

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد – تلمسان –

Université Aboubakr Belkaïd– Tlemcen –

Faculté de TECHNOLOGIE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MASTER**

En : Télécommunications

Spécialité : Systèmes de Télécommunications

Par : ATMANI Rahma et HAMDOUN Imane

Sujet

Calibration robuste à grande échelle pour la radioastronomie

Soutenu visioconférence, le **07/ 10/ 2020** , devant le jury composé de :

Mr A.Bouaacha	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
Mr M.Hadjila	Maître de Conférences A	Univ. Tlemcen	Examineur
Mr S.M.H.Irid	Maître de Conférences A	Univ. Tlemcen	Encadreur
Mr M.N.El korso	Maître de Conférences, HDR	Univ. Nanterre-Paris	Co- Encadreur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicaces

Nous dédions ce travail :

A nos pères et nos mères :

Ms.Hamdoun Abdarrahim et Seddini Rabha.

Ms.Atmani Miloud et Atmani Noura.

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez, pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de nous donner depuis notre naissance, durant nos enfance et même à l'âge adulte.

Nous vous dédions ce travail en témoignage de notre profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.

A nos grandes mères

Et nos grands-pères,

*Vous présentez pour nous le symbole de la bonté et la
Source de tendresse.*

A nos frères,

Hamdoun Islem ET Mohamed Farid.

Atmani Mohamed, Abdarrahim, Hocine ET Abdallah.

Nous vous remercions infiniment pour votre aide ainsi que vos encouragements et votre fidélité.

A toute nos familles

Et tous nos Amis(es),

Je vous dédié ce travail avec tous mes vœux de bonheur et de santé.

Hamdoun Imane et Atmani Rahma...

Remerciements

Nous remercions tout d'abord DIEU pour toutes les bénédictions qui nous ont donné durant toutes ces années la santé et le courage pour suivre notre étude.

Nous exprimons du profonde du cœur les plus sincères remerciements à nos encadreurs, monsieur IRID MOHAMED EL HADJ Professeur à l'université de Tlemcen ainsi que mon Co-encadreur Monsieur EL KORSO MOHAMED NABIL Professeur à l'université de Nanterre-Paris, pour nous avoir proposés ce sujet qui nous a permis de nous initier à la recherche scientifique, pour leurs aides et les idées qui nous ont facilitées de nombreuses difficultés tout au long de nos travail, pour leurs encouragements qui nous ont permis de réaliser ce mémoire dans d'excellentes conditions de travail.

Nous remercions aussi tous les membres du jury d'avoir accepté notre participation à cette soutenance, vous nous avez donnée l'honneur d'évaluer et d'examiner notre travail pendant tout le temps que vous avez passé à lire notre mémoire.

Nous remercions également Monsieur HADJILA. M Professeur à l'université de Tlemcen, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre mémoire, ainsi qu'à Monsieur BOUAACHA. A Professeur à l'université de Tlemcen pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de faire partie du jury.

Nous tenons à remercier nos parents de nous avoir soutenues, et de nous avoir encouragées pendant de longues années, nous ne serions jamais assez reconnaissant envers nos parents qui ont toujours tout mis en œuvre pour qu'on s'épanouisse dans tous ce qu'on entreprend.

Enfin, nous adressons nos respectueux remerciements à tous nos enseignants et toute personne qui nous ont aidés de près ou de loin durant notre travail et en particulier tous nos collègues de la promotion ST.

2019_2020

Calibration robuste à grande échelle pour la radioastronomie

Résumé

Un grand nombre de chercheurs et d'industriels sont maintenant engagés dans le développement technique et scientifique en posant des questions sur l'astrophysique, la physique contemporaine, incluant de nouveaux tests de la théorie de la gravité, les grandes structures de l'Univers, l'évolution des galaxies, la formation des étoiles... La radioastronomie, tels que le projet LOFAR (LOw Frequency ARray) à basse fréquence, et le projet SKA (Square Kilometre Array) qui vont être achevés en 2025, pourront répondre à ces grandes questions.

Seulement, pour atteindre les performances nécessaires de reconstruire l'image claire et de cartographie de cet univers, il est nécessaire de développer des algorithmes qui permettront d'estimer précisément les gains de calibration des capteurs des réseaux d'antennes.

L'objectif de ce mémoire est de proposer des contributions méthodologiques visant à casser les deux verrous que sont la robustesse des algorithmes de calibration et leur complexité de calcul.

Mots clés : Traitement statistiques du signal, radioastronomie, robustesse.

Robust large-scale calibration for radio astronomy

Abstract

A large number of researchers and industrialists are now engaged in technical and scientific development by asking questions about astrophysics, contemporary physics, including new tests of the theory of gravity, the large structures of the Universe, the evolution of galaxies, the formation of stars... Radio astronomy, such as the low-frequency LOFAR (LOw Frequency ARray) project, and the SKA (Square Kilometer Array) project, which will be completed in 2025, will be able to answer these major questions. .

However, to achieve the performance required to reconstruct the clear image and map this universe, it is necessary to develop algorithms that will allow precise estimation of the gains in calibration of the sensors of the antenna networks.

The objective of this dissertation is to propose methodological contributions aimed at breaking the two obstacles which are the robustness of calibration algorithms and their computational complexity.

Keywords: *Statistical signal processing, radio astronomy, robustness*

Table des matières

<i>Dédicaces</i>	<i>i</i>
<i>Remerciements</i>	<i>ii</i>
<i>Résumé</i>	<i>iii</i>
<i>Abstract</i>	<i>iv</i>
<i>Table des matières</i>	<i>v</i>
<i>Liste des Figures</i>	<i>vii</i>
<i>Liste des Tableaux</i>	<i>viii</i>
<i>Abréviations</i>	<i>ix</i>
<i>Symboles</i>	<i>x</i>
<i>Introduction générale</i>	<i>1</i>

Chapitre I: La radioastronomie

I.1	Introduction	4
I.2	L’astronomie	4
I.3	Développement de l’astronomie	4
I.3.1	L’évolution de l’observation astronomique.....	5
I.3.2	La lunette astronomie.....	5
I.3.2.1	Le principe de fonctionnement.....	5
I.3.2.2	Principale résultats d’utiliser la lunette astronomie.....	5
I.3.3	Le télescope.....	6
I.3.3.1	L’évolution de télescope.....	6
I.4	La Radio Astronomie	7
I.4.1	Définition.....	7
I.4.2	Historique.....	8
I.4.3	Les applications de la radioastronomie.....	8
I.5	L’évolution de radioastronomie	8
I.5.1	Le radiotélescope.....	9
I.5.2	Exemples des radiotélescopes.....	9
I.6	L’interféromètre	12
I.6.1	L’interféromètre astronomique.....	12
I.6.2	Le principe.....	12
I.6.3	Les réseaux.....	12
I.6.3.1	LOw Frequency ARray.....	12
I.6.3.2	Square Kilometer Array.....	14
I.7	Calibration	15
I.7.1	Les effets de perturbations.....	16
I.7.1.1	Les effets instrumentaux.....	16
I.7.1.2	Les effets de propagation.....	17
I.7.2	Les algorithmes de calibration.....	18
I.7.2.1	Estimation des gains des éléments et les réponses directionnelles.....	18
I.7.2.2	Estimation de la perturbation ionosphérique.....	18
I.7.2.3	Estimation de model général.....	18
I.8	Conclusion	19

Chapitre II: Calibration de capteurs d’un réseau d’antennes séparés et estimation des directions d’arrivée par les méthodes du Maximum de vraisemblance

II.1	Introduction	21
II.2	L’estimateur du maximum de vraisemblance	21

II.2.1	La fonction de vraisemblance	21
II.2.2	Principe	21
II.3	Modèle Mathématique	23
II.3.1	Modèle à Bande Étroite	24
II.3.2	Modèle de données paramétriques	24
II.4	Calibration des capteurs du réseau d'antennes par des méthodes ML	26
II.4.1	Modèle d'observation	26
II.4.1.1	Matrice de calibration	27
II.4.1.2	Géométrie des sous-réseaux de capteurs	27
II.4.2	L'algorithme itératif IML pour la calibration et l'estimation des DOAs	28
II.4.2.1	Estimation de Ω	28
II.4.2.2	Estimation de \mathbf{G}	29
II.4.2.3	Estimation de $\mathcal{S}u$	30
II.4.2.4	Estimation de θu	31
II.4.3	L'algorithme ML itératif modifié (MIML)	32
II.4.4	La simulation	34
II.5	Conclusion	35

Chapitre III: Calibration robuste de capteurs d'un réseau d'antennes par la méthode EM (Expectation Maximisation)

III.1	Introduction	37
III.2	La différence entre l'algorithme ML et EM	37
III.3	L'algorithme EM	37
III.3.1	Définition	37
III.3.2	Les étapes d'EM	37
III.3.3	Modèle de données paramétriques	37
III.3.4	Les propriétés des données complètes	38
III.3.5	L'algorithme EM dans le cas d'échantillon i.i.d	39
III.4	L'estimation robuste de la direction d'arrivée DOA	39
III.4.1	L'estimation moyenne robuste	40
III.4.1.1	La distribution gaussienne réelle	40
III.4.1.1.1	Application dans l'algorithme EM	44
III.4.1.1.2	Application de l'hypothèse gaussienne	45
III.4.1.2	La distribution gaussienne complexe	47
III.4.2	Estimation de gain d'élément \mathbf{G} et la covariance de bruit Σ	49
III.4.2.1	L'estimation de \mathbf{G} par la méthode EM	50
III.4.2.2	L'estimation de Σ par la méthode EM	51
III.4.2.3	L'estimation de \mathbf{G} sous l'hypothèse gaussienne	52
III.4.2.4	L'estimation de Σ sous l'hypothèse gaussienne	53
III.5	Analyse de l'estimation robuste par simulation	54
III.5.1	La simulation de la moyenne μ et la covariance Σ	54
III.5.1.1	Dans les conditions d'un environnement gaussien	54
III.5.1.2	Dans les conditions d'un environnement non gaussien	56
III.5.2	La simulation de l'estimation du gain de calibration \mathbf{G}	58
III.5.2.1	L'estimation de \mathbf{G} en fonction de nombre des échantillons	58
III.5.2.2	L'estimation de \mathbf{G} en fonction de SNR	59
III.5.2.3	L'estimation de \mathbf{G} en fonction de valeurs aberrants en poursantage	60
III.6	Conclusion	60
Conclusion générale		61
Bibliographie		62

Liste des Figures

Chapitre I

Figure I. 1: Image de nébuleuse prise par télescope Hubble.....	4
Figure I. 2: La lunette astronomie.....	5
Figure I. 3: Principe de fonctionnement d'une lunette astronomie	5
Figure I. 4: Le premier télescope	6
Figure I. 5 : le télescope Hale	6
Figure I. 6: Vue d'artiste de sursauts radio rapides ou FRB (Fast radio bursts) atteignant la Terre.....	7
Figure I. 7:Le télescope FAST (Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope)	9
Figure I. 8: Premier radiotélescope, de Groote Reber.....	9
Figure I. 9 : Effelsberg.....	10
Figure I. 10: Green Bank	10
Figure I. 11: Arecibo	11
Figure I. 12: Radiotélescope de Nançay	11
Figure I. 13: Carte de répartition des stations	13
Figure I. 14: Station d'observation radioastronomie en Paris.	14
Figure I. 15: Square Kilometer Array	14
Figure I. 16: Des centaines de milliers d'antennes basse fréquence seront situées en Australie occidentale.....	15
Figure I. 17: Un interféromètre multiplicateur à deux éléments.	16
Figure I. 18: les effets ionosphérique.....	18

Chapitre II

Figure II. 1 : Réseau d'antenne recevoir.....	23
Figure II. 2: Le réseau collecteur de vecteur de réponse avec la variation de θ	26
Figure II. 3: Comparaison entre l'algorithme de l'IML et MIML.	34

Chapitre III

Figure III .1 : La moyenne avec une distribution gaussienne réelle.	54
Figure III. 2: La covariance avec une distribution gaussienne réelle	55
Figure III. 3: La moyenne avec une distribution gaussienne complexe.	55
Figure III. 4: La covariance avec une distribution gaussienne complexe.	56
Figure III. 5: μ avec une distribution gaussienne réelle avec des observations non Gaussiennes.....	56
Figure III. 6: Σ avec une distribution gaussienne réelle avec des observations non Gaussiennes.....	57
Figure III. 7: μ avec une distribution gaussienne complexe avec des observations non Gaussiennes.	57
Figure III. 8: Σ avec une distribution gaussienne complexe avec des observations non Gaussiennes.	58
Figure III. 9 : MSE en fonction du nombre des échantillons	59
Figure III.10: MSE en fonction de SNR.	59
Figure III. 11: MSE en fonction des échantillons aberrants.....	60

Liste des Tableaux

Chapitre II

Table II 1: Algorithme IML.....	32
Table II 2: L'algorithme MIML	33

Chapitre III

Table III 1 : Algorithme EM de μ et Σ	49
Table III 2 : Algorithme EM de \mathbf{G} et Σ	52

Abréviations

DOA: Direction Of Arrival.

EM: Expectation Maximization.

iid: independently identically distributed.

ILT: International LOFAR Telescope.

IML: Iterative Maximum Likelihood.

LOFAR: LOw Frequency ARray.

MIML: Modified Iterative Maximum Likelihood.

ML: Maximum Likelihood.

MSE: Mean Square Error.

SNR: Signal-to-Noise Ratio.

SKA: Square Kilometre Array.

ULA : Unifore Linear Array.

Symboles

\mathbb{C} : Les nombres complexes

\mathbb{R} : Les nombres real.

a : Scalaire.

a : Vecteur colonne.

A : Matrice.

\propto : Proportionnel à (propto).

$\frac{\partial}{\partial X}$: Le dérivé d'une fonction par rapport au variable X .

$*$: La convolution.

\odot : Le produit de Schur_Hadamard : la multiplication matricielle élément par élément.

$(.)^\dagger$: Opérateur pseudo-inverse.

$(.)*$: Opérateur conjugué complexe.

$(.)^T$: Opérateur Transposé.

$(.)^H$: Opérateur de transposition hermitien.

$|\cdot|$: Opérateur déterminent.

$tr(\cdot)$: Opérateur trace.

\mathcal{N} : La distribution gaussienne réelle.

\mathcal{CN} : La distribution gaussienne complexe.

$p(x)$: Fonction de density de probabilité.

$p(x, y)$: Fonction de density de probabilité joint.

$p(x|y)$: Fonction de density de probabilité conditionnelle.

$E\{\cdot\}$: Opérateur d'espérance.

$bdiag\{\cdot\}$: Opérateur block-diagonal.

$diag\{\cdot\}$: conversation d'un vecteur à un diagonale matrice.

Introduction générale :

Depuis les années trente du vingtième siècle, lorsque les premiers signaux radio de l'espace sont découverts et détectés par Karl Jansky, les astronomes ont utilisé des radiotélescopes pour explorer l'Univers en détectant les ondes radio émises par une large gamme d'objets tels que les étoiles, les galaxies,...

La radioastronomie a progressé au milieu du siècle dernier, quand elle a exploité le développement de la radio pour concevoir des télescopes radio, entre autres, la radioastronomie a exploité les télescopes optiques.

Les radiotélescopes peuvent être utilisés individuellement ou ils peuvent être reliés ensemble pour créer un réseau de télescopes connu sous le nom d'interféromètre.

Les plus grands interféromètres au monde et de loin les plus sensibles sont le LOFAR (LOW Frequency ARray) à basse fréquence, dont sa réalisation a débuté en 2010 et son exploitation finale devra être en 2025. On cite en plus le futur projet SKA (Square Kilometre Array). Ces interféromètres sont consacrés à détecter les signaux des sources les plus lointaines et qui sont perturbés par de nombreux effets environnementaux et instrumentaux. Pour surpasser ces problèmes, il est nécessaire la mise en œuvre de techniques et d'algorithmes qui permettent de reconstruire des images d'espaces avec une qualité parfaite.

Cette étape de correction des perturbations se nomme la calibration et repose généralement sur une modélisation gaussienne du bruit, pour une seule fréquence considérée. La plupart des algorithmes de calibration utilisent la méthode des moindres carrés en minimisant une fonction coût alternativement par rapport à chacun des paramètres inconnus.

Dans ce mémoire, et afin d'améliorer le coût calculatoire et la qualité d'estimation, on a proposé deux algorithmes, l'algorithme ML (Maximum Likelihood), et l'algorithme EM (Expectation Maximization). Le but de ce travail est d'estimer le gain de la calibration robuste à grande échelle de la radioastronomie.

Ce mémoire comporte trois chapitres suivis par une conclusion générale :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'évolution de la radioastronomie et les nouveaux projets des réseaux d'antennes exploités dans les interféromètres : le LOFAR et le SKA. On présente aussi de nombreux effets environnementaux et instrumentaux qui perturbent les signaux d'intérêt mesurés par les interféromètres.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du modèle mathématique de la calibration des paramètres inconnus par l'algorithme maximum de vraisemblance ML itératif, où on dérive deux algorithmes qu'on nomme la méthode IML (Iterative ML) et la méthode MIML (Modified Iterative ML). On vérifie les performances de ces deux algorithmes par des simulations en Matlab.

Dans le troisième chapitre, nous avons développé un nouvel algorithme pour l'estimation du gain de calibration robuste du réseau d'antennes tout en adaptant une technique mathématique nommée Expectation Maximisation EM. Dans cette partie, nous avons démontré le problème

mathématique et l'avons simulé pour différentes situations jusqu'au problème réel de la radioastronomie. Les différentes simulations ont confirmé l'amélioration de la technique EM dans la radioastronomie quand le signal reçu par l'ensemble du réseau d'antennes est perturbé par des échantillons de valeurs aberrantes.

Enfin, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre I: La radioastronomie

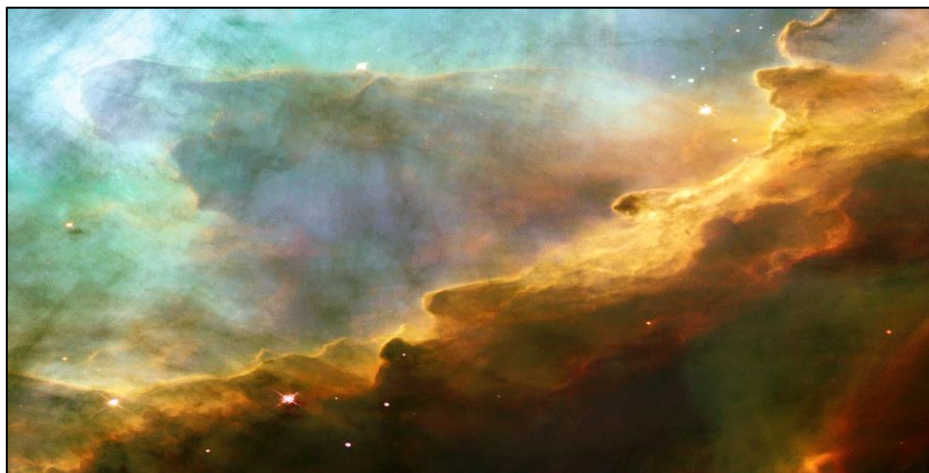
I.1 Introduction :

L'invention de l'astronomie remonte à des millénaires qui étaient couramment associée à l'astrologie. À ses débuts, l'astronomie consiste simplement en l'observation et en la prédiction du mouvement des objets célestes visibles à l'œil nu. Ces différentes civilisations ont légué de nombreux apports et découvertes. L'astronomie ne peut être étudiée sans l'apport d'autres sciences qui lui sont complémentaires et nécessaires : les mathématiques (géométrie, trigonométrie), ainsi que la philosophie, ainsi que les outils d'observations telles que le télescope.

Dans ce chapitre, on va présenter la description de l'astronomie, et les outils d'observations qui sont utilisés. On portera une importance particulière sur la radioastronomie qui est le sujet de notre projet.

I.2 L'astronomie :

L'astronomie est la science de l'observation des astres, cherchant à expliquer leur origine, leur évolution, ainsi que leurs propriétés physiques et chimiques et elle étudie leur position, leur mouvement, leur structure. Avec plus de 5 000 ans d'histoire, les origines de l'astronomie remontent au-delà de l'Antiquité dans les pratiques religieuses préhistoriques [1].



FigureI. 1: Image de Nébuleuse prise par télescope Hubble [2].

I.3 Développement de l'astronomie :

Le développement de l'astronomie [3] à partir du XVII^{ème} siècle et l'accélération foudroyante des découvertes au XX^{ème} siècle sont avant tout le fruit de l'amélioration constante des moyens d'observation du ciel.

L'homme observe déjà le ciel il y a des dizaines de milliers d'années. Des phénomènes tels que le déplacement du soleil dans le ciel ou les changements d'aspects de la lune leur étaient familiers. Le premier résultat d'observer le ciel c'est le calendrier qui est un système de repérage des dates en fonction du temps. Un tel système a été inventé par les hommes pour diviser et organiser le temps sur de longues durées. L'observation des phénomènes périodiques du milieu où ils vivaient comme : le déplacement quotidien de l'ombre, le retour des saisons ou le cycle lunaire ont servi de premières références pour organiser la vie agricole, sociale et religieuse des sociétés [4].

I.3.1 L'évolution de l'observation astronomique :

En trois siècles, l'instrumentation a fait des progrès prodigieux. Alors que la lunette de Galilée n'avait que quelques centimètres de diamètre, les astronomes ont aujourd'hui à leur disposition d'énormes télescopes dont le diamètre peut atteindre 10 mètres.

I.3.2 La lunette astronomie :

La lunette astronomie ou lunette de Kepler est le premier instrument d'observation autre que l'œil et est un instrument optique. Elle est développée à partir de la fin du XVI^{ème} siècle et elle est utilisée à partir de 1609 pour faire des observations systématiques du ciel.



Figure I. 2: La lunette astronomie [5]

I.3.2.1 Le principe de fonctionnement :

La lunette astronomie compose de deux lentilles :

- **Lentille objectif** : à l'entrée de l'instrument qui capte et concentre les rayons lumineux de l'astre et en fait l'image à un point appelé le foyer.
- **Une lentille oculaire** : à la sortie qui rejette l'image de l'astre à l'infini afin d'en faciliter son observation à l'œil.

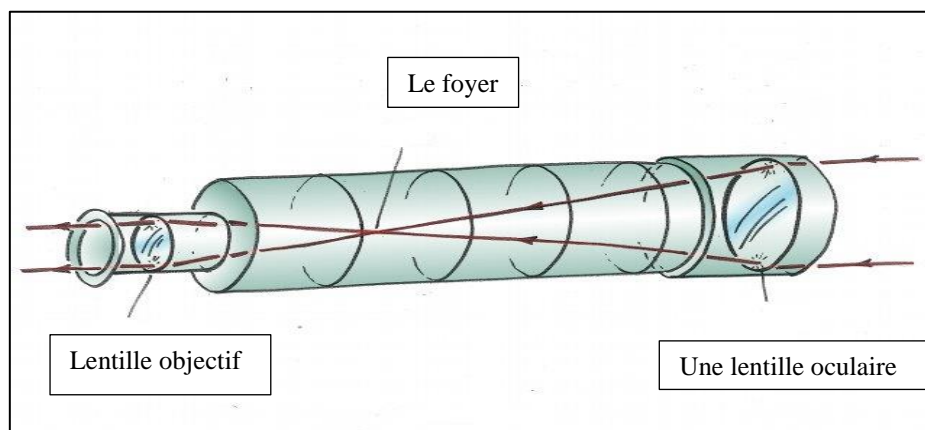


Figure I. 3: Principe de fonctionnement d'une lunette astronomie [6]

I.3.2.2 Principales résultats d'utiliser la lunette astronomie :

- La lunette donnait une image agrandie de l'objet grâce à la combinaison de lentilles. Elle permettait d'observer planètes ou nébuleuses en détail et de mettre en évidence des caractéristiques invisibles à l'œil nu. C'est grâce à cela que Galilée, le premier astronome à

utiliser une lunette, fut en mesure de faire tant de découvertes, depuis les reliefs de la lune jusqu'aux satellites de Jupiter.

