré qu'il est possible d'exprimer la loi de commutation comme une combinaison linéaire des échantillons de sortie du système. Une fois la loi de commutation donnée, on peut facilement détecter lequel des sous-systèmes est en cours d'évolution. L'observateur continu utilise l'estimation de l'état discret fourni par l'observateur discret.

Un schéma d'observation pour des systèmes linéaires à commutations modélisés par des réseaux de Petri différentiels est présenté dans [79]. L'observateur proposé est composé d'un observateur discret et d'un observateur continu en interaction. L'observateur discret est un observateur de type Luenberger d'ordre réduit, son rôle est de fournir le mode discret et les instants de commutation du système à chaque instant par l'estimation du vecteur des marquages des places et le vecteur des transitions. L'observateur continu est un observateur de Luenberger commuté. La convergence de cet observateur a été donnée sous forme de conditions LMI (Linear Matrix Inequality).

Dans [141], le problème de l'estimation de l'état hybride (continu et discret) ainsi que les instants de commutations pour des systèmes linéaires à commutation en temps continu a été faite. L'identification du mode discret et les instants de commutations sont basées sur une approche algébrique où une expression formelle de l'estimation de l'instant de commutation en fonction des intégrales de la sortie et de l'entrée est donnée. Une autre approche algébrique où les dérivées successives de la sortie sont exprimées en fonction des intégrales des mesures et des entrées a été également proposée afin d'estimer l'état continu.

Un observateur hybride a été proposé dans [66], pour une classe des systèmes à commutations soumis à une entrée inconnue. Cette classe est caractérisée par des sous-systèmes qui ne sont pas observables au sens classique. Un observateur par modes glissants d'ordre deux associé à une logique de décision a été proposé afin d'identifier le mode discret ainsi que l'entrée inconnue en temps fini. Afin d'estimer l'état continu, un second observateur basé sur les techniques de mode glissant d'ordre supérieur a été présenté. Cet observateur utilise les informations partielles disponibles de l'état provenant de chaque mode de fonctionnement.

Pour la classe des systèmes à commutations non linéaires, l'observateur par modes glissants d'ordre 1 a été employé pour l'estimation de l'état continu pour ses avantages tels que la convergence étape par étape en temps fini et sa capacité à tenir naturellement compte de

la structure variable. Malheureusement, l'inconvénient de ce type d'observateur est l'apparition du phénomène du chattering. Ceci peut entraîner une mauvaise décision de commutation entre les sous-systèmes lorsque la trajectoire est au voisinage de la surface de commutation. Ce problème est traité dans [69] par l'utilisation d'un filtre passe bas durant le calcul du vecteur équivalent. Malheureusement cette solution bien qu'elle élimine le chattering, introduit un retard entre la condition de commutation et son estimée. De même, les auteurs dans [123] résolvent ce problème par la synthèse d'un observateur à modes glissants d'ordre supérieur (le différentiateur robuste) pour un système mécanique à commutations. Un travail similaire a été présenté par [28] pour une classe de systèmes à commutations non linéaires avec sauts, après la mise du système d'origine sous forme canonique. Les commutations considérées dans ces travaux sont induites par le franchissement de seuils des états continus uniquement. Une combinaison entre un observateur de mode glissant avec un observateur de RdP pour une classe des systèmes à commutations non linéaires a été présentée dans [15] où la classe considérée est caractérisée par des lois de commutations qui peuvent dépendre à la fois des états continus et des événements externes. Une approche basée sur les techniques de mode glissant d'ordre supérieur pour les systèmes à commutations non linéaires dans la présence de l'entrée inconnue a été proposée par [63]. Sous certaines conditions d'observabilité et à partir de la sortie du système, l'observateur proposé fournit une estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret en temps fini. Une batterie d'observateurs par modes glissants, associés à une logique de décision a été proposée dans [133] pour une classe particulière des systèmes à commutations soumise à une entrée inconnue où les sous-systèmes ne sont pas observables au sens classique .

## 2.7 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre aux différentes approches d'observabilité et synthèse d'observateurs pour des SED et des SDH. Nous avons vu que le problème d'observation pour les SED n'est pas limité à l'estimation d'état, mais aussi au problème de la reconstitution de la séquence de franchissement de transitions qui conduisent à un état donné.

La notion d'observabilité dans les SDH concerne à la fois l'évolution de l'état continu et l'état discret, cela consiste à trouver des conditions sous lesquelles il est possible de reconstruire d'une manière unique les états du SDH à partir des sorties et des entrées du système hybride. En effet, il est remarquable qu'il existe plusieurs approches d'observabilité complètement différentes pour certaines classes des SDH.

Dans le cadre de la conception des observateurs, les travaux présentés dans ce chapitre sont classés en trois groupes. La principale différence entre ces groupes est liée à la connaissance de l'état discret ou continu. Le premier groupe contient les approches qui considèrent uniquement l'état continu sous l'hypothèse de la disponibilité de l'état discret. Les approches traitant la détection du mode actif où l'état continu peut être complètement ou partiellement connu sont classées en deuxième groupe. Le troisième groupe comporte toutes les approches qui concernent l'estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret. Malgré une littérature abondante autour du problème de l'estimation d'état pour les SDH, ce problème reste toujours ouvert et n'est pas encore complètement résolu.

# Chapitre 3

## Estimation d'état pour les SED et détection du mode actif pour les SDH

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>61</b>
<b>3.2</b>	<b>Présentation des SED modélisés par les réseaux de Petri partiellement observables :</b>	<b>62</b>
3.2.1	Réseaux de Petri partiellement observables	62
3.2.2	Représentation d'état d'un Réseau de Petri partiellement observable	63
<b>3.3</b>	<b>Observabilité des SED modélisés par les RdPPO</b>	<b>66</b>
3.3.1	Rappel sur l'observabilité des systèmes descripteurs	66
3.3.2	Observabilité des réseaux de Petri partiellement observables	68
<b>3.4</b>	<b>Synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par les RdPPO</b>	<b>73</b>
3.4.1	Observateur d'ordre réduit pour les RdPPO	73
3.4.2	Observateur à entrée inconnue pour les RdPPO	74
<b>3.5</b>	<b>Résultats de simulation</b>	<b>77</b>
3.5.1	Exemple 1	77
3.5.2	Exemple 2	80
<b>3.6</b>	<b>Détection du mode actif pour les systèmes dynamiques hybrides</b>	<b>83</b>
3.6.1	Présentation de la classe de SDH considérée	83
3.6.2	Détection du mode actif	86
3.6.3	Exemple d'application	87
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est centré sur deux parties principales. La première partie est consacrée à l'analyse d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables (RdPPO) c'est à dire les RdP équipés par des capteurs des places qui indiquent le nombre de jetons contenus dans certaines places (places mesurables ou connues) et des capteurs des transitions qui détectent les franchissements de certaines transitions (transitions mesurables ou connues). Après un rappel sur les RdPPO, une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité basée sur les informations fournies par les capteurs des places et des transitions est présentée. Ensuite, un observateur à entrée inconnue

est synthétisé afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur des transitions. Nous montrons dans la deuxième partie comment exploiter les résultats obtenus dans la première partie pour la détection du mode actif pour une classe de SDH.

## 3.2 Présentation des SED modélisés par les réseaux de Petri partiellement observables :

La classe des SED a été largement étudiée dans la littérature. Son intérêt est justifié par l'existence d'un grand nombre de systèmes réels évoluant à l'occurrence d'évènements. Plusieurs outils de modélisation des SED ont été proposés permettant l'étude et l'analyse des SED dans divers contextes. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une classe de SED modélisée par des RdPPO. Nous présentons d'abord les RdPPO d'une manière formelle. Ensuite, nous montrons que l'évolution du jeton dans un RdPPO est présentée par des équations d'états similaires à celles utilisées pour les systèmes descripteurs.

### 3.2.1 Réseaux de Petri partiellement observables

Un RdPPO est un RdP équipé de capteurs des places et des transitions. En général, les capteurs dans un RdP peuvent être classés en deux grandes catégories [121] :

- Capteurs des places qui indiquent le nombre de jetons contenus dans une place (place observable), par exemple, des capteurs de vision.
- Capteurs des transitions qui peuvent détecter l'occurrence d'un évènement (transition observable), par exemple, des détecteurs de mouvement.

**Remarque 5.** *Le terme "état observable" classiquement utilisé pour les SED signifie que l'état est connu ou mesurable (appartient à l'ensemble des sorties), et non observable signifie inconnu (n'appartient pas à l'ensemble des sorties).*

**Définition 19.** *Un RdPPO  $Q$  peut être défini par un quadruplet  $\{\mathcal{R}, P_o, T_o, M_0\}$  tel que :*

- $\mathcal{R}$  est un RdP généralisé avec  $n$  places et  $m$  transitions.
- $P_o \subseteq P$  est l'ensemble de  $n_1$  places observables avec  $0 \leq n_1 \leq n$ .
- $T_o \subseteq T$  est l'ensemble de  $m_1$  transitions observables avec  $0 \leq m_1 \leq m$ .
- $M_0$  est le marquage initial.

Dans un RdPPO, l'ensemble de places  $P$  est partitionné comme<sup>1</sup>  $P = P_o \uplus P_{no}$  :  $P_o$  est l'ensemble des places observables, et  $P_{no}$  est l'ensemble des places non observables. Une place observable  $p \in P_o$  peut avoir un capteur qui compte le nombre de jetons contenus dans cette place. Cependant, une place non observable  $p \in P_{no} = P - P_o$  ne peut pas avoir de capteur. Nous pouvons toujours renommer les places pour assurer que les  $n_1$  premières places sont observables c-à-d  $P_o = \{p_1, \dots, p_{n_1}\}$ .

De la même manière, l'ensemble de transitions  $T$  est partitionné comme  $T = T_o \uplus T_{no}$  :  $T_o$  est l'ensemble des transitions observables, et  $T_{no}$  est l'ensemble des transitions non observables. Une transition observable  $t \in T_o$  peut avoir un capteur qui détecte le franchissement de cette transition. Cependant, une transition  $t \in T_{no} = T - T_o$  non observable ne peut pas avoir de capteur. Nous pouvons toujours renommer les transitions pour assurer que les  $m_1$  premières transitions sont observables c'est à dire  $T_o = \{t_1, \dots, t_{m_1}\}$ .

Une transition  $t$  est dite validée ou franchissable à partir d'un marquage  $M$ , on note  $M[t]$ , si

1. Pour les ensembles  $A, B$  et  $C$ ,  $A = B \uplus C$  signifie que  $A = B \cup C$  et  $B \cap C = \emptyset$

toute place d'entrée  $p$  de  $t$  contient un nombre de jetons au moins égal au poids de l'arc qui relie  $p$  à  $t$ . On note  $M[t]M'$  le passage du marquage  $M$  vers le marquage  $M'$  en franchissant la transition  $t$ .

On note  $M[S]M'$  le passage du marquage  $M$  vers le marquage  $M'$  à travers la séquence de franchissement  $S$ . L'ensemble des séquences finies qui sont franchies à partir du marquage initial  $M_0$  est noté  $L(\mathcal{R}, M_0)$ , c'est à dire :

$$L(\mathcal{R}, M_0) = \{S \in T^* \mid M_0[S]\}.$$

Le franchissement consécutif des transitions non observables est noté  $S_{no}$ , et on note  $M[S_{no}]M'$  le passage du marquage  $M$  vers le marquage  $M'$  à travers la séquence  $S_{no}$ . Aussi, l'ensemble des séquences finies des transitions non observables qui sont franchies à partir d'un marquage  $M$  est noté  $L_{no}(\mathcal{R}, M)$ , i.e.,  $L_{no}(\mathcal{R}, M) = \{S_{no} \in T_{no}^* \mid M[S_{no}]\}$ .

Le sous-RdP noté  $Q_{no}$  est un RdP associé par le franchissement de la séquence  $S_{no} \in L_{no}(\mathcal{R}, M)$  à partir du marquage  $M$ .

**Définition 20.** *Le sous-RdP  $Q_{no}$  est cyclique à partir du marquage  $M$  si le franchissement de la séquence  $S_{no} \in L_{no}(\mathcal{R}, M)$  donne le marquage  $M$  c'est à dire  $M[S_{no}]M$ .*

Une fonction de franchissement  $\eta : T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  qui associe à chaque transition un alphabet (un symbole) et vérifie :

$$\eta(t) = \varepsilon \text{ pour chaque } t \in T_{no}.$$

avec  $\Sigma$  est définie de telle sorte que, pour chaque  $\nu \in \Sigma$ , il existe une transition  $t \in T_o$  satisfaisant  $\eta(t) = \nu$ . Par conséquent,  $|\Sigma|$  représente le nombre de capteurs des transitions.

Lorsqu'une transition observable  $t \in T_o$  est franchie, sa fonction correspondante  $\eta(t)$  est observée et donc si  $\eta(t_1) = \eta(t_2)$  pour deux transitions observables  $t_1$  et  $t_2$ , on ne peut pas distinguer le franchissement de  $t_1$  et  $t_2$  à partir de la fonction de franchissement  $\eta(t)$  et dans ce cas, les transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont dites non déterministes. De plus, si  $\eta(t) = \varepsilon$ , le franchissement de la transition  $t$  n'est pas observé.

**Hypothèse 2.** *On suppose tout au long de ce travail que :*

- *Sans perte de généralité, il n'existe pas de transitions ayant le même comportement<sup>2</sup>.*
- *Dans le RdPPO considéré, on peut avoir plus d'une transition franchie en même temps.*

### 3.2.2 Représentation d'état d'un Réseau de Petri partiellement observable

La dynamique du vecteur de marquage notée  $M$  dans un RdPPO est régie par l'équation suivante [18, 19, 93, 108] :

$$M_{k+1} = M_k + W\sigma_{k+1}, \quad (3.1)$$

où  $M_k$  est le vecteur de marquage des places et  $\sigma_k$  le vecteur de franchissement des transitions à l'étape d'évolution  $k$  (itération).  $W$  est la matrice d'incidence où les lignes représentent les places et les colonnes représentent les transitions.

Nous avons mentionné que le RdPPO se compose de places observables et de places non observables. Respectivement, le RdPPO est caractérisé par des transitions dont le franchissement est observé (transitions observables) et des transitions dont le franchissement est

---

2. Deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  ayant le même comportement si  $W(:, t_1) = W(:, t_2)$  où  $W(:, t)$  désigne la colonne de la matrice d'incidence  $W$  correspondant à une transition  $t$

inobservé (transitions non observables). Le vecteur de marquage et le vecteur de transitions sont réarrangés de la manière suivante :

$$M_k = \begin{bmatrix} M_k^1 \\ M_k^2 \end{bmatrix} \text{ et } \sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_k^1 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

où  $M_k^1 \in \mathbb{N}^{n_1}$ ,  $M_k^2 \in \mathbb{N}^{n_2}$  sont respectivement le marquage des places observables et le marquage des places non observables.  $\sigma_k^1 \in \mathbb{N}^{m_1}$ ,  $\sigma_k^2 \in \mathbb{N}^{m_2}$  sont respectivement le vecteur de transitions observables, et le vecteur de transitions non observables, avec  $n = n_1 + n_2$ , et  $m = m_1 + m_2$ .

Il est bien remarquable que l'équation du marquage (3.1) d'un RdP est similaire de celle utilisée pour les systèmes linéaires de la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}. \quad (3.3)$$

Donc, on peut utiliser les techniques d'observation du système (3.3) afin de résoudre le problème d'observation pour le système (3.1). Si on réécrit le système (3.1) avec l'équation de sortie, on obtient :

$$\begin{cases} M_{k+1} = M_k + W\sigma_{k+1} \\ \bar{y}_k = \bar{C}M_k = M_k^1 \end{cases}, \quad (3.4)$$

avec  $\bar{y}$  représente les places observables et la matrice  $\bar{C}$  donnée comme suit :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}.$$

Maintenant, si on applique la condition nécessaire et suffisante d'observabilité sur le système (3.4), on trouve :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}I \\ \vdots \\ \bar{C}I^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rang}[\bar{C}] = n_1. \quad (3.5)$$

La condition d'observabilité du système (3.4) ne porte que sur  $\bar{C}$ , ce qui implique que pour être observable, l'état d'un tel système doit être entièrement mesuré c'est à dire  $n_1 = n$ .

Dans le cas où  $n_1 < n$ , le système (3.4) n'est pas observable et les informations fournies par les places observables ne sont pas suffisantes pour connaître le vecteur de marquage complet  $M_k$ . Cependant, on peut renforcer la sortie du système (3.4) par les informations des transitions observables en considérant que l'état du système est constitué du vecteur de marquage  $M_k$  et du vecteur de transitions  $\sigma_k$ . Dans ce cas, on obtient un système singulier que l'on appelle aussi un système descripteur ou système généralisé.

Dans la suite, nous allons montrer que l'évolution du marquage dans un RdPPO peut être représenté sous forme d'un système descripteur par deux modèles différents mais équivalents.

### Modèle 1

En remplaçant l'expression de (3.2) dans (3.1), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} I_n & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ \sigma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Nous considérons que l'ensemble des places observables et des transitions observables comme les sorties du RdPPO accessibles à la mesure. On note  $\psi$  l'ensemble des sorties du RdPPO. On obtient l'équation d'état et de sortie comme :

$$\begin{cases} E\Pi_{k+1}^1 = A\Pi_k^1 \\ \psi_k = C\Pi_k^1 \end{cases}, \quad (3.7)$$

où  $\Pi_k^1$ ,  $\psi_k$  sont respectivement le vecteur d'état généralisé et le vecteur de sortie définis comme [14] :

$$\Pi_k^1 = \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n+m} \text{ et } \psi_k = \begin{bmatrix} M_k^1 \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n_1+m_1}.$$

Les matrices  $E$ ,  $A$  et  $C$  sont définies comme :

$$E = \begin{bmatrix} I_n & -W \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times m_1} & 0_{n_1 \times m_2} \\ 0_{m_1 \times n_1} & 0_{m_1 \times n_2} & I_{m_1} & 0_{m_1 \times m_2} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

### Modèle 2

Ce modèle est basé sur la décomposition de la matrice d'incidence  $W$ . Pour cela, on considère que la matrice  $W$  peut être décomposée comme suit :

$$W = [W_1 | W_2] = \begin{bmatrix} W_{11} & | & W_{12} \\ W_{21} & | & W_{22} \end{bmatrix},$$

avec  $W_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ ,  $W_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_2}$ ,  $W_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ , et  $W_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$ .

Après la décomposition de  $W$ , le système (3.1) devient :

$$M_{k+1} = M_k + W_1 \sigma_{k+1}^1 + W_2 \sigma_{k+1}^2. \quad (3.9)$$

De la même façon que pour le modèle 1, en utilisant l'expression de (3.2) et (3.9), on obtient :

$$\begin{bmatrix} I_n & -W_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ \sigma_{k+1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} + W_2 \sigma_{k+1}^2, \quad (3.10)$$

la sortie du RdPPO reste la même pour ce modèle et donc, l'équation d'état et de sortie sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}\Pi_{k+1}^2 = \mathcal{A}\Pi_k^2 + W_2 \sigma_{k+1}^2 \\ \psi_k = \mathcal{C}\Pi_k^2 \end{cases}, \quad (3.11)$$

avec  $\Pi_k^2$  est le vecteur d'état généralisé :

$$\Pi_k^2 = \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n+m_1}.$$

Les matrices  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  sont définies comme :

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I_n & -W_1 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m_1} \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times m_1} \\ 0_{m_1 \times n_1} & 0_{m_1 \times n_2} & I_{m_1} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

**Proposition 1.** *Le modèle 1 représenté par le système (3.7) est équivalent au modèle 2 représenté par système (3.11).*

Preuve :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\Pi_{k+1}^1 = A\Pi_k^1 \\ \psi_k = C\Pi_k^1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} I_n \\ -W_1 \\ -W_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ \sigma_{k+1}^1 \\ \sigma_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \\ \psi_k = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k^1 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ -W_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi_{k+1}^2 \\ \sigma_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi_k^2 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \\ \psi_k = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_k^2 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Donc on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\Pi_{k+1}^1 = A\Pi_k^1 \\ \psi_k = C\Pi_k^1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}\Pi_{k+1}^2 = \mathcal{A}\Pi_k^2 + W_2\sigma_{k+1}^2 \\ \psi_k = \mathcal{C}\Pi_k^2 \end{array} \right\} .$$

□

**Remarque 6.** Les transitions observables dans notre travail ne sont pas représentées par des alphabets ou des symboles comme c'est souvent le cas dans les SED, mais par un nombre binaire  $\{0, 1\}$  c'est à dire lorsqu'une transition observable  $t_j (j = 1, \dots, m_1)$  est franchie, sa valeur à la sortie vaut 1. Alors, toutes les transitions observables peuvent être distinguées à partir de la sortie  $\psi_k$ , même dans le cas où se trouvent des transitions non déterministes.

### 3.3 Observabilité des SED modélisés par les RdPPO

L'observabilité est une propriété importante des représentations structurelles des systèmes dynamiques qui permet, à travers une entité appelée observateur, le calcul des valeurs de variables d'états des systèmes dynamiques qui ne peuvent pas être mesurées directement. Dans le cadre des SED, l'observabilité a attiré beaucoup d'attention et plusieurs travaux ont été présentés notamment pour les RdP. En effet, la plupart des définitions d'observabilité existantes à base des RdP, se base soit sur l'observabilité des événements ou bien sur d'autres hypothèses inspirées des propriétés des RdP. Pour l'instant, on peut citer, l'observabilité uniforme et fortement uniforme [76], l'observabilité structurelle [121], l'observabilité des RdP interprétés [3, 101].

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude d'observabilité pour les SED modélisés par les RdPPO. L'idée principale est basée sur l'utilisation des techniques d'observabilité des systèmes descripteurs pour caractériser l'observabilité des RdPPO après l'écriture de l'évolution du marquage d'un RdPPO sous forme d'un système descripteur comme nous l'avons vu précédemment. Pour cela, une nouvelle caractérisation algébrique d'observabilité dite "causale" pour les RdPPO sera présentée.

Avant de présenter l'étude d'observabilité, nous rappelons quelques définitions et conditions concernant l'observabilité des systèmes descripteurs.

#### 3.3.1 Rappel sur l'observabilité des systèmes descripteurs

Les systèmes descripteurs ou systèmes singuliers peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques. Ils constituent un puissant outil de modélisation

dans la mesure où ils peuvent décrire des processus régis à la fois par des équations différentielles (dynamiques) et des équations algébriques (statiques). Ce formalisme représente les phénomènes physiques dont le modèle ne peut pas être décrit par des équations différentielles ordinaires. On les rencontre dans des domaines aussi variés que les industries chimiques et minérales, la robotique et le domaine électrique [145].

Un système descripteur en temps discret peut être décrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{E}x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}u_k \\ y_k = \bar{C}x_k \end{cases}, \quad (3.13)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^\alpha$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^\gamma$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^\delta$  sont respectivement le vecteur d'état, l'entrée et la sortie du système (3.13) à l'instant  $k$ .  $\bar{E}$ ,  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\beta \times \alpha}$  avec  $\text{rank } \bar{E} < \alpha$ ,  $\bar{B}$  et  $\bar{C}$  sont des matrices réelles, constantes et de dimensions compatibles avec les dimensions de  $x_k$ ,  $u_k$  et  $y_k$ .

Le système (3.13) est appelé un système descripteur, système généralisé, ou système singulier. Ainsi, le système (3.13) représente la classe la plus générale des systèmes descripteurs linéaires. Si  $\beta = \alpha$ , le système (3.13) est dit carré et si  $|\lambda\bar{E} - \bar{A}| \neq 0$ , le système (3.13) est dit régulier. Si  $\beta \neq \alpha$ , le système (8) est dit rectangulaire ou non carré.

Une partie importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour les systèmes descripteurs en temps continu [84, 94] et en temps discret [57]. Dans [57], l'auteur prouve que les systèmes descripteurs en temps discret et en temps continu ont la même observabilité (voir théorème 8-2.1 dans [57]). Généralement l'observabilité des systèmes descripteurs est inspirée de la théorie de système linéaire et peut être formellement proposée comme suit :

**Définition 21.** [57] *Le système (3.13) est dit observable, si la condition initiale  $x_0$  peut être déterminée de manière unique à partir de l'entrée  $u_k$  et la sortie  $y_k$ , pour tout  $k \geq 0$ .*

Cette définition de l'observabilité est générale et correspond à celle des systèmes standards. Une autre notion d'observabilité appelée observabilité causale a été présentée dans [57] pour les systèmes descripteurs en temps discret et dans [84] pour les systèmes descripteurs en temps continu. Pour définir cette observabilité, une discussion sur la notion de causalité est nécessaire.

**Définition 22.** [57, 84] *Le système (3.13) est dit causal, si l'état du système  $x_k$  ( $0 < k$ ) peut être déterminé complètement à partir de la condition initiale  $x_0$ , l'entrée  $u_k$  et la sortie  $y_k$ , pour tout  $k \geq 0$ .*

Le théorème suivant donne la condition de causalité :

**Théorème 9.** [84] *Le système (3.13) est causal si :*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{A} \\ 0 & \bar{E} \end{bmatrix} = \text{normal-rang}(\lambda\bar{E} - \bar{A}) + \text{rang}\bar{E}.$$

Le rang normal d'une matrice est défini comme son rang maximal.

