



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN

# THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Analyse fonctionnelle

Par :

**Mme KHITRI née KAZI TANI Leila**

Sur le thème

---

## Dérivations fractionnaires discrètes et applications numériques

---

Soutenue publiquement le 29 février 2020 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr YEBDRI Mustapha	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr DIB Hacem	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr BOUGUIMA Sidi Mohamed	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mr CHERKI Brahim	Professeur	Université de Tlemcen	Examineur
Mr CHITOUR Yacine	Professeur	Université Paris-Sud 11	Examineur
Mr HAMMOUDI Ahmed	Professeur	Centre Universitaire Ain-Temouchent	Examineur

*Laboratoire de Statistiques et Modélisations Aléatoires (LSMA)  
BP 119, 13000 Tlemcen - Algérie*



# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier vivement Professeur Dib. J'ai conscience de l'honneur et du privilège d'avoir travaillé sous sa direction. Il m'a fait profiter avec générosité et patience de son immense culture. Sa rigueur, ses exigences et son savoir m'ont permis d'entreprendre sereinement ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Yebdri Professeur à l'Université de Tlemcen pour avoir présider mon jury de soutenance.

Je remercie chaleureusement Messieurs Bouguima et Cherki Professeurs à l'Université de Tlemcen, Monsieur Chitour Professeur à l'Université Paris-Sud 11 et Monsieur Hammoudi Professeur au Centre Universitaire Ain-Temouchent d'avoir accepté d'examiner ce travail, d'avoir pris le temps de lire et d'écrire un rapport.

Enfin, je remercie celles et ceux qui me sont chers. Je suis redevable à mon mari pour son soutien indéfectible et sa patience. A mes enfants pour leurs encouragements et leurs appuis. Il me tient à cœur d'exprimer ma gratitude à mes parents, mon père en particulier qui n'a eu de cesse de m'inciter à finir cette thèse.

# Table des matières

Table des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	vii
<b>I Puissances fractionnaires de l'opérateur de l'intégrale et approximations</b>	<b>1</b>
1 Puissances fractionnaires de l'opérateur de l'intégrale continue	2
2 Intégrales fractionnaires discrètes : Approche opérationnelle	7
2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire . . . . .	7
2.1.1 Propriété sectorielle de l'opérateur des rectangles . . . . .	8
2.1.5 Puissance fractionnaire de l'opérateur des rectangles . . . . .	13
2.1.9 Définition et propriétés de l'opérateur nabla h-somme fractionnaire . . . . .	17
2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire . . . . .	18
2.2.1 Propriété sectorielle de l'opérateur des trapèzes . . . . .	18
2.2.4 Puissance fractionnaire de l'opérateur des trapèzes . . . . .	24
2.2.6 Puissance fractionnaire de l'opérateur des trapèzes et polynômes de Jacobi . . . . .	27
3 Convergences de l'opérateur h-somme vers l'opérateur intégrale de Riemann-Liouville	30
3.1 Lemmes techniques . . . . .	30
3.2 Convergence uniforme . . . . .	33
3.3 Convergence dans les espaces des fonctions continues avec poids	40
3.3.1 Propriétés de l'intégrale fractionnaire dans les espaces $C_\beta$ . . . . .	41

TABLE DES MATIÈRES

---

3.3.3	Convergence dans les espaces $C_\beta$ . . . . .	42
3.4	Connexion avec la théorie des échelles de temps . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>46</b>
4.1	Exemple 1 . . . . .	47
4.2	Exemple 2 . . . . .	50
4.3	Exemple 3 . . . . .	52
<b>II</b>	<b>Puissances fractionnaires de l'opérateur de dérivation et approximations</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>Puissance fractionnaire de l'opérateur de dérivation</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>Les opérateurs nabla fractionnaires</b> . . . . .	<b>59</b>
6.1	Norme Hölderienne de l'erreur d'interpolation linéaire par morceaux . . . . .	59
6.2	Les opérateurs nabla et convergences vers l'opérateur de dérivation . . . . .	61
6.3	Propriété sectorielle de l'opérateur nabla étendu . . . . .	63
6.4	Les opérateurs nabla fractionnaires . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Convergence hölderienne de l'opérateur nabla étendu vers l'opérateur de dérivée fractionnaire</b> . . . . .	<b>68</b>
7.1	Lemmes techniques . . . . .	68
7.2	Convergence forte des opérateurs nabla fractionnaires vers l'opérateur dérivée fractionnaire . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>75</b>
8.1	Exemple 1 . . . . .	75
8.2	Exemple 2 . . . . .	79
	<b>Quelques commentaires et questions ouvertes</b> . . . . .	<b>80</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b> . . . . .	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Cadres fonctionnels</b> . . . . .	<b>82</b>
A.1	Les espaces des fonctions continues avec poids . . . . .	82
A.2	Les espaces des fonctions Hölderiennes . . . . .	83

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>B Fonctions spéciales et transformation de Laplace</b>	<b>84</b>
B.1 La fonction Gamma . . . . .	84
B.2 La fonction Beta . . . . .	85
B.3 La fonction digamma . . . . .	85
B.4 La fonction hypergéométrique de Gauss . . . . .	85
B.5 Les fonctions de Mittag-Leffler . . . . .	86
B.6 La fonction zêta de Riemann . . . . .	87
B.7 Transformation de Laplace . . . . .	87
B.8 Transformation inverse de Laplace . . . . .	88
B.9 Transformation en $Z$ . . . . .	89
<b>C Concepts de dérivation et intégration fractionnaires</b>	<b>91</b>
<b>D Puissance fractionnaire d'opérateurs sectoriels</b>	<b>92</b>
D.1 Opérateurs sectoriels . . . . .	92
D.2 Représentation intégrale de Balakrishnan . . . . .	94
D.3 Lois des exposants . . . . .	94
<b>E Échelles de temps et chaînes de mesure</b>	<b>95</b>
<b>F Codes Python</b>	<b>97</b>
F.1 Code de l'exemple 4.1 . . . . .	97
F.2 Code de l'exemple 4.2 . . . . .	99
F.3 Code de l'exemple 4.3 . . . . .	101
F.4 code de l'exemple 8.1 . . . . .	103
F.4.1 Approximation de la dérivée fractionnaire . . . . .	103
F.4.2 L'analyse de convergence hölderienne en fonction de $h$ .	105
F.5 code de l'exemple 8.2 . . . . .	107
<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>

# Table des figures

4.1	Comparaison entre les solutions analytique et numérique d'un problème de Cauchy fractionnaire linéaire homogène . . . . .	49
4.2	Analyse de convergence en fonction du pas $h$ du problème de Cauchy fractionnaire. . . . .	49
4.3	Comparaison entre les solutions analytique et numérique d'un problème de Cauchy fractionnaire non homogène . . . . .	51
4.4	les trajectoires numériques du système d'ordre fractionnaire du Brusselator . . . . .	53
4.5	Plan de phase du Brusselator . . . . .	53
8.1	Dérivée fractionnaire et son approximation de la fonction $f(x) = x^\mu \ln x$ . . . . .	77
8.2	L'erreur Hölderienne par rapport à $h$ dans l'approximation de la dérivée fractionnaire de la fonction $f(x) = x^\mu \ln x$ . . . . .	77
D.1	Spectre d'un opérateur sectoriel . . . . .	93

# Liste des tableaux

4.1	L'ordre de convergence expérimental pour le problème de Cauchy homogène . . . . .	50
8.1	L'erreur hölderienne dans le calcul approché de la dérivée fractionnaire de $f(x) = x^\mu \ln x$ et estimation de l'ordre de convergence pour $\alpha = 0.3$ . . . . .	78
8.2	L'erreur hölderienne dans le calcul approché de la dérivée fractionnaire de $f(x) = x^\mu \ln x$ et estimation de l'ordre de convergence pour $\alpha = 0.5$ . . . . .	78
8.3	L'erreur hölderienne en fonction du pas $h$ pour un problème de Cauchy dans un espace de Hölder. . . . .	79



# Introduction

L'analyse fractionnaire remonte aux spéculations de Leibnitz dans sa fameuse lettre à de L'Hôpital en 1695 [42], toutefois, c'est un domaine qui demeure d'actualité comme en témoigne l'édition d'un journal spécialisé [1] et les travaux qui continuent d'être publiés régulièrement ailleurs [52], [53] etc. Ce regain d'intérêt est suscité en partie par la validation de modèles fractionnaires dans de nombreux domaines. Nous citons par exemple les modèles fractionnaires de Black-Scholes en finance [39], du brusselateur en chimie [45], S.I.R en médecine [29], etc. Sans oublier les livres sur le calcul fractionnaire orientés vers les applications de Das [11], et Hilfer [30].

Le foisonnement des travaux de recherches portant sur les opérateurs fractionnaires a vu apparaître de multiples définitions : Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Marchaud, etc. associées au cas continu (voir [13] pour une liste de définitions) et nabla fractionnaire, delta fractionnaire, etc. [6], [7], [10], [14] associés au cas discret. En outre, le désir de longue date de disposer de moyens permettant de traiter les problèmes continus et discrets simultanément, a motivé la théorie du calcul fractionnaire en échelles de temps. Effectivement, dans [3] et [4], Anastassiou a développé respectivement, les fondations du delta et nabla calcul fractionnaire en échelle de temps. D'autre part, Williams [58] a construit des opérateurs de Riemann-Liouville sur une échelle arbitraire, comme transformations intégrales avec comme noyaux des fonctions puissances caractérisées par une approche axiomatique.

La diversité ainsi engendrée pose le problème de la légitimité d'attribuer le qualificatif de fractionnaire à ces opérateurs. En 1975 Ross [50] puis Ortigueira et Machado en 2015 [46], ont suggéré des critères permettant de vérifier si un opérateur est une dérivée fractionnaire.

Dans un souci de cohérence notre travail repose sur l'idée fondamentale qu'un opérateur fractionnaire n'est rien d'autre que la puissance d'un opérateur de dérivation ou d'intégration qu'ils soient continus ou discrets.

Cette idée n'est guerre nouvelle, à partir des années 1960, la théorie générale sur les puissances fractionnaires d'opérateurs fermés non bornés dans un espace de Banach fût l'objet de recherches intensives, notamment avec

---

les travaux de Balakrishnan [9] dans lesquels il a défini la puissance fractionnaire pour les opérateurs positifs,  $A^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}_+$  par une représentation intégrale. Dans une série d'article, Komatsu a entrepris une première tentative de présentation exhaustive de la théorie. Il a généralisé la définition de Balakrishnan à  $\alpha \in \mathbb{C}$  à l'aide d'un processus d'extensions fermées. Par ailleurs, Hövel et Westphal [32] définirent l'opérateur puissance moyennant une transformation de Stieljes. Bien que dans une certaine mesure, les méthodes adoptées diffèrent, chacune est basée principalement sur l'intégrale de Bochner

$$(-A)^\alpha f = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I - A)^{-1} A f d\lambda$$

En 2001, Martinez et Sanz ont consacré la première monographie à ce sujet [43].

Les opérateurs sectoriels satisfont la condition d'uniforme bornitude de la résolvante  $\|\lambda R(\lambda, A)\| < M$  dans un secteur angulaire de  $\mathbb{C}$ . Ils conduisent à un calcul fonctionnel holomorphe basé sur des intégrales de type Cauchy.

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda$$

où  $\Gamma$  est un contour approprié.

Dans la monographie devenue standard de Haase [28], ce calcul fonctionnel a été étendu à une large classe de fonctions (même méromorphes) par une approche axiomatique et purement algébrique. La puissance fractionnaire d'opérateurs sectoriels trouve, en particulier son cadre naturel.

Cette thèse porte principalement sur la construction des opérateurs fractionnaires discrets comme élévation à la puissance d'opérateurs sectoriels. Cette approche requiert la construction des résolvantes et le contrôle de leurs normes dans divers espaces de Banach. Les transformées de Laplace et en  $Z$  nous ont fourni une méthode permettant d'exprimer ces résolvantes dans les différents cas abordés. Cette démarche originale dans le cas discret, nous a permis de retrouver certains opérateurs et de construire un nouveau. Suite à cela, nous démontrons l'uniforme convergence de l'opérateur nabla h-somme vers l'intégrale de Riemann-Liouville dans les espaces des fonctions continues puis nous élargissons ce résultat pour les espaces des fonctions continues avec poids. La convergence forte des opérateurs nabla fractionnaires vers l'opérateur dérivée fractionnaire dans les espaces de Hölder est prouvée. Les applications ne sont pas en reste puisque dans chaque cas des exemples sont présentés. La résolution de quelques problèmes de Cauchy fractionnaires est proposée.

Soulignons aussi qu'une connexion avec la théorie "échelle de temps" est mise en exergue. Le théorème de convergence uniforme démontré auparavant

---

est interprété précisément comme continuité d'un opérateur de l'espace des échelles de temps vers l'espace des fonctions continues.

Notre thèse s'organise comme suit. Dans une première partie, on s'intéresse à la puissance fractionnaire de l'opérateur de l'intégrale et approximations. La seconde est consacré à la puissance fractionnaire de l'opérateur de dérivation et approximations. Une annexe forme la troisième partie. Chacune des deux premières parties est divisée en quatre chapitres les deux premiers chapitres sont dédiés à la construction des opérateurs fractionnaires continus et discrets respectivement, suivis d'un chapitre portant sur une analyse de convergence. Puis des applications sont présentées dans le dernier chapitre. L'annexe contient les différents concepts et connaissances nécessaires pour notre thèse. Elle est composée de plusieurs parties. L'annexe A est un rappel sur les différents cadres fonctionnels utilisés ce qui permet de fixer les notations associées. Dans l'annexe B, nous introduisons les fonctions spéciales. Les deux annexes C et D traitent des opérateurs fractionnaires, les intégrales et dérivées fractionnaires usuels sont définis en C puis l'approche opérationnelle de construction d'une puissance fractionnaire d'opérateurs sectoriels en D, notre présentation est fortement influencée par l'approche de Haase suscitée. L'annexe E se veut être une introduction à la théorie d'échelles de temps et chaînes de mesure. Enfin l'annexe F contient les différents codes Python mis en œuvre dans cette thèse.

Ce travail a donné lieu à la publication [35] et à la prépublication soumise [36]

## Première partie

# Puissances fractionnaires de l'opérateur de l'intégrale et approximations

# Chapitre 1

## Puissances fractionnaires de l'opérateur de l'intégrale continue

On définit pour tout  $f \in C_0$  (voir Annexe A, définition A.1) et pour tout  $x \in [0, 1]$  l'opérateur de l'intégrale continue  $V$  par :

$$Vf(x) := \int_0^x f(t)dt \quad (1.1)$$

Tout naturellement la puissance fractionnaires de l'opérateur  $V$  sera établi comme puissance d'opérateur sectoriel au moyen de la formule de Balakrishnan ( voir Formule D.2)

Nous commençons par donner un premier résultat utile dans le lemme suivant :

**Lemme 1.1.1.** *Pour tout paramètre  $a < 0$ , l'infimum de la fonction définie sur  $]0, 1[$  par*

$$\varphi_a(x) = (-ax)^x$$

est

$$\inf_{0 < x < 1} \varphi_a(x) = \begin{cases} -a & \text{si } -ae \leq 1 \\ e^{\frac{1}{ae}} & \text{si } -ae > 1 \end{cases}$$

*Démonstration.* Notons que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_a(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi_a(x) = -a$ , de plus la dérivée de la fonction  $\varphi_a$  est

$$\varphi'_a(x) = (-ax)^x (\ln(-ax) + 1)$$

---

Cette dernière est positive pour tout  $x > x_0$  avec  $x_0 = -\frac{1}{ae}$ . Deux cas sont alors possibles, le premier si  $-\frac{1}{ae} \geq 1$  alors  $\inf_{0 < x < 1} \varphi_a(x) = -a$ , le second est lorsque  $-\frac{1}{ae} < 1$  et alors  $\inf_{0 < x < 1} \varphi_a(x) = \varphi_a(-\frac{1}{ae})$ . D'où le lemme.  $\square$

Le résultat suivant est essentiel pour ce chapitre

**Proposition 1.1.2.** *Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , la puissance fractionnaire  $V^\alpha$  de l'opérateur de l'intégrale continue est donnée par :*

$$V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \forall x \in [0, 1], \forall f \in C_0$$

*Démonstration.* La démonstration se décompose en trois étapes. Dans la première, nous allons exprimer la résolvante de l'opérateur  $V$  à l'aide des transformations de Laplace. En effet, pour tout  $\lambda$  complexe non nul et au vu de la formule B.6 de l'annexe B, la transformée de Laplace de l'équation

$$(\lambda I - V)g(x) = f(x)$$

où  $f$  et  $g$  sont prolongées par 0 sur  $]1, +\infty[$  est :

$$(\lambda - p^{-1})\mathcal{L}[g](p) = \mathcal{L}[f](p)$$

donc

$$\mathcal{L}[g](p) = \frac{1}{\lambda - p^{-1}} \mathcal{L}[f](p)$$

En utilisant la transformation inverse de Laplace, nous obtenons

$$g(x) = \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\lambda - p^{-1}} \right] \right) * f(x)$$

Comme

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\lambda - p^{-1}} \right] (x) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \lambda^{-1} + \lambda^{-2} \frac{1}{p - \lambda^{-1}} \right] (x)$$

D'après les formules B.8 et B.9 de l'annexe B on a

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\lambda - p^{-1}} \right] (x) = \lambda^{-1} \delta(x) + \lambda^{-2} e^{\frac{x}{\lambda}}$$

En effectuant le produit de convolution, il résulte

$$g(x) = \lambda^{-1} f(x) + \lambda^{-2} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt$$

D'où le résultat :

$$R(\lambda, V)f(x) = \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt$$

Dans la deuxième étape, nous vérifions la propriété sectorielle de l'opérateur intégrale  $V$  (voir définition D.1.1).

Pour tout  $x \in [0, 1]$  et pour tout  $\lambda$  complexe non nul tel que  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  et  $\arg(\lambda) = \omega$ .

$$|\lambda R(\lambda, V)f(x)| \leq |f(x)| + \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt \right|$$

Soient  $1 < p, q < \infty$  avec  $1/p + 1/q = 1$ , l'inégalité de Hölder permet d'obtenir la majoration suivante

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left( \int_0^x |e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}|^p dt \right)^{1/p} \left( \int_0^x |f(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Comme

$$\int_0^x |e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}|^p dt = \int_0^x e^{p \operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})(x-t)} dt = \frac{e^{p \operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})x} - 1}{p \operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})}$$

et

$$\left( \int_0^x |f(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \|f\|_0 x^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_0$$

Il en résulte

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt \right| \leq \frac{\|f\|_0}{|\lambda|} \left( \frac{-1}{p \operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} \right)^{1/p}.$$

En utilisant le lemme 1.1.1 avec  $a = \frac{1}{\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})}$  on a

$$\frac{1}{|\lambda|} \inf_{p>1} \left( \frac{-1}{p \operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} \right)^{1/p} = \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|} \left( -\frac{1}{\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} \right) & \text{si } -\frac{e}{\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} \leq 1 \\ \frac{1}{|\lambda|} e^{\frac{1}{e} \operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} & \text{si } -\frac{1}{\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} > 1 \end{cases}$$

Remarquons d'abord que  $\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{|\lambda|} \cos \omega$  alors

$$\frac{1}{|\lambda|} \left( -\frac{1}{\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} \right) = \frac{1}{|\lambda|} \left( -\frac{1}{\frac{1}{|\lambda|} \cos \omega} \right) = -\frac{1}{\cos \omega}$$

et

$$\frac{1}{|\lambda|} e^{\frac{1}{e} \operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda})} = \frac{1}{|\lambda|} e^{\frac{1}{e} \frac{1}{|\lambda|} \cos \omega}$$

Soit la fonction positive définie sur  $[0, \infty[$  par

$$g_0(x) = x e^{x \frac{\cos \omega}{e}},$$

sa dérivée

$$g_0'(x) = \frac{1}{e} e^{x \frac{\cos \omega}{e}} (e + x \cos \omega)$$

s'annule au point  $-\frac{e}{\cos \omega}$  et vu que  $\cos \omega < 0$  alors

$$\max_{x \in [0, \infty[} x e^{x \frac{\cos \omega}{e}} = g_0\left(-\frac{e}{\cos \omega}\right) = -\frac{1}{\cos \omega}.$$

D'où l'estimation

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt \right| \leq -\frac{1}{\cos \omega} \|f\|_0.$$

Finalement,

$$|\lambda R(\lambda, V)f(x)| \leq \left(1 - \frac{1}{\cos \omega}\right) \|f\|_0.$$

On a donc établi que l'opérateur  $V$  est sectoriel d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Nous pouvons maintenant construire l'opérateur  $V^\alpha$ .

En remarquant que

$$\begin{aligned} (\lambda + V)^{-1} V f(x) &= f(x) - \lambda (\lambda + V)^{-1} f(x) \\ &= f(x) + \lambda R(-\lambda, V)f(x) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} V^\alpha f(x) &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda + V)^{-1} V f(x) d\lambda \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)} f(t) dt d\lambda \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^x f(t) \int_0^\infty \lambda^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)} d\lambda dt \end{aligned}$$



---

En posant  $p = \frac{(x-t)}{\lambda}$

$$\int_0^\infty \lambda^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)} d\lambda = (x-t)^{\alpha-1} \int_0^\infty p^{-\alpha} e^{-p} dp = (x-t)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)$$

puis finalement, en utilisant la formule des compléments (voir Annexe B, formule B.1)

$$V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

□

**Remarque 1.1.3.** *L'opérateur  $V^\alpha$  n'est autre que l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (voir Annexe C, définition C.0.1). Nous le noterons désormais  $I^\alpha$*

**Remarque 1.1.4.** *Le semi-groupe  $(I^\alpha)_{\operatorname{Re} \alpha > 0}$  est appelé semi-groupe de Riemann-Liouville sur  $(0, 1)$ .*

**Remarque 1.1.5.** *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est obtenue dans [28, Proposition 8.5.5] comme puissance fractionnaire de l'inverse de l'opérateur de dérivation.*

# Chapitre 2

## Intégrales fractionnaires discrètes : Approche opérationnelle

Dans ce chapitre nous tentons de répondre à la question, somme toute naturelle suivante : Peut-on définir des formules de quadrature fractionnaire comme puissance fractionnaire d'opérateur de quadrature ? On veut évidemment à partir des dites formules de quadratures définir de nouveaux opérateurs sectoriels et par suite construire les puissances de ces derniers. Nous utiliserons exactement ce procédé pour construire les opérateurs des rectangles et des trapèzes fractionnaires comme puissance des quadratures des rectangles et des trapèzes respectivement. De tels opérateurs sont essentiels dans la théorie du calcul fractionnaire discret et comme approximation de l'intégrale de Riemann-Liouville.

Afin de définir les opérateurs discrets nous considérons le maillage uniforme :

$$t_n = nh, h = \frac{1}{N}, n = 0, 1, \dots, N$$

### 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

On rappelle la formule de quadrature des rectangles à droite.  
Pour  $n = 0, 1, \dots, N$

$$\int_0^{t_n} f(t) dt \approx \sum_{j=1}^n h f(t_j)$$

En vu d'étendre cette formule sur tout l'intervalle  $[0, 1]$  nous choisissons

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

d'adopter une interpolation linéaire par morceaux, de ce fait on considère l'opérateur définie sur  $C_0$

$$V_h^r f(x) := \frac{x - t_{n-1}}{h} \sum_{j=1}^n h f(t_j) + \frac{t_n - x}{h} \sum_{j=1}^{n-1} h f(t_j), t_{n-1} < x \leq t_n$$

Par convention on pose

$$V_h^r(f)(0) = 0$$

### 2.1.1 Propriété sectorielle de l'opérateur des rectangles

Nous avons la proposition fondamentale suivante :

**Proposition 2.1.2.** *Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, h\}$ , la résolvante  $R(\lambda, V_h^r)$  s'écrit, pour tout  $f \in C_0$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $t_{n-1} < x \leq t_n$ , ainsi*

$$\begin{aligned} R(\lambda, V_h^r)f(x) &= \frac{x - t_{n-1}}{h} \left[ \frac{1}{\lambda - h} f(t_n) + \frac{h}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^{n-j+1} f(t_j) \right] \\ &+ \frac{t_n - x}{h} \left[ \frac{1}{\lambda - h} f(t_{n-1}) + \frac{h}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-2} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^{n-j} f(t_j) \right] \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left( f(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} f(t_n) - \frac{t_n - x}{h} f(t_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Dans le but d'exprimer la résolvante nous considérons l'équation pour  $x \in [0, 1]$

$$(\lambda I - V_h^r)g(x) = f(x) \tag{2.1}$$

Tout d'abord remarquons que pour  $x = t_n, n = 1, \dots, N$  résoudre l'équation (2.1) revient à résoudre le système linéaire :

$$\lambda g(t_n) - h \sum_{j=1}^n g(t_j) = f(t_n), 1 \leq n \leq N \tag{2.2}$$

A cette fin, on construit les suites  $g[n] = g(t_n)$ ,  $f[n] = f(t_n)$  pour  $n = 0, \dots, N$  et  $g[n] = f[n] = 0$  pour  $n > N$ . Puis on considère  $G(z)$  et  $F(z)$  les transformées en  $Z$  des suites  $g[n]$  et  $f[n]$  respectivement. Rappelons que la transformée en  $Z$  d'une suite causale  $(u_n)$  est la fonction de la variable complexe  $z$  définie par

$$Z(u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n}$$

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

alors

$$\begin{aligned} Z \left( h \sum_{j=1}^n g(t_j) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} h \sum_{j=1}^n g(t_j) z^{-n} = h \sum_{j=1}^{\infty} g(t_j) \sum_{n=j}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{h}{1-z^{-1}} \sum_{j=1}^{\infty} g(t_j) z^{-j} \\ &= \frac{h}{1-z^{-1}} [G(z) - g(0)] \end{aligned}$$

Il en découle que la transformée en  $Z$  de l'équation

$$(\lambda I - V_h^r) g(t_n) = f(t_n)$$

est

$$\left[ \lambda - \frac{h}{1-z^{-1}} \right] G(z) + \frac{h}{1-z^{-1}} g(0) = F(z)$$

Or

$$g(0) = \frac{1}{\lambda} f(0)$$

On obtient alors

$$G(z) = \left[ \frac{1}{\lambda - h} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda-h} z^{-1}} \right] \left( F(z) - \frac{h}{\lambda} \frac{1}{1 - z^{-1}} f(0) \right)$$

Puis

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\lambda - h} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda-h} z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda-h} z^{-1}} \right] F(z) \\ &\quad - \frac{h}{\lambda(\lambda - h)} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda-h} z^{-1}} f(0) \end{aligned}$$

On utilise simplement les séries géométriques et la définition de  $F(z)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\lambda - h} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^k z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^k z^{-k-1} \right] \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} f(t_j) z^{-j} - \frac{h}{\lambda(\lambda - h)} f(0) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^k z^{-k} \end{aligned}$$

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

Par suite

$$G(z) = \frac{1}{\lambda - h} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^j f(t_{k-j}) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^j f(t_{k-j-1}) z^{-k} \right] \\ - \frac{h}{\lambda(\lambda - h)} f(0) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^k z^{-k}$$

On retrouve alors la suite  $g(t_n)$

$$g(t_n) = \frac{1}{\lambda - h} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^j f(t_{n-j}) - \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^j f(t_{n-j-1}) \right] \\ - \frac{h}{\lambda(\lambda - h)} f(0) \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^n$$

Enfin après simplifications

$$g(t_n) = \frac{1}{\lambda - h} f(t_n) + \frac{h}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^{n-j+1} f(t_j)$$

Maintenant pour tout  $x \in ]t_{n-1}, t_n]$ , l'équation 2.1 est :

$$\lambda g(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} \sum_{j=1}^n h f(t_j) - \frac{t_n - x}{h} \sum_{j=1}^{n-1} h f(t_j) = f(x)$$

En la combinant avec l'équation 2.2 on a

$$\lambda g(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} (\lambda g(t_n) - f(t_n)) - \frac{t_n - x}{h} (\lambda g(t_{n-1}) - f(t_{n-1})) = f(x)$$

d'où

$$g(x) = \frac{x - t_{n-1}}{h} g(t_n) + \frac{t_n - x}{h} g(t_{n-1}) + \frac{1}{\lambda} \left( f(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} f(t_n) - \frac{t_n - x}{h} f(t_{n-1}) \right)$$

Finalement la résolvante  $R(\lambda, V_h^r)$  est exprimée par

$$R(\lambda, V_h^r) f(x) = \frac{x - t_{n-1}}{h} \left[ \frac{1}{\lambda - h} f(t_n) + \frac{h}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^{n-j+1} f(t_j) \right] \\ + \frac{t_n - x}{h} \left[ \frac{1}{\lambda - h} f(t_{n-1}) + \frac{h}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-2} \left( \frac{\lambda}{\lambda - h} \right)^{n-j} f(t_j) \right] \\ + \frac{1}{\lambda} \left( f(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} f(t_n) - \frac{t_n - x}{h} f(t_{n-1}) \right)$$

□

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

Avant de vérifier la propriété sectorielle de l'opérateur  $V_h^r$ , sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{S}_\omega$  (voir définition D.1.1) nous démontrons le lemme suivant :

**Lemme 2.1.3.** *Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_\omega$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  on a :*

$$\frac{|z|}{|1-z|-1} \leq \frac{-1}{\cos \omega}$$

*Démonstration.* Observons que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_\omega$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  nous avons  $|1-z| > 1$  et

$$|1-z|^2 = |z|^2 + 1 - 2|z| \cos(\arg z) \geq |z|^2 + 1 - 2|z| \cos \omega$$

Alors

$$\frac{|z|}{|1-z|-1} \leq \frac{|z|}{\sqrt{|z|^2 + 1 - 2|z| \cos \omega} - 1}$$

On pose pour tout  $s > 0$

$$\phi(s) = \frac{s}{\sqrt{1 - 2s \cos \omega + s^2} - 1},$$

Alors  $\phi(+\infty) = 1$ ,  $\phi(0^+) = \frac{-1}{\cos \omega}$  et la dérivée satisfait

$$\begin{aligned} & \phi'(s) \\ &= \frac{(-1 + \cos^2 \omega) s^2}{(\sqrt{s^2 + 1 - 2s \cos \omega} - 1)^2 \sqrt{s^2 + 1 - 2s \cos \omega} (1 - s \cos \omega + \sqrt{s^2 + 1 - 2s \cos \omega})} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $s \in ]0, +\infty[$

$$1 < \phi(s) \leq \frac{-1}{\cos \omega}.$$

D'ou le lemme. □

**Proposition 2.1.4.** *La suite  $(V_h^r)_h$  est sectorielle d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .*

*Démonstration.* Nous réécrivons la résolvante  $R(\lambda, V_h^r)$  sous la forme

$$\begin{aligned} R(\lambda, V_h^r)f(x) &= \frac{x - t_{n-1}}{h} R(\lambda, V_h^r)f(t_n) + \frac{t_n - x}{h} R(\lambda, V_h^r)f(t_{n-1}) \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left( f(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} f(t_n) - \frac{t_n - x}{h} f(t_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

avec

$$R(\lambda, V_h^r)f(t_m) = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{1}{1 - \frac{h}{\lambda}} f(t_n) + \frac{\frac{h}{\lambda}}{1 - \frac{h}{\lambda}} \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{1 - \frac{h}{\lambda}} \right)^{m-j} f(t_j) \right]$$

Il est clair que pour tout  $x \in [0, 1]$

$$|\lambda R(\lambda, V_h^r)f(x)| \leq \|f\|_0 \left[ 2 \frac{1}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|} + 2 \frac{\frac{h}{|\lambda|}}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|^{N-j}} + 3 \right]$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S}_\omega$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ .

Comme  $\arg\left(\frac{h}{\lambda}\right) = -\arg(\lambda)$  alors  $\frac{h}{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \bar{S}_\omega$ , de plus, nous avons

$$\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right| = \sqrt{1 - 2 \frac{h}{|\lambda|} \cos(\arg \lambda) + \left(\frac{h}{|\lambda|}\right)^2}$$

et  $\frac{1}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|} < 1$  puisque  $\cos(\arg \lambda) < 0$  et  $\sqrt{1 - 2 \frac{h}{|\lambda|} \cos \omega + \left(\frac{h}{|\lambda|}\right)^2} > 1$ .

Ce qui permet d'avoir les majorations suivantes, en posant  $z = \frac{h}{\lambda}$  et en utilisant le lemme 2.1.3

$$\begin{aligned} \frac{\frac{h}{|\lambda|}}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|^{N-j}} &\leq \frac{\frac{h}{|\lambda|}}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\left|1 - \frac{h}{\lambda}\right|}} \\ &\leq \frac{|z|}{|1 - z| - 1} \\ &\leq \frac{-1}{\cos \omega} \end{aligned}$$

On voit alors que

$$|\lambda R(\lambda, V_h^r)f(x)| \leq \|f\|_0 \left[ 5 + \frac{-2}{\cos \omega} \right]$$

Par conséquent pour tout  $0 < h < 1$ ,  $V_h^r \in \text{Sect}(\omega)$ , et à fortiori la suite  $(V_h^r)_h$  est uniformément sectorielle d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  $\square$

### 2.1.5 Puissance fractionnaire de l'opérateur des rectangles

Le point suivant consiste en la construction de la puissance fractionnaire de  $V_h^r$  à partir de la formule de Balakrishnan.

D'abord rappelons dans le lemme suivant une formule pratique pour le calcul de la somme de rapport de deux Gamma.

**Lemme 2.1.6.** (Voir [20, Theorem 5] ) Soient un entier  $n \geq 1$  et deux réels  $a, b > 0$ . Alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{1}{a-b+1} \left[ \frac{\Gamma(n+1+a)}{\Gamma(n+b)} - \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(b)} \right].$$

On a la proposition fondamentale suivante :

**Proposition 2.1.7.** Soit  $0 < \alpha < 1$ , alors pour tout  $f \in C_0$ , et pour tout  $x \in ]t_{n-1}, t_n]$

$$(V_h^r)^\alpha f(x) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{x-t_{n-1}}{h} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} f(t_i) + \frac{t_n-x}{h} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-1-i+\alpha)}{\Gamma(n-i)} f(t_i) \right]$$

*Démonstration.* Pour tout  $x \in ]t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{aligned} & (V_h^r)^\alpha f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I + V_h)^{-1} \left( \frac{x-t_{n-1}}{h} \sum_{j=1}^n h f(t_j) + \frac{t_n-x}{h} \sum_{j=1}^{n-1} h f(t_j) \right) d\lambda \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{x-t_{n-1}}{h} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, V_h) \left( \sum_{j=1}^n h f(t_j) \right) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{t_n-x}{h} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, V_h) \left( \sum_{j=1}^{n-1} h f(t_j) \right) d\lambda \end{aligned}$$



## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

A partir de l'expression de la résolvante nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (V_h^r)^\alpha f(x) \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{x-t_{n-1}}{h} \times \\
& \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[ \frac{h}{-\lambda-h} \sum_{i=1}^n f(t_i) + \frac{h^2}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{n-j+1}} \sum_{i=1}^j f(t_i) \right] d\lambda \\
& -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{t_n-x}{h} \times \\
& \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[ \frac{h}{-\lambda-h} \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + \frac{h^2}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{n-j}} \sum_{i=1}^j f(t_i) \right] d\lambda \\
&= \frac{x-t_{n-1}}{h} (I_1 + I_2) + \frac{t_n-x}{h} (I_3 + I_4)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n f(t_i) \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda+h} d\lambda, \\
I_3 &= \frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda+h} d\lambda
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \sum_{j=i}^{n-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[ \frac{h}{\lambda^2} \frac{1}{\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{n-j+1}} \right] d\lambda, \\
I_4 &= -\frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-2} f(t_i) \sum_{j=i}^{n-2} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left[ \frac{h}{\lambda^2} \frac{1}{\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{n-j+1}} \right] d\lambda,
\end{aligned}$$

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

Commençons par l'évaluation de  $I_1$ .

En remarquant que

$$\frac{1}{\lambda + h} = \int_0^\infty e^{-s(\lambda+h)} ds$$

alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n f(t_i) \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left( \int_0^\infty e^{-s(\lambda+h)} ds \right) d\lambda \\ &= \frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n f(t_i) \int_0^\infty e^{-sh} \left( \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} e^{-s\lambda} d\lambda \right) ds \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} e^{-s\lambda} d\lambda = s^{-\alpha} \Gamma(\alpha)$$

et

$$\int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-sh} ds = h^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)$$

alors

$$I_1 = h^\alpha \sum_{i=1}^n f(t_i)$$

De même

$$I_3 = h^\alpha \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)$$

Passons maintenant à l'évaluation de  $I_2$ . En utilisant un changement de variable approprié,  $I_2$  s'écrit :

$$I_2 = -\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \sum_{j=i}^{n-1} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \frac{1}{(1+\lambda)^{n-j+1}} d\lambda$$

sachant que

$$\frac{1}{(1+\lambda)^{n-j+1}} = \frac{1}{\Gamma(n-j+1)} \int_0^\infty s^{n-j} e^{-s(1+\lambda)} ds$$

alors

$$I_2 = -\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(n-j+1)} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \left( \int_0^\infty s^{n-j} e^{-s(1+\lambda)} ds \right) d\lambda$$

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

de plus

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} \left( \int_0^\infty s^{n-j} e^{-s(1+\lambda)} ds \right) d\lambda &= \int_0^\infty s^{n-j} e^{-s} \left( \int_0^\infty \lambda^{1-\alpha} e^{-s\lambda} d\lambda \right) ds \\ &= \Gamma(2-\alpha) \int_0^\infty s^{n-j+\alpha-2} e^{-s} ds \\ &= \Gamma(2-\alpha) \Gamma(n-j+\alpha-1) \end{aligned}$$

d'où

$$I_2 = -\frac{(1-\alpha)h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \sum_{j=i}^{n-1} \frac{\Gamma(n-j+\alpha-1)}{\Gamma(n-j+1)}$$

Or

$$\sum_{j=i}^{n-1} \frac{\Gamma(n-j+\alpha-1)}{\Gamma(n-j+1)} = \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+2)} = \Gamma(\alpha) + \sum_{j=1}^{n-i-1} \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+2)}$$

En utilisant le lemme 2.1.6, on déduit que

$$\sum_{j=1}^{n-i-1} \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+2)} = \frac{1}{\alpha-1} \left[ \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} - \Gamma(1+\alpha) \right],$$

et notre intégrale devient

$$\begin{aligned} I_2 &= (\alpha-1) h^\alpha \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} f(t_i) - \alpha h^\alpha \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \\ &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} f(t_i) - h^\alpha \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \end{aligned}$$

De manière semblable

$$I_4 = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\Gamma(n-1-i+\alpha)}{\Gamma(n-i)} f(t_i) - h^\alpha \sum_{i=1}^{n-2} f(t_i)$$

En remarquant que

$$I_1+I_2 = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} f(t_i) \text{ et } I_3+I_4 = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n-1-i+\alpha)}{\Gamma(n-i)} f(t_i)$$

nous obtenons le résultat escompté. □

## 2.1 L'opérateur des rectangles fractionnaire

---

**Remarque 2.1.8.** Pour  $x = t_n, n = 0, \dots, N$

$$(V_h^r)^\alpha f(t_n) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} f(t_i)$$

C'est l'opérateur somme fractionnaire défini dans [38] et noté par  $\nabla^{-\alpha}$ .

### 2.1.9 Définition et propriétés de l'opérateur nabla h-somme fractionnaire

La remarque précédente justifie la définition suivante :

**Définition 2.1.10.** (L'opérateur nabla h-somme fractionnaire) Soient  $f$  une fonction dans  $C[0, 1]$ ,  $0 \leq x \leq 1$  et  $1 \leq n \leq N$ , tel que  $t_{n-1} < x \leq t_n$ . On définit l'opérateur nabla h-somme fractionnaire d'ordre  $\alpha$  par :

$$\nabla_h^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{h} \left[ (t_n - x) \nabla_h^{-\alpha} f(t_{n-1}) + (x - t_{n-1}) \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right]$$

avec

$$\nabla_h^{-\alpha} f(t_m) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma(m-i+\alpha)}{\Gamma(m-i+1)} f(ih)$$

Par construction, la fonction  $\nabla_h^{-\alpha} f(\cdot)$  est continue. La première propriété de l'opérateur linéaire  $\nabla_h^{-\alpha}$  est donnée par la proposition suivante

**Proposition 2.1.11.**  $\nabla_h^{-\alpha} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  est un opérateur linéaire continu avec  $\|\nabla_h^{-\alpha}\|_{0,0} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in C[0, 1]$  et  $t_n = nh, n \in \{0, 1, \dots, N\}$ , alors

$$\left| \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right| \leq \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} |f(ih)| \leq \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)} \quad (2.3)$$

A partir du lemme 2.1.6, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}$$

L'inégalité (2.3) peut s'écrire

$$\left| \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right| \leq \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_0 \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

de l'inégalité de Wendel (voir [56])

$$\frac{\Gamma(x + \beta)}{\Gamma(x)} \leq x^\beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad x > 0$$

nous obtenons

$$\left| \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right| \leq \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f\|_0 n^\alpha \leq \frac{\|f\|_0}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq N$$

En outre,  $\forall x \in [0, 1]$

$$\left| \nabla_h^{-\alpha} f(x) \right| = \frac{1}{h} \left| (t_n - x) \nabla_h^{-\alpha} f(t_{n-1}) + (x - t_{n-1}) \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right| \leq \frac{\|f\|_0}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

Ainsi,  $\nabla_h^{-\alpha} f$  est un opérateur borné sur  $[0, 1]$ .  $\square$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

De la même manière que pour l'opérateur des rectangles, nous définissons l'opérateur des trapèzes, pour tout  $t_{n-1} < x \leq t_n$ , par

$$V_h(f)(x) = \frac{x - t_{n-1}}{h} V_h(f)(t_n) + \frac{t_n - x}{h} V_h(f)(t_{n-1})$$

où

$$V_h(f)(t_m) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^m [f(t_{j-1}) + f(t_j)]$$

et par convention on pose

$$V_h(f)(0) = 0$$

### 2.2.1 Propriété sectorielle de l'opérateur des trapèzes

L'évaluation de la résolvante est cruciale pour la suite. A cette fin, nous énonçons la proposition suivante.

**Proposition 2.2.2.** *Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, h/2\}$ , la résolvante  $R(\lambda, V_h)$  s'écrit, pour tout  $f \in C[0, 1]$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $t_{n-1} < x \leq t_n$*

$$\begin{aligned} R(\lambda, V_h) f(x) &= \frac{x - t_{n-1}}{h} R(\lambda, V_h) f(t_n) + \frac{t_n - x}{h} R(\lambda, V_h) f(t_{n-1}) \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left( f(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} f(t_n) - \frac{t_n - x}{h} f(t_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

avec

$$R(\lambda, V_h) f(t_n) = \frac{2}{2\lambda - h} f(t_n) + \frac{4h}{(2\lambda - h)^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right)^{n-j-1} f(t_j) - \frac{h}{\lambda(2\lambda - h)} \left( \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right)^n f(0)$$

*Démonstration.* On considère les suites  $g[n] = g(t_n)$ ,  $f[n] = f(t_n)$  pour  $n = 0, \dots, N$  et  $g[n] = f[n] = 0$  pour  $n > N$

Soient  $G(z)$  et  $F(z)$  les transformées en  $Z$  des suites  $g[n]$  et  $f[n]$  respectivement. Alors

$$\begin{aligned} Z \left( \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n [g(t_{j-1}) + g(t_j)] \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n [g(t_{j-1}) + g(t_j)] z^{-n} \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{\infty} [g(t_{j-1}) + g(t_j)] \sum_{n=j}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{h}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}} \sum_{j=1}^{\infty} [g(t_{j-1}) + g(t_j)] z^{-j} \\ &= \frac{h}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}} [z^{-1}G(z) + G(z) - g(0)] \end{aligned}$$

Il en découle que la transformée en  $Z$  de l'équation

$$(\lambda I - V_h)(g)(t_n) = f(t_n), n = 0, \dots, N \quad (2.4)$$

est pour  $\lambda \neq 0$

$$\left[ \lambda - \frac{h}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right] G(z) = F(z) - \frac{h}{2\lambda} \frac{1}{1 - z^{-1}} f(0)$$

puis pour  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, h/2\}$ ,

$$G(z) = \left[ \frac{2}{2\lambda - h} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} z^{-1}} \right] F(z) - \frac{h}{\lambda(2\lambda - h)} \frac{1}{1 - \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} z^{-1}} f(0)$$

Ce qui implique

$$G(z) = \left( \frac{2}{2\lambda - h} + \frac{4h}{(2\lambda - h)^2} \frac{z^{-1}}{1 - \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} z^{-1}} \right) F(z) - \frac{hf(0)}{\lambda(2\lambda - h)} \frac{1}{1 - \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} z^{-1}}$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

En utilisant les séries géométriques et la définition de  $F(z)$  on a :

$$G(z) = \left( \frac{2}{2\lambda - h} + \frac{4h}{(2\lambda - h)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right)^k z^{-k-1} \right) \times \sum_{j=0}^{\infty} f(t_j) z^{-j} \\ - \frac{hf(0)}{\lambda(2\lambda - h)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right)^k z^{-k}$$

Il s'en suit

$$g(t_n) = \frac{2}{2\lambda - h} f(t_n) + \frac{4h}{(2\lambda - h)^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right)^{n-j-1} f(t_j) \\ - \frac{h}{\lambda(2\lambda - h)} \left( \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right)^n f(0).$$

Maintenant considérons l'équation pour tout  $x \in ]t_{n-1}, t_n]$

$$(\lambda I - V_h)(g)(x) = f(x)$$

Par définition de  $V_h$  on a

$$\lambda g(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} V_h(g)(t_n) - \frac{t_n - x}{h} V_h(g)(t_{n-1}) = f(x)$$

Au vu du système 2.4 nous obtenons

$$\lambda g(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} (\lambda g(t_n) - f(t_n)) - \frac{t_n - x}{h} (\lambda g(t_{n-1}) - f(t_{n-1})) = f(x)$$

$$g(x) = \frac{x - t_{n-1}}{h} g(t_n) + \frac{t_n - x}{h} g(t_{n-1}) \\ + \frac{1}{\lambda} \left( f(x) - \frac{x - t_{n-1}}{h} f(t_n) - \frac{t_n - x}{h} f(t_{n-1}) \right)$$

Ce qui prouve la proposition. □

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

Nous disposons maintenant de la résolvante associée à l'opérateur  $V_h$ . Nous vérifions sa propriété sectorielle par le biais de la proposition suivante :

**Proposition 2.2.3.** *L'opérateur  $V_h$  est sectoriel d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $x \in [0, 1]$

$$|\lambda R(\lambda, V_h) f(x)| \leq 2 \|f\|_0 \left( \frac{2|\lambda|}{|2\lambda - h|} + \frac{4h|\lambda|}{|2\lambda - h|^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right|^{n-j-1} + \frac{h}{|2\lambda - h|} \left| \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right|^n + \frac{3}{2} \right)$$

Prenons maintenant  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{S}_\omega$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ .

Il vient alors

$$\frac{2|\lambda|}{|2\lambda - h|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{h}{2\lambda} \right|} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{|\lambda|} \cos(\arg \lambda) + \frac{h^2}{4|\lambda|^2}}} < 1$$

Remarquons aussi que dans ce cas

$$\left| \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right| < 1$$

De ce fait on a,

$$\frac{h}{|2\lambda - h|} \left| \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right|^n \leq \frac{\frac{h}{2}}{\left| \lambda - \frac{h}{2} \right|}$$

Comme  $\left| \lambda - \frac{h}{2} \right| > \frac{h}{2}$  alors

$$\frac{h}{|2\lambda - h|} \left| \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right|^n < 1$$

Il nous reste donc à majorer le terme  $A(h, \lambda) = \frac{4h|\lambda|}{|2\lambda - h|^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right|^{n-j-1}$ .

Notons que

$$A(h, \lambda) \leq \frac{4h|\lambda|}{|2\lambda - h|^2} \frac{1}{1 - \left| \frac{2\lambda + h}{2\lambda - h} \right|}$$



## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

Nous distinguons deux cas possibles

Si  $\operatorname{Re} \lambda < -\frac{h}{2}$  alors  $\operatorname{Re}(2\lambda + h) < 0$  et par suite  $z = \frac{2h}{2\lambda + h}$  appartient au demi-plan formé par les complexes de partie réelle strictement négative.

Nous avons

$$\begin{aligned} A(h, \lambda) &\leq \frac{2|\lambda|}{|2\lambda - h|} \frac{2h}{|2\lambda + h|} \frac{1}{\left|1 - \frac{2h}{2\lambda + h}\right| - 1} \\ &\leq \frac{|z|}{|1 - z| - 1} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.3 nous avons l'estimation

$$A(h, \lambda) \leq -\frac{1}{\cos \omega}$$

Maintenant si  $-\frac{h}{2} \leq \operatorname{Re} \lambda < 0$  alors

$$\begin{aligned} A(h, \lambda) &\leq \frac{2h}{|2\lambda - h|} \frac{2|\lambda|}{|2\lambda - h| - |2\lambda + h|} \\ &\leq 2 \frac{1}{\left|1 - \frac{h}{2\lambda}\right| - \left|1 + \frac{h}{2\lambda}\right|} \end{aligned}$$

La fonction  $A(h, \lambda)$  est majorée par

$$A(h, \lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{h}{|\lambda|} \cos \omega + \frac{h^2}{4|\lambda|^2}} - \sqrt{1 + \frac{h}{|\lambda|} \cos \omega + \frac{h^2}{4|\lambda|^2}}}$$

On pose, pour tout  $s \in [-\cos \omega, +\infty[$

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2s \cos \omega + s^2} - \sqrt{1 + 2s \cos \omega + s^2}}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{\phi}(x) = -\frac{1}{2 \cos \omega}$$

et

$$\tilde{\phi}(-\cos \omega) = -\frac{1}{4 \cos \omega} \left( \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \omega} + 3} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \omega} - 1} \right)$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}'(s) \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{1-2s\cos\omega+s^2}-\sqrt{1+2s\cos\omega+s^2}\right)^2\sqrt{1-2s\cos\omega+s^2}\sqrt{1+2s\cos\omega+s^2}} \\ & \times \left((\cos\omega-s)\sqrt{1+2s\cos\omega+s^2}+(\cos\omega+s)\sqrt{1-2s\cos\omega+s^2}\right) \end{aligned}$$

Or en comparant les carrés

$$(\cos\omega-s)^2(1+2s\cos\omega+s^2) > (\cos\omega+s)^2(1-2s\cos\omega+s^2)$$

et en développant on obtient

$$4s\cos\omega(\cos^2\omega-1) > 0.$$

Ce qui est vraie dans notre situation.

Donc  $\tilde{\phi}'(s) > 0, \forall s \in ]-\cos\omega, +\infty[$ .

Il en résulte alors l'estimation

$$\text{Si } -\frac{h}{2} \leq \operatorname{Re} \lambda < 0, \quad A(\lambda, h) \leq -\frac{1}{\cos\omega}$$

En conclusion, pour tout  $x \in [0, 1]$

$$|\lambda R(\lambda, V_h) f(x)| \leq \|f\|_0 \left(7 - \frac{2}{\cos\omega}\right)$$

D'où la propriété sectorielle de l'opérateur  $V_h$ . □

### 2.2.4 Puissance fractionnaire de l'opérateur des trapèzes

Nous construisons la puissance fractionnaire de l'opérateur des trapèzes. C'est un résultat vraisemblablement nouveau formulé dans le théorème ci-après.

**Théorème 2.2.5.** *Pour tout  $f \in C_0$ ,  $t_{n-1} < x \leq t_n$*

$$V_h^\alpha f(x) = \frac{x - t_{n-1}}{h} V_h^\alpha f(t_n) + \frac{t_n - x}{h} V_h^\alpha f(t_{n-1})$$

où

$$V_h^\alpha f(t_n) = \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+i, 1-\alpha \\ 1 \end{matrix}; 2\right) [f(t_{i-1}) + f(t_i)]$$

où  ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \xi\right)$  désigne la fonction hypergéométrique de Gauss (voir B.4)

*Démonstration.* A partir de la formule de Balakrishnan, on a

$$V_h^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I + V_h)^{-1} V_h f(x) d\lambda.$$

La linéarité de l'opérateur intégration permet la décomposition suivante

$$V_h^\alpha f(x) = \frac{x - t_{n-1}}{h} I_n + \frac{t_n - x}{h} I_{n-1}$$

Avec

$$I_n = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, V_h) V_h f(t_n) d\lambda$$

et

$$I_{n-1} = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, V_h) V_h f(t_{n-1}) d\lambda$$

Il apparait clairement que les deux intégrales  $I_n$  et  $I_{n-1}$  se calculent de manières similaires. Il suffit donc d'évaluer  $I_n$ . A partir de la définition de l'opérateur  $R(\lambda, V_h)$ ,

$$I_n = (J_1 + J_2)$$

où

$$J_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left( \frac{h}{2\lambda + h} \sum_{j=1}^n [f(t_{j-1}) + f(t_j)] \right) d\lambda$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

et

$J_2$

$$= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left( \frac{2h^2}{(2\lambda+h)^2} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{2\lambda-h}{2\lambda+h} \right)^{n-j-1} \sum_{i=1}^j [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \right) d\lambda$$

Or

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{2\lambda-h}{2\lambda+h} \right)^{n-j-1} \sum_{i=1}^j [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \sum_{j=i}^{n-1} \left( \frac{2\lambda-h}{2\lambda+h} \right)^{n-j-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \left( \frac{2\lambda-h}{2\lambda+h} \right)^{n-i}}{1 - \frac{2\lambda-h}{2\lambda+h}} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \left( \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \frac{h}{2\lambda+h} d\lambda \right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \left( \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \frac{h}{2\lambda+h} \left( \frac{2\lambda-h}{2\lambda+h} \right)^{n-i} d\lambda \right) \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$I_n = \sum_{i=1}^n [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \frac{h}{2\lambda+h} \left( \frac{2\lambda-h}{2\lambda+h} \right)^{n-i} d\lambda \right)$$

Tout revient donc à exprimer l'intégrale :

$$J = \frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (2\lambda-h)^{n-i} (2\lambda+h)^{-n+i-1} d\lambda$$

En effectuant le changement de variable  $t = \frac{2\lambda}{h}$ , l'intégrale  $J$  se transforme sous la forme

$$J = \left( \frac{h}{2} \right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (t-1)^{n-i} (t+1)^{-n+i-1} dt$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

Comme

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} (t-1)^{n-i} (t+1)^{-n+i-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \left(1 - \frac{2}{t+1}\right)^{n-i} dt$$

La formule du binôme implique

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (t-1)^{n-i} (t+1)^{-n+i-1} dt &= \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} \left(-\frac{2}{t+1}\right)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-2)^k \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{t+1}\right)^{k+1} dt \end{aligned}$$

Or (voir B.2, formules B.2 et B.3)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{t+1}\right)^{k+1} dt &= B(\alpha, k - \alpha + 1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(k - \alpha + 1)}{k!} \end{aligned}$$

Alors

$$J = \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} \frac{\Gamma(k - \alpha + 1)}{k!} (-2)^k$$

Sachant que d'après [2, formule 3.1.3]

$$(-1)^k \binom{n-i}{k} = \binom{k-n+i-1}{k}.$$

Alors

$$\binom{n-i}{k} \frac{\Gamma(k - \alpha + 1)}{\Gamma(1-\alpha)k!} (-2)^k = \frac{\Gamma(-n+i+k)\Gamma(k - \alpha + 1)}{\Gamma(-n+i)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)} \frac{(2)^k}{k!}$$

Ce qui met en évidence la fonction hypergéométrique (voir Annexe B.4, formule B.4)

$$\sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-n+i)_k (1-\alpha)_k (2)^k}{(1)_k k!} = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+i, 1-\alpha \\ 1 \end{matrix} ; 2 \right)$$

On peut donc formuler  $I_n$  par

$$I_n = \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n+i, 1-\alpha \\ 1 \end{matrix} ; 2 \right) [f(t_{i-1}) + f(t_i)]$$

Et enfin le théorème est démontré.  $\square$

### 2.2.6 Puissance fractionnaire de l'opérateur des trapèzes et polynômes de Jacobi

En utilisant la formule B.5 la puissance fractionnaire des trapèzes peut s'écrire en fonction des polynômes de Jacobi comme suit

$$V_h^\alpha f(t_n) = \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha \sum_{i=1}^n P_{n-i}^{(0, -n+i-\alpha)}(-3) [f(t_{i-1}) + f(t_i)]$$

On note  $\omega_m^\alpha = P_m^{(0, -m-\alpha)}(-3)$  alors la théorie des puissances fractionnaires permet d'énoncer le résultat particulier suivant :

**Proposition 2.2.7.** *La famille  $(P_\alpha)_\alpha$  définit par :*

$$P_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (1+t)\omega_n^\alpha t^n$$

satisfait le relation de semi-groupe.

*Démonstration.*

$$V_h^\alpha f(t_n) = \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha \left\{ \omega_{n-1}^\alpha f(t_0) + \omega_0^\alpha f(t_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_{n-i-1}^\alpha + \omega_{n-i}^\alpha) f(t_i) \right\}, n = 1, \dots, N$$

En posant  $M_\alpha$  la matrice triangulaire inférieure donnée par

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega_0^\alpha & \omega_0^\alpha & \ddots & & & \\ \omega_1^\alpha & \omega_1^\alpha + \omega_0^\alpha & \omega_0^\alpha & \ddots & & \vdots \\ \omega_2^\alpha & \omega_2^\alpha + \omega_1^\alpha & \omega_1^\alpha + \omega_0^\alpha & \omega_0^\alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \omega_{N-1}^\alpha & \omega_{N-1}^\alpha + \omega_{N-2}^\alpha & \dots & \omega_2^\alpha + \omega_1^\alpha & \omega_1^\alpha + \omega_0^\alpha & \omega_0^\alpha \end{pmatrix}$$

et les vecteurs  $y$  et  $V_h^\alpha y$  tels que

$$y = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{pmatrix}, V_h^\alpha y = \begin{pmatrix} V_h^\alpha f(t_0) \\ V_h^\alpha f(t_1) \\ V_h^\alpha f(t_2) \\ V_h^\alpha f(t_3) \\ \vdots \\ V_h^\alpha f(t_N) \end{pmatrix}$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

Le système précédent s'écrit sous la forme matricielle

$$V_h^\alpha y = \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha M_\alpha y$$

En prenant  $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ , la loi des exposants ( voir Annexe D proposition D.3.1) permet d'écrire

$$V_h^{\alpha_1} (V_h^{\alpha_2} y) = \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} M_{\alpha_1} (M_{\alpha_2} y) = \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} (M_{\alpha_1+\alpha_2}) y$$

donc

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} & \ddots & & & \vdots \\ \omega_1^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_1^{\alpha_1+\alpha_2} + \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} & \ddots & & \vdots \\ \omega_2^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_2^{\alpha_1+\alpha_2} + \omega_1^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_1^{\alpha_1+\alpha_2} + \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \omega_{N-1}^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_{N-1}^{\alpha_1+\alpha_2} + \omega_{N-2}^{\alpha_1+\alpha_2} & \dots & \omega_2^{\alpha_1+\alpha_2} + \omega_1^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_1^{\alpha_1+\alpha_2} + \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_1+\alpha_2} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega_0^{\alpha_1} & \omega_0^{\alpha_1} & \ddots & & & \vdots \\ \omega_1^{\alpha_1} & \omega_1^{\alpha_1} + \omega_0^{\alpha_1} & \omega_0^{\alpha_1} & \ddots & & \vdots \\ \omega_2^{\alpha_1} & \omega_2^{\alpha_1} + \omega_1^{\alpha_1} & \omega_1^{\alpha_1} + \omega_0^{\alpha_1} & \omega_0^{\alpha_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \omega_{N-1}^{\alpha_1} & \omega_{N-1}^{\alpha_1} + \omega_{N-2}^{\alpha_1} & \dots & \omega_2^{\alpha_1} + \omega_1^{\alpha_1} & \omega_1^{\alpha_1} + \omega_0^{\alpha_1} & \omega_0^{\alpha_1} \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega_0^{\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_2} & \ddots & & & \vdots \\ \omega_1^{\alpha_2} & \omega_1^{\alpha_2} + \omega_0^{\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_2} & \ddots & & \vdots \\ \omega_2^{\alpha_2} & \omega_2^{\alpha_2} + \omega_1^{\alpha_2} & \omega_1^{\alpha_2} + \omega_0^{\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \omega_{N-1}^{\alpha_2} & \omega_{N-1}^{\alpha_2} + \omega_{N-2}^{\alpha_2} & \dots & \omega_2^{\alpha_2} + \omega_1^{\alpha_2} & \omega_1^{\alpha_2} + \omega_0^{\alpha_2} & \omega_0^{\alpha_2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Par identifications on obtient pour  $n = 0, \dots, N-1$

$$\omega_n^{\alpha_1+\alpha_2} = \sum_{p+q=n-1} \omega_p^{\alpha_1} \omega_q^{\alpha_2} + \sum_{p+q=n} \omega_p^{\alpha_1} \omega_q^{\alpha_2}$$

On définit la fonction  $W(t, \alpha)$  par :

$$W(t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \omega_n^\alpha$$

## 2.2 L'opérateur des trapèzes fractionnaire

---

Alors

$$W(t, \alpha_1)W(t, \alpha_2) = \sum_{p,q=0}^{\infty} t^{p+q} \omega_p^{\alpha_1} \omega_q^{\alpha_2}$$

On peut alors vérifier facilement que

$$(1+t)W(t, \alpha_1)W(t, \alpha_2) = W(t, \alpha_1 + \alpha_2) \quad (2.5)$$

Sachant que par définition

$$P_\alpha = (1+t)W(t, \alpha)$$

alors à partir de la formule 2.5, il est aisé de voir que la fonction  $P_\alpha$  vérifie la relation de semi-groupe :

$$P_{\alpha_1+\alpha_2} = P_{\alpha_1}P_{\alpha_2} \quad (2.6)$$

□

**Remarque 2.2.8.** *Ce résultat particulier se retrouve à partir du concept standard des fonctions génératrices. En effet en prenant  $x = 0$  et  $y = 2$  dans la formule (28) du livre de Rainville portant sur la théorie des fonctions spéciales [48, formule page 215] nous obtenons*

$$(1-t)^{c-1}(1+t)^{-c} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, c \\ 1 \end{matrix} ; 2 \right) t^n$$

en remplaçant  $c$  par  $1 - \alpha$  on a

$$(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^\alpha t^n$$

et à fortiori

$$\left( \frac{1+t}{1-t} \right)^\alpha = (1+t) \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^\alpha t^n$$

La relation de semi-groupe 2.6 se déduit alors des propriétés de la fonction puissance  $\left( \frac{1+t}{1-t} \right)^\alpha$ .



# Chapitre 3

## Convergences de l'opérateur h-somme vers l'opérateur intégrale de Riemann-Liouville

On se propose maintenant de démontrer la convergence dans les espaces des fonctions continues de l'opérateur  $\nabla_h^{-\alpha}$  vers l'opérateur intégrale de Riemann-Liouville puis nous élargissons ce résultat aux espaces des fonctions continues avec poids. Pour cela nous avons besoin des lemmes techniques suivants.

### 3.1 Lemmes techniques

**Lemme 3.1.1.** *Il existe une fonction  $\Phi_\alpha$ , telle que*

$$\forall m \geq 1 \quad \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)} = m^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \Phi_\alpha(m),$$

avec  $|\Phi_\alpha(m)| \leq \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{2} m^{\alpha-2}$ .

*Démonstration.* De la définition de la fonction Bêta ( voir B.2) nous avons

$$\frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 t^{m+\alpha-1} (1-t)^{-\alpha} dt \quad (3.1)$$

On pose  $t = e^{-u}$  alors l'égalité(3.1) devient

$$\frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-mu} (e^u - 1)^{-\alpha} du = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{-\alpha} \left(\frac{u}{e^u - 1}\right)^\alpha du$$

En utilisant la fonction génératrice des nombres de Bernoulli

$$G(u) = \frac{u}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{u^k}{k!} = 1 + \varphi(u) > 0$$

### 3.1 Lemmes techniques

---

où  $\varphi : [0, +\infty[ \rightarrow ]-1, 0]$  est une fonction continue, nous avons

$$\frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{-\alpha} (1 + \varphi(u))^\alpha du$$

Maintenant, la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à la fonction  $(1 + \varphi(u))^\alpha$  donne

$$(1 + \varphi(u))^\alpha = 1 + \alpha\varphi(u) \int_0^1 (1 + \xi\varphi(u))^{\alpha-1} d\xi$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)} &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{-\alpha} du \\ &+ \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{-\alpha} \varphi(u) \int_0^1 (1 + \xi\varphi(u))^{\alpha-1} d\xi du \end{aligned}$$

et alors

$$\frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m + 1)} = m^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \Phi_\alpha(m) \quad (3.2)$$

avec

$$\Phi_\alpha(m) = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{-\alpha} \varphi(u) \int_0^1 (1 + \xi\varphi(u))^{\alpha-1} d\xi du$$

De l'identité  $1 + \xi\varphi(u) = 1 - \xi + \xi(1 + \varphi(u))$  et le fait que  $1 + \varphi(u) > 0$  pour tout  $u \geq 0$ , nous obtenons

$$1 + \xi\varphi(u) \geq 1 - \xi \quad \text{et} \quad (1 + \xi\varphi(u))^{\alpha-1} \leq (1 - \xi)^{\alpha-1}$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (1 + \xi\varphi(u))^{\alpha-1} d\xi \leq \int_0^1 (1 - \xi)^{\alpha-1} d\xi \leq \frac{1}{\alpha}$$

Ainsi

$$\alpha \left| \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{-\alpha} \varphi(u) \int_0^1 (1 + \xi\varphi(u))^{\alpha-1} d\xi du \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{-\alpha} |\varphi(u)| du \quad (3.3)$$

La fonction  $\frac{\varphi(u)}{u}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty]$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u)}{u} = -\frac{1}{2}$  et

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = 0.$$

Alors,  $\left| \frac{\varphi(u)}{u} \right| \leq \frac{1}{2}$ , et l'inégalité (3.3) devient

$$|\Phi_\alpha(m)| \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-mu} u^{1-\alpha} du$$

### 3.1 Lemmes techniques

---

et

$$|\Phi_\alpha(m)| \leq \frac{\Gamma(2-\alpha)m^{\alpha-2}}{2} \quad (3.4)$$

□

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $0 < \alpha < 1$ , nous avons*

1. *Pour tout  $m \geq 1$*

$$m^{\alpha-1} < \frac{1}{\alpha} ((m)^\alpha - (m-1)^\alpha) < (m-1)^{\alpha-1}$$

2. *La série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} (k^\alpha - (k-1)^\alpha) - k^{\alpha-1}$  est convergente.*

*Démonstration.* 1. Soit  $g(t) = t^{\alpha-1}$  définie sur  $]0, +\infty[$ ,  $g$  est une fonction positive, convexe, décroissante and localement intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Alors

$$m^{\alpha-1} < t^{\alpha-1} < (m-1)^{\alpha-1}, \text{ quand } m-1 < t < m$$

ce qui conduit, après intégration de  $m-1$  à  $m$ , à l'inégalité souhaitée.

2. Soit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha} (k^\alpha - (k-1)^\alpha) - k^{\alpha-1}$$

Compte tenu de 1

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{\alpha} ((n+1)^\alpha - (n)^\alpha) - (n+1)^{\alpha-1} > 0$$

La suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée puisque

$$s_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\alpha} (k^\alpha - (k-1)^\alpha) - k^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} - 1 = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (\tau^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}) d\tau + \frac{1}{\alpha} - 1$$

De plus,  $k-1 \leq \tau \leq k$  implique  $k^{\alpha-1} \leq \tau^{\alpha-1} \leq (k-1)^{\alpha-1}$   
et  $0 \leq (\tau^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}) \leq (k-1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}$

ainsi

$$s_n \leq \sum_{k=2}^n (k-1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1}{\alpha} - n^{\alpha-1} < \frac{1}{\alpha}$$

La suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc convergente.

□

## 3.2 Convergence uniforme

Pour prouver l'uniforme convergence de  $\nabla_h^{-\alpha} f(\cdot)$  vers  $I^\alpha f(\cdot)$  nous sommes amenés à introduire des étapes intermédiaires formulées dans les propositions suivantes

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $f \in C([0, 1])$  et*

$$S_h^\alpha f(t_n) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{i=0}^{n-1} [(n-i)^\alpha - (n-i-1)^\alpha] f(t_i)$$

Alors, il existe  $C_1 > 0$ , tel que

$$\left| S_h^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right| \leq C_1 h^\alpha \quad \text{pour tout } t_n$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} S_h^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} (n^\alpha - (n-1)^\alpha) f(0) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{\alpha} ((n-i)^\alpha - (n-i-1)^\alpha) - \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(n-i+1)} \right] f(ih) - h^\alpha f(t_n) \end{aligned}$$

De l'égalité(3.2) nous déduisons

$$\begin{aligned} S_h^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) &= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} (n^\alpha - (n-1)^\alpha) f(0) - h^\alpha f(t_n) + \\ &\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{\alpha} ((n-i)^\alpha - (n-i-1)^\alpha) - (n-i)^{\alpha-1} \right] f(ih) + \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} [\Phi_\alpha(n-i)] f(ih) \end{aligned}$$

Notons par

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{\alpha} ((n-i)^\alpha - (n-i-1)^\alpha) - (n-i)^{\alpha-1} \right] f(ih)$$

et

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n-1} [\Phi_\alpha(n-i)] f(ih)$$

A partir du lemme 3.1.2 nous pouvons affirmer que

$$|S_1| \leq \|f\|_0 \sigma_0$$

### 3.2 Convergence uniforme

---

où  $\sigma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha} (k^\alpha - (k-1)^\alpha) - k^{\alpha-1} < +\infty$ .

Pour  $S_2$  l'inégalité (3.4) donne

$$|S_2| \leq \frac{\|f\|_0 \Gamma(2-\alpha)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{\alpha-2} \leq \frac{\|f\|_0 \Gamma(2-\alpha)}{2} \sigma_1$$

avec  $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i^{\alpha-2} < +\infty$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} |S_h^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n)| &\leq \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (n^\alpha - (n-1)^\alpha) \|f\|_0 + h^\alpha \|f\|_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_0 \sigma_0 \\ &\quad + \frac{h^\alpha}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \|f\|_0 \Gamma(2-\alpha) \sigma_1 \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} |S_h^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n)| &\leq \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sigma_0 + \frac{(1-\alpha)}{2\Gamma(\alpha)} \sigma_1 \right) \|f\|_0 h^\alpha \\ &\leq C_1 h^\alpha \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $f \in C^2[0, 1]$ , alors il existe  $C_2 > 0$  tel que*

$$|I^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n)| \leq C_2 h \quad \text{pour tout } t_n$$

*Démonstration.* Une intégration par parties donne

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha f(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha f'(t) dt$$

Soit  $R_h^\alpha$  la somme de Riemann associée

$$R_h^\alpha f(t_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t_n^\alpha f(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} h \sum_{i=1}^n (t_n - t_i)^\alpha f'(t_i)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t_n) - R_h^\alpha f(t_n) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ \int_0^{t_n} (t_n - t)^\alpha f'(t) dt - h \sum_{i=1}^n (t_n - t_i)^\alpha f'(t_i) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [(t_n - t)^\alpha f'(t) - (t_n - t_i)^\alpha f'(t_i)] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} ((t_n - t)^\alpha - (t_n - t_i)^\alpha) f'(t) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n - t_i)^\alpha (f'(t) - f'(t_i)) dt \end{aligned}$$

### 3.2 Convergence uniforme

---

alors

$$\begin{aligned}
& |I^\alpha f(t_n) - R_h^\alpha(t_n)| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} ((t_n - t)^\alpha - (t_n - t_i)^\alpha) |f'(t)| dt \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n - t_i)^\alpha (f'(t) - f'(t_i)) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f'\|_0 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} ((t_n - t)^\alpha - (t_n - t_i)^\alpha) dt \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{i=1}^n (t_n - t_i)^\alpha \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) - f'(t_i) dt \right|
\end{aligned}$$

La formule de Taylor avec reste intégrale nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
& |I^\alpha f(t_n) - R_h^\alpha(t_n)| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f'\|_0 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} ((t_n - t_{i-1})^\alpha - (t_n - t_i)^\alpha) dt \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{i=1}^n (t_n - t_i)^\alpha \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \int_t^{t_i} f''(\theta) d\theta \right) dt \right|
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini nous avons

$$\begin{aligned}
& |I^\alpha f(t_n) - R_h^\alpha(t_n)| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \|f'\|_0 h (t_n - t_0)^\alpha + \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f''(\theta) \left( \int_{t_{i-1}}^\theta dt \right) d\theta \right| \right\} \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left\{ \|f'\|_0 h + h \sum_{i=1}^n |f''(\theta_i)| (\theta_i - t_{i-1}) \right\}, \text{ avec } \theta_i \in ]t_{i-1}, t_i[ \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (\|f'\|_0 + \|f''\|_0) h
\end{aligned}$$

Finalement

$$|I^\alpha f(t_n) - R_h^\alpha f(t_n)| \leq C_3 h \quad (3.5)$$

avec,  $C_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} (\|f'\|_0 + \|f''\|_0)$

### 3.2 Convergence uniforme

---

D'autre part

$$R_h^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{i=1}^n (t_n - t_i)^\alpha [hf'(t_i) - f(t_i) + f(t_{i-1})]$$

La formule de Taylor-Lagrange donne

$$R_h^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n) = \frac{h^2}{2\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{i=1}^n (t_n - t_i)^\alpha f''(\theta_i), \quad t_{i-1} < \theta_i < t_i$$

De plus, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de  $\theta \in [\theta_1, \theta_n]$  tel que

$$R_h^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n) = \frac{h^2}{2\Gamma(\alpha + 1)} f''(\theta) \sum_{i=1}^n (t_n - t_i)^\alpha$$

que l'on peut écrire

$$R_h^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n) = \frac{h^{2+\alpha}}{2\Gamma(\alpha + 1)} f''(\theta) \sum_{i=1}^n (n - i)^\alpha = \frac{h^{2+\alpha}}{2\Gamma(\alpha + 1)} f''(\theta) \sum_{i=0}^{n-1} i^\alpha$$

Nous avons alors l'inégalité

$$|R_h^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n)| \leq \frac{h^{2+\alpha}}{2\Gamma(\alpha + 1)} |f''(\theta)| n^{\alpha+1} \leq \frac{h}{2\Gamma(\alpha + 1)} |f''(\theta)|$$

alors

$$|R_h^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n)| \leq \frac{\|f''\|_0}{2\Gamma(\alpha + 1)} h$$

de

$$|I^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n)| \leq |I^\alpha f(t_n) - R_h^\alpha f(t_n)| + |R_h^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n)|$$

on a le résultat souhaité par l'inégalité (3.5) et  $C_2 = C_3 + \frac{\|f''\|_0}{2\Gamma(\alpha + 1)}$ .  $\square$

### 3.2 Convergence uniforme

---

On arrive enfin à un résultat essentiel exprimé dans le corollaire suivant

**Corollaire 3.2.3.** *Sous l'hypothèse que  $f \in C^2[0, 1]$ , il existe  $C > 0$  tel que*

$$\left| I^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right| \leq Ch^\alpha \quad \text{pour tout } t_n$$

*Démonstration.* Comme

$$\left| I^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right| \leq \left| I^\alpha f(t_n) - S_h^\alpha f(t_n) \right| + \left| S_h^\alpha f(t_n) - \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right|$$

La conclusion est déduite des Propositions 3.2.1 et 3.2.2.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer et prouver le résultat de convergence suivant.

**Corollaire 3.2.4.** *Pour toute fonction  $f \in C^2[0, 1]$  on a  $\left\| \nabla_h^{-\alpha} f - I^\alpha f \right\|_0$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.*

*Démonstration.* Soit  $t_{n-1} < x \leq t_n$

$$\begin{aligned} & \left| \nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \left[ (t_n - x) \nabla_h^{-\alpha} f(t_{n-1}) + (x - t_{n-1}) \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) \right] - I^\alpha f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| (t_n - x) \nabla_h^{-\alpha} f(t_{n-1}) - (t_n - x) I^\alpha f(t_{n-1}) \right| \\ &+ \frac{1}{h} \left| (x - t_{n-1}) \nabla_h^{-\alpha} f(t_n) - (x - t_{n-1}) I^\alpha f(t_n) \right| \\ &+ \left| \frac{1}{h} \left[ (t_n - x) I^\alpha f(t_{n-1}) + (x - t_{n-1}) I^\alpha f(t_n) \right] - I^\alpha f(x) \right| \end{aligned}$$

Commençons par estimer l'erreur d'interpolation de  $I^\alpha f(x)$  exprimée par le troisième terme de l'inégalité ci-dessus.



### 3.2 Convergence uniforme

---

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} [(t_n - x)I^\alpha f(t_{n-1}) + (x - t_{n-1})I^\alpha f(t_n)] - I^\alpha f(x) = \\
& = \frac{(t_n - x)t_{n-1}^\alpha}{h} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_{n-1}s) ds + \frac{(x - t_{n-1})t_n^\alpha}{h} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_n s) ds \\
& - x^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(xs) ds \\
& = x^\alpha \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{1}{h}(t_n - x)f(t_{n-1}s) + \frac{1}{h}(x - t_{n-1})f(t_n s) - f(xs) \right] ds \\
& + \frac{1}{h}(t_n - x) (t_{n-1}^\alpha - x^\alpha) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_{n-1}s) ds \\
& + \frac{1}{h}(x - t_{n-1}) (t_n^\alpha - x^\alpha) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_n s) ds
\end{aligned}$$

A partir de l'erreur d'interpolation de la fonction  $f$ , il existe  $\xi$  dans l'intervalle  $]t_n, t_{n-1}[$  tel que

$$\frac{1}{h}(t_n - x)f(t_{n-1}s) + \frac{1}{h}(x - t_{n-1})f(t_n s) - f(xs) = \frac{f''(\xi s)}{2} s^2 (t_n - x)(x - t_{n-1})$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{1}{h}(t_n - x)f(t_{n-1}s) + \frac{1}{h}(x - t_{n-1})f(t_n s) - f(xs) \right] ds \right| \\
& \leq \frac{\|f''\|_0}{4\Gamma(\alpha + 3)} h^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{h}(t_n - x) (t_{n-1}^\alpha - x^\alpha) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_{n-1}s) ds \right. \\
& \left. + \frac{1}{h}(x - t_{n-1}) (t_n^\alpha - x^\alpha) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_n s) ds \right| \\
& \leq \frac{\|f\|_0}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{t_n^\alpha - t_{n-1}^\alpha}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

### 3.2 Convergence uniforme

---

Puis en utilisant le lemme 3.1.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h}(t_n - x)(t_{n-1}^\alpha - x^\alpha) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_{n-1}s) ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{h}(x - t_{n-1})(t_n^\alpha - x^\alpha) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t_n s) ds \right| \\ & \leq \frac{\|f\|_0}{\Gamma(\alpha)} (n-1)^{\alpha-1} h^\alpha \end{aligned}$$

Par suite, pour tout  $x \in ]t_{n-1}, t_n[$  avec  $n > 1$  l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} [(t_n - x)I^\alpha f(t_{n-1}) + (t_{n-1} - x)I^\alpha f(t_n)] - I^\alpha f(x) \right| \\ & \leq \left( \frac{\|f''\|_0}{4\Gamma(\alpha + 3)} + \frac{\|f\|_0}{\Gamma(\alpha)} \right) h^\alpha \end{aligned}$$

Ainsi, et après avoir utilisé le corollaire 3.2.3, pour tout  $x \geq h$

$$\left| \nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x) \right| \leq \left( 2C + \frac{\|f''\|_0}{4\Gamma(\alpha + 3)} + \frac{\|f\|_0}{\Gamma(\alpha)} \right) h^\alpha$$

Maintenant, pour  $x$  entre 0 et  $h$

$$\begin{aligned} \nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x) &= \frac{x}{h} \nabla_h^{-\alpha} f(h) - I^\alpha f(x) \\ &= xh^{\alpha-1} f(h) - \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x) \right| &\leq xh^{\alpha-1} |f(h)| + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(t)| dt \\ &\leq h^\alpha \|f\|_0 + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f\|_0 \\ &\leq \left( 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \|f\|_0 h^\alpha \end{aligned}$$

Ce qui prouve le corollaire. □

### 3.3 Convergence dans les espaces des fonctions continues avec poids

---

Notre premier résultat principal est

**Théorème 3.2.5.** (*Convergence uniforme de  $\nabla_h^{-\alpha} f$  vers  $I^\alpha f$* )

*Pour tout  $f \in C[0, 1]$ , on a  $\|\nabla_h^{-\alpha} f - I^\alpha f\|_0$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.*

*Démonstration.* Pour tout  $\varepsilon > 0$ , le théorème d'approximation de Weierstrass, assure l'existence d'un polynôme  $p$  tel que,  $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . Comme le corollaire précédent s'applique à  $p$ , la bornitude des opérateurs  $\nabla_h^{-\alpha}$  et  $I^\alpha$  implique

$$\begin{aligned} \left| \nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x) \right| &\leq |I^\alpha(f - p)(x)| + \left| \nabla_h^{-\alpha} p(x) - I^\alpha p(x) \right| + \left| \nabla_h^{-\alpha}(f - p)(x) \right| \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha + 1)} + Ch^\alpha \end{aligned}$$

En prenant  $\varepsilon = h^\alpha$ , on a

$$\left| \nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x) \right| \leq Kh^\alpha$$

d'où la conclusion. □

### 3.3 Convergence dans les espaces des fonctions continues avec poids

Jusqu'à maintenant, nous avons travaillé dans les espaces des fonctions continues. Cependant les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville peuvent être étendus aux espaces plus larges des fonctions continues avec poids (voir par exemple [37]).

Il faut dire que la propriété sectorielle de l'opérateur  $V$  (chapitre 1 définition 1.1) dans les espaces  $C_\beta$  n'a pas été obtenue par l'inégalité de Hölder et qu'une version plus fine de celle-ci semble nécessaire pour pouvoir contrôler la norme de la résolvante.

Pourtant nous avons pu étendre la convergence uniforme obtenue précédemment vers ces derniers espaces, c'est l'objet de cette section.

### 3.3.1 Propriétés de l'intégrale fractionnaire dans les espaces $C_\beta$

On peut aussitôt énumérer certaines propriétés utiles de l'opérateur  $I^\alpha$ .

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $\beta \in [0, 1[$ ,  $\alpha - \beta > 0$  et  $f \in C_\beta$  alors*

1.  $I^\alpha f$  est continu sur  $[0, 1]$ .

2.  $\|I^\alpha\|_{\beta,0} \leq \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}$ .

*Démonstration.* 1. Soient  $0 \leq x < y \leq 1$  et  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & I^\alpha f(y) - I^\alpha f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (y^\alpha f(yt) - x^\alpha f(xt)) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \left[ (y^{\alpha-\beta} - x^{\alpha-\beta}) y^\beta f(yt) + x^{\alpha-\beta} (y^\beta f(yt) - x^\beta f(xt)) \right] dt \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |I^\alpha f(y) - I^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} \left| (y^{\alpha-\beta} - x^{\alpha-\beta}) y^\beta t^\beta f(yt) \right| dt \\ &\quad + \frac{x^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} \left| (y^\beta t^\beta f(yt) - x^\beta t^\beta f(xt)) \right| dt \end{aligned}$$

Comme  $f \in C_\beta [0, 1]$ , il existe  $\delta_1 > 0$ , tel que

$$|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |tx - ty| < \delta_1, \forall t \in [0, 1] \Rightarrow |(yt)^\alpha f(yt) - (xt)^\alpha f(xt)| < \varepsilon$$

La continuité de la fonction  $x^{\alpha-\beta}$ , conduit à l'existence de  $\delta_2 > 0$ , telle que

$$|x - y| < \delta_2 \Rightarrow \left| y^{\alpha-\beta} - x^{\alpha-\beta} \right| < \varepsilon.$$

Ainsi,  $|x - y| < \min(\delta_1, \delta_2)$  implique

$$\begin{aligned} |I^\alpha f(y) - I^\alpha f(x)| &\leq \frac{\varepsilon (\|f\|_\beta + 1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon (\|f\|_\beta + 1) \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

### 3.3 Convergence dans les espaces des fonctions continues avec poids

---

2.  $\forall f \in C_\beta, \forall x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |I^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} t^\beta |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_\beta \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} dt \\ &\leq \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)} \|f\|_\beta \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat. □

#### 3.3.3 Convergence dans les espaces $C_\beta$

La convergence peut être obtenue dans les espaces  $C_\beta$ , par le biais d'une fonction auxiliaire. C'est l'objectif du théorème suivant.

**Théorème 3.3.4.** (*Convergence dans les espaces  $C_\beta$* ) Pour toute fonction  $f$  dans  $C_\beta$  avec  $0 < \beta < 1$  et  $\alpha - \beta \geq 0$  on a  $\|\nabla_h^{-\alpha} f - I^\alpha f\|_\beta$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

*Démonstration.* Puisque  $t^\beta f(t)$  est continue sur  $[0, 1]$ , alors  $|f(t)| \leq Mt^{-\beta}$ , où  $M = \sup_{t \in [0,1]} |t^\beta f(t)| = \|f\|_\beta$ .

Soit  $F$  la fonction continue sur  $[0, 1]$  définie par  $F(t) := \begin{cases} f(t) & h \leq t \leq 1 \\ f(h) & 0 \leq t \leq h \end{cases}$ .

Il est évident que

$$\nabla_h^{-\alpha} F(x) = \nabla_h^{-\alpha} f(x), \text{ pour tout } x \geq h$$

Si  $x < h$ ,

$$\nabla_h^{-\alpha} f(x) = \frac{x}{h} \nabla_h^{-\alpha} f(h)$$

et

$$\nabla_h^{-\alpha} F(x) = \frac{x}{h} \nabla_h^{-\alpha} F(h) = \frac{x}{h} \nabla_h^{-\alpha} f(h) = \nabla_h^{-\alpha} f(x)$$

Alors,  $\forall x \in [0, 1]$  nous avons

$$|\nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x)| \leq |\nabla_h^{-\alpha} F(x) - I^\alpha F(x)| + |I^\alpha F(x) - I^\alpha f(x)|$$

Comme pour chaque  $t \in [0, h]$ ,

$$|f(t) - f(h)| \leq Mt^{-\beta} + Mh^{-\beta} \leq 2Mt^{-\beta},$$

### 3.3 Convergence dans les espaces des fonctions continues avec poids

---

alors quand  $x \geq h$

$$\begin{aligned} |I^\alpha F(x) - I^\alpha f(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^h (x-t)^{\alpha-1} (f(h) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} dt \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \int_0^h (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} dt &= x^{\alpha-\beta} \int_0^{\frac{h}{x}} (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} dt \\ &= x^{\alpha-\beta} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} \chi_{[0, \frac{h}{x}]}(t) dt \end{aligned}$$

Soit  $1 < p < \min(\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{\beta})$  et  $q$  des exposants conjugués i.e,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
L'inégalité de Hölder donne

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} \chi_{[0, \frac{h}{x}]}(t) dt \leq (B(1 - (1-\alpha)p, 1 - \beta p))^{\frac{1}{p}} \left(\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{q}}$$

où  $B(., .)$  est la fonction Bêta d'Euler (voir B.2). Par conséquent,  $\forall x \geq h$

$$x^\beta |I^\alpha F(x) - I^\alpha f(x)| \leq K_1 x^{\alpha-\frac{1}{q}} h^{\frac{1}{q}} \leq K_1 h^{\frac{1}{q}}.$$

Maintenant si  $x < h$

$$\begin{aligned} |I^\alpha F(x) - I^\alpha f(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t) - f(h)) dt \right| \\ &\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} dt \\ &\leq \frac{2M\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta+\alpha)} x^{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

et alors,

$$x^\beta |I^\alpha F(x) - I^\alpha f(x)| \leq \frac{2M\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta+\alpha)} x^\alpha \leq \frac{2M\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta+\alpha)} h^\alpha$$

Puisque  $\alpha > \frac{1}{q}$ , nous obtenons

$$x^\alpha |I^\alpha F(x) - I^\alpha f(x)| \leq K_2 h^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

### 3.4 Connexion avec la théorie des échelles de temps

---

Comme  $F$  est continue sur  $[0, 1]$ , A partir du théorème 3.2.5 on peut affirmer qu'il existe  $K > 0$  tel que,

$$\left| \nabla_h^{-\alpha} F(x) - I^\alpha F(x) \right| \leq Kh^\alpha, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (3.6)$$

menant à

$$x^\beta \left| \nabla_h^{-\alpha} F(x) - I^\alpha F(x) \right| \leq Kh^\alpha, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Par suite

$$x^\beta \left| \nabla_h^{-\alpha} f(x) - I^\alpha f(x) \right| \leq Kh^\alpha + K_2 h^{\frac{1}{q}} \leq K_3 h^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \nabla_h^{-\alpha} f - I^\alpha f \right\|_\beta = 0.$$

□

## 3.4 Connexion avec la théorie des échelles de temps

Dans cette partie, le résultat de convergence uniforme obtenu précédemment est traduit dans un cadre échelle de temps. Pour cela on définit les échelles de temps  $\mathbb{T} = [0, 1]$  et  $\mathbb{T}_h = h\mathbb{Z} \cap [0, 1]$  pour chaque  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

On rappelle que la distance de Hausdorff  $H_d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  entre deux ensembles fermés d'un espace métrique est définie par

$$H_d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max \left\{ \sup_{a \in \mathbf{A}} d(a, \mathbf{B}), \sup_{b \in \mathbf{B}} d(b, \mathbf{A}) \right\}$$

où, comme d'habitude,  $d(a, \mathbf{B}) = \inf_{b \in \mathbf{B}} |a - b|$ . Si les ensembles ne sont pas fermés, il est également possible de définir cette distance comme distance de Hausdorff entre leurs adhérences.

**Remarque 3.4.1.** *Il est facile de voir que*

1.

$$H_d(\mathbb{T}_h, \mathbb{T}) = h/2$$

Puisque  $\forall a \in \mathbb{T}_h$  et  $\forall b \in \mathbb{T}$

$$d(a, \mathbb{T}) = 0$$

et

$$d(b, \mathbb{T}_h) \leq h/2$$

### 3.4 Connexion avec la théorie des échelles de temps

---

2.

$$H_d(\mathbb{T}_h, \mathbb{T}_{\tilde{h}}) = \max \{h/2, \tilde{h}/2\}$$

Puisque  $\forall a \in \mathbb{T}_h$  et  $\forall b \in \mathbb{T}_{\tilde{h}}$

$$d(a, \mathbb{T}_{\tilde{h}}) \leq \tilde{h}/2$$

et

$$d(b, \mathbb{T}_h) \leq h/2$$

Nous allons maintenant reformuler le théorème 3.2.5 en terme de convergence à travers les échelles de temps.

**Corollaire 3.4.2.** (*Convergence en échelles de temps*) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , alors il existe une constante  $\tilde{K} > 0$ , tel que

$$\left\| \nabla_h^{-\alpha} f - I^\alpha f \right\|_0 \leq \tilde{K} \cdot H_d(\mathbb{T}_h, \mathbb{T})^\alpha \quad (3.7)$$

Il est intéressant de voir que l'inégalité (3.7) peut être vue comme la continuité d'un opérateur appliquant l'espace des échelles de temps dans l'espace des fonctions continues. En effet, soit  $(\tau, H_d)$  l'espace métrique de toutes les échelles de temps sur  $[0, 1]$  muni de la métrique de Hausdorff. Soit  $f$  une fonction continue fixée. Supposons que l'on puisse définir une application de  $(\tau, H_d)$  vers  $(C[0, 1], \|\cdot\|_0)$  :

$$\begin{aligned} J_f : (\tau, H_d) &\rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_0) \\ \mathbb{S} &\mapsto J_f(\mathbb{S}) \end{aligned}$$

qui sera appelée intégrale par rapport à  $\mathbb{S}$  et telle que  $J_f(\mathbb{T}) = I^\alpha f$  et  $J_f(\mathbb{T}_h) = \nabla_h^{-\alpha} f$ .

Le corollaire 3.4.2 nous dit que

$$\lim_{\mathbb{T}_h \xrightarrow{\tau} \mathbb{T}} J_f(\mathbb{T}_h) = J_f(\mathbb{T})$$

On peut conjecturer ce qui suit,

**Conjecture 1.** *On suppose que  $J_f$  est bien définie. Alors  $J_f$  est continue.*

Remarquons que dans le sous ensemble  $\{\mathbb{T}_h, h > 0\} \cup \{\mathbb{T}\}$ , l'échelle de temps  $\mathbb{T}_h$  est constitué de points "isolé". Nous avons donc démontré que la conjecture est vraie dans le sous ensemble sus-défini.



# Chapitre 4

## Applications

Dans ce chapitre, nous proposons de montrer l'efficacité numérique de l'approximation des rectangles à travers quelques problèmes de Cauchy fractionnaires. Les équations différentielles fractionnaires sont un bon moyen pour caractériser des phénomènes à mémoires longues tels les systèmes biologiques, rhéologiques, etc.

Plus précisément nous cherchons la solution  $y(t)$  sur un intervalle  $[0, T]$  de l'équation différentielle

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

Où  $D^\alpha$  désigne la dérivée de Riemann-Liouville (voir définition C.0.1) dans les exemples 1 et 2 par contre dans l'exemple 3 c'est la dérivée de Caputo (voir définition C.0.2) qui est considérée. Une condition initiale est alors requise pour assurer l'unicité de la solution dans chaque situation. L'initialisation des équations fractionnaires de type Riemann-Liouville s'écrit habituellement

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I^{1-\alpha} y(t) = y_0$$

mais celle-ci est dénuée de sens physique et de ce fait inappropriée pour les applications. Cette initialisation est un problème épineux abordé par de nombreux auteurs nous citons par exemple [19], [41], [47].

Pour palier à cette difficulté, la dérivée de Caputo est d'utilisation courante en pratique, puisque la condition initiale associée est :

$$y(0) = y_0$$

L'analyse qualitative d'un problème différentiel fractionnaire fût l'objet de publications intensives. Nous indiquons tout principalement la monographie de Zhou [59] et les livres de Diethelm [15], Kilbas [37] et Podlubny [47]. Malheureusement, la solution analytique de ces problèmes est rarement obtenue

## 4.1 Exemple 1

---

et de fait la résolution numérique prend tout son sens. Des méthodes numériques pour les équations différentielles fractionnaires ont été proposées, voir par exemple [16], [17], [24],[25], [47], etc. La résolution numérique des équations différentielles fractionnaires nécessite un effort de calcul considérable qui s'accroît avec la longueur de l'intervalle étudié car contrairement aux équations différentielles d'ordre entier les dérivées fractionnaires ne sont pas locales. Certaines techniques ont alors été élaborées pour surmonter cet handicap important comme le principe de la mémoire fixée (voir par exemple [22]) pour une analyse. La procédure numérique que nous adoptons pour la résolution des problèmes de Cauchy fractionnaires comporte deux étapes. Premièrement, les conditions initiales sont utilisées pour réduire le problème à valeur initiale donné en une équation intégrale de Volterra équivalente. Ensuite, un système d'équations algébriques est obtenu par remplacement de l'intégrale fractionnaire par l'opérateur discret nabla h-somme.

Dans le cas d'équations différentielles fractionnaires linéaires, le système algébrique résultant est triangulaire inférieur. Dans le cas non linéaire, le système algébrique correspondant est également non linéaire et doit être résolu par des méthodes adéquates. En présence de singularité à l'origine dans le problème à valeur initiale de Riemann-Liouville, il est important de noter que cette procédure est appropriée.

### 4.1 Exemple 1

Considérons le problème de Cauchy fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = \lambda y(t) & t \in (0, 1] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} y(t) = c \end{cases} \quad (4.1)$$

Sa solution analytique est donnée par [37] :

$$y(t) = c\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)$$

où  $E_{\mu,\nu}(t)$  est une fonction de Mittag-Leffler (voir B.5). Le problème (4.1) est réduit à l'équation intégrale de Volterra suivante

$$y(t) = ct^{\alpha-1} + I^\alpha(\lambda y(t)) \quad (4.2)$$

## 4.1 Exemple 1

---

En notant par  $y = (y_1, \dots, y_N)^T$  le vecteur formé par les approximations de la solution aux points de discrétisation  $t_i = ih$  pour  $1 \leq i \leq N$ , et le vecteur  $v = c(t_1^{\alpha-1}, \dots, t_N^{\alpha-1})^T$ , la discrétisation de la formule 4.2 s'écrit sous la forme matricielle

$$Ay = v$$

où  $A$  est la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda h^\alpha w_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda h^\alpha w_1 & 1 - \lambda h^\alpha w_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\lambda h^\alpha w_{N-1} & \cdots & -\lambda h^\alpha w_1 & 1 - \lambda h^\alpha w_0 \end{pmatrix}$$

avec

$$w_i = \frac{\Gamma(i + \alpha)}{\Gamma(i + 1)\Gamma(\alpha)} \quad i = 0, \dots, N - 1 \quad (4.3)$$

Ces coefficients sont liés par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_{i+1} &= \left(1 + \frac{\alpha - 1}{i + 1}\right)w_i, \quad i = 0, \dots, N - 2 \end{aligned}$$

La solution approchée peut être déduite de la formule

$$y_i = \frac{1}{(1 - \lambda h^\alpha)} \left[ \lambda h^\alpha \sum_{j=1}^{i-1} w_{i-j} y_j + c t_i^{\alpha-1} \right], \quad i = 1, \dots, N$$

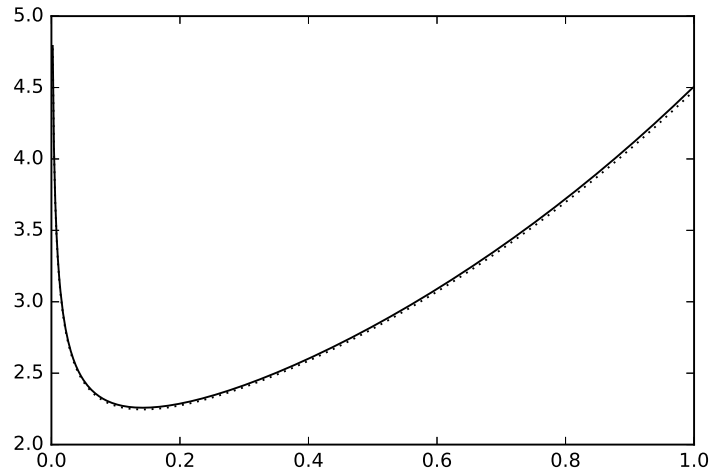
Dans la figure 4.1, sont représentées les solutions analytique et numérique du problème de Cauchy fractionnaire linéaire pour  $h = 0.002$  avec les paramètres,  $\alpha = 0.75$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 1$ .

Pour  $h = 0.002$ , nous obtenons

$$\max \left\{ t_i^{1-\alpha} |y(t_i) - y_i|, i = 1, \dots, 10^4 \right\} = 2.9 \times 10^{-2}.$$

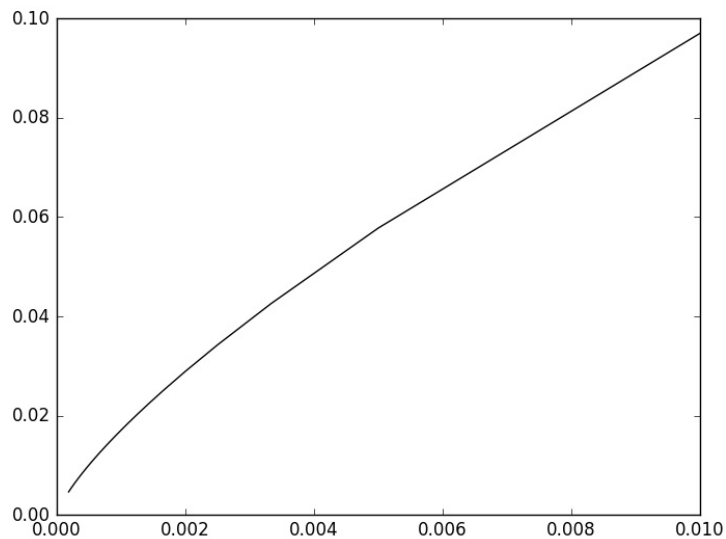
## 4.1 Exemple 1

---



**Figure 4.1** – Comparaison entre les solutions analytique et numérique du problème de Cauchy fractionnaire linéaire. La solution exacte en trait continu et la solution approchée en trait discontinu pour  $h = 0.002$ .

Dans la figure 4.2 l'erreur  $\max \left\{ t_i^{1-\alpha} |y(t_i) - y_i|, i = 1, \dots, \frac{1}{h} \right\}$  est représentée en fonction de  $h$ .



**Figure 4.2** – Analyse de convergence en fonction du pas  $h$  du problème de Cauchy fractionnaire.

## 4.2 Exemple 2

---

Dans la table 4.1 ci-dessous, nous comparons les résultats théoriques et expérimentaux correspondants à la résolution du problème de Cauchy 4.1. Les erreurs  $E(N)$  exprimées par  $\max \{t_i^{1-\alpha} |y(t_i) - y_i|, i = 1, \dots, N\}$  sont présentées ainsi que les estimations de l'ordre de convergence obtenues par la formule

$$EOC = \log_2 \left( \frac{E(N)}{E(2N)} \right).$$

Comme prévu par la théorie et selon le théorème 3.3.4, l'ordre de convergence est inférieur à 1, il est estimé à  $0.756 \approx \alpha$ .

$N$	Erreurs $E(N)$	EOC
100	0.09864017	*****
200	0.05839889	0.756
400	0.03456495	0.757
800	0.02046129	0.756
1600	0.01211687	0.756
3200	0.00717871	0.755

**Table 4.1** – Les erreurs et l'ordre de convergence expérimental pour le problème (4.1) avec  $\alpha = 0.75$ .

## 4.2 Exemple 2

Considérons maintenant l'équation différentielle non homogène avec dérivée de Riemann-Liouville suivante (voir [37] (4.2.101) avec notre notation),

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = \lambda y(t) + ct^\mu, & t \in (0, T] \\ D^{1-\alpha} y(0^+) = \eta \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $\lambda, c, \eta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1, \mu > -1$ . La solution de ce problème est donnée par

$$y(t) = T\eta t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha) + \Gamma(\mu + 1) ct^{\alpha+\mu} E_{\alpha, \alpha+\mu+1}(\lambda t^\alpha)$$

Sachant que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} y(t)$  existe alors d'après [37] (lemma 3.2) le problème (4.4) peut être écrit comme

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = \lambda y(t) + ct^\mu, & t \in (0, T] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} y(t) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} \end{cases}$$

qui se réduit à l'équation intégrale de Volterra suivante

$$y(t) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + I^\alpha(\lambda y(t) + ct^\mu) \quad (4.5)$$

## 4.2 Exemple 2

---

En notant par,  $y = (y_1, \dots, y_N)^T$  le vecteur formé par les approximations de la solution aux points de discrétisation  $t_i = ih$  pour  $1 \leq i \leq N$ , et le vecteur  $v = (t_1, \dots, t_N)^T$  la formule 4.5 aux points  $t_i$  prend la forme matricielle

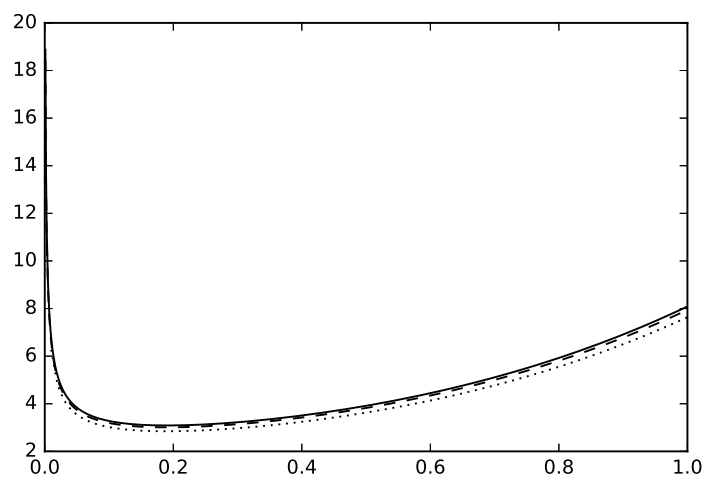
$$(I - \lambda A)y = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}v^{\alpha-1} + cAv^\mu$$

où  $A$  est la matrice définie par

$$A = h^\alpha \begin{pmatrix} w_0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_1 & w_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ w_{N-1} & \cdots & w_1 & w_0 \end{pmatrix}$$

et les  $w_i$  sont donnés par la formule (4.3).

Dans la figure 4.3, nous représentons le graphe de la solution analytique et des solutions numériques obtenues avec les pas de discrétisation  $h = 10^{-2}$  et  $h = 10^{-3}$  les paramètres considérés sont les suivants,  $\alpha = 0.5, \eta = 1, c = 2, \mu = 2, \lambda = 1, T = 1$ .



**Figure 4.3** – Solutions numériques pour le problème de Cauchy non homogène avec  $\alpha = 0.5$ .  
la solution exacte en trait continu, les solutions numériques : en pointillée(  $h = 10^{-2}$ ),  
trait discontinu ( $h = 10^{-3}$ ).

### 4.3 Exemple 3

Pour conclure ce chapitre, voici un exemple plus concret c'est un modèle non linéaire. Le système de l'oscillateur fractionnaire du Brusselator, utilisé pour décrire des réactions chimiques autocatalytiques est décrit comme suit : [59],[45]

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) &= a - (\mu + 1)x(t) + x^2(t)y(t) \\ {}^C D^\alpha y(t) &= \mu x(t) - x^2(t)y(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

et où  ${}^C D^\alpha(\cdot)$  est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo (voir Annexe C, définition C.0.2). Dans ce modèle  $x(t)$  et  $y(t)$  sont les concentrations chimiques de produits et  $a, \mu$  sont des concentrations constantes de réactifs en entrée. Par le biais du [15, lemma 6.2], Le problème du Brusselator prend la forme intégrale de Volterra suivante :

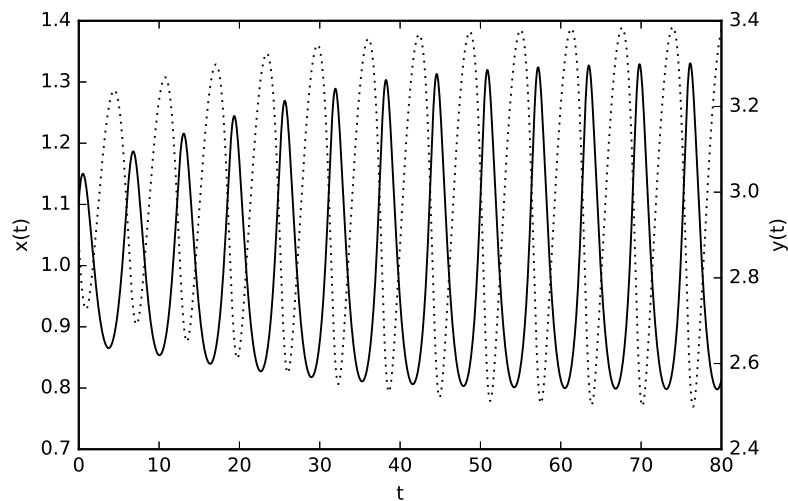
$$\begin{cases} x(t) &= x(0) + I^\alpha (a - (\mu + 1)x(t) + x^2(t)y(t)) \\ y(t) &= y(0) + I^\alpha (\mu x(t) - x^2(t)y(t)) \end{cases}$$

Nous montrons l'efficacité du processus numérique en prenant les paramètres donnés dans la première simulation de [45].

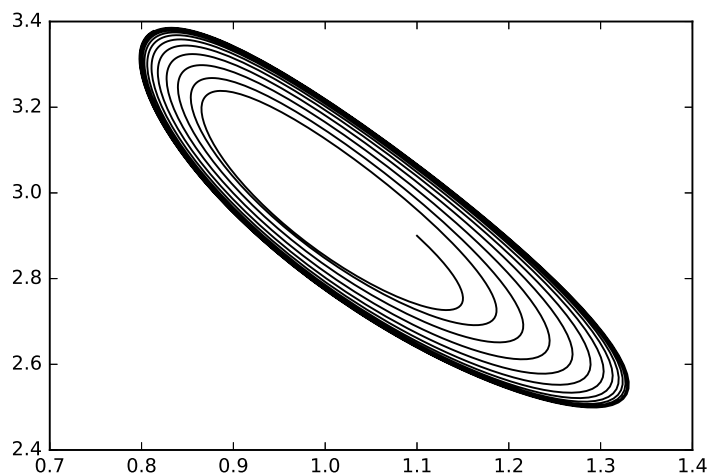
$a = 1, \mu = 3, \alpha = 0.7, x_0 = 1.1, y_0 = 2.9, T = 80$  avec  $h = 0.001$ , on obtient la représentation graphique de la dynamique du Brusselator ci-dessous (voir Figure 4.4). Puis une représentation du plan de phase est présentée dans la figure 4.5.

### 4.3 Exemple 3

---



**Figure 4.4** – les trajectoires numériques du système d'ordre fractionnaire du Brusselator  $x(t)$  (trait plein) et  $y(t)$  (en pointillé).



**Figure 4.5** – Les trajectoires numériques du système d'ordre fractionnaire du Brusselator dans le plan de phase.

**Remarque 4.3.1.** 1. *La méthode semble fonctionner de manière satisfaisante, les résultats reproduisent le comportement de la solution de référence obtenue par la méthode de prédiction correction d'Adams-Bashforth-Moulton présentée dans [16, Algorithme page 20].*



### 4.3 Exemple 3

---

2. *En prenant comme référence la solution obtenue en utilisant la méthode Adams-Bashford-Moulton. L'erreur entre la solution approchée par l'opérateur nabla  $h$ -somme et la référence est de l'ordre de  $10^{-2}$ , quand  $h = 0.005$ .*

**Remarque 4.3.2.** *L'étude des cycles limites du Brusselator fractionnaires fût menée par le biais d'une analyse de stabilité linéaire dans [23]. Dans [55], la borne inférieure de la dimension fractionnaire du Brusselator de sorte que cet oscillateur présente un cycle limite est déterminée par une approche numérique.*

## Deuxième partie

# Puissances fractionnaires de l'opérateur de dérivation et approximations

# Chapitre 5

## Puissance fractionnaire de l'opérateur de dérivation

Nous notons par  $A = \frac{d}{dx}$  l'opérateur différentiel agissant sur les fonctions appartenant à l'espace  $H^\beta$  (voir Annexe A.2 définition A.2.1) de domaine,

$$D(A) = \{f \in H^\beta, f' \in H^\beta\},$$

Afin de définir la dérivée fractionnaire comme puissance d'opérateur sectoriel dans un espace de Hölder, il est nécessaire de vérifier la propriété sectorielle de l'opérateur  $A$ .

**Proposition 5.1.1.** *L'opérateur  $A$  défini sur  $H^\beta$  est sectoriel d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la résolvante de l'opérateur  $A$  dans  $H^\beta$  est donnée par

$$R(\lambda, A)f(x) = - \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt$$

Prenons maintenant  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  et soient  $x, h$  tels que  $0 \leq x - h < x \leq 1$ . on a

$$\begin{aligned} & |R(\lambda, A)f(x) - R(\lambda, A)f(x - h)| \\ &= \left| \int_0^{x-h} -e^{\lambda t} [f(x-t) - f(x-h-t)] dt + \int_{x-h}^x -e^{\lambda t} f(x-t) dt \right| \end{aligned}$$

Si  $p$  et  $q$  sont deux réels positifs conjugués alors l'inégalité de Hölder im-

plique :

$$\begin{aligned}
& |\lambda| |R(\lambda, A)f(x) - R(\lambda, A)f(x-h)| \\
& \leq |\lambda| \left( \int_0^{x-h} e^{p \operatorname{Re}(\lambda)t} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^{x-h} |f(x-t) - f(x-h-t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + |\lambda| \left( \int_{x-h}^x e^{p \operatorname{Re}(\lambda)t} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{x-h}^x |f(x-t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \sup_{0 \leq t \leq x-h} |f(t) - f(t-h)| (x-h)^{\frac{1}{q}} |\lambda| \left( \frac{e^{p \operatorname{Re}(\lambda)(x-h)} - 1}{p \operatorname{Re}(\lambda)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& + \sup_{x-h \leq t \leq x} |f(x-t)| (h)^{\frac{1}{q}} |\lambda| \left( \frac{e^{p \operatorname{Re}(\lambda)x} - e^{p \operatorname{Re}(\lambda)(x-h)}}{p \operatorname{Re}(\lambda)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \omega_\beta(f, h) h^\beta 2 |\lambda| \left( \frac{-1}{p \operatorname{Re}(\lambda)} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.1.1 on a

$$|\lambda| \inf_{p>1} \left( \frac{-1}{p \operatorname{Re}(\lambda)} \right)^{1/p} = \begin{cases} |\lambda| \left( -\frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \right) & \text{si } -\frac{e}{\operatorname{Re}(\lambda)} \leq 1 \\ |\lambda| e^{\frac{1}{e} \operatorname{Re}(\lambda)} & \text{si } -\frac{e}{\operatorname{Re}(\lambda)} > 1 \end{cases}$$

Remarquons d'abord que  $\operatorname{Re}(\lambda) = |\lambda| \cos \omega$  alors

$$|\lambda| \left( -\frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \right) = |\lambda| \left( -\frac{1}{|\lambda| \cos \omega} \right) = -\frac{1}{\cos \omega}$$

et

$$|\lambda| e^{\frac{1}{e} \operatorname{Re}(\lambda)} = |\lambda| e^{\frac{1}{e} |\lambda| \cos \omega}.$$

De plus la fonction définie sur  $[0, \infty[$  par  $x e^{x \frac{\cos \omega}{e}}$  admet pour maximum la valeur  $-\frac{1}{\cos \omega}$ . ce qui donne l'estimation

$$|\lambda| \inf_{p>1} \left( \frac{-1}{p \operatorname{Re}(\lambda)} \right)^{1/p} \leq -\frac{1}{\cos \omega}.$$

d'où

$$|\lambda| |R(\lambda, A)f(x) - R(\lambda, A)f(x-h)| \leq -\frac{2}{\cos \omega} \omega_\beta(f, h) h^\beta$$

ce qui implique

$$|\lambda| \omega_\beta(R(\lambda, A)f, h) \leq -\frac{2}{\cos \omega} \omega_\beta(f, h) h^\beta$$

et

$$|\lambda| \|R(\lambda, A)f\|_\beta \leq -\frac{2}{\cos \omega} \|f\|_\beta$$

Par conséquent, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi$ ,

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq -\frac{2}{\cos \omega}$$

□

**Corollaire 5.1.2.** *Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in D(A)$ . Alors*

$$A^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt$$

*Démonstration.* L'expression de l'opérateur  $A^\alpha$  résulte simplement de la représentation intégrale de Balakrishnan de la puissance fractionnaire d'un opérateur sectoriel ( D.2). Sachant que

$$(\lambda + A)^{-1} A f(x) = \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} f'(t) dt$$

alors

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} \left( \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} f'(t) dt \right) d\lambda$$

En changeant l'ordre d'intégration et à l'aide d'un changement de variable approprié il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} A^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} f'(t) \left( \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \end{aligned}$$

□

**Remarque 5.1.3.** *La propriété sectorielle de  $A^\alpha$  fût démontrée par Ito [34], d'une manière légèrement différente pour  $1 < \alpha < 2$ .*

# Chapitre 6

## Les opérateurs nabla fractionnaires

Avant de définir les opérateurs nabla et nabla étendu, nous commençons par donner des résultats sur l'erreur d'interpolation linéaire par morceaux qui apparaîtront tout le long de notre travail.

### 6.1 Norme Hölderienne de l'erreur d'interpolation linéaire par morceaux

La norme de Hölder de l'interpolation linéaire par morceaux est donnée par le lemme suivant. A notre connaissance, ce résultat a été prouvé pour la première fois par H. E. White, Jr, dans un cadre général (voir [57, 3.2 Corollaire p 106]) mais nous suivons [49] dans la présentation.

**Lemme 6.1.1.** [49, voir lemma 3.1 ] Soit  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  une partition de  $[0, 1]$  et soit  $f$  une ligne polygonale sur  $[0, 1]$  de sommets  $(t_i, f(t_i))$  i.e.  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et sa restriction à chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  est une fonction affine. Alors pour tout  $0 \leq \beta < 1$ ,

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{(t - s)^\beta} = \max_{0 \leq i < j \leq 1} \frac{|f(t_j) - f(t_i)|}{(t_j - t_i)^\beta}$$

**Définition 6.1.2.** Pour  $0 < h < 1$  fixé, soit  $\Delta_h$  la subdivision de  $[0, 1]$  en  $n$  sous-intervalles avec  $n = [1/h]$  et  $t_k = kh$ , pour chaque  $k = 0, 1, \dots, n$  où  $[a]$  est la partie entière de  $a$ . Nous notons par  $\mathcal{I}_h \in \mathcal{L}(H^\beta)$  l'opérateur d'interpolation linéaire par morceaux défini par

$$(\mathcal{I}_h f)(x) := \sum_{k=1}^n \left( \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}) \right) \mathbb{1}_{[t_{k-1}, t_k]}(x)$$

## 6.1 Norme Hölderienne de l'erreur d'interpolation linéaire par morceaux

---

Dans le lemme suivant, l'erreur de l'interpolation linéaire par morceaux est exprimé en norme Hölderienne.

**Lemme 6.1.3.** *Soit  $(r_h f)(x) = (I - \mathcal{I}_h) f(x)$  alors*

$$\|(r_h f)\|_\beta \leq 4\omega_\beta(f, h)$$

*Démonstration.* D'abord, supposons que  $x, y \in ]t_{k-1}, t_k]$  alors

$$(r_h f)(x) - (r_h f)(y) = f(x) - f(y) - \frac{x-y}{h} (f(t_k) - f(t_{k-1}))$$

Il résulte de  $|x - y| < h$ , que

$$\begin{aligned} \frac{|(r_h f)(x) - (r_h f)(y)|}{|x - y|^\beta} &\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta} + \frac{|f(t_k) - f(t_{k-1})|}{h^\beta} \\ &\leq 2\omega_\beta(f, h) \end{aligned}$$

Deuxièmement, supposons que  $x \in ]t_{k-1}, t_k]$  et  $y \in ]t_k, t_{k+1}]$  du premier cas, il vient que

$$\begin{aligned} \frac{|(r_h f)(x) - (r_h f)(y)|}{|x - y|^\beta} &\leq \frac{|(r_h f)(x) - (r_h f)(t_k)|}{|x - t_k|^\beta} + \frac{|(r_h f)(t_k) - (r_h f)(y)|}{|t_k - y|^\beta} \\ &\leq 4\omega_\beta(f, h) \end{aligned}$$

Troisièmement, supposons que  $x \in ]t_{k-1}, t_k]$  et  $y \in ]t_{m-1}, t_m]$  avec  $|x - y| > h$  alors

$$\begin{aligned} &\frac{|(r_h f)(x) - (r_h f)(y)|}{|x - y|^\beta} \\ &\leq \frac{|(r_h f)(x) - (r_h f)(t_k)|}{|x - y|^\beta} + \frac{|(r_h f)(t_k) - (r_h f)(t_{m-1})|}{|x - y|^\beta} + \frac{|(r_h f)(t_{m-1}) - (r_h f)(y)|}{|x - y|^\beta} \end{aligned}$$

Sachant que  $(r_h f)(t_k) = (r_h f)(t_{m-1}) = 0$  alors

$$\frac{|(r_h f)(x) - (r_h f)(y)|}{|x - y|^\beta} \leq 4\omega_\beta(f, h)$$

□

## 6.2 Les opérateurs nabla et convergences vers l'opérateur de dérivation

Pour tout  $0 < h < 1$ , on définit l'opérateur  $\nabla_h \in \mathcal{L}(H^\beta)$  par

$$(\nabla_h f)(x) := \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad \text{pour } x \in [h, 1]$$

Nous posons  $(\nabla_h f)(x) = \frac{f(x)}{h}$  pour tout  $0 < x < h$ .

Enfin, nous introduisons l'opérateur nabla étendu en tant que ligne polygonaire de sommets  $(t_k, \nabla f(t_k))$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , par la définition suivante.

**Définition 6.2.1.** Nous définissons pour tout  $f \in H^\beta$ , l'opérateur  $A_h$  par

$$A_h f(x) = (\mathcal{I}_h \nabla_h f)(x)$$

Évidemment  $A_h$  est un opérateur linéaire borné avec  $\|A_h\|_\beta \leq \frac{2}{h}$ . Dans la section suivante, nous discutons les convergences uniforme et forte de la suite  $(A_h)_h$  quand  $h$  tend vers 0.

Nous commençons par démontrer dans la proposition qui suit, que la suite  $(A_h)_h$  n'a pas de limite uniforme quand  $h$  tend vers 0.

**Proposition 6.2.2.** La suite  $(A_h)_h$  des opérateurs nabla étendus dans  $\mathcal{L}(H^\beta)$  n'est pas convergente quand  $h$  tend vers 0.

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que  $(A_h)_h$  n'est pas une suite de Cauchy.

Pour cela, soient  $\Delta_h, \Delta_{h/2}$  deux subdivisions de  $[0, 1]$  et prenons  $f(x) = x^\beta$ . Nous avons alors pour  $t = h/2$

$$\begin{aligned} \left| (A_h - A_{h/2}) f(t) \right| &= \left| \frac{h/2}{h} \frac{f(h)}{h} - \frac{f(h/2)}{h/2} \right| \\ &= \left| \frac{h^{\beta-1}}{2} - \left(\frac{h}{2}\right)^{\beta-1} \right| \geq \left| \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \right| \end{aligned}$$

Puisque

$$\|(A_h - A_{2h}) f\|_\beta \geq |(A_h - A_{2h}) f(h/2)|$$



## 6.2 Les opérateurs nabla et convergences vers l'opérateur de dérivation

alors

$$\|A_h - A_{2h}\|_\beta \|f\|_\beta \geq \|(A_h - A_{2h})f\|_\beta \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta-1} - \frac{1}{2}$$

Nous avons donc vu que  $(A_h)_h$  n'est pas une suite convergente dans  $\mathcal{L}(H^\beta)$ .  $\square$

Dans la proposition suivante, la convergence forte de l'opérateur nabla étendu vers l'opérateur dérivé est prouvé.

**Proposition 6.2.3.** *Pour tout  $f \in D(A)$ , tel que  $f' \in H_0^\beta$  la suite  $(A_h)_h$  converge fortement vers  $A$  quand  $h$  tend vers 0.*

*Démonstration.* Remarquons que

$$\begin{aligned} (A - A_h)f(x) &= (I - \mathcal{I}_h)Af(x) + \mathcal{I}_h(A - \nabla_h)f(x) \\ &= (r_h f')(x) + \mathcal{I}_h(A - \nabla_h)f(x). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{|(A - A_h)f(x) - (A - A_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} &\leq \|(r_h f')\|_\beta \\ &\quad + \frac{|\mathcal{I}_h(A - \nabla_h)f(x) - \mathcal{I}_h(A - \nabla_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \end{aligned}$$

A partir du lemme 6.1.3 le terme  $\|(r_h f')\|_\beta$  est borné par

$$\|(r_h f')\|_\beta \leq 4\omega_\beta(f', h)$$

D'après le lemme 6.1.1, pour certains  $i, j, \xi_i \in ]t_{i-1}, t_i[$  and  $\xi_j \in ]t_{j-1}, t_j[$  nous avons

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{I}_h(A - \nabla_h)f(x) - \mathcal{I}_h(A - \nabla_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} &\leq \frac{|f'(t_i) - \nabla_h f(t_i)|}{|t_i - t_j|^\beta} + \frac{|f'(t_j) - \nabla_h f(t_j)|}{|t_i - t_j|^\beta} \\ &\leq \frac{|f'(t_i) - f'(\xi_i)|}{|t_i - t_j|^\beta} + \frac{|f'(t_j) - f'(\xi_j)|}{|t_i - t_j|^\beta}, \\ &\leq 2\omega_\beta(f', h) \end{aligned}$$

Il en découle naturellement

$$\frac{|(A - A_h)f(x) - (A - A_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \leq 6\omega_\beta(f', h) \quad (6.1)$$

Et donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \|Af - A_h f\|_\beta = 0$ .  $\square$

## 6.3 Propriété sectorielle de l'opérateur nabla étendu

Avant d'étudier la propriété sectorielle des opérateurs  $\nabla_h$  et  $A_h$ , nous commençons par donner un résultat surprenant et utile. En fait, des calculs élémentaires montrent que l'opérateur  $\mathcal{I}_h$  commute avec  $\nabla_h$ . Cette propriété a une conséquence intéressante pour la résolvante. Elle est donnée dans le prochain lemme dans un cadre général.

**Lemme 6.3.1.** *Étant donné un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , des opérateurs  $B, T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  tels que  $T$  est idempotent et  $T$  commute avec  $B$  alors, pour tout  $\lambda \in \rho(B), \lambda \neq 0$*

$$R(\lambda, TB) = TR(\lambda, B) + \frac{1}{\lambda}(I - T)$$

*Démonstration.* Afin d'obtenir l'opérateur résolvant de  $TB$  on considère l'équation, pour  $f, g \in \mathcal{X}$ ,

$$f = (\lambda I - TB)g$$

alors l'idempotence de l'opérateur  $T$  et la commutativité impliquent

$$Tf = (\lambda I - B)Tg$$

En combinant les deux équations précédentes on a

$$f - Tf = \lambda(I - T)g$$

Utilisant le fait que

$$Tg = (\lambda I - B)^{-1}Tf$$

alors

$$g = R(\lambda, B)Tf + \frac{1}{\lambda}(f - Tf)$$

□

**Proposition 6.3.2.** *La famille  $(\nabla_h)_h$  est uniformément sectorielle d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans  $H^\beta$ .*

*Démonstration.* Commençons par exprimer la résolvante, pour cela nous considérons l'équation

$$(\lambda I - \nabla_h)g(x) = f(x)$$

### 6.3 Propriété sectorielle de l'opérateur nabla étendu

---

La transformée de Laplace et la formule de translation B.7 donne

$$\mathcal{L}[g](p) = \frac{1}{\lambda - \frac{1}{h} + \frac{1}{h}e^{-hp}} \mathcal{L}[f](p)$$

ce qui implique

$$\mathcal{L}[g](p) = \frac{h}{\lambda h - 1} \frac{1}{1 - \frac{e^{-hp}}{1 - \lambda h}} \mathcal{L}[f](p)$$

La série géométrique permet d'écrire

$$\mathcal{L}[g](p) = \frac{h}{\lambda h - 1} \sum_{j \geq 0} \left( \frac{e^{-hp}}{1 - \lambda h} \right)^j \mathcal{L}[f](p)$$

Il est facile de vérifier au moyen des transformées de Laplace inverse et la formule B.10 que

$$g(x) = \frac{h}{\lambda h - 1} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(1 - \lambda h)^j} f(x - jh)$$

La condition  $x - jh \geq 0$  issue de la fonction échelon unitaire implique nécessairement  $j \leq \frac{x}{h}$  et donc la résolvante s'écrit

$$R(\lambda, \nabla_h) f(x) = -h \sum_{j=0}^{\lfloor x/h \rfloor} \frac{1}{(1 - \lambda h)^{j+1}} f(x - t_j)$$

Reste à analyser la propriété sectorielle de l'opérateur  $R(\lambda, \nabla_h)$  ainsi trouvé, pour cela nous vérifions d'abord sa bornitude dans  $\mathcal{L}(H^\beta)$ . Pour tout  $0 \leq x < y \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{|R(\lambda, \nabla_h) f(x) - R(\lambda, \nabla_h) f(y)|}{|x - y|^\beta} \\ & \leq \frac{1}{|x - y|^\beta} \\ & \times \left\{ \left| h \sum_{j=0}^{\lfloor x/h \rfloor} \frac{1}{(1 - \lambda h)^{j+1}} [f(x - t_j) - f(y - t_j)] \right| + \left| h \sum_{\lfloor x/h \rfloor + 1}^{\lfloor y/h \rfloor} \frac{1}{(1 - \lambda h)^{j+1}} f(x - t_j) \right| \right\} \\ & \leq \|f\|_\beta \sum_{j=1}^n \frac{h}{|1 - \lambda h|^j} \end{aligned}$$

### 6.3 Propriété sectorielle de l'opérateur nabla étendu

En utilisant la somme d'une série géométrique, nous avons

$$\frac{|R(\lambda, \nabla_h)f(x) - R(\lambda, \nabla_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \leq \frac{h}{|1 - \lambda h| - 1} \|f\|_\beta \quad (6.2)$$

Maintenant, observons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_\omega$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  nous avons  $|\lambda h - 1| > 1$  et

$$\frac{|\lambda| |R(\lambda, \nabla_h)f(x) - R(\lambda, \nabla_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \leq \frac{|z| h}{|1 - zh| - 1} \|f\|_\beta$$

avec  $z = h\lambda$ .

Par suite le lemme 2.1.3 implique

$$\frac{|\lambda| |R(\lambda, \nabla_h)f(x) - R(\lambda, \nabla_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \leq \frac{-1}{\cos \omega} \|f\|_\beta \quad (6.3)$$

Nous concluons que la famille  $(\nabla_h)_h$  est uniformément sectorielle d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  $\square$

Par conséquent, l'opérateur nabla étendu  $A_h$  est également sectoriel, comme indiqué dans le corollaire suivant.

**Corollaire 6.3.3.** *La famille  $(A_h)_h$  est uniformément sectorielle d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans  $H^\beta$ .*

*Démonstration.* Du lemme 6.3.1 nous avons

$$R(\lambda, A_h)f(x) = \mathcal{I}_h(R(\lambda, \nabla_h)f)(x) + \frac{1}{\lambda}(f - \mathcal{I}_h f)(x)$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{|\lambda| |R(\lambda, A_h)f(x) - R(\lambda, A_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \\ & \leq \frac{|\lambda| |\mathcal{I}_h R(\lambda, A_h)f(x) - \mathcal{I}_h R(\lambda, A_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} + \frac{|(I - \mathcal{I}_h)f(x) - (I - \mathcal{I}_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \end{aligned}$$

Il résulte des lemmes 6.1.1 et 6.1.3, l'existence de  $0 \leq m, l \leq n$  tels que

$$\begin{aligned} & \frac{|\lambda| |R(\lambda, A_h)f(x) - R(\lambda, A_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \\ & \leq \frac{|\lambda| |R(\lambda, A_h)f(t_m) - R(\lambda, A_h)f(t_l)|}{|t_m - t_l|^\beta} + 4\omega_\beta(f, h) \end{aligned}$$

## 6.4 Les opérateurs nabla fractionnaires

---

Donc, d'après la proposition précédente nous obtenons l'estimation

$$\frac{|\lambda| |R(\lambda, A_h)f(x) - R(\lambda, A_h)f(y)|}{|x - y|^\beta} \leq \left( \frac{-1}{\cos \omega} + 4 \right) \|f\|_\beta$$

□

Désormais, nous sommes en mesure de définir la puissance fractionnaire des opérateurs  $\nabla_h$  et  $A_h$ . C'est le but de la section suivante.

## 6.4 Les opérateurs nabla fractionnaires

**Théorème 6.4.1.** *Soit  $0 < \alpha < 1$ , alors l'opérateur nabla fractionnaire est*

$$\nabla_h^\alpha f(x) = \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{[x/h]} \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \nabla_h f(x - t_j)$$

et la puissance fractionnaire  $A_h^\alpha$  est donnée par

$$\begin{aligned} A_h^\alpha f(x) &= \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^n \left( \frac{x - t_{k-1}}{h} \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \nabla_h f(t_k - t_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_k - x}{h} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \nabla_h f(t_{k-1} - t_j) \right) \mathbb{1}_{[t_{k-1}, t_k]}(x) \end{aligned}$$

On appelle  $A_h^\alpha$  l'opérateur nabla étendu fractionnaire.

*Démonstration.* La représentation intégrale de la puissance fractionnaire de Balakrishnan (D.2), donne pour  $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} \nabla_h^\alpha f(x) &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (\lambda + \nabla_h)^{-1} \nabla_h f(x) d\lambda \\ &= -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, \nabla_h) \nabla_h f(x) d\lambda \end{aligned}$$

à fortiori

$$\begin{aligned} &\nabla_h^\alpha f(x) \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} h \sum_{j=0}^{[x/h]} \frac{1}{(1 + \lambda h)^{j+1}} \nabla_h f(x - t_j) d\lambda \\ &= h \sum_{j=0}^{[x/h]} \left( \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \frac{1}{(1 + \lambda h)^{j+1}} d\lambda \right) \nabla_h f(x - t_j) \end{aligned}$$

## 6.4 Les opérateurs nabla fractionnaires

---

Des calculs similaires à ceux de [5, Theorem 3.1] donnent

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \frac{1}{(1+\lambda h)^{j+1}} d\lambda = h^{-\alpha} \frac{\Gamma(j+1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(j+1)}$$

Par suite

$$\nabla_h^\alpha f(x) = \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{[x/h]} \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \nabla_h f(x-t_j)$$

Nous passons maintenant à l'évaluation de  $A_h^\alpha f$ . Grâce au lemme 6.3.1 on a

$$\begin{aligned} A_h^\alpha f(x) &= -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, A_h) A_h f(x) d\lambda \\ &= -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \mathcal{I}_h R(-\lambda, \nabla_h) \mathcal{I}_h \nabla_h f(x) d\lambda \\ &= -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \mathcal{I}_h R(-\lambda, \nabla_h) \nabla_h f(x) d\lambda \end{aligned}$$

Ensuite, l'évaluation de  $A_h^\alpha f$  suit. □

**Remarque 6.4.2.** L'opérateur  $\nabla_h^\alpha$  n'est rien d'autre que l'opérateur de Grünwald-Letnikov

$$\nabla_h^\alpha f(x) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[x/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-jh)$$

Signalons que cet opérateur a été défini de manière formelle en tant que généralisation des formules de différence d'ordre entier en remplaçant l'ordre entier par un nombre réel.

Il convient de souligner que dans [5] l'approximation discrète de Grünwald-Letnikov a été appelée la dérivée de différence de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$ .

Le problème restant est d'étudier si la convergence forte  $(A_h f)_h$  vers  $Af$  peut donner lieu à la convergence des opérateurs puissances. C'est le but du chapitre suivant.

# Chapitre 7

## Convergence hölderienne de l'opérateur nabla étendu vers l'opérateur de dérivée fractionnaire

Avant d'énoncer le théorème de convergence, nous définissons pour tout  $f$  dans  $D(A)$ , la fonction  $\varphi$  par

$$\varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} A_h f(t) dt$$

Pour la construction de la preuve du résultat de convergence, nous avons besoin des lemmes suivants

### 7.1 Lemmes techniques

**Lemme 7.1.1.** *Pour toute  $0 < \beta < 1$  tel que  $1 - \alpha - \beta > 0$  nous avons*

$$\omega_\beta(\varphi, h) \leq \frac{8}{\Gamma(2-\alpha)} \|f'\|_\beta h^{1-\alpha-\beta}$$

*Démonstration.* Remarquons que la fonction  $\varphi$  satisfait l'estimation suivante

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \|A_h f\|_\beta (\max(x, y))^{1-\alpha} \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \|A_h f\|_\beta$$

alors  $\varphi \in H^\beta [0, 1]$ .

## 7.1 Lemmes techniques

---

Maintenant estimons  $\omega_\beta(\varphi, h)$ , on distingue deux cas. Premièrement  $t_{k-1} < x < y \leq t_k$  :

noter que

$$\Gamma(1-\alpha)\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x-t)^{-\alpha} \left( \frac{t-t_{i-1}}{h} \nabla_h f(t_i) + \frac{t_i-t}{h} \nabla_h f(t_{i-1}) \right) dt + \int_{t_{k-1}}^x (x-t)^{-\alpha} \left( \frac{t-t_{k-1}}{h} \nabla_h f(t_k) + \frac{t_k-t}{h} \nabla_h f(t_{k-1}) \right) dt$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \Gamma(1-\alpha)(\varphi(x) - \varphi(y)) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( (x-t)^{-\alpha} - (y-t)^{-\alpha} \right) \left( \frac{t-t_{i-1}}{h} \nabla_h f(t_i) + \frac{t_i-t}{h} \nabla_h f(t_{i-1}) \right) dt \\ &+ \int_{t_{k-1}}^x \left( (x-t)^{-\alpha} - (y-t)^{-\alpha} \right) \left( \frac{t-t_{k-1}}{h} \nabla_h f(t_k) + \frac{t_k-t}{h} \nabla_h f(t_{k-1}) \right) dt + \\ & \int_x^y (y-t)^{-\alpha} \left( \frac{t-t_{k-1}}{h} \nabla_h f(t_k) + \frac{t_k-t}{h} \nabla_h f(t_{k-1}) \right) dt \end{aligned}$$

Au vu de l'inégalité (A.2) on a

$$|\nabla f(t_i)| = \left| \frac{f(t_i) - f(t_i - h)}{h} \right| \leq h^{\beta-1} \omega_\beta(f, h) \leq \|f'\|_\beta$$

et donc

$$\begin{aligned} & \Gamma(1-\alpha) |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2 \|f'\|_\beta \\ & \times \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( (x-t)^{-\alpha} - (y-t)^{-\alpha} \right) dt \right. \\ & \left. + \int_{t_{k-1}}^x \left( (x-t)^{-\alpha} - (y-t)^{-\alpha} \right) dt + \int_x^y (y-t)^{-\alpha} dt \right\} \end{aligned}$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} & |\varphi(x) - \varphi(y)| \\ & \leq \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} \|f'\|_\beta \sum_{i=1}^{k-1} \left( (x-t_{i-1})^{1-\alpha} - (y-t_{i-1})^{1-\alpha} - (x-t_i)^{1-\alpha} + (y-t_i)^{1-\alpha} \right) \\ & + \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} \|f'\|_\beta \left[ (x-t_{k-1})^{1-\alpha} - (y-t_{k-1})^{1-\alpha} + 2(y-x)^{1-\alpha} \right] \end{aligned}$$



## 7.1 Lemmes techniques

---

finalement

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\beta} &\leq \frac{4}{\Gamma(2 - \alpha)} \|f'\|_\beta |y - x|^{1-\alpha-\beta} \\ &\leq \frac{4}{\Gamma(2 - \alpha)} \|f'\|_\beta h^{1-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

Deuxièmement  $t_{k-1} < x \leq t_k < y \leq t_{k+1}$  :

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\beta} &\leq \frac{|\varphi(x) - \varphi(t_k)|}{|x - t_k|^\beta} + \frac{|\varphi(t_k) - \varphi(y)|}{|t_k - y|^\beta} \\ &\leq \frac{8}{\Gamma(2 - \alpha)} \|f'\|_\beta h^{1-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\omega_\beta(\varphi, h) \leq \frac{8}{\Gamma(2 - \alpha)} \|f'\|_\beta h^{1-\alpha-\beta}$$

□

**Lemme 7.1.2.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $0 \leq k \leq n$*

$$\frac{|\varphi(t_k) - \nabla_h^\alpha f(t_k)|}{h^\beta} \leq \left(1 + \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)}\right) \|f'\|_\beta h^{1-\alpha-\beta} + \frac{2^\beta}{\Gamma(2 - \alpha)} \omega_\beta(f', 2h)$$

*Démonstration.* Évidemment si  $k = 0$  le lemme est vrai pour chaque  $C > 0$ . Supposons maintenant que  $k > 0$ , alors

$$\varphi(t_k) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{i=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_k - t)^{-\alpha} \left[ \frac{t - t_{j-1}}{h} \nabla_h f(t_j) + \frac{t_j - t}{h} \nabla_h f(t_{j-1}) \right] dt$$

Une simple intégration mène à

$$\begin{aligned} &\varphi(t_k) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{i=1}^k (t_k - t_{j-1})^{1-\alpha} \nabla_h f(t_{j-1}) - (t_k - t_j)^{1-\alpha} \nabla_h f(t_j) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{i=1}^k \frac{(t_k - t_{j-1})^{2-\alpha} - (t_k - t_j)^{2-\alpha}}{(2 - \alpha)h} [\nabla_h f(t_j) - \nabla_h f(t_{j-1})] \end{aligned}$$

qui peut être arrangé comme suit

## 7.1 Lemmes techniques

---

$$\begin{aligned}
& \varphi(t_k) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^{k-1} \left[ (t_k - t_j)^{1-\alpha} - (t_k - t_{j+1})^{1-\alpha} \right] \nabla_h f(t_j) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^k \left( \frac{(t_k - t_{j-1})^{2-\alpha} - (t_k - t_j)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)h} \right. \\
&\left. - (t_k - t_j)^{1-\alpha} \right) (\nabla_h f(t_j) - \nabla_h f(t_{j-1}))
\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi(t_k) - \nabla_h^\alpha f(t_k) = S_1 + S_2 - h^{1-\alpha} \nabla_h f(t_k)$$

où

$$S_1 = \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \right] \nabla_h f(t_k - t_j)$$

et

$$\begin{aligned}
& S_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^k \left( \frac{(t_k - t_{j-1})^{2-\alpha} - (t_k - t_j)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)h} - (t_k - t_j)^{1-\alpha} \right) (\nabla_h f(t_j) - \nabla_h f(t_{j-1}))
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{(t_k - t_{j-1})^{2-\alpha} - (t_k - t_j)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)h} - (t_k - t_j)^{1-\alpha} \\
&= \frac{1}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( (t_k - t)^{1-\alpha} - (t_k - t_j)^{1-\alpha} \right) dt \\
&\leq (t_k - t_{j-1})^{1-\alpha} - (t_k - t_j)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

et

$$|\nabla_h f(t_j) - \nabla_h f(t_{j-1})| \leq (2h)^\beta \omega_\beta(f', 2h)$$

$|S_2|$  peut être borné par

$$|S_2| \leq \frac{(2h)^\beta \omega_\beta(f', 2h)}{\Gamma(2-\alpha)}$$

## 7.1 Lemmes techniques

---

Il reste à estimer  $|S_1|$ . Pour ce faire, à partir du lemme 3.1.1 nous avons

$$\frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} = j^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Phi_{1-\alpha}(j)$$

avec

$$|\Phi_{1-\alpha}(j)| \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} j^{-\alpha-1}$$

Par suite

$$\frac{j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s^{-\alpha} - j^{-\alpha}) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Phi_{1-\alpha}(j)$$

et pour chaque  $j \geq 2$

$$\left| \frac{j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \right| \leq (j-1)^{-\alpha} - j^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |\Phi_{1-\alpha}(j)|$$

Cela conduit à

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+1)} \right| \\ & \leq \frac{1}{1-\alpha} - \Gamma(2-\alpha) + 1 - (k-1)^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{k-1} j^{-\alpha-1} \\ & \leq C \end{aligned}$$

avec

$$C = \frac{1}{1-\alpha} - \Gamma(2-\alpha) + 1 + \frac{\alpha}{2} \zeta(1+\alpha) > 0$$

où  $\zeta(\cdot)$  est la fonction zêta de Riemann (voir annexe B.6).

Enfin

$$|S_1| \leq \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C \|f'\|_{\beta}$$

Maintenant pour terminer nous pouvons mettre tous les morceaux ensemble pour obtenir

$$\frac{|\varphi(t_k) - \nabla_h^{\alpha} f(t_k)|}{h^{\beta}} \leq \left(1 + \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \|f'\|_{\beta} h^{1-\alpha-\beta} + \frac{2^{\beta}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega_{\beta}(f', 2h)$$

□

## 7.2 Convergence forte des opérateurs nabla fractionnaires vers l'opérateur dérivée fractionnaire

Le théorème suivant montre que la suite  $(A_h^\alpha)_h$  converge fortement vers  $A^\alpha$ .

**Théorème 7.2.1.** *On considère l'espace  $X_\beta = \{f \in H^\beta \text{ tel que } f' \in H_0^\beta\}$  muni de la norme de  $H^\beta$ .*

*Alors pour tout  $\beta$  tel que  $1 - \alpha - \beta > 0$  la suite  $(A_h^\alpha)_h$  converge fortement vers la dérivée fractionnaire  $A^\alpha$  sur  $X_\beta$  quand  $h$  tend vers 0.*

*Démonstration.* Pour chaque  $0 \leq x < y \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} & (A^\alpha - A_h^\alpha)(f)(x) - (A^\alpha - A_h^\alpha)(f)(y) \\ &= -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (R(-\lambda, A)(Af) - R(-\lambda, A_h)(A_h f))(x) d\lambda \\ &+ \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (R(-\lambda, A)(Af) - R(-\lambda, A_h)(A_h f))(y) d\lambda \end{aligned}$$

En introduisant un terme mixte nous obtenons

$$\begin{aligned} & (A^\alpha - A_h^\alpha)(f)(x) - (A^\alpha - A_h^\alpha)(f)(y) \\ &= -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, A)((Af - A_h f)(x) - (Af - A_h f)(y)) d\lambda \\ &+ \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (R(-\lambda, A) - R(-\lambda, A_h))(A_h f(x) - (A_h f)(y)) d\lambda \end{aligned}$$

On note par  $I_1(x, y)$  et  $I_2(x, y)$  respectivement, la première et la seconde intégrale de l'égalité ci-dessus.

Nous commençons par la première intégrale

$$\begin{aligned} & |I_1(x, y)| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} |R(-\lambda, A)((Af - A_h f)(x) - (Af - A_h f)(y))| d\lambda \\ &\leq \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \int_0^x e^{-\lambda t} |(Af - A_h f)(y-t) - (Af - A_h f)(x-t)| dt d\lambda \\ &+ \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \int_x^y e^{-\lambda t} |(Af - A_h f)(y-t)| dt d\lambda \end{aligned}$$

conduisant à

$$\frac{|I_1(x, y)|}{|x - y|^\beta} \leq \|Af - A_h f\|_\beta \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \left( \int_0^y e^{-\lambda t} dt \right) d\lambda$$

## 7.2 Convergence des opérateurs nabla vers l'opérateur dérivée fractionnaire

La majoration

$$\frac{I_1(x, y)}{|x - y|^\beta} \leq \frac{6\Gamma(\alpha)}{1 - \alpha} \omega_\beta(f', h)$$

découle du théorème de Fubini et de l'inégalité 6.1 .

Considérons maintenant la seconde intégrale

D'abord remarquons que,

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, A) A_h f(x) d\lambda \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} \left( \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} A_h f(t) dt \right) d\lambda \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \left( \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-t)} d\lambda \right) A_h f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x (x - t)^{-\alpha} A_h f(t) dt \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1} (R(-\lambda, A) - R(-\lambda, A_h)) A_h f(x) d\lambda \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x (x - t)^{-\alpha} A_h f(t) dt - \mathcal{I}_h \nabla_h^\alpha f(x) \\ &= (r_h \varphi)(x) + \mathcal{I}_h (\varphi(x) - \nabla_h^\alpha f(x)) \end{aligned}$$

A partir des lemmes 6.1.3 et 6.1.1, ils existent  $k$  et  $m$

$$\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{|I_2(x, y)|}{|x - y|^\beta} \leq 4\omega_\beta(\varphi, h) + \frac{|\varphi(t_k) - \nabla_h^\alpha f(t_k) - \varphi(t_m) + \nabla_h^\alpha f(t_m)|}{|t_k - t_m|^\beta}$$

Puis des lemmes 7.1.1 et 7.1.2 nous déduisons

$$\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{|I_2(x, y)|}{|x - y|^\beta} \leq 2 \left( \frac{16}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} + 1 \right) \|f'\|_\beta h^{1-\alpha-\beta} + \frac{2^{\beta+1}}{\Gamma(2 - \alpha)} \omega_\beta(f', 2h)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \|(A^\alpha - \nabla_h^\alpha)(f)\|_\beta \\ & \leq 2 \left( \frac{16}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} + 1 \right) \|f'\|_\beta h^{1-\alpha-\beta} + \frac{2^{\beta+1} + 6}{\Gamma(2 - \alpha)} \omega_\beta(f', 2h) \end{aligned}$$

D'où la conclusion du théorème.  $\square$

# Chapitre 8

## Applications

Comme applications, nous présentons dans ce chapitre deux exemples. Le premier consiste à calculer la dérivée fractionnaire de la fonction non linéaire  $f(x) = x^\mu \ln x$ . Le deuxième est un problème de Cauchy fractionnaire.

### 8.1 Exemple 1

Considérons la dérivée fractionnaire de  $f(x) = x^\mu \ln x$ . L'expression analytique de la dérivée fractionnaire de  $f$  est (voir [54, Formule (64)])

$$A^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1 - \alpha)} x^{\mu - \alpha} [\ln x + \psi(\mu + 1) - \psi(\mu + 1 - \alpha)]$$

où  $\psi(\cdot)$  est la fonction digamma (voir annexe B.3)  
L'erreur hölderienne discrète est définie par

$$E_H(h) = \max_{0 \leq i < j \leq 1/h} \frac{|(A^\alpha f - \nabla_h^\alpha f)(t_i) - (A^\alpha f - \nabla_h^\alpha f)(t_j)|}{|t_i - t_j|^\beta} \quad (8.1)$$

Selon nos considérations théoriques, la convergence est assurée par  $h^{1-\alpha-\beta}$  et  $\omega_\beta(f', 2h)$  (voir théorème 7.2.1).

Établissons une estimation de  $\omega_\beta(f', h)$

Pour tout  $0 \leq x < y \leq 1$

$$f'(y) - f'(x) = \mu(y^{\mu-1} \ln y - x^{\mu-1} \ln x) + y^{\mu-1} - x^{\mu-1}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} y^{\mu-1} \ln y - x^{\mu-1} \ln x &= \int_x^y \frac{d}{dt}(t^{\mu-1} \ln t) dt \\ &= (\mu - 1) \int_x^y t^{\mu-2} \ln t dt + \frac{1}{\mu - 1} (y^{\mu-1} - x^{\mu-1}) \end{aligned}$$

## 8.1 Exemple 1

---

Puis pour chaque  $1 + \beta < \beta' < \mu$  nous avons

$$\int_x^y t^{\mu-2} \ln t dt = \int_x^y t^{\mu-\beta'+\beta'-2} \ln t dt$$

Posons  $M = \max_{t \in ]0,1]} |t^{\mu-\beta'} \ln t|$

on a

$$\left| \int_x^y t^{\mu-2} \ln t dt \right| \leq M \int_x^y t^{\beta'-2} dt = \frac{M}{\beta'-1} (y^{\beta'-1} - x^{\beta'-1})$$

Donc

$$|f'(y) - f'(x)| \leq \frac{M\mu(\mu-1)}{\beta'-1} (y^{\beta'-1} - x^{\beta'-1}) + \left( \frac{\mu}{\mu-1} + 1 \right) (y^{\mu-1} - x^{\mu-1})$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{|f'(y) - f'(x)|}{|y-x|^\beta} &\leq \frac{M\mu(\mu-1)}{\beta'-1} |y-x|^{\beta'-1-\beta} + \left( \frac{\mu}{\mu-1} + 1 \right) |y-x|^{\mu-1-\beta} \\ &\leq \left( \frac{M\mu(\mu-1)}{\beta'-1} + \left( \frac{\mu}{\mu-1} + 1 \right) |y-x|^{\mu-\beta'} \right) |y-x|^{\beta'-1-\beta} \end{aligned}$$

Si  $|y-x| \leq h$  alors

$$\frac{|f'(y) - f'(x)|}{|y-x|^\beta} \leq \left( \frac{M\mu(\mu-1)}{\beta'-1} + \left( \frac{\mu}{\mu-1} + 1 \right) h^{\mu-\beta'} \right) h^{\beta'-1-\beta}$$

et

$$\omega_\beta(f', h) \leq \left( \frac{M\mu(\mu-1)}{\beta'-1} + \left( \frac{\mu}{\mu-1} + 1 \right) h^{\mu-\beta'} \right) h^{\mu-1-\beta}$$

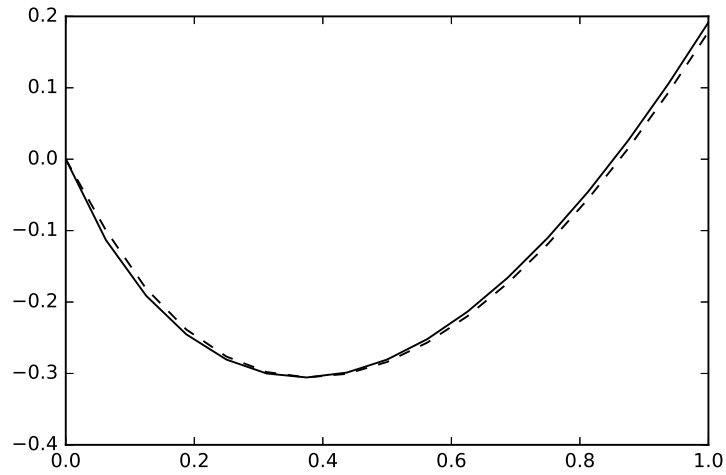
Dans le cas où  $\mu = 3/2, \beta = 0.1$  la convergence est assurée puisque

$$\mu - 1 - \beta = 0.4 > 0.$$

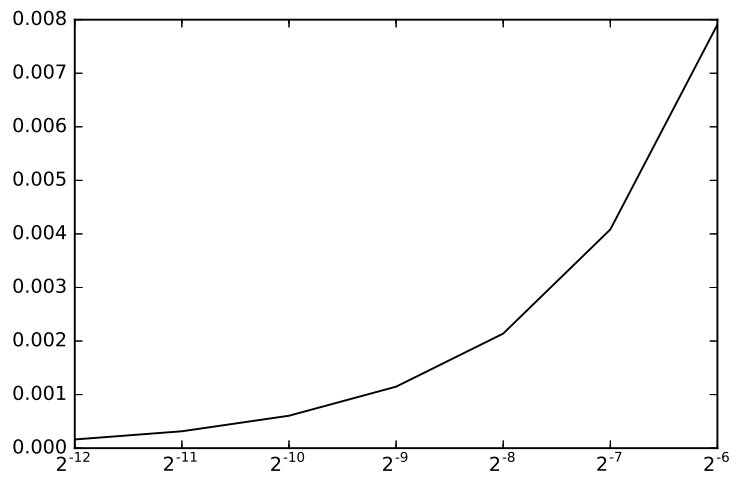
Dans la figure 8.1 nous comparons la dérivée fractionnaire de la fonction  $f(x) = x^\mu \ln x$  et son approximation. Les graphes de  $A^\alpha f$  et  $A_h^\alpha f$  sont présentés pour  $\mu = 3/2, \alpha = 0.3$  et  $\beta = 0.1$ . Dans la figure 8.2, nous représentons les erreurs Hölderiennes en fonction de  $h$ .

## 8.1 Exemple 1

---



**Figure 8.1** – Dérivée fractionnaire et son approximation de la fonction  $f(x) = x^\mu \ln x$ .  $A^\alpha f$  (trait plein),  $A_h^\alpha f$  (en pointillé) pour  $h = 2^{-4}$ .



**Figure 8.2** – L'erreur Hölderienne par rapport à  $h$ .



## 8.1 Exemple 1

---

Ensuite, dans les tables 8.1 et 8.2, nous estimons par la formule

$$EOC = \log_2 \left( \frac{E_H(2h)}{E_H(h)} \right)$$

l'ordre de convergence hölderienne pour respectivement  $\alpha = 0.3$  et  $\alpha = 0.5$

$h$	$E_H(h)$	$EOC$
$2^{-6}$	7.90823048e-03	*****
$2^{-7}$	4.08328011e-03	0.954
$2^{-8}$	2.13919796e-03	0.933
$2^{-9}$	1.14779414e-03	0.898
$2^{-10}$	6.05359801e-04	0.923
$2^{-11}$	3.15017458e-04	0.942
$2^{-12}$	1.62172602e-04	0.958
$2^{-13}$	8.29031044e-05	0.968

**Table 8.1** – L'erreur définie par (8.1) quand  $f(x) = x^\mu \ln x$  pour  $\mu = 3/2, \alpha = 0.3$  et  $\beta = 0.1$ .

$h$	$E_H(h)$	$EO$
$2^{-6}$	0.0236114997	*****
$2^{-7}$	0.0155503094	0.603
$2^{-8}$	0.0098857863	0.654
$2^{-9}$	0.0061296697	0.716
$2^{-10}$	0.0037306707	0.737
$2^{-11}$	0.0022381485	0.754
$2^{-12}$	0.0013274343	0.754
$2^{-13}$	0.0007799695	0.767

**Table 8.2** – L'erreur définie par (8.1) quand  $f(x) = x^\mu \ln x$  pour  $\mu = 3/2, \alpha = 0.5$  et  $\beta = 0.1$ .

Il apparait clairement que l'ordre de convergence estimé dépend de  $\alpha$ .

## 8.2 Exemple 2

Pour le deuxième exemple, nous considérons l'équation différentielle fractionnaire présentée dans [17], pour  $t \in [0, 1]$ .

$$D^\alpha y(t) = \frac{40320}{\Gamma(9-\alpha)} t^{8-\alpha} - 3 \frac{\Gamma(5+\alpha/2)}{\Gamma(5-\alpha/2)} t^{4-\frac{\alpha}{2}} + \frac{9}{4} \Gamma(\alpha+1) + \left( \frac{3}{2} t^{\frac{\alpha}{2}} - t^4 \right)^3 - [y(t)]^{\frac{3}{2}} \quad (8.2)$$

La condition initiale est  $y(0) = 0$ . La solution exacte de ce problème est

$$y(t) = t^8 - 3t^{4+\frac{\alpha}{2}} + \frac{9}{4}t^\alpha.$$

Pour  $\alpha = 0.5$ , nous affichons les résultats dans le tableau 8.3 pour  $\beta = 0.1$  et  $\beta = 0.01$  respectivement.

Apparemment, nous devons utiliser de petites valeurs pour  $\beta$  afin d'accroître la précision.

$h$	$E_H(h)$ pour $\beta = 0.1$	$E_H(h)$ pour $\beta = 0.01$
$2^{-7}$	0.0347581	0.0224598
$2^{-8}$	0.0269360	0.0163528
$2^{-9}$	0.0206910	0.0118018
$2^{-10}$	0.0158085	0.0084716
$2^{-11}$	0.0120388	0.0060613
$2^{-12}$	0.0091502	0.0043283
$2^{-13}$	0.0069465	0.0030872

**Table 8.3** – L'erreur hölderienne pour le problème (8.2) avec  $\alpha = 0.5$

# Quelques commentaires et questions ouvertes

Ce travail est né de la réflexion sur les méthodes d'Euler fractionnaires. La méthode d'Euler est la procédure numérique la plus simple pour la résolution des équations différentielles ordinaires, pourtant les premières recherches effectuées nous ont permis d'entrevoir des difficultés pour l'adapter au cas fractionnaire. La première, réside dans la multitude des définitions dites de dérivées fractionnaires et du caractère non local de la plupart de ces dernières.

La seconde, résulte de la complexité du choix de la différence finie associée. Nous avons alors opter pour construire nos opérateurs fractionnaires comme puissances d'opérateurs sectoriels. Pour pouvoir appréhender les opérateurs continus et discrets dans les mêmes espaces, nous avons prolonger les derniers par une interpolation linéaire par morceaux. Cette approche nous a permis de bâtir sur un socle solide les différents opérateurs fractionnaires continus et discrets analogues au cas ordinaire. Forts de cet acquis, nous nous sommes ensuite attelés à démontrer leurs convergences chacun dans son cadre approprié. Dans les espaces des fonctions continus avec poids l'uniforme convergence des nabla  $h$ -somme vers l'intégrale de Riemann-Liouville à été démontrée. Puis en considérant les espaces de Hölder, la convergence forte des opérateurs nabla étendu vers la dérivée fractionnaire a été prouvée. Nous avons ensuite entrouvert la porte de la théorie fractionnaire en échelle de temps, puisque l'uniforme convergence peut être perçu comme continuité d'une application de l'espace des échelles de temps vers l'ensemble des fonctions continues. Dans le secret espoir d'une formule efficace traversant les échelles de temps. Ce travail constitue une première étape vers la généralisation des différents schémas de dérivation numériques et des différentes quadratures au cas fractionnaire.

« Il semble que la perfection soit atteinte non quand il n'y a plus rien à ajouter, mais quand il n'y a plus rien à retrancher. » Antoine de Saint-Exupéry (Terre des hommes).

# Troisième partie

## Annexes

# Annexe A

## Cadres fonctionnels

### A.1 Les espaces des fonctions continues avec poids

Les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires sont naturellement considérés dans les espaces des fonctions continues avec poids (voir [37]). Ces espaces permettent d'appréhender les fonctions avec une singularité algébrique à l'origine.

**Définition A.1.1.** *Pour tout  $\beta > 0$  l'espace des fonctions continues avec poids est défini par*

$$C_\beta := \left\{ f \in C(0, 1] : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\beta f(t) \text{ existe} \right\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_\beta := \max_{t \in [0, 1]} t^\beta |f(t)|$$

$C_\beta$  est un espace de Banach.

Notons que

$$C_0 = C[0, 1] \tag{A.1}$$

est l'espace de Banach des fonctions continues. Nous rappelons la norme des opérateurs linéaires continus  $T$  de  $C_{\beta_1}$  vers  $C_{\beta_2}$  :

$$\|T\|_{\beta_1, \beta_2} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T(f)\|_{\beta_2}}{\|f\|_{\beta_1}}$$

Si  $\beta_1 = \beta_2$  nous écrivons juste  $\|T\|_{\beta_1}$ .

La chaîne d'inclusions suivante est vérifiée  $C[0, 1] \subset C_{\beta_1} \subset C_{\beta_2}$  si  $0 < \beta_1 < \beta_2$ .

## A.2 Les espaces des fonctions Hölderiennes

Les opérateurs d'intégration et de dérivations fractionnaires sont souvent considérés dans les espaces des fonctions Hölderiennes (voir [51]).

**Définition A.2.1.** On définit  $H^\beta$  l'espace de Banach des fonctions Hölderiennes sur  $[0, 1]$  d'exposant  $\beta$ , avec  $0 < \beta < 1$  et telle que  $f(0) = 0$ , muni de la norme  $\|f\|_\beta = \omega_\beta(f, 1)$ , où

$$\omega_\beta(f, \delta) = \sup_{\substack{s, t \in [0, 1] \\ 0 < |s-t| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\beta}$$

On définit le sous-espace  $H_0^\beta$  par

$$H_0^\beta = \left\{ f \in H^\beta, \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\beta(f, \delta) = 0 \right\}$$

**Remarque A.2.2.** Si  $f \in H_0^\beta$  alors  $|f(t) - f(t-h)| = o(h^\beta)$  uniformément par rapport à  $t$ , pour  $t = h$  on a  $|f(h)| = o(h^\beta)$ .

**Remarque A.2.3.** Si  $f \in H^\beta$  alors  $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\beta$ . En effet, pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$|f(x)| = \frac{|f(x) - f(0)|}{x^\beta} x^\beta \leq \|f\|_\beta.$$

**Remarque A.2.4.** Si  $f' \in H^\beta$  alors  $\omega_\beta(f, h)$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

En effet, pour chaque  $x, y \in [0, 1]$ ,  $x \neq y$  il existe  $\xi \in ]x, y[$  tel que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta} = |x - y|^{1-\beta} |f'(\xi)| \leq |x - y|^{1-\beta} \|f'\|_\beta$$

ce qui conduit à

$$\omega_\beta(f, h) \leq h^{1-\beta} \|f'\|_\beta \tag{A.2}$$

# Annexe B

## Fonctions spéciales et transformation de Laplace

### B.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction transcendante définie pour toute valeur  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . C'est une fonction méromorphe car elle est analytique sur tout le plan complexe sauf en les pôles simples  $z = 0, -1, -2, \dots$ . La fonction  $\Gamma(z)$  peut être définie de différentes façons, parmi lesquelles nous citons la formule d'Euler

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(1+z)(2+z) \cdots (n+z)} \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

La fonction  $\Gamma$  admet une représentation intégrale définie pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

*i)* pour tout  $z$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

*ii)* pour tout  $n = 1, 2, \dots$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

*iii)* Formule des compléments  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{B.1}$$

## B.2 La fonction Beta

La fonction Beta  $B(z_1, z_2)$  est définie pour tous complexes  $z_1, z_2$  tels que  $\operatorname{Re}(z_1) > 0$  et  $\operatorname{Re}(z_2) > 0$  par

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt$$

A l'aide d'un changement de variable approprié, la fonction prend la forme intégrale suivante

$$B(z_1, z_2) = \int_0^\infty \frac{t^{z_1-1}}{(1+t)^{z_1+z_2}} dt \quad (\text{B.2})$$

Elle est liée à la fonction gamma par la relation

$$B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)} \quad (\text{B.3})$$

## B.3 La fonction digamma

La fonction psi ou fonction digamma est définie pour tout  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  par

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}(\ln \Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

La fonction  $\psi$  vérifie la formule de récurrence

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

Si  $\operatorname{Re}(z) > 0$  la fonction  $\psi$  a pour représentation intégrale

$$\psi(z) = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt$$

## B.4 La fonction hypergéométrique de Gauss

Les fonctions hypergéométriques apparaissent avec les travaux d'Euler et Gauss. Il est possible de les définir de plusieurs manières. (Voir pour plus de détails [2], [21])



## B.5 Les fonctions de Mittag-Leffler

---

1. Représentées par des séries dites séries hypergéométriques dont les coefficients satisfont à une propriété de récurrence. Pour tout  $|z| < 1$

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

La notation  $(a)_n$  représente le symbole de Pochhammer donné par

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a(a+1) \cdots (a+n-1) & n > 0 \end{cases}$$

2. Comme solution de l'équation différentielle homogène du second ordre

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0$$

3. A l'aide de la formule intégrale d'Euler. Si  $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ ,

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; z \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

**Remarque B.4.1.** Si  $a$  ou  $b$  est un entier négatif, la série hypergéométrique ne comprend qu'un nombre fini de termes [2, formule 15.4.1],

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -m, b \\ c \end{matrix} ; z \right) = \sum_{n=0}^m \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{B.4})$$

**Remarque B.4.2.** La fonction hypergéométrique est reliée aux polynômes de Jacobi par la formule suivante :

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -m, b \\ c \end{matrix} ; z \right) = \frac{\Gamma(1+m)\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)} P_m^{(c-1, -m+b-c)}(1-2z) \quad (\text{B.5})$$

avec  $m \in \mathbb{N}$

## B.5 Les fonctions de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler apparaît naturellement dans les solutions des équations différentielles et intégrales fractionnaires (voir [37],[15], [47]).

C'est une fonction entière définie sur tout le plan complexe et dépendant d'un paramètre complexe  $\alpha$  tel que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ . Elle est donnée par

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

## B.6 La fonction zêta de Riemann

---

La fonction de Mittag-Leffler  $E_{\alpha,\beta}$  généralisant la précédente peut être définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z, \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(\alpha) > 0)$$

On peut citer les cas particuliers suivants :

1.

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}$$

2.

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$$

3.

$$E_{1,1}(z) = E_1(z) = e^z$$

## B.6 La fonction zêta de Riemann

La fonction  $\zeta$  de Riemann est une fonction définie pour tout complexe  $s$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > 1$  par la série de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Elle admet la représentation intégrale si  $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

## B.7 Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est une transformation intégrale particulièrement utile pour la résolution des équations différentielles et intégrales. Pour plus de détails voir [12],[18].

**Définition B.7.1.** *La transformée de Laplace d'une fonction  $f$  de variable réelle à support positif est la fonction de variable complexe  $p$ , définie par :*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Nous rappelons dans ce qui suit quelques propriétés importantes de la transformation de Laplace :

## B.8 Transformation inverse de Laplace

---

1. Linéarité

$$\mathcal{L}[af + bg](p) = a\mathcal{L}[f](p) + b\mathcal{L}[g](p)$$

2. Convolution

La convolution de deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  définies sur  $[0, \infty)$  est :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

Si  $f(t)$  et  $g(t)$  sont continues par morceaux alors

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$$

3. Une simple application de la définition donne

$$\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}$$

4. En remarquant que

$$(1 * f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

alors

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f](p) \quad (\text{B.6})$$

5. Translation

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)](p) = \mathcal{L}[f](p+a) \quad (\text{B.7})$$

## B.8 Transformation inverse de Laplace

La transformation inverse de Laplace notée  $\mathcal{L}^{-1}$  est l'inverse de la transformée de Laplace.

**Définition B.8.1.** *La transformée inverse de Laplace d'une fonction holomorphe  $F(p)$  de variable complexe  $p$  est une fonction telle que :*

$$\mathcal{L}[f](x) = F(p).$$

Quelques propriétés de la transformation inverse de Laplace sont rappelées dans ce qui suit :

1. Linéarité

$$\mathcal{L}^{-1}[aF + bG](x) = a\mathcal{L}^{-1}[F](x) + b\mathcal{L}^{-1}[G](x)$$

2.

$$\mathcal{L}^{-1}[1](x) = \delta(x) \quad (\text{B.8})$$

où  $\delta$  est la distribution delta de Dirac.

3.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right](x) = e^{-ax} \quad (\text{B.9})$$

4.

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-ap}F(p)](t) = f(t-a)u(t-a) \quad (\text{B.10})$$

où  $u(\cdot)$  est la fonction échelon unité définie par

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

## B.9 Transformation en $Z$

La transformation en  $Z$  est l'équivalent discret de la transformation de Laplace.

La transformée en  $Z$  de la suite  $f(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  est la fonction de variable complexe définie dans son domaine de convergence par :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Quelques propriétés des transformée en  $Z$  sont

1. Linéarité

$$Z[af(k) + bg(k)](z) = aF(z) + bG(z)$$

2. La convolution de deux suites est la suite  $(f * g)(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  définie par

$$(f * g)(k) := \sum_{i=0}^k f(k-i)g(i)$$

Alors

$$Z[(f * g)(k)](z) = F(z)G(z)$$

3. Loi de sommation

$$Z\left[\sum_{i=0}^k f(i)\right](z) = \frac{z}{z-1}F(z)$$

## B.9 Transformation en $Z$

---

### 4. La transformée en $Z$ inverse

La transformée en  $Z$  inverse est donnée par :

$$f(k) = Z^{-1} [F(z)] (k) = \oint_C F(z) z^{k-1} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

où  $C$  est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

Pour plus de détail voir [26]

# Annexe C

## Concepts de dérivation et intégration fractionnaires

**Définition C.0.1.** (*opérateurs de Riemann-Liouville*)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $a \leq x \leq b$ . L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  est définie par

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  est définie par

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \right)$$

**Définition C.0.2.** (*Dérivée fractionnaire de Caputo*)

Soit  $f \in C^1[a, b]$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $a \leq x \leq b$ . la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha$  est définie par

$${}^C D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt$$

**Définition C.0.3.** (*Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov*) Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a, b]$  alors la dérivée de Grünwald-Letnikov est donnée par :

$${}^{GL} D^\alpha f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f\left(x - j \frac{x-a}{n}\right)$$

# Annexe D

## Puissance fractionnaire d'opérateurs sectoriels

### D.1 Opérateurs sectoriels

La classe d'opérateurs sectoriels est une classe importante pour le calcul fonctionnel en général et la puissance fractionnaire d'opérateurs en particulier. Nous commençons par définir le concept d'opérateur sectoriel. Cette théorie a été initié par McIntosh [44] mais notre référence de base est [28, Section 2.1 ,p19]. On note  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ ,  $\rho(A)$  et  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  la résolvante, l'ensemble résolvant et le spectre d'un opérateur linéaire  $A$  sur un espace de Banach  $Z$ .

**Définition D.1.1.** On définit  $S_\omega$  le secteur ouvert par

$$\{z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \text{ and } |\arg z| < \omega\}, 0 < \omega \leq \pi.$$

**Définition D.1.2.** L'opérateur  $A$  est sectoriel d'angle  $\omega < \pi$  (en bref :  $A \in \text{Sect}(\omega)$ ) si :

- 1)  $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$  et
- 2)  $M(A, \omega') := \sup \{\|\lambda R(\lambda, A)\|, \lambda \notin \overline{S_{\omega'}}\} < \infty$  pour tout  $\omega < \omega' < \pi$ .

L'angle sectoriel  $\omega_A$  de l'opérateur  $A$  est défini par

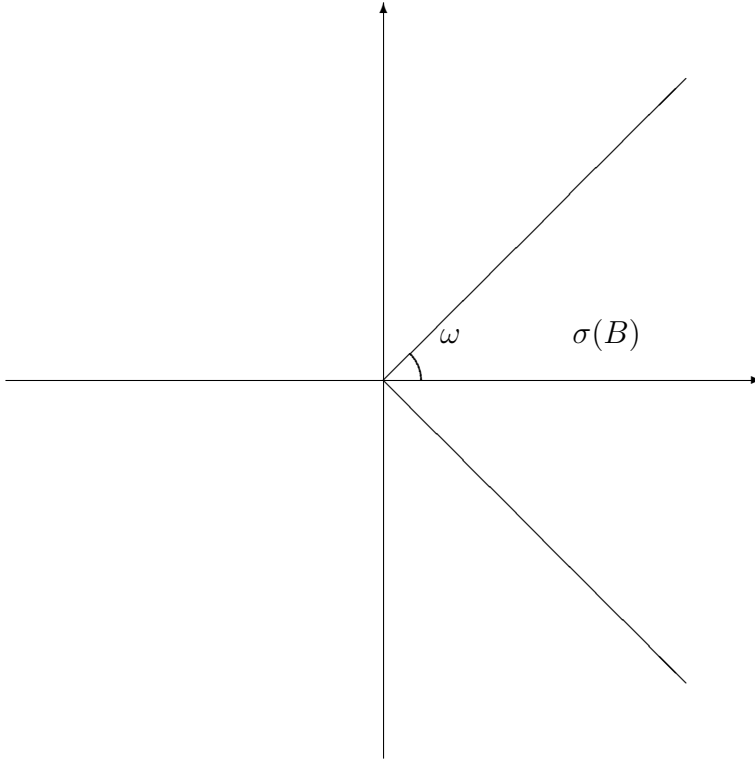
$$\omega_A = \inf \{0 \leq \omega < \pi, A \in \text{Sect}(\omega)\}$$

Remarquons que cet inf n'est jamais atteint.

## D.1 Opérateurs sectoriels

---

**Définition D.1.3.** Une famille d'opérateurs  $(A_\iota)_\iota$  est uniformément sectorielle d'angle  $\omega$  si  $A_\iota \in \text{Sect}(\omega)$  pour chaque  $\iota$  et  $\sup_\iota M(A_\iota, \omega') < \infty$  pour tout  $\omega < \omega' < \pi$ .



**Figure D.1** – Spectre d'un opérateur sectoriel

**Définition D.1.4.** Une suite uniformément sectorielle  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'angle  $\omega$  est dite approximation sectorielle sur  $S_\omega$  pour l'opérateur  $A$ , si la convergence sectorielle  $A_n \rightarrow A$  ( $S_\omega$ ) est satisfaite, ie

$$\lambda \in \rho(A) \text{ et } R(\lambda, A_n) \rightarrow R(\lambda, A) \text{ dans } \mathcal{L}(Z) \quad (\text{D.1})$$

pour  $\lambda \notin \overline{S_\omega}$ .

A remarquer que si (D.1) est vraie pour certains  $\lambda \notin \overline{S_\omega}$  alors (D.1) est vraie pour tout  $\lambda \notin \overline{S_\omega}$ . De plus,  $B \in \text{Sect}(\omega)$ .

**Remarque D.1.5.** Les opérateurs sectoriels dans la définition de Haase ne sont pas forcément à domaine dense (voir [33, Définition 3.8, p 97]).



## D.2 Représentation intégrale de Balakrishnan

---

Nous sommes maintenant en mesure de définir la puissance fractionnaire d'un opérateur  $A$  par le calcul fonctionnel naturel pour opérateurs sectoriels au sens de Haase.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ , choisir  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > \operatorname{Re} \alpha$  alors

$$A^\alpha := (1 + A)^n \left( \frac{z^\alpha}{(1 + z)^n} \right) (A)$$

La puissance d'opérateur sectoriel admet la représentation intégrale de Balakrishnan (voir [28, Proposition 3.1.12])

## D.2 Représentation intégrale de Balakrishnan

**Proposition D.2.1.** *Soit  $A$  un opérateur de domaine  $\mathcal{D}(A)$ ,  $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ , et soit  $0 < \alpha < 1$ . Alors pour tout  $f \in \mathcal{D}(A)$*

$$A^\alpha f(x) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} R(-\lambda, A) A f(x) d\lambda \quad (\text{D.2})$$

Plus généralement si  $0 < \operatorname{Re} \alpha < n \leq m$ , pour tout  $f \in \mathcal{D}(A^n)$  on a

$$A^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} [A(\lambda + A)^{-1}]^m f(x) d\lambda \quad (\text{D.3})$$

## D.3 Lois des exposants

L'additivité de l'opérateur puissance fractionnaire (ou première loi des exposants) est formulée dans la proposition suivante

**Proposition D.3.1.** *(voir [28, Proposition 3.1.1 c]) Soit  $A$  un opérateur sectoriel sur un espace de Banach  $X$  alors, pour tous  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$  l'identité*

$$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$$

*est satisfaite.*

## Annexe E

# Échelles de temps et chaînes de mesure

Le calcul en échelles de temps fût introduit par le mathématicien allemand S. Hilger, il décrit dans l'article [31] les fondations de l'analyse en chaînes de mesure. Il développa une théorie assez complète de la différentiation pour des fonctions définies sur une chaîne de mesure et il a limité son étude de l'intégration à une notion fondamentale de l'intégrale dite intégrale de Cauchy qui est simplement définie au moyen de primitives. Le processus d'intégration fût étendu par G. Guseinov dans [27] pour l'intégration de Riemann et Lebesgue en échelles de temps et un critère d'intégrabilité de Riemann fût établi. D'un autre côté l'intégration en chaînes de mesure a été étudié dans [8], où les auteurs ont défini et analysé les intégrales de Cauchy, Riemann, Cauchy-Riemann, Borel et Lebesgue pour les fonctions d'une chaîne de mesure dans un espace de Banach réel ou complexe arbitraire.

Une échelle de temps  $\mathbb{T}$  est une partie non vide fermée de  $\mathbb{R}$ , par exemples :  $h\mathbb{Z}$  ( $h > 0$ ),  $[0, 1]$ , l'ensemble triadique de Cantor.

**Définition E.0.1.** (voir [31], [40]) Une chaîne de mesure est un triplet  $(\mathbb{T}, \leq, \mu)$  constituée d'une échelle de temps  $\mathbb{T}$  (i.e. une partie non vide fermée de  $\mathbb{R}$ ), d'une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{T}$  complète (i.e. Tout sous ensemble non vide de  $\mathbb{T}$  borné supérieurement admet un supremum) et d'une fonction continue  $\mu : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

i (Propriété de cocycle)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{T} : \mu(x, y) + \mu(y, z) = \mu(x, z)$$

ii (Isotonie forte)

$$\forall x, y \in \mathbb{T} : x > y \Rightarrow \mu(x, y) > 0$$

---

**Remarque E.0.2.** 1. La topologie de Hausdorff (ou topologie de l'ordre) sur  $\mathbb{T}$  est engendrée par les intervalles ouverts

$$]r, s[ := \{t \in \mathbb{T} : r < t < s\}, r, s \in \mathbb{T} \cup \{\pm\infty\}$$

2. Si  $(\mathbb{T}, \leq, \mu)$  est une chaîne de mesure alors  $\mathbb{T}$  est métrisable de métrique

$$d(r, s) = |\mu(r, s)|$$

3.  $\mu$  est dite étalonnage de croissance (growth calibration). Elle induit la mesure  $\nu$  sur  $\mathbb{T}$  définie par

$$\nu([r, s[) = \mu(s, r)$$

4. Sur  $\mathbb{R}$  l'application  $\lambda(s, r) := s - r$  est un étalonnage de croissance. Elle induit la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

Afin de pallier le manque de connexité, il est important de définir les opérateurs de saut.

Pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , on définit l'opérateur de saut avant  $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  (respectivement, l'opérateur de saut arrière  $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ) par  $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$  (respectivement  $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ ).

Par convention, on supposera que  $\sigma(t) = t$  si  $t$  est le maximum de  $\mathbb{T}$  et  $\rho(t) = t$  si  $t$  est le minimum de  $\mathbb{T}$ .

Finalement définissons la fonction de granulation  $\mu^* : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$  par

$$\mu^*(t) = \sigma(t) - t$$

# Annexe F

## Codes Python

### F.1 Code de l'exemple 4.1

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sat Jan 30 14:21:20 2016

@author: Khitri Leila
"""

import numpy as np
from scipy.special import gamma
import matplotlib.pyplot as plt
#fonction de mittag-leffler
def mit_lef(alpha,beta,x, tol=1e-12,nmax=1e6):
    s=1/gamma(beta)*np.ones(np.shape(x))
    n,residu=1,s
    while n<nmax and np.linalg.norm(residu,np.inf)>tol:
        residu=x**n/gamma(alpha*n+beta)
        s+=residu
        n+=1
    return s
# Exemple 1
#Initialisation des paramètres
alpha=0.75
c=1
lam=1
N=500
```

## F.1 Code de l'exemple 4.1

---

```
h=1/N
t=np.linspace(h,1,N-1)
# Résolution approchée
n=N-1
v=c*t**(alpha-1)
lalpha=lam*h**alpha
A=(1-lalpha)*np.identity(n)
om=1
for k in range(1,n):
    om=om*(1+(alpha-1)/k)
    A=A-om*lalpha*np.diag(np.ones(n-k),-k)
y= np.linalg.solve(A, v)
# Solution exacte
yexa=c*gamma(alpha)*t**(alpha-1)*mit_lef(alpha,alpha,lam*t**alpha)
# erreur dans C_{1-alpha}
er=np.linalg.norm((y-yexa)*t**(1-alpha),np.inf)
print('er',er)
plt.figure(1)
plt.plot(t,yexa,color='black',label="analytical solution",linestyle='solid')
plt.plot(t,y,label=u"numerical solution",color='black',linestyle='dotted')
plt.savefig('hom1.eps')
# Analyse de convergence en fonction de h
N=100
HH=[]
er=[]
for k in range(6):
    h=1/N
    t=np.linspace(h,1,N-1)
    n=N-1
    v=c*t**(alpha-1)
    lalpha=lam*h**alpha
    A=(1-lalpha)*np.identity(n)
    om=1
    for k in range(1,n):
        om=om*(1+(alpha-1)/k)
        A=A-om*lalpha*np.diag(np.ones(n-k),-k)
    y= np.linalg.solve(A, v)
    yexa=c*gamma(alpha)*t**(alpha-1)*mit_lef(alpha,alpha,lam*t**alpha)
    r=np.linalg.norm((y-yexa)*t**(1-alpha),np.inf)
    er.append(r)
    HH.append(h)
```

## F.2 Code de l'exemple 4.2

---

```
N=2*N
plt.figure(2)
plt.plot(HH,er,color='black')
plt.savefig('hom2.eps')
# Ordre de convergence expérimental
e=np.array(er)
eoc=[]
for i in range(5):
    x=e[i]/e[i+1]
    eoc.append(np.log2(x))
print(eoc)
```

## F.2 Code de l'exemple 4.2

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sat Jan 30 17:51:44 2016

@author: Khitri Leila
"""

import numpy as np
from scipy.special import gamma
import matplotlib.pyplot as plt
#fonction de mittag-leffler
def mit_lef(alpha,beta,x, tol=1e-12,nmax=1e6):
    s=1/gamma(beta)*np.ones(np.shape(x))
    n,residu=1,s
    while n<nmax and np.linalg.norm(residu,np.inf)>tol:
        residu=x**n/gamma(alpha*n+beta)
        s+=residu
        n+=1
    return s
# Exemple 2
# Initialisation des paramètres
alpha=0.5
lam=1
f=2
mu=2
d=1
```

## F.2 Code de l'exemple 4.2

---

```
b=1
# Résolution approchée
N=[100,1000]
s=np.zeros((2,1000))
t=np.zeros((2,1000))
m=[0,0]
er=[]
for i in range(2):
    h=1/N[i]
    n=N[i]-1
    x=np.linspace(h,1,n)
    v=d/gamma(alpha)*x**(alpha-1)
    halpha=h**alpha
    A=halpha*np.identity(n)
    om=1
    for k in range(1,n):
        om=om*(1+(alpha-1)/k)
        A=A+om*halpha*np.diag(np.ones(n-k),-k)
    v=v+f*np.dot(A,x**mu)
    A=np.identity(n)-lam*A
    y= np.linalg.solve(A, v)
    yexa=b*d*x**(alpha-1)*mit_lef(alpha,alpha,lam*x**alpha)+\
        gamma(mu+1)*f*x**(alpha+mu)*mit_lef(alpha,alpha+mu+1,lam*x**alpha)
    er.append(np.linalg.norm((y-yexa)*x**(alpha),np.inf))
    s[i,:n]=y
    t[i,:n]=x
    m[i]=n
# Représentation graphique
plt.plot(x,yexa,color='black',)
plt.plot(t[0,:m[0]],s[0,:m[0]],label=u" solution numérique",\
color='black',linestyle='dotted')
plt.plot(t[1,:m[1]],s[1,:m[1]],color='black',linestyle='dashed')
plt.savefig('nonhom.eps')
print("l'erreur",er)
```

## F.3 Code de l'exemple 4.3

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Mon Feb  1 08:29:57 2016

@author: Khitri Leila
"""

# Importation des packages et modules
import numpy as np
from numpy.linalg import norm
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import gamma, beta
#Initialisation des données
alpha=0.7
aa,mu=1,3
T,N=80,16000
# Définition des fonctions du système
f1=lambda x,y: aa-(mu+1)*x+x**2*y
f2=lambda x,y: mu*x-x**2*y
# Initialisation des variables
h=T/N
t=np.linspace(0,T,N)
x=np.zeros(N)
y=np.zeros(N)
x[0],y[0]=1.1,2.9
# Calcul des coefficients de la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton
b=np.zeros(N)
a=np.zeros(N)
for k in range(1,N):
    b[k]=(k**alpha-(k-1)**alpha)
    a[k]=(k+1)**(alpha+1)-2*k**(alpha+1)+(k-1)**(alpha+1)
# Calcul de la solution par la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton
for j in range(1,N):
    s1=s2=0
    for k in range(j):
        s1+=b[j-k]*f1(x[k],y[k])
        s2+=b[j-k]*f2(x[k],y[k])
    p1=x[0]+h**alpha/gamma(alpha+1)*s1
```



### F.3 Code de l'exemple 4.3

---

```
p2=y[0]+h**alpha/gamma(alpha+1)*s2
s1=s2=0
for k in range(1,j):
    s1+=a[j-k]*f1(x[k],y[k])
    s2+=a[j-k]*f2(x[k],y[k])
x[j]=x[0]+h**alpha/gamma(alpha+2)*(f1(p1,p2)+\
    ((j-1)**(alpha+1)-(j-1-alpha)*j**alpha)*f1(x[0],y[0])+s1)
y[j]=y[0]+h**alpha/gamma(alpha+2)*(f2(p1,p2)+\
    ((j-1)**(alpha+1)-(j-1-alpha)*j**alpha)*f2(x[0],y[0])+s2)
# Calcul de la solution par l'opérateur nabla
# Initialisation des variables
xx=np.zeros(N)
yy=np.zeros(N)
xx[0],yy[0]=1.1,2.9
c1=1+h**alpha*(mu+1)
c01=xx[0]+yy[0]+h**alpha*aa
c3=(1+h**alpha)*h**alpha
c02=x[0]+h**alpha*aa
c=h**alpha/gamma(alpha)/gamma(1-alpha)
r1=[]
# Calcul des coefficients
b=np.zeros(N)
for k in range(1,N):
    b[k]=beta(k+alpha,1-alpha)
# Evaluation de la solution
for n in range(1,N):
    s1=0
    s2=0
    for i in range(1,n):
        s1=s1+b[n-i]*(aa-x[i])
        s2=s2+b[n-i]*(aa-(mu+1)*x[i]+x[i]**2*y[i])
    s1=c*s1
    s2=c*s2
    c0=-c02-s2
    c2=-c01-s1
    c2=h**alpha*c2
    p=[c3,c2,c1,c0]
    r=np.roots(p)
    r1.append(r)
    for j in range(3):
        if np.imag(r[j])==0:
```

## F.4 code de l'exemple 8.1

---

```

                lx=r[j].real
                break
            xx[n]=lx
            ly=-(1+h**alpha)*(lx)+c01+s1
            yy[n]=ly
# Calcul de l'erreur absolue
Ex=norm(xx-x,np.inf)
Ey=norm(yy-y,np.inf)
# Représentations graphiques
fig,ax1 = plt.subplots()
ax1.plot(t, xx, 'k-')
ax1.set_xlabel('t')
ax1.set_ylabel('x(t)')
ax2 = ax1.twinx()
ax2.plot(t, yy, 'k:')
ax2.set_ylabel('y(t)')
plt.savefig('bruss1.eps')
fig2=plt.figure()
plt.plot(xx,yy,'k')
plt.savefig('bruss2.eps')
plt.show()
```

## F.4 code de l'exemple 8.1

### F.4.1 Approximation de la dérivée fractionnaire

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Mon Jun 25 06:07:11 2018

@author: User Khitri L.
"""
from scipy.special import gamma, psi
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# définition de la fonction
beta= 0.1
alpha=0.3
```

#### F.4 code de l'exemple 8.1

---

```
p=3/2
def f(x):
    y=np.zeros(len(x))
    for i in range(len(x)):
        if x[i]==0:
            y[i]==0
        else:
            y[i]=x[i]**p*np.log(x[i])
    return y
# derivee fractionnaire exacte
def dalphaexa(x):
    y=np.zeros(len(x))
    for i in range(len(x)):
        if x[i]==0:
            y[i]==0
        else:
            y[i]=gamma(p+1)/gamma(p+1-alpha)*x[i]**(p-alpha)\
                *(np.log(x[i])+psi(p+1)-psi(p+1-alpha))
    return y
# initialisation
# calcul des derivees approchees
def dalpha(f,h):
    t=np.arange(0,1+h,h)
    n=len(t)
    #matrice GL
    b=np.zeros((n,n))
    # construction des omegas
    w=np.zeros(n)
    w[0]=1
    for k in range(0,n-1):
        w[k+1]=-(alpha-k)/(k+1)*w[k]
    for k in range(n):
        b+=np.diag(w[k]*np.ones((n-k)),-k)
    b=h**(-alpha)*b
    y=f(t)
    #derivee
    ypalha=np.dot(b,y)
    return t,ypalha
h=2**-4
t,ypalha=dalphi(f,h)
yalpha=dalphiexa(t)
```

```
# Représentation graphique
fig=plt.figure(3)
plt.plot(t,yalpha,'k',t,yalpha,'k--')
fig.savefig('approximholder.eps')
plt.show()
```

### F.4.2 L'analyse de convergence hölderienne en fonction de $h$

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sat May 19 06:52:36 2018

@author: L. Khitri
"""

from scipy.special import gamma, psi
import numpy as np
from math import log
import matplotlib.pyplot as plt
#fonction
beta= 0.1
alpha=0.3

p=3/2
def f(x):
    y=np.zeros(len(x))
    for i in range(len(x)):
        if x[i]==0:
            y[i]==0
        else:
            y[i]=x[i]**p*np.log(x[i])
    return y
#derivee fractionnaire exacte
def dalphaexa(x):
    y=np.zeros(len(x))
    for i in range(len(x)):
        if x[i]==0:
```

#### F.4 code de l'exemple 8.1

---

```

        y[i]==0
    else:
        y[i]=gamma(p+1)/gamma(p+1-alpha)*x[i]**(p-alpha)\
            *(np.log(x[i])+psi(p+1)-psi(p+1-alpha))
    return y
# initialisation
# calcul des derivees approchees
def dalpha(f,h):
    t=np.arange(0,1+h,h)
    n=len(t)
    #matrice GL
    b=np.zeros((n,n))
    # construction des omegas
    w=np.zeros(n)
    w[0]=1
    for k in range(0,n-1):
        w[k+1]=- (alpha-k)/(k+1)*w[k]
    for k in range(n):
#        b=w[k]*np.ones((n-k))
        b+=np.diag(w[k]*np.ones((n-k)),-k)

    b=h**(-alpha)*b
    y=f(t)
    #derivee
    ypalha=np.dot(b,y)
    return t, ypalha
eralpha=[]
H=[]
for k in range(6,14):
    h=2**(-k)
    H.append(h)
    t,ypalha=dalphi(f,h)
    yalphi=dalphiexa(t)
    n=len(t)

    M=0
    for i in range(n):
        for j in range((n)):
            if i!=j:
                M1=abs(ypalphi[i]-yalphi[i]-(ypalphi[j]-yalphi[j]))\
                    /abs(t[i]-t[j])**beta)

```

## F.5 code de l'exemple 8.2

---

```
                if M1>M:
                    M=M1
            eralpha.append(M)
eocalpha=[]
for k in range(len(eralpha)-1):

    eocalpha.append(log(eralpha[k]/eralpha[k+1],2))

print("l'erreur holderienne")
print(eralpha)
print('ordre de convergence')
print(np.array(eocalpha))

fig=plt.figure(2)
plt.plot(H,eralpha,'k')
fig.savefig('erreurholder.eps')
plt.show()
```

## F.5 code de l'exemple 8.2

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sat Apr  7 17:51:58 2018

@author: Khitri L.
"""

import numpy as np
from math import log
from scipy.special import gamma
from scipy.optimize import newton

alpha=0.5
E=lambda t :40320/gamma(9-alpha)*t**(8-alpha)-3*gamma(5+alpha/2)\
/gamma(5-alpha/2)*t**(4-alpha/2)+9/4*gamma(alpha+1)+(3/2*t**(alpha/2)-t**4)**3
yexa=lambda t:t**8-3*t**(4+alpha/2)+9/4*t**alpha
beta=0.01
mm=[]
```

## F.5 code de l'exemple 8.2

---

```
for l in range(7,14):
    h=2**-l
    t=np.arange(0,1+h,h)
    E1=E(t)
    n=len(t)
    w=np.zeros(n)
    z=np.zeros(n)
    w[0]=1
    for k in range(0,n-1):
        w[k+1]=-(alpha-k)/(k+1)*w[k]
    for k in range(1,n):
        s=0
        for j in range(1,k+1):
            s+=w[j]*z[k-j]
        s*=h**-alpha
        f=lambda x: h**-alpha*x+x**(3/2)+s-E1[k]
        f_der=lambda x: 3/2*x**.5+h**-alpha
        z[k]=newton(f,z[k-1],fprime=f_der)
    y=yexa(t)
    m=0
    for i in range(n):
        for j in range((n)):
            if i!=j:
                m1=abs(z[i]-y[i]-(z[j]-y[j]))/abs(t[i]-t[j]))**beta
                if m1>m:
                    m=m1
    mm.append(m)
print(mm)
eoc=[]
for k in range(len(mm)-1):
    eoc.append(log(mm[k]/mm[k+1],2))
print(eoc)
```

# Bibliographie

- [1] Fractional calculus and applied analysis. De Gruyter. URL <https://www.degruyter.com/view/j/fca>.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards, 1972.
- [3] G. A. Anastassiou. Principles of delta fractional calculus on time scales and inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 52 (3) :556 – 566, 2010. ISSN 0895-7177. doi : <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.03.055>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717710001731>.
- [4] G. A. Anastassiou. Foundations of nabla fractional calculus on time scales and inequalities. *Computers & Mathematics with Applications*, 59 (12) :3750 – 3762, 2010. ISSN 0898-1221. doi : <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.072>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122110002683>.
- [5] A. Ashyralyev. A note on fractional derivatives and fractional power of operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 357 :232–236, 2009. doi : [10.1016/j.jmaa.2009.04.012](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.04.012).
- [6] F. Atıcı and P. Elo. Discrete fractional calculus with the nabla operator. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Spec. Ed. I*, (3) :1–12, 2009.
- [7] F. M. Atıcı and M. Uyanik. Analysis of discrete fractional operators. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 9(1) :139–149, 2015. doi : [10.2298/AADM150218007A](https://doi.org/10.2298/AADM150218007A).
- [8] B. Aulbach and L. Neidhart. Integration on measure chains in : B. aulbach and s. elaydi and g. ladas (eds.), proceedings of the 6th in-



## BIBLIOGRAPHIE

---

- ternational conference on difference equations and applications. pages 239–225, 2004.
- [9] A. V. Balakrishnan. Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pacific Journal of Mathematics*, 10(2) : 419–437, 1960.
- [10] N. Bastos, R. C. Ferreira, and D. Torres. Discrete-time fractional variational problems. *Signal Processing*, 91(3) :513–524, 2011. doi : 10.1016/j.sigpro.2010.05.001.
- [11] S. Das. *Functional Fractional Calculus*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. doi : 10.1007/978-3-642-20545-3.
- [12] B. Davies. *Integral Transforms and Their Applications*. Springer-Verlag New York, 2002. doi : 10.1007/978-1-4684-9283-5.
- [13] E. C. de Oliveira and J. A. T. Machado. A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014. URL <https://doi.org/10.1155/2014/238459>.
- [14] J. Diaz and T. Osler. Differences of fractional order. *Mathematics of Computation*, 28 :185–202, 1974.
- [15] K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations, an application-oriented exposition using differential operators of caputo type*. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2010. doi : 10.1007/978-3-642-14574-2.
- [16] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29(1) :3–22, Jul 2002. ISSN 1573-269X. doi : 10.1023/A:1016592219341. URL <https://doi.org/10.1023/A:1016592219341>.
- [17] K. Diethelm, N. J. ford, and A. D. Freed. Detailed error analysis for fractional adam method. *Numerical Algorithms*, 36(1) :31–52, 2004. doi : 10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be.
- [18] G. Doetsch. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1974. doi : 10.1007/978-3-642-65690-3.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [19] M. Du and Z. Wang. Initialized fractional differential equations with riemann-liouville fractional-order derivative. *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1) :49–60, Mar 2011. ISSN 1951-6401. doi : 10.1140/epjst/e2011-01380-8. URL <https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01380-8>.
- [20] N. Elezović, L. Lin, and L. Vukšić. Inequalities and asymptotic expansions of the wallis sequence and the sum of the wallis ratio. *J. Math. Inequal*, 7(4) :679–695, 2013.
- [21] A. Erdelyi and H. Bateman. *Higher Transcendental Functions*. McGRAW-HILL BOOK COMPAGNY, INC., 1953.
- [22] N. J. Ford and A. C. Simpson. The numerical solution of fractional differential equations : Speed versus accuracy. *Numerical Algorithms*, 26(4) : 333–346, Apr 2001. ISSN 1572-9265. doi : 10.1023/A:1016601312158. URL <https://doi.org/10.1023/A:1016601312158>.
- [23] V. Gafiychuk and B. Datsko. Stability analysis and limit cycle in fractional system with brusselator nonlinearities. *Physics Letters A*, 372 (29) :4902 – 4904, 2008. ISSN 0375-9601. doi : <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.05.045>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960108007986>.
- [24] R. Garrappa. On some generalizations of the implicit euler method for discontinuous fractional differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 95 :213 – 228, 2014. ISSN 0378-4754. doi : <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2012.04.009>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475412001115>. Discontinuous Differential Systems : Theory and Numerical Methods.
- [25] R. Garrappa. Trapezoidal methods for fractional differential equations : Theoretical and computational aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 110 :96–112, April 2015.
- [26] U. Graf. *Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists and Engineers : A Computational Approach using a Mathematica Package*. Birkhäuser Basel, 2004.
- [27] G. S. Guseinov. Integration on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 285(1) :107 – 127, 2003. ISSN 0022-247X. doi : [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(03](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)

## BIBLIOGRAPHIE

---

- 00361-5. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X03003615>.
- [28] M. Haase. *The functional calculus for sectorial operators*. Operator theory : Advances and Applications, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [29] E. Hanert, E. Schumacher, and E. Deleersnijder. Front dynamics in fractional-order epidemic models. *Journal of Theoretical Biology*, 279 (1) :9 – 16, 2011. ISSN 0022-5193. doi : <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2011.03.012>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519311001524>.
- [30] R. Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific Publishing Co, 2000.
- [31] S. Hilger. Analysis on measure chains- a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results Math*, 18 :18–56, 1990.
- [32] H. W. Hövel and U. Westphal. Fractional powers of closed operators. *Studia mathematica*, 42 :177–194, 1972.
- [33] K. Ito and F. Kappel. *Evolutions Equations and Approximations*. World Scientific, Singapore, 2002.
- [34] K. Ito, B. Jin, and T. Takeuchi. On the sectorial property of the caputo derivative operator. *Applied Mathematics Letters*, 47 :43–46, 2015. doi : [10.1016/j.aml.2015.03.001](https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.03.001).
- [35] L. Khitri-Kazi-Tani and H. Dib. On the approximation of riemannliouville integral by fractional nabla h-sum and applications. *Mediterr. J. Math.*, 2017. doi : [10.1007/s00009-017-0887-9](https://doi.org/10.1007/s00009-017-0887-9).
- [36] L. Khitri-Kazi-Tani and H. Dib. Hölderian convergence of fractional extended nabla operator to fractional derivative, 2019. arXiv :1904.06884.
- [37] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier New york, 2006.
- [38] T. Kisela. On a discretization of the initial value problem for a linear nonhomogeneous fractional differential equation. *Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA'10), University of Extremadura, Badajoz, Spain, 18-20 Oct, 2010*.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [39] S. Kumar, D. Kumar, and J. Singh. Numerical computation of fractional black–scholes equation arising in financial market. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1(3) :177 – 183, 2014. ISSN 2314-808X. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2014.10.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2314808X14000438>.
- [40] V. Lakshmikantham, S. Sivasundaram, and B. Kaymakcalan. *Dynamic Systems on Measure Chains*. Springer US, 1996. doi : 10.1007/978-1-4757-2449-3.
- [41] T. T. Lorenzo, Carl F. and Hartley. Initialized fractional calculus. Technical report, NASA, 2000.
- [42] J. T. Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3) :1140 – 1153, 2011. ISSN 1007-5704. doi : <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.05.027>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570410003205>.
- [43] C. Martinez and M. Sanz. *The Theory of Fractional Powers of Operators*. North Holland, 2001.
- [44] A. McIntosh. Operators which have an  $h_{\text{inf}}$  calculus. *Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations*, pages 210–231, 1986.
- [45] M. Y. Ongun, D. Arslan, and R. Garrappa. *Nonstandard finite difference schemes for a fractional-order Brusselator*. Advances in Difference Equations system, Springer International Publishing, 2013.
- [46] M. Ortigueira and J. Machado. What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, 293 :4–13, 2015. doi : 10.1016/j.jcp.2014.07.019.
- [47] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [48] E. D. Rainville. *Special Functions*. Macmillan, New York, 1960.
- [49] A. Račkauskas and C. Suquet. Functional laws of large numbers in hölder spaces. *ALEA. Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 2013.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [50] B. Ross. *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus*. In : Ross B. (eds) *Fractional Calculus and Its Applications. Lecture Notes in Mathematics. vol 457*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. doi : doi.org/10.1007/BFb0067096.
- [51] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives, Translated from the 1987 Russian original*. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [52] S. K. Sen, J. V. Devi, and R. R. Kumar. Can fractional calculus be generalized : Problems and efforts. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(4) :1058–1099, 2018. ISSN 1307-5543. doi : 10.29020/nybg.ejpam.v11i4.3338. URL <https://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/3338>.
- [53] I. Suwan, S. Owies, and T. Abdeljawad. Monotonicity results for h-discrete fractional operators and application. *Advances in Difference Equations*, 2018(1) :207, Jun 2018. ISSN 1687-1847. doi : 10.1186/s13662-018-1660-5. URL <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1660-5>.
- [54] D. Valério, J. Trujillo, M. Rivero, J. Machado, and D. Baleanu. Fractional calculus : A survey of useful formulas. *The European Physical Journal Special topics*, 2013.
- [55] Y. Wang and C. Li. Does the fractional brusselator with efficient dimension less than 1 have a limit cycle? *Physics Letters A*, 363(5) :414 – 419, 2007. ISSN 0375-9601. doi : <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.11.038>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960106018020>.
- [56] J. Wendel. Note on the gamma function. *Amer. Math. Monthly*, 55 : 563–564, 1948.
- [57] H. E. White. Functions with a concave modulus of continuity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1974. doi : 10.1090/S0002-9939-1974-0330366-7.
- [58] P. A. Williams. Fractional calculus on time scales with taylor’s theorem. *Fractional Calculus & Applied analysis*, 15(4) :616–638, 2012.
- [59] T. Zhou and C. Li. Synchronization in fractional-order differential systems. *Physica D*, 212(1-2) :111–125, 2005.

## Résumé

Cette thèse porte principalement sur la construction des opérateurs fractionnaires discrets comme élévation à la puissance d'opérateurs sectoriels. Cette approche requiert la construction des résolvantes et le contrôle de leurs normes dans divers espaces de Banach. Cette démarche originale dans le cas discret, nous a permis de retrouver certains opérateurs et de construire un nouveau.

Suite à cela, des résultats essentiels de convergence sont démontrés.

Nous démontrons l'uniforme convergence de l'opérateur nabla h-somme vers l'intégrale de Riemann-Liouville dans les espaces des fonctions continues puis dans les espaces des fonctions continues avec poids.

Aussi, la convergence forte des opérateurs nabla fractionnaires vers l'opérateur dérivée fractionnaire dans les espaces de Hölder est prouvée.

Comme applications la résolution de quelques problèmes de Cauchy fractionnaires est proposée.

Mots-clés : opérateurs fractionnaires, puissances fractionnaires d'opérateurs sectoriels, intégrale de Riemann-Liouville, dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, formule des rectangles fractionnaire, formule des trapèzes fractionnaire, convergence.

## Abstract

This thesis focuses on the construction of discrete fractional operators as fractional powers of sectorial operators. This approach requires the construction of resolvents and control of their norms in various Banach spaces. This original approach in the discrete case, allowed us to find some operators and to build a new one.

Following this, essential convergence results are proved.

We show the uniform convergence of the operator nabla h-sum to the Riemann-Liouville integral in the spaces of the continuous functions and then in weighted continuous spaces.

Also, the strong convergence of fractional nabla operators to the fractional derivative operator in Hölder spaces is proved.

As applications the resolution of some problems of fractional Cauchy is proposed.

Keywords: fractional operator, fractional powers of sectorial operators, Riemann-Liouville integral, Riemann-Liouville fractional derivative, fractional rectangle rule, fractional trapezoidal formula, convergence.

## ملخص

تركز هذه الرسالة على بناء المؤثرات الكسرية المتقطعة كرفع إلى قوة لمؤثرات القطاعيين. هذا النهج يتطلب بناء المفككات والسيطرة على معاييرها في مختلف فضاءات بنخ. هذا النهج الأصلي في الحالة المتقطعة، سمح لنا بإيجاد بعض المؤثرات وبناء واحد جديد.

بعد ذلك، تظهر نتائج التقارب الأساسية. نبرهن على التقارب المنتظم للمؤثر nabla h-sum نحو متكاملة ريمان-ليوفيل في فضاءات الدوال المستمرة ومن ثم في فضاءات الدوال المستمرة بالوزن.

أيضا، نثبت التقارب القوي للمؤثر الكسري nabla نحو المؤثر المشتقة الكسرية في فضاءات هولدر. كالتطبيقات يتم اقتراح حل بعض مشاكل كوشي الكسرية.

الكلمات الرئيسية : المؤثر الكسري، القوة الكسرية للمؤثرات القطاعيين، متكاملة ريمان-ليوفيل، المشتقة الكسرية لريمان-ليوفيل، صيغة الكسرية للمستطيلات، صيغة الكسرية لشبه المنحرف، تقارب.