RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES DE MASTER

Équations aux Dérivées Partielles et Applications

PRÉSENTÉ PAR
HAFFAF Hadjer Wafaâ

Sujet

Approche par la méthode de Nehari d'un problème elliptique à données indéfinies

Soutenu à Tlemcen le 14 Septembre 2011 devant le jury composé de :

Mebkhout Benmiloud	Président	MAA	UABB Tlemcen
Abdellaoui Boumedienne	Examinateur	MCA	UABB Tlemcen
Bensedik Ahmed	Examinateur	MAA	UABB Tlemcen
Bouchekif Mohammed	Directeur	Prof.	UABB Tlemcen

À ma mère,

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements au Professeur Bouchekif Mohammed qui a été un directeur de mémoire exemplaire. J'ai beaucoup apprécié ses qualités humaines et professionnelles. Je le remercie donc pour sa patience ainsi que la rigueur de son suivi.

J'exprime ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury de me faire l'honneur d'assister à ma soutenance. Je remercie très chaleureusement le Professeur Mebkhout Benmiloud pour avoir accepté de présider ma soutenance. J'adresse mes sincères remerciements aux Professeurs Abdellaoui Boumedienne et Benseddik Ahmed pour l ?Intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et pour avoir accepté de participer au jury.

Grande est ma gratitude envers ma mère et ma tante Malika Dali Youcef pour leur grand soutient et leur présence qui me fut indispensable.

Pour finir, je tiens à remercier ma famille, cousins et cousines, ainsi que mes amis pour leurs encouragements réguliers et leur présence.

Table des matières

Introduction

L'objet de notre mémoire est l'application de la méthode de Nehari pour établir l'existence de solutions d'une équation semi linéaire elliptique avec fonctions poids changeant de signe.
Le problème qu'on considère s'insère dans la forme de problèmes générale :

$$-\Delta u(x) = f(x, u)$$

avec des conditions aux limites.
Pour aborder cette classe de problèmes, on compte, aujourd'hui, trois différentes classes d'approches. Les méthodes topologiques, les méthodes variationnelles (pour les problèmes sous forme variationnelle) et les méthodes numériques pour une approximation des solutions.

Parmi les méthodes topologiques on retrouve la linéarisation (le théorème d'inversion locale), la bifurcation, la méthode du degré topologique, les théorèmes de point fixe ou encore la méthode des sous et sur solutions.
Quant aux méthodes variationnelles [11] [8]leur principe est de passer d'une recherche de solutions d'équation aux dérivées partielles à une recherche d'extremums (points critiques) d'une fonctionnelle J(dite fonctionnelle d'énergie)

$$\mathcal{D}(J)(u) = 0$$

Le tout en passant par la formulation variationnelle[3].
Pour la recherche de ces extremums, on a la minimisation directe si la fonctionnelle d'énergie est bornée inférieurement. Dans le cas contraire, il y a la minimisation sous contraintes (minimisation sous des variétés où la fonctionnelle est bornée inférieurement, variété de Nehari notamment). Ou encore la méthode du min-max(le théorème du col) [11][8].
C'est dans le but de trouver des points critiques de type points-selle que Nehari mit au point, en 1960 [10], une technique de résolution consistant à

minimiser l'énergie J non pas sur l'espace de définition tout entier, mais sur la variété, qui porte aujourd'hui son nom,

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathbb{E} : \langle J'(u), u\rangle = 0\}$$

(E un espace de Banach, tel que $J : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$.)
Il se trouve que dans notre cas, la fonctionnelle d'énergie associée au problème n'est pas bornée sur l'espace de définition tout entier mais l'est sur la variété de Nehari qu'elle définie.
Le problème qu'on considère s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda a(x)u(x) + b(x)|u(x)|^{p-1}u(x) & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

avec Ω un domaine borné, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ et $a, b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fonctions régulières mais de signe non constant.

Un cas particulier du problème qu'on considère a été étudié par Brezis-Nirenberg[4], il s'agit du cas où les fonctions poids vérifient $a \equiv b \equiv 1$. Le problème s'écrit alors

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = u^p + \lambda u & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) > 0 & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $p = \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$.
La méthode utilisée pour sa résolution est la minimisation sous la boule unité (la fonctionnelle d'énergie se trouvant être bornée inférieurement dessus) combinée avec le principe de sous et sur solutions.

À noter que la méthode de Nehari n'est pas la seule approche possible pour ce problème. Amann et Lopez-Gomez [2] ont justement usé de la théorie de la bifurcation globale (approche topologique donc) pour prouver l'existence et la multiplicité de solutions de ce même problème.

Ce travail a été organisé de la sorte : le premier chapitre est consacré aux préliminaires. Les espaces considérés ainsi que les résultats généraux utilisés-plus loin- sont introduits dans ce chapitre. Notions que l'on retrouve -avec détails- notamment dans [3], [12], [14]et [7].

Vient alors le second chapitre. Là est la partie centrale du mémoire présenté. Se basant essentiellement sur [5], on regarde, dans ce chapitre, la minimisation sur la variété de Nehari associée au premier problème. On y étudie la restriction de l'énergie J à la variété de Nehari, qui est en fait constituée de deux ensembles disjoints dès que $0 < \lambda < \widetilde{\lambda}$. Et on regarde comment l'existence ainsi que la non-existence de solutions positives sont liées aux propriétés de cette variété. .
Pour réaliser ce chapitre on a aussi puisé dans [10] et [16].

Le troisième chapitre est pour la présentation de certaines applications, autres que celle présentée dans le chapitre 2.[15], [17]

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on dresse le cadre de notre travail. Il contient des définitions introductives ainsi que des résultats élémentaires utilisés dans les chapitres suivants.

1.1 Cadre fonctionnel

Le cadre fonctionnel le plus approprié pour une approche variationnelle d'une équation aux dérivées partielles reste celui des espaces de Sobolev.

1.1.1 Définition des espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}^N$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition

Soit $m \geq 1$ un entier. Les espaces de Sobolev sont définis par :

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \Big| \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \text{ avec } |\alpha| \leq m, \quad \exists g_\alpha \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^\alpha \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad \Big\}$$

Sachant que $|\alpha| = \sum\limits_{1 \leq i \leq N} \alpha_i$ et $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$

On note $D^\alpha u = ug_\alpha$.
L'espace $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathrm{W}}^{m,p} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^p}$$

est un espace de Banach.

On pose $\mathrm{H}^m = \mathrm{W}^{m,2}(\Omega)$; H^m muni du produit scalaire

$$(u,v)_{\mathrm{H}^m} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathrm{L}^2}$$

est un espace de Banach.

Le cadre fonctionnel dans lequel nous nous posons dans le chapitre suivant est le cas particulier où $m = 1$ et $p = 2$:

$$\mathrm{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \middle| \exists g \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u D\varphi = -\int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad \right\}$$

1.1.2 Inégalités de Sobolev

Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

On suppose que Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ avec une frontière bornée, ou bien on prend $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Théorème 1.1.1. *[3] Soit $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < \infty$. On a :*

$$\begin{array}{llll} Si & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0, & alors & \mathrm{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathrm{L}^q(\Omega) \text{ où } \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}, \\ Si & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0, & alors & \mathrm{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathrm{L}^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[, \\ Si & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0, & alors & \mathrm{W}^{m,p}(\Omega) \subset \mathrm{L}^\infty(\Omega), \end{array}$$

avec injections continues.

Théorème 1.1.2. *(Rellich-Kondrachov)[3] On suppose Ω borné de classe $\mathcal{C}^1$. On a :*

Si	$p < N,$	*alors*	$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathrm{L}^q(\Omega)$	$\forall q \in [1, p^*[$ *où* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N},$
Si	$p = N,$	*alors*	$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathrm{L}^q(\Omega)$	$\forall q \in [1, +\infty[,$
Si	$p > N,$	*alors*	$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}),$	

avec injections compactes.

En particulier, comme $N \geq 2$, $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, 2^*[$

1.1.3 L'espace $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$

Définition

Soit $1 \leq p < \infty$; $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$. On note

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$$

L'espace $\mathrm{W}_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $\mathrm{W}^{1,p}$ est un espace de Banach séparable. H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1.

Théorème 1.1.3. *[3] On suppose Ω de classe $\mathcal{C}^1$. Soit*

$$u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \quad \textit{avec} \quad 1 \leq p < \infty$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$
(ii) $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Le théorème ci-dessus suggère que les fonctions de $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ sont en fait les fonctions de $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ qui "s'annulent sur le bord $\partial\Omega$".

Théorème 1.1.4. *(Inégalité de Poincaré)[3] On suppose que Ω est un ouvert borné (au moins dans une direction). Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p)telle que*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p} \leq C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p} \qquad \forall u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty)$$

En particulier, l'expression $\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p}$ *est une norme sur* $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}}$. *Et sur* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *l'expression* $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ *est un produit scalaire qui induit la norme* $\|\nabla\|_{\mathrm{H}^2}$ *équivalente à la norme* $\|u\|_{\mathrm{H}^1}$.

1.2 Notions de la théorie des points critiques

Soit E un espace de Hilbert ou, d'une manière plus générale, un espace de Banach réflexif.
Soit $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $\mathcal{C}^1$. Et on note $\varphi'(u) : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$(le dual de E) sa Fréchet-dérivée.

Définitions

On dit que $u \in \mathrm{E}$ est un point critique si $\varphi'(u) = 0$. Sinon, u est dit point régulier.

On dit que $\beta \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de φ s'il existe un point critique u de φ avec $\varphi(u) = \beta$. Sinon, β est une valeur régulière.

Théorème 1.2.1. *[11] Soit la fonctionnelle* $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *telle que*

(i) φ *est faiblement semi-continue inférieurement,*
(ii) φ *est coercive(c'est-à-dire* $\varphi(u) \to +\infty$ *lorsque* $\|u\| \to \infty$*).*

Alors φ *est bornée inférieurement et il existe* $u_0 \in \mathrm{E}$ *tel que*

$$\varphi(u_0) = \inf_{\mathrm{E}} \varphi.$$

Chapitre 2

Méthode de Nehari

C'est d'une méthode variationnelle qu'il s'agit. Une minimisation sous contrainte d'une fonctionnelle d'énergie, où la contrainte, justement, est la variété de Nehari.

On commence ce chapitre par définir la variété de Nehari et par introduire certaines applications qui, on le verra par la suite, nous renseignent d'avantage sur la nature de cette variété.

2.1 Variété de Nehari

Dans un cadre assez général, on considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dont l'équation s'avère être l'équation d'Euler de la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x))dx \quad \text{où} \quad F(x, u(x)) = \int_0^u f(x, s)ds$$

qu'on considère, tenant compte de la condition au bord, sur l'espace fonctionnel $\mathrm{E} = \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$. Évidemment la fonctionnelle J peut ne pas être bornée sur tout l'espace mais peut l'être sur certains sous-ensembles de E. Un bon candidat pour un tel sous-ensemble est la dite variété de Nehari :

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathrm{E} : \langle J'(u), u\rangle = 0\}$$

Le résultat suivant introduit une classe d'applications à travers lesquelles il s'avère intéressant de voir ces variétés :

Théorème 2.1.1. *Soit* $u \in \mathrm{E} - \{0\}$ *et* $t > 0$
Alors $tu \in \mathcal{N}$ *si et seulement si* $\Phi'_u = 0$ *où* $\Phi_u(t) := J(tu)$

Démonstration. On a par définition

$$\Phi_u(t) = J(tu)$$

et donc : $\Phi'_u(t) = \langle J'(u), u\rangle = \frac{1}{t}\langle J'(tu), tu\rangle$.
Si $\Phi'_u(t) = 0$, alors $\langle J'(tu), tu\rangle = 0$
i.e. : $tu \in \mathcal{N}$ □

En d'autres termes, les points de la variété $\mathcal{N}$ correspondent aux points stationnaires des applications Φ_u. En conséquence logique, on divise $\mathcal{N}$ en trois sous-ensembles $\mathcal{N}^+, \mathcal{N}^-$ et $\mathcal{N}^\circ$ qui correspondent aux minimums locaux, maximums locaux et aux points d'inflexion des applications Φ_u.
Pour cela, on se penche sur la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\Phi'_u(t) &= \langle J'(tu), u\rangle \\
&= \int_\Omega |\nabla(tu)||\nabla u|dx - \lambda \int_\Omega f(x,tu)udx \\
&= t\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega f(x,tu)udx \\
\text{d'où} \qquad \Phi''_u(t) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega (f'_u(x,tu)u)udx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega f'_u(x,tu)u^2 dx
\end{aligned}$$

Et on peut définir les sous-ensembles :

$$\mathcal{N}^+ = \{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)u^2)dx > 0\}$$

$$\mathcal{N}^- = \{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)u^2)dx < 0\}$$

$$\mathcal{N}^\circ = \{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)u^2)dx = 0\}$$

et c'est $\Phi''_u(1)$ qui est utilisée pour ces définitions, puisqu'il est clair que si u est un minimum local pour J, alors Φ_u a un minimum local en $t = 1$:

Théorème 2.1.2. *Soit $u \in \mathcal{N}$. Alors*

$$(i) \quad \Phi'_u(1) = 0$$
$$(ii) \quad u \in \begin{cases} \mathcal{N}^+ & si \quad \Phi''_u(1) > 0 \\ \\ \mathcal{N}^- & si \quad \Phi''_u(1) < 0 \\ \\ \mathcal{N}^\circ & si \quad \Phi''_u(1) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. En effet, soit $u \in \mathcal{N}$. Ceci est équivalent à dire que :

$$\langle J'(u), u\rangle = 0$$

ce qui équivaut à : $\Phi'_u(1) = 0$ d'où (i)
Pour (ii), il y a donc trois cas :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N}^+ &\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u))u^2)dx > 0 \\ &\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,tu)|_(t=1)u^2)dx > 0 \\ &\Rightarrow \Phi''_u(1) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N}^- &\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u))u^2)dx < 0 \\ &\Rightarrow \Phi''_u(1) < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N}^\circ &\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u))u^2)dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,tu)|_(t=1)u^2)dx = 0 \\ &\Rightarrow \Phi''_u(1) = 0. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant atteste que les minimiseurs de J sur la variété $\mathcal{N}$ sont bien, en général, points critiques de J :

Théorème 2.1.3. *Supposons que u_0 est un minimiseur local pour J sur $\mathcal{N}$ et que $u_0 \notin \mathcal{N}^\circ$.*
Alors $J'(u_0) = 0$.

Démonstration. Soit u_0 un minimum local pour J sur $\mathcal{N}$ avec $u_0 \notin \mathcal{N}^\circ$ (c'est-à-dire : $\Phi''_{u_0} \neq 0$). Ceci implque que :

$$J(u_0) = \min_{\gamma(u)=0} J(u)$$

où $\gamma(u) = \langle J'(u), u\rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f(x,u)u)dx$
Il s'en suit, d'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, que :

$$\exists \mu \in \mathrm{R}, \quad J'(u_0) = \mu.\gamma'(u_0). \tag{2.1}$$

Ainsi :

$$\langle J'(u_0), u_0\rangle = \mu \langle \gamma'(u_0), u_0\rangle$$

Compte tenu du fait que $u_0 \in \mathcal{N}$, il vient que :

$$\langle J'(u_0), u_0\rangle = \mu \langle \gamma'(u_0), u_0\rangle = 0$$

Et donc :

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda f(x,u_0)u_0)dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega (|\nabla u_0|^2)dx = \lambda \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \tag{2.2}$$

Et alors :

$$\begin{aligned}
\langle \gamma'(u_0), u_0\rangle &= \int_\Omega (2|\nabla u_0|^2 - \lambda f'_u(x,u_0)(u_0)^2)dx - \lambda \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \\
&= \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda f'_u(x,u_0)(u_0)^2)dx \qquad (2.2) \\
&= \Phi''_{u_0}(1) \\
&\neq 0 \qquad \text{puisque } u_0 \notin \mathcal{N}^0
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\mu = 0$ (compte tenu du fait que le produit est nul). Injecté dans (2.1), cela donne :

$$J'(u_0) = 0$$

$\square$

À présent, on se tourne vers le problème, assez particulier, où

$$f(x,u(x)) = \lambda a(x)u(x) + b(x)|u(x)|^{p-1}u(x),$$

il s'en suit :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda a(x)u(x) + b(x)|u(x)|^{p-1}u(x) & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

avec $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ et $a, b : \overline{\Omega} \to \mathrm{R}$ fonctions régulières mais de signe non constant, avec $a \in \mathrm{L^q}$ et b bornée.
La fonctionnelle d'Euler-Lagrange qui lui est associée est donnée par :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b|u|^{p+1}dx$$

Et donc, la variété de Nehari qui correspond à ce problème est définie par :

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle = \textstyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2 - b|u|^{p+1})dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \textstyle\int_\Omega b(x)|u(x)|^{p+1}dx = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx$$

En injectant ce dernier résultat dans l'expression de J_λ, on obtient :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{N} \Leftrightarrow J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx \end{aligned}$$

Ou encore :

$$u \in \mathcal{N} \Leftrightarrow J_\lambda(u) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega b|u|^{p+1}dx$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ &= \{u \in \mathcal{N} \ : \ \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u).u^2)dx > 0\} \\ &= \{u \in \mathcal{N} \ : \ \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda[a + \frac{p}{\lambda}b|u|^{p-2}u]u^2)dx > 0\} \\ &= \{u \in \mathcal{N} \ : \ \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx - p\int_\Omega b|u|^{p+1}dx > 0\} \\ &= \{u \in \mathcal{N} \ : \ (1-p)\int_\Omega b|u|^{p+1}dx > 0\} \end{aligned}$$

et comme $p > 1$, il vient que :

$$\mathcal{N}^+ = \{u \in \mathcal{N} \ : \ \int_\Omega b|u|^{p+1}dx < 0\}$$

De la même manière on arrive à montrer que :

$$\mathcal{N}^- = \{u \in \mathcal{N} \ : \ \int_\Omega b|u|^{p+1}dx > 0\}$$

Et que :

$$\mathcal{N}^\circ = \{u \in \mathcal{N} \ : \ \int_\Omega b|u|^{p+1}dx = 0\}$$

C'est à ce moment qu'on ressort les applications introduites dans le théorème 2.1.1 :

$$\Phi_u(t) = J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx$$

et en dérivant, cela donne :

$$\Phi_u'(t) = t\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx - t^p\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx$$

Compte tenu du fait que $t > 0$, on conclut que si $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx$ et $\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx$ sont du même signe, alors Φ_u admet un et un seul point stationnaire en :

$$t(u) = (\frac{\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx}{\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx})^{\frac{1}{p-1}}.$$

En effet,

$$\Phi_u'(t) = 0 \Rightarrow \int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx - t^{p-1}\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx = 0$$

$$\Rightarrow t^{p-1} = \frac{\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx}{\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx}$$

$$\Rightarrow t = (\frac{\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx}{\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx})^{(p-1)^{-1}}.$$

Et si $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx$ et $\int_\Omega(b|u|^{p+1})dx$ sont de signes opposés, alors Φ_u n'admet aucun point stationnaire (Φ'_u ne s'annulant pas).
On définit alors :

$$\mathbf{L}^+ = \{u \in \mathrm{E}, \|u\| = 1, \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx > 0\}$$
$$\mathbf{L}^- = \{u \in \mathrm{E}, \|u\| = 1, \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx < 0\}$$
$$\mathbf{L}^0 = \{u \in \mathrm{E}, \|u\| = 1, \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx = 0\}$$

On définit aussi :

$$\mathbf{B}^+ = \{u \in \mathrm{E}, \|u\| = 1, \int_\Omega (b|u|^{p+1})dx > 0\}$$
$$\mathbf{B}^- = \{u \in \mathrm{E}, \|u\| = 1, \int_\Omega (b|u|^{p+1})dx < 0\}$$
$$\mathbf{B}^0 = \{u \in \mathrm{E}, \|u\| = 1, \int_\Omega (b|u|^{p+1})dx = 0\}$$

C'est alors qu'on distingue trois cas :

(i) Si $u \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^+$, alors Φ_u est croissante dans $]0, t(u)]$ et décroissante dans $[t(u), +\infty[$. Et comme $\Phi_u(0) = 0$, on en conclut que $\Phi_u(t) > 0$ pour t petit (dépassant même $t(u)$). On note aussi que $\Phi_u(t) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Aussi, $\Phi_u(t)$ admet un unique maximum en $t(u)$ et donc $t(u)u \in \mathcal{N}^-$.

(ii) Si $u \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^-$, alors Φ_u décroît dans $]0, t(u)]$ pour croître ensuite dans $[t(u), +\infty[$. Et comme $\Phi_u(0) = 0$, il vient que $\Phi_u(t) < 0$ pour les t petits. On peut noter que $\Phi_u(t) \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$.
Aussi, $\Phi_u(t)$ admet un unique minimum en $t(u)$ et donc $t(u)u \in \mathcal{N}^+$.

(iii) Si $u \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^-$ (ou, respectivement, $u \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+$), alors $\Phi''_u(t) \neq 0$ pour tout t et dans ce cas, Φ_u est strictement croissante (respectivement décroissante) pour tout $t > 0$. (Le cas où $u \in \mathbf{B}^0$ (ou encore $u \in \mathbf{L}^0$) entraîne que $\Phi_u \equiv 0$ et est donc non intéressant)
Il est tout aussi facile de raisonner dans le sens inverse. Par exemple, si $t(u)u \in \mathcal{N}^-$ ceci signifie que :

$$(t(u))^{p+1} \int_\Omega b|u|^{p+1}dx = (t(u))^2 \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx > 0$$

Ce qui entraîne que :

$$\int_\Omega b|u|^{p+1}dx > 0 \quad \text{et que} \quad \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx > 0$$

c'est-à-dire que : $\frac{u}{\|u\|} \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^+$.
On peut donc raisonner comme suit : Si $u \in \mathrm{E} - \{0\}$ alors :

(i) $\exists \alpha > 0 / \alpha u \in \mathcal{N}^-$ si et seulement si $\frac{u}{\|u\|} \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^+$.
(ii) $\exists \alpha > 0 / \alpha u \in \mathcal{N}^+$ si et seulement si $\frac{u}{\|u\|} \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^-$.
(iii) Si $u \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^-$ ou si $u \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+$, aucun multiple de u n'appartient à $\mathcal{N}$.

2.2 Cas de la variété à une seule composante

On note $\lambda_1(a)$ la première valeur propre positive du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda a(x) u(x) & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

et Φ_1 la fonction propre qui lui est associée.

Dans ce premier cas on suppose que $0 < \lambda < \lambda_1(a)$. Alors la valeur propre principale $\mu(\lambda)$ du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda a(x) u(x) = \mu u(x) & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

est positive. Et donc :

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx = \mu \int_\Omega u^2(x)dx > \mu(\lambda) \int_\Omega u^2(x)dx \qquad \forall u \in \mathrm{E} - \{0\}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx > \mu(\lambda) \int_\Omega u^2(x)dx \qquad \forall u \in \mathrm{E} - \{0\}$$

En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx \geq \delta \|u\|\|^2 \qquad \forall u \in \mathrm{E}$$

pour s'en convaincre, on raisonne par l'absurde : on suppose que $\forall \delta > 0$ on ait : $\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx < \delta \|u\|^2$. En particulier pour $\delta = \mu(\lambda)$, ce qui nous mène à une contradiction.
De cette dernière estimation il résulte que $\mathbf{L}^-$ et $\mathbf{L}^0$ sont vides (puisque l'intégrale qui les définit ne peut être que positive). De même, $\mathcal{N}^+$ est vide et $\mathcal{N}^\circ$ se réduit à $\{0\}$.
De plus, compte tenu des derniers résultats de la section précédente, on a :

$$\mathcal{N}^- = \{t(u)u : u \in \mathbf{B}^+\}$$
$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^- \cup \{0\}$$

C'est pourquoi on s ?intéresse, dans la suite de ce paragraphe, au comportement de $J_\lambda(u)$ sur $\mathcal{N}^-$.
Rappelons que pour $u \in \mathcal{N} = \mathcal{N}^- \cup \{0\}$, on a :

$$J_\lambda(u) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) \int_\Omega b|u|^{p+1}dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx$$

Dans notre cas, il est évident que $J_\lambda(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathcal{N}^-$. Ainsi, J_λ est bornée inférieurement par 0 sur $\mathcal{N}^-$.
À présent, on se propose de montrer que : $\inf\limits_{u \in \mathcal{N}^-} J(u) > 0$. On suppose que $u \in \mathcal{N}^-$.
On pose ensuite $v = \frac{u}{\|u\|}$ tel que $v \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^+$. Et donc $u = t(v)v$ avec

$$t(v) = (\frac{\int_\Omega (|\nabla v|^2 - \lambda a v^2)dx}{\int_\Omega b|v|^{p+1}dx})^{\frac{1}{p-1}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= J_\lambda(t(v)v) \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})t^2(v) \int_\Omega (|\nabla v|^2 - \lambda a v^2)dx \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})(\frac{\int_\Omega (|\nabla v|^2 - \lambda a v^2)dx}{\int_\Omega b|v|^{p+1}dx})^{\frac{2}{p-1}} \int_\Omega (|\nabla v|^2 - \lambda a v^2)dx \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})(\frac{(\int_\Omega (|\nabla v|^2 - \lambda a v^2)dx)^{\frac{p+1}{p-1}}}{\int_\Omega b|v|^{p+1}dx})
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega b|v|^{p+1}dx &\leq \sup_{x\in\Omega} b(x) \int_\Omega |v|^{p+1}dx \\
&\leq \sup_{x\in\Omega} b(x).C.(\int_\Omega (|v|^{p+1})^{\frac{2}{p+1}}dx)^{\frac{p+1}{2}} \qquad \text{car } v \in \mathbf{L^2}(\Omega) \Rightarrow \left|v^{p+1}\right| \in \mathbf{L^{\frac{2}{p+1}}}(\Omega) \\
&\leq \bar{b}.C.(\int_\Omega (|\nabla v|^2 dx)^{\frac{p+1}{2}} \qquad \text{d'aprés l'inégalité de Poincaré}
\end{aligned}$$

et où $\bar{b} = \sup_{x\in\Omega} b(x)$

D'où :

$$J_\lambda(u) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\frac{(\int_\Omega(|\nabla v|^2 - \lambda a v^2)dx)^{\frac{p+1}{p-1}}}{(\int_\Omega b|v|^{p+1}dx)^{\frac{2}{p-1}}} \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\frac{(\delta)^{\frac{p+1}{p-1}}}{(\bar{b}C)^{\frac{2}{p-1}}} > 0$$

Il s'en suit que $\inf_{u\in\mathcal{N}} J_\lambda(u) > 0$.

Sous réserve que $\inf_{u\in\mathcal{N}} J_\lambda(u) < \infty$ (sinon c'est le cas trivial où tous les points u sont des minimiseurs), on montre qu'il existe un minimiseur sur $\mathcal{N}^-$ qui est aussi point critique de $J_\lambda(u)$. On aura, du coup, montré l'existence d'une solution non triviale de notre problème.

Soit alors $(u_n) \subset \mathcal{N}^-$ une suite minimisante,

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) < \infty$$

La suite (u_n) est bornée dans E et ce parce que :

$$J_\lambda(u_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})[\int_\Omega(|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2)dx] \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\delta\|u_n\|^2$$

elle admet donc une sous-suite, qu'on notera aussi par (u_n), qui est faiblement convergente dans l'espace réflexif E :

$$u_n \rightharpoonup u_0 \qquad \text{dans E}$$

Et par injections compactes on a :

$$u_n \to u_0 \qquad \text{dans } \mathbf{L^2}(\Omega)$$

et :

$$u_n \to u_0 \qquad \text{dans } \mathbf{L^{p+1}}(\Omega)$$

on rappelle que $1 < p < \frac{N-2}{N+2} = 2^* - 1$
En passant à une sous-suite encore, on a :

$$u_n \to u_0 \qquad \text{p.p. dans } \Omega$$

De là il vient que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) &= \lim_{n\to\infty}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p+1})\int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx \\ &= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p+1})\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx \\ &= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p+1})\int_\Omega b|u_0|^{p+1}dx\end{aligned}$$

Et comme : $\lim\limits_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) > 0$, alors $u_0 \neq 0$.
(sinon $\int_\Omega b|u_0|^{p+1}dx = 0$, ce qui mènerait à une contradiction)
Or :

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a(u_0)^2)dx \geq \delta\|u_0\|^2$$

ce qui implique que :

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a(u_0)^2)dx > 0$$

chose qui, aux côtés de l'estimation qui l'a précède

$$0 < \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega b|u_0|^{p+1}dx$$

signifie que $u_0 \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^+$. Et d'après le résultat (i) du paragraphe 2.1, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\alpha u_0 \in \mathcal{N}^-$.
On montre à présent que :$u_n \to u_0$ dans E. Pour se faire, on raisonne par l'absurde et on se contente de la convergence faible montrée plus haut :

$$u_n \rightharpoonup u_0 \qquad \text{dans E}$$

Comme $\|.\|_{\mathrm{E}}$ est σ-semi-continue inférieurement, cela implique que :

$$\|u_0\|_{\mathrm{E}} < \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathrm{E}}$$

Par suite :

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2 - b|u_0|^{p+1})dx < \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2 - b|u_n|^{p+1})dx = 0$$

(puisque $(u_n) \subset \mathcal{N}^- \subset \mathcal{N}$)
D'un autre côté, $\alpha u_n \rightharpoonup \alpha u_0$ dans E. Et donc :

$$\begin{aligned} J_\lambda(\alpha u_0) &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) \int_\Omega b|\alpha u_0|^{p+1} dx \\ &\leq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})[\int_\Omega b|\alpha|^{p+1}|u_0 - u_n|^{p+1} dx + \int_\Omega b|\alpha u_n|^{p+1} dx] \\ &< (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) \liminf_{n\to\infty} [\int_\Omega b|\alpha|^{p+1}|u_0 - u_n|^{p+1} dx + \int_\Omega b|\alpha u_n|^{p+1} dx] \end{aligned}$$

et ce, en utilisant le résultat de Brezis-Lieb. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} J_\lambda(\alpha u_0) &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega b|\alpha u_n|^{p+1} dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} J_\lambda(\alpha u_n) \end{aligned}$$

(c'est-à-dire J_λ est σ-semi-continue-inférieurement)
De plus, comme $u_n \in \mathcal{N}^-$, l'application Φ_{u_n} atteint son maximum en $t = 1$, et ceci en vertu du théorème 2.1.1. Ce qui implique que :

$$\Phi_{u_n}(\alpha) = J_\lambda(\alpha u_n) \leq \Phi_{u_n}(1) = J_\lambda(u_n)$$

D'où :

$$\liminf_{n\to\infty} J_\lambda(\alpha u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} J_\lambda(u_n)$$

En récapitulant, on a :

$$J_\lambda(\alpha u_0) < \liminf_{n\to\infty} J_\lambda(\alpha u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u)$$

ce qui est absurde.
Ainsi $u_n \to u_0$ dans E .
Il s'en suit que :

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2 - b|u_0|^{p+1})dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2 - b|u_n|^{p+1})dx = 0$$

ce qui revient à écrire :

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda a u_0^2)dx = \int_\Omega (b|u_0|^{p+1})dx$$

Et donc $u_0 \in \mathcal{N}^-$. Ce qui signifie que $\mathcal{N}^-$ est $\sigma-$fermé.
Aussi, $J_\lambda(u_0) = \lim\limits_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u)$, ce qui signifie que u_0 est un minimiseur sur $\mathcal{N}^-$.
Et vu que $u_0 \neq 0$, donc $u_0 \notin \mathcal{N}^0 = \{0\}$. Ce qui, d ?après le théorème 3 du paragraphe 2.1, implique que :

$$J'_\lambda(u_0) = 0$$

c'est-à-dire u_0 est un point critique de J_λ .

Si on regarde, en particulier, le cas où $\lambda \to \lambda_1^-(a)$, on conclura que tout dépend du signe de $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx$ (où Φ_1 la fonction propre associée à $\lambda_1(a)$). Le résultat suivant nous l'atteste :

Théorème 2.2.1. *On suppose que* $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx > 0$ *. Alors :*

(i) $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1^-(a)} \inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0.$

(ii)Si $\lambda_n \to \lambda_1^-(a)$ *et* u_n *est un minimiseur de* J_{λ_n} *sur* $\mathcal{N}^-$*, alors :* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Démonstration. (i) On suppose, sans perte de généralité, que $\|\Phi_1\| = 1$.
Comme $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx > 0$, alors $\Phi_1 \in \mathbf{B}^+$.
D'un autre côté, puisque $\lambda < \lambda_1(a)$, il vient que :

$$\int_\Omega (|\nabla\Phi_1|^2 - \lambda a\phi_1^2)dx > \int_\Omega (|\nabla\Phi_1|^2 - \lambda_1(a)a\phi_1^2)dx = 0$$

ce qui signifie que $\Phi_1 \in \mathbf{L}^+$. Par conséquent, $\Phi_1 \in \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^+$.
Ainsi, d'après ce qui a été montré dans le paragraphe 1, on a : $t(\Phi_1)\Phi_1 \in \mathcal{N}^-$
où :

$$\begin{aligned} t(\Phi_1) &= \Big[\frac{\int_\Omega(|\nabla\Phi_1|^2 - \lambda a\phi_1^2)dx}{\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx}\Big]^{\frac{1}{p+1}} \\ &= \Big[\frac{\int_\Omega \lambda_1(a)a\phi_1^2dx - \int_\Omega \lambda a\phi_1^2dx}{\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx}\Big]^{\frac{1}{p+1}} \\ &= \Big[\frac{(\lambda_1(a)-\lambda)\int_\Omega a\phi_1^2dx}{\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx}\Big]^{\frac{1}{p+1}} \end{aligned}$$

Et on sait que,

$$0 < \inf_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) \leq J_\lambda(u) \qquad \forall u \in \mathcal{N}^-$$

En particulier,

$$0 < \inf_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) \leq J_\lambda(t(\Phi_1)\Phi_1)$$

ce qui implique que :

$$0 < \lim_{\lambda\to\lambda_1^-(a)} \inf_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) \leq \lim_{\lambda\to\lambda_1^-(a)} J_\lambda(t(\Phi_1)\Phi_1)$$

Or :

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t(\Phi_1)\Phi_1) &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) \int_\Omega b(t(\Phi_1)\Phi_1)^{p+1} dx \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})(\lambda_1(a) - \lambda)^{\frac{p+1}{p-1}} \Big(\frac{\int_\Omega a\Phi_1^2 dx}{\int_\Omega b\Phi_1^{p+1} dx}\Big)^{\frac{p+1}{p-1}} \int_\Omega b\Phi_1^{p+1} dx \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})(\lambda_1(a) - \lambda)^{\frac{p+1}{p-1}} \frac{(\int_\Omega a\Phi_1^2 dx)^{\frac{p+1}{p-1}}}{(\int_\Omega b\Phi_1^{p+1} dx)^{\frac{2}{p-1}}} \\
&\to 0 \qquad \text{lorsque} \quad \lambda \to \lambda_1^-(a)
\end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1^-(a)} \inf_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0$$

(ii) Supposons que $\lambda_n \to \lambda_1^-(a)$ et que u_n minimise J_{λ_n} sur $\mathcal{N}^-$.
La suite (u_n) est alors une suite bornée. Afin de s'en convaincre, faisons un raisonnement par l'absurde et supposons que $\|u_n\| \longrightarrow \infty$ quand $n \to \infty$. Posons ensuite $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. On obtient de la sorte une suite bornée dans E. En passant à une suite, qu'on notera (v_n) aussi, on a :

$$v_n \rightharpoonup v_0 \qquad \text{dans E}$$

Et par injections compactes on a :

$$v_n \to v_0 \qquad \text{dans } \mathbf{L^2}(\Omega) \text{ et dans } \mathbf{L^{p+1}}(\Omega)$$

Par suite :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega av_n^2dx = \int_\Omega av_0^2dx$$

et :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx = \int_\Omega b|v_0|^{p+1}dx$$

$\big($Par l'argument de σ-semi continuité inférieure, on a :
$0 \leq \|v_n\| - \|v_0\| \leq \|v_n - v_0\| \longrightarrow 0\big)$

Étant donné que $\lambda_n \longrightarrow \lambda_1^-(a)$ quand $n \to \infty$, on a :

$$J_{\lambda_n}(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{N}^-} J_{\lambda_n}(u) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Et comme :

$$J_{\lambda_n}(u_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega(|\nabla u_n|^2 - \lambda_n a u_n^2)dx$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx$$

Ce qui, divisé par $\|u_n\|^2$, donne :

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega(\frac{|\nabla u_n|^2}{\|u_n\|^2} - \lambda_n a\frac{u_n^2}{\|u_n\|^2})dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega b\frac{|u_n|^{p+1}}{\|u_n\|^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega(|\nabla\frac{u_n}{\|u_n\|}|^2 - \lambda_n a\frac{u_n^2}{\|u_n\|^2})dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega b\frac{|u_n|^{p+1}}{\|u_n\|^{p+1}}\|u_n\|^{p-1}dx$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega(|\nabla v_n|^2 - \lambda_n a v_n^2)dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\int_\Omega b v_n^{p+1}\|u_n\|^{p-1}dx$$

Il vient que :

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1})\int_\Omega(|\nabla v_n|^2-\lambda_n a v_n^2)dx=(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1})\int_\Omega b|v|_n^{p+1}\|u_n\|^{p-1}dx=\frac{J_{\lambda_n}(u_n)}{\|u_n\|^2}\to 0$$

quand $n\to\infty$

Ce qui, d'une part, implique que :

$$\int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx=o\big(\frac{1}{\|u_n\|^{p+1}}\big)$$

et par suite :

$$\int_\Omega b|v_0|^{p+1}dx=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx=0$$

Et d'autre part, ça implique que :

$$v_n\longrightarrow v_0 \quad \text{dans E}$$

car sinon on aurait :

$$\int_\Omega(|\nabla v_0|^2-\lambda_1(a)av_0^2)dx<\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2-\lambda_n a v_n^2)dx=0$$

ce qui est impossible puisque compte tenu du fait que $v_0\in\mathcal{N}$ on a :

$$\int_\Omega(|\nabla v_0|^2-\lambda_1(a)av_0^2)dx=\int_\Omega b|v_0|^{p+1}dx=0$$

Ainsi, on a :

$$\int_\Omega(|\nabla v_0|^2-\lambda_1(a)av_0^2)dx=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2-\lambda_n a v_n^2)dx=0$$

c'est-à-dire v_0 vérifie le même problème de valeurs propres que Φ_1, et donc $v_0=k\Phi_1$ pour un certain k.

Or, comme

$$\int_\Omega b|v_0|^{p+1}dx=k\int_\Omega b|\Phi_1|^{p+1}=0$$

il s'en suit que $k = 0$ (et donc $v_0 = 0$) puisque $\int_\Omega b|\Phi_1|^{p+1} \neq 0$. Résultat qui contredit le fait que, ayant la convergence forte dans E, $\|v_0\| = 1$.

Par conséquent, la suite (u_n) est bien bornée.
En passant à une sous-suite qu'on notera, sans perte de généralité, (u_n) aussi on a :

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{E}$$

et là, en reprenant le même raisonnement que celui fait sur la suite (v_n), on aboutit au fait que $u_n \longrightarrow u_0$ et que $u_0 = 0$.
c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, ce qu'il fallait montrer. □

2.3 Cas de la variété à deux composantes séparées

À présent, supposons que $\lambda > \lambda_1(a)$, alors compte tenu du fait que :

$$\lambda_1(a)\int_\Omega a\Phi_1^2 dx = \int_\Omega |\nabla\Phi_1|^2 dx > 0$$

ce qui implique que :

$$\int_\Omega a\Phi_1^2 dx > 0 \qquad (\text{ puisque } \lambda_1(a) > 0)$$

on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla\Phi_1|^2 - \lambda a\Phi_1^2)dx &= \int_\Omega \lambda_1(a)a\Phi_1^2 dx - \int_\Omega \lambda a\Phi_1^2 dx \\ &= (\lambda_1(a) - \lambda)\int_\Omega a\Phi_1^2 dx \\ &< 0\end{aligned}$$

et donc : $\Phi_1 \in \mathbf{L}^-$.
Il suffirait alors que $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx < 0$ pour que $\Phi_1 \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^-$ et donc $\mathcal{N}^+$ serait, contrairement au cas précédent, non vide.
Dans ce cas, $\mathcal{N}$ pourra se décomposer en deux composantes distinctes, à savoir $\mathcal{N}^+$ et $\mathcal{N}^-$. Ce qui nous mène à penser à l'existence d'au moins deux solutions, c'est-à-dire deux minimiseurs de la fonctionnelle J_λ. Un sur chaque composante.

Le lemme suivant montre que dans un certain voisinage de $\lambda_1(a)$, le fait que $\Phi_1 \in \mathbf{B}^-$ implique que $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+}$ est vide. Chose qui, on le verra un peu plus tard, nous renseignera d'avantage sur la nature de la variété de Nehari.

Lemme 2.3.1. *Supposons que $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx < 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$ pour tout $\lambda / \lambda_1(a) \leq \lambda < \lambda_1(a) + \delta$.*

Démonstration. Se fera par l'absurde. Supposons qu'il existe deux suites (λ_n) et (u_n) telles que : $\|u_n\| = 1, \quad \lambda_n \to \lambda_1^+(a) \quad$ et

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda_n a u_n^2)dx \leq 0 \quad , \quad \int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx \geq 0$$

Comme la suite (u_n) est bornée, on peut en extraire une sous-suite, (u_n), qui converge faiblement dans E :

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans E}$$

et donc qui converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ ainsi que dans $\mathrm{L}^{\mathrm{p}+1}(\Omega)$:

$$u_n \to u_0 \quad \text{dans } \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ et } \mathrm{L}^{\mathrm{p}+1}(\Omega)$$

Il en découle que :

$$u_n \to u_0 \quad \text{dans E}$$

car, sinon on aurait :

$$\|u_0\| < \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

et :

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a) a u_0^2)dx < \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda_n a u_n^2)dx$$
$$\leq 0$$

ce qui est absurde.
Et donc, $\|u_0\| = 1$ et :

$$(i) \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a) a u_0^2)dx \leq 0 \qquad , \qquad (ii) \int_\Omega b|u_0|^{p+1}dx \geq 0$$

Ce qui d'une part implique que $u_0 = k\Phi_1$ pour une certain k réel, et d'autre part ça nous donne :

$$\int_\Omega b|u_0|^{p+1}dx = k\int_\Omega b|\Phi_1|^{p+1}dx \geq 0$$

cependant on sait que :

$$\int_\Omega b|\Phi_1|^{p+1}dx \leq 0$$

ce qui finalement nous amène à conclure que $k = 0$. D'où la contradiction avec le fait que $\|u_0\| = 1$ □

Théorème 2.3.1. *On suppose que* $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$, *alors :*

(i) $\mathcal{N}^\circ = \{0\}$

(ii) $0 \notin \overline{\mathcal{N}^-}$ *et* $\mathcal{N}^-$ *est fermé.*

(iii) $\mathcal{N}^-$ *et* $\mathcal{N}^+$ *sont séparés, i.e.* $\overline{\mathcal{N}^-} \cap \overline{\mathcal{N}^+} = \emptyset$

(iv) $\mathcal{N}^+$ *est borné.*

Démonstration. (i) Il est évident que $0 \in \mathcal{N}^0$.
Supposons, à présent, qu'il existe $u_0 \in \mathcal{N}^0$ avec $u_0 \neq 0$. Dans ce cas, $\frac{u_0}{\|u_0\|} \in \mathbf{L}^0 \cap \mathbf{B}^0 \subset \overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+}$.

Cependant $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$.
Ce qui nous mène à conclure que $u_0 = 0$ et donc $\mathcal{N}^o = \{0\}$.

(ii) Pour la première propriété on raisonne par l'absurde. Supposons, alors, qu'il existe une suite (u_n) de $\mathcal{N}^-$ telle que $u_n \to 0$ dans E. D'où :

$$0 < \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2)dx = \int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Posons, ensuite, $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Ainsi obtenue, la suite (v_n) est bornée et donc admet une sous-suite faiblement convergente dans E :

$$v_n \rightharpoonup v_0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{E}$$

et fortement convergente dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathrm{L}^{\mathrm{p+1}}(\Omega)$.
Il s'en suit que :

$$0 < \big(\frac{1}{\|u_n\|^2}\big)\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2)dx = \big(\frac{1}{\|u_n\|^2}\big)\int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx$$

$$\Rightarrow 0 < \int_\Omega \big(\frac{|\nabla u_n|^2}{\|u_n\|^2} - \lambda a\frac{u_n^2}{\|u_n\|^2}\big)dx = \int_\Omega b\frac{|u_n|^{p+1}}{\|u_n\|^2}dx$$

$$\Rightarrow 0 < \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx = \int_\Omega b|v_n|^{p+1}\|u_n\|^{p-1}dx \to 0 \quad \text{quand} \quad n\to\infty$$

Ce qui, avec la notion de $\sigma-$continuité inférieure, implique que :

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda a v_0^2)dx \leq \lim_{n\to\infty}\big[\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx\big] = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\big[\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx\big] \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \lambda a v_n^2 dx \\ &= 1 - \lambda\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a v_n^2 dx \\ &= 1 - \lambda\int_\Omega a v_0^2 dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_0 \neq 0$
Il en résulte que $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{L}^-}$.

D'un autre côté, comme :

$$\int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx > 0$$

alors :

$$\int_\Omega b|v_0|^{p+1}dx \geq 0$$

et donc, $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{B}^+}$.
D'où : $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+}$. Ce qui contredit l'unique hypothèse de notre théorème.
Ainsi, $0 \notin \overline{\mathbf{N}^-}$.

À présent, pour montrer que $\mathcal{N}^-$ est fermé, on se propose de montrer la double inclusion $\overline{\mathcal{N}^-} = \mathcal{N}^-$. Plus précisément, on a à monter que : $\overline{\mathcal{N}^-} \subset \mathcal{N}^-$, l'autre inclusion étant triviale.
On a alors :

$$\overline{\mathcal{N}^-} \subset \mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^0$$

ce qui, d'après (i), revient à écrire :

$$\overline{\mathcal{N}^-} \subset \mathcal{N}^- \cup \{0\}.$$

Et comme, on vient de le montrer, $0 \notin \overline{\mathcal{N}^-}$, alors :

$$\overline{\mathcal{N}^-} \subset \mathcal{N}^-$$

Et donc :

$$\overline{\mathcal{N}^-} = \mathcal{N}^-$$

c'est-à-dire $\mathcal{N}^-$ est fermé.

(iii)On sait que $\overline{\mathcal{N}^+} \subset \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0$. Avec (ii) cela donne :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{N}^-} \cap \overline{\mathcal{N}^+} &\subset \mathcal{N}^- \cap (\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^0) \\
&= \mathcal{N}^- \cap (\mathcal{N}^+ \cup \{0\}) \\
&= (\mathcal{N}^- \cap \mathcal{N}^+) \cup (\mathcal{N}^- \cap \{0\}) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Et donc, $\overline{\mathcal{N}^-}$ et $\overline{\mathcal{N}^+}$sont séparés.

(iv) Par l'absurde, on suppose que $\mathcal{N}^+$ n'est pas borné. C'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe une suite (u_n) de $\mathcal{N}^+$ telle que $\|u_n\| \to \infty$.
Posons $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$.
Bornée, la suite (v_n) admet une sous-suite qui converge faiblement dans E :

$v_n \rightharpoonup v_0$. Et, par injections compactes, $v_n \to v_0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et dans $\mathbf{L}^{p+1}(\Omega)$ et donc :

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda a v_0^2)dx < \lim_{n\to\infty} \Big[\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx \Big] \leq 0$$

Ce qui implique que $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{L}^-}$
Aussi, comme $u_n \in \mathcal{N}^+$, on a :

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2)dx = \int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx < 0$$

$$\Rightarrow \big(\frac{1}{\|u_n\|^2}\big) \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2)dx = \big(\frac{1}{\|u_n\|^2}\big) \int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx < 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \big(\frac{|\nabla u_n|^2}{\|u_n\|^2} - \lambda a \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2}\big)dx = \int_\Omega b\frac{|u_n|^{p+1}}{\|u_n\|^2}dx < 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx = \int_\Omega b|v_n|^{p+1}\|u_n\|^{p-1}dx < 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2}{\|u_n\|^{p-1}}dx = \int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx$$

En passant à la limite cela donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2}{\|u_n\|^{p-1}}dx = 0.$$

D'où : $\int_\Omega b|v_0|^{p+1}dx = 0$
Et donc, $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{B}^+}$.
Il en résulte que : $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+}$, ce qui est impossible vu que, par hypothèse, $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$.
Ainsi, $\mathcal{N}^+$ est borné.

$\square$

Théorème 2.3.2. *On suppose que* $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$. *Alors :*

(*i*) *Toute suite minimisante de* $J_\lambda(u)$ *sur* $\mathcal{N}^-$ *est bornée.*

(*ii*) $\inf\limits_{u \in \mathcal{N}^-} J_\lambda(u) > 0.$

(*iii*) *Il existe un minimiseur de* $J_\lambda(u)$ *sur* $\mathcal{N}^-$.

Démonstration. (*i*) En raisonnant par l'absurde, on se donne une suite (u_n) de $\mathcal{N}^-$, minimisante pour $J_\lambda(u)$ et non bornée. Alors :

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2)dx = \int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx \to c \qquad \text{où} \quad c \geq 0 \text{ puisque} \quad J_\lambda(u) \geq 0 \text{ sur } \mathcal{N}^-$$

et$\|u_n\| \to +\infty \qquad$ quand $\quad n \to \infty$.

Posons, ensuite, $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. On a alors, quitte à passer à une sous-suite, $v_n \rightharpoonup v_0$ et $v_n \to v_0$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et dans $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$.
Ce qui nous mène à écrire :

$$(\frac{1}{\|u_n\|^2}) \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda a u_n^2)dx = (\frac{1}{\|u_n\|^2}) \int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx \to 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\frac{|\nabla u_n|^2}{\|u_n\|^2} - \lambda a \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2})dx = \int_\Omega b \frac{|u_n|^{p+1}}{\|u_n\|^2} dx \to 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx = \int_\Omega b|v_n|^{p+1}\|u_n\|^{p-1}dx \to 0.$$

Il en découle que, d'une part :

$$\int_\Omega (|\nabla v_0|^2 - \lambda a v_0^2)dx < \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx = 0$$

ce qui implique que $v_0 \neq 0$ et que $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{L}^-}$.

Et d'un autre côté, ça nous donne :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx = \lim_{n\to\infty}\big[\big(\frac{1}{\|u_n\|^{p-1}}\big)\int_\Omega(|\nabla v_n|^2-\lambda a v_n^2)dx\big]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\big(\frac{1}{\|u_n\|^{p-1}}\big)\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2-\lambda a v_n^2)dx$$

$$= 0 \qquad \big(\text{ puisque } \|u_n\| \to +\infty\big).$$

Ainsi, $\int_\Omega b|v_0|^{p+1}dx = 0$. Ce qui implique que $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \mathbf{B}^0 \subset \overline{\mathbf{B}^+}$.

Finalement, on trouve que $\frac{v_0}{\|v_0\|} \in \overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+}$, chose impossible puisqu'on a comme hypothèse $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$.
On conclut donc que (u_n) est forcément une suite bornée.

(ii)On sait déjà que $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) \geq 0$, puisque $J_\lambda(u) \geq 0$ pour tout u dans $\mathcal{N}^-$.
Supposons que $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0$.
Soit (u_n) une suite minimisante. i.e. :

$$\int_\Omega(|\nabla u_n|^2-\lambda a u_n^2)dx = \int_\Omega b|u_n|^{p+1}dx \to 0$$

D'après (i), (u_n) est une suite bornée et donc elle admet une sous-suite convergente $u_n \rightharpoonup u_0$ dans E et, par injections, $u_n \to u_0$ dans $\mathrm{L}^2\Omega$ et $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$. Ensuite, en suivant le même raisonnement que celui fait sur la suite (v_n) dans (i) on montre que $u_n \to u_0$ dans E, et de la même manière, on trouve que $\frac{u_0}{\|u_0\|} \in \mathbf{L}^0 \cap \mathbf{B}^0$, ce qui est absurde puisque $\mathbf{L}^0 \cap \mathbf{B}^0 \subset \overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$. □

Théorème 2.3.3. *Supposons que $\mathbf{L}^-$ est non vide mais que $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$, alors J_λ admet un minimum sur $\mathcal{N}^+$.*

Corollaire 2.3.1. *On suppose que $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx < 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que notre problème a au moins deux solutions positives pour tout $\lambda_1(a) < \lambda < \lambda_1(a) + \delta$*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla\Phi_1|^2 - \lambda a\Phi_1^2)dx &= \int_\Omega \lambda_1(a)a\Phi_1^2 dx - \int_\Omega \lambda a\Phi_1^2 dx \\ &= (\lambda_1(a)-\lambda)\int_\Omega a\Phi_1^2 dx \\ &< 0 \qquad \text{quand} \quad \lambda > \lambda_1(a)\end{aligned}$$

donc $\Phi_1 \in \mathbf{L}^-$, et alors $\mathbf{L}^-$ est non vide.
D'un autre côté, comme $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx < 0$, il existe, d'après le lemme 2.3.1, $\delta > 0$ tel que quand $\lambda_1(a) \leq \lambda < \lambda_1(a) + \delta$, on ait $\overline{\mathbf{L}^-} \cap \overline{\mathbf{B}^+} = \emptyset$.
Il en résulte, en appliquant les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3, que J_λ admet un minimum sur $\mathcal{N}^-$ et un minimum sur $\mathcal{N}^+$, qu'on peut supposer positifs pusque $J_\lambda(u) = J_\lambda(|u|)$.
Et en vertu du théorème 2.3.2, $\overline{\mathcal{N}^-} \cap \overline{\mathcal{N}^+} = \emptyset$ et $\mathcal{N}^0 = \{0\}$. Il s'en suit que ces minimums sont des minimums locaux sur $\mathcal{N}$ et qui n'appartiennent pas à $\mathcal{N}^0$. Ce qui, d'après le théorème 2.1.3, implique que ce sont des solutions positives du problème. □

Théorème 2.3.4. *On suppose que* $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx < 0$ *et que* $u_n \in \mathcal{N}^+$*pour* $\lambda = \lambda_n$ *où* $\lambda_n \to \lambda_1^+(a)$*. Alors, quand* $n \to \infty$ *on a :*

$$\begin{aligned}&(i) \quad u_n \to 0 \\ &(ii) \quad \frac{u_n}{\|u_n\|} \to \Phi_1 \qquad \textit{dans } \mathrm{E}\end{aligned}$$

Démonstration. (i) Comme $\mathcal{N}^+$ est borné et donc (u_n) est bornée et on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u_0$ dans E et, par injections, $u_n \to u_0$ dans $\mathrm{L}^2\Omega$ et $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$.
Supposons que $u_n \to u_0$ n'est pas vérifiée. Dans ce cas,

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a)au_0^2)dx < \liminf_{n\to\infty} \Big[\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - \lambda_n a u_n^2)dx\Big] \leq 0,$$

ce qui est absurde.
Et donc, $u_n \to u_0$ et par suite

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a)au_0^2)dx = \int_\Omega b|u_0|^{p+1}dx \leq 0.$$

Ainsi,$\int_\Omega(|\nabla u_0|^2 - \lambda_1(a)au_0^2)dx = 0$. Il en découle que $u_0 = k\Phi_1$ pour un certain k. Mais injecté dans l'hypothèse $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx < 0$, il vient que $k = 0$. Et donc $u_n \to 0$ dans E.

(ii) Posons $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Etant bornée, on a, quitte à passer à une sous-suite, $v_n \rightharpoonup v_0$ dans E et, par injections, $v_n \to v_0$ dans $\mathrm{L}^2\Omega$ et $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$.
Supposons que $v_n \to v_0$ n'est pas vérifiée. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(|\nabla v_0|^2 - \lambda_1(a)av_0^2)dx &< \lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2 - \lambda_1(a)au_n^v)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^{p+1}\|u_n\|^{p-1}dx \\
&= 0 \quad \text{puisque } \|u_n\| \to 0
\end{aligned}$$

ce qui est impossible.
Par conséquent, $v_n \to v_0$ ce qui implique que $\|v_0\| = 1$ et que $\int_\Omega(|\nabla v_0|^2 - \lambda_1(a)av_0^2)dx = 0$. On en conclut, alors, que $v_0 = \Phi_1$. $\square$

2.4 Non-existence des solutions

On sait que dans le cas où a(x)=1 il n'existe aucune solution positive si :

$$(i) \quad \lambda \quad \text{est assez grand.}$$

$$(ii) \quad \int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx > 0 \quad \text{et} \quad \lambda > \lambda_1(a)$$

Dans cette partie, on s ?intéresse à la nature de la variété de Nehari sous ces hypothèses et on montre pourquoi il ne peut plus exister de minimiseurs ou, au mieux, juste la solution identiquement nulle.

On considère d'abord le cas où $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx > 0$. Ceci implique que $\Phi_1 \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+$ pour un λ tout juste plus grand que $\lambda_1(a)$. Et de pareille manière que dans le lemme 2.3.1, on arrive à montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{\mathbf{L}^-} \subset \mathbf{B}^+$ pour tout $\lambda_1(a) \leq \lambda < \lambda_1(a) + \delta$, ce qui signifie que $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^- = \emptyset$ et de là, $\mathcal{N}^+ = \emptyset$.
Par ailleurs, $\mathcal{N}^-$ est non vide, mais on a le résultat suivant :

Théorème 2.4.1. *Si $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+ \neq \emptyset$, alors* $\inf\limits_{u \in \mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0.$

Démonstration. Supposons que $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+ \neq \emptyset$ et soit $u \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+$. On a alors

$$(i) \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx < 0, \quad (ii) \int_\Omega b|u|^{p+1}dx > 0.$$

Pour un $h \in \mathrm{E}$ avec $\sup\limits_{\mathrm{E}}(h(x))$ assez petite et $\|h\|_{\mathrm{E}}$ assez grande on a

$$(i) \int_\Omega (|\nabla(u+\varepsilon h)|^2 - \lambda a(u+\varepsilon h)_1^2)dx > 0 \quad (ii) \int_\Omega b|u+\varepsilon h|^{p+1}dx > \frac{1}{2}\int_\Omega b|u|^{p+1}dx,$$

pour $0 < \varepsilon \leq 1$.
Posons $v_\varepsilon = \frac{u+\varepsilon h}{\|u+\varepsilon h\|}$. Il s'en suit que $v_0 \in \mathbf{L}^-$ et que $v_1 \in \mathbf{L}^+$. Ensuite, par continuité (par rapport à ε), il existe ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$ tel que $v_{\varepsilon_0} \in \mathbf{L}^0$.
Plus encore, il existe une suite $\{v_{\varepsilon_n}\} \subset \mathbf{L}^+ \cap \mathbf{B}^+$ telle que $\int_\Omega (|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 - \lambda a v_{\varepsilon_n}^2)dx \to 0$ et

$$\begin{aligned}\int_\Omega b|v_{\varepsilon_n}|^{p+1}dx &= \frac{1}{\|u+\varepsilon_n h\|^{p+1}}\int_\Omega b|u+\varepsilon_n h|^{p+1}dx \\ &\geq \frac{1}{2(\|u\|+\|h\|)^{p+1}}\int_\Omega b|u|^{p+1}dx.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n\to\infty} t(v_{\varepsilon_n}) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\int_\Omega (|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2 - \lambda a v_{\varepsilon_n}^2)dx}{\int_\Omega b|v_{\varepsilon_n}|^{p+1}dx}\right]^{\frac{1}{p+1}} = 0.$$

Et donc, $t(v_{\varepsilon_n})v_{\varepsilon_n} \in \mathcal{N}^-$et

$$J_\lambda(t(v_{\varepsilon_n})v_{\varepsilon_n}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})t(v_{\varepsilon_n})^{p+1}\int_\Omega b|v_{\varepsilon_n}|^{p+1}dx \to 0.$$

Ce qui nous mène à conclure que $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0.$ □

Corollaire 2.4.1. *On suppose que* $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx > 0$. *Alors* $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0$ $\forall\lambda > \lambda_1(a)$

Démonstration. On a, par hypothèse, $\int_\Omega b\Phi_1^{p+1}dx > 0$, ce qui signifie que $\Phi_1 \in \mathbf{B}^+$.
D'un autre côté, comme

$$\int_\Omega (|\nabla\Phi_1|^2 - \lambda a\Phi_1^2)dx = (\lambda_1(a) - \lambda)\int_\Omega a\Phi_1^2 dx$$

alors Φ_1 se trouve dans $\mathbf{L}^-$ pour tout $\lambda > \lambda_1(a)$ et par conséquent dans $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+$.
$\mathbf{L}^-\cap\mathbf{B}^+$ étant non vide, et d'après le théorème 2.4.1, il vient que $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0$ pour tout $\lambda > \lambda_1(a)$. □

Corollaire 2.4.2. *Il existe* $\widetilde{\lambda}$ *tel que* $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0 \qquad \forall\lambda > \widetilde{\lambda}$

Démonstration. Soit $u \in$ E vérifiant :

$$\begin{cases} \|u\| = 1 \\ \int_\Omega au^2dx > 0 \\ \int_\Omega b|u|^{p+1}dx > 0 \end{cases}$$

On peut choisir $\widetilde{\lambda}$ suffisamment grand de sorte que $\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda au^2)dx < 0$ pour $\lambda > \widetilde{\lambda}$.
Ce qui implique que, sous réserve que $\lambda > \widetilde{\lambda}$, $u \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+$, signifiant que $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^+ \neq \emptyset$.
Par le théorème 2.4.1, on conclut que $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^-} J_\lambda(u) = 0$

□

Ensuite, on considère le cas où λ est suffisamment grand et on montre, dans les résultats suivants, que J_λ est forcément non bornée sur $\mathcal{N}^+$.

Théorème 2.4.2. *Si $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^0 \neq \emptyset$, alors J_λn'est pas bornée inférieurement sur $\mathcal{N}^+$.*

Démonstration. Supposons que $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^0 \neq \emptyset$ et soit $u \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^0$.
Pour $\varepsilon > 0$ on peut toujours trouver $v \in$ E, $\|v\| = 1$tel que $\|u - v\| < \varepsilon, -\varepsilon < \int_\Omega b|v|^{p+1}dx < 0$ et $\int_\Omega(|\nabla v|^2 - \lambda a v^2)dx < \frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx$.
Par conséquent, il existe $\delta > 0$ et une suite $v_n \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^-$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx \to 0$et $\int_\Omega(|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx < -\delta$.
Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} t(v_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\int_\Omega(|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx}{\int_\Omega b|v_n|^{p+1}dx}\right]^{\frac{1}{p+1}} = \infty.$$

À présent nous pouvons conclure que $t(v_n)v_n \in \mathcal{N}^+$ et que

$$J_\lambda(v_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})t(v_n)^2\int_\Omega(|\nabla v_n|^2 - \lambda a v_n^2)dx \leq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})t(v_n)^2(-\delta) \to -\infty$$

et donc, J_λ n'est pas bornée inférieurement sur $\mathcal{N}^+$. □

Corollaire 2.4.3. *Il existe $\lambda^* > 0$, tel que J_λ n'est pas bornée inférieurement sur $\mathcal