- Lorsque le diamètre de la grosse lentille augmentait, les images devenaient plus brillantes et, surtout, des objets trop peu lumineux pour être perçus à l'œil nu devenaient alors facilement visibles. C'est grâce à cela que Galilée, en tournant sa lunette vers la Voie Lactée, put apercevoir pour la première fois une myriade d'étoiles qui n'avaient jamais été observées.

I.3.3 Le télescope :

A la différence d'une lunette, un télescope n'utilise pas de grande lentille pour concentrer la lumière, mais se sert d'un grand miroir de forme sphérique qui réfléchit les rayons lumineux et les renvoie tous en un même point appelé le foyer. Les premiers télescopes furent développés dans la deuxième partie du XVII^{ème} siècle, en particulier par Isaac Newton

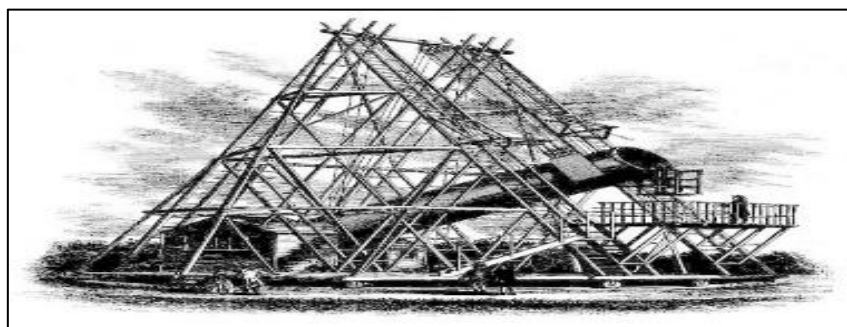


Figure I. 4: Le premier télescope [7]

L'avantage du télescope réside dans le fait qu'un miroir est beaucoup plus facile à soutenir qu'une lentille, ce qui permet d'atteindre des tailles bien supérieures au mètre sans problème de formation.

I.3.3.1 L'évolution de télescope :

Le XX^{ème} siècle vit se développer des télescopes gigantesques. Le premier fut construit en 1918 sur le Mont Wilson en Californie avec un miroir de 2,54 mètres. Puis ce fut le **télescope Hale** de 5,08 mètres érigé au sommet du Mont Palomar en 1949.



Figure I. 5 : le télescope Hale [8]

Évidemment, des miroirs de cette taille avaient comme les grandes lentilles tendance à se déformer sous leur propre poids. Pour aller plus loin, à partir des années 1980, il fallut développer de nouvelles technologies.

- **La première solution** : utilise un ensemble de plusieurs petits miroirs séparés, au lieu d'un seul grand bloc. Le miroir de chaque télescope est en fait une mosaïque de 36 petits miroirs de 1,80 mètres qui ensemble donnent un diamètre équivalent de 10 mètres.
- **La deuxième solution** : consiste à construire des miroirs de grande taille mais très minces. C'est le cas du **New Technology Telescope (NTT)** de l'observatoire européen austral (ESO) à La Silla au Chili, qui possède un miroir de 3,5 mètres.

I.4 La Radio Astronomie :

En générale, la Radioastronomie est une branche de l'astronomie traitant de l'observation du ciel dans le domaine des ondes radio.

I.4.1 Définition :

Les radioastronomes étudient des objets qui rayonnent ou absorbent de l'énergie à des fréquences situées dans le spectre radioélectrique. La Radioastronomie se compose de deux mots :

- **Radio** : c'est à dire les ondes radio qui sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence d'onde est par convention comprise entre 9 kHz et 3000 GHz, ce qui correspond à des longueurs d'onde de 33 km à 0,1 mm.
- **L'astronomie** : c'est la science de l'observation des astres, cherchant à expliquer leur origine, leur évolution et leurs propriétés physiques et chimiques [9].

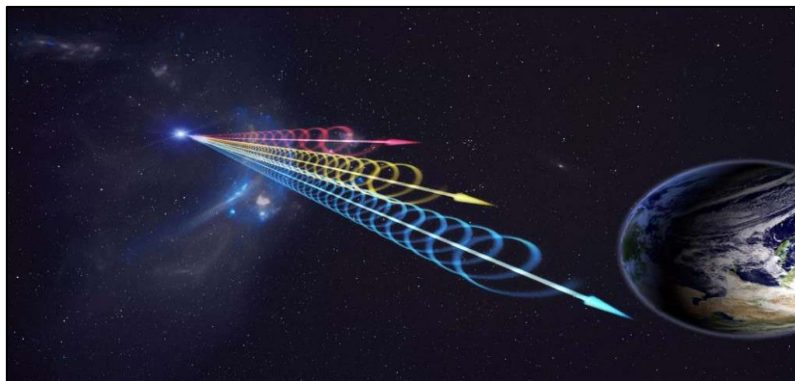


Figure I. 6: Vue d'artiste de sursauts radio rapides ou FRB (Fast radio bursts) atteignant la Terre [10]

La radioastronomie est une science relativement jeune qui née dans les années trente du vingtième siècle [8] ; mais qui n'a pris son essor que dans les années 1950/1960 avec le développement et la réalisation de grands instruments (Parkes, Green bank, Arecibo, Jodrell Bank, Westerbork et Nançay). Tout le spectre radio présente un intérêt pour l'astronomie et la cosmologie mais pour des raisons techniques les fréquences observées sont limitées à l'intervalle compris entre 1 MHz et environ 1 000 GHz.

Les observations de ces signaux de puissance généralement faible sont très sensibles aux interférences d'origine humaine ou terrestre et sont noyés dans le bruit cosmique. Pour isoler les signaux et fournir des mesures précises, elles nécessitent la mise en œuvre d'instruments de très grande taille.

I.4.2 Historique :

Le premier domaine de longueurs d'onde non visible à être exploité fut celui des ondes radio. Quelques observations furent accomplies par des pionniers dans les années 1930, mais ce n'est qu'après la seconde guerre mondiale que la radioastronomie se développa véritablement. Depuis, elle est devenu l'un des piliers de l'astronomie moderne.

La première observation radio astronomique a été faite accidentellement par Karl Jansky en 1933. Il cherchait à éliminer le bruit de fond d'un récepteur de radio dans le domaine décimétrique. Le bruit de fond est produit par l'agitation thermique des électrons dans l'appareil lui-même, et ne peut être supprimé que si le récepteur est à la température de 0 K. A une température non nulle (donc à toute température réelle), un bruit de fond est inévitable. Il est d'autant plus intense que la température est plus élevée. Jansky mesurait le bruit de fond qu'il recevait, et le trouvait plus intense que ce que le calcul prévoyait. Après avoir éliminé toutes sortes de sources possibles, il ne restait plus qu'une seule explication : un rayonnement radioélectrique provenait de l'espace. Il a remarqué que le bruit capté était variable au cours de la journée, mesurant la période de cette variation, il a trouvé 23 h 56 mn. On reconnaît là la période sidérale de rotation de la Terre, ce qui montre que le surcroît de bruit n'était pas lié à la Terre, mais à l'espace extérieur. Les antennes utilisées par Jansky étaient simplement des dipôles, des fils électriques tendus. Vers 1935, en utilisant des antennes directrices, il a montré que le rayonnement était plus intense vers la Voie Lactée, et particulièrement dans la direction du Sagittaire [11].

I.4.3 Les applications de la radioastronomie :

La radio astronomie a apporté des contributions majeures et mis la lumière sur plusieurs domaines qu'on cite quelques exemples :

- La structure de notre galaxie (via la mesure de la répartition de l'hydrogène atomique).
- Les processus physiques au sein de notre Soleil.
- La composition et l'évolution des nuages de gaz interstellaires et des pouponnières d'étoiles.
- La structure et l'évolution des galaxies.
- La détermination des paramètres cosmologiques de l'univers (analyse du fond diffus cosmologique).
- Les processus physiques à l'origine des émissions radioélectriques des plasmas, des planètes et du milieu interplanétaire de notre système solaire.

I.5 L'évolution de radioastronomie :

La lumière visible est un domaine privilégié pour l'homme, mais elle ne représente qu'une infime fraction du spectre électromagnétique. Les autres domaines de longueur d'onde peuvent aussi nous fournir une incroyable quantité d'information sur l'Univers. Evidemment, pour être en mesure d'analyser cette information, il faut d'abord construire des instruments capables de détecter les rayonnements non visibles, ce qui explique que cette astronomie ne s'est développée qu'au milieu du siècle dernier.

Par rapport aux autres lumières, les ondes radio se distinguent par leurs grandes longueurs d'onde. Pour cette raison, il est nécessaire de recourir à de grandes antennes appelées des radiotélescopes [3].

I.5.1 Le radiotélescope :

Le radiotélescope est un télescope spécifique utilisé en radioastronomie pour capter les ondes radioélectriques émises par les astres.

Les radiotélescopes sont utilisés pour étudier des longueurs d'onde beaucoup plus longues que la lumière visible. Souvent, les radiotélescopes utilisent une antenne parabolique pour focaliser les ondes radio sur le récepteur. Ensuite le récepteur envoie le signal à enregistrer aux astronomes pour qu'ils l'étudient [11].



Figure I. 7:Le télescope FAST (Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope) [12]

I.5.2 Exemples des radiotélescopes :

Parmi les exemples les plus connus, on a :

✓ **Premier radiotélescope :** Il a été repris en 1945 par Grote Reber, avec un miroir parabolique de 9 m de diamètre qui renvoie les ondes vers son foyer. Il a été établi à la longueur d'onde de 1,87 m [13].

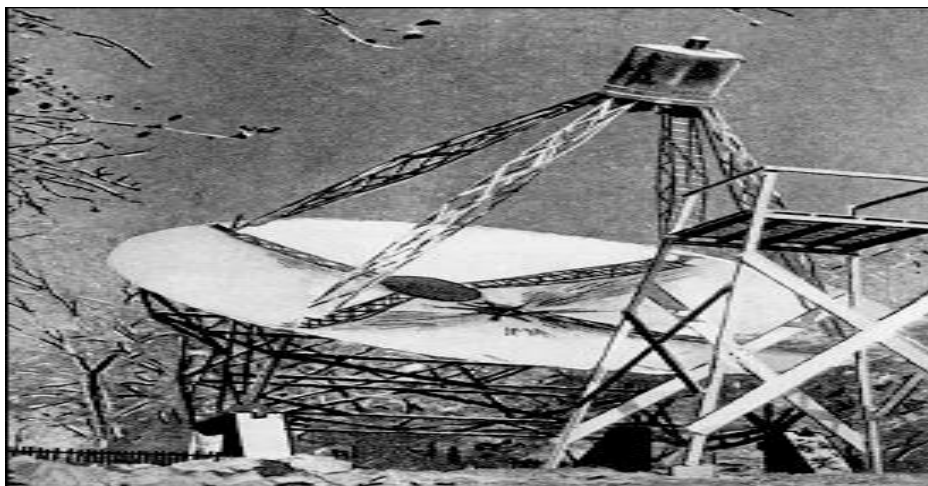


Figure I. 8: Premier radiotélescope, de Grote Reber [13]

- ✓ **Le radiotélescope d'Effelsberg en Allemagne**, une énorme antenne parabolique de 100 mètres de diamètre. Le plus grand radiotélescope mobile a été, jusqu'à l'an 2000.

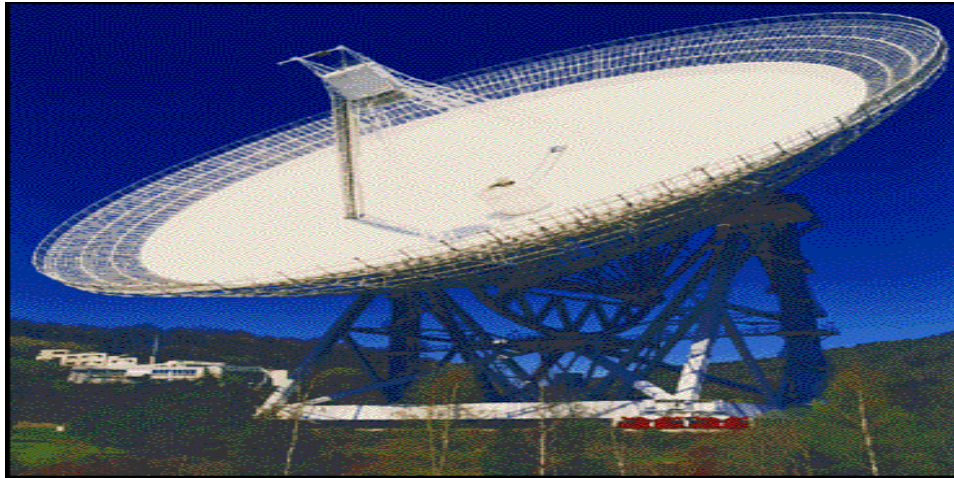


Figure I. 9 : Effelsberg [13]

Ce radiotélescope a été construit en 1971. Sa distance focale est de 30 m, et la surface collectrice de 1.850 m^2 . Le diamètre du miroir atteint de 100 mètres. La précision d'usinage de la surface est meilleure que 0,5 mm. L'ensemble pèse 3.200 tonnes. Le miroir est une parabole homologue, ce qui signifie que ses supports ont été calculés de telle manière que leurs déformations inévitables maintiennent une forme parabolique à la surface [13].

- ✓ **Le radiotélescope GBT (Green Bank Telescope) de Green Bank, aux Etats-Unis**, présente une particularité intéressante. Alors que tous les autres miroirs sont des calottes paraboliques (l'axe du paraboloïde passe par le centre de la calotte), le miroir de Green Bank est aussi un morceau de paraboloïde, mais découpé dans une portion ne contenant pas l'axe. L'axe est en bordure, ce qui fait que le support et l'antenne ne font pas d'obstruction comme il est d'ordinaire de le voir.

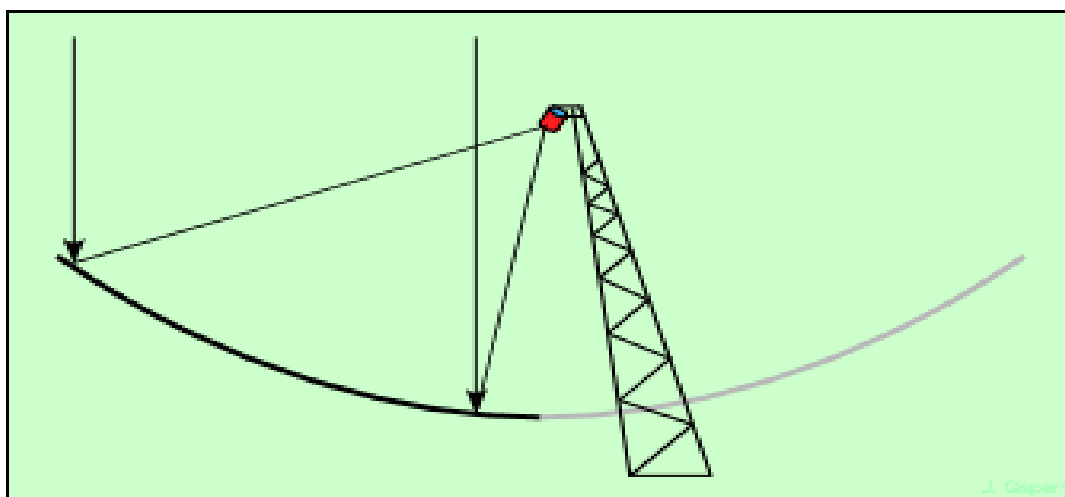


Figure I. 10: Green Bank [13]

La partie en grisé du paraboloïde n'existe pas ; elle a été dessinée pour bien montrer quelle partie a été utilisée [13].

- ✓ **Radiotélescopes non orientables :**
- **Le radiotélescope fixe d'Arecibo**, qui a été construit en tapissant de plaques d'aluminium une cavité naturelle de 300 mètres de diamètre à **Porto Rico**.



Figure I. 11: Arecibo [13]

- **Le Grand Radiotélescope de la station de radioastronomie de Nançay en France**, dont le miroir principal fait 300 mètres sur 35 mètres.

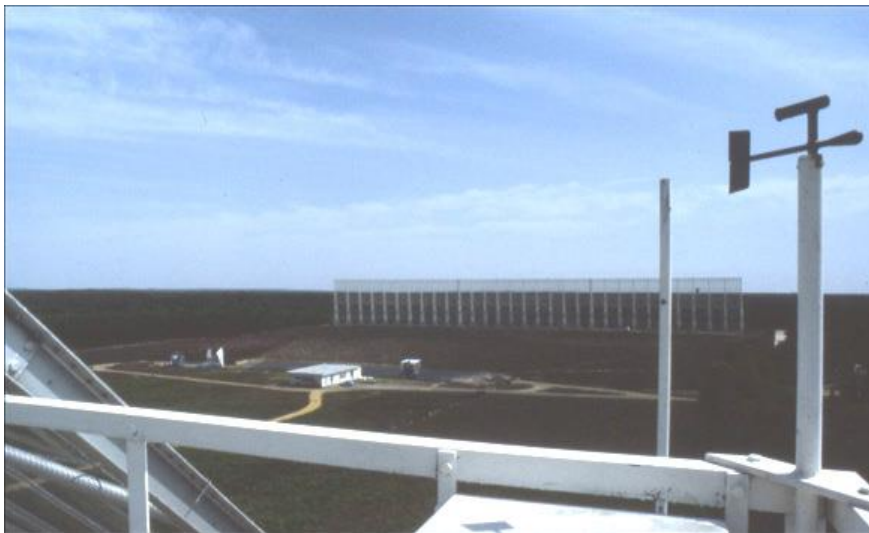


Figure I. 12: Radiotélescope de Nançay [13]

Même avec de très grands instruments comme ceux décrits ci-dessus, les radioastronomes ne disposaient pas du pouvoir séparateur nécessaire pour la compréhension de nombreux phénomènes. Il leur a fallu faire preuve de beaucoup d'imagination...

La solution qu'ils ont trouvée est l'interférométrie.

I.6 L'interféromètre :

Un interféromètre est un instrument permettant de former et d'étudier des franges d'interférence. Il repose sur l'interférométrie ; qui est une méthode de mesure exploitant les interférences intervenantes entre plusieurs ondes cohérentes entre elles [14].

Le principe consiste dans l'étude des interférences produites par la combinaison de faisceaux cohérents (provenant d'une même source et vibrant en phase) présentant une différence de marche. Il permet d'obtenir une meilleure résolution spatiale [15].

I.6.1 L'interféromètre astronomique :

Un interféromètre astronomique est un réseau de télescopes, segments de miroir ou antennes de radiotélescope séparés qui fonctionnent ensemble comme un seul télescope pour fournir des images à plus haute résolution d'objets astronomiques tels que les étoiles, les nébuleuses et les galaxies au moyen de l'interférométrie [16].

I.6.2 Le principe :

La combinaison des signaux des différentes antennes observer simultanément le même objet, il est possible d'obtenir des informations plus détaillées et même de reconstruire une image de celui-ci. La résolution angulaire de cette image est alors déterminée par la taille totale du réseau et non celle d'un seul télescope, d'où la possibilité de voir des détails très fins.

Evidemment, quelques points isolés ne peuvent pas remplacer tout un miroir et les observations interférométriques ne produisent pas directement d'images, mais un signal qui doit être traité par des techniques mathématiques avant de pouvoir être utilisé [17].

I.6.3 Les réseaux :

La radioastronomie est connue pour ses très grandes antennes paraboliques, mais elle est en train de faire une transition vers l'utilisation d'un grand nombre de petits éléments (principe d'interféromètre). Parmi la nouvelle génération d'instruments très sensibles, nous pouvons mentionner :

- Le **LOFAR (LOw Frequency ARray)** en Europe.
- Le **SKA (Square Kilometre Array)** dont les stations seront réparties à terme en **Australie** et en **Afrique du Sud**.

I.6.3.1 LOw Frequency ARray:

Le radiotélescope LOFAR (LOw Frequency ARray : réseau à basses fréquences) : est un interféromètre radio de nouvelle génération de radiotélescopes, et le plus grand réseau européen en radioastronomie. LOFAR utilise une nouvelle conception de réseau à commande de phase, et il couvre la gamme de basses fréquences de 10 à 240 MHz.

Le réseau LOFAR ouvre une nouvelle fenêtre sur l'univers car au lieu d'utiliser un ensemble de grandes antennes coûteuses, il utilise plusieurs milliers d'antennes simples. Chaque antenne observe le ciel, et le télescope est pointé grâce à des techniques de traitement des signaux. La nouvelle conception de LOFAR permet au télescope d'effectuer des observations grand angle ainsi que d'observer dans plusieurs directions simultanément, ce qui n'est pas possible avec les antennes paraboliques traditionnelles. A plusieurs égards, LOFAR sera le plus grand télescope

au monde et permettra des recherches révolutionnaires dans plusieurs domaines de l'astronomie et de la physique des particules [18].

LOFAR est un réseau européen mis en service en 2010, de cent mille (100 000) antennes réparties en Europe dans 50 stations d'observation connectées entre elles par le réseau haut débit. Il est exploité par **ASTRON aux Pays-Bas**. S'étendant à partir d'un noyau situé près du village d'**Exloo** au nord-est des Pays-Bas, un total de 40 stations LOFAR est en voie d'achèvement. Cinq autres stations ont été déployées dans toute l'**Allemagne**, et une station a été construite dans chacun des pays suivants : **France, Suède, Pologne, Irlande** et **Royaume-Uni**.



Figure I. 13: Carte de répartition des stations [19]

Les techniques numériques de formation de faisceaux rendent le système LOFAR agile et permettent un rejoinoiment rapide du télescope ainsi que la possibilité d'effectuer plusieurs observations simultanées. Grâce à son réseau central dense et à ses longues lignes de base interférométriques, LOFAR atteint une sensibilité et une résolution angulaire inégalées dans le régime des basses fréquences radio. Les installations de LOFAR sont exploitées conjointement par la fondation International LOFAR Telescope (ILT), en tant qu'observatoire ouvert à la communauté astronomique mondiale. LOFAR est l'un des premiers radio-observatoires à être équipé de pipelines de traitement automatisés pour fournir des produits scientifiques entièrement calibrés à sa communauté d'utilisateurs. Les nouvelles capacités, techniques et modes de fonctionnement de LOFAR en font un important pionnier du Square Kilometre Array (SKA).

La partie française du réseau LOFAR est implantée à Nancay, dans le Cher, au sein de la station de radioastronomie de l'Observatoire de Paris (Observatoire de Paris - PSL / CNRS / Université d'Orléans). LOFAR génère des quantités de données faramineuses. Faire une image en utilisant ce réseau d'antennes consiste à inverser un immense système composé de milliards d'équations. L'Observatoire de Paris a joué un rôle déterminant pour rendre possible l'exploitation des données de LOFAR [19].