Il faut bien noter que, la condition de test de la matrice de causalité des systèmes descripteurs en temps continu est valable pour les systèmes descripteurs en temps discret [84]. Maintenant, on peut définir l'observabilité causale comme suit :

**Définition 23.** [57, 84] *Le système (3.13) est dit causal observable ( $Y$ -observable), si l'état du système  $x_k$  ( $0 < k$ ) peut être déterminé de manière unique à partir de la condition initiale  $x_0$ , l'entrée  $u_k$  et la sortie  $y_k$ , pour tout  $k \geq 0$  ( $Y$  vient de la première lettre du mot chinois pour le terme "causalité").*

Le théorème suivant résume les résultats obtenus dans [57, 84, 94].

**Théorème 10.** [57, 84, 94]

1. Le système (3.13) est causal observable ssi :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{A} \\ 0 & \bar{E} \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix} = \alpha + \text{rang} \bar{E} \text{ ou } \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \alpha.$$

2. Le système (3.13) est observable ssi il est causal observable et :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \bar{E} - \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \alpha, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1.$$

Avec  $\alpha$  est la dimension du vecteur d'état  $x_k$ .

### 3.3.2 Observabilité des réseaux de Petri partiellement observables

En se basant sur le paragraphe précédent, une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité sera proposée pour les RdPPO. Le traitement que nous allons présenter est purement algébrique et donc facile à comprendre. Parallèlement à l'élaboration de résultats théoriques, une attention est également accordée à la facilité des résultats pour le calcul numérique. L'utilisation de la théorie des systèmes descripteurs est motivée par la capacité de présenter le RdPPO sous forme d'un système descripteur (3.13).

Dans le système (3.7), l'indice  $k$  ne correspond pas à la  $k^{\text{ème}}$  période d'échantillonnage (comme c'est souvent le cas dans les systèmes discrets), mais correspond à l'instant d'occurrence d'événement (le  $k^{\text{ème}}$  franchissement de transition). Ensuite, si on considère la durée entre l'occurrence des deux événements consécutifs comme une période d'échantillonnage, le système descripteur (3.7) peut être traité comme un système à entraînement temporel. Par conséquent, la théorie des systèmes descripteurs en temps discret reste valable.

Contrairement au système (3.7), le système (3.11) n'a pas la même forme que système (3.13), car le système (3.11) comporte un terme  $\sigma_{k+1}^2$  qui représente une entrée inconnue (transitions non observables) et donc, on ne peut pas appliquer directement les techniques d'observabilité du système (3.13) sur le système (3.11). Par conséquent, l'observabilité dans ce document est basée sur la sortie d'un système RdPPO et il est facile de remarquer que les deux systèmes (3.7) et (3.11) ont la même sortie. Donc, le modèle (3.7) et son équivalent ont la même propriété d'observabilité (c'est à dire système (3.7) est observable  $\iff$  le système (3.11) est observable). Pour cela, l'observabilité du système (3.11) est caractérisée à partir de celle du système (3.7).

D'après le théorème (9), on peut donner la proposition suivante :

**Proposition 2.** Le RdPPO représenté par système (3.7) est causal i.e.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \end{bmatrix} = \text{normal-rang}(\lambda E - A) + \text{rang} E.$$

$$\text{Preuve : } \text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_n & -W & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n & -W \end{bmatrix} = 2n,$$

$$\text{rang} [E] = \text{rang} [ I_n \quad -W ] = n, \text{ et}$$

$$\text{normal-rang}(\lambda E - A) = \text{normal-rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I_n \\ -\lambda W \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}^T \right)$$

$$= \text{normal-rang}([\ (\lambda - 1)I_n \quad -\lambda W^T \ ]) = n$$

$$\text{Alors, } \text{rang} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \end{bmatrix} = \text{normal-rang}(\lambda E - A) + \text{rang}E = 2n. \quad \square$$

**Remarque 7.** L'état initial  $\Pi_0^1$  du système (3.7) ( $\Pi_0^2$  du système (3.11)) est composé du vecteur de marquage initial  $M_0$  et du vecteur initial des transitions  $\sigma_0$  ( $\sigma_0^1$  pour le système (3.11)).

On suppose qu'aucune transition n'est franchie à l'instant initial  $k = 0$ . Alors, les vecteurs  $\Pi_0^1$  et  $\Pi_0^2$  sont donnés par :

$$\Pi_0^1 = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0_m \end{bmatrix} \text{ et } \Pi_0^2 = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0_{m_1} \end{bmatrix}.$$

La remarque (7) signifie que la connaissance de  $\Pi_0^1$  ou  $\Pi_0^2$  nécessite la connaissance de  $M_0$ . Dans notre étude de l'observabilité, le vecteur du marquage  $M_0$  sera utilisé au lieu de  $\Pi_0^1$  ou  $\Pi_0^2$ .

Dans la suite, nous allons présenter quelques résultats concernant l'observabilité d'un RdPPO décrit par le système (3.7), en utilisant les techniques des systèmes descripteurs. Ensuite, nous allons exploiter ces résultats pour la caractérisation de l'observabilité pour le système (3.11).

Nous utilisons le même raisonnement pour le système (3.13), l'observabilité causale d'un RdPPO décrit par système (3.7) peut être formulée comme suit :

**Définition 24.** Un RdPPO décrit par le système (3.7) est dit causal observable si pour un marquage initial  $M_0$  connu, les informations fournies par l'ensemble des places observables  $P_o$  et transitions observables  $T_o$  sont suffisantes pour déterminer de manière unique le vecteur de marquage  $M_k$  et le vecteur de transitions  $\sigma_k$  à chaque instant  $k$ .

La définition ci-dessus signifie qu'il est possible de récupérer d'une façon unique le marquage des  $n_2$  places non observables et de détecter le franchissement des  $m_2$  transitions non observables à chaque instant  $k$  à partir de la connaissance du marquage initial  $M_0$  et de l'observation des  $n_1$  places et  $m_1$  transitions. A partir de cette définition, on peut constater que la propriété d'observabilité n'est pas basée seulement sur la structure du RdP, mais aussi sur la connaissance du marquage initial  $M_0$ .

Une caractérisation d'observabilité similaire dite structurelle a été formulée dans [121], comme la capacité de déterminer d'une façon unique l'état du système (le marquage des places) à chaque instant, basée sur les informations des capteurs des places et des transitions et sur la connaissance du marquage initial. Dans [76], une notion d'observabilité dite uniforme a été présentée. Les auteurs ont montré que cette observabilité a une importance lorsque le marquage initial est connu.

Dans le cas où le marquage initial est inconnu, l'observabilité peut être définie comme :

**Définition 25.** Un RdPPO décrit par le système (3.7) est dit observable si les informations fournies par l'ensemble des places observables  $P_o$  et transitions observables  $T_o$  sont suffisantes pour déterminer de manière unique le marquage initial  $M_0$ , le vecteur du marquage  $M_k$  et le vecteur de transitions  $\sigma_k$  à chaque instant  $k$ .

L'observabilité dans la définition (25) est formulée comme la capacité de récupérer le vecteur du marquage initial  $M_0$  et de déterminer d'une façon unique le marquage des  $n_2$

places non observables et le franchissement des  $m_2$  transitions non observables. Plusieurs définitions qui sont liées à cette notion d'observabilité sont présentées dans la littérature. Dans [101], une caractérisation de l'observabilité pour les RdP interprétés est généralisée de telle sorte que pour importe quelle séquence entrée/sortie (l'entrée désigne les transitions observables et la sortie désigne les places observables), le marquage des places peut être déterminé uniquement. Dans le même papier, une caractérisation géométrique a été présentée. Contrairement à l'observabilité uniforme présentée dans [76], qui est basée sur la connaissance du marquage initial, l'observabilité structurelle du marquage est donnée dans le même papier et dépend seulement de la structure du RdP. Cette observation est définie de telle sorte que le marquage actuel peut être reconstruit si la séquence de transitions est observable pour importe quel marquage initial.

**Remarque 8.** Si le système (3.7) n'est pas observable, mais causal observable, l'état du système  $\Pi_k^1$  peut être déterminé uniquement à partir de la sortie  $\psi_k$  et la connaissance du marquage initial  $M_0$ .

Suite à la définition (24) et Théorème (10), on peut formuler le théorème suivant :

**Théorème 11.** Un RdPPO décrit par le système (3.7) est causal observable si et seulement si :

1. Le nombre des places observables est supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire  $n_1 \geq m_2$ .

2.  $\text{rang}[W_2] = \text{rang} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} = m_2$ .

**Preuve :** Nous allons prouver que la condition 1 du Théorème (10) est satisfaite si les conditions 1 et 2 du Théorème (11) sont satisfaites.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & -W_{11} & -W_{12} \\ 0 & I_{n_2} & -W_{21} & -W_{22} \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} & 0 \end{bmatrix},$$

si  $n_1 \geq m_2$  alors le nombre des lignes de  $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  est satisfait .

$$n_1 + n_2 + n_1 + m_1 \geq n + m_1 + m_2 = n + m.$$

Le rang de la matrice  $\begin{bmatrix} 0 & -W_{12} \\ I_{n_2} & -W_{22} \end{bmatrix}$  est toujours égal à  $n_2 + \text{rank} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix}$ , parce que :

– Si  $W_{12}$  est une matrice nulle, alors  $W_{22}$  ne peut être ni une matrice nulle, ni une matrice d'identité à cause des propriétés de la matrice d'incidence (c'est à dire, chaque colonne de la matrice d'incidence contient au moins deux éléments 1 et -1).

– Si la matrice  $W_{12}$  n'est pas complètement nulle, donc le résultat est évident.

Donc, si  $\text{rang}[W_2] = \text{rang} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} = m_2$ , alors  $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n_1 + n_2 + m_1 + m_2 = n + m$

ce qui signifie que la condition 1 du Théorème (10) est satisfaite.  $\square$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

**Théorème 12.** Un RdPPO décrit par le système (3.7) est observable si et seulement si :

1. Toutes les places du RdP sont observables et le nombre de ces places doit être supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire  $n_1 = n \geq m_2$ .

$$2. \text{rang}[W_2] = \text{rang} \begin{bmatrix} W_{12} \\ W_{22} \end{bmatrix} = m_2.$$

**Preuve :** Nous allons prouver que la condition 2 du Théorème (10) est satisfaite si les conditions 1 et 2 du Théorème (12) sont satisfaites.

Les conditions 1 et 2 du Théorème (12) signifient que le RdPPO est causal observable par le Théorème (11) et il reste à prouver que :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n + m, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1.$$

$$\begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - I_{n_1} & 0 & -\lambda W_{11} & -\lambda W_{12} \\ 0 & \lambda I_{n_2} - I_{n_2} & -\lambda W_{21} & -\lambda W_{22} \\ I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, les conditions 1 et 2 du Théorème (12) impliquent que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n + m, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1. \quad \square$$

La condition  $\text{rang}[W_2] = m_2$  signifie que les transitions non observables doivent être linéairement indépendantes c'est à dire que le sous-RdP  $Q_{no}$  formé par le franchissement consécutif des transitions non observables ne doit pas être cyclique (définition (20)).

En outre, la condition 1 du Théorème (11) représente le nombre suffisant de places observables telles que les transitions non observables peuvent être détectées et cela conduit à la notion de la détectabilité des événements telle que présentée dans [3, 101]. La notion de détectabilité des événements est définie dans [3], [101] comme la possibilité de détecter le franchissement de chaque transition en se basant sur des informations fournies par les capteurs des places et des transitions. Nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes pour la détectabilité des événements qui sont déjà présentées dans le lemme (1) dans la section 2.4.1 :

**Lemme 4.** [3, 101] *Un RdP est dit événements détectable si et seulement si :*

1.  $\forall t_i, t_j \in T$  tel que  $\eta(t_i) = \eta(t_j)$  ou  $\eta(t_i) = \varepsilon \Rightarrow \varphi W(:, i) \neq \varphi W(:, j)$ , et
2.  $\forall t_x \in T \Rightarrow \varphi W(:, x) \neq 0$ .

Avec  $\eta(t)$  est une fonction de franchissement de la transition  $t$ ,  $\varepsilon$  représente une transition non observable et  $\varphi W(:, i)$  est la  $i^{eme}$  colonne de la matrice formée par la ligne de la matrice d'incidence  $W$  correspondant aux places mesurables (observables) du RdP.

Ce résultat signifie que s'il y a deux transitions non déterministes ou non observables qui ont deux colonnes identiques dans la matrice  $\varphi W$ , cela veut dire que leurs franchissements produisent le même effet dans la sortie du système. Alors, les franchissements de ces transitions ne peuvent pas être distingués les uns des autres, à moins que leurs symboles d'entrée soient différents. D'autre part, si la matrice  $\varphi W$  a une colonne nulle, cela veut dire que la transition associée à cette colonne n'a pas une place d'entrée ou de sortie mesurable et dans ce cas, le franchissement de cette transition ne produit pas un changement dans la sortie. Donc, le franchissement de la transition ne peut pas être détecté.

Maintenant, si on applique la notion de détectabilité des événements pour le RdPPO décrit par le système (3.7), le cas des transitions non déterministes peut être ignoré car toutes les transitions observables peuvent être distinguées à partir de la sortie du système (3.7) comme nous l'avons mentionné dans la remarque (6). Alors, on peut reformuler les conditions nécessaires et suffisantes pour la détectabilité des événements du système (3.7) dans la proposition suivante :

**Proposition 3.** *Un RdPPO décrit par le système (3.7) est à événements détectable si et seulement si :*

1.  $\forall t_i, t_j \in T_{uo} \implies \varphi W_2(:, i) \neq \varphi W_2(:, j)$ , et
2.  $\forall t_x \in T_{uo} \implies \varphi W_2(:, x) \neq 0$ .

où  $W_2$  est la matrice formée par les colonnes de la matrice d'incidence  $W$  correspondant aux transitions non observables.

**Preuve :** (Suffisance) S'il existe deux transitions observables de telle sorte que chaque transition a une combinaison unique avec une colonne de la matrice  $\varphi W$ , cela veut dire que leurs franchissements produisent un changement dans la sortie du système. Alors, leurs franchissements peuvent être distingués les uns des autres.

(Nécessité) 1) S'il existe deux colonnes identiques dans la matrice  $\varphi W$ , les transitions non observables correspondantes ont au moins une place observable commune, et donc, leurs franchissements produisent le même effet dans la sortie du système. Alors, les franchissements de ces transitions ne peuvent pas être distingués les uns des autres. 2) Si la matrice  $\varphi W$  a une colonne nulle, cela veut dire que la transition non observable associée à cette colonne n'a pas une place observable et dans ce cas, le franchissement de cette transition ne produit aucun changement dans la sortie. Donc, le franchissement de la transition ne peut pas être détecté.  $\square$

Le théorème suivant résume les dérivations précédentes et donne les conditions nécessaires et suffisantes de l'observabilité d'un DES modélisé par un RdPPO.

**Théorème 13.** *Un RdPPO décrit par le système (3.7) est causal observable si et seulement s'il est à événement détectable.*

**Preuve :** (Suffisance) Si le RdPPO est à événements détectable, donc les transitions non observables peuvent être détectées uniquement en se basant sur les capteurs des places et des transitions. Puisque le marquage initial est connu, l'état du système peut être déterminé uniquement en utilisant le système (3.7) ou bien le système (3.1).

(Nécessité) Si le RdPPO n'est pas à événements détectable, il existe un marquage initial  $M_0$  et deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  telles que leurs franchissements ne peuvent pas être distinguables à partir des informations des capteurs. Le marquage  $M_k$  est produit par des séquences de franchissement contenant  $t_1$  et  $t_2$ , et les franchissements des  $t_1$  et  $t_2$  donnent des marquages différents car il n'y a pas de transitions qui ont le même comportement. Dans cette situation, on ne peut pas déterminer uniquement les marquages des systèmes avant le marquage  $M_k$  et donc, le RdPPO n'est pas observable causal.  $\square$

Maintenant, nous nous intéressons à l'observabilité de système (3.11) et comme mentionné précédemment, le système (3.7) et son équivalent (3.11) ont la même sortie et représentent le même RdPPO. Par conséquent, l'observabilité du système (3.7) et de système (3.11) sont équivalentes et donc, l'observabilité du système (3.11) peut être déduite de l'observabilité du système (3.7).

**Théorème 14.** *Les résultats suivants concernant l'observabilité du système (3.11) sont équivalents.*

1. *Un RdPPO décrit par le système (3.11) est causal observable si et seulement si :*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = n + m.$$

2. Un RdPPO décrit par système (3.11) est causal observable si et seulement si :
- (a) le nombre des places observables est supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire  $n_1 \geq m_2$ .
  - (b)  $\text{rank}[W_2] = m_2$ .

**Preuve :** La condition 1 du Théorème (14) est déduite de l'observabilité du système (3.7) c'est à dire :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n + m \Leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m.$$

Maintenant, il est facile de démontrer que les conditions 1 et 2 du Théorème (14) sont équivalentes.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} \text{ et on utilise la démonstration du Théorème (11).} \quad \square$$

De la même façon, on peut énoncer le résultat suivant :

**Théorème 15.** Un RdPPO décrit par le système (3.11) est observable si et seulement si :

1. Toutes les places du RdP sont observables et le nombre de ces places doit être supérieur ou égal au nombre des transitions non observables c'est à dire  $n_1 = n \geq m_2$ .
2.  $\text{rank}[W_2] = m_2$ .

**Preuve :**  $\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ , et on utilise la démonstration du Théorème (12).  $\square$

## 3.4 Synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par les RdPPO

Dans cette section, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par les RdP. Nous avons vu dans le chapitre précédent que le RdPPO peut être représenté par deux systèmes descripteurs (3.7) et (3.11). Dans ce paragraphe, nous allons aborder le problème d'estimation d'état pour les RdPPO basés sur les principes de la synthèse d'observateurs pour les systèmes descripteurs. Nous rappellerons dans un premier temps, l'approche de Koenig et bourjij [93] qui s'appuie sur le principe d'un observateur de Luenberger d'ordre réduit pour les RdP décrits par le système (3.7). Nous présenterons par la suite, une approche basée sur la synthèse d'un observateur à entrée inconnue pour les RdPPO représentés par le système (3.11), en considérant les transitions non observables comme des entrées inconnues.

### 3.4.1 Observateur d'ordre réduit pour les RdPPO

Nous présentons dans ce paragraphe, une méthode de synthèse d'un observateur de type Luenberger d'ordre réduit développée dans [93] pour un RdPPO représenté par système (3.7). L'observateur proposé est utilisé afin de reconstruire le vecteur global (composé par le vecteur des marquages des places complet  $M_k$  et le vecteur des transitions complet  $\sigma_k$ ) à chaque instant  $k$  à partir d'un ensemble de marquages des places observables et des transitions observables.

Avant de donner l'équation de l'observateur, nous supposons que le système (3.7) est au

moins observable causal.

Suivant le principe de construction des observateurs, l'observateur de Luenberger d'ordre réduit proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = F\zeta_k + G\psi_k \\ \hat{\Pi}_k = V\zeta_k + D\psi_k \end{cases}, \quad (3.14)$$

où  $\zeta_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état de l'observateur et  $F, G, H$  et  $D$  sont des matrices de dimensions appropriées à calculer.

Le problème de la construction de l'observateur consiste à trouver les matrices  $F, G, V$  et  $D$  telles que le vecteur global d'état estimé  $\hat{\Pi}_k$  converge vers le vecteur d'état  $\Pi_k$ . Ainsi, le calcul des matrices de l'observateur (3.14) est donné dans l'annexe (4.4).

### 3.4.2 Observateur à entrée inconnue pour les RdPPO

Nous nous intéressons au problème de l'estimation de l'état discret (marquage des places) et de la séquence de franchissement (vecteur de transitions) d'un système modélisé par un RdPPO décrit par système (3.11).

L'idée principale est basée sur l'écriture de l'équation de marquage (3.1) sous forme d'un système descripteur (3.11), et nous supposons que les transitions non mesurées  $\sigma_k^2$  comme des entrées inconnues du système (3.11). Par conséquent, un observateur à entrée inconnue (OEI) est proposé afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur de franchissement des transitions.

L'observateur proposé fournit à chaque instant  $k$ , le vecteur global généralisé  $\Pi_k^2$  composé du vecteur du marquage  $M_k$  et le vecteur de transitions mesurées  $\sigma_k^1$ . Une fois que le vecteur global  $\Pi_k^2$  est donné, nous pouvons calculer les transitions non mesurées à partir de l'équation du système (3.11).

#### Estimation de l'état discret

Notre objectif est de synthétiser un observateur à entrée inconnue pour le système descripteur (3.11) en utilisant des méthodes traditionnelles pour les systèmes descripteurs afin d'estimer le vecteur global  $\Pi_k^2$ .

Avant de donner l'équation de l'observateur, nous supposons que le système (3.11) est causal observable. Sous cette hypothèse, un OEI pour le système (3.11) est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Lambda_{k+1} = N\Lambda_k + L\psi_k \\ \hat{\Pi}_k^2 = \Lambda_k + H\psi_k \end{cases}, \quad (3.15)$$

où  $\Lambda_k \in \mathbb{N}^{n+m_1}$  est l'état de l'observateur,  $\psi_k$  est la sortie du système à l'instant  $k$  et  $N, L$  et  $H$  sont des matrices de dimensions appropriées à calculer.

Le problème de la conception d'un observateur (3.15) pour le système (3.11) se réduit à trouver des matrices  $N, L$  et  $H$  telles que le vecteur global estimé  $\hat{\Pi}_k^2$  converge vers le vecteur de l'état  $\Pi_k^2$ .

Lorsque l'observateur (3.15) est appliqué au système (3.11) l'erreur de l'estimation est définie comme :

$$\begin{aligned} e_k &= \Pi_k^2 - \hat{\Pi}_k^2 \\ &= \Pi_k^2 - \Lambda_k - HC\Pi_k^2 \\ &= (I_s - HC)\Pi_k^2 - \Lambda_k. \end{aligned}$$

avec  $s = n + m_1$

Soit  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{s \times n}$  une matrice réelle telle que :

$$\mathcal{U}\mathcal{E} = I_s - HC.$$

L'erreur d'estimation devient :

$$e_k = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_k^2 - \Lambda_k. \quad (3.16)$$

A l'instant  $t_{k+1}$ , l'erreur d'estimation est :

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_{k+1}^2 - \Lambda_{k+1} \\ &= (\mathcal{U}\mathcal{A}\Pi_k^2 + W_2 \sigma_{k+1}^2) - N\Lambda_k - LC\Pi_k^2 \\ &= \mathcal{U}\mathcal{A}\Pi_k^2 - N(\mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_k^2 - e_k) - LC\Pi_k^2 + \mathcal{U}W_2\sigma_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'évolution de l'erreur d'estimation est décrite par :

$$e_{k+1} = Ne_k + (\mathcal{U}\mathcal{A} - N\mathcal{U}\mathcal{E} - LC)\Pi_k^2 + \mathcal{U}W_2\sigma_{k+1}^2. \quad (3.17)$$

L'erreur d'estimation converge vers zéro si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\mathcal{U}\mathcal{E} = I_s - HC, \quad (3.18)$$

$$N \text{ est stable}, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{U}\mathcal{A} = N\mathcal{U}\mathcal{E} + LC, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{U}W_2 = 0. \quad (3.21)$$

Maintenant, nous discuterons brièvement comment calculer les matrices  $\mathcal{U}$ ,  $N$ ,  $L$  et  $H$ .

D'après (3.18) et (3.21), on obtient :

$$[\mathcal{U} \ H] \begin{bmatrix} \mathcal{E} & W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} = [I_s \ 0_{s \times m_2}].$$

La matrice  $\begin{bmatrix} \mathcal{E} & W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix}$  est supposée de rang plein, car elle représente la condition d'observabilité causale comme mentionné dans le théorème (14). Alors, nous pouvons obtenir les matrices  $\mathcal{U}$  et  $H$  comme suit :

$$[\mathcal{U} \ H] = [I_s \ 0_{s \times m_2}] \begin{bmatrix} \mathcal{E} & W_2 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix}^+, \quad (3.22)$$

où la pseudo-inverse d'une matrice  $()$  est définie comme  $()^+ = ()^T \times (() \times ()^T)^{-1}$ .

Remplaçant (3.18) dans (3.20), nous obtenons :

$$\mathcal{U}\mathcal{A} = N(I - HC) + LC \Rightarrow N = \mathcal{U}\mathcal{A} - (L - NH)\mathcal{C}.$$

En posant :

$$K = L - NH. \quad (3.23)$$

On obtient :

$$N = \mathcal{U}\mathcal{A} - KC, \quad (3.24)$$

$$L = K + NH. \quad (3.25)$$

L'erreur d'estimation peut être réécrite en utilisant l'équation (3.17) et (3.24) sous la forme :

$$e_{k+1} = (\mathcal{U}\mathcal{A} - KC)e_k. \quad (3.26)$$

Donc, l'erreur d'estimation converge vers zéro si la matrice  $(N = \mathcal{U}\mathcal{A} - KC)$  est stable. Cette matrice peut être stabilisée par la matrice de gain  $K$  si la paire  $(\mathcal{U}\mathcal{A}, C)$  est détectable.

Le théorème suivant résume les dérivations précédentes et donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'observateur (3.15) :

**Théorème 16.** *Il existe un observateur (3.15) pour le système (3.11) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. La paire  $(\mathcal{U}\mathcal{A}, C)$  est détectable c'est à dire :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_s - \mathcal{U}\mathcal{A} \\ C \end{bmatrix} = s, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1.$$

2. L'initialisation de l'observateur doit être donnée comme :

$$\Lambda_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_0^2,$$

avec la matrice  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{s \times n}$  calculée à l'aide de l'équation (3.22).

**Preuve :** La condition 1 du Théorème (16) a déjà été prouvée précédemment.

Ci-après, nous allons montrer que la condition 2 est nécessaire lorsque l'erreur initiale appartient au sous-espace non observable.

La condition 1 du théorème (16) implique que  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq 1$ ,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \mathcal{U}\mathcal{E} - \mathcal{U}\mathcal{A} + \lambda HC \\ C \end{bmatrix} = s,$$

il existe une matrice  $[\mathcal{U} \ H]$  de rang complet telle que :

$$= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} \mathcal{U} & H & 0 \\ 0 & 0 & I_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} - \mathcal{A} \\ \lambda C \\ C \end{bmatrix} \right),$$

avec  $\mu = n_1 + m_1$

$$= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} - \mathcal{A} \\ C \end{bmatrix}.$$

En utilisant l'équation (3.12), on obtient :

$$= \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - I_{n_1} & 0 & -\lambda W_{11} \\ 0 & \lambda I_{n_2} - I_{n_2} & -\lambda W_{12} \\ I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_1} \end{bmatrix},$$

$$= n_1 + \text{rang} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda I_{n_2} - I_{n_2} \\ 0 \end{bmatrix} + m_1.$$

Alors, pour  $\lambda = 1$  le rang de la matrice  $\begin{bmatrix} \lambda I_s - \mathcal{U}\mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{bmatrix}$  est inférieur à  $(n+m_1)$  ce qui signifie que la paire  $(\mathcal{U}\mathcal{A}, \mathcal{C})$  n'est pas complètement observable. Le sous-espace non observable est engendré par  $\begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 \end{bmatrix}^T$  et correspond à la valeur propre  $\lambda = 1$ . Ainsi, pour éviter l'instabilité de l'observateur, l'erreur d'estimation doit être nulle à l'instant initial. Ainsi, l'erreur initiale doit vérifier  $e_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_0^2 - \Lambda_0 = 0 \Rightarrow \Lambda_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_0^2$ .  $\square$

### Estimation de la séquence de franchissement

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, comment estimer le vecteur de marquage des places du RdPPO. Maintenant, nous nous intéressons au problème de l'estimation de la séquence de franchissement d'un SED modélisé par un RdPPO. Ce problème revient à déterminer le vecteur de transitions  $\sigma_k$  composé d'un ensemble de transitions observables  $\sigma_k^1$  et un ensemble de transitions non observables  $\sigma_k^2$ . Par conséquent, les transitions non observables  $\sigma_k^2$  sont calculées dans le théorème suivant :

**Théorème 17.** *Les transitions non observables  $\sigma_k^2$  sont calculées par l'équation suivante :*

$$\sigma_{k+1}^2 = W_2^+ \mathcal{E}\Pi_{k+1}^2 - W_2^+ \mathcal{A}\Pi_k^2. \tag{3.27}$$

**Preuve :** Sous l'hypothèse que le système (3.11) est causal observable c'est à dire  $\text{rang}[W_2] = m_2$ , on peut donc estimer les transitions non observables de l'équation (3.11) par l'équation (3.27).  $\square$

## 3.5 Résultats de simulation

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats de simulation afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

### 3.5.1 Exemple 1

On considère le RdP présenté dans la figure (3.1), initialement marqué avec un jeton dans la place  $p_1$ .

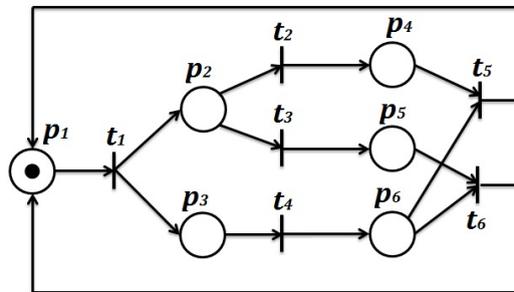


FIGURE 3.1 – Le modèle du RdP

La matrice d'incidence  $W$  et le vecteur de marquage initial  $M_0$  associés au modèle du RdP présenté dans la figure (3.1) sont donnés par :

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce système, nous supposons que les places  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont observables, et les transitions  $t_2, t_3, t_5$  et  $t_6$  sont observables c'est à dire ( $n_1 = 3, n_2 = 3, m_1 = 4$  et  $m_2 = 2$ ). Aussi, nous supposons que la transition  $t_4$  est franchie en même temps que la transition  $t_2$  ou  $t_3$  c'est à dire les paires  $(t_4, t_2)$  ou  $(t_4, t_3)$  peuvent être franchies en une seule étape. Le modèle mathématique correspondant au RdP indiqué sur la figure (3.1) peut être représenté par un système descripteur de type (3.7) ou (3.11).

En utilisant notre approche algébrique pour décider de l'observabilité en se basant sur le test du rang d'une matrice, on obtient :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} = 12.$$

Donc, le RdP étudié est causal observable.

Maintenant, en utilisant l'approche structurelle pour les RdP comme dans [3] et [101], nous constatons que le RdP donné dans la figure (3.1) est observable car toutes les transitions sont détectables. Cependant dans le cas où les transitions  $t_2$  et  $t_3$  ont le même symbole (alphabet) et de même pour les transitions  $t_5$  et  $t_6$  (c'est à dire  $\eta(t_2) = \eta(t_3)$  et  $\eta(t_5) = \eta(t_6)$ ), le RdP n'est pas observable parce que les transitions ne peuvent être distinguées et l'estimation d'état n'est pas unique. Alors qu'avec notre approche, le RdP reste **causal observable** grâce à la représentation binaire des franchissements des transitions dans la sortie du système.

Maintenant, pour la conception de l'observateur à entrée inconnue (3.15), nous devons trouver les matrices  $\mathcal{U}, H, K, N$  et  $L$  telles que l'estimation du vecteur global  $\Pi_k^2$  (composé des marquages des places et des transitions observables) peut être reconstruit exactement à n'importe quelle étape  $k$ . Pour cela, on peut calculer les matrices  $\mathcal{U}$  et  $H$  de l'équation (3.22), la matrice  $K$  doit être choisie de telle sorte que la matrice  $N$  soit stable. Enfin,  $N$  et  $L$  sont calculées respectivement à partir des équations (3.24) et (3.25). Les valeurs numériques de ces matrices sont données en annexe (4.4).

L'état initial du système est  $\Pi_0^2 = [M_0 \ 0_4]^T$  et l'état initial de l'observateur est  $\Lambda_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_0^2$ , nous obtenons le vecteur complet d'états comme :

$$\hat{\Pi}_k^2 = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ \hat{p}_5 \\ \hat{p}_6 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_5 \\ \hat{t}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6 & k=7 & k=8 & k=9 & k=10 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

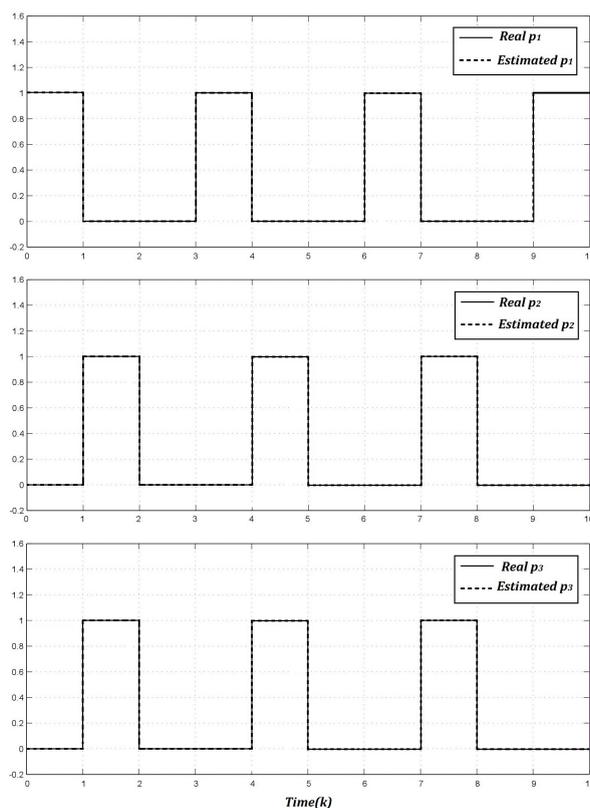


FIGURE 3.2 – **Haut** Le mode réel et estimé du  $p_1$  en fonction de  $k$ . **Milieu** Le mode réel et estimé du  $p_2$  en fonction de  $k$ . **Bas** Le mode réel et estimé du  $p_3$  en fonction de  $k$ .

Les résultats des simulations apparaissent sur les figures (3.2) et (3.3). Figure (3.2) représente les modes réels et les modes estimés des places observables  $p_1, p_2$  et  $p_3$ , et la figure (3.3) représente les modes réels et les modes estimés des places non observables  $p_4, p_5$  et  $p_6$ , respectivement. Nous remarquons que les modes estimés sont identifiés correctement ce qui montre l'efficacité de l'observateur proposé. Finalement, à partir de l'équation (3.27), nous pouvons obtenir les entrées inconnues (les transitions non observables), comme indiqué dans le vecteur des transitions complet :

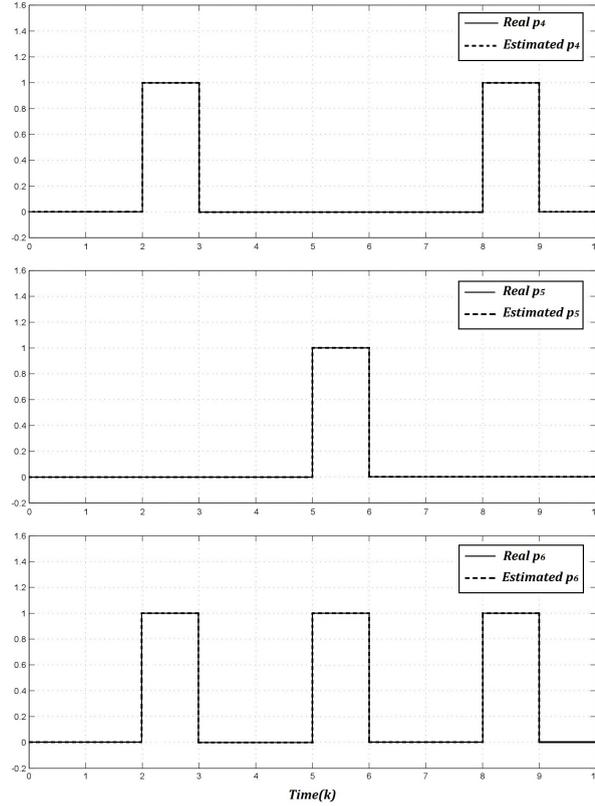


FIGURE 3.3 – **Haut** Le mode réel et estimé du  $p_4$  en fonction de  $k$ . **Milieu** Le mode réel et estimé du  $p_5$  en fonction de  $k$ . **Bas** Le mode réel et estimé du  $p_6$  en fonction de  $k$ .

$$\hat{\sigma}_k = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_4 \\ \hat{t}_5 \\ \hat{t}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & k=5 & k=6 & k=7 & k=8 & k=9 & k=10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

On peut remarquer que les transitions  $t_2$  et  $t_4$  sont franchies simultanément à  $k = 2, k = 8$  et la même chose pour  $t_3$  et  $t_4$  à  $k = 5$ .

### 3.5.2 Exemple 2

Dans cet exemple, quelques résultats de simulation seront présentés pour un simple système de production afin de démontrer l'efficacité de l'approche proposée. Le système étudié est représenté sur la figure (3.4), il présente un fonctionnement d'un stock à capacité 3 entre deux machines identiques MCH1 et MCH2. La machine MCH1 dépose les pièces dans le stock, s'il y a un espace disponible, et la machine MCH2 déplace les pièces si le stock n'a pas un espace vide.

Le modèle RdP correspondant au système de production étudié est représenté sur la figure (3.4), avec des jetons en  $p_1, p_3$  et  $p_6$ .

Dans cet exemple, nous supposons que les places  $p_1, p_2, p_5$  et  $p_6$  et les transitions  $t_1, t_4$  qui représentent les machines MCH1 et MCH2 sont connues (observables). Les places  $p_3$  et  $p_4$  qui

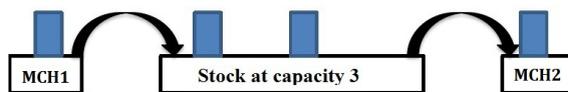


FIGURE 3.4 – Le système de production

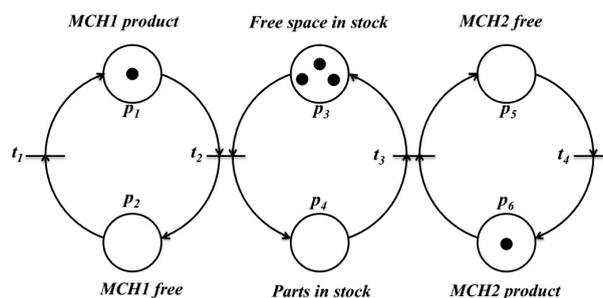


FIGURE 3.5 – Le modèle RdP du système de production

représentent respectivement l'état du stock et le nombre de pièces en stock sont supposées inconnues (non observables).

Par conséquent, le rôle de l'observateur proposé consiste à estimer le nombre de pièces dans le stock (en estimant le marquage des places  $p_3$  et  $p_4$ ), ainsi que les instants de franchissement des transitions ( $t_2$  et  $t_3$ ) qui correspondent respectivement aux événements de dépôt et de retrait c'est à dire ( $n_1 = 4, n_2 = 2, m_1 = 2$  et  $m_2 = 2$ ).

La matrice d'incidence  $W$  et le vecteur de marquage initial  $M_0$  associés au modèle du RdP présenté dans la figure (3.5) sont donnés par :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A partir du modèle mathématique correspondant au RdP indiqué sur la figure (3.5), le RdP est causal observable car :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -W_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} = 10.$$

Avec l'état initial de l'observateur  $\Lambda_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_0^2$ , nous obtenons le vecteur d'état complet comme :



## 3.6 Détection du mode actif pour les systèmes dynamiques hybrides

Après avoir présenté, aux sections précédentes, des résultats concernant l'observabilité et la synthèse d'observateurs des SED modélisés par les RdP. Dans cette section, nous allons exploiter ces résultats pour l'estimation de l'état discret (détection du mode actif) d'un système hybride à commutations où la partie discrète est régie par un RdP et la partie continue décrite par des équations différentielles ou aux différences.

Le problème de l'estimation de l'état discret pour les systèmes hybrides a déjà attiré beaucoup l'attention des chercheurs et a été étudié avec un intérêt particulier. Toutefois, ce problème n'a pas encore été complètement résolu.

A notre connaissance, le premier observateur prenant en charge l'estimation de l'état discret d'un système hybride a été présenté dans [27]. Cet observateur est basé sur un détecteur de mode, inspiré de la théorie des automates à état finis. Dans [40], une méthode d'estimation de l'état discret pour une classe de systèmes hybrides à commutations basée sur la reconstruction de loi de commutation à partir des sorties du système sur un horizon fini a été présentée. L'auteur a montré qu'il est possible d'exprimer la loi de commutation comme une combinaison linéaire des échantillons de sortie du système. Une fois la loi de commutation donnée, on peut facilement détecter lequel des sous-systèmes est en cours d'évolution. Un estimateur robuste d'état discret, utilisant les techniques des modes glissants, est défini dans [110], pour une classe de systèmes non-linéaires incertains à commutations sous l'hypothèse de la connaissance de l'état continu.

Le problème de l'identification du mode actif et les instants de commutations pour une classe de systèmes linéaires à commutations a été formulé dans [42] comme un problème d'optimisation impliquant des données entrées/sorties du système. L'approche proposée est basée sur des techniques d'optimisation par Essaim Particulaire afin d'attribuer à chaque ensemble des données son sous-système correspondant et d'estimer les instants de commutations sur une fenêtre d'observations. D'autres travaux ont été présentés dans le cadre d'observation de l'état discret. On peut citer par exemple [67] pour les systèmes multi-robots et [24] pour la présence des entrées inconnues. Les classes des SDH considérés dans ces travaux sont caractérisées par l'évolution d'un seul sous-système continu à chaque instant de temps.

Dans ce contexte, nous allons aborder le problème de l'estimation de l'état discret pour une classe des systèmes hybrides qui peut avoir plusieurs sous-systèmes évoluant simultanément avec des dimensions différentes. Nous présenterons dans le second paragraphe, la classe des systèmes hybrides à commutations considérées. Le troisième paragraphe sera consacré à la détection du mode actif. Finalement, un système électromécanique sera présenté comme un exemple d'application pour monter l'efficacité de l'approche proposée.

### 3.6.1 Présentation de la classe de SDH considérée

Dans cette section, on considère la classe de SDH définie par un état hybride composée d'un état discret dont l'évolution est régie par un RdP et d'un état continu dont l'évolution est décrite par des équations différentielles ou aux différences. Cette classe représente le cas le plus général de SDH, car elle peut avoir plusieurs sous-systèmes évoluant simultanément avec des dimensions différentes. Cette classe se trouve souvent dans les systèmes industriels tels que les systèmes mécatroniques et les systèmes de production.

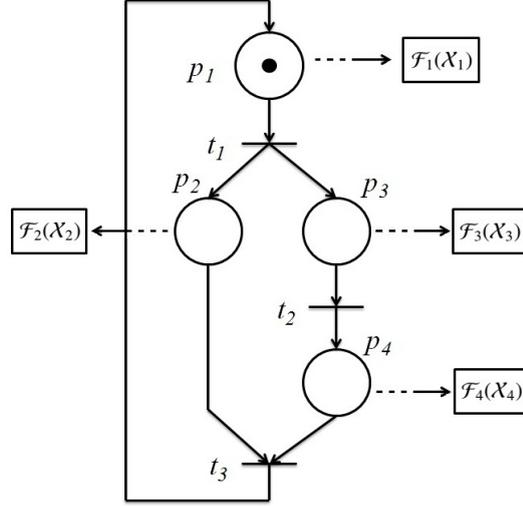


FIGURE 3.8 – Interaction entre la partie discrète et la partie continue

La classe considérée dans ce travail est décrite comme suit [17, 21] :

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{Q}\mathcal{F}(\mathcal{X}), \quad (3.28)$$

avec le vecteur d'état continu  $\mathcal{X}$ , le champs de vecteur du dynamique continu  $\mathcal{F}(\mathcal{X})$  et la matrice de localisation  $\mathcal{Q}$  définis :

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{X}_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(\mathcal{X}_1) \\ \mathcal{F}_2(\mathcal{X}_2) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n(\mathcal{X}_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & q_2 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \ddots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & q_n \end{bmatrix}.$$

Avec  $\underline{0}$  une matrice de dimension appropriée et les dimensions des sous-systèmes pouvant être différentes et définies par :

$$\dim(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n \dim(\mathcal{X}_i) = \sum_{i=1}^n l_i.$$

Le système (3.28) est réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}}_1 = q_1 \mathcal{F}_1(\mathcal{X}_1) \\ \dot{\mathcal{X}}_2 = q_2 \mathcal{F}_2(\mathcal{X}_2) \\ \vdots \\ \dot{\mathcal{X}}_n = q_n \mathcal{F}_n(\mathcal{X}_n) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \hat{q}_i = \text{diag}\{q_{i1}, \dots, q_{il_i}\} \quad \text{for } i = 1, \dots, n, \quad (3.29)$$

$$\text{avec : } \mathcal{X}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{il_i} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_i(\mathcal{X}_i) = \begin{bmatrix} f_{i1}(x_{i1}) \\ f_{i2}(x_{i2}) \\ \dots \\ f_{il_i}(x_{il_i}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad q_{i1} = q_{i2} = \dots = q_{il_i} \in \{0, 1\}.$$

Où  $i$  est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  avec  $n$  le nombre de sous-systèmes continus et représente aussi le nombre des places du RdP. Ce dernier représente les différentes configurations du SDH.

Le principe du couplage et de l'interaction entre la partie discrète et la partie continue du SDH s'effectue de la même manière qu'un modèle de type automate hybride. Pour chaque configuration (place ou mode discret), un sous-système continu est associé, comme illustré dans la figure (3.8). L'activation de chaque sous-système est spécifiée selon le marquage des places  $p_i$ ,  $p_i = 1$  (ce qui signifie que  $p_i = 1$  si  $q_i = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$ ) indique que le mode  $i$  est actif. En outre, on peut voir que plusieurs sous-systèmes peuvent être activés simultanément, comme illustré dans la figure (3.9). A l'instant de désactivation, le système activé reste constant avec sa valeur finale ou revient à son état initial.

Le passage d'un sous-système à l'autre se fait par le franchissement de transitions. Ces

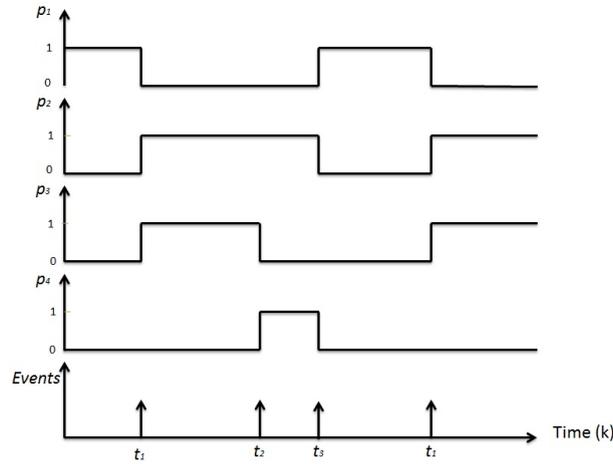


FIGURE 3.9 – L'évolution de la partie discrète

transitions peuvent être autonomes ou déclenchées par des événements externes. Le franchissement d'une transition autonome est déclenché par des variables continues atteignant un certain seuil. Lorsque le franchissement est forcé par un événement provenant de l'extérieur on parlera d'une transition contrôlable ou transition inconnue.

L'équation de la sortie du SDH est donnée comme :

$$\mathcal{Y}(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n p_i h(x_{i1}, \dots, x_{il_i}) \text{ avec } p_i \in \{0, 1\}, \quad (3.30)$$

avec  $h(x_{i1}, \dots, x_{il_i})$  la sortie de chaque sous système continu.

L'équation signifie que la sortie du SDH dépend de l'activation de sous-systèmes continus c'est à dire, si une place  $p_i$  (mode discret) est active (marquée), la sortie du SDH qui apparait est celle de sous-système continu associé à la place  $p_i$  et s'il y a plusieurs sous-systèmes activés en même temps, la sortie dans ce cas est la somme des sorties des sous-systèmes activés.

Finalement, on suppose que cette classe de systèmes satisfait l'hypothèse de temps de séjour minimum pendant lequel aucune transition discrète ne se produit.

**Hypothèse 3.** La durée d'évolution  $\delta_i$  "temps de séjour" pour chaque mode (état discret) du système hybride est mesurable :

$$\min(\delta_i) > \delta_{\min} > 0.$$

L'hypothèse de temps de séjour signifie que les systèmes avec phénomène de Zénon ne sont pas considérés.

### 3.6.2 Détection du mode actif

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la détection du mode en cours d'évolution et les instants de commutation pour une classe des systèmes hybrides, où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP. En particulier, nous proposons de synthétiser un observateur à entrée inconnue (3.15) (présenté dans le paragraphe (3.4.2) pour la partie discrète du SDH.

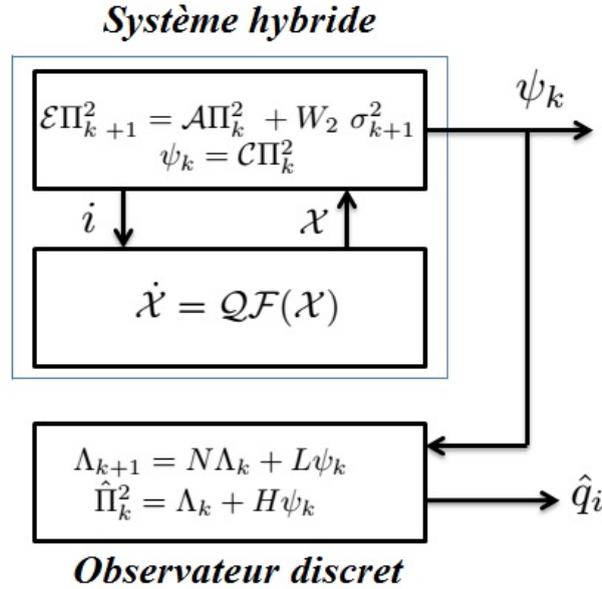


FIGURE 3.10 – Schéma d'observation d'état discret

Sous l'hypothèse que l'état continu peut être complètement ou partiellement mesuré, certaines conditions de commutation sont connues, par exemple, des conditions de commutations qui dépendent des événements externes connus, des sorties, ou des états mesurés du système, ces commutations sont considérées comme des transitions observables du RdP ( $\sigma_k^1$ ). A partir de ces transitions, certains modes sont détectés. Ces modes (quelques places du RdP) sont considérés comme des places observables ( $M_k^1$ ).

Les modes et les commutations restantes (les transitions non observables ( $\sigma_k^2$ ) qui dépendent par exemple des événements externes inconnus ou bien des états du système non mesurés) sont considérées respectivement comme des places non observables ( $M_k^2$ ) et des entrées inconnues. A partir de ces données ( $M_k^1$ ,  $M_k^2$ ,  $\sigma_k^1$  et  $\sigma_k^2$ ), on peut présenter la partie discrète du SDH sous la forme du système (3.11).

Le problème d'estimation de l'état discret est équivalent à la conception d'un observateur de type (3.15) pour le système (3.11) en temps discret avec un pas d'échantillonnage variable, car l'indice  $k$  dans système (3.11) ne correspond pas à la  $k^{\text{ème}}$  période d'échantillonnage (comme c'est souvent le cas dans les systèmes discrets), mais correspond au  $k^{\text{ème}}$  instant de commutation. La durée entre deux commutations consécutives représente les temps des séjours des modes discrets sachant que chaque mode peut avoir des temps de séjour différents. On note  $\delta_{ik}$  pour désigner le temps de séjour du mode  $i$  à l'étape  $k$ .

Par conséquent, afin d'étudier la stabilité de l'observateur proposé en utilisant la théorie du système discret avec un pas d'échantillonnage fixe, nous introduisons l'artifice suivant :

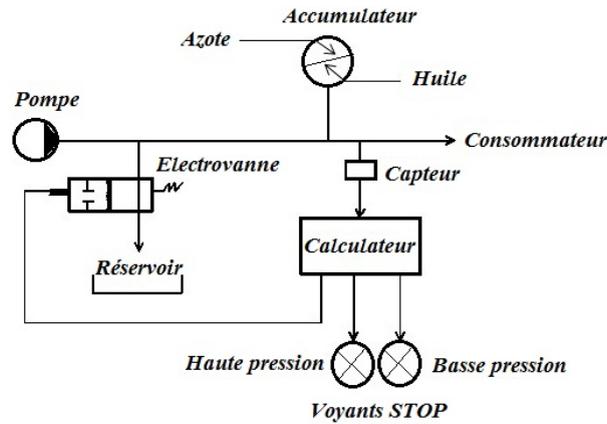


FIGURE 3.11 – Conjoncteur-disjoncteur électromécanique

Soit  $\theta$  le plus grand diviseur commun (PGCD) des temps des séjours des modes discrets c'est à dire :

$$\delta_{ik} = \beta_{ik}\theta \quad \text{for } i = 1, \dots, n,$$

avec  $\beta_{ik}$  un nombre entier non nul.

Si on choisit comme une période d'échantillonnage fixe, le plus grand diviseur commun de temps de séjour de chaque place, on peut faire fonctionner l'observateur avec un pas fixe et ne retenir comme valeurs des états estimés que celles qui correspondent aux commutations réelles. Dans ce cas, l'observateur doit calculer l'état du système avec une période d'échantillonnage fixe juste après la commutation et garder la même valeur de l'état jusqu'à l'arrivée de la prochaine commutation et ainsi, la théorie des systèmes discrets reste valable.

### 3.6.3 Exemple d'application

Dans ce paragraphe, l'approche de la détection du mode actif proposée dans le paragraphe précédent est appliquée à un exemple d'un système conjoncteur disjoncteur électromécanique. Le rôle du système électromécanique présenté dans la figure (3.11) est de fournir une pression suffisante pour les systèmes hydrauliques (par exemple les systèmes de freinage, la suspension hydraulique et la boîte de vitesses) par le contrôle de la pression d'huile dans un accumulateur [87].

Un accumulateur, représenté par une sphère, est composé de deux chambres séparées par une membrane flexible. La première est fermée et contient de l'azote, et la seconde est ouverte sur le circuit d'huile. La tâche du calculateur consiste à contrôler une électrovanne à partir des informations sur la pression de l'accumulateur fourni par le capteur. La fermeture et l'ouverture de la vanne électrique sont spécifiées en fonction de la variation de la pression  $Pr$  c'est à dire, l'électrovanne est ouverte si  $Pr \leq Pr_{\min}$  et fermée si  $Pr \geq Pr_{\max}$ . Une alarme est déclenchée lorsque  $Pr < Pr_{alarm\_min}$  or  $Pr > Pr_{alarm\_max}$ .

Le système conjoncteur disjoncteur est considéré comme un système hybride où la dynamique continue est associée à la variation de la pression et le flux du système hydraulique et la partie discrète est représentée par les configurations différentes de la variation de la dynamique continue du système et le contrôle numérique de l'électrovanne.

Initialement, l'accumulateur est plein de gaz, avec une pression  $Pr_0$ , un volume  $V_0$  et l'électrovanne est fermée. Alors que le capteur mesure le niveau actuel de pression  $Pr$  dans l'accumulateur,

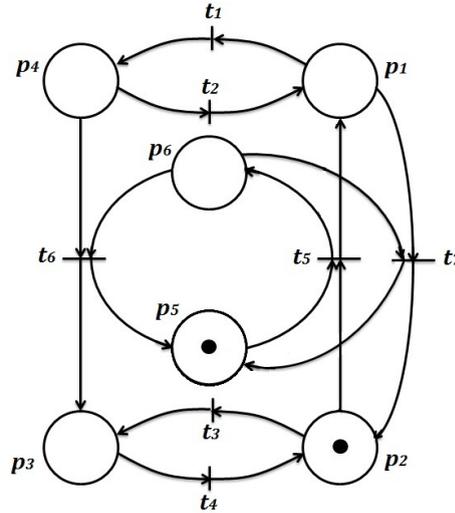


FIGURE 3.12 – Le modèle RdP de la partie discrète du système électromécanique

le calculateur ouvre l'électrovanne. Un volume  $V$  d'huile est injecté dans l'accumulateur, et donc la pression augmente (la phase de conjonction). Dans ce cas, la pression et le volume sont représentés par la formule :

$$\begin{cases} Pr = Pr_0(V_0/(V_0 - V)^\alpha) \\ dV = \phi_{in}dt - \phi_{cons}dt \end{cases} \text{ avec } \alpha = 1.4, \quad (3.31)$$

où  $V$  est le volume,  $\phi_{in}$  est l'entrée du flux d'huile,  $\phi_{cons}$  est la sortie du flux d'huile. Lorsque  $Pr > Pr_{max}$ , le calculateur ferme l'électrovanne. Par conséquent, la pompe est raccordée au réservoir, et donc la pression diminue (la phase de disjonction). La variation de volume devient :

$$dV = -\phi_{cons}dt. \quad (3.32)$$

Lorsque  $Pr < Pr_{min}$ , une nouvelle phase de conjonction commence, et ainsi de suite...

En fonction de l'état de l'électrovanne (ouverte ou fermée) et de la consommation des circuits hydrauliques (niveaux de consommation haut ou bas), on distingue quatre configurations du système [88] :

- La phase de conjonction à haute consommation lorsque l'électrovanne est ouverte et les circuits hydrauliques fortement sollicités ; la pression de l'huile dans l'accumulateur est par conséquent croissante durant cette phase.
- La phase de disjonction à forte consommation pendant la fermeture de l'électrovanne et la sollicitation des circuits hydrauliques ; la pression est donc décroissante.
- La phase de disjonction à faible consommation (ici supposée nulle) lorsque l'électrovanne est fermée et la consommation nulle ; la pression est alors constante.
- La phase de conjonction à faible consommation où l'électrovanne est ouverte et la consommation nulle ; par conséquent la pression est croissante.

La partie discrète du système électromécanique est modélisée par un RdP comme montrée dans la figure (3.12). Les places  $p_1$  et  $p_4$  représentent les configurations des phases de conjonction du système (à haute consommation et à faible consommation). Les places  $p_2$  et  $p_3$  représentent les configurations des phases de disjonction du système (à forte consommation et à faible consommation). Les places  $p_5$  et  $p_6$  représentent les états de l'électrovanne respectivement en ouverture et en fermeture.

Les transitions  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  modélisent le changement de consommation, soit vers la baisse

pour  $t_2$  et  $t_4$  ou vers la hausse pour  $t_1$  et  $t_3$ . Les transitions  $t_5, t_6$  et  $t_7$  représentent les ordres du calculateur pour commander la fermeture de l'électrovanne (pour  $t_6$  et  $t_7$ ) quand  $P \geq P_{\max}$  ou son ouverture (pour  $t_5$ ) quand  $P \leq P_{\min}$ .

La matrice d'incidence  $W$  et le vecteur de marquage initial  $M_0$  associés au modèle du RdP de la partie discrète du système présenté dans la figure (3.11) sont données par :

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce système, nous supposons que les places  $p_1, p_2$  et  $p_5$  sont observables, et les transitions  $t_2, t_4, t_5$  et  $t_7$  sont observables c'est à dire ( $n_1 = 3, n_2 = 3, m_1 = 4$  et  $m_2 = 3$ ). Les résultats

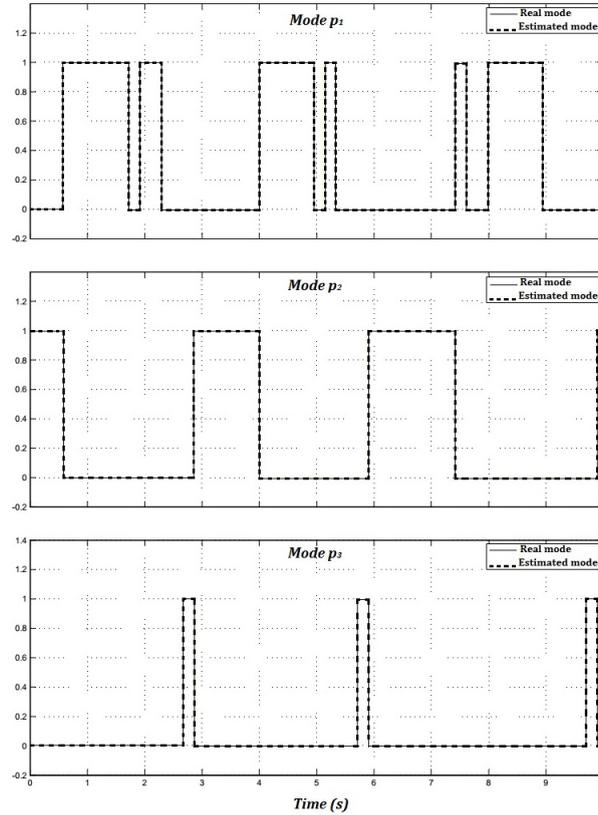


FIGURE 3.13 – **Haut** Le mode réel et estimé du  $p_1$  en fonction de  $k$ . **Milieu** Le mode réel et estimé du  $p_2$  en fonction de  $k$ . **Bas** Le mode réel et estimé du  $p_3$  en fonction de  $k$ .

des simulations apparaissent sur les figures (3.13) et (3.14).

Les figures (3.13) et (3.14) montrent que les temps de séjour dans chaque mode (mode ou la configuration) sont différents, sauf la troisième place  $p_3$ . Aussi, nous pouvons remarquer l'activation simultanée des modes discrets ( $p_5$  avec  $p_2$  ou  $p_3$  et  $p_6$  avec  $p_1$  ou  $p_4$ ).

On peut remarquer que les deux modes (réel et estimé) de chaque mode ont les mêmes conditions initiales. Cela est dû à l'initialisation de l'observateur (3.15) donnée par  $\Lambda_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_0^2$  (Condition 2 du Théorème (16)).

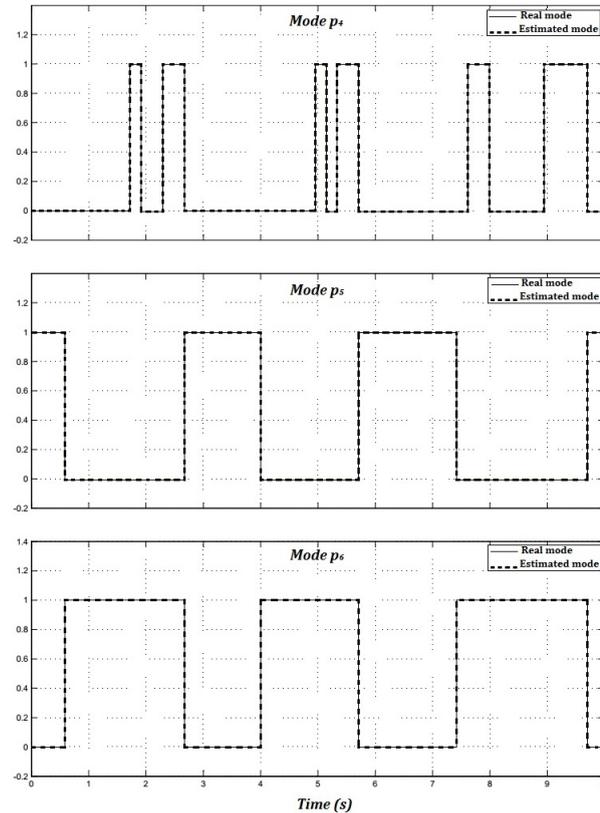


FIGURE 3.14 – **Haut** Le mode réel et estimé du  $p_4$  en fonction de  $k$ . **Milieu** Le mode réel et estimé du  $p_5$  en fonction de  $k$ . **Bas** Le mode réel et estimé du  $p_6$  en fonction de  $k$ .

### 3.7 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables. L'idée principale est basée sur l'utilisation des méthodes traditionnelles d'observabilité des systèmes descripteurs pour caractériser l'observabilité des RdPPO. Le traitement que nous avons présenté est purement algébrique et donc facile à comprendre. Aussi, les résultats d'observabilité présentés sont très importants pour résoudre le problème du choix du nombre optimal des capteurs pour les SED décrits par RdPPO surtout quand nous avons la liberté de placer les capteurs (par exemple, lorsque nous concevons le système), et donc, nous pouvons minimiser leur nombre. Nous avons également synthétisé un observateur qui permet de résoudre à la fois le problème d'estimation du marquage des places et le problème de la reconstitution de la séquence de franchissement de transitions. Une condition nécessaire de l'observateur proposé est la connaissance du marquage initial.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons utilisé l'observateur synthétisé dans la première partie pour la détection du mode discret pour une classe de SDH où la partie discrète est régie par un RdP sous l'hypothèse que l'état continu peut être complètement ou partiellement mesuré. La classe de SDH considérée représente le cas le plus général de SDH, car elle peut avoir plusieurs sous-systèmes évoluant simultanément avec des dimensions différentes. Nous avons choisi le plus grand diviseur commun de temps de séjour de chaque mode discret comme une période d'échantillonnage fixe de l'observateur afin de résoudre le problème des temps des séjours des modes discrets qui peuvent être différents.

# Chapitre 4

## Synthèse d'observateurs hybrides pour quelques classes de SDH

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>91</b>
<b>4.2</b>	<b>Synthèse d'observateur pour des systèmes linéaires à commutations</b>	<b>93</b>
4.2.1	Formulation du problème	93
4.2.2	Analyse d'observabilité	95
4.2.3	Synthèse de l'observateur hybride	96
4.2.4	Résultats de simulation	101
4.2.5	Conclusion	105
<b>4.3</b>	<b>Synthèse d'observateur pour des systèmes non linéaires à commutations</b>	<b>105</b>
4.3.1	Formulation de problème	106
4.3.2	Synthèse de l'observateur hybride	108
4.3.3	Résultats de simulation	111
4.3.4	Conclusion	113
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>

---

### 4.1 Introduction

Nous avons présenté, dans le chapitre précédent, le problème d'estimation de l'état discret pour une classe de systèmes hybrides où l'état continu est supposé partiellement ou complètement connu. Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème de l'estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret à chaque instant pour quelques classes des systèmes hybrides où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP. Il s'agit des systèmes linéaires à commutations et des systèmes non linéaires à commutations.

Nous allons présenter dans la première partie de ce chapitre, une contribution à la synthèse d'un observateur hybride pour une classe des systèmes hybrides linéaires à commutations [20]. Cette classe est caractérisée par des sous-systèmes qui ne vérifient pas les conditions classiques d'observabilité. Le but de cette partie est de concevoir un observateur hybride capable de fournir une estimation simultanée de l'état continu et de l'état discret à chaque instant. Le

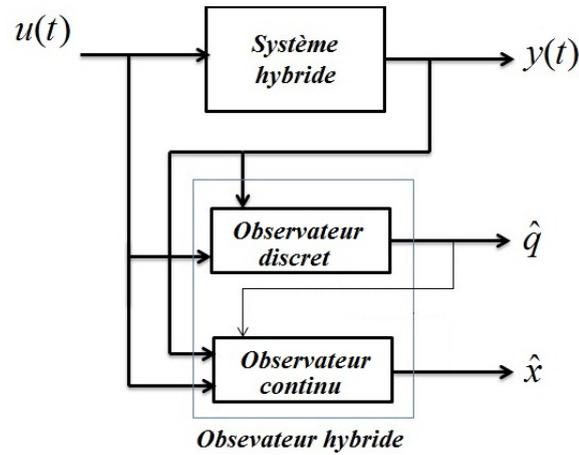


FIGURE 4.1 – Structure de l'observateur hybride 1

schéma d'observation proposé est basé sur l'estimation de l'état discret par un observateur discret en utilisant les entrées et les sorties continues du système hybride. Ensuite, on utilise l'estimation de l'état discret comme une entrée de l'observateur continu afin de donner une estimation de l'état continu comme illustré dans la figure(4.1).

Dans la deuxième partie du chapitre, nous allons proposer un observateur hybride pour une classe de systèmes non linéaires à commutations [14, 16]. Cette classe est caractérisée par des lois de commutations qui peuvent dépendre à la fois des états continus et des événements externes. Le schéma d'observation proposé est composé d'un observateur continu et d'un observateur discret en interaction (figure(4.2)). Sous l'hypothèse d'observabilité des sous systèmes, l'observateur continu est synthétisé pour la construction de l'état continu sans utiliser aucune information sur l'état discret. A partir de ces états continus, un observateur discret est synthétisé afin de donner une estimation globale de l'état discret à chaque instant.

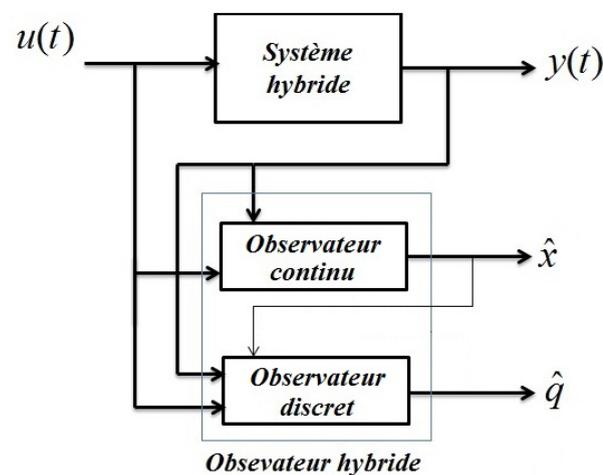


FIGURE 4.2 – Structure de l'observateur hybride 2

Dans ce chapitre, on suppose que les classes de systèmes considérées satisfont l'hypothèse (3) et l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 4.** On suppose tout au long de ce chapitre que :

- La dimension du sous-système ne change pas après le passage d'un mode à un autre.
- L'état continu du système hybride est supposé borné en temps fini sans saut.

L'hypothèse de bornitude de l'état doit concerner la globalité du SDH. En effet, les sous-systèmes peuvent parfaitement être stables alors que le système global est instable à cause des phénomènes de commutations (voir l'exemple dans [69]).

## 4.2 Synthèse d'observateur pour des systèmes linéaires à commutations

Nous nous intéressons dans cette section à la synthèse d'un observateur hybride pour une classe de systèmes linéaires à commutations. En général, un système à commutation est défini par la donnée d'un ensemble de modèles correspondant aux modes du système et une loi de commutation permettant de passer d'un mode de fonctionnement à un autre.

La classe considérée dans cette section est définie par un état hybride  $(q, x)$  composé d'un état continu  $x$  dont l'évolution est déterminée par un ensemble de sous-systèmes linéaires et d'un état discret  $q$  dont l'évolution est représentée par un réseau de Petri.

Nous allons présenter dans le second paragraphe, la classe des systèmes linéaires à commutations considérée et le schéma d'observation proposé. Dans le troisième paragraphe, nous allons présenter en détail l'observateur hybride proposé et nous terminons par un exemple illustratif pour montrer l'efficacité de l'approche proposée.

### 4.2.1 Formulation du problème

On considère la classe de systèmes linéaires à commutations où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP, donnée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) + B_q u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état continu,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système,  $u(t) \in \mathbb{R}^h$  est l'entrée du système,  $q$  est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices  $q \in \{1, 2, \dots, s\}$  avec  $s$  le nombre de sous-systèmes linéaires qui représente aussi le nombre des places du RdP. Ce dernier représente les différentes configurations du système à commutation.

Pour chaque configuration (place ou mode discret), un sous-système continu est associé. L'état discret  $q$  (mode discret) et les instants de commutation sont spécifiés suivant le marquage des places et les instants de franchissement de transitions. L'activation de chaque sous-système est spécifiée selon le vecteur de marquage de places  $M_k = [p_1, \dots, p_s]^T$  ( $k$  représente l'instant correspondant aux  $k^{\text{ème}}$  commutations), c'est à dire  $p_q = 1$ , indique que le mode  $q$  est actif.

Le passage d'un sous-système à l'autre se fait par le franchissement de transitions. Ces transitions peuvent être déclenchées par des variables continues atteignant un certain seuil

ou déclenchées par des événements externes.

**Hypothèse 5.** *On suppose que la classe des systèmes considérés est caractérisée par un ensemble de sous-systèmes continus qui ne vérifient pas les conditions classiques d'observabilité (i.e., les paires  $(A_q, C)$  ne sont pas supposées observables au sens classique).*

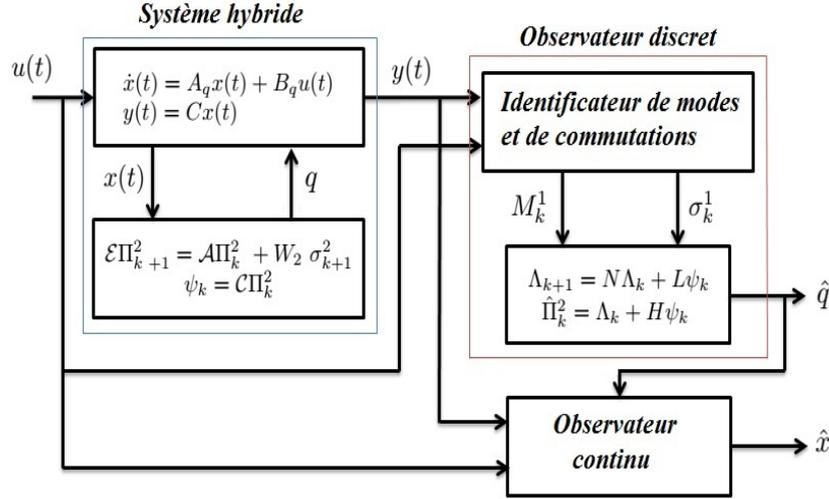


FIGURE 4.3 – Structure de l'observateur hybride proposé

Notre objectif est de synthétiser un observateur hybride capable d'identifier le mode discret  $q$  et donner une estimation pour le vecteur d'état continu  $x(t)$ . Le schéma d'observation proposé est basé sur une combinaison d'un observateur discret et d'un observateur continu en tenant compte de l'interaction des deux observateurs [20]. La structure de l'observateur hybride est indiquée sur la figure (4.3).

L'observateur discret est composé de deux blocs :

- Le premier est un identificateur des modes et des commutations. Il reçoit en entrées, l'entrée continue  $u(t)$  et la sortie continue  $y(t)$ . Son rôle est de fournir quelques modes (places du RdP) et quelques commutations (transitions du RdP) qui dépendent de l'entrée continue  $u(t)$  et la sortie continue  $y(t)$ . Les modes et les commutations sont fournis sous forme d'un vecteur de marquage des places observables  $M_k^1$  et d'un vecteur de transitions observables  $\sigma_k^1$ .
- Le deuxième bloc est un observateur à entrée inconnue qu'on a présenté dans le chapitre précédent. Il reçoit comme des informations, les sorties du premier bloc afin de donner une estimation de l'état discret  $\hat{q}$ . Cet observateur est synthétisé pour la partie discrète sous la forme d'un système descripteur comme indiqué dans la figure(4.3).

L'observateur continu est basé sur les techniques des modes glissants d'ordre supérieur, il reçoit comme entrées, l'entrée continue  $u(t)$ , la sortie continue  $y(t)$  et l'état discret estimé  $\hat{q}$  fourni par l'observateur discret. L'observateur continu utilise les informations partielles disponibles de chaque mode pour reconstruire l'état continu  $\hat{x}$ .

Avant de présenter l'observateur hybride permettant d'estimer l'état hybride du système (4.1), nous allons réaliser dans le paragraphe suivant une analyse d'observabilité pour le système (4.1).

### 4.2.2 Analyse d'observabilité

Dans ce paragraphe, une analyse d'observabilité est réalisée pour une classe de systèmes linéaires à commutations décrite par le système (4.1) où les paires  $(A_q, C)$  ne sont pas supposées observables au sens classique. Nous nous basons dans cette analyse d'observabilité sur une approche géométrique d'observabilité développée dans [128].

**Définition 26.** L'ensemble  $(q^i, u^i, y^i, x^i)$  sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  définit une trajectoire du système (4.1) avec  $i = 1, 2$ . Le système (4.1) est dit  $[t_0, t_f]$ -observable si l'égalité :

$$(q^1, u^1, y^1) = (q^2, u^2, y^2) \text{ implique } x^1(t_0) = x^2(t_0)$$

La Définition (26) donne une analyse de l'observabilité sur une trajectoire hybride du système. Cela implique que si le système (4.1) n'est pas observable au sens classique, il est possible de déterminer l'état, sur un intervalle de temps incluant  $N$  modes de fonctionnement mais non pas sur un mode.

**Proposition 4.** [128] Le système (4.1) est  $[t_0, t_f]$ -observable si et seulement si une entrée nulle et une sortie nulle sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  implique un état  $x(t_0) = 0$ .

En se basant sur la Proposition (4), l'analyse de l'observabilité du système (4.1) revient à l'étude du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_q x(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Si le système (4.2) est observable selon la Définition (26), alors le système (4.1) est également observable d'après la Proposition (4).

**Remarque 9.** Pour le système (4.2), le mode discret  $q$  change sa valeur à chaque instant de commutation  $k$ , et on note  $q = q_k$  pour  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ .

On note  $\mathcal{N}_k^w$ , ( $w \geq k$ ) : l'ensemble des états à  $t = t_{k-1}$  du système (4.2) qui génère une sortie nulle dans l'intervalle de temps  $[t_{k-1}, t_{w-1}]$ , c'est à dire :

$$\mathcal{N}_k^w = \{x(t_{k-1}) \in \mathbb{R}^n | y(t) = 0, t \in [t_{k-1}, t_{w-1}]\} \quad (4.3)$$

$\mathcal{N}_k^w$  est appelé le sous-espace non-observable dans l'intervalle  $[t_{k-1}, t_{w-1}]$ .

Sur  $[t_{k-1}, t_k]$  la matrice d'observabilité classique est représentée par :

$$G_{q_k} = \begin{bmatrix} C \\ CA_{q_k} \\ \vdots \\ CA_{q_k}^{n-1} \end{bmatrix}$$

A partir de la matrice d'observabilité  $G_{q_k}$ , on peut calculer le sous-ensemble non-observable associé à un mode  $q_k$ . Cet ensemble est donné par :

$$\mathcal{N}_k^k = \ker(G_{q_k})$$

Le sous espace non-observable associé au système (4.2), sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_k]$ , est donné par  $\mathcal{N}_1^w$ , calculé par la relation suivante [128] :

$$\mathcal{N}_1^w = \ker(G_1) \cap \left( \bigcap_{i=2}^w \prod_{j=1}^{i-1} e^{A_{q_j} \delta_j} \ker(G_{q_i}) \right) \quad (4.4)$$

où  $\delta_j$  représente le temps entre deux instants de commutation  $t_{j-1}$  et  $t_j$  (temps de séjour).

**Théorème 18.** [128] Le système (4.2) est  $[t_0, t_{w-1}]$ -observable si et seulement si :

$$\mathcal{N}_1^w = \{0\} \quad (4.5)$$

La constante  $w$  peut être alors interprétée comme le nombre minimal de modes par lesquels le système doit passer pour obtenir l'observabilité globale de l'état.

En utilisant les mesures sur l'intervalle  $[t_{k-1}, t_{w-1}]$ , en général, de plus en plus d'informations peuvent être obtenues afin de reconstruire l'état. Donc, la dimension du sous-espace non-observable diminue. La figure (4.4) présente le principe de l'observabilité avec la réduction du sous-espace non-observable [132].

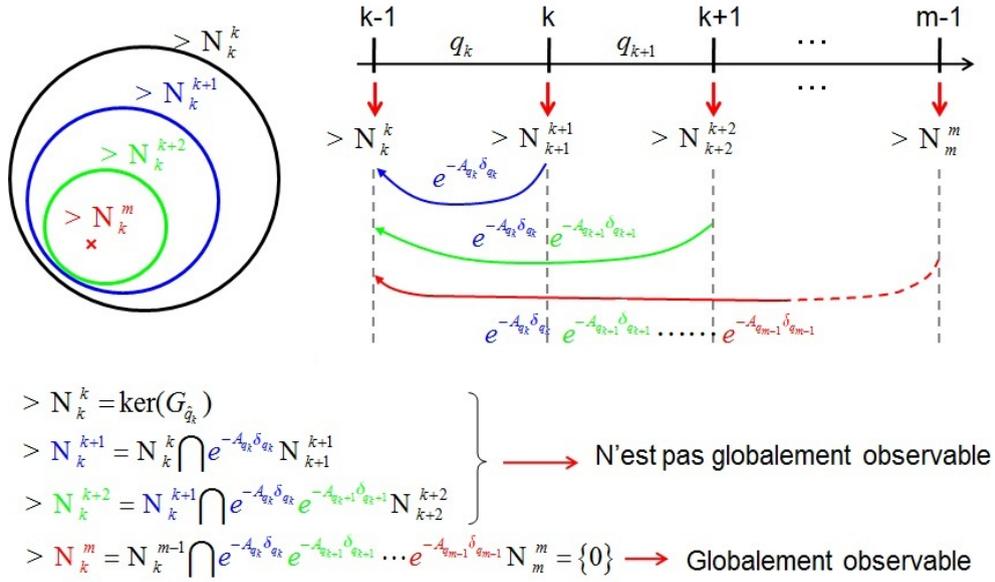


FIGURE 4.4 – Schéma du principe de l'observabilité sur un intervalle de temps hybride.

**Remarque 10.** Cette notion d'observabilité est similaire à la  $Z(TN)$ -observabilité introduite dans [91].

### 4.2.3 Synthèse de l'observateur hybride

L'objectif de cette section est la conception d'un observateur hybride capable d'estimer l'état continu  $x(t)$  et l'état discret  $q$  du système (4.1) à chaque instant. L'observateur proposé est composé d'un observateur discret proposé dans le chapitre précédent, et d'un observateur basé sur la théorie des modes glissants.

#### Synthèse de l'observateur discret

Le problème d'estimation de l'état discret ainsi que des instants de commutations du système (4.1) revient à identifier le vecteur de marquage de places  $M_k$  et le vecteur de transitions  $\sigma_k$ . L'observateur discret proposé reçoit comme entrées, l'entrée continue  $u(t)$  et la sortie continue  $y(t)$ , et son rôle est de fournir une estimation de l'état discret  $\hat{q}$ . Comme illustré sur la figure(4.3), l'observateur discret est une combinaison entre deux blocs :

**Identificateur de modes et de commutations** Le rôle de cet identificateur est d'identifier en premier temps les commutations qui dépendent des variables continues connues, par exemple, les commutations qui dépendent de l'entrée continue  $u(t)$  et/ou la sortie continue  $y(t)$ . A partir de ces commutations, certains modes discrets seront détectés. Les sorties de ce bloc sont fournies sous forme d'un vecteur de marquage des places observable  $M_k^1$  et d'un vecteur de transitions observables  $\sigma_k^1$ . Ces sorties sont considérées comme des entrées pour le deuxième bloc afin de donner une estimation du vecteur de marquage complet  $M_k$ .

**Observateur discret** C'est un observateur de RdP, il utilise les informations de certaines places et transitions fournies par le premier bloc afin de donner une estimation du vecteur de marquage des places  $M_k$  et le vecteur de transitions  $\sigma_k$ . Une fois le vecteur du marquage donné le mode discret est estimé.

Nous rappelons la forme de l'observateur :

$$\begin{cases} \Lambda_{k+1} = N\Lambda_k + L\psi_k \\ \hat{\Pi}_k^2 = \Lambda_k + H\psi_k \end{cases} \quad (4.6)$$

Où  $\Lambda_k \in \mathbb{N}^{n+m_1}$  est l'état de l'observateur,  $\psi_k$  est la sortie,  $k$  est l'instant de commutation et  $N, L$  et  $H$  sont des matrices de dimensions appropriées à calculer.

L'observateur (4.6) proposé est utilisé afin de reconstruire le vecteur global composé par  $s$  places et  $m_1$  transitions à chaque instant à partir d'un ensemble de marquages des places observables et des transitions observables fournies par l'identificateur de modes et de transitions. Une fois le vecteur global donné le mode discret est estimé et on peut définir l'instant de commutation estimé  $\hat{t}_k$  comme étant :

$$\hat{t}_k = \min(t \in \mathbb{R}^+ \mid t > \hat{t}_{k-1} + \delta \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}_k \neq \hat{\Pi}_{k-1}) \quad (4.7)$$

### Synthèse de l'observateur continu

Dans cette partie, nous proposons un observateur basé sur les techniques des modes glissants d'ordre supérieur et sur l'estimation de l'état discret  $\hat{q}$  fournis par l'observateur discret. L'observateur proposé est composé de deux observateurs, l'un qui assure la reconstruction de l'erreur d'observation et l'autre qui intervient à chaque instant de commutation de l'observateur. Le but est de rassembler les informations partielles de chaque mode du système hybride afin de reconstruire l'état continu  $\hat{x}$ .

Avant de détailler l'observateur proposé, on considère l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 6.** *On suppose que :*

*Le système (4.1) est  $[t_0, t_{w-1}]$ -observable. A partir de la Définition (26) et du Théorème (18), on en déduit qu'il existe une constante  $w \in \mathbb{N}$  telle que :*

$$\mathcal{N}_1^{w+1} = \{0\}$$

*La constante  $w$  peut être interprétée comme le nombre minimal de commutations requis pour obtenir l'observabilité globale de l'état.*

**Remarque 11.** *Si l'hypothèse (6) est vérifiée, Le système (4.1) est observable de manière persistante, cela signifie qu'il existe une constante  $w \in \mathbb{N}$  telle que pour chaque instant  $k$  :*

$$\mathcal{N}_{k-w_k}^k = \{0\} \quad \forall k \geq w + 1$$

Les constantes  $w_k$  peuvent être interprétées comme le nombre de commutations nécessaires pour reconstruire l'état à chaque instant  $t_k$ .

Considérons l'observateur proposé décrit par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{q}_k} \hat{x}(t) + B_{\hat{q}_k} u(t), \quad t \in [\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k) \quad (4.8a)$$

$$\hat{x}(\hat{t}_k) = \hat{x}(\hat{t}_k^-) - \xi_{\hat{q}_k}(\hat{t}_k^-) \quad (4.8b)$$

L'observateur proposé (4.8) combine une équation (4.8a) composée des mêmes matrices que le système (4.1) et une équation (4.8b) qui assure la convergence de l'erreur d'estimation. Le vecteur de correction  $\xi_{\hat{q}_k}$  peut être vu comme l'approximation de l'erreur d'estimation de l'état et intervient à chaque instant de commutation. Il résulte d'un observateur à modes glissants d'ordre supérieur qui accumule les informations partielles sur l'état afin de faire converger vers zéro l'erreur d'observation :

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (4.9)$$

Les matrices d'observabilité  $G_{\hat{q}_k}$  peuvent être calculées pour chaque paire  $(A_{\hat{q}_k}, C)$ . On choisit une matrice  $Z^{\hat{q}_k}$  telle que ses colonnes forment une base orthonormée de  $Im(G_{\hat{q}_k}^T)$  et une matrice  $\bar{Z}^{\hat{q}_k}$  telle que ses colonnes forment une base orthonormée de  $ker(G_{\hat{q}_k})$ . Par construction,  $Z^{\hat{q}_k}$  (resp.  $\bar{Z}^{\hat{q}_k}$ ) représente la partie observable (resp. non observable) de l'état. Ainsi, sur l'intervalle de temps  $[\hat{t}_{k-1}, t_k)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} z^k &= (Z^{\hat{q}_k})^T \tilde{x} \\ \bar{z}^k &= (\bar{Z}^{\hat{q}_k})^T \tilde{x} \\ S_{\hat{q}_k} (Z^{\hat{q}_k})^T &= (Z^{\hat{q}_k})^T A_{\hat{q}_k} \\ R_{\hat{q}_k} (Z^{\hat{q}_k})^T &= C \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec  $z^k \in \mathbb{R}^l$  représente la partie observable de  $\tilde{x}$ ,  $\bar{z}^k \in \mathbb{R}^{n-l}$  est la partie non-observable de  $\tilde{x}$ ,  $S_{\hat{q}_k} \in \mathbb{R}^{l \times l}$  et  $R_{\hat{q}_k} \in \mathbb{R}^{p \times l}$ .

On peut mettre en évidence que la paire  $(S_{\hat{q}_k}, R_{\hat{q}_k})$  est observable i.e.

$$rang(F_{\hat{q}_k}) = rang \begin{pmatrix} S_{\hat{q}_k} \\ S_{\hat{q}_k} R_{\hat{q}_k} \\ \vdots \\ S_{\hat{q}_k} R_{\hat{q}_k}^{l-1} \end{pmatrix} = l$$

Un observateur à modes glissants peut être utilisé afin de reconstruire la partie observable  $z^k$ . Il s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}^k(t) &= S_{\hat{q}_k} \hat{z}^k(t) + F_{\hat{q}_k}^{-1} \vartheta^k(t), \quad \forall t \in [\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k) \\ \hat{z}^k(\hat{t}_{k-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

où les termes de correction sont définis par :

$$\vartheta^k = \begin{bmatrix} -\beta_1 J^{\frac{1}{l}} |R_{\hat{q}_k} \hat{z}^k - \tilde{y}|^{\frac{l-1}{l}} \text{sign}(R_{\hat{q}_k} \hat{z}^k - \tilde{y}) \\ -\beta_2 J^{\frac{1}{l-1}} |\nu_2^k - \nu_1^k|^{\frac{l-2}{l-1}} \text{sign}(\nu_2^k - \nu_1^k) \\ \vdots \\ -\beta_l J \text{sign}(\nu_l^k - \nu_{l-1,i}^k) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Le différentiateur par modes glissants d'ordre supérieur [99] est utilisé comme une dynamique auxiliaire. Il a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1^k = \nu_2^k - \beta_1 J^{\frac{1}{l}} |R_{\hat{q}_k} \hat{z}^k - \tilde{y}|^{\frac{l-1}{l}} \text{sign}(R_{\hat{q}_k} \hat{z}^k - \tilde{y}) \\ \dot{\nu}_2^k = \nu_3^k - \beta_2 J^{\frac{1}{l-1}} |\nu_2^k - \dot{\nu}_1^k|^{\frac{l-2}{l-1}} \text{sign}(\nu_2^k - \dot{\nu}_1^k) \\ \vdots \\ \dot{\nu}_l^k = -\beta_l J \text{sign}(\nu_l^k - \dot{\nu}_{l-1}^k) \end{cases} \quad (4.13)$$

D'après [99],  $J$  est une constante de Lipschitz connue pour la fonction  $R_{\hat{q}_k} S_{\hat{q}_k}^l z^k$ . Les constantes  $\beta_j$  sont choisies récursivement et suffisamment élevées.

**Théorème 19.** [20] *Utilisant l'observateur par modes glissants (4.11) avec les termes de correction (4.12) et supposant que les constantes  $\beta_j$  et  $J$  sont bien choisies, l'erreur d'estimation sur l'état  $e_z(t) = \hat{z}^k(t) - z^k(t)$  converge vers zéro en temps fini, i.e.*

$$e_z(t) = O(\delta), \quad \forall t \in [\hat{t}_{k-1} + \Delta, t_k) \quad (4.14)$$

où  $\delta$  représente le temps entre deux instants de commutation  $t_{k-1}$  et  $t_k$  et  $\delta > \Delta > 0$ .

**Preuve :** D'après (4.9), l'erreur d'observation est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} = A_{\hat{q}_k} \tilde{x} \quad (4.15)$$

A partir de (4.10) et (4.15), la dynamique de l'état observable satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{z}^k(t) &= S_{\hat{q}_k} z^k(t), \quad t \in [\hat{t}_{k-1}, t_k) \\ \tilde{y}(t) &= R_{\hat{q}_k} z^k(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

En utilisant la transformation  $\pi_{\hat{q}_k} = F_{\hat{q}_k} z^k(t)$ , le système linéaire observable (4.16) peut être transformé sous la forme triangulaire d'observabilité suivante :  $\forall j = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\pi}}_j &= \bar{S}_j \hat{\pi}_j + \bar{T}_j \\ \tilde{y}_j &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \hat{\pi}_j \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec :

$$\pi_{\hat{q}_k} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_p \end{bmatrix}, \bar{S}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l} \text{ et } \bar{T}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_j S_j^l z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l$$

D'après [99], l'observateur suivant

$$\dot{\hat{\pi}}_{\hat{q}_k} = \bar{S}_{\hat{q}_k} \hat{\pi}_{\hat{q}_k} + v^k \quad (4.18)$$

avec

$$\bar{S}_{\hat{q}_k} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \bar{S}_p \end{bmatrix}$$

assure la stabilisation de l'erreur d'observation  $\hat{\pi}_{\hat{q}_k} - \pi_{\hat{q}_k}$  en temps fini. Utilisant le changement de coordonnées  $\pi_{\hat{q}_k} = F_{\hat{q}_k} z^k(t)$ , on peut donc conclure que l'observateur par modes glissants (4.11), avec le terme de correction (4.12), fournit une convergence de l'erreur d'observation  $e_z(t) = \hat{z}^k(t) - z^k(t)$  en un temps fini.  $\square$

L'information partielle de l'état est alors accumulée pour obtenir une approximation de l'erreur d'estimation. Cette approximation est projetée à l'instant actuel en utilisant la matrice de projection d'état suivante :

$$\Phi_i^j = \prod_{l=j}^{i+1} (e^{A_{\hat{q}_l} \delta_{l_i}}), \quad j > i \quad (4.19)$$

avec  $\Phi_i^i = I$ . On définit également la matrice  $\Theta_i^k$  telle que :

$\forall i \in \{k-w, \dots, k\}$ ,

$$Im(\Theta_i^k) = Im(\Phi_i^k Z^{\hat{q}_i})^\perp \quad (4.20)$$

L'expression de  $\Theta_i^k$  dans (4.20) représente les différentes composantes observables du système qui ont été transportées à l'instant  $t_k^-$ . On peut ensuite rassembler les différents  $\Theta_i^k$  calculés pour les  $w$  derniers modes, i.e :

$$\Theta_k = [\Theta_k^k \dots \Theta_{k-w}^k]$$

Finalement, en introduisant le vecteur suivant :

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} (\Theta_k^k)^T \Phi^k Z^{\hat{q}_k} z^k \\ \vdots \\ (\Theta_{k-w}^k)^T \left( \Phi_{k-w}^k Z^{\hat{q}_{k-w}} \hat{z}^{k-w} - \sum_{l=k-w}^{k-1} \Phi_l^k \xi_{\hat{q}_l} \right) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

et utilisant les informations sur l'intervalle de temps  $[\hat{t}_{k-w-1}, \hat{t}_k)$ , on peut calculer le vecteur de correction :

$$\xi_{\hat{q}_k}(\hat{t}_k^-) = \begin{cases} ((\Theta_k)^T)^\dagger \Omega_k & \text{if } k > w \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4.22)$$

avec  $(\Theta_k^T)^\dagger = (\Theta_k (\Theta_k^T))^{-1} \Theta_k$ . La valeur de  $\xi$  ainsi calculée représente une reconstruction de l'erreur d'estimation en fonction des données observables. Elle peut être ensuite prise en compte au niveau des instants de commutation de l'observateur et ainsi faire converger l'état estimé.

**Théorème 20.** [20] *Considérons le système (4.1). Utilisant l'observateur discret (4.6), l'observateur hybride continu, défini par les équations (4.8a-4.8b), assure que l'erreur d'estimation  $\tilde{x}$  converge vers zéro.*

**Preuve :** En utilisant l'observateur discret (3.15), on obtient des estimations exactes de l'état discret et le temps de commutation.

D'après [128], à l'instant  $t_k^-$ , l'erreur d'estimation est définie comme :

$$\tilde{x}(t_k^-) = Z^{q_k} z^k(t_k^-) + \bar{Z}^{q_k} z^k(t_k^-) \quad (4.23)$$

En utilisant la matrice de projection, on peut obtenir la relation suivante :

$$\tilde{x}(t_j^-) = \Phi_i^j \tilde{x}(t_i^-) - \sum_{l=i}^{j-1} \Phi_l^j \xi_l(t_l^-) \quad (4.24)$$

Puisque  $\Theta_i^k$  est orthogonal à  $Im(\Phi_i^k \bar{Z}^{q_i})$ ,  $\forall i = k, \dots, k-w$ , on peut en déduire :

$$(\Theta_i^k)^T \tilde{x}(t_k^-) = (\Theta_i^k)^T \left( \Phi_i^k Z^{q_i} z^i(t_i^-) - \sum_{l=i}^{k-1} \Phi_l^k \xi_l(t_l^-) \right) \quad (4.25)$$

Utilisant  $(\Theta_k^T)^\dagger$ , on peut estimer  $\tilde{x}(t_k)$  comme :

$$\tilde{x}(t_k) = - [V_k^k \quad \dots \quad V_{k-w}^k] \begin{bmatrix} Z^{q_k} e_z(t_k^-) \\ \vdots \\ Z^{q_{k-w}} e_z(t_{k-w}^-) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

avec

$$[V_k^k \quad \dots \quad V_{k-w}^k] = (\Theta_k^T)^\dagger \begin{bmatrix} \Theta_k^{kT} \Phi_k^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\Theta_{k-w}^k)^T \Phi_{k-w}^k \end{bmatrix}$$

D'après le Théorème (19), l'erreur d'estimation converge vers zéro.  $\square$

#### 4.2.4 Résultats de simulation

Nous présentons dans cette partie quelques résultats de simulation afin de montrer l'efficacité de l'observateur hybride proposé [20].

Considérons le système linéaire à commutation donnée dans l'équation (4.1), avec  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ ,  $q = \{1, 2, 3, 4\}$ , et les matrices qui correspondent aux différents modes, définies comme suit :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.5 & -2.5 & 1 & -2 \\ -2.5 & -2.5 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.53 & -0.67 & 1.61 & 0 \\ 0.17 & 0.03 & -1.21 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.07 & -0.21 & 0 & 4.34 \\ -0.78 & -0.92 & 0 & -4.14 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.91 & -1.91 & 0 & 0.81 \\ 0.91 & -1.91 & 0 & -0.61 \\ 10.6 & -10.6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie discrète du système considéré est modélisée par un RdP comme illustrée dans la figure (4.5). Les places  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  représentent les différentes configurations (modes discrets) du système à commutation (4.1). Les transitions représentent les conditions des commutations entre les sous-systèmes continus et sont données dans la figure (4.5).

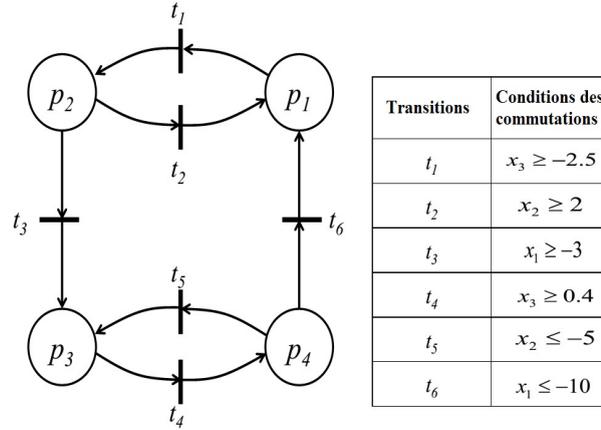


FIGURE 4.5 – Le modèle RdP et les conditions de transition associées.

Avant de synthétiser l'observateur hybride, il faut noter que les sous-systèmes continus représentés par les matrices d'observabilité suivantes :

$$F_{\hat{q}=1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.5 & -2.5 & 1 & -2 \\ -2.5 & -2.5 & 1 & -2 \\ 11.5 & 11.5 & -5 & 10 \\ 11.5 & 11.5 & -5 & 10 \\ -52.5 & -52.5 & 23 & -46 \\ -52.5 & -52.5 & 23 & -46 \end{bmatrix}, F_{\hat{q}=2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.53 & -0.67 & 1.61 & 0 \\ 0.17 & 0.03 & -1.21 & 0 \\ 0.16 & 0.33 & -1.65 & 0 \\ -0.08 & -0.113 & 1.44 & 0 \\ -0.03 & -0.1 & 1.51 & 0 \\ 0.02 & 0.05 & -1.44 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{\hat{q}=3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.07 & -0.21 & 0 & 4.34 \\ -0.78 & -0.92 & 0 & -4.14 \\ -4.17 & -4.13 & 0 & -42.83 \\ 4.91 & 5.15 & 0 & 41.82 \\ 46.34 & 47.51 & 0 & 427.34 \\ -46.18 & -47.59 & 0 & -418.23 \end{bmatrix}, F_{\hat{q}=4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.91 & -1.91 & 0 & 0.81 \\ 0.91 & -1.91 & 0 & -0.61 \\ -1.72 & 1.1 & 0 & -1.33 \\ -0.3 & 2.52 & 0 & 4.34 \\ 0.77 & 2.52 & 0 & 3.28 \\ -2.32 & -8.58 & 0 & -19.14 \end{bmatrix}.$$

ne sont pas observables au sens classique (le rang de chaque matrice  $F_{\hat{q}}$  n'est pas plein).

La matrice d'incidence  $W$  et le vecteur de marquage initial  $M_0$  associés au modèle du RdP présenté dans la figure (4.5) sont donnés par :

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les transitions qui dépendent des variables d'états continues  $x_1$  et  $x_2$  (les sorties mesurées du système considéré) sont considérées comme des transitions observables  $\sigma_k^1$ . Par conséquent, les places  $p_1$  et  $p_3$  sont des places observables i.e  $M_k^1$  (car elles peuvent être détectées à partir des transitions observables).

À partir de la valeur connue  $\psi_k = [M_k^1, \sigma_k^1]^T$ , l'observateur discret est synthétisé afin d'estimer l'état discret  $\hat{q}$  en temps réel. La figure (4.6) montre le mode discret réel et le mode discret estimé.

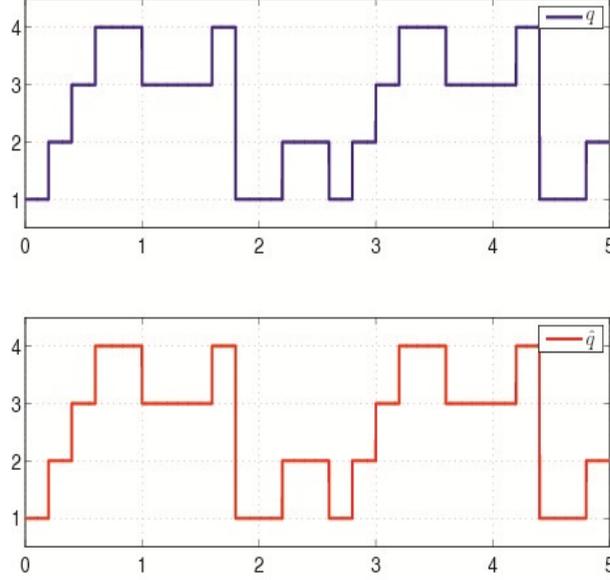


FIGURE 4.6 – Le mode réel  $q$  et le mode estimé  $\hat{q}$

On peut constater à partir de la figure (4.6) que les modes sont correctement identifiés et aussi, on peut remarquer que les deux modes (réel et estimé) possèdent la même condition initiale, et cela est dû à l'initialisation de l'observateur (4.6) qui doit être donné par  $\Lambda_0 = \mathcal{U}\mathcal{E}\Pi_0^2$  (Condition 2 du Théorème (16)).

A partir de l'état discret estimé  $\hat{q}$ , On peut synthétiser un observateur continu de type (4.8) afin de reconstruire l'état continu  $\hat{x}$  à chaque instant.

Pour que l'hypothèse d'observabilité (6) soit satisfaite, on prend le nombre minimal de commutations  $w = 3$  afin d'obtenir l'observabilité globale de l'état. La valeur de  $w$  est calculée en fonction de l'état discret  $\hat{q}$  à partir de l'équation (4.4) et de la remarque (11).

Calculons maintenant les matrices  $Z^{\hat{q}k}$  associées à la base orthonormée de  $Im(G_{\hat{q}k}^T)$  :

$$Z^{\hat{q}=1} = \begin{bmatrix} -0.58 & 0.7 & -0.4 \\ -0.58 & -0.7 & -0.4 \\ 0.25 & 0 & -0.36 \\ 0.5 & 0 & 0.73 \end{bmatrix}, Z^{\hat{q}=2} = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.59 & -0.79 \\ -0.16 & 0.77 & 0.61 \\ 0.97 & 0.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z^{\hat{q}=3} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.59 & 0.79 \\ -0.11 & -0.79 & -0.60 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.98 & 0.15 & -0.01 \end{bmatrix}, Z^{\hat{q}=4} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.57 & -0.81 \\ -0.42 & -0.76 & -0.48 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & 0.29 & 0.32 \end{bmatrix}$$

Il est remarquable que les modes ont un sous-espace observable de dimension 3, c'est à dire  $rang Z^{\hat{q}k} = 3$  pour  $q = 1, 2, 3, 4$ . Donc, à partir de l'équation (4.10) et l'équation (4.15),

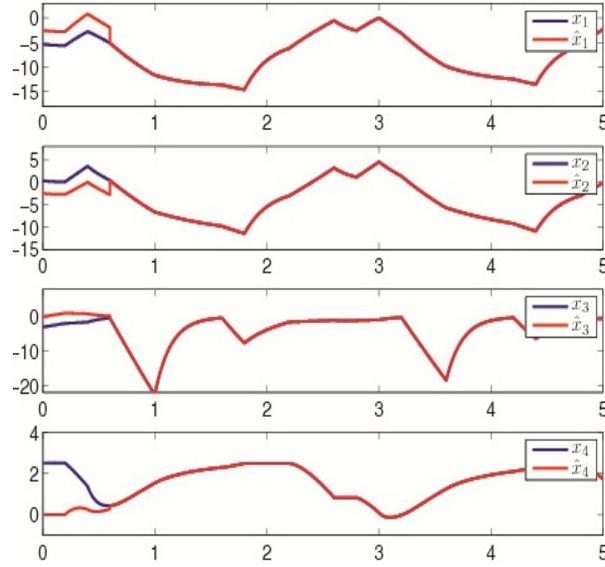


FIGURE 4.7 – Les états continus réels  $x_j$  et les états estimés  $\hat{x}_j$  avec  $j = 1, \dots, 4$

les matrices d'état  $S^{\hat{q}^k}$  de l'état observable  $z^k$  sont données comme :

$$S^{\hat{q}^1} = \begin{bmatrix} -4.56 & 0 & 0.0027 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3.79 & 0 & -0.43 \end{bmatrix}, S^{\hat{q}^2} = \begin{bmatrix} -0.97 & -0.12 & 0.01 \\ -0.08 & -0.44 & -0.08 \\ -2.13 & 0.31 & -0.08 \end{bmatrix},$$

$$S^{\hat{q}^3} = \begin{bmatrix} -9.99 & -0.003 & 0 \\ 0.69 & -0.97 & -0.001 \\ -6.17 & 0.36 & -0.01 \end{bmatrix}, S^{\hat{q}^4} = \begin{bmatrix} -4.24 & -0.11 & -0.05 \\ 0.22 & -0.40 & 0.26 \\ 0.73 & -2.99 & -0.34 \end{bmatrix}$$

et les matrices des sorties  $R^{\hat{q}^k}$  de l'état observable  $z^k$  sont :

$$R^{\hat{q}^1} = \begin{bmatrix} -0.58 & 0.70 & -0.4 \\ -0.58 & -0.7 & -0.4 \end{bmatrix}, R^{\hat{q}^2} = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.59 & -0.79 \\ -0.16 & 0.77 & 0.61 \end{bmatrix},$$

$$R^{\hat{q}^3} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.59 & 0.79 \\ -0.11 & -0.79 & -0.6 \end{bmatrix}, R^{\hat{q}^4} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.57 & -0.81 \\ -0.42 & -0.76 & -0.48 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation pour l'observateur continu sont illustrés dans les figure (4.7) et (4.8). La figure (4.7) représente les états continus réels  $x_j$  et les états estimés  $\hat{x}_j$  avec  $j = 1, \dots, 4$ . On peut constater que les états continus estimés convergent vers les états continus réels de système en temps fini.

La figure (4.8) représente les erreurs d'estimation de l'état continu  $\hat{x}_j - x_j$  avec  $j = 1, \dots, 4$  et on remarque que l'erreur d'estimation de l'état continu tend vers zéro après que le système ait commuté 3 fois. Ce nombre de commutations représente le nombre de commutations nécessaires pour reconstruire l'état continu.

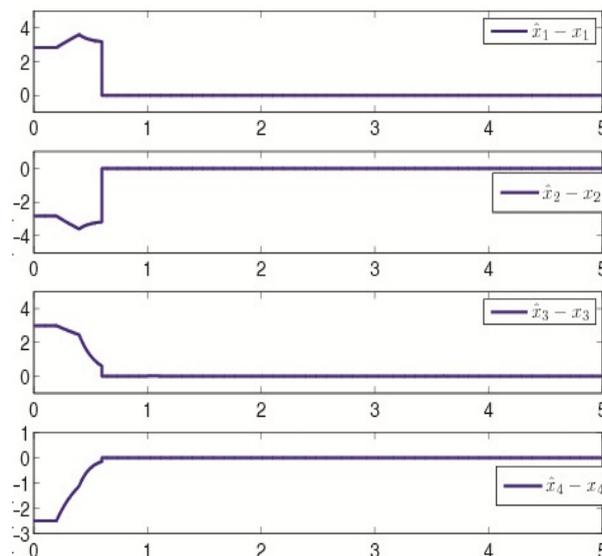


FIGURE 4.8 – Les erreurs d'estimation  $\hat{x}_j - x_j$  avec  $j = 1, \dots, 4$

### 4.2.5 Conclusion

Dans cette section, un observateur hybride a été conçu afin de résoudre le problème de l'estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret à chaque instant pour une classe de systèmes linéaires à commutations où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP. Cette classe peut avoir des modes dans lequel l'état continu n'est pas complètement observable. L'observateur hybride proposé est composé d'un observateur discret et d'un observateur continu en interaction. L'observateur discret est basé sur un observateur à entrée inconnue pour détecter le mode actif à partir de la connaissance de certaines conditions de commutations qui dépendent de l'entrée continue  $u(t)$  et de la sortie continue  $y(t)$ . L'observateur continu est basé sur les techniques d'observation par modes glissants d'ordre supérieur, il utilise l'estimation de l'état discret fournie par l'observateur discret et les informations partielles disponibles de chaque mode pour reconstruire l'état continu. Les résultats des simulations montrent la convergence de l'observateur et confirment le bien fondé de la méthode proposée.

## 4.3 Synthèse d'observateur pour des systèmes non linéaires à commutations

Dans cette section, nous nous intéressons à la synthèse d'un observateur hybride pour une classe de systèmes non linéaires à commutation, où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP. Les systèmes à commutations considérés, sont caractérisés par des lois de commutation qui peuvent dépendre à la fois des états continus et des événements externes. L'observateur proposé est composé d'un observateur discret et d'un observateur continu en interaction. L'observateur continu est basé sur une approche par modes glissants pour la construction de l'état continu sans utiliser aucune information sur l'état discret, après la mise du système d'origine sous la forme canonique d'observabilité. L'observateur discret est un observateur de type Luenberger d'ordre réduit, son rôle est de fournir le mode discret et les instants de commutation du système à chaque instant par l'estimation du vecteur des

marquages des places et le vecteur des transitions [14, 22].

Nous présenterons dans un premier temps, la classe de systèmes considérés et le schéma d'observation proposé. Ensuite, un observateur hybride composé d'une partie continue et d'une partie discrète sera proposé afin de donner une estimation de l'état hybride. Enfin, nous terminerons par un exemple académique permettant d'illustrer la méthode proposée.

### 4.3.1 Formulation de problème

De façon générale, un système à commutation est défini par la donnée d'un ensemble de modèles correspondant aux modes du système et une loi de commutation permettant de passer d'un mode de fonctionnement à un autre. On considère le système hybride non linéaire à commutation où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP, donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = F_q(x) \\ y = h(x) \end{cases} \text{ pour } q = \{1, \dots, s\} \quad (4.27)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état continu,  $y \in \mathbb{R}$  est la sortie du système.  $q$  est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices  $q = \{1, 2, \dots, s\}$  avec  $s$  le nombre de sous-systèmes non linéaires, il représente aussi le nombre des places du RdP. La sortie du système  $y = h(x)$  a la même expression indépendamment du mode discret  $q$ , et donc on ne peut pas déterminer l'état discret à partir de la connaissance de l'expression de  $h(x)$ .

L'état discret  $q$  (mode discret) et les instants de commutation sont spécifiés suivant le marquage des places et les instants de franchissement de transitions. La présence d'un jeton dans une place  $q$  du RdP indique que le sous-système  $F_q(x)$  est actif avec  $q = \{1, 2, \dots, s\}$ . Le passage d'un sous-système à l'autre se fait par des lois de commutation. Ces commutations (transitions) peuvent dépendre à la fois des états continus et des événements externes.

Avant de présenter la structure de l'observateur proposé, une question doit évidemment être posée : le système est-il observable ou non ? Cette question a été résolue dans [46] dans le cadre de systèmes à commutations d'un point de vue algébrique pour les systèmes linéaires et d'un point de vue géométrique pour les systèmes non linéaires.

Pour garantir l'observabilité du système hybride, nous considérons l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 7.** *On suppose tout au long de cette section que :*

*Pour  $q = \{1, \dots, s\}$  la codistribution :*

$$\{dh_q, dL_{F_q}h_q, \dots, dL_{F_q}^{n-1}h_q\}$$

*est de rang  $n$  au point considéré, ceci implique que chaque sous-système est localement régulièrement observable.*

Sous l'hypothèse (7), le système (4.27) peut être transformé sous la forme canonique d'observabilité en utilisant le difféomorphisme suivant :

pour  $q = 1, \dots, s$

$$z = \phi_q(x) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \quad (4.28)$$

$$= \left\{ h, dh, dL_{F_q}h, \dots, dL_{F_q}^{n-1}h \right\}$$

Finalement, le système hybride sous la forme canonique d'observabilité s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = f_q(z) \\ y = h_q(z) = z_1 \end{cases} \quad \text{for } q = \{1, \dots, s\} \quad (4.29)$$

où  $z \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état, le champs de vecteur  $f_q(z)$  est suffisamment dérivable,  $y$  est la sortie du système.

On remarque que pour le système (4.27), il est nécessaire de savoir lequel des sous-systèmes est actif afin de reconstruire l'état continu. Alors, qu'il n'est pas nécessaire de connaître le mode discret après la transformation du système (4.27) en système (4.29). Ainsi, la forme canonique d'observabilité est utilisée afin d'obtenir l'estimation de  $z$  sans utiliser aucune information sur la dernière ligne de la dynamique et sans avoir aucune information sur l'état discret  $q$ . Le schéma global de l'observateur proposé est donné dans la figure (4.9).

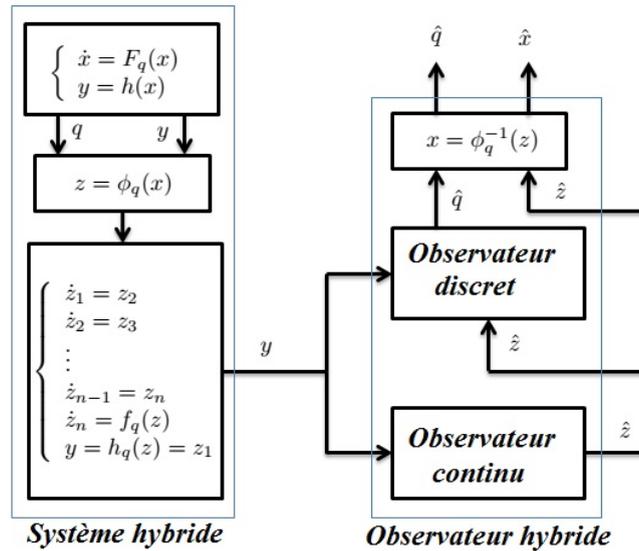


FIGURE 4.9 – Structure de l'observateur hybride

L'objectif de l'observateur hybride est d'estimer le mode discret et l'état continu du système hybride à chaque instant. Le schéma d'observation proposé dans la figure (4.9) est composé d'un observateur continu et d'un observateur discret en interaction. Après la mise du système d'origine sous la forme canonique d'observabilité, un observateur par modes glissants est synthétisé afin de reconstruire l'état continu sans utiliser aucune information sur l'état discret.

A partir de ces états continus, l'observateur continu peut détecter quelques modes discrets par la détermination de la fonction de commutation lorsque la commutation dépend de

l'état continu. Par contre, dans le cas où la commutation dépend d'un événement externe, les modes discrets estimés par l'observateur continu sont considérés comme des modes observables par l'observateur discret afin de donner une estimation globale de l'état discret à chaque instant.

L'observateur discret est un observateur de type Luenberger d'ordre réduit, son rôle est de fournir le mode discret et les instants de commutation du système à chaque instant.

### 4.3.2 Synthèse de l'observateur hybride

Nous nous intéressons dans cette partie à la synthèse d'un observateur hybride pour des systèmes à commutations non linéaires où l'évolution de l'état discret est représentée par un RdP. Nous proposons un observateur hybride composé d'un observateur discret et d'un observateur continu. L'approche que nous proposons pour l'estimation du marquage discret du système est inspirée de celle développée dans [93], aussi, nous nous intéresserons aux observateurs à mode glissant d'ordre supérieur et notamment le différentiateur exact [98]. Nous insisterons particulièrement sur l'utilisation de ce type d'observateur pour les systèmes à commutations mis sous forme canonique d'observabilité pour obtenir les états continus du système.

#### Observateur continu

La technique des modes glissants est liée à la théorie des systèmes à structure variable. Elle dispose d'avantages indéniables tels que la robustesse vis à vis des perturbations et la capacité de tenir naturellement compte de la structure variable des SDH. Malheureusement, quelques difficultés peuvent apparaître à cause du phénomène de chattering, cela peut entraîner une mauvaise décision de commutation entre les sous-systèmes lorsque la trajectoire est au voisinage de la surface de commutation.

Afin d'éviter complètement ce problème, nous proposons un observateur à mode glissant d'ordre 2 (le différentiateur robuste) basé sur le (Super Twisting Algorithm) pour les systèmes non linéaires à commutations après la transformation du système d'origine sous forme canonique.

Le différentiateur robuste basé sur le "Super Twisting Algorithm" a été introduit dans [98]. Cet algorithme a été utilisé pour un système mécanique à commutations dans [123]. Le "Super Twisting Algorithm" (représenté dans la figure (4.10)) est donné par les équations suivantes [98] :

$$\Sigma_{obs} = \begin{cases} u(e_1) = u_1 + \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{u}_1 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \lambda_1, \alpha_1 > 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

$e_1$  est la différence entre l'état réel et l'état estimé,  $\lambda_1, \alpha_1$  sont des paramètres positifs de l'observateur,  $u_1$  est la sortie du différentiateur et

la fonction  $\text{sign}$  est définie comme :

$$\text{sign}(e_1) = \begin{cases} +1 & \text{if } e_1 > 0 \\ -1 & \text{if } e_1 < 0 \\ \in [-1, 1] & \text{if } e_1 = 0 \end{cases}$$

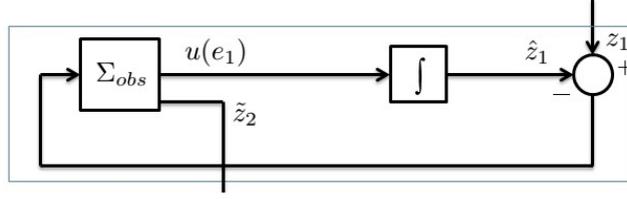


FIGURE 4.10 – Structure de l'observateur "Super Twisting Algorithm"

Le différentiateur est appliqué au sous-système de (4.29) et la structure du différentiateur appliquée pour un système d'ordre  $n$  sous la forme canonique est donnée dans la figure (4.11).

L'observateur à modes glissants d'ordre 2 proposé est de la forme [28] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \tilde{z}_2 + \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\tilde{z}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = E_1 [\tilde{z}_3 + \lambda_2 |e_2|^{1/2} \text{sign}(e_2)] \\ \dot{\tilde{z}}_3 = E_1 \alpha_2 \text{sign}(e_2) \\ \vdots \\ \dot{\hat{z}}_{n-1} = E_{n-2} [\tilde{z}_n + \lambda_{n-1} |e_{n-1}|^{1/2} \text{sign}(e_{n-1})] \\ \dot{\tilde{z}}_n = E_{n-2} \alpha_{n-1} \text{sign}(e_{n-1}) \\ \dot{\hat{z}}_n = E_{n-1} [f_{\hat{q}}(\tilde{z}) + \lambda_n \text{sign}(e_n)] \end{cases} \quad (4.31)$$

Où  $e_i = \tilde{z}_i - \hat{z}_i$ , avec  $\tilde{z}_1 = \hat{z}_1$  pour  $i = 1, \dots, n$ , et  $E_i$  sont définies comme suit :

$$E_i = 0 \text{ si } \tilde{z}_i - \hat{z}_i \neq 0 \text{ sinon } E_i = 1.$$

Nous nous intéressons ici à l'estimation de l'état continu d'une classe de systèmes non linéaires à commutations. L'avantage de l'observateur à mode glissant d'ordre 2 est la capacité de reconstruire le vecteur d'état après  $(n - 1)$  étapes sans besoin d'aucune information sur le mode discret.

La convergence de l'observateur en temps fini noté  $\mathcal{T}_c$  est assurée par un choix judicieux des  $\lambda_i$  et  $\alpha_i$  de telle sorte que  $\mathcal{T}_c \ll \delta_q$ .

La convergence est assurée étape par étape dans cet ordre :  $(\dot{e}_1 = e_2, e_1) \rightarrow (0, 0)$  dans un temps fini  $\mathcal{T}_1$  dans la première étape.  $(\dot{e}_2 = e_3, e_2) \rightarrow (0, 0)$  dans un temps fini  $\mathcal{T}_2$  dans la seconde étape.  $(\dot{e}_i = e_{i+1}, e_i) \rightarrow (0, 0)$  en un temps fini  $\mathcal{T}_i$  dans l'étape  $i$  et  $(\dot{e}_{n-1} = e_n, e_{n-1}) \rightarrow (0, 0)$  en un temps fini  $\mathcal{T}_{n-1}$  dans l'étape  $(n - 1)$ . Le temps fini global de la convergence de tout l'état est [28, 123] :

$$\mathcal{T}_c = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{T}_i$$

Enfin, les états estimés sont utilisés par l'observateur continu afin de fournir quelques modes discrets par la détermination de la fonction de commutation lorsque la commutation dépend de l'état continu. Les modes discrets estimés par l'observateur continu sont considérés comme des modes observables par l'observateur discret afin de donner une estimation globale de l'état discret à chaque instant.

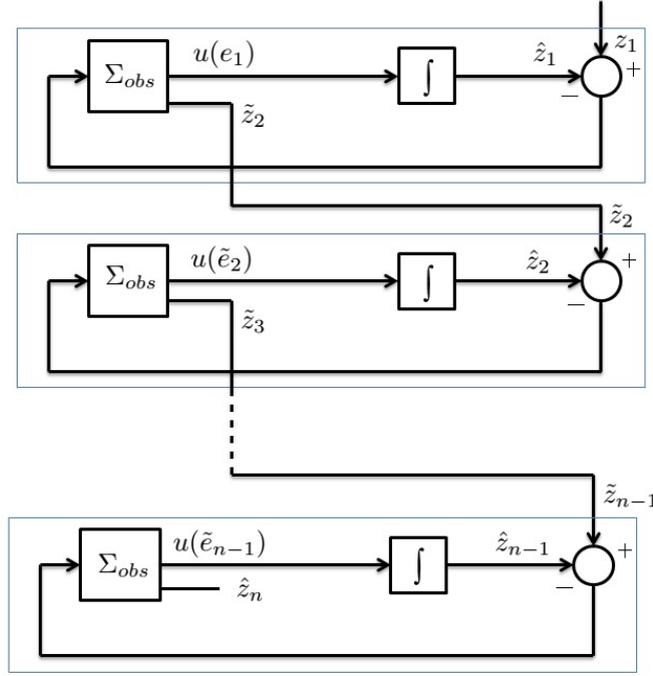


FIGURE 4.11 – Structure du différentiateur étape par étape

### Observateur discret

Dans cette partie, nous proposons un observateur discret pour la partie discrète du système hybride considéré afin de détecter les instants de commutation et d'estimer le mode en cours d'évolution. La partie discrète du système est régie par un RdP et peut être représentée sous forme d'un système descripteur (3.7). L'état discret  $q$  (mode discret) et les instants de commutation sont spécifiés suivant le marquage des places et les instants de franchissement de transitions.

L'approche proposée pour l'estimation de l'état discret est inspirée de celle présentée dans [93] et basée sur l'estimation du vecteur de marquage des places et le vecteur de transitions. Tout d'abord, nous rappelons que la partie discrète du système (4.27) est donnée par :

$$\begin{cases} E\Pi_{k+1}^1 = A\Pi_k^1 \\ \psi_k = C\Pi_k^1 \end{cases} \quad (4.32)$$

où  $\Pi_k^1$ ,  $\psi_k$  sont respectivement le vecteur d'état généralisé et le vecteur de sortie définis comme :

$$\Pi_k^1 = \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{s+m} \text{ et } \psi_k = \begin{bmatrix} M_k^1 \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{s_1+m_1}$$

Les matrices  $E$ ,  $A$  et  $C$  sont définies comme :

$$E = \begin{bmatrix} I_s & -W \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} I_s & 0_{s \times m} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} I_{s_1} & 0_{s_1 \times s_2} & 0_{s_1 \times m_1} & 0_{s_1 \times m_2} \\ 0_{m_1 \times s_1} & 0_{m_1 \times s_2} & I_{m_1} & 0_{m_1 \times m_2} \end{bmatrix}.$$

Dans ce travail, les transitions observables ( $\sigma_k^1$ ) sont représentées par les commutations qui dépendent des états continus estimés. De la même manière, les places observables ( $M_k^1$ ) sont représentées par des modes discrets donnés par l'observateur continu à partir de la détermination de la fonction de commutation lorsque la commutation dépend de l'état continu estimé.

Avant de présenter l'observateur discret, nous supposons que le système (4.32) est causal observable selon le Théorème (11). Suivant le principe de construction des observateurs, l'observateur de Luenberger d'ordre réduit proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = F\zeta_k + G\psi_k \\ \hat{\Pi}_k^1 = V\zeta_k + D\psi_k \end{cases} \quad (4.33)$$

où  $\zeta_k \in \mathbb{R}^s$  est l'état de l'observateur et  $F, G, H$  et  $D$  sont des matrices de dimensions appropriées à calculer.

Le problème de la construction de l'observateur consiste à trouver les matrices  $F, G, V$  et  $D$  telles que le vecteur global d'état estimé  $\hat{\Pi}_k^1$  converge vers le vecteur d'état  $\Pi_k^1$ .

L'observateur proposé est utilisé afin de reconstruire le vecteur global composé par  $s$  places et  $m$  transitions à chaque instant à partir d'un ensemble de marquages des places observables et des transitions observables fournies par l'observateur continu. Une fois le vecteur global donné le mode discret est estimé.

### 4.3.3 Résultats de simulation

Nous présentons ici, un exemple académique afin de montrer l'efficacité du schéma d'observation proposé.

Soit un système à commutations sous la forme canonique d'observabilité :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_q(x) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.34)$$

avec  $q = 1, 2, 3, 4$ . et la dynamique continue  $f_q$  est définie comme suit :

$$f_q = \begin{cases} f_1 = -40 \cos(x_2) + 0.4 \\ f_2 = 5 \cos(x_1) + \pi/2 - 0.5 \\ f_3 = \cos(10x_1) + \pi/2 + 1 \\ f_4 = \cos(x_1) + x_2 \end{cases}$$

La partie discrète du système non linéaire à commutation (4.34) est modélisée par un RdP. Ainsi, les modes de configuration du système sont présentés par des places  $p_1, p_2, p_3$  and  $p_4$  et les commutations par des transitions  $t_1, \dots, t_6$  comme illustrées dans la figure (4.12).

La matrice d'incidence  $W$  et le vecteur de marquage initial  $M_0$  associés au modèle du RdP présentés dans la figure (4.12) sont donnés comme :

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

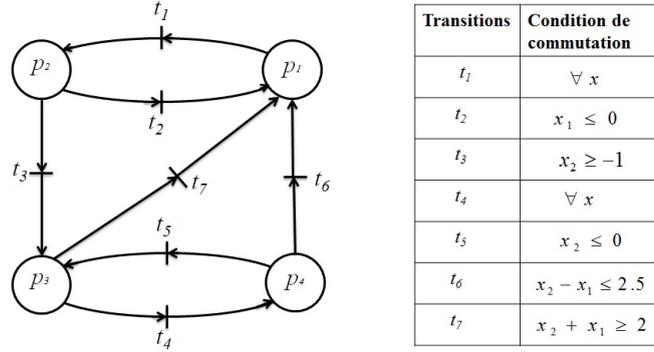
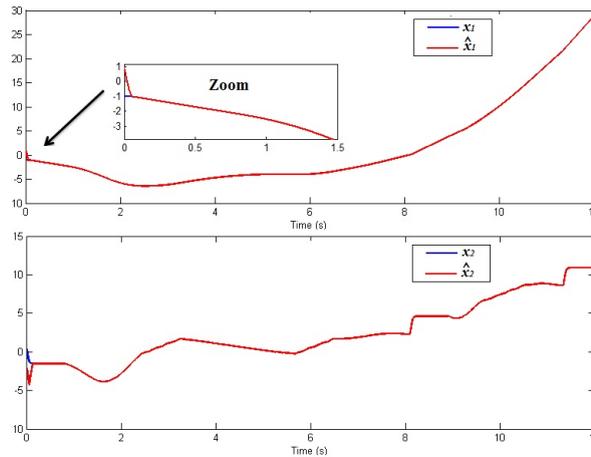


FIGURE 4.12 – Le modèle RdP et les conditions de transitions associées

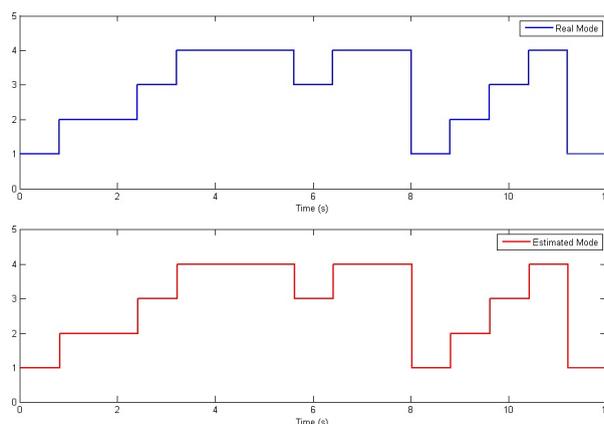
FIGURE 4.13 – Les états continus réels  $x_j$  et les états estimés  $\hat{x}_j$  avec  $j = 1, 2$ 

Il est facile de vérifier que chaque sous-système est localement régulièrement observable. L'observateur associé au système (4.34) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_1 [\tilde{x}_3 + \lambda_2 |e_2|^{1/2} \text{sign}(e_2)] \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1 \alpha_2 \text{sign}(e_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_2 [f_q + \lambda_3 \text{sign}(e_3)] \end{cases} \quad (4.35)$$

Les résultats de simulation pour l'observateur à mode glissant d'ordre 2 sont présentés dans la figure (4.13). Les conditions initiales pour les états continus du système hybride (4.34) sont  $x_0 = [-1 \ 0.5]^T$  et pour l'observateur  $\hat{x}_0 = [1 \ -2]^T$ . La figure (4.13) montre la convergence étape par étape des états estimés vers les états réels du système en temps fini.

Les états continus estimés par l'observateur continu sont utilisés pour déterminer les modes discrets qui dépendent de ces états. Ainsi, dans cet exemple, l'observateur continu délivre des informations sur les deux modes  $p_1$  et  $p_3$  à partir des transitions observables qui dépendent des variables d'états continus. Ces informations sont utilisées par l'observateur discret comme des entrées pour donner une estimation globale de l'état discret à chaque instant.

FIGURE 4.14 – Le mode réel  $q$  et le mode estimé  $\hat{q}$ 

L'observateur discret est un observateur classique de type Luenberger d'ordre réduit, il reçoit comme entrées les places observables et les transitions observables fournies par l'observateur continu. Son rôle est de fournir le mode discret et les instants de commutation du système à chaque instant par l'estimation du vecteur de marquages des places et le vecteur des transitions.

La figure (3.14) montre le mode discret réel et le mode discret estimé. On peut constater que les modes sont parfaitement identifiés.

### 4.3.4 Conclusion

Nous avons abordé dans cette section, le problème de l'estimation d'état pour une classe de systèmes non linéaires à commutations, où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP dans le cas où quelques commutations dépendent de l'état continu et les autres des événements externes. L'observateur continu est basé sur une approche par modes glissants pour la construction de l'état continu sans utiliser aucune information sur l'état discret, après la mise du système d'origine sous la forme canonique d'observabilité. Ainsi, l'état discret est déterminé dans le premier cas à partir de l'état continu fourni par l'observateur continu et par l'observateur discret dans le second cas. Les résultats des simulations montrent la convergence de l'observateur et confirment le bien fondé de la méthode proposée.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de synthèse d'observateurs hybrides pour quelques classes de systèmes hybrides afin de fournir une estimation simultanée de l'état continu et de l'état discret à chaque instant. L'évolution de l'état discret dans les systèmes hybrides considérés est régie par un RdP. Nous avons présenté deux schémas d'observations pour deux classes de systèmes hybrides. Il s'agit des systèmes linéaires à commutations et des systèmes non linéaires à commutations.

Nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre, un observateur hybride pour une classe de systèmes linéaires à commutations afin de résoudre le problème de l'estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret à chaque instant. Cette classe est caractérisée

par des modes dans lesquels l'état continu n'est pas complètement observable au sens classique (les paires  $(A_q, C)$  ne sont pas supposées observables au sens classique). Nous avons utilisé un observateur discret basé sur un observateur à entrée inconnue pour détecter le mode actif à partir de la connaissance de certaines conditions de commutations par l'utilisation des entrées et des sorties continues du système hybride. L'observateur continu proposé est composé de deux observateurs, l'un qui assure la reconstruction de l'erreur d'observation et l'autre qui intervient à chaque instant de commutation de l'observateur. Il est basé sur les techniques d'observation par modes glissants d'ordre supérieur, il utilise l'estimation de l'état discret fournie par l'observateur discret et les informations partielles disponibles de chaque mode pour reconstruire l'état continu.

Dans la deuxième partie du chapitre, un observateur hybride a été conçu pour une classe de systèmes non linéaires à commutations. Cette classe est caractérisée par des lois de commutations qui peuvent dépendre à la fois des états continus et des événements externes. L'observateur continu est basé sur une approche par modes glissants pour la construction de l'état continu sans utiliser aucune information sur l'état discret, après la mise du système d'origine sous la forme canonique d'observabilité. A partir de ces états continus estimés, l'observateur continu peut détecter quelques modes discrets par la détermination de la fonction de commutation lorsque la commutation dépend de l'état continu. Par contre, dans le cas où la commutation dépend d'un événement externe, les modes discrets estimés par l'observateur continu sont considérés comme des modes observables par l'observateur discret afin de donner une estimation globale de l'état discret à chaque instant.

# Conclusion générale et Perspectives

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'analyse d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour quelques classes des systèmes décrits par les réseaux de Petri. Il s'agit des SED modélisés par les RdP et les systèmes hybrides à commutations dont la partie discrète est régie par un RdP. L'objectif visé dans ce travail est d'apporter une solution originale au problème d'observation pour ces systèmes.

Nous avons présenté au début du premier chapitre une introduction aux SED en mettant l'accent sur les réseaux de Petri, formalisme sur lequel est basé le modèle développé dans nos travaux. Nous avons donné une présentation générale sur les SDH en introduisant quelques notions relatives aux systèmes hybrides telles que la notion d'exécution et les phénomènes hybrides. Nous avons présenté également différentes approches de modélisation utilisées dans le développement des modèles de systèmes hybrides.

Dans le deuxième chapitre, nous avons réalisé un état de l'art sur l'observabilité et la synthèse d'observateurs pour les SED et les SDH. Nous avons vu dans la première partie du chapitre que la plupart des méthodes d'estimation existantes à base de RdP, se basent soit sur l'observabilité des événements ou bien sur d'autres hypothèses inspirées des propriétés des RdP. Ainsi, le problème d'observation pour les SED n'est pas limité à l'estimation d'état, mais aussi au problème de la reconstitution de la séquence de franchissement de transitions qui conduisent à un état donné. Nous avons présenté dans la deuxième partie quelques approches concernant l'observabilité de quelques classes des SDH. Nous avons constaté qu'il existe plusieurs approches d'observabilité complètement différentes pour certaines classes des SDH. Le problème de la synthèse d'observateur pour les SDH a été abordé et les travaux présentés sont classés en trois groupes. La principale différence entre ces groupes est liée à la connaissance de l'état discret ou continu.

Dans le troisième chapitre, nous avons consacré la première partie à l'analyse d'observabilité et la synthèse d'un observateur pour les SED modélisés par des réseaux de Petri partiellement observables c'est à dire, le RdP équipé de capteurs de places qui indiquent le nombre des jetons contenus dans certaines places (places mesurables ou connues) et des capteurs des transitions qui détectent les franchissements de certaines transitions (transitions mesurables ou connues). En effet, une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité inspirée de la théorie des systèmes descripteurs a été présentée. Cette caractérisation de l'observabilité est basée sur le test du rang de certaines matrices ce qui rend la compréhension de cette approche facile. En outre, nous avons proposé un observateur à entrée inconnue synthétisé afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur des transitions. Une condition nécessaire de l'existence de l'observateur proposé est la connaissance du marquage initial. Nous avons montré dans la deuxième partie de ce chapitre comment exploiter ces résultats pour la détection du mode actif pour une classe de systèmes hybrides qui

peut avoir plusieurs sous-systèmes évoluant simultanément avec des dimensions différentes.

Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés au problème d'estimation simultanée de l'état continu et de l'état discret pour quelques classes de systèmes hybrides où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP. Nous avons proposé dans un premier temps un observateur hybride composé d'un observateur continu et d'un observateur discret pour une classe de systèmes linéaires à commutations caractérisée par des modes dans lesquels l'état continu n'est pas complètement observable au sens classique. L'observateur discret est observateur du RdP, son rôle est de détecter le mode discret actif. L'observateur continu est basé sur les techniques de modes glissants, il utilise l'état discret estimé fourni par l'observateur discret et les informations partielles disponibles de chaque mode afin de reconstruire l'état continu. Nous avons présenté également une structure d'un observateur hybride pour une classe de systèmes hybrides non linéaires à commutations. Après la mise du système d'origine sous la forme canonique d'observabilité, un observateur à modes glissants d'ordre 2 a été synthétisé pour la reconstruction de l'état continu sans utiliser aucune information sur l'état discret. Les états continus estimés sont utilisés par l'observateur discret afin de donner une estimation globale de l'état discret à chaque instant.

A l'issue de cette thèse, plusieurs investigations demeurent ouvertes. Nous présentons ici celles qui nous semblent être le cadre de travaux futurs où des avancées importantes sont tout à fait envisageables.

Les conditions d'observabilité présentées dans le troisième chapitre permettent de déterminer le nombre optimal de capteurs des places et des transitions qui garantit l'observabilité du RdP. De ce fait, il serait intéressant de traiter le problème de placement de capteurs afin de recouvrir les conditions d'observabilité du RdP. L'objectif que nous nous fixons est de trouver des éléments de réponse à la question "où faut-il placer des capteurs des places et/ou des transitions pour qu'un RdP soit observable?" Une piste est l'utilisation des algorithmes d'optimisation heuristique. Des travaux récents [4, 121] nous encouragent à explorer cette voie.

Une des perspectives de recherche peut porter sur l'étude de la contrôlabilité et la synthèse d'un contrôleur pour les RdP, en présence des transitions incontrôlables. De façon classique, la commande des SED est le pilotage de ces transitions en vue d'obtenir un comportement spécifié pour le système. La théorie de systèmes descripteurs que nous avons utilisé pour l'observation des RdP peut être généralisée pour la commande des RdP. Une autre perspective sur laquelle nous travaillons actuellement est le diagnostic de ce type de systèmes. L'idée principale est de supposer les transitions non observables comme les défauts des RdP. On peut aussi considérer deux types de défauts : défaut de place et défaut de transition.

Dans la deuxième partie du chapitre trois, nous avons proposé une méthode permettant l'estimation de l'état discret pour une classe de SDH sous l'hypothèse que l'état continu est partiellement ou complètement mesuré. Cette classe peut avoir plusieurs sous-systèmes évoluant simultanément avec des dimensions différentes. Une perspective importante de ce travail consiste à synthétiser un observateur continu en interaction avec l'observateur discret. Une solution serait de transformer l'équation (3.29) sous la forme de l'équation (4.27), en supposant que l'indice  $q$  dans l'équation (4.27) représente une combinaison des places actives c'est à dire,  $q$  peut prendre sa valeur entre 1 et  $2^n$  (avec  $n$  est le nombre de places). Par exemple, si on considère le SDH représenté dans la figure (3.8), l'indice  $q$  dans l'équation

(4.27) peut prendre sa valeur dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  qui représente respectivement l'activation des places  $(p_1, (p_2, p_3), (p_2, p_4))$ . Dans ces conditions, l'approche que nous avons proposée dans la première partie du chapitre quatre peut être valable, car le SDH peut avoir des sous-systèmes continus qui ne vérifient pas les conditions classiques d'observabilité.

De manière plus générale, notre contribution est restée dans le domaine de la théorie. Une des perspectives est d'appliquer les résultats obtenus à des systèmes réels. Une des applications est le convertisseur multicellulaire qui est représenté par un modèle hybride résultant de l'expression des dynamiques continues des tensions des condensateurs et du courant de sortie en fonction des variables discrètes associées aux états des cellules de commutations. L'estimation des tensions aux bornes des condensateurs ainsi que les instants de commutations est donc une stratégie intéressante car seule la mesure du courant de sortie est accessible à la mesure.



# Annexe

## Le calcul des matrices de l'observateur (3.14)

Le calcul des matrices de l'observateur (3.14) se base sur la transformations suivante :

La matrice  $E$  est de rang plein en lignes, nous pouvons trouver une matrice  $\mathcal{P}$  vérifiant l'équation suivante :

$$E\mathcal{P} = E \begin{bmatrix} E_1^+ & \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \quad (36)$$

où  $E^+$  est la pseudo inverse de la matrice  $E$  et elle est donnée par :

$$E^+ = E^T(E \times E^T)^{-1}$$

et  $\mathcal{P}_1 = Ker(E) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$  est le noyau de la matrice  $E$  avec :

$$\mathcal{P}_1^T \mathcal{P}_1 = I_m.$$

La matrice  $\mathcal{P}$  est une matrice inversible avec  $\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P} = I_{n+m}$  et sa matrice inverse est :

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} E \\ \mathcal{P}_1^T \end{bmatrix} \quad (37)$$

Maintenant, en posant :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_k^1 \\ \Upsilon_k^2 \end{bmatrix} = \mathcal{P}^{-1}\Pi_k, \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} = A\mathcal{P}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = C\mathcal{P} \quad (38)$$

En remplaçant (38) dans le système (3.7) , on obtient :

$$\begin{cases} \Upsilon_{k+1}^1 = A_1 \Upsilon_k^1 + A_2 \Upsilon_k^2 \\ \psi_k = C_1 \Upsilon_k^1 + C_2 \Upsilon_k^2 \end{cases} \quad (39)$$

De la même manière que précédemment, si la matrice  $C_2$  est de rang plein, nous pouvons trouver une matrice  $\mathcal{P}_2$ , telle que :

$$\mathcal{P}_2 C_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_3 \\ C_2^+ \end{bmatrix} C_2 = \begin{bmatrix} 0_{(n_1+m_1-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (40)$$

où  $\mathcal{P}_3 = Ker((C_2)^T)$  et  $C_2^+ = ((C_2)^T C_2)^{-1} (C_2)^T$ .

Par pré-multiplication par  $\mathcal{P}_2$  des deux côtés de l'équation de mesure dans système (39) nous obtenons :

$$\mathcal{P}_3 \psi_k = \mathcal{P}_3 C_1 \Upsilon_k^1 \quad (41)$$

$$\Upsilon_k^2 = C_2^+ \psi_k - C_2^+ C_1 \Upsilon_k^1 \quad (42)$$

Ensuite, nous remplaçons, l'équation (41) dans la première équation de (39), nous obtenons :

$$\begin{cases} \Upsilon_{k+1}^1 = \bar{A} \Upsilon_k^1 + A_2 C_2^+ \psi_k \\ \bar{\psi}_k = \bar{C} \Upsilon_k^1 \end{cases} \quad (43)$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{A}1 = (A_1 - A_2 C_2^+ C_1) \\ \bar{C} = \mathcal{P}_3 C \\ \bar{\psi}_k = \mathcal{P}_3 \psi_k \end{cases}$$

Ainsi, pour une paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  détectable, il est possible de synthétiser un observateur capable d'estimer les vecteurs  $\hat{\Pi}_k^1$ ,  $\hat{\Upsilon}_k^1$  et  $\hat{\Upsilon}_k^2$ . En tenant compte de la forme de l'équation d'état (43), l'équation de l'observateur (3.14) devient :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = (\bar{A} - R\bar{C})\zeta_k + (A_2 C_2^+ + R\mathcal{P}_3)\psi_k \\ \hat{\Upsilon}_k^2 = C_2^+(\psi_k - C_1 \zeta_k) \\ \hat{\Pi}_k^1 = [E^+ \quad \mathcal{P}_1] \begin{pmatrix} \zeta_k \\ \hat{\Upsilon}_k^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (44)$$

Finalement, l'observateur d'ordre réduit (3.14) est obtenu en choisissant les matrices  $F, G, V$  et  $D$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} F = (\bar{A} - R\bar{C}) \\ G = (A_2 C_2^+ + R\mathcal{P}_3) \\ V = (E^+ - \mathcal{P}_1 C_2^+ C_1) \\ D = (\mathcal{P}_1 C_2^+) \end{cases} \quad (45)$$

avec  $R$  une matrice gain à calculer. Elle est choisie pour que  $(\bar{A} - R\bar{C})$  soit stable.

## Les matrices de l'observateur pour l'exemple (3.5.1)

En utilisant (3.22), on obtient  $U$  et  $H$  comme :

$$U = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & -0.25 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.875 & -0.125 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 0.875 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0.25 & -1 & 0.25 & 0.25 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 0.75 & -0.25 & -0.75 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0.75 & 0.25 & -0.75 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0.875 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0.125 & 0.875 & 0.125 & 0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0.125 & 0.125 & 0.875 & -0.125 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0.125 & 0.125 & -0.125 & 0.875 \end{bmatrix}$$

La matrice  $K$  est choisie de telle sorte que les valeurs propres de l'observateur sont à l'intérieur du cercle unité, frontière comprise.

$$K = \begin{bmatrix} 1.3103 & 0.7196 & 0.5719 & 0.5093 & 1.3079 & 1.3079 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6722 & 1.3474 & -0.6668 & -0.6336 & 1.8722 & 1.8722 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3919 & -0.5119 & 0.8698 & 0.7506 & -0.5078 & -0.5078 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1250 & 0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1250 & 0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 & 0 \\ -0.1250 & -0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8000 & 0 \\ -0.1250 & -0.1250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de l'observateur sont -0.001, -0.0001, -0.001, 0, 0.2, 1, 0, 0.2718, 1, and 1.

Finalement,  $N$  et  $L$  sont calculées respectivement à partir des équations (3.24) et (3.25) et sont données comme :

$$N = \begin{bmatrix} -1.1853 & -0.5472 & -0.3919 & 0 & 0 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.5946 & -1.2224 & 0.5119 & 0 & 0 & 0 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 \\ -0.5719 & 0.6668 & -0.8698 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2407 & 0.3836 & 0.2494 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0579 & -1.6222 & 0.5078 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0579 & -1.6222 & 0.5078 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ -0.125 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.4041 & 0.4041 & 0 & 0.2791 & 0.2791 & -0.2791 & -0.2791 \\ 0.4146 & 0.4146 & 0 & 0.2896 & 0.2896 & -0.2896 & -0.2896 \\ -0.0119 & -0.0119 & 0 & -0.0119 & -0.0119 & 0.0119 & 0.0119 \\ -0.0780 & -0.0780 & 0 & 0.1720 & 0.1720 & -0.1720 & -0.1720 \\ 0.3350 & 0.3350 & 0 & 1.0850 & 0.0850 & -1.0850 & -0.0850 \\ 0.3350 & 0.3350 & 0 & 0.0850 & 1.0850 & -0.0850 & -1.0850 \\ -0.0188 & -0.0188 & 0 & -0.1438 & -0.1437 & 0.1438 & 0.1438 \\ 0.0939 & 0.0939 & 0 & -0.0311 & -0.0311 & 0.0311 & 0.0311 \\ -0.1937 & -0.1938 & 0 & -0.0688 & -0.0688 & 0.0687 & 0.0687 \\ -0.0939 & -0.0939 & 0 & 0.0311 & 0.0311 & -0.0311 & -0.0311 \end{bmatrix}$$



# Bibliographie

- [1] P. A. Abdulla and A. Nylén, Timed Petri nets and BQOs, In 22nd International Conference on Application and Theory of Petri Nets (ICA TPN'01), Vol. 2075 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 53-72, Newcastle upon Tyne, United Kingdom, June 2001. Springer-Verlag.
- [2] H. Abou kendil and M. Jungers, Commande optimale multicritère : introduction à la théorie des jeux, Commande optimale, Hermès.
- [3] L. Aguirre-Salas, O. Begovich and A. Ramirez-Trevino, Observability in interpreted petri nets using sequence invariants, In Proc. 41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA, 2002.
- [4] L. Aguirre-Salas, Sensor selection for observability in interpreted Petri nets : A genetic approach, In Proc. 42<sup>nd</sup> Conference on Decision and Control, Vol. 3. pp. 3760-3765, 2003.
- [5] A. Alessandri and P. Coletta, Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems. Hybrid systems : Computation and Control, Vol. 2034 of LNCS, Springer-Verlag, 2001.
- [6] H. Alla, J. B. Cavaille, J. Le Bail, G. Bel , Les systèmes de production par lot : une approche discret-continu utilisant les réseaux de Petri hybrides, Automation of Mixed Processes (ADPM 92) Janvier, Paris, France, 1992.
- [7] H. Alla, Les réseaux de Petri : un outil particulièrement adapté à la modélisation des systèmes hybrides, Automation of Mixed Processes (ADPM 94), pp. 17-25, Novembre, Bruxelles, Belgique, 1994.
- [8] H. Alla and R. David, Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Net, Book, Springer edition, 2004.
- [9] R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T. A. Henzinger, P. H. Ho, X. Nicollin , A. Olivero, J. Sifakis , S. Yovine, The algorithmic analysis of hybrid systems, Theoretical Computer Science, Vol. 138, pp.3-34, 1995.
- [10] D. Andreu, Commande et Supervision des Procédés Discontinus : Une Approche Hybride. Thèse de doctorat, Novembre, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1996.
- [11] P. Antsaklis, editor, Hybrid Systems IV, Vol. 1273 of Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [12] P. Antsaklis, Special Issue on Hybrid Control Systems, Proceedings of the IEEE, Vol. 43, No. 4, pp. 452-587, 1998.
- [13] F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, Active mode detection in hybrid mechatronic systems, International conference on Automatics and Mechatronics, Oran, Algeria, 2011.
- [14] F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, Discrete states estimation in hybrid photovoltaic systems, 2nd International symposium on environment friendly energies and applications, EFEA 2012, Newcastle upon Tyne, UK, 25-27 June 2012.

- [15] F. Arichi, M. Djemai, B. Cherki and N. Manamanni, State Estimation for a Class of Nonlinear Switched Systems Using Petri Net, 2nd International symposium on environment friendly energies and applications, EFEA 2012, Newcastle upon Tyne, UK, 25-27 June 2012.
- [16] F. Arichi, M. Djemai, B. Cherki and N. Manamanni, Observateur d'un système hybride décrit par un réseau de Petri, Grenoble, France CIFA 2012.
- [17] F. Arichi, M. Djemai and B. Cherki, Active mode detection for a Class of hybrid dynamic systems, ICSSEE, Dubai, Dec 2012.
- [18] F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, State and sequence firing estimation of Petri net application to : Manufacturing systems, IEEE conference on control, decision and information technologies, Tunisia, 2013.
- [19] F. Arichi, H. kebabi, B. Cherki and M. Djemai, Failure components detection in discrete event systems modeled by Petri net, IEEE 3rd International Conference on Systems and Control (ICSC13), Algiers, Algeria, 2013.
- [20] F. Arichi, J. Van Gorp, M. Djemai, M. Defoort and B. Cherki, Hybrid state estimation for a class of switched system using Petri Nets, 13th European Control Conference, Strasbourg, France, June 24-27, 2014.
- [21] F. Arichi, B. Cherki and M. Djemai, Current configuration detection in hybrid systems : Application to a Conjunction-Disjunction mechatronics system, Mechatronics, Vol. 24, pp. 1262-1268, 2014.
- [22] F. Arichi, M. Djemai, B. Cherki and N. Manamanni, Continuous and Discrete State Estimation for a Class of Nonlinear Switched Systems, IEEE Transactions on Circuits and Systems II, accepté, 2015.
- [23] M. Babaali and M. Egerstedt. Observability of switched linear systems, Hybrid Systems : Computation and Control, pages 48–63, 2004.
- [24] M. Baglietto, G. Battistelli and L. Scardovi, Active mode observation of switching systems based on set-valued estimation of the continuous state, Int. J. Robust Nonlinear Control, Vol. 19, pp. 1521-1540, 2009.
- [25] A. Balluchi, M. D. Di Benedetto, C. Pinello, C. Rossi and A. L. Sangiovanni-Vincentelli, Engine control as a hybrid control problem : models and algorithms, Progress in Systems and Control Theory, Vol. 25, Dynamical Systems, Control Coding, Computer Vision, 1999.
- [26] A. Balluchi, L. Benvenuti, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli , Observers for hybrid systems with continuous state resets, In Proceedings of 10th Mediterranean conference on control and automation, Lisbon, Portugal, 2002.
- [27] A. Balluchi, L. Benvenuti, M. D. D. Benedetto and A. L. Sangiovanni-Vincentelli, Observability for hybrid systems. Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- [28] J. P. Barbot, H. Saadaoui, M. Djemai and N. Manamanni, Nonlinear observer for autonomous switching systems with jumps, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, pp. 537-547, 2007.
- [29] J. P. Barbot, N. Manamanni and M. Djemai, Observability Conditions and Observer Design for a class of Hybrid Continuous-Discrete System, in IEEE 42<sup>nd</sup> CDC, 2007.
- [30] J. P. Barbot, N. Manamanni et M. Djemai , Problème d'observabilité des SDH continus-discrets, in Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bucarest, Roumanie, 2008

- [31] N. Barhoumi, F. Msahli, M. Djemai, K. Busawon, Observer design for some classes of uniformly observable nonlinear hybrid systems, *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, Vol 6, pp. 917-929, 2012.
- [32] F. J. Bejarano, A. Pisano and E. Usai, Finite-time converging jump observer for linear switched systems with unknown inputs, *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, Vol. 5, No. 2, pp. 174–188, May 2011.
- [33] R. Bekrar, Identification des systèmes à événements discrets par réseaux de Petri, thèse de doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, France, 2009.
- [34] J. Ben Salah, Analyse et commande des systèmes non linéaires complexes : Application aux systèmes dynamiques à commutation, Thèse de doctorat, Université de Lyon 1, France, 2009.
- [35] A. Bemporad, G. Ferrari, and M. Morari, Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, pp. 1864–1876, 2000.
- [36] B. Berthomieu and M. Diaz, Modeling and verification of time dependent systems using Time Petri nets, *IEEE Transaction on Software Eng.*, Vol. 17, No. 3, pp. 259-273, 1991.
- [37] G. Besançon, Contributions à l'étude et à l'observation des systèmes non linéaires avec recours au calcul formel, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1996.
- [38] G. Besançon (Ed.), *Nonlinear observers and applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences (LNCIS), 363, 2007, ISBN : 978-3-540-73502-1.
- [39] A. Birouche, Contribution sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2006.
- [40] A. Birouche, D. Daafouz and C. Iung, Observer design for a class of discrete-time piecewiselinear systems, *2<sup>nd</sup> IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Alghero, Italie, pp. 12–17, 2006.
- [41] G. Bornard, F. Celle-Gouenne, and G. Gilles. *Systèmes non linéaires, tome 1 : modélisation-estimation, chapitre 5 : Observabilité et observateurs* journal, 1993.
- [42] S. Boubaker, M. Djemai, N. Manamanni and F. M'sahli, Active Modes and Switching Instants Identification for Linear Switched Systems Based on Discrete Particle Swarm Optimization, *Journal of Applied Soft Computing*, Vol. 14, Part C, pp. 482–488, January 2014.
- [43] E. Boukas, *Stochastic switching systems analysis and design*, Control engineering series editor William S. Levine, 2005.
- [44] R. Bourdais, L. Hetel, J. Daafouz, and W. Perruquetti, Stabilité et stabilisation d'une classe de système dynamiques hybrides, In *Systèmes dynamiques hybrides*, Vol. 41 of JESA, pp. 819–853, Hermes, 2007.
- [45] A. Bourjij, Contribution à la sûreté de fonctionnement des processus industriels par les réseaux de Petri, thèse de doctorat, université d'Henri Poincaré de Nancy I, France, 1994.
- [46] D. Boutat, A. Benali and J. P. Barbot, About the observability of piecewise dynamical systems, *6<sup>th</sup> IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Stuttgart, Allemagne, 2004.
- [47] M. S. Branicky Stability of switched and hybrid systems, *IEEE-Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp. 3998-3503, 1994.

- [48] M. S. Branicky, V. S. Borkar and S. K. Mitter, A unified framework for hybrid control : model and optimal control theory, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 1, pp. 31-45, 1998.
- [49] P.E. Caines, R. Greiner and S. Wang, Dynamical logic observers for finite automata, In Proc. 27th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 226-233, Austin, TX, USA, December 1988.
- [50] C. G. Cassandras et S. Lafortune, Introduction to discrete event systems. kluwer academic publishers, 1999.
- [51] C.G. Cassandras et S. Lafortune, Introduction to discrete event systems, Second Edition, Springer, 2007.
- [52] F. Cassez and O. H. Roux, Traduction structurelle des réseaux de Petri temporels vers les automates temporisés, Colloque Francophone sur la Modélisation des Systèmes Réactifs, Metz, France, October 2003.
- [53] S. Chaib, D. Boutat, A. Benali and J. P. Barbot, Observability of the discrete state for dynamical piecewise hybrid systems, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems and Applications, Vol. 63, pp. 423 – 438, 2005.
- [54] R. Champagnat, P. Esteban, H. Pingaud and R. Valette, Modeling and simulation of a hybrid system through pr/tr pn-dae model, Proceedings of 3<sup>rd</sup> International Conference on Automation of Mixed Processes, Reims, France, pp. 131–137, 1998.
- [55] R. Champagnat, Supervision des Systèmes Discontinus : Définition d'un Modèle Hybride et Pilotage en temps réel, Thèse de doctorat en Informatique industriel Productique, Université Paul Sabatier, Toulous. France, 1998.
- [56] D. Corona, A. Giua and C. Seatzu , Marking estimation of petri nets with silent transitions, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 52, No. 9, pp. 1695-1699, 2007.
- [57] L. Dai, Singular Control Systems. Springer, Berlin, Germany, 1989.
- [58] B. Daubas, A. Pagès, H. Pingaud, Combined simulation of hybrid processes, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, pp. 320-325, San Antonio, Texas, 1994.
- [59] R. David and H. Alla, Continuous Petri Nets, Proc. of 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Saragosse, Espagne, pp. 275-294, 1987.
- [60] R. David and H. Alla, Du Grafcet aux réseaux de Petri. Hermès, 1989.
- [61] R. David and H. Alla, Petri Nets for Modeling of Dynamic Systems -a Survey, Automatica, Vol. 30, No. 2, 1994.
- [62] R. David, "Modeling by Hybrid Petri Nets and Extended Hybrid Petri Nets". Proceeding of 4th international Conference Automation of mixed Processes : Hybrid dynamical Systems, pp. 3-6. 2000.
- [63] J. Davila, A. Pisano and E. Usai, Continuous and discrete state reconstruction for nonlinear switched systems via high-order sliding-mode observer, International Journal of Systems Science, Vol. 42, No. 5, pp. 725-735, 2011.
- [64] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Pettersson and B. Lennartson, Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, Proceedings of the IEEE, Vol. 88, No. 7, pp. 1069-1082, 2000.
- [65] M. Defoort, M. Djemai, T. Floquet and W. Perruquetti, Robust finite time observer design for multicellular converter, International Journal of Systems Sciences, Vol. 42, No. 11, pp. 1859–1868, Nov 2011.

- [66] M. Defoort, J. Van Gorp, M. Djemai and K.C. Veluvolu, Hybrid observer for switched linear systems with unknown inputs, IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Singapour, pp. 594-599, 2012.
- [67] D. Del Vecchio and R. M. Murray, Existence of Discrete State Estimators for Hybrid Systems on a Lattice, Conference on decision and control, 2004.
- [68] M. De la Sen and N. Luo, Design of linear observers for a class of linear hybrid systems, International Journal of Systems Science, Vol. 31 No. 9, pp. 1077-1090, 2000.
- [69] M. Djemai, N. Manamanni and J. P. Barbot, Sliding mode observer for triangular input hybrid system, Proc. of IFAC World Congress Prague, 2005.
- [70] E. De Santis and M. D. Di Benedetto, Observer design for discrete-time linear switching systems. 3rd IFAC Symposium on Power System, Structure and Control, Vol. 3, Part. 1, 2007.
- [71] J. Ezzine, and A. H. Haddad, Controllability and observability of hybrid systems. International Journal of Control, Vol. 49, pp. 2045-2055, 1989.
- [72] M. Fliess, C. Join and W. Perruquetti, Real-time estimation for switched linear systems, Conference on decision and control, 2008.
- [73] G. Florin and S. Natkin, Les Réseaux de Petri Stochastiques, Technique et Science Informatiques, Vol. A, No. 1, pp. 143-160, 1985.
- [74] G. Florin, C. Fraize and S. Natkin, Stochastic Petri Nets : Properties, Applications and Tools, Microelectronics and Reliability, Vol. 31, No. 4, pp. 669-697, 1991.
- [75] V. Garcogne, Impact des coûts de transport sur les systèmes logistiques par une modélisation en dynamique des systèmes, Le modèle SANDOMA, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2003.
- [76] A. Giua and C. Seatzu, Observability of Place/Transition Nets, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 9, pp. 1424-1437, 2002.
- [77] A. Giua, J. Ilvez and C. Seatzu, Marking estimation of Petri nets with pairs of nondeterministic transitions, Asian Journal of Control, Special Issue on the Control of Discrete Event Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 270-280, 2004.
- [78] W. Haddad, V. Chellaboina and S. G. Nersesov, Impulsive and hybrid dynamical systems, Princeton Series in Applied Mathematics, 2006.
- [79] F. Hamdi, N. Manamanni, N. Messai and K. Benmahammed, Hybrid observer design for switched linear systems via differentials Petri Nets, Nonlinear Analysis : Hybrid System. pp. 310-322. 2009.
- [80] T. Henzinger, The theory of hybrid automata, Proceeding of the 11th annual on logic in computer science, IEEE Computer Society Press, pp. 278-292, 1996.
- [81] R. Hermann and A. J. Krener, Nonlinear controllability and observability, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 22, pp. 724-740, 1977.
- [82] Y. C. Ho and X. Cao, Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamical Systems, Kluwer Publishing Company, 1991.
- [83] A. Hocine, Estimation d'état et diagnostic de systèmes à commutation par filtrage multimodèle, Thèse de Doctorat de Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2006.
- [84] M. Hou and P. C. Muller, Causal observability of descriptor systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, pp. 158-163, Jan. 1999.

- [85] K. H. Johansson, J. Lygeros, S. Sastry and M. Egerstedt, Simulation of zeno hybrid automata, Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, 1999.
- [86] A. L. Juloski, Observer design and identification methods for hybrid systems, Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology, 2004.
- [87] S. Khalfaoui, H. Demmou, E. Guillhem, R. Valette, Modeling critical mechatronic systems with Petri Nets and feared scenarios derivation, 5th Workshop on Electronics, Control, Modelling, Measurement and Signals, Toulouse (France), pp. 55-59, 30 Mai-1er Juin 2001.
- [88] M. S Khalfaoui, Méthode de recherche des scénarios redoutés pour l'évaluation de la sûreté de fonctionnement des systèmes mécatroniques du monde automobile, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2003.
- [89] R. Kajdan, Synthèse d'observateur pour les systèmes dynamique hybrides : application au diagnostic, thèse de doctorat, Université de d'orléans, France, 2008.
- [90] R. E. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. 1, pp. 152–192, 1963.
- [91] W. Kang, J.-P. Barbot, and L. Xu, On the observability of nonlinear and switched systems. In Lecture Notes in Control and Information Sciences LNCIS 393, Springer-Verlag Berlin, pages 199–216, 2009.
- [92] W. Khansa, "Réseaux de petri P-temporels contribution à l'étude des SED, Thèse de doctorat, Université de Savoie, 1992.
- [93] D. Koenig and A. Bourjij, An original petri net state estimation by a reduced luenberger observer, in Proc of the American Control Conference, San Diego, California, 1999.
- [94] D. Koenig and S. Mammar, Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 12, 2002.
- [95] F. Kratz and D. Aubry, Finite memory observer for state estimation of hybrid system, in 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Washington, U.S.A, pp. 687–691, 2003.
- [96] J. Le Bail, H. Alla, R. David Hybrid Petri Nets, European Control Conference, pp. 1472-1477, Grenoble, France, 1991.
- [97] J. Le Bail, H. Alla, R. David, Asymptotic Continuous Petri Nets, Journal of Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications, Vol. 2, p. 235-263, 1993.
- [98] A. Levant, Robust Exact Differentiation via sliding mode technique, Automatica, Vol. 34, No. 3, pp. 379-384, 1998.
- [99] A. Levant, *Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control*. Int J. of Control, vol. 76, No. 9/10, pp. 924–941, 2003.
- [100] C. G. Lopez-Varela, Détection et diagnostic basés cohérence pour les systèmes à évènements discrets : vers la prise en compte des erreurs de modélisation, thèse de doctorat, université de Toulouse, France, 2007.
- [101] I. Lrivera-rangel, A. Ramirez-trevino, L. Aguirre-salas and J. Ruiz-leo, Geometric characterization of observability in Interpreted Petri nets, Kybernetika, Vol. 41, No. 5, pp. 553-574, 2005.
- [102] R. Marino and P. Tomei, Nonlinear Control design : Geometric, Adaptive and Robot, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.

- [103] M. A. Marsan , Stochastic Petri Nets : An Elementary Introduction, G. Rozenberg, ed., Advances in Petri Nets, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 424, pp. 1-29, Springer Verlag, 1989.
- [104] P. Merlin, A study of Recoverability of communication protocols, Ph. D. Thesis, Computer Science, University of California, Irvine, 1974.
- [105] A. Mokhtari, Diagnostic des systèmes hybrides : développement d'une méthode associant la détection par classification et la simulation dynamique, thèse de doctorat, université de Toulouse, France, 2007.
- [106] P. Mosterman, Hybrid Dynamic Systems : A Hybrid Bond Graph Modeling Paradigm And its Application in Diagnosis, PhD thesis, Nashville, Tennessee. 1997.
- [107] P. Mosterman and G. Biswas, A Hybrid Modeling and Simulation Methodology for Dynamic Physical Systems, Simulation, Vol. 78, No. 1, 2002.
- [108] T. Murata, Petri nets : Properties, analysis and applications, in Proceedings IEEE, Vol. 77, No. 4, pp. 541-580, 1989.
- [109] M. Oishi, I. Hwang, and C. Tomlin, Immediate observability of discrete event systems with application to user-interface design, Proceeding of the 42nd Conference on Decision and Control, Vol. 3, pp. 2665-2672, 2003.
- [110] N. Orani, A. Pisano, M. Franceschelli, A. Giua, E. Usai, Robust reconstruction of the discrete state for a class of nonlinear uncertain switched systems, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, Vol. 5, No. 2, pp. 220-232, 2011.
- [111] R. Orjuela, Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multi-modèles, thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2008.
- [112] C. C. M. Ozveren and A. S. Willsky, Observability of discrete event dynamic systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 7, pp. 797-806, July 1990.
- [113] J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1981.
- [114] J. L. Peterson, Petri Net Theory and the modeling of systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2007.
- [115] J. M. Proth and X. Xie, Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion de production, Masson, Paris, 1994.
- [116] J. M. Proth et X. Xie, Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production, Manuels Informatiques Masson, 1995.
- [117] P. J. Ramadge, Observability of discrete-event systems, In Proc. 25th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1108-1112, Athens, Greece, 1986.
- [118] P.J. Ramadge, Some tractable Supervisory control problems for discrete event systems modeled by buchi automata, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 34, No. 1, 1989.
- [119] C. Ramchandani, Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Etats-Unis, 1974.
- [120] A. Ramirez-Trevino, I. Rivera-Rangel and L. Lopez-Mellado, Observability of discrete event systems modeled by interpreted Petri nets, IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 19, No. 4, pp. 557-565, 2003.
- [121] Y. Ru and C. N. Hadjicostis, Sensor selection for structural observability in discrete event systems modeled by Petri nets, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, No., pp. 1751-1764, 2010.

- [122] H. Saadaoui, Observateur non linéaire à modes glissants pour une classe de systèmes à commutations, Journée Doctorant MACS Lyon – France, 2005.
- [123] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, J. P. Barbot and T. Floquet, “Exact differentiation and Sliding mode observer for switched Lagrangian systems”, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, Vol. 65, No. 5, pp. 1050-1069, 2006.
- [124] A. S. Samoilenko and N. A. Perestyuk, *Implusive differential equations. Series on Nonlinear Science*, World Scientific, 1995.
- [125] E. D. Santis, M. D. Benedetto, S. D. Gennaro, and P. Giordano, Hybrid observer design methodology. Technical Report ST-2001-32460 of European Commission, Distributed control and stochastic analysis of hybrid systems supporting safety critical real-time systems design, 2003.
- [126] J. Sifakis, Use of Petri Nets for Performance Evaluation, Measuring, Modelling and Evaluating Computer Systems, pp 75-93, Amsterdam, North Holland, 1977.
- [127] Z. Sun, S. Ge, and T. Lee, Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, Vol. 38, pp. 775–786, 2002.
- [128] A. Tanwani, H. Shim and D. Liberzon, Observability for Switched Linear Systems : Characterization and Observer Design, *IEEE Transaction on automatic control*, Vol. 58, No. 4, 2013.
- [129] S. Tripakis, Undecidable problems of decentralized observation and control on regular languages, *Information Processing Letters*, Vol. 90, No. 1, pp. 21-28, 2004.
- [130] C. Valentin-Roubinet, Modelling of hybrid systems : DAE supervised by Petri nets, the example of a gaz storage, *Automation of Mixed Processes (ADPM 98)*, pp. 142-149, Match 19-20, Reims, France, 1998.
- [131] A. Van der Schaft and H. Schumacher, *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, London, Springer-Verlag, 2000.
- [132] J. Van Gorp, Diagnostic et observation d’une classe de systèmes dynamiques hybrides. Application au convertisseur multicellulaire série, thèse de doctorat, université de Valenciennes, France, 2013.
- [133] J. Van gorp, M. Defoort, K. Veluvolu and M. Djemai, Hybrid sliding mode observer for switched linear systems with unknown inputs, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 351, No. 7, pp. 3987-4008, 2014.
- [134] R. Vidal, A. Chiuso, and S. Soatto, Observability and identifiability of jump linear systems, In *Proceedings of 41nd IEEE conference on decision and control*, Las Vegas NV, USA, pp. 3614–3619, 2002.
- [135] R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, and S. Sastry, Observability of linear hybrid systems. In *Hybrid Systems : Computation and Control*, *Lecture Notes in Computer Science* in Springer Verlag, 2623, pp. 526-539, 2003.
- [136] E. Villani, J. C. Pascal, P. Miyagi and R. Valette, A Petri Net-Based Object-Oriented Approach for the Modelling of Hybrid Productive Systems, *Nonlinear Analysis* Vol. 62, pp. 1394 – 1418, 2005.
- [137] E. Villani, P. Miyagi and R. Valette, Modelling and Analysis of Hybrid Supervisory Systems : A Petri Net Approach. *Advances in Industrial Control* series ISSN 1430-9491 ISBN 978-1-84628-650-6 e-ISBN 978-1-84628-651-3 Printed on acid-free paper © Springer-Verlag London Limited. 2007.

- 
- [138] W. M. Wonham, Notes on Control of Discrete-Event Systems, Technical Report, ECE 1636F/1637S, 1994.
- [139] E. Xie and L. Wang Necessary and sufficient conditions for controllability of switched linear systems, Proc. Of Amer. Contr. Conf, pp. 1897-1902, 2002.
- [140] T. Yang, Une contribution à l'observation et à l'estimation des systèmes linéaires, thèse de doctorat de l'école centrale de Lille, 2010.
- [141] T. Yang, T. Floquet, L. Belkoura, and W. Perruquetti. Algebraic switching time identification for a class of linear hybrid systems. In Journal of Nonlinear Analysis : Hybrid systems, Vol. 5, No. 2, pp. 233–241, 2011.
- [142] M. Zainea, H. Cormerais, J. Buisson, H. Guéguen and E. Godoy, Analyse des commutations dans un système avec des interrupteurs de l'électronique de puissance par une approche automate hybride, Journée Doctorant MACS, 2005.
- [143] J. Zaytoon, Systmes Dynamiques Hybrides, Collection Herms, Paris, 2001.
- [144] L. Zhang, L. E. Holloway, Forbidden State Avoidance in Controlled Petri Nets Under Partial Observation, Proc. 33rd Allerton Conference, Monticello, Illinois, pp. 146-155, 1995.
- [145] M. Zerrougui, Observation et commande des systèmes singuliers non linéaires, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré – Nancy 1, France, Novembre, 2011.

# Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'analyse d'observabilité et la recherche de méthodes de synthèse d'observateurs pour quelques classes de systèmes décrits par les réseaux de Petri (RdP). Nos travaux portent particulièrement sur les systèmes à évènements discrets (SED) modélisés par les RdP et les systèmes dynamiques hybrides (SDH) dont la partie discrète est régie par un RdP. Dans le cadre des SED modélisés par les RdP, Une nouvelle caractérisation algébrique de l'observabilité basée sur l'utilisation des techniques d'observation des systèmes descripteurs a été présentée. Nous avons proposé également un observateur afin d'estimer à la fois le vecteur des marquages des places et le vecteur des transitions. Pour les SDH, nous avons proposé deux observateurs hybrides pour l'estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret. Les deux observateurs sont composés d'un observateur continu et d'un observateur discret en interaction. Les résultats des simulations confirment le bien fondé de la méthode proposée.

**Mots clés :** Observabilité, Observateurs, Réseaux de Petri, Systèmes dynamiques hybrides, Systèmes à évènements discrets.

## Abstract

In this thesis, we focus on the observability analysis and research methods of synthesis of observers for some classes of systems described by Petri nets (PN). Our work particularly focuses on discrete events systems (DES) modeled by PN and hybrid dynamic systems (HDS), where discrete part is governed by a PN. In the framework of DES modeled by PN, an algebraic characterization of observability based on the theory of descriptor systems was presented. We also proposed an observer to estimate both the place's marking vector and the transitions' firing vector. For HDS, we proposed two hybrid observers in order to estimate both the continuous state and the discrete state. Both observers are composed of a continuous and a discrete observer in interaction. Simulation results confirm the appropriateness of the proposed method.

**Keywords :** Observability, observers, Petri nets, hybrid dynamical systems, discrete events systems.

## المخلص:

في هذه الأطروحة، نحن نركز على تحليل قابلية الملاحظة والبحث عن أساليب تركيب مراقبين لبعض الفئات من النظم المنمذجة بواسطة شبكات بيترى. يركز عملنا بشكل خاص على أنظمة الأحداث المنفصلة المنمذجة بواسطة شبكات بيترى والأنظمة لقد قمنا بتقديم جبري جديد لقابلية، في إطار أنظمة الأحداث المنفصلة المنمذجة بواسطة شبكات بيترى. الديناميكية الهجينة الملاحظة يقوم على اساس استخدام تقنيات الرصد. اقترحنا أيضا مراقب لتقدير كل من الساحات علامات تعيين الاماكن وناقلات من التحولات. اقترحنا اثنين من المراقبين الهجينة لتقدير مشترك للحالة مستمرة والدولة المنفصلة. ويتكون كل من المراقبين من مراقب مستمر و مراقب منفصل متفاعلا فيما بينهما. نتائج المحاكاة تؤكد صلاحية الطريقة المقترحة.

**كلمات البحث:** قابلية الملاحظة، والمراقبين، وشبكات بيترى، الأنظمة الديناميكية الهجينة، وأنظمة أحداث منفصلة.