Figure I. 14: Station d'observation radioastronomie en Paris.

I.6.3.2 Square Kilometer Array:

Le Square Kilometer Array (en abrégé SKA, en français « Réseau d'un kilomètre carré ») est un projet de radiotélescope géant, de surface collectrice équivalente d'un kilomètre carré (comme son nom l'indique), constitué de plusieurs réseaux interférométriques dans les longueurs d'onde métriques et centimétriques. SKA a été conçu par un consortium scientifique international pour étudier des questions scientifiques essentielles allant de la naissance de notre Univers aux origines de la vie.

Le SKA aura observer les ondes radio de basse fréquence, et couvrira une gamme de longueurs d'onde sans précédent, allant d'environ 50 MHz (6 m de longueur d'onde) à plus de 20 GHz (1.5 cm de longueur d'onde) [20].



Figure I. 15: Square Kilometer Array [21]

Une échelle sans précédent :

Le SKA utilisera à terme des milliers d'antennes paraboliques et jusqu'à un million d'antennes basses fréquences qui permettront aux astronomes de surveiller le ciel et de l'étudier beaucoup plus rapidement que tout système existant actuellement.

Sa configuration unique donnera au SKA une portée inégalée en matière d'observations, dépassant largement la qualité de résolution d'image du télescope spatial Hubble.

Il aura également la capacité d'imager en parallèle d'énormes zones du ciel, un exploit qu'aucun télescope de surveillance n'a jamais réalisé à cette échelle avec ce niveau de sensibilité. Avec toute une série d'autres grands télescopes optiques et infrarouges construits et lancés dans l'espace au cours des prochaines décennies, le SKA complétera et complétera parfaitement les découvertes scientifiques et ouvrira la voie [20].

Un effort mondial :

Des organisations de 13 pays sont membres de l'organisation SKA - Afrique du Sud, Allemagne, Australie, Canada, Chine, Espagne, France, Inde, Italie, Nouvelle-Zélande, Pays-Bas, Royaume-Uni et Suède. Alors que ces membres constituent la pierre angulaire de la SKA, une centaine d'organisations dans une vingtaine de pays participent à la conception et au développement de la SKA. Des scientifiques et des ingénieurs de renommée mondiale travaillent sur un système qui nécessitera deux supercalculateurs [20].



Figure I. 16: Des centaines de milliers d'antennes basse fréquence seront situées en Australie occidentale

I.7 Calibration :

Dans un interféromètre astronomique, la source lumineuse est l'étoile **S** qui est observée. On utilise deux télescopes positionnés au sol à une certaine distance **B** (ligne de base), l'un de l'autre et mesure le signal radioélectrique de la source en fonction de temps. Or l'onde (la longueur d'onde λ) n'atteint pas l'antenne (1) au même instant que l'antenne (2) ; ce décalage appelé le retard τ , est estimé en effectuant la corrélation entre les deux signaux, θ est l'angle

au quelle la source est présente et la sortie de l'interféromètre multiplicateur $y(t) y(t-\tau)$ une valeur moyenne nulle et covariance Ω . Comme illustré dans la figure I.17.

Un réseau de télescopes comme celui-ci peut enregistrer des informations à haute résolution R ($R = \frac{\lambda}{B}$) sur une source sans nécessiter les grands anciens télescopes (coûteux).

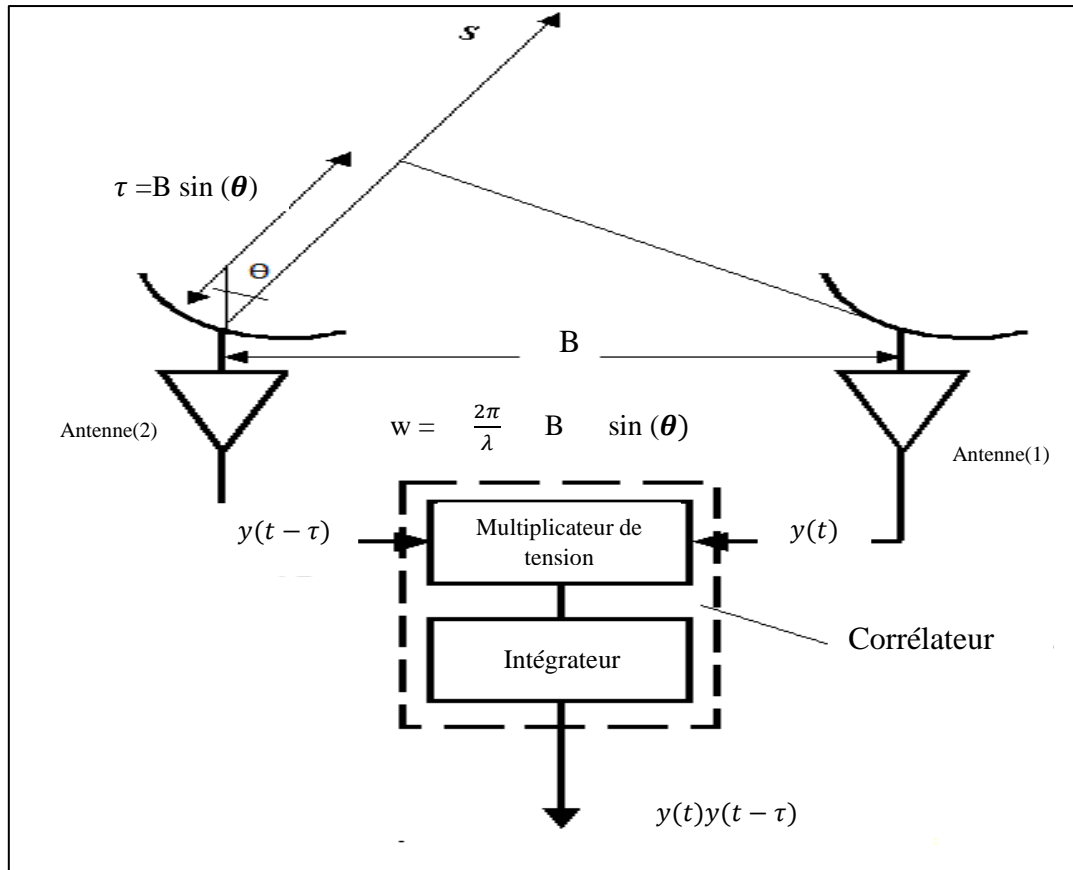


Figure I-17: Un interféromètre multiplicateur à deux éléments.

En radioastronomie, les signaux d'intérêt mesurés par les interféromètres sont perturbés par de nombreux effets environnementaux et instrumentaux, nécessitant la mise en œuvre de techniques algorithmiques pour les traiter et pouvoir ainsi reconstruire des images parfaitement nettes de l'espace.

Cette étape de correction de ces perturbations est la calibration, qui fait le sujet de notre projet, et repose généralement sur une modélisation gaussienne du bruit, pour une seule fréquence considérée [22].

I.7.1 Les effets de perturbations :

I.7.1.1 Les effets instrumentaux :

Dans un réseau d'antennes chaque élément a sa propre réponse directionnelle $\mathbf{A}(\theta)$, cette fonction est appelée le faisceau primaire. On suppose généralement que le faisceau primaire est égal pour tous les éléments du réseau. Avec des sources ponctuelles Q , les échantillons résultants du faisceau primaire sont collectés dans un vecteur $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)]^T$. La

forme générale du faisceau primaire $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ est connue grâce à la modélisation électromagnétique effectuée lors de la conception du télescope. Si elle n'est pas précise suffisamment, il faut alors la calibrer. Au départ :

- Les gains électroniques indépendants de la direction.
- Les phases de la chaîne de réception de chaque élément du réseau sont inconnues et doivent être estimés. Ils sont généralement différant d'élément à élément.
- Donc on a un vecteur inconnu \mathbf{G} avec des entrées complexes qui multiplient chacune le signal de sortie $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ de chaque télescope.
- Les puissances de bruit de chaque élément sont inconnues et généralement inégales les unes par rapport aux autres. On suppose toujours que le bruit $\mathbf{n}(\mathbf{t})$ est indépendant d'un élément à l'autre. Donc on peut modéliser la matrice de covariance du bruit par une diagonale (inconnue) $\boldsymbol{\Omega}_n$.

Donc on peut écrit l'équation :

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{G}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(\mathbf{t}) + \mathbf{n}(\mathbf{t}) \quad (\text{I.1})$$

I.7.1.2 Les effets de propagation :

Les turbulences ionosphériques et troposphériques provoquent une réfraction variable dans le temps et diffraction, qui a un effet profond sur la propagation des ondes radio. Dans le cas le plus simple, l'ionosphère est modélisée comme une fine couche à une certaine hauteur au-dessus de la Terre, provoquant des retards qui peuvent être représentés comme des déphasages. Cet effet est plus prononcé aux basses fréquences utilisées pour LOFAR.

En général, on suppose que l'ionosphère est "constante" sur environ 10 km et environ 10s. Un meilleur modèle consiste à modéliser le retard ionosphérique comme un « coin », ce modifie les retards géométriques, conduisant à un décalage de la position apparente des sources.

Pour des distances plus importantes, des fonctions d'ordre supérieur sont nécessaires pour modéliser le comportement spatial de l'ionosphère, et si elles ne sont pas corrigées, les distorsions d'image résultantes sont comparables aux distorsions que l'on voit en regardant les lumières au fond d'une piscine.

Précédemment, la matrice de réponse \mathbf{A} du réseau est en fait une fonction des vecteurs de direction de la source et nous avons écrit $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ où le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ est un paramètre propre de la direction de source \mathbf{Q} . Si un modèle linéaire pour la perturbation ionosphérique est suffisant, alors $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ remplacer par $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)$.

Où $\boldsymbol{\theta}_0$ est différent de $\boldsymbol{\theta}$ en raison du déplacement de la direction apparente de chaque source.

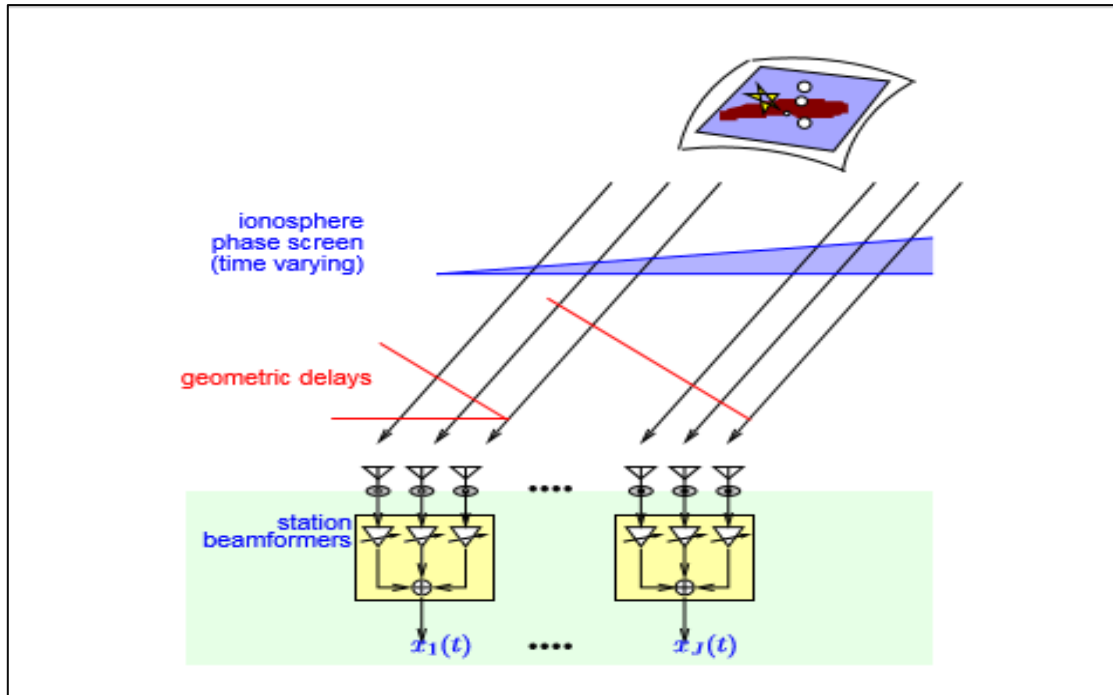


Figure I. 18: les effets ionosphérique [22]

I.7.2 Les algorithmes de calibration :

En radioastronomie, pour améliorer la résolution de détection et obtenir des images nettes, il est nécessaire de développer et mettre en œuvre des algorithmes de calibration. Parmi ces algorithmes on trouve :

I.7.2.1 Estimation des gains des éléments et les réponses directionnelles :

Dans cet algorithme on prend un modèle de référence qui est connu au moment de l'itération « l'auto-calibration », donc les gains du télescope sont estimés, et on peut effectuer les corrections sur les autres modèles. La prochaine meilleure image est construite conduisant à un nouveau modèle de référence.

I.7.2.2 Estimation de la perturbation ionosphérique :

Le problème général de calibration est écrit $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta')$ où θ' sont les emplacements des sources apparents. Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode de moindre carré alternatif (MSE : Mean Squart Erreur) qui fixe les estimations des paramètres présentes et les relie avec θ' inconnu.

Les corrections des phases résultantes \mathbf{A}' reliev à $\mathbf{A}(\theta)$ et donc $\mathbf{A}(\theta') = \mathbf{A}(\theta) \odot \mathbf{A}'$.

I.7.2.3 Estimation de model général :

Dans le cas général la matrice de corrélation :

$$\mathbf{R} = (\mathbf{GA}) \mathbf{\Omega}_S (\mathbf{GA})^H + \mathbf{\Omega}_n \quad (\text{I.2})$$

Avec $\mathbf{\Omega}_S$ la covariance de signal et $\mathbf{\Omega}_n$ covariance de bruit rejointe.

On a une matrice diagonale inconnue \mathbf{G} et on suppose que \mathbf{A} et $\mathbf{\Omega}_S$ sont connus. Puisque \mathbf{A} multiplie ponctuellement \mathbf{G} et que \mathbf{G} est inconnu, $\mathbf{\Omega}_S$ peut également être omis. Cela conduit à un problème de la forme :

$$\mathbf{R} = (\check{\mathbf{G}}\check{\mathbf{G}})^H + \mathbf{\Omega}_n \quad (\text{I.3})$$

Avec $\check{\mathbf{G}} = \mathbf{A} \mathbf{\Omega}_S^{\frac{1}{2}}$.

Ce problème est connu sous le nom de problème d'analyse factorielle, le facteur $\check{\mathbf{G}}$ peut être résolu, en utilisant des algorithmes de correspondance de covariance.

I.8 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les fondements de l'astronomie où nous avons illustré les outils d'observation de cette discipline. Mais nous avons aussi donné une importance particulière à la radioastronomie qui est une technique qui permet de reproduire les images astronomiques par des signaux radio seulement. Plusieurs projets mondiaux (LOFAR et SKA) sont aussi présentés. La calibration de ces réseaux d'antennes en radioastronomie permet d'améliorer la qualité des images estimées en astronomie. Plusieurs algorithmes de calibration sont cités.

Dans le chapitre suivant, nous allons développer et présenter deux algorithmes de calibration qui se base sur la technique du maximum de vraisemblance (ML : Maximum Likelihood) qui sont IML (Iterative Maximum Likelihood) et MIML (Modified Iterative ML).

Chapitre II: Calibration de capteurs d'un réseau d'antennes séparés et estimation des directions d'arrivée par les méthodes du Maximum de vraisemblance

II.1 Introduction :

Le traitement d'antennes traite le problème de l'extraction d'informations à partir d'une collection de mesures obtenues à partir des capteurs répartis dans l'espace. L'estimation de la direction d'arrivée DOA a été toujours le souci des radaristes et les observateurs. La calibration des capteurs du réseau d'antennes est aussi primordiale pour la formation des images de hautes résolutions.

L'estimation de la direction d'arrivée (DOA) peut être obtenue par le réseau d'antennes côté récepteur. La résolution d'un algorithme d'estimation DOA dépend des structures du réseau d'antennes et ces algorithmes ont également la capacité d'identifier le nombre de sources de signaux et leurs directions (sources de signaux multiples).

Dans ce chapitre, on va reformuler et redémontrer les équations de la référence [23] en présentant deux algorithmes IML (itérative maximum de vraisemblance) et MIML (Modified itérative maximum de vraisemblance), pour estimer les DOA et la calibration d'un réseau d'antennes composé de plusieurs sous réseaux qui peuvent être lointains. Les performances de ces deux algorithmes sont démontrées par des simulations.

II.2 L'estimateur du maximum de vraisemblance :

En statistique, l'estimation du maximum de vraisemblance est une méthode d'estimation des paramètres d'une distribution de probabilité en maximisant une fonction de vraisemblance, de sorte que, selon le modèle statistique supposé, les données observées sont les plus probables. Le point dans l'espace des paramètres qui maximise la fonction de probabilité est appelé estimation du maximum de vraisemblance [24].

II.2.1 La fonction de vraisemblance :

Soit \mathbf{Y} une variable aléatoire réelle, de loi discrète ou continue, dont on veut estimer θ .

On suppose les données $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ sont les réalisations de variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_n indépendantes et θ le paramètre inconnu et n le nombre total d'instantanés

Quand les observations sont toutes discrètes ou toutes continues, on appelle fonction de vraisemblance pour l'échantillon $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$, la fonction du paramètre θ :

$$\mathcal{L}(\theta, \dots, \mathbf{y}_1) = f_{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \theta), \quad \text{si } Y_i \text{ sont continues.} \quad (\text{II.1})$$

Si Y_i sont indépendantes et donc la fonction de vraisemblance s'écrit comme suit :

$$\mathcal{L}(\theta, \dots, \mathbf{y}_1) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(Y_i; \theta) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{y}_i; \theta) , \quad \text{si } Y_i \text{ sont continues} \quad (\text{II.2})$$

II.2.2 Principe :

L'objectif de l'estimation du maximum de vraisemblance est de faire des inférences sur la population qui est la plus susceptible d'avoir généré l'échantillon en particulier la distribution de probabilité conjointe des variables aléatoires $\{y_1, y_2, \dots\}$ pas nécessairement indépendantes et distribuées de manière identique. À chaque distribution de probabilité est associé un vecteur unique, appelé $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k]^T$ de paramètres qui indexent la distribution de probabilité à l'intérieur d'une famille paramétrique $\{f(\cdot; \theta) / \theta \in \Theta\}$ où Θ est l'espace de paramètres, un sous-

ensemble à dimension finie de l'espace euclidien. L'évaluation de la densité des articulations au niveau de l'échantillon de données $y = (y_1, y_2, \dots; y_n)$ donne une fonction à valeur réelle, qui est appelée la fonction de vraisemblance [24] :

$$\mathcal{L}_n(\theta) = \mathcal{L}_n(y; \theta) = f_n(y; \theta) \quad (\text{II.3})$$

Pour les variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, la fonction $f_n(y; \theta)$ sera le produit de fonctions de densité.

L'objectif de l'estimation du maximum de vraisemblance est de trouver les valeurs des paramètres du modèle qui maximisent la fonction de vraisemblance sur l'espace des paramètres, c'est-à-dire :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}_n(\theta; y) \quad (\text{II.4})$$

En pratique, on travaille avec le logarithme naturel de la fonction de vraisemblance, appelé log-vraisemblance :

$$l(\theta; y) = \log \mathcal{L}_n(\theta; y)$$

Comme le logarithme est une fonction monotone, le maximum de $l(\theta; y)$ ainsi que le maximum de θ est la même que celle du maximum de \mathcal{L}_n [25]. Si $l(\theta; y)$ est différentiable en θ , les conditions nécessaires à la réalisation d'un maximum (ou d'un minimum) sont :

$\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \frac{\partial l}{\partial \theta_2} = 0, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_k} = 0$, connues sous le nom d'équations de probabilité.

Pour certains modèles, ces équations peuvent être explicitement résolues pour $\hat{\theta}$ mais en général, aucune solution de forme fermée au problème de la maximisation n'est connue ou disponible, et une ML ne peut être trouvée que par optimisation numérique. Un autre problème est que dans les échantillons finis, il peut exister des racines multiples pour les équations de probabilité. Si la racine identifiée $\hat{\theta}$ des équations de probabilité est en effet un maximum (local) dépend de la matrice des dérivés partiels et croisés du second ordre :

$$H(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_1^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_1 \theta_k} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_a \theta_1} \right|_{\theta=\hat{\theta}} & \dots & \left. \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \end{pmatrix}$$

Connue sous le nom de matrice de Hessian est négative semi-définie à $\hat{\theta}$, ce qui indique une concavité locale. De manière pratique, les distributions de probabilités les plus courantes (en particulier la famille exponentielle) sont logarithmes concave [26-28].

II.3 Modèle Mathématique :

Le modèle mathématique illustré dans la figure II.1 présente un réseau de m capteur (antenne) disposés dans une géométrie ULA (un réseau linéaire uniforme) qui reçoit des ondes générées par d sources.

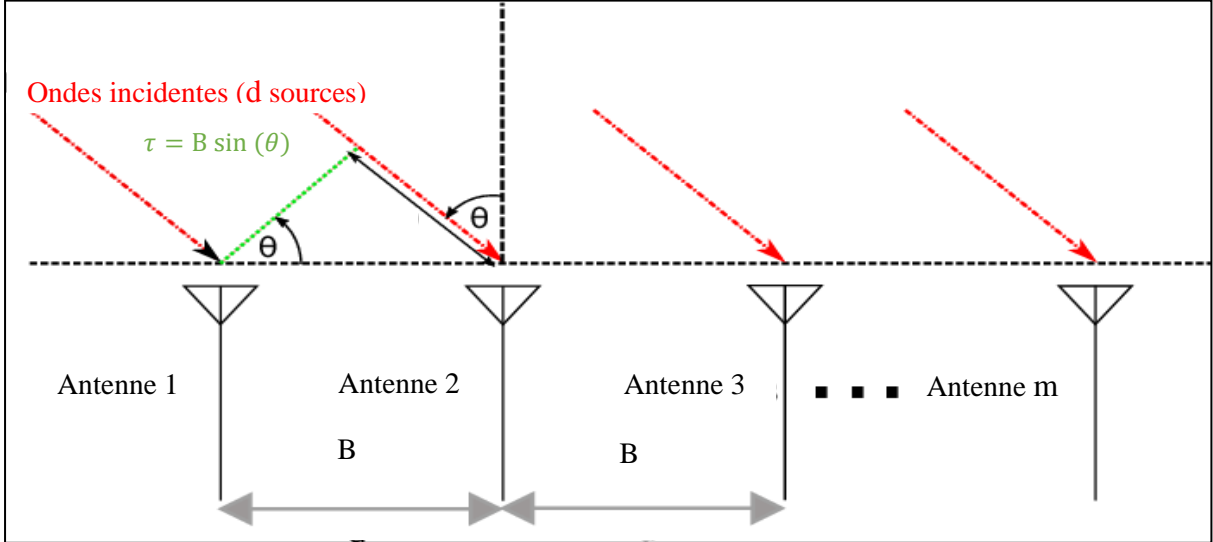


Figure II. 1 : Réseau d'antenne recevoir

La sortie $k^{i\text{ème}}$ élément du réseau est modélisée comme la réponse d'un système linéaire invariant dans le temps et alors peut être écrite comme suit :

$$\bar{y}_k(t) = \sum_{i=1}^d h_{ki}(t) * \bar{s}_i(t - \tau_{ki}) + \bar{n}_k(t) \quad (\text{II. 5})$$

Avec :

- $h_{ki}(t)$ est la réponse impulsionnelle du $k^{i\text{ème}}$ à un signal $\bar{s}_i(t)$ situé sur le réseau ; et qui dépend de la structure de l'antenne physique, de l'électronique du récepteur, des autres antennes du réseau par couplage mutuel ainsi que des paramètres du signal.
- Le retard du $i^{i\text{ème}}$ signal à $k^{i\text{ème}}$ élément du réseau par rapport à certain point de référence est noté τ_{ki} .
- $\bar{n}_k(t)$ est le bruit additif indépendant de $\bar{s}_i(t)$.

Les sorties des capteurs sont collectées dans le m -vecteur :

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{y}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d h_{1i}(t) * \bar{s}_i(t - \tau_{1i}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d h_{mi}(t) * \bar{s}_i(t - \tau_{mi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{n}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{n}_m(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II. 6})$$

II.3.1 Modèle à Bande Etroite :

On considère le signal émetteur $\bar{s}(t)$ et exprime ce signal en fréquence centrale ω ,

($\omega = 2\pi f_c$).

$$\bar{s}(t) = \alpha(t) \cos(\omega t + \phi(t)) \quad (\text{II. 7})$$

Si l'amplitude $\alpha(t)$ et la phase $\phi(t)$ du signal varient lentement par rapport au temps de propagation dans le réseau, c'est-à-dire si : $\alpha(t - \tau) \approx \alpha(t)$ et $\phi(t - \tau) \approx \phi(t)$; donc le signal est dit à bande étroite et l'hypothèse de bande étroite implique que :

$$\bar{s}(t - \tau) = \alpha(-\tau) \cos(\omega(t - \tau) + \phi(t - \tau)) \approx \alpha(t) \cos(\omega t - \omega\tau + \phi(t)) \quad (\text{II. 8})$$

En d'autres termes, l'hypothèse de bande étroite sur $\bar{s}(t)$ permet de modéliser le retard du signal comme un simple déphasage de la fréquence porteuse. Maintenant, la réponse stationnaire du $k^{\text{ième}}$ capteur à $\bar{s}(t)$ peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{y}_k(t) &= h_k(t) * \bar{s}(t - \tau_k) = h_k(t) * \alpha(t) \cos(\omega t - \omega\tau_k + \phi(t)) \\ &\simeq |H_k(\omega)| \alpha(t) \cos(\omega t - \omega\tau_k + \phi(t) + \arg H_k(\omega)) \end{aligned} \quad (\text{II. 9})$$

Avec $H_k(\omega)$ est la Transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h_k(t)$.

La représentation complexe de signal pour $\bar{y}_k(t)$ est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{y}_k(t) &= x_k^c(t) + jx_k^s(t) \\ &= H_k(\omega) e^{-j\omega\tau_k} \alpha(t) e^{j\phi(t)} \\ &= H_k(\omega) e^{-j\omega\tau_k} s(t) \end{aligned} \quad (\text{II. 10})$$

Avec :

- Le signal $s(t)$ est l'enveloppe complexe de $\bar{s}(t)$.
- $y_k^c(t) = |H_k(\omega)| \alpha(t) \cos(\phi(t) + \arg H_k(\omega) - \omega\tau_k)$ est la composante passe-bas en phase de $\bar{y}_k(t)$.
- $y_k^s(t) = |H_k(\omega)| \alpha(t) \sin(\phi(t) + \arg H_k(\omega) - \omega\tau_k)$ est la composante passe-bas en quadrature de $\bar{y}_k(t)$.
- En pratique ; les composantes sont générées par un détecteur en quadrature dans lequel le signal est multiplié par $\sin(t)$ et $\cos(t)$ et le filtrage passe-bas.

II.3.2 Modèle de données paramétriques :

Le modèle paramétrique est basé sur une série de paramètres inconnus associée à chaque signal d'émission. Les p paramètres associés au $i^{\text{ème}}$ signal sont collectés dans le vecteur de

paramètres θ_i . Avec $h_k(\theta_i)$ La réponse des k capteurs et $\tau_k(\theta_i)$ le retard de propagation du $i^{\text{ème}}$ signal. A partir des équations (II. 6) et (II. 10) Le modèle de données paramétriques est :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^d \begin{bmatrix} a_1(\theta_i) \\ \vdots \\ a_m(\theta_i) \end{bmatrix} s_i(t) + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

$$= [a(\theta_1) \dots a(\theta_d)] [s_1(t) \dots s_d(t)]^T + [n_1(t) \dots n_d(t)]^T \quad (\text{II.12})$$

$$= A(\theta) s(t) + n(t)$$

- la réponse du $k^{\text{ème}}$ capteur au $i^{\text{ème}}$ signal est $a_k(\theta_i) = H_K(\theta_i) e^{-j\omega \tau_k(\theta_i)}$
- Le vecteur $y(t)$ appartient à un espace vectoriel complexe m -dimensionnel $y(t) \in \mathbb{C}^{m \times 1}$
- Le vecteur pd des paramètres du signal réel est désigné par $\theta = [\theta_{11} \dots \theta_{1P} \dots \theta_{d1} \dots \theta_{dp}]^T$

Le paramétrage de la réponse d'un réseau est illustré par une considération d'un réseau linéaire uniforme ULA avec des capteurs identiques et un espacement uniforme B . Supposons que les sources son lointaines du réseau d'antenne et que le support est non dispersif de sorte que les fronts d'onde peuvent être approximés comme planaire, alors, le paramètre d'intérêt est la direction d'arrivée DOA des fronts d'onde mesurés par rapport à la normale du réseau. Le délai de propagation entre deux capteurs adjacents est lié au DOA par l'équation suivant [29] :

$$\sin \theta = \frac{c\tau}{B} \quad (\text{II. 13})$$

Avec c la vitesse de propagation des ondes.

Le vecteur de réponse du réseau est donné par :

$$\mathbf{a}(\theta) = a(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{\omega B \sin \theta}{c}} \\ \vdots \\ e^{-j(m-1)\frac{\omega B \sin \theta}{c}} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 13})$$

Avec :

- $a(\theta)$ est la réponse du premier élément.
- Les premiers vecteurs de cette structure spéciale sont communément appelés vecteurs Vandermonde.

Le vecteur de réponse trace un collecteur unidimensionnel dans l'espace lorsque l'angle θ varie sur la plage de paramètres d'intérêt, \mathcal{A} est la collection de tous les vecteurs de réponse de l'ensemble des paramètres d'intérêt.

$$\mathcal{A} = \{a(\theta_i) \mid \theta_i \in \Theta\}$$

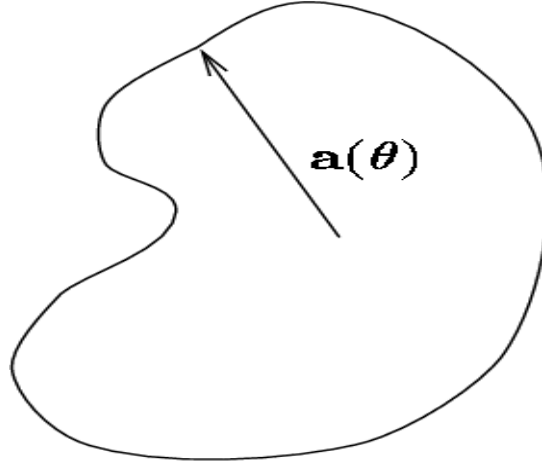


Figure II. 2: Le réseau collecteur de vecteur de réponse avec la variation de θ .

Soit le processus $\mathbf{y}(t)$ est observé aux N instants $\{t = 1, \dots, N\}$. Chaque observation vectorielle est appelée un instantané de la sortie du réseau « snapshot » et la matrice de données est la collection des instantanées du réseau.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (\text{II. 14})$$

Avec $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1) \dots \mathbf{y}(N)]$, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1) \dots \mathbf{s}(N)]$, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1) \dots \mathbf{n}(N)]$ et

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_d)]$$

II.4 Calibration des capteurs du réseau d'antenne par des méthodes ML :

Pour calibrer les capteurs du réseau d'antennes séparés, c'est-à-dire, plusieurs réseaux d'antennes différents mais connectés, on présente deux algorithmes basés sur la technique ML. Le premier algorithme IML, qui est une méthode itérative ML et le deuxième algorithme modifié itérative ML. On exploite ces deux algorithmes pour estimer la matrice de Calibration du réseau, mais aussi on va estimer aussi la DOA.

II.4.1 Modèle d'observation :

Dans ce problème on considère une structure réseaux de capteurs composés de plusieurs sous-réseaux qui peuvent être lointains entre eux, on considère aussi que les \mathbf{P} premières sources reçues par le réseau sont connues. Donc, la matrice de pilotage est divisée comme suite : [23] [30-32]

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{A}(\theta_K), \mathbf{A}(\theta_U)] \quad (\text{II. 15})$$

Avec : $\theta_K = [\theta_1, \dots, \theta_P]^T$ représente le vecteur des DOA connues ;

Et $\theta_U = [\theta_{P+1}, \dots, \theta_d]^T$ représente le vecteur des DOA inconnues.

Donc la matrice de signal de source devient comme suite :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_K^T, \mathbf{S}_U^T]^T \quad (\text{II. 16})$$

Avec : $\mathbf{S}_K = [S_K(1) \dots S_K(N)]$, $\mathbf{S}_U = [S_U(1) \dots S_U(N)]$,

Et $S_K(t) = [s_1(t), \dots, s_P(t)]^T$, $S_U(t) = [s_{P+1}(t), \dots, s_d(t)]^T$.

En plus que la matrice de covariance de bruit est représentée donc on considère les hypothèses suivantes :

- le bruit entre les capteurs de différents sous-réseaux est statistiquement et spatialement indépendant.
- Le bruit est corrélé entre les capteurs. Alors la structure diagonale par blocs de la matrice de covariance du bruit.
- les sorties des capteurs individuels sont généralement à des distorsions par complexe multiplicatif constant facteurs \mathbf{G} (gains). Ces erreurs de calibration sont liées au matériel, conduisant à différents gains de capteurs indépendants du DOA

Cette étude est adaptée à la problématique présentée dans le projet LOFAR, présenté dans le chapitre précédent.

II.4.1.1 Matrice de calibration :

La matrice de calibration qui représente le gain complexe inconnu de chaque capteur qui peut être modélisé par :

$$\mathbf{G} = \mathbf{diag}\{\mathbf{g}\} \quad (\text{II. 17})$$

Le vecteur $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_m\}^T$ contient les différents gains complexes inconnus qui sont indépendants des DOA. Donc on peut écrire l'équation (II. 14) comme suite :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_K) \mathbf{S}_K + \mathbf{G} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_U) \mathbf{S}_U + \mathbf{N} \quad (\text{II. 18})$$

II.4.1.2 Géométrie des sous-réseaux de capteurs :

Le réseau de capteur est constitué d'un ensemble de sous-réseaux L . En raison des grandes distances entre les sous-réseaux par rapport à la longueur d'onde du signal [33-34], le bruit est considéré comme statistiquement indépendant entre les sous-réseaux. Quand même, le bruit est supposé être spatialement corrélé pour des capteurs très proches l'un à l'autre [35]. Ainsi, la matrice de covariance de bruit indiquée par $\boldsymbol{\Omega}$ est définie par bloc diagonal suivant :

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{bdiag}\{\boldsymbol{\Omega}_1, \dots, \boldsymbol{\Omega}_L\} \quad (\text{II. 19})$$

Avec $\boldsymbol{\Omega}_i$ c'est la matrice carrée $m_i \times m_i$ et m_i est le nombre de capteurs dans le $i^{\text{ème}}$ sous-réseau et $\sum_{i=1}^L m_i = m$.

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) \sim \mathbf{CN}(\mathbf{G} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\Omega}) \quad (\text{II. 20})$$

Alors η représente les paramètres inconnus de toute la problématique et qui est représenté comme suit :

$$\eta = \left[\boldsymbol{\theta}_u^T, \mathbf{s}_u(1)^T, \dots, \mathbf{s}_u(N)^T; \{[\Omega_1]_{h_1, l_1}\}_{l_1 \geq h_1}, \dots, \{[\Omega_L]_{h_L, l_L}\}_{l_L \geq h_L}; \mathbf{g}^T \right]^T \quad (\text{II. 21})$$

Avec $i=1, \dots, L$ et $h_i, l_i=1, \dots, m_i$

Et $\{[\Omega_i]_{h_i, l_i}\}_{l_i \geq h_i}$ représentent tous les éléments non nul qui sont en dehors de la diagonal de la matrice de covariance du bruit.

II.4.2 L'algorithme itératif IML pour la calibration et l'estimation des DOAs :

On va exploiter la technique ML itérative pour estimer en même temps la matrice de calibration du réseau d'antennes, le bruit, le signal de sources inconnue et les DOAs inconnues. Cette procédure itérative permet d'obtenir une expression de forme fermée. En effet, la fonction de log-vraisemblance optimisée, pour estimer chaque paramètre inconnu tout en fixant les autres paramètres.

La fonction de log-vraisemblance est présentée comme suit : [23] [35-37]

$$L(\eta) = -N \log(\det\{\Omega\}) - \text{tr}\{V^H \Omega^{-1} V\} \quad (\text{II. 22})$$

Avec :

$$V = Y - GA(\theta)S \quad (\text{II. 23})$$

II.4.2.1 Estimation de Ω :

L'estimation de Ω consiste à dériver $L(\eta)$ par rapport au $[\Omega_i]_{h_i, l_i}$, avec $i = 1, \dots, L$

et $h_i, l_i = 1, \dots, m_i$, donc la dérivée est :

$$\frac{\partial L(\eta)}{\partial [\Omega_i]_{h_i, l_i}} = -N \text{tr} \left(\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial [\Omega_i]_{h_i, l_i}} \right) - \text{tr} \left(V^H \frac{\partial \Omega^{-1}}{\partial [\Omega_i]_{h_i, l_i}} V \right) \quad (\text{II. 24})$$

$$\frac{\partial L(\eta)}{\partial [\Omega_i]_{h_i, l_i}} = -\text{tr} \left(N \Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial [\Omega_i]_{h_i, l_i}} + V^H \frac{\partial \Omega^{-1}}{\partial [\Omega_i]_{h_i, l_i}} V \right) \quad (\text{II. 25})$$

$$= -\text{tr} \left(N \Omega^{-1} e_{i, h_i} e_{i, l_i}^T + V^H \Omega^{-1} e_{i, h_i} e_{i, l_i}^T \Omega^{-1} V \right)$$

$$= -N e_{i, l_i}^T \Omega^{-1} e_{i, h_i} + e_{i, l_i}^T \Omega^{-1} V V^H \Omega^{-1} e_{i, h_i}$$

$$\frac{\partial L(\eta)}{\partial [\Omega_i]_{h_i, l_i}} = 0$$

$$\hat{\Omega}_{IML} = \frac{1}{N} V V^H \odot E \quad (\text{II. 26})$$

Avec : $E = \text{bdiag} \{E_{M_1}, \dots, E_{M_L}\}$ et $[e_{i, h_i}]_j = \delta(j - h_i)$.

II.4.2.2 Estimation de G :

Pour estimer la matrice G il faut dériver la relation (II. 22) par rapport à chaque élément g_i pour $i=1, \dots, m$, on obtient :

$$\frac{\partial L(\eta)}{\partial g_i} = -N \frac{\partial}{\partial g_i} \log(\det\{\Omega\}) - \frac{\partial}{\partial g_i} \text{tr}\{V^H \Omega^{-1} V\} \quad (\text{II. 27})$$

$$\frac{\partial L(\eta)}{\partial g_i} = -\frac{\partial}{\partial g_i} \text{tr}\left((Y - GA(\theta)S)^H \Omega^{-1} (Y - GA(\theta)S)\right) \quad (\text{II. 28})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial g_i} \text{tr}\left(Y^H \Omega^{-1} Y - Y^H \Omega^{-1} GA(\theta)S - S^H A(\theta)^H G^H \Omega^{-1} Y + S^H A(\theta)^H G^H \Omega^{-1} GA(\theta)S\right)$$

$$= -\text{tr}\left(-Y^H \Omega^{-1} \frac{\partial G}{\partial g_i} A(\theta)S + S^H A(\theta)^H G^H \Omega^{-1} \frac{\partial G}{\partial g_i} A(\theta)S\right)$$

$$= \text{tr}\left(A(\theta)S Y^H \Omega^{-1} e_i e_i^T - A(\theta)S S^H A(\theta)^H G^H \Omega^{-1} e_i e_i^T\right)$$

Avec $[e_i]_j = \delta(i - j)$.

On pose : $Z_1 = A(\theta)S Y^H \Omega^{-1}$ et $Z_2 = A(\theta)S S^H A(\theta)^H$

Donc : $[Z_1]_{i,i} = [Z_2 G^H \Omega^{-1}]_{i,i}$

Alors : $[Z_3]_{i,i} = [Z_2]_{l,i}^* [\Omega^{-1}]_{i,l}^*$ avec $l, i=1, \dots, m$

Où Z_1 devient :

$$[Z_1]_{l,l} = \sum_{i=1}^M [Z_3]_{l,i}^* g_i^* = [[Z_3]_{l,0}, \dots, [Z_3]_{l,m}]^* \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}^* \quad (\text{II. 29})$$

$$\begin{bmatrix} [Z_1]_{11} \\ \vdots \\ [Z_1]_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Z_3]_{11} & \cdots & [Z_3]_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [Z_3]_{m1} & \cdots & [Z_3]_{mm} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}^* \quad (\text{II. 30})$$

$$\begin{bmatrix} [Z_1]_{11} \\ \vdots \\ [Z_1]_{mm} \end{bmatrix} = Z_3^* g^* \Rightarrow g^* = Z_3^\dagger \begin{bmatrix} [Z_1]_{11} \\ \vdots \\ [Z_1]_{mm} \end{bmatrix}$$

\dagger : C'est le pseudo-inverse car Z_3 c'est une matrice n'est pas carrée et de rang plein.

Et donc :

$$\hat{g}_{IML} = Z_3^\dagger [[Z_1]_{11}, \dots, [Z_1]_{mm}]^H \quad (\text{II. 31})$$

Ce qui implique : $\hat{G}_{IML} = \text{diag}(\hat{g}_{IML})$.

II.4.2.3 Estimation de S_U :

Pour estimer les sources de signaux inconnues on introduit les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}(\theta_K) &= \Omega^{-\frac{1}{2}} G A(\theta_K) \\ \bar{A}(\theta_U) &= \Omega^{-\frac{1}{2}} G A(\theta_U) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{Y} = \Omega^{-\frac{1}{2}} Y = \Omega^{-\frac{1}{2}} G [A(\theta_K) S_K + A(\theta_U) S_U] + N.$$

$$\bar{Y} = \tilde{Y} - \bar{A}(\theta_K) S_K = \Omega^{-\frac{1}{2}} \bar{A}(\theta_U) S_U + N.$$

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \bar{Y} \bar{Y}^H. \quad (\text{II. 32})$$

$$V = \Omega^{\frac{1}{2}} \bar{Y} - G A(\theta_U) S_U = \bar{Y} - \bar{A}(\theta_U) S_U.$$

La dérivée de (II. 22) par rapport $[S_U]_{h,l}$ avec $h = 1, \dots, (d - P)$ et $l = 1, \dots, m$ devienne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\eta)}{\partial [S_U]_{h,l}} &= -N \frac{\partial}{\partial [S_U]_{h,l}} \log(\det\{\Omega\}) - \frac{\partial}{\partial [S_U]_{h,l}} \text{tr}(V^H \Omega^{-1} V) \\ &= \frac{\partial}{\partial [S_U]_{h,l}} \text{tr}(V^H \Omega^{-1} V) \\ &= \text{tr} \frac{\partial}{\partial [S_U]_{h,l}} ((\bar{Y} - \bar{A}(\theta_U) S_U)^H \Omega^{-1} (\bar{Y} - \bar{A}(\theta_U) S_U)) \\ \frac{\partial L(\eta)}{\partial [S_U]_{h,l}} &= \text{tr} \frac{\partial}{\partial [S_U]_{h,l}} (\bar{Y}^H \Omega^{-1} \bar{Y} - \bar{Y}^H \Omega^{-1} \bar{A}(\theta_U) S_U - \bar{A}(\theta_U)^H S_U^H \Omega^{-1} \bar{Y} \\ &\quad + \bar{A}(\theta_U)^H S_U^H \Omega^{-1} \bar{A}(\theta_U) S_U) \\ &= \text{tr} \left(-\bar{Y}^H \Omega^{-1} \bar{A}(\theta_U) \frac{\partial S_U}{\partial [S_U]_{h,l}} + \bar{A}(\theta_U)^H S_U^H \Omega^{-1} \bar{A}(\theta_U) \frac{\partial S_U}{\partial [S_U]_{h,l}} \right) \\ \frac{\partial L(\eta)}{\partial [S_U]_{h,l}} &= \text{tr} (-\bar{Y}^H \Omega^{-1} \bar{A}(\theta_U) \delta_{h,l} \delta_{h,l}^T + \bar{A}(\theta_U)^H S_U^H \Omega^{-1} \bar{A}(\theta_U) \delta_{h,l} \delta_{h,l}^T) \\ \frac{\partial L(\eta)}{\partial [S_U]_{h,l}} &= 0 \\ S_U^H \bar{A}(\theta_U)^H \bar{A}(\theta_U) &= \bar{A}(\theta_U)^H \bar{Y}^H \end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{S}_U = (\bar{A}(\theta_U)^H \bar{A}(\theta_U))^{-1} \bar{A}(\theta_U)^H \bar{Y} \quad (\text{II. 33})$$

II.4.2.4 Estimation de θ_U :

Pour estimer les DOA inconnues, tout d'abord on remplace l'équation (II. 33) dans l'équation (II. 23), et on obtient :

$$V = Y - GA(\theta) \left((\bar{A}(\theta_U)^H \bar{A}(\theta_U))^{-1} \bar{A}(\theta_U)^H \bar{Y} \right)$$

On sait que : $(A^H A)^{-1} A^H = A^\dagger$ (II. 34)

$$\begin{aligned} \text{Donc : } V &= Y - GA(\theta) \bar{A}(\theta_U)^\dagger \bar{Y} \\ V &= \Omega^{\frac{1}{2}} \bar{Y} - \Omega^{\frac{1}{2}} \bar{A}(\theta_U) \bar{A}(\theta_U)^\dagger \bar{Y} \end{aligned}$$

$$\hat{V} = \Omega^{\frac{1}{2}} (I - \bar{A}(\theta_U) \bar{A}(\theta_U)^\dagger) \bar{Y} \quad (\text{II. 35})$$

Et on note $P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp = I - \bar{A}(\theta_U) \bar{A}(\theta_U)^\dagger$ la projection orthogonal à l'espace des vecteurs de la colonne de $\bar{A}(\theta_U)$.

$$\text{Et donc } \hat{V} = \Omega^{\frac{1}{2}} P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp \bar{Y}.$$

Pour estimer θ on doit remplacer (II. 26) dans le premier terme de l'équation de (II. 22), Le deuxième terme doit être écrit $\text{tr}\{V^H \Omega^{-1} V\} = Nm$:

$$L(\eta) = -N \log(\det\{\hat{\Omega}\})$$

$$\begin{aligned} L(\eta) &= -N \log(\det\left\{\frac{1}{N} VV^H \odot E\right\}) \\ &= -N \log(\det\left\{\frac{1}{N} \Omega^{\frac{1}{2}} P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp \bar{Y}^H \Omega^{\frac{1}{2}} P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp \bar{Y} \odot E\right\}) \end{aligned}$$

On remplace par \hat{R} (II. 32) :

$$L(\theta, \hat{\Omega}, \hat{S}_U, G) = -N \log(\det\left\{\left(\Omega^{\frac{1}{2}} P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp \hat{R} \Omega^{\frac{1}{2}} P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp\right) \odot E\right\})$$

$$L(\theta, \hat{\Omega}, \hat{S}_U, G) = -N \log(\det\{Z\}) \quad (\text{II. 36})$$

$$\text{On note : } Z = \left(\Omega^{\frac{1}{2}} P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp \hat{R} \Omega^{\frac{1}{2}} P_{\bar{A}(\theta_U)}^\perp\right) \odot E$$

Donc Le processus d'optimisation pour estimer DOA inconnues est :

$$\hat{\theta}_U = \arg \min_{\theta_U} (\log(\det\{Z\})) \quad (\text{II. 37})$$

Remarque : Pour effectuer l'étape d'optimisation de la fonction ($\log(\det\{Z\})$), nous utilisons un algorithme de type Newton [23] [38], caractérisé par une convergence quadratique.

Algorithme : IML *Iterative ML estimation*

Entrée : P, N, m, L, d, A (θ_K), S_K , Y, E

Sortie : $\hat{\theta}_U$, \hat{S}_U , $\hat{\Omega}_{IML}$, \hat{G}_{IML}

Initialisation : $\Omega_{IML} = I$, $G_{IML} = I$,

While

- 1 Estimation de $\hat{\theta}_U$ par (II. 37)
- 2 Estimation de \hat{S}_U par (II. 33)
- 3 Estimation de $\hat{\Omega}_{IML}$ par (II. 26)
- 4 Estimation de \hat{G}_{IML} par (II. 31)

End

Table II 1: Algorithme IML

Le tableau II.1 désigne les entrées, les sorties et résume les étapes de l'algorithme IML, pour estimer les paramètres inconnus entre autre la matrice de calibration G et les DOAs inconnus.

II.4.3 L'algorithme ML itératif modifié (MIML)

En pratique, la calibration est effectuée en prenant en compte la puissance des radiations des sources. Les sources restantes (d-P) ont une radiation négligeable. Pour cela, la distribution de l'observation à chaque snapshot peut être approximée par une distribution Gaussienne circulaire comme suit :

$$y(t) \sim CN(\mathbf{GA}(\theta_K)s_K(t), \mathbf{\Omega}) \quad (\text{II. 38})$$

L'idée de base de cette méthode alternative est, en premier étape, d'estimer les paramètres de calibrations et la matrice de covariance du bruit en se basant sur la calibration des sources. Une fois ces paramètres sont estimés, la deuxième étape consiste à estimer les DOAs inconnues et leurs signaux équivalent.

La méthodologie et les démonstrations de MIML sont les mêmes que ceux présentés en IML, sauf on prend en considération les relations (II. 38) et (II. 31) pour estimer la matrice \mathbf{G} . pour cela, on peut estimer G par la résolution du système suivant :

$$\hat{\mathbf{g}}_{MIML} = \tilde{\mathbf{Z}}_3^\dagger [[\tilde{\mathbf{Z}}_1]_{11}, \dots, [\tilde{\mathbf{Z}}_1]_{mm}]^H$$

Dont la démonstration est :

$$\text{On a} \quad V_K = Y - GA(\theta_K)S_K \quad (\text{II. 39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\eta)}{\partial g_i} &= -N \frac{\partial}{\partial g_i} \log(\det\{\Omega\}) - \frac{\partial}{\partial g_i} \text{tr}\{V_K^H \Omega^{-1} V_K\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial g_i} \text{tr}((Y - GA(\theta_K)S_K)^H \Omega^{-1} (Y - GA(\theta_K)S_K)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\eta)}{\partial g_i} &= -\text{tr} \left(-Y^H \Omega^{-1} \frac{\partial G}{\partial g_i} A(\theta_K) S_K + S_K^H A(\theta_K)^H G^H \Omega^{-1} \frac{\partial G}{\partial g_i} A(\theta_K) S_K \right) \\ &= \text{tr} (A(\theta_K) S_K Y^H \Omega^{-1} e_i e_i^T - A(\theta_K) S_K S_K^H A(\theta_K)^H G^H \Omega^{-1} e_i e_i^T) \end{aligned} \quad (\text{II. 40})$$

Avec $[e_i]_j = \delta(i - j)$

Et on peut mettre : $\tilde{Z}_1 = A(\theta_K) S_K Y^H \Omega^{-1}$

$$\tilde{Z}_2 = A(\theta_K) S_K S_K^H A(\theta_K)^H$$

Donc : $[\tilde{Z}_1]_{i,i} = [\tilde{Z}_2 G^H \Omega^{-1}]_{i,i}$

Et alors : $[\tilde{Z}_3]_{i,i} = [\tilde{Z}_2]_{i,i}^* [\Omega^{-1}]_{i,i}^*$ Avec $l, i = 1, \dots, m$

Avec le même calcul de Z_1 , \tilde{Z}_1 devienne : $[\tilde{Z}_1]_{l,l} = \sum_{i=1}^M [Z_3]_{l,i}^* g_i^*$

$$\text{Donc} \begin{bmatrix} [\tilde{Z}_1]_{11} \\ \vdots \\ [\tilde{Z}_1]_{mm} \end{bmatrix} = \tilde{Z}_3^* g^* \Rightarrow g^* = \tilde{Z}_3^\dagger \begin{bmatrix} [\tilde{Z}_1]_{11} \\ \vdots \\ [\tilde{Z}_1]_{mm} \end{bmatrix}$$

Et donc :

$$\hat{\mathbf{g}}_{MIML} = \tilde{Z}_3^\dagger [[\tilde{Z}_1]_{11}, \dots, [\tilde{Z}_1]_{mm}]^H \quad (\text{II. 41})$$

Implique que : $\hat{\mathbf{G}}_{MIML} = \text{diag}(\hat{\mathbf{g}}_{MIML})$

Et $\hat{\mathbf{\Omega}}_{MIML}$ devienne comme suit :

$$\hat{\mathbf{\Omega}}_{MIML} = \frac{1}{N} (V_K V_K^H) \odot E \quad (\text{II. 42})$$

Algorithme : MIML *Modified Iterative ML estimation*

Entrée : P, N, m, L, d, A (θ_K), S_K , Y, E

Sortie : $\hat{\theta}_U$, \hat{S}_U , $\hat{\mathbf{\Omega}}_{MIML}$, $\hat{\mathbf{G}}_{MIML}$

Initialisation : $\mathbf{\Omega}_{MIML} = I$,

While

1 | Estimation de $\hat{\mathbf{G}}_{MIML}$ par (II. 41)

2 | Estimation de $\hat{\mathbf{\Omega}}_{MIML}$ par (II. 42)

End

3 Estimation de $\hat{\theta}_U$ par (II. 37)

4 Estimation de \hat{S}_U par (II. 33)

Table II 2: L'algorithme MIML

Le tableau II.2 résume les étapes de l'algorithme MIML. On remarque que le coût de calcul est inférieur que la méthode IML.

II.4.4 La simulation :

Afin de vérifier l'efficacité et les performances de ces deux algorithmes, on a programmé les deux méthodes sous Matlab. Où on a considéré les hypothèses suivantes [23] :

- Deux sources, la calibration de :
 - ✓ la source connue est $\theta_1 = 7^\circ$.
 - ✓ La source inconnue est $\theta_2 = 15^\circ$.
- Monte-Carlo est 500.
- Les échantillons $N = 160$.
- Un réseau est composé de trois sous-réseaux linéaires avec quatre, trois et deux capteurs à chacun.
- La distance entre les capteurs de sous-réseaux est $\frac{\lambda}{2}$; 3λ et $\frac{7\lambda}{2}$ entre les sous-réseaux.
- La matrice de covariance de bruit $\mathbf{\Omega}$ avec une puissance de bruit identique pour chaque capteur du même sous-réseau.
- Les gains G avec une amplitude de $[0,1]$ et les phases de $[0,2\pi]$.
- Le rapport signal sur bruit (SNR) est indiqué par :

$$SNR = \frac{\sum_{t=1}^N \|S_u(t)\|^2}{N m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\Omega_{i,i}}$$

- L'erreur quadratique moyenne MSE (Mean Square Error) de $\hat{\theta}$:

$$MSE(\hat{\theta}) = E \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right]$$

Le résultat de simulation illustré dans la figure II.3 :

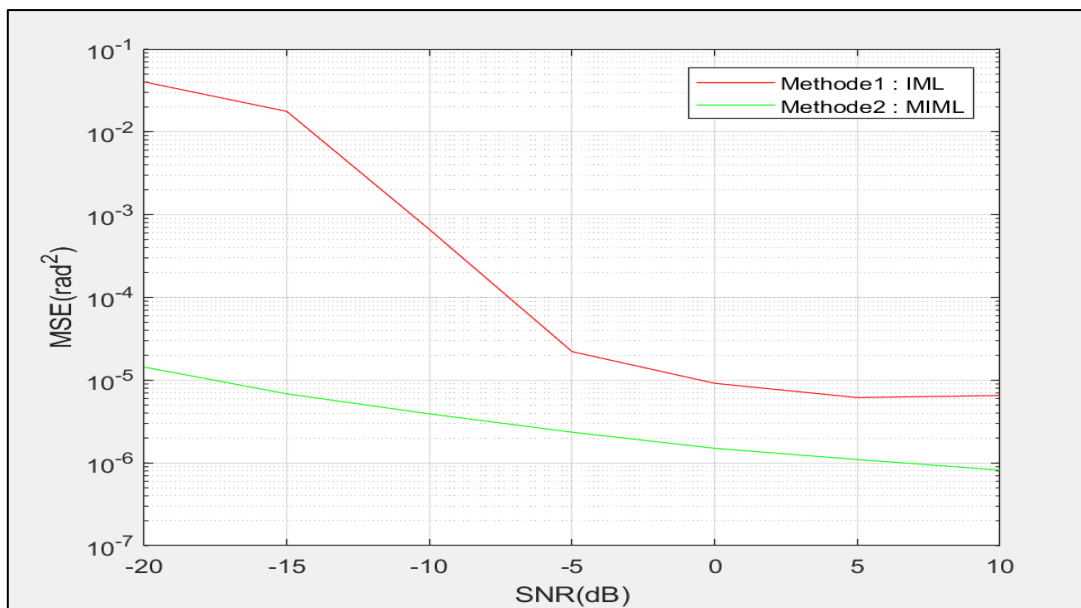


Figure II. 3: Comparaison entre l'algorithme de l'IML et MIML.

La figure II.3 illustre les performances des deux méthodes IML et MIML, en représentant l'erreur quadratique moyenne de θ en fonction du rapport signal bruit SNR pour les deux techniques. Il est visible que la méthode MIML représente de meilleures performances car au rapport SNR très faible l'erreur moyenne quadratique est beaucoup plus faible que celle d'IML. Même en augmentant le rapport SNR, la méthode IML décroît mais n'arrive pas à atteindre les performances de la courbe MIML. En plus, la méthode IML nécessite une plus grande complexité de calcul et plus d'itérations pour obtenir une meilleure précision-d'estimation, en raison de la présence de plus des étapes de l'estimation dans la boucle.

II.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté et démontré les calculs de deux algorithmes itératifs IML et MIML basés sur la technique ML. Nous avons appliqué ces deux algorithmes pour estimer la matrice de calibrage du réseau d'antenne utilisé en radioastronomie et les DOAs des sources (étoiles) inconnues. Les simulations sous Matlab ont démontré que les performances de la méthode MIML sont meilleures que celles de la méthode IML.

Dans le chapitre suivant, on va présenter une autre technique différente EM (Expectation Maximization) et l'appliquer pour estimer la matrice de calibration des réseaux d'antennes.

Chapitre III: Calibration robuste de capteurs d'un réseau d'antennes par la méthode EM (Expectation Maximisation)

III.1 Introduction :

Dans le chapitre précédent ; on a étudié l'algorithme ML en présentant deux algorithmes pour estimer les paramètres de signaux inconnus d'une sortie de réseau d'antenne. Seulement la méthode ML basé sur le modèle de probabilité Gaussien est susceptible aux erreurs des signaux aberrantes reçus par le réseau d'antenne.

Pour traiter ce problème, on va proposer, dans ce chapitre, l'algorithme de calibration robuste EM qui est formulé par l'hypothèse d'une observation non-Gaussienne, qui suit une loi probabiliste de student-t et le comparer avec la méthode Gaussienne qui est formulé par l'hypothèse d'une observation Gaussienne pour estimer l'erreur de calibration du gain G , liée au matériel de capteur et de l'environnement.

III.2 La différence entre l'algorithme ML et EM :

D'une vision générale ; l'estimation du ML et l'EM puissent tous deux trouver les paramètres meilleurs, mais la façon dont ils trouvent les modèles est très différente. L'algorithme ML accumule toutes les données, puis utilise ces données pour construire le modèle le plus probable. Mais l'algorithme EM prend d'abord une estimation des paramètres (en tenant compte des données manquantes) puis ajuste le modèle pour l'adapter aux estimations et aux données observées [39].

III.3 L'algorithme EM :

III.3.1 Définition :

L'algorithme EM [40] [41] est une méthode itérative qui fournit des estimations de ML de manière asymptotique lorsque les observations sont considérées comme des données incomplètes, c'est-à-dire que certains points de données sont inconnus parce qu'ils sont manquants ou cachés. Il permet de réduire le coût de calcul et d'accélérer la convergence.

III.3.2 Les étapes d'EM :

Les étapes de base de de l'algorithme EM [39] sont :

- 1) L'Etape_E « E_Step » : une estimation initiale est faite pour les paramètres du modèle et une distribution de probabilité est créée.
- 2) La distribution de probabilité de l'étape E est modifiée pour inclure les nouvelles données. Ceci est appelé l'Etape_M «M_step».
- 3) Les étapes 1 et 2 sont répétées jusqu'à ce que la stabilité (c'est-à-dire une distribution qui ne change pas de l'étape E à l'étape M).

III.3.3 Modèle de données paramétriques :

L'EM alterne de manière itérative entre faire des suppositions sur les données complètes x et trouver le paramètre inconnu θ qui maximise $p(x|\theta)$ sur θ . De cette façon, EM tente de trouver l'estimation du maximum de vraisemblance de θ étant donné l'observation y [42].

Tout d'abord, pour utiliser la méthode EM il faut spécifier les paramètres suivants :

- Les données d'observations y et leur densité paramétrique $p(y|\theta)$.
- Le paramètre inconnu $\theta \in \Theta$.

- L'estimation des données complètes x avec leur densité paramétrique $p(x|\theta)$.
Il est important de savoir que on n'observe pas les données complètes x , on n'observe que y qui devrait dépendre de x .

Dans le cadre de maximum de vraisemblance le but est l'estimation de θ par résoudre l'équation suivante :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} p(y|\theta) \quad (\text{III. 1})$$

Donc log -vraisemblance écrit comme suit :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \log p(y|\theta) \quad (\text{III. 2})$$

La maximisation de l'équation (III. 2) est impossible ou du moins difficile à résoudre. Alors on peut utiliser l'algorithme EM comme suit :

- Initialisation : Pour $m = 0$ itération, faite l'estimation initiale de $\theta^{(0)}$ (on utilise une connaissance antérieure ou un algorithme existant optimal).
- L'Etape_E : Formule le pdf (probability density function) $p(x|y, \theta^{(m)})$ basé sur le $\theta^{(m)}$ qui est déjà estimé. Ensuite, on calcule :

$$Q(\theta|\theta^{(m)}) = \int_{X(y)} \log p(x|\theta) p(x|y, \theta^{(m)}) dx \quad (\text{III. 3})$$

$$= E_{X|y, \theta^{(m)}} \{p(X|\theta)\} \quad (\text{III. 4})$$

Avec $X(y)$ est défini comme l'ensemble $\{x|p(x|y, \theta) > 0\}$.

- L'Etape_M : l'estimation de $(m + 1)^{ième}$ de θ s'écrit comme suit :

$$\theta^{(m+1)} = \arg \max_{\theta \in \Omega} Q(\theta|\theta^{(m)}) \quad (\text{III. 5})$$

- Incrémentation : Incrémente m et répétez la procédure ci-dessus (Etape_E et Etape_M) jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait.

En pratique, il est courant de démarrer l'EM à partir de plusieurs estimations initiales aléatoires et de choisir la plus grande probabilité comme estimation finale pour θ .

III.3.4 Les propriétés des données complètes :

Les données complètes X doivent satisfaire la relation de Markov suivante :

$$\theta \rightarrow X \rightarrow Y \quad (\text{III. 6})$$

Ce qui signifie que :

$$p(y|x, \theta) = p(y|x) \quad (\text{III. 7})$$

III.3.5 L'algorithme EM dans le cas d'échantillon i.i.d (independently and identically distributed) :

On considère les données observées comme des données (i. i. d.), de telle sorte que l' $i^{\text{ème}}$ observation y_i ne soit qu'une fonction de x_i . Cela conduit à la proposition suivante :

$$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i|\theta) \quad (\text{III. 8})$$

Avec : $x = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$ et la relation de Markov dite que : $\theta \rightarrow X_i \rightarrow Y_i (\forall i = 1, \dots, N)$

C'est donne :

$$p(y_i|x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n, \theta) = p(y_i|x_i, \theta) \quad (\text{III. 9})$$

Et alors :

$$\begin{aligned} Q(\theta|\theta^{(m)}) &= E_{X|y, \theta^{(m)}}\{p(X|\theta)\} \\ &= E_{X|y, \theta^{(m)}}\left\{\log \prod_{i=1}^N p(X_i|\theta)\right\} \\ &= E_{X|y, \theta^{(m)}}\left\{\sum_{i=1}^N \log p(X_i|\theta)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^N E_{X_i|y, \theta^{(m)}}\{\log p(X_i|\theta)\} \\ &= \sum_{i=1}^N E_{X_i|y_i, \theta^{(m)}}\{\log p(X_i|\theta)\} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$$Q(\theta|\theta^{(m)}) = \sum_{i=1}^N Q_i(\theta|\theta^{(m)}) \quad (\text{III.11})$$

Avec : $Q_i(\theta|\theta^{(m)}) = E_{X_i|y_i, \theta^{(m)}}\{\log p(X_i|\theta)\} \quad (\forall i = 1, \dots, N)$

Et on prend :

- $p(x, y|\theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i, y_i|\theta)$
- $p(x_i|y, \theta) = p(x_i|y_i, \theta)$

III.4 L'estimation robuste de la direction d'arrivée DOA :

La plupart des techniques de traitement des réseaux sont conçues sous l'hypothèse de la présence d'un bruit gaussien ; cette hypothèse peut être irréaliste et entraîner une perte de

performances. Mais en réalité l'environnement est non gaussien à cause de la présence de valeurs aberrantes ou un environnement hétérogène...

Donc dans cette section on a tous d'abord présenté un exemple d'estimation robuste d'un réseau de capteur. Avec une comparaison entre la méthode EM et la méthode gaussien.

III.4.1 L'estimation moyenne robuste :

On considère le modèle suivant :

$$y_i = \mu + e_i \quad (\text{III.12})$$

On souhaite estimer la moyenne μ du modèle (III.12), par l'hypothèse Gaussienne puis par l'algorithme EM. D'abord on présente les démonstrations mathématiques.

III.4.1.1 La distribution gaussienne réelle :

On a l'hypothèse:

- N i. i. d observations
- $y_i \in \mathbb{R}^P$ est les observations aux N instants ($i = 1 \dots N$) ; et P représenté les capteurs.
- $e_i = \frac{1}{\sqrt{\tau_i}} n_i$ Représente le $i^{\text{ème}}$ bruit (distribution probabiliste).

Où :

- $\tau_i \sim p(\nu)$ avec ν : est un paramètre déterministe.
- $n_i, \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ avec la matrice de covariance Σ est inconnue.

A partir de (III.12), on a :

$$y_i | \mu, \Sigma, \nu, \tau_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\Sigma}{\tau_i}\right) \quad (\text{III.13})$$

Dans le cas de la distribution des données on a :

$$\tau_i \sim \text{Gamma}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad (\text{III.14})$$

Avec : $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ est la fonction de densité et pour : $\tau > 0, \beta > 0, \alpha > 0$,

$$\text{Gamma}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) = \frac{\beta^\alpha \tau^{\alpha-1} e^{-\beta\tau}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \tau^{\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} e^{-\frac{\nu}{2}\tau}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (\text{III.15})$$

Avec Γ la fonction Gamma. [43]

On choisit les données complètes $\{y_1, \dots, y_N, \tau_1, \dots, \tau_N\}$; et donc l'équation de log-vraisemblance peut être factorisée comme suit :

$$\log p(y_1, \dots, y_N, \tau_1, \dots, \tau_N | \mu, \Sigma, \nu) = \log p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma) + \log p(\tau_1, \dots, \tau_N | \nu) \quad (\text{III.16})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \log p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma) = & -\frac{N}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1}) \sum_{i=1}^N \tau_i y_i y_i^T + \mu^T \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i \\ & - \frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Et :

$$\log p(\tau_1, \dots, \tau_N | \nu) = -N \log \left(\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) + \frac{N\nu}{2} \log \left(\frac{\nu}{2} \right) + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^N (\log \tau_i - \tau_i) \quad (\text{III.18})$$

D'où l'on déduit facilement les statistiques suffisantes :

$$S_{\tau, y} = \sum_{i=1}^N \tau_i y_i \quad (\text{III.19})$$

$$S_{\tau, y, y} = \sum_{i=1}^N \tau_i y y_i^T \quad (\text{III.20})$$

$$S_{\tau} = \sum_{i=1}^N \tau_i \quad (\text{III.21})$$

$$S_{\tau, \tau} = \sum_{i=1}^N (\log \tau_i - \tau_i) \quad (\text{III.22})$$

Pour estimer les variables inconnus de (III.13) la moyenne μ , la matrice de covariance Σ et ν . On prend la dérivée de (III.16) par rapport à ces inconnus, avec y et τ sont observées.

➤ **L'estimation de μ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \log p(y_1, \dots, y_N, \tau_1, \dots, \tau_N | \mu, \Sigma, \nu) = & \frac{\partial}{\partial \mu} (\log p(\tau_1, \dots, \tau_N | \nu)) \\ & + \frac{\partial}{\partial \mu} (\log p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } \frac{\partial}{\partial \mu} (\log p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma)) = & -\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{N}{2} \log |\Sigma| \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1}) \sum_{i=1}^N \tau_i y_i y_i^T \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^T \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i \right) \\ = & \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^T \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i \right) \end{aligned}$$

On utilise les formules :

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \frac{\partial (X^T a)}{\partial X} &= a \\ \checkmark \quad \frac{\partial (X^T M X)}{\partial X} &= 2 M X \quad \text{Avec : } M \text{ symétrique.} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \frac{\partial}{\partial \mu} (\log p(\tau_1, \dots, \tau_N | \nu)) = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^T \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i \right) &= \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i - \frac{1}{2} 2 \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i = 0 \\ \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i &= \frac{1}{2} 2 \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i \\ \hat{\mu} &= \frac{\sum_{i=1}^N \tau_i y_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i} = \frac{S_{\tau, y}}{S_{\tau}} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

➤ **L'estimation de Σ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Sigma} \log p(y_1, \dots, y_N, \tau_1, \dots, \tau_N | \mu, \Sigma, \nu) &= \frac{\partial}{\partial \Sigma} (\log p(\tau_1, \dots, \tau_N | \nu)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \Sigma} (\log p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \Sigma} (\log p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(\frac{N}{2} \log |\Sigma| \right) - \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1}) \sum_{i=1}^N \tau_i y_i y_i^T \right) + \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(\mu^T \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(\frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i \right) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

A partir des formules suivantes :

- $\frac{\partial \log |X|}{\partial X} = (X^{-1})^T = (X^T)^{-1}$
- $\frac{\partial \text{tr}(X^k)}{\partial X} = k(X^{k-1})^T$
- $\frac{\partial A^T X^{-1} B}{\partial X} = -X^{-T} A B^T X^{-T}$

Pour faciliter les calculs on introduit les équations suivantes (III.19) (III.20) (III.21) et on s'annule l'équation (III.24) qui doit être devienne :

$$-\frac{n}{2} \Sigma^{-T} + \frac{1}{2} (\Sigma^{-2})^T S_{\tau, y, y} - \Sigma^{-T} (\mu^T S_{\tau, y})^T \Sigma^{-T} + \frac{1}{2} \Sigma^{-T} (\mu^T \mu S_{\tau})^T \Sigma^{-T} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n}{2}\Sigma^{-T} + \frac{1}{2}(\Sigma^{-2})^T S_{\tau,y,y} - \Sigma^{-T} \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} S_{\tau,y}^T \Sigma^{-T} + \frac{1}{2}\Sigma^{-T} \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} \left(\frac{S_{\tau,y}}{S_\tau}\right)^T (S_\tau)^T \Sigma^{-T} = 0 \\
& -\frac{N}{2}\Sigma^{-T} + \frac{1}{2}(\Sigma^{-2})^T S_{\tau,y,y} - \Sigma^{-T} \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} S_{\tau,y}^T \Sigma^{-T} + \frac{1}{2}\Sigma^{-T} \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} (S_{\tau,y})^T \Sigma^{-T} = 0 \\
& -\frac{N}{2}\Sigma^{-T} + \frac{1}{2}(\Sigma^{-2})^T S_{\tau,y,y} - \frac{1}{2}\Sigma^{-T} \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} S_{\tau,y}^T \Sigma^{-T} = 0 \\
& N\Sigma^{-T} = (\Sigma^{-2})^T S_{\tau,y,y} - \Sigma^{-T} \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} S_{\tau,y}^T \Sigma^{-T} \\
& \Sigma^{-T} = (\Sigma^{-2})^T \left(S_{\tau,y,y} - \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} S_{\tau,y}^T \right)
\end{aligned}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \left(S_{\tau,y,y} - \frac{S_{\tau,y}}{S_\tau} S_{\tau,y}^T \right) \quad (\text{III.25})$$

$$= \frac{1}{N} \left(S_{\tau,y,y} - \frac{S_\tau}{S_\tau^2} S_{\tau,y} S_{\tau,y}^T \right)$$

$$= \frac{1}{N} (S_{\tau,y,y} - \hat{\mu}^2 S_\tau)$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \tau_i y_i y_i^T - \sum_{i=1}^N \tau_i \hat{\mu}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i \left(\sum_{i=1}^N y_i y_i^T - \hat{\mu}^2 \right)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i (y_i - \hat{\mu})(y_i - \hat{\mu})^T \quad (\text{III.26})$$

➤ **L'estimation de ν :**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} \log p(y_1, \dots, y_N, \tau_1, \dots, \tau_N | \mu, \Sigma, \nu) &= \frac{\partial}{\partial \nu} (\log p(\tau_1, \dots, \tau_N | \nu)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \nu} \left(-N \log \left(\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{N\nu}{2} \log \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^N (\log \tau_i - \tau_i) \right) \\
&= -N \frac{\partial \log \left(\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right)}{\partial \nu} + \frac{N}{2} \log \left(\frac{\nu}{2} \right) + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} S_{\tau,\tau} \\
&= -2 \frac{\partial \log \left(\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right)}{\partial \nu} + \log \frac{\nu}{2} + \frac{1}{N} S_{\tau,\tau} + 1 \quad (\text{III.27})
\end{aligned}$$

Remarque :

Concernant l'estimation de ν , aucune expression analytique, donc il faut résoudre le problème (III.27).

III.4.1.1.1 Application dans l'algorithme EM :**➤ L'estimation de μ et Σ avec ν connu :**

On prend en considération les étapes d'EM :

1. L'Etape_E : Calculer la fonction Q c'est-à-dire trouvé l'espérance conditionnelle de $S_{\tau,y}, S_{\tau,y,y}, S_{\tau}$ et $S_{\tau,\tau}$, la valeur connue de ν et l'estimation actuelle de $\mu^{(m)}$ et $\Sigma^{(m)}$.
2. L'Etape_M : Consiste à pondérer l'estimation des moindres carrés de μ et Σ comme dans (III.23) et (III.26). Et on note : $\Omega^{(m)} = \{y_1, \dots, y_N, \mu^{(m)}, \Sigma^{(m)}, \nu\}$;

On obtient : $p(\tau|y, \Sigma, \mu, \nu) \propto p(y|\tau, \Sigma, \mu, \nu)p(\tau|\Sigma, \mu, \nu)$

Implique que : $\tau|y, \Sigma, \mu, \nu = \tau|\delta_i, \nu \sim \text{Gamma}\left(\frac{\nu+P}{2}, \frac{\nu+\delta_i}{2}\right)$

Et donc :

$$\omega_i^{(m+1)} = E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{\tau_i\} = \frac{\nu + P}{\nu + \delta_i^{(m)}} \quad (\text{III.28})$$

Avec : $\delta_i = (y_i - \mu^{(m)})^T (\Sigma^{(m)})^{-1} (y_i - \mu^{(m)})$.

A la fin en utilisant la formulation EM pour les données manquantes ; et donc pour l'Etape_E on a besoin :

$$E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{S_{\tau,y}\} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} y_i$$

$$E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{S_{\tau,y,y}\} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} y_i y_i^T$$

$$E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{S_{\tau}\} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)}$$

Et l'Etape_M se réduire les équations itérative de ces deux paramètres $\mu^{(m)}$ et $\Sigma^{(m)}$.

$$\hat{\mu}^{(m+1)} = \frac{S_{\tau,y}}{S_{\tau}} = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} y_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)}} \quad (\text{III.29})$$

$$\hat{\Sigma}^{(m+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} (y_i - \hat{\mu})(y_i - \hat{\mu})^T \quad (\text{III.30})$$

➤ **L'estimation de μ et Σ avec ν inconnu :**

Dans l'Etape_E le cas de ν inconnu il faut d'abord calculer $E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{S_{\tau,\tau}\}$. En utilisant le fait que si on a une variable aléatoire X a une distribution $Gamma(\alpha, \beta)$ alors

$E \log\{X\} = \phi(\alpha) - \log \beta$; Où $\phi(\alpha)$: Désigne la fonction Digamma [44]. Donc :

$$E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{S_{\tau,\tau}\} = \sum_{i=1}^N \left(\phi\left(\frac{\nu^{(m)} + P}{2}\right) - \log\left(\frac{\nu^{(m)} + \delta_i^{(m)}}{2}\right) \right) + \sum_{i=1}^N (\log \omega_i^{(m+1)} - \omega_i^{(m+1)})$$

Avec : $\Omega^{(m)} = \{y_1, \dots, y_N, \mu^{(m)}, \Sigma^{(m)}, \nu^{(m)}\}$

$$\omega_i^{(m+1)} = E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{\tau_i\} = \frac{\nu^{(m)} + P}{\nu^{(m)} + \delta_i^{(m)}} \quad (\text{III.31})$$

Concernant l'Etape_M, on remarque qu'il y a une séparation entre (μ, Σ) et ν . Par conséquent, l'Etape_M de (μ, Σ) reste la même ($\nu^{(m)}$ avec au lieu de ν). L'Etape_M concernant ν est plus difficile et il faut résoudre les problèmes suivants :

$$\begin{aligned} -2 \phi\left(\frac{\nu}{2}\right) + \log\left(\frac{\nu}{2}\right) + 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\phi\left(\frac{\nu^{(m)} + P}{2}\right) - \log\left(\frac{\nu^{(m)} + \delta_i^{(m)}}{2}\right) \right) \\ + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\log \omega_i^{(m+1)} - \omega_i^{(m+1)}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

III.4.1.1.2 Application de l'hypothèse gaussienne :

Concernant l'hypothèse Gaussienne on utilise la fonction de probabilité :

$$f(Y|\mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y-\mu)^2}{\Sigma}} \quad (\text{III.33})$$

Si on a N échantillon : $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_N|\mu, \Sigma) &= \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_i-\mu)^2}{\Sigma}} \right) \\ \log f(y_1, \dots, y_N|\mu, \Sigma) &= \log \left(\prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_i-\mu)^2}{\Sigma}} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_i-\mu)^2}{\Sigma}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2} \log(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2} \frac{(y_i - \mu)^2}{\Sigma} \right) \\ \mathbf{\log f(y_1, \dots, y_N|\mu, \Sigma)} &= -\frac{N}{2} \log(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Pour estimer les variables μ et Σ par la méthode Gaussien ; on prend la dérivée de (III.34) par rapport ces inconnus.

➤ **L'estimation de μ :**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu} \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi\Sigma) \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \right) \\
&= 0 - \frac{1}{2\Sigma} (-2) \sum_{i=1}^N (y_i - \mu) \\
\frac{\partial}{\partial \mu} \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \right) &= \frac{1}{\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu) \\
\frac{1}{\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu) &= \sum_{i=1}^N y_i - N\mu = 0 \\
\hat{\mu} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \tag{III.35}
\end{aligned}$$

➤ **L'estimation de Σ :**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi\Sigma) \right) - \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(\frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \right) \\
&= -\frac{N}{2} \frac{2\pi}{2\pi\Sigma} + \frac{1}{2\Sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \\
&= -\frac{N}{2} \frac{1}{\Sigma} + \frac{1}{2\Sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{2\Sigma} \left(-N + \frac{1}{\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \right)
\end{aligned}$$

Et on a : $\frac{1}{2\Sigma} \left(-N + \frac{1}{\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \right) = 0$

Donc :

$$-N + \frac{1}{\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Sigma} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 &= N \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)(y_i - \mu)^T \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

III.4.1.2 La distribution gaussienne complexe :

Dans cette section de la même manière, mais cette fois on considère des valeurs complexes

On a :

- N i. i. d observations
- $y_i \in \mathbb{C}^P$ est les observations aux N instants ($i = 1 \dots N$).
- $e = \frac{1}{\sqrt{\tau_i}} y_i$ est présenté le bruit gaussien.

Où :

- $\tau(t) \sim p(v)$ avec v : est un paramètre déterministe.
- $n_i \sim \mathcal{CN}(0, \Sigma)$ avec la matrice de covariance Σ est inconnue.

A partir de (III.12):

$$y_i | \mu, \Sigma, v, \tau_i \sim \mathcal{CN}\left(\mu, \frac{\Sigma}{\tau_i}\right) \quad (\text{III.37})$$

Donc :

$$p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{|\Sigma|} e^{-\tau_i \Sigma^{-1} (y_i - \mu)^H (y_i - \mu)}$$

$$\log p(y_1, \dots, y_N | \tau_1, \dots, \tau_N, \mu, \Sigma) = -N \log |\Sigma| - \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^H \tau_i \Sigma^{-1} (y_i - \mu) \quad (\text{III.38})$$

Pour estimer μ et Σ dans le cas complexe on dérive l'équation (III.38):

➤ **L'estimation de μ :**

On utilise :

- ✓ $\frac{\partial X^H}{\partial X} = 0$
- ✓ $\frac{\partial X^H A X}{\partial X} = (A X)^*$ avec : $A^H = A$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu^H \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i + \mu^H \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^N \tau_i y_i - \mu^H \Sigma^{-1} \mu \sum_{i=1}^N \tau_i \right) &= -(\Sigma^{-1} \mu)^* \sum_{i=1}^N \tau_i(t) + \left(\sum_{i=1}^N \tau_i y_i^H \Sigma^{-1} \right)^T \\ &(\Sigma^{-1} \mu)^* \sum_{i=1}^N \tau_i = \left(\sum_{i=1}^N \tau_i y_i^H \Sigma^{-1} \right)^T \\ \hat{\mu} &= \frac{\sum_{i=1}^N \tau_i y_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i} \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

➤ **L'estimation de Σ complexe :**

On utilise :

- $\frac{\partial \log|X|}{\partial X} = (X^{-1})^T = (X^T)^{-1}$
- $\frac{\partial A^T X^{-1} B}{\partial X} = -X^{-T} A B^T X^{-T}$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(-N \log|\Sigma| - \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^H \tau_i \Sigma^{-1} (y_i - \mu) \right) &= -N \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N \Sigma^{-1} (y_i - \mu) \tau_i (y_i - \mu)^H \Sigma^{-1} \\ &= -N \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N \Sigma^{-1} (y_i - \mu) \tau_i (y_i - \mu)^H \Sigma^{-1} \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu) \tau_i (y_i - \mu)^H \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Le tableau III.1 désigne les entrées, les sorties et résume les étapes de l'algorithme EM pour l'estimation robuste de la moyenne μ et la covariance Σ avec une distribution réelle et complexe :

Algorithme : EM pour l'estimation robuste de la moyenne μ et Σ

- **Initialisation :** les estimations initiales $\mu_i^{(0)}, \Sigma_i^{(0)}, \omega_i^{(0)}, N$ pour $i=1 \dots N$
- **Etape E :** calculer

$$y_i | \mu, \Sigma, \nu, \tau_i \sim \mathcal{N} \left(\mu_i^{(m)}, \frac{\Sigma_i^{(m)}}{\tau_i} \right)$$

Ou :

$$y_i | \mu, \Sigma, \nu, \tau_i \sim \mathcal{CN} \left(\mu_i^{(m)}, \frac{\Sigma_i^{(m)}}{\tau_i} \right)$$

$$\hat{\mu}_i^{(m)} = \frac{\sum_{i=1}^N \tau_i y(t)}{\sum_{i=1}^N \tau_i} = \frac{S_{\tau, y}}{S_{\tau}}$$

$$\hat{\Sigma}_i^{(m)} = \frac{1}{N} \left(S_{\tau, y, y} - \frac{1}{S_{\tau}} S_{\tau, y} S_{\tau, y}^T \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m)} (y_i - \hat{\mu}_i^{(m)}) (y_i - \hat{\mu}_i^{(m)})^T$$

Ou :

$$\widehat{\Sigma}_i^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m)}) \omega_i^{(m)} (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m)})^H$$

$$\delta_i^{(m)} = (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m)})^T (\widehat{\Sigma}_i^{(m)})^{-1} (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m)})$$

Ou :

$$\delta_i^{(m)} = (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m)})^H (\widehat{\Sigma}_i^{(m)})^{-1} (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m)})$$

- **Etape M** : mise à jour

$$\omega_i^{(m+1)} = E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{\tau_i\} = \frac{\nu + p}{\nu + \delta_i^{(m)}}$$

$$\widehat{\mu}_i^{(m+1)} = \frac{S_{\tau,y}}{S_{\tau}} = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} y_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)}}$$

$$\widehat{\Sigma}_i^{(m+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m+1)}) (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m+1)})^T$$

Ou :

$$\widehat{\Sigma}_i^{(m+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m+1)}) (y_i - \widehat{\mu}_i^{(m+1)})^H$$

- **Contrôle de convergence** : la propriété de convergence suivante de l'algorithme EM, indique que l'amélioration de la fonction Q ne rend que la log-vraisemblance : $l|\theta^{(m+1)}|$. Et donc si $l|\theta^{(m+1)}| - l|\theta^{(m)}| > \delta$ pour une valeur de δ revenir à l'étape E, sinon mettre fin à l'algorithme.

Table III 1 : Algorithme EM de μ et Σ

III.4.2 Estimation de gain d'élément G et la covariance de bruit Σ :

Pour l'estimation du gain de calibration des capteurs G, on remplace μ par $GA(\Psi)S_i$ et on considère La distribution gaussienne complexe comme modèle de bruit. Donc on écrit :

$$y_i = GA(\Psi_i)S_i + e_i \quad (III.41)$$

Avec :

- Ψ est la direction d'arrivée des sources de calibration.

Et on a :

$$Q(\theta|\theta^{(m)}) = \sum_{i=1}^N Q_i(\theta|\theta^{(m)}) \quad (III.42)$$

Avec :

$$Q_i(\theta|\theta^{(m)}) = E_{\tau_i|y_i, \theta^{(m)}, \nu} \{ \log p(y_i, \tau_i|\theta) \}$$

$$\log p(y_i, \tau_i|\theta) = \log(p(y_i|\tau_i, \theta)) + \log(\tau_i|\theta)$$

Et :

- $\log p(y_i|\tau_i, \theta) = -\log|\Sigma| - (y_i - GAS_i)^H \tau_i \Sigma^{-1} (y_i - GAS_i)$
- $\log(\tau_i|\theta) = -\log\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) + \frac{\nu}{2} \log\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{2} (\log(\tau_i) - \tau_i)$

$$Q(\theta|\theta^{(m)}) \propto -\log|\Sigma| - \sum_{i=1}^N \tau_i ((y_i - GAS_i)^H \Sigma^{-1} (y_i - GAS_i))$$

$$\propto -N \log|\Sigma| - \sum_{i=1}^T \tau_i (y_i^H \Sigma^{-1} y_i - (GAS_i)^H \Sigma^{-1} y_i - y_i^H \Sigma^{-1} GAS_i + (GAS_i)^H \Sigma^{-1} GAS_i) \quad (\text{III.43})$$

Avec :

- Le vecteur des paramètres inconnues est : $\theta = [g_1, \dots, g_p, \Sigma, \nu]$ et $G = \text{diag}(g_1, \dots, g_p)$

III.4.2.1 L'estimation de G par la méthode EM :

On dérive l'équation (III.43) par rapport à G :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\theta|\theta^{(m)})}{\partial G} &= \frac{\partial}{\partial G} (-N \log|\Sigma|) - \frac{\partial}{\partial G} \left(\sum_{i=1}^N \tau_i (y_i^H \Sigma^{-1} y_i - (GAS_i)^H \Sigma^{-1} y_i - y_i^H \Sigma^{-1} GAS_i \right. \\ &\quad \left. + (GAS_i)^H \Sigma^{-1} GAS_i) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N \tau_i (-y_i^H \Sigma^{-1} GAS_i + (GAS_i)^H \Sigma^{-1} (GAS_i)) \end{aligned}$$

D'après la loi suivant $E(Q) = (X^H A X) = E(\text{tr}(AXX^H))$ [45] on peut développer l'équation comme suite :

$$\frac{\partial Q(\theta|\theta^{(m)})}{\partial G} = \sum_{i=1}^N \tau_i \text{tr}((AS_i)(y_i^H - GAS_i)^H \Sigma^{-1} G)$$

On applique la formule :

- $\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}(AX) = A^T$

$$\text{Et Donc : } \frac{\partial Q(\theta|\theta^{(m)})}{\partial G} = \sum_{i=1}^N \tau_i ((AS_i)(y_i - GAS_i)^H \Sigma^{-1} G)$$

$$= \sum_{i=1}^N \tau_i (AS_i)^T (y_i - GAS_i)^* \Sigma^{-T}$$

On prend : $\frac{\partial Q(\theta|\theta^{(m)})}{\partial G} = 0$

$$\sum_{i=1}^N \tau_i y_i^* \Sigma^{-T} (AS_i)^T - \sum_{i=1}^N \tau_i (GAS_i)^* \Sigma^{-T} (AS_i)^T = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \tau_i (GAS_i)^* \Sigma^{-T} (AS_i)^T = \sum_{i=1}^N \tau_i y_i^* \Sigma^{-T} (AS_i)^T$$

$$\sum_{i=1}^N \tau_i G^* (AS_i)^* (AS_i)^T = \sum_{i=1}^N \tau_i y_i^* (AS_i)^T$$

On applique le transposée pour tout l'équation et on obtient :

$$\mathbf{G}^{(m+1)} = \sum_{i=1}^N \tau_i y_i (AS_i)^H \left(\sum_{t=1}^N \tau_t AS_t (AS_t)^H \right)^\dagger \quad (\text{III.44})$$

III.4.2.2 L'estimation de Σ par la méthode EM:

Pour trouver Σ estimé on dérive (III.43):

$$\frac{\partial Q(\theta|\theta^{(m)})}{\partial \Sigma} = -N \frac{\partial}{\partial \Sigma} (\log|\Sigma|) - \frac{\partial}{\partial \Sigma} \text{tr} \left(\sum_{t=1}^T \tau_t ((y_t - GAS_t)^T \Sigma^{-1} (y_t - GAS_t)) \right)$$

Et on utilise les formules suivantes :

- $\frac{\partial}{\partial X} \log|X| = X^{-T}$
- $\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}(AX^{-1}) = -X^{-T} A^T X^{-T}$

Donc le résultat écrit comme suit :

$$\frac{\partial Q(\theta|\theta^{(m)})}{\partial \Sigma} = -N \Sigma^{-T} + \sum_{i=1}^N (y_i - GAS_i) \tau_i \Sigma^{-T} (y_i - GAS_i)^* \Sigma^{-T}$$

Pour : $\frac{\partial Q(\theta|\theta^{(m)})}{\partial \Sigma} = 0$

$$\sum_{i=1}^N \Sigma^{-T} (y_i - GAS_i) \tau_i (y_i - GAS_i)^* \Sigma^{-T} = T \Sigma^{-T}$$

Il doit multiplier les deux cotée par Σ^T et on applique le transposée pour toute l'équation :

$$\Sigma^{(m+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - GAS_i) \tau_i (y_i - GAS_i)^H \quad (\text{III.47})$$

Le tableau III.2 désigne les entrées, les sorties et résume les étapes de l'algorithme EM pour l'estimation robuste de gain \mathbf{G} et la covariance Σ avec une distribution complexe

Algorithme : EM pour l'estimation robuste de gain \mathbf{G} et Σ

- **Initialisation :** les estimations initiales $\mu_i^{(0)}, \Sigma_i^{(0)}, \omega_i^{(0)}, N$ pour $i=1 \dots N$
- **Etape E :** calculer

$$y_i | \theta, \tau_i \sim \mathcal{CN}\left(\theta, \frac{\Sigma}{\tau_i}\right)$$

$$\mathbf{G}^{(m)} = \sum_{i=1}^N \tau_i y_i (AS_i)^H \left(\sum_{t=1}^N \tau_t AS_t (AS_t)^H \right)^\dagger$$

$$\hat{\Sigma}_i^{(m)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m)} (y_i - \mathbf{G}^{(m)} AS_i) (y_i - \mathbf{G}^{(m)} AS_i)^H$$

$$\delta_i^{(m)} = (y_i - \hat{\mu}_i^{(m)})^H (\hat{\Sigma}^{(m)})^{-1} (y_i - \hat{\mu}_i^{(m)})$$

- **Etape M :** mise à jour

$$\omega_i^{(m+1)} = E_{\tau|\Omega^{(m)}}\{\tau_i\} = \frac{\nu + p}{\nu + \delta_i^{(m)}}$$

$$\mathbf{G}^{(m+1)} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} y_i (AS_i)^H \left(\sum_{t=1}^N \omega_t^{(m+1)} AS_t (AS_t)^H \right)^\dagger$$

$$\hat{\Sigma}_i^{(m+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i^{(m+1)} (y_i - \mathbf{G}^{(m+1)} AS_i) (y_i - \mathbf{G}^{(m+1)} AS_i)^H$$

- **Contrôle de convergence :** la propriété de convergence suivante de l'algorithme EM, indique que l'amélioration de la fonction Q ne rend que la log-vraisemblance : $l|\theta^{(m+1)}|$. Et donc si $||l|\theta^{(m+1)}| - l|\theta^{(m)}|| > \delta$ pour une valeur de δ revenir à l'étape E, sinon mettre fin à l'algorithme.
-

Table III 2 : Algorithme EM de \mathbf{G} et Σ

III.4.2.3 L'estimation de \mathbf{G} sous l'hypothèse gaussienne :

On prend la fonction de probabilité avec une distribution complexe comme représentée ci-dessous :

$$L = \sum_{i=1}^N \log(p(y_i, \theta)) = -N \log|\Sigma| - \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{G} AS_i)^H \Sigma^{-1} (y_i - \mathbf{G} AS_i) \quad (\text{III.45})$$

Donc la dérivée de (III.45) par rapport à G écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial G} &= \frac{\partial}{\partial G} (-N \log|\Sigma|) - \frac{\partial}{\partial G} \left(\sum_{i=1}^N y_i^H \Sigma^{-1} y_i - (GAS_i)^H \Sigma^{-1} y_i - y_i^H \Sigma^{-1} GAS_i \right. \\ &\quad \left. + (GAS_i)^H \Sigma^{-1} GAS_i \right) \\ \frac{\partial L}{\partial G} &= \sum_{i=1}^N (AS_i)^T (AS_i)^* G^* - \sum_{i=1}^N y_i^* (AS_i)^T\end{aligned}$$

Pour : $\frac{\partial L}{\partial G} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (AS_i)^T (AS_i)^* G^* &= \sum_{i=1}^N y_i^* (AS_i)^T \\ G &= \left(\sum_{i=1}^N (y_i (AS_i)^H) \right) \left(\sum_{i=1}^N (AS_i (AS_i)^H) \right)^\dagger\end{aligned}\tag{III.46}$$

III.4.2.4 L'estimation de Σ sous l'hypothèse gaussienne :

Pour trouver Σ estimé on dérive (III.45):

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G} (-N \log|\Sigma|) - \frac{\partial}{\partial G} \left(\sum_{i=1}^N (y_i - GAS_i)^H \Sigma^{-1} (y_i - GAS_i) \right)$$

Et on utilise les formules suivantes :

- $\frac{\partial \log|X|}{\partial X} = (X^{-1})^T = (X^T)^{-1}$
- $\frac{\partial A^T X^{-1} B}{\partial X} = -X^{-T} A B^T X^{-T}$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(-N \log|\Sigma| - \sum_{i=1}^N (y_i - GAS_i)^H \Sigma^{-1} (y_i - GAS_i) \right) \\ = -N \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N \Sigma^{-1} (y_i - GAS_i) (y_i - GAS_i)^H \Sigma^{-1} \\ = -N \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^N \Sigma^{-1} (y_i - GAS_i) (y_i - GAS_i)^H \Sigma^{-1} \\ \hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - GAS_i) (y_i - GAS_i)^H\end{aligned}\tag{III.47}$$

III.5 Analyse de l'estimation robuste par simulation :

Pour arriver à bien étudier l'algorithme EM dans l'estimation d'erreur de calibration robuste ; on fait la comparaison avec la méthode Gaussien.

Pour cette simulation on applique les conditions suivantes :

- On suppose un réseau de trois sous-réseaux linéaires avec quatre, trois et deux capteurs à chacun qui reçoivent des signaux de deux sources :
 - ✓ La source 1 est $\theta_1 = 40^\circ$.
 - ✓ La source 2 est $\theta_2 = 15^\circ$.
- La distance entre les capteurs de sous-réseaux est $\frac{\lambda}{2}$; 3λ et $\frac{7\lambda}{2}$ entre les sous-réseaux.
- La matrice de covariance de bruit Σ avec une puissance de bruit identique pour chaque capteur du même sous-réseau.
- Les gains G avec une amplitude de $[0,1]$ et les phases de $[0,2\pi]$.
- L'erreur quadratique moyenne MSE (Mean Square Error) de $\hat{\theta}$:

$$MSE(\hat{\mu}) = E [(\hat{\mu} - \mu)^2]$$

$$MSE(\hat{\Sigma}) = E [(\hat{\Sigma} - \Sigma)^2]$$

III.5.1 La simulation de la moyenne μ et la covariance Σ :

On simule la variation du l'erreur quadratique moyenne MSE de l'estimation de la moyenne et de la covariance en fonction du nombre des échantillons.

III.5.1.1 Dans les conditions d'un environnement gaussienne :

Les figures III.1, III.2 , III.3 et III.4 représentent l'allure de la moyenne et la covariance avec une distribution gaussienne réelle et complexe ; à partir de ces figures on peut avoir que les deux méthodes sont presque semblables, néanmoins la méthode Gaussienne représentée par la courbe noir est un peu mieux performances que l'algorithme EM (courbe rouge).

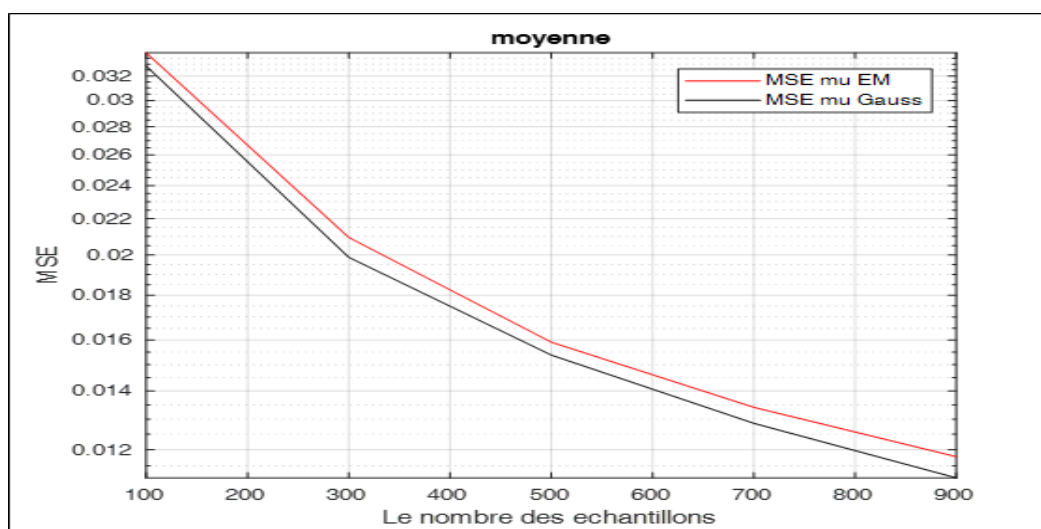


Figure III 1 : La moyenne avec une distribution gaussienne réelle.

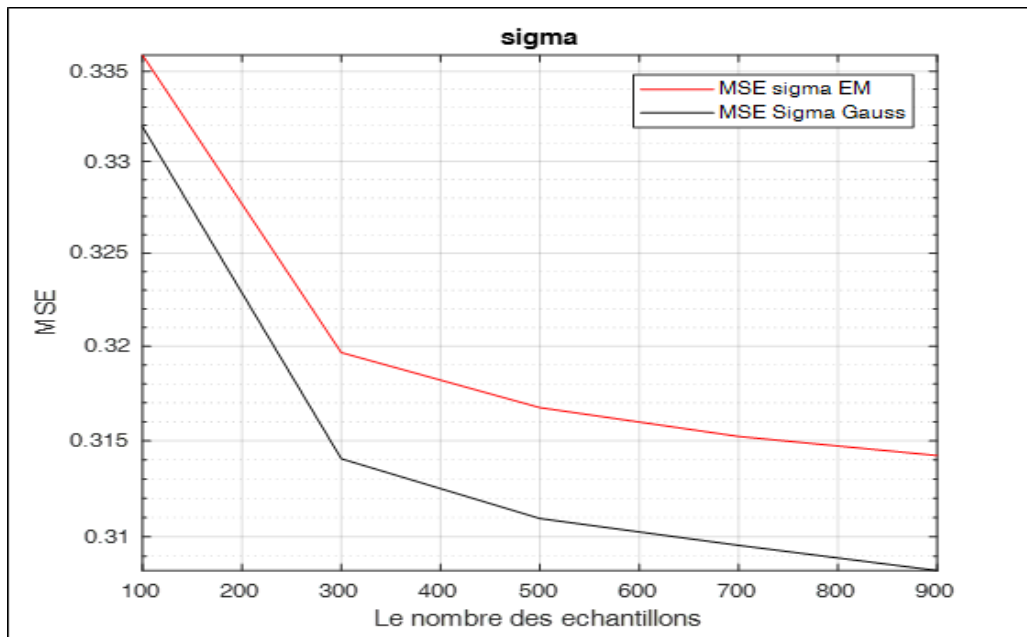


Figure III 2: La covariance avec une distribution gaussienne réelle.

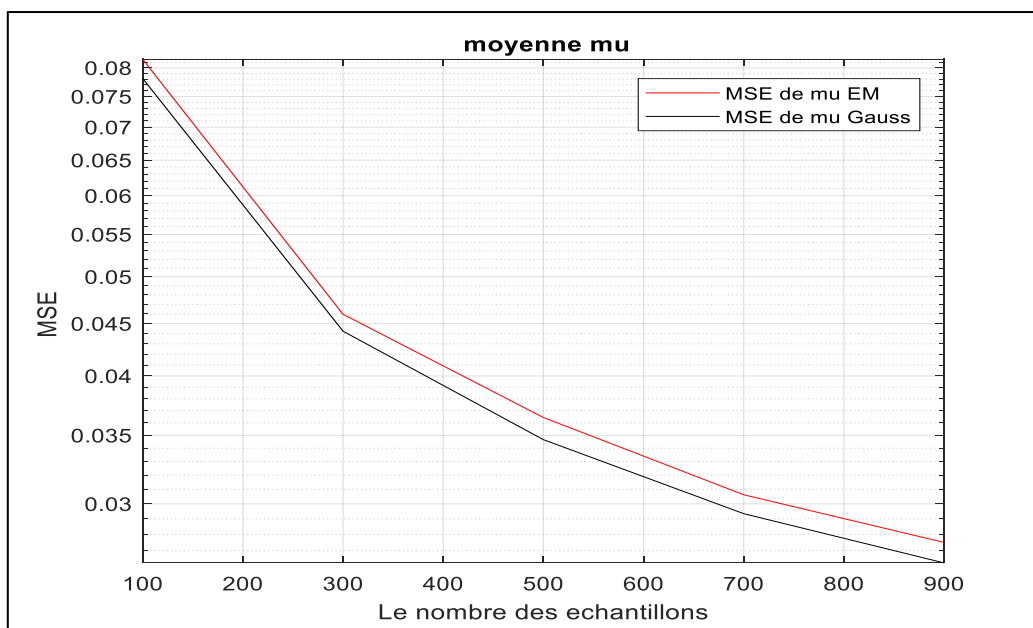


Figure III 3 : La moyenne avec une distribution gaussienne complexe.

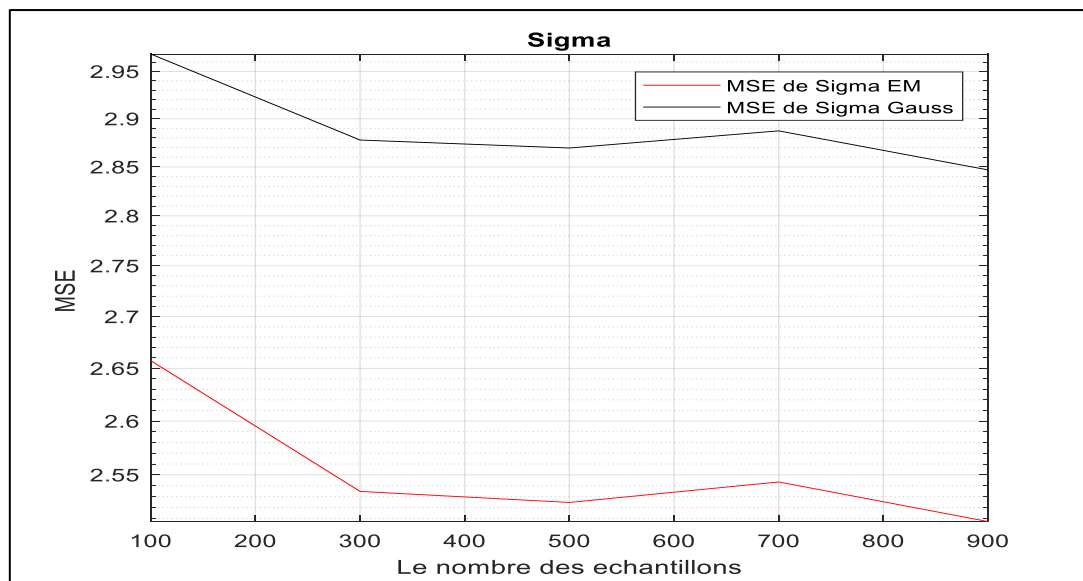


Figure III 4:La covariance avec une distribution gaussienne complexe.

III.5.1.2 Dans les conditions d'un environnement non Gaussienne :

Pour vérifier l'efficacité de notre algorithme EM, nous avons ajouté quelques valeurs aberrantes à l'ensemble des échantillons reçus par le réseau. Puis on vérifie la variation du MSE en fonction du nombre des échantillons reçus.

Les figures III.5 et III.6 III.7 et III.8 illustrent la moyenne et la covariance dans l'environnement où il est présents des valeurs aberrantes de Y.

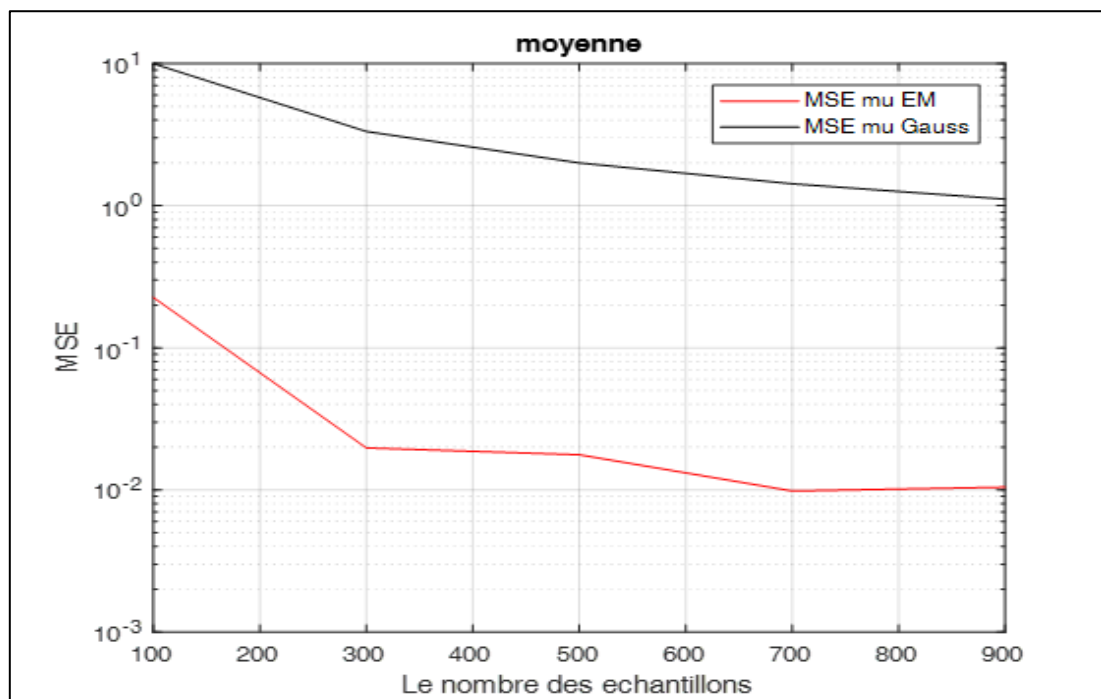


Figure III. 5 : La moyenne avec une distribution gaussienne réelle avec des observations non Gaussiennes.

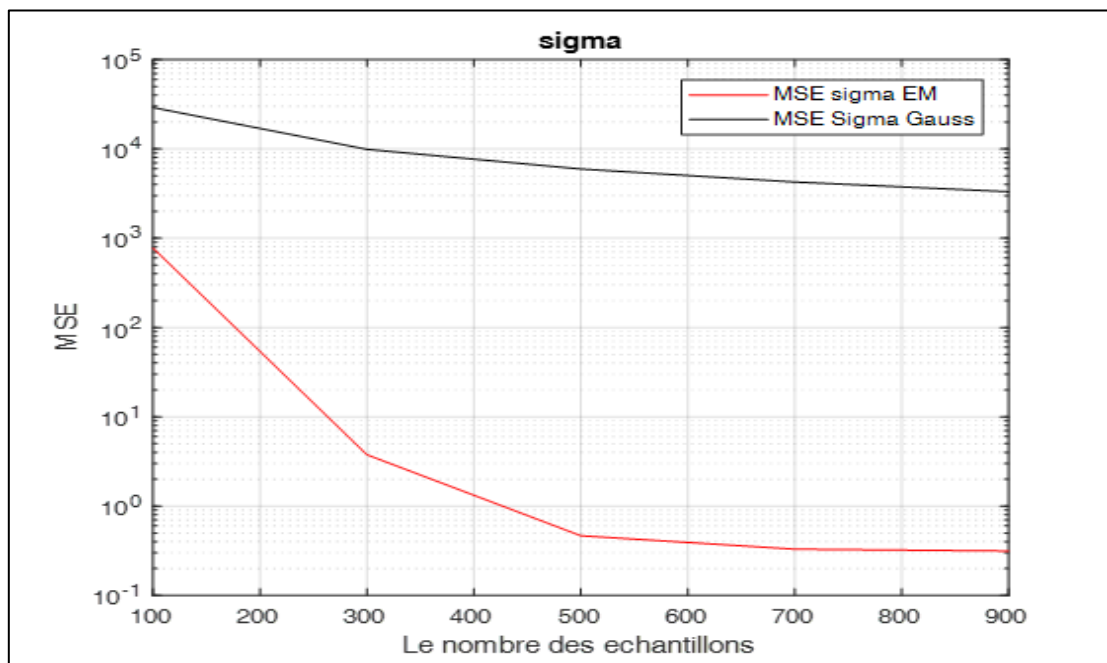


Figure III 6: La covariance avec une distribution gaussienne réelle avec des observations non Gaussiennes.

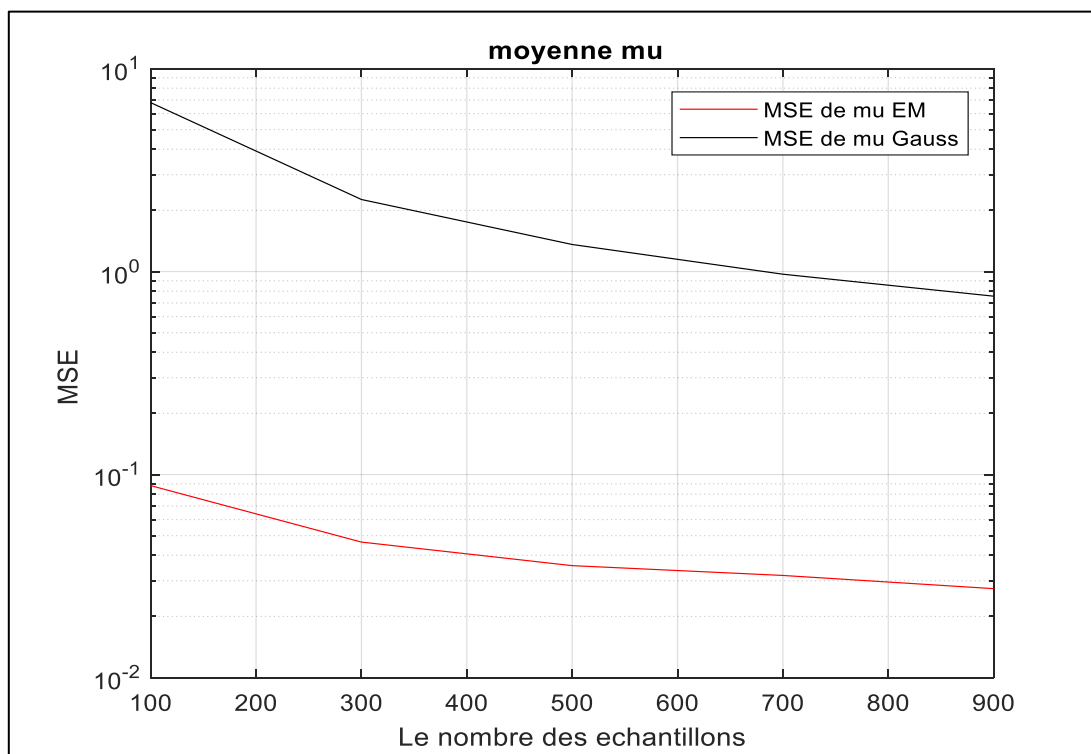


Figure III 7 : La moyenne avec une distribution gaussienne complexe avec des observations non Gaussiennes.

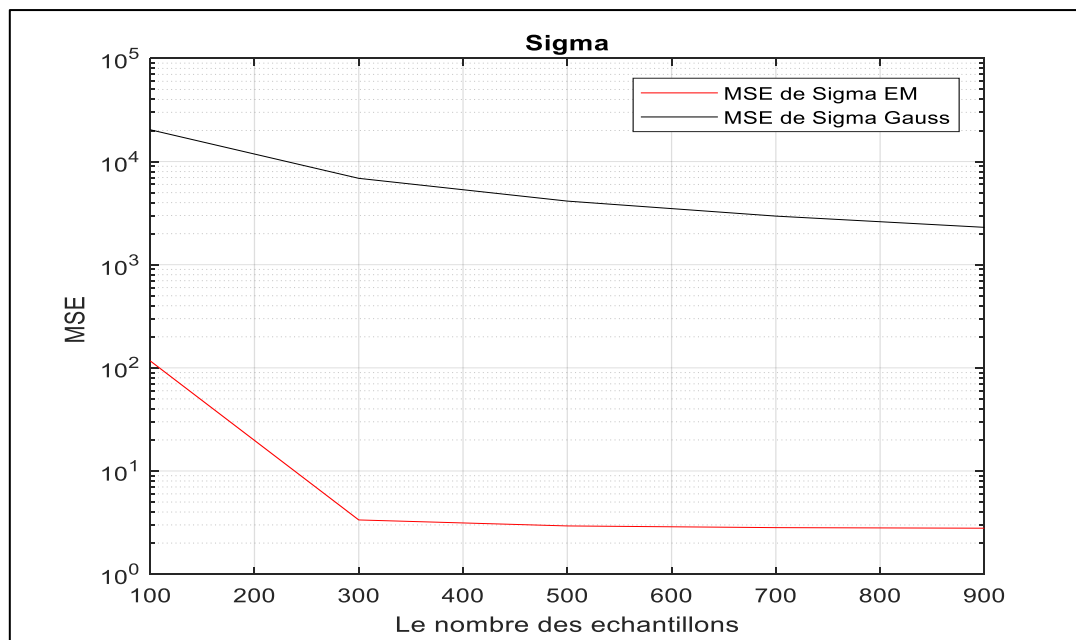


Figure III 8: La covariance avec une distribution gaussienne complexe avec des observations non Gaussiennes.

A partir des figures ci-dessus on peut dire que: pour les observations non gaussiennes, on remarque que la méthode EM (la courbe rouge), représente une meilleure performance par rapport à la méthode Gaussienne (courbe noire). En plus, quand le nombre d'échantillons augmente l'erreur quadratique décroît plus rapidement par rapport à la méthode Gaussienne.

Donc la méthode EM corrige les valeurs aberrantes observés de manière automatique, par contre la méthode Gaussienne ne corrige pas ces erreurs.

On peut conclure que :

- Si les données ou les observations sont Gaussienne, il est évident que l'algorithme qui se base sur une distribution Gaussienne fonctionnera mieux que l'algorithme EM
- Si les données ou les observations ne sont pas Gaussienne, l'algorithme qui se base sur une distribution Gaussienne présentera une dégradation de performance
- l'utilité de l'algorithme EM (qui est basé sur une modélisation student) est robuste si nous avons des valeurs aberrantes.

III.5.2 La simulation de l'estimation du gain de calibration G :

Dans ce cas, on considère un réseau d'antenne de 9 capteurs distribué en 3 sous réseaux avec des distances différentes entre sous-réseaux. On considère aussi que le réseau reçoit des signaux de deux sources, et que les capteurs sont affectés par un bruit Gaussien.

III.5.2.1 L'estimation de G en fonction de nombre des échantillons:

Dans cette simulation on fixe le rapport signal sur bruit (SNR) à 5 dB et les résultats sont illustrées dans la figures III.9 qui représente l'estimation du gain de calibration G en fonction du nombre d'échantillons T par la méthode Gaussienne et l'algorithme EM. Dans cette figure on remarque que plus le nombre des échantillons augmentent, et plus l'erreur quadratique moyenne n'est meilleure.

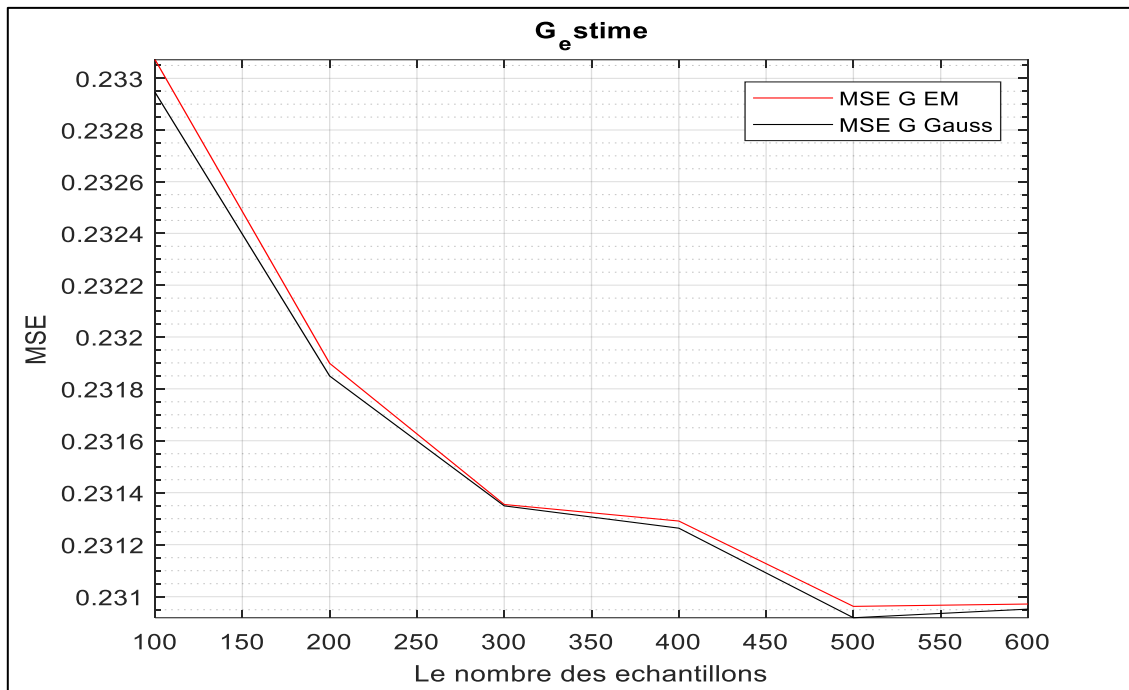


Figure III. 9 : MSE en fonction du nombre des échantillons

III.5.2.2 L'estimation de G en fonction de SNR :

Dans ce simulation il est représenté l'estimation du gain de calibration G en fonction du rapport signal sur bruit SNR par la méthode EM et Gaussienne avec une variation de SNR de -20 à 20 dB et un pas de 10 et on fixe les nombres des échantillons à 600. Les résultats sont illustrés dans la figure III.10

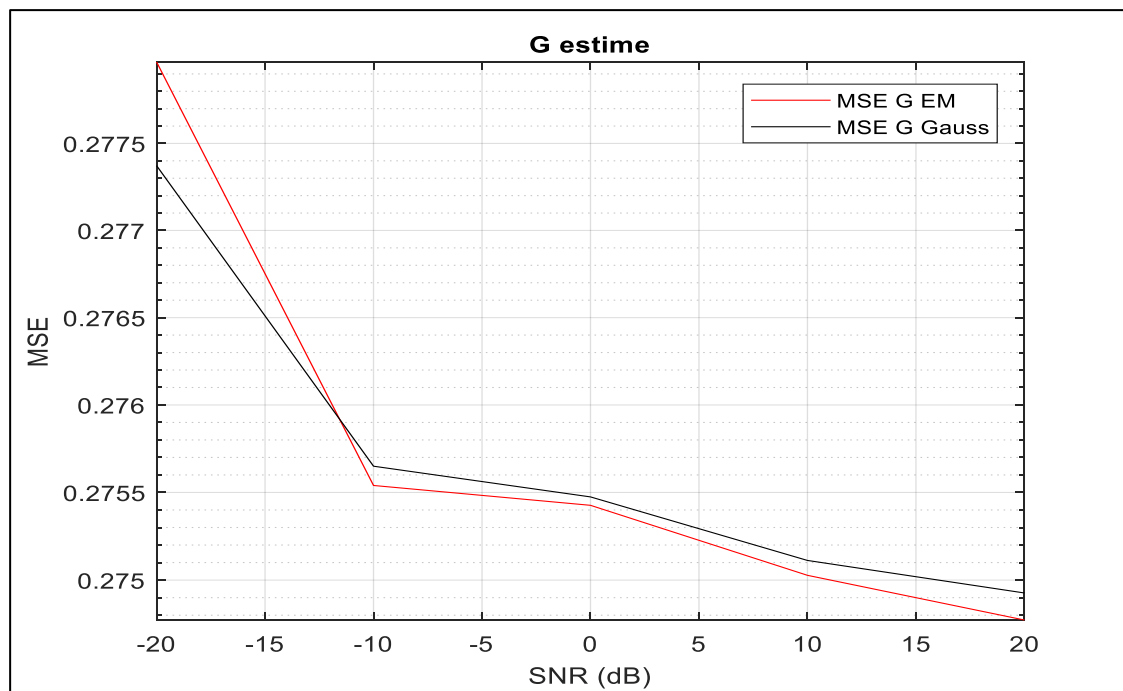


Figure III. 10: MSE en fonction de SNR.

A partir de la Figure III 10 on peut remarquer lorsque le SNR très faible l'erreur moyenne quadratique est élevé et si on augmente le SNR l'erreur moyenne quadratique décroît à des valeurs faibles.

III.5.2.3 L'estimation de G en fonction de valeurs aberrantes en pourcentage :

Dans ce simulation on visualise les variations du gain de calibration G en fonction du nombre des valeurs aberrantes C'est-à-dire des échantillons de valeurs aberrantes par les deux méthodes Gaussienne et EM, avec une variation des valeurs aberrants de 10% 30% 50% et 70% du nombre totale des échantillons reçus, On fixe le SNR à 5 dB et le nombres des échantillons à 600 . Les résultats sont illustrés dans la Figure III 11

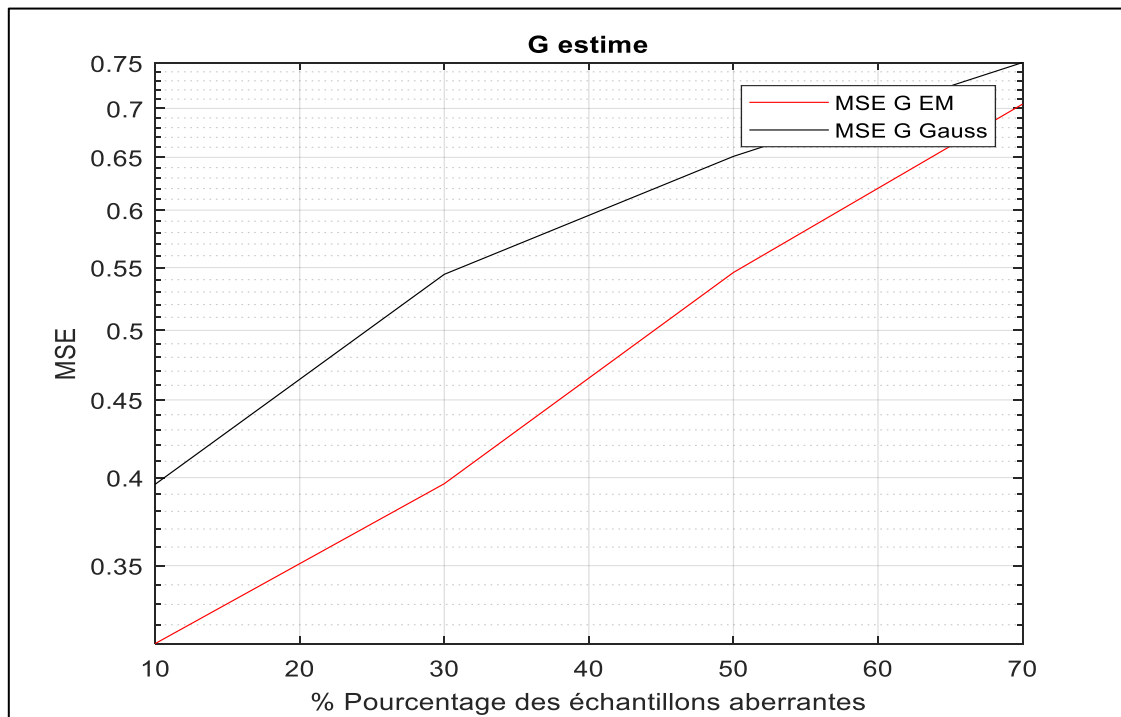


Figure III 11: MSE en fonction des échantillons aberrants.

A partir de la Figure III 11 on peut remarquer que plus les échantillons aberrants augmentent l'erreur moyenne quadratique augmente aussi. En plus, l'algorithme EM représente de meilleures performances que l'hypothèse gaussienne.

L'algorithme de l'hypothèse gaussienne présente une erreur MSE plus importante que la méthode EM lorsque le taux de pourcentage des échantillons aberrants augmente.

III.6 Conclusion :

Dans ce chapitre on présente la calibration robuste des interféromètres radio dans un environnement Gaussien et non Gaussien. Pour résoudre ce problème, nous avons considéré la distribution Gaussien complexe et on propose l'algorithme ML qui permet d'estimer de manière itérative les paramètres de bruit. De telles matrices peuvent être considérées comme non structurées ou structurées pendant le processus d'estimation. Pour réduire la charge de calcul, l'algorithme EM est été utilisé, conduisant à des expressions de forme analytique. À des fins de comparaison, les algorithmes de calibration traditionnels tels que l'hypothèse de bruit gaussien classique et la méthode robuste basée sur la loi student.

Conclusion générale :

Tout long de la préparation de notre projet fin d'études, nous avons essayé de mettre en pratique les connaissances acquises durant nos études universitaires et cela dans le but d'étudier la calibration des interféromètres radio en environnement Gaussien et non Gaussien.

Au cours de ce mémoire ; nous avons étudié, développé et implémenté plusieurs algorithmes pour estimer les paramètres inconnus d'un réseau de capteurs. L'efficacité de ces algorithmes proposés a été prouvée par différentes simulations.

Tout d'abord, nous avons évoqué un aperçu sur l'évolution de la radioastronomie et comment l'homme a pu développer la technologie qui lui a permis de visualiser et de découvrir les secrets de l'espace universelle. En effet ; pour améliorer la compréhension de nombreux phénomènes, il était obligé de trouver des solutions pour augmenter la résolution du télescope.

Les réseaux interféromètres tels que le LOFAR ou le SKA, basés sur les réseaux d'antennes à très grande échelle, est la solution la plus récente qui permet de découvrir l'espace par des télescopes en radioastronomie à de très grande distance tout en reconstituant l'image avec une résolution meilleure. Seulement les interférences et les perturbations ont généré des signaux de valeurs aberrantes qui ont dégradé la qualité de ces réseaux à grand échelle.

Pour cela nous avons proposé plusieurs algorithmes, basé sur deux techniques, la méthode d'estimation maximum de vraisemblance ML et la méthode EM. L'objectif est d'estimer le gain de calibration des capteurs du réseau d'antennes qui présente les meilleures performances. En utilisant la méthode ML, nous avons démontré que l'algorithme MIML présente de meilleures cout et performance que l'algorithme IML.

Nous avons aussi proposé un algorithme de calibration qui estime les paramètres de gain des capteurs du réseau d'antenne et qui est basé sur la méthode EM. Cet algorithme démontre de meilleures performances par rapport à la méthode Gaussienne lorsque le réseau d'antenne reçoit des valeurs aberrantes des signaux sources (perturbation). Ces performances sont démontrées par plusieurs simulations sous l'environnement MATLAB.

Les perspectives de ce travail sont assez diverses et multiples. En effet, le problème des données dans un environnement non Gaussien se pose actuellement dans de nombreux domaines. De manière générale, si en mathématiques statistiques des travaux conséquents ont déjà été réalisés, en traitement du signal l'estimation robuste des paramètres statistiques notamment complexes, n'en est encore qu'à ses débuts. De là à dire que tout est encore à faire...

En plus la gestion des réseaux à grande échelle, contenant un nombre important de capteurs, nécessite l'introduction des notions de classification et du big data.

Comme perspective, nous souhaitons de continuer dans ce domaine et

Bibliographie :

- [1] : <https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Astronomie> 05/06/2020
- [2] : NASA, ESA and J. Hester (ASU) — <http://spacetelescope.org/images/heic0305a/cdn.spacetelescope.org/archives/images/screen/heic0305a.jpg> direct
- [3] : [https://www.astronomes.com/Olivier Esslinger](https://www.astronomes.com/Olivier_Esslinger) 23/08/2020
- [4] : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Calendrier> 17/05/2020
- [5] : https://fr.wikipedia.org/wiki/Lunette_astronomique 20/05/ 2020
- [6] : [https://media4.obspm.fr/public/ressources_lu/pages_instruments-lunette/impression.html/Benjamin Mollier](https://media4.obspm.fr/public/ressources_lu/pages_instruments-lunette/impression.html/Benjamin_Mollier)
- [7] : <https://fr.wikipedia.org/wiki/T%C3%A9lescope> 29/05/ 2020
- [8] : <http://www.astrosurf.com/luxorion/astro-outils.htm>
- [9] : <https://www.techno-science.net/definition/3641.html> 29/10/2019
- [10] : <https://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/univers-frb-121102-mysterieux-sursaut-radio-rapide-retour-comme-prevu-72346/>
- [11] : <https://www.astronomes.com/lhistoire-de-lastronomie/la-radioastronomie/> Olivier Esslinger 24/08/2020
- [12] : <https://www.seti.org/seti-institute/worlds-biggest-radio-ear> 5/10/2016
- [13] : https://astronomia.fr/1ere_partie/radioastronomie.php
- [14] : <https://www.techno-science.net/definition/3608.html>
- [15] : <https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/physique-interferometrie-2513/>
- [16] : https://en.wikipedia.org/wiki/Astronomical_interferometer. 19/09/2020
- [17] : <https://www.astronomes.com/lhistoire-de-lastronomie/la-radioastronomie> Olivier Esslinger 24/08/2020
- [18] : <https://www.obs-nancay.fr/nos-actualites/> 20/02/2020
- [19] : https://www.observatoiredeparis.psl.eu/spip.php?page=imprimer&id_article=4010 19/02/2019
- [20] : SQUARE KILOMETRE ARRAY Exploring the Universe with the world's largest radio telescope 2020.
- [21] : <https://www.scmp.com/news/china/science/article/2162953/china-sets-it-sights-bigger-role-development-worlds-most-powerful>

- [22] : A.-J. van der Veen and S. J. Wijnholds, «“Signal processing tools for radio astronomy”» chez in Handbook of Signal Processing Systems. Springer, 2013
- [23] : V. Ollier M. N. El Korso R. Boyer P. Larzabal M. Pesavento « JOINT ML CALIBRATION AND DOA ESTIMATION WITH SEPARATED ARRAYS»
- [24] : https://en.m.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation 19/05/2019
- [25] : E. J. Kane, chez Economic Statistics and Econometrics, New York: Harper & Row, 1968, p. 179.
- [26] : C. G. Small et J. Wang, «"Working with Roots" .,» chez Numerical Methods for Nonlinear Estimating Equations, Oxford University Press, 2003, p. 74–124.
- [27] : R. E. Kass et P. W. Vos, «Geometrical Foundations of Asymptotic Inference,» New York: John Wiley & Sons, 1997, p. 14.
- [28] : A. Papadopoulos, «"Why we always put log() before the joint pdf when we use MLE (Maximum likelihood Estimation)?"»,» chez Stack Exchange., September 25, 2013.
- [29] : B .Ottersten M. Viberg P. Stoica A. Nehorai « Exact and Large Sample ML Techniques for Parameter Estimation and Detection in Array Processing »
- [30] : B. C. Ng and C. M. S. See, «“Sensor-array calibration using a maximum-likelihood approach,”»,» chez IEEE Trans. Antennas Propag, 1996.
- [31] : R. B. a. G. Bouleux, «“Oblique projections for direction-of-arrival estimation with prior knowledge,”»,» IEEE Trans. Signal Processing, Vols. %1 sur %2vol. 56, no. 4, p. 1374–1387, 2008.
- [32] : R. B. a. S. M. M. N. El Korso, «“Fast sequential source localization using the projected companion matrix approach,”»,» chez in Proceedings of the 3rd IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, , Aruba, Dutch.
- [33] : M. D. Zoltowski and K. T. Wong, «“Closed-form eigenstructure-based direction finding using arbitrary but identical subarrays on a sparse uniform Cartesian array grid,”»,» chez IEEE Trans. Signal Processing, 2000.
- [34] : A. B. G. a. K. M. W. M. Pesavento, «“Direction of arrival estimation in partly calibrated time-varying sensor arrays,”»,» chez in Proc. of IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing,, Salt Lake City,UT, 2001.
- [35] : A.B. G. a. K. M. W. S. Vorobyov, «“Maximum likelihood direction-of-arrival estimation in unknown noise fields using sparse sensor arrays,”»,» IEEE Trans. Signal.
- [36] : M. N. El Korso. a. M. P. X. Zhang, « “Maximum likelihood and maximum a posteriori direction-of-arrival estimation in the presence of SIRP noise,”»,» chez in Proc. of IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing,, Shanghai, China, 2016.
- [37] : M. P. a. A. B. Gershmanvol, « “Maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise,”»,» chez IEEE Trans. Signal Processing, 2001-2005.

- [38] : B. O. M. V. P. S. A. Nehorai, « Exact and Large Sample ML Techniques for Parameter Estimation and Detection in Array Processing,» February 23 1993.
- [39] : <https://www.statisticshowto.com/em-algorithm-expectation-maximization/>
- [40] : M. Feder and E. Weinstein, « Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm, » IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 36, no. 4, pp. 477 - 489, 1988.
- [41] : A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, « Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, » Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), vol. 39, no. 1, pp. 1 - 38, 1977.
- [42] : EM Algorithm & Some Applications in Multi-channel Signal Processing Dr. Mohammed Nabil EL KORSO m.elkorso@parisnanterre.fr Université Paris Nanterre, LEME EA 4416 November 24, 2019.
- [43] : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_gamma 17/09/2020
- [44] : McLachlan and Krishnan 1997, section 2.6, 5.8, eq 4.152
- [45] : Steven M. Kay University of Rhode Island « Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory », chapitre 15 p 502 et 503.

Résumé: Un grand nombre de chercheurs et d'industriels sont maintenant engagés dans le développement technique et scientifique en posant des questions sur l'astrophysique, la physique contemporaine, incluant de nouveaux tests de la théorie de la gravité, les grandes structures de l'Univers, l'évolution des galaxies, la formation des étoiles... La radioastronomie, tels que le projet LOFAR (LOW Frequency ARray) à basse fréquence, et le projet SKA (Square Kilometre Array) qui vont être achevés en 2025, pourront répondre à ces grandes questions.

Seulement, pour atteindre les performances nécessaires de reconstruire l'image claire et de cartographie de cet univers, il est nécessaire de développer des algorithmes qui permettront d'estimer précisément les gains de calibration des capteurs des réseaux d'antennes.

L'objectif de ce mémoire est de proposer des contributions méthodologiques visant à casser les deux verrous que sont la robustesse des algorithmes de calibration et leur complexité de calcul.

Mots clés : *Traitement statistiques du signal, radioastronomie, robustesse*

Abstract: A large number of researchers and industrialists are now engaged in technical and scientific development by asking questions about astrophysics, contemporary physics, including new tests of the theory of gravity, the large structures of the Universe, the evolution of galaxies, the formation of stars... Radio astronomy, such as the low-frequency LOFAR (LOW Frequency ARray) project, and the SKA (Square Kilometer Array) project, which will be completed in 2025, will be able to answer these major questions.

However, to achieve the performance required to reconstruct the clear image and map this universe, it is necessary to develop algorithms that will allow precise estimation of the gains in calibration of the sensors of the antenna networks.

The objective of this dissertation is to propose methodological contributions aimed at breaking the two obstacles which are the robustness of calibration algorithms and their computational complexity.

Keywords: *Statistical signal processing, radio astronomy, robustness*

التلخيص: يشارك عدد كبير من الباحثين والصناعيين الآن في التطوير التقني والعلمي من خلال طرح أسئلة حول الفيزياء الفلكية والفيزياء المعاصرة، بما في ذلك الاختبارات الجديدة لنظرية الجاذبية والتركيبات الكبيرة للكون، تطور المجرات، وتشكيل النجوم... وفي علم الفلك الراديوي، نذكر على سبيل المثال مشروع التردد المنخفض LOFAR، ومشروع SKA (مصنوفة الكيلومتر المربع)، الذي سيكتمل في عام 2025، سيكون قادرًا على الإجابة على هذه الأسئلة الرئيسية.

ومع ذلك، لتحقيق الأداء المطلوب لإعادة بناء الصورة الواضحة ورسم خريطة لهذا الكون، من الضروري تطوير خوارزميات تسمح بتقدير دقيق للمكاسب في معايرة أجهزة استشعار شبكات الهوائي.

الهدف من هذه الأطروحة هو اقتراح مساهمات منهجية تهدف إلى كسر عقبتين وهما قوة خوارزميات المعايرة وتعقيدها الحسابي.

الكلمات المفتاحية: *معالجة الإشارات الإحصائية، علم الفلك الراديوي، القوي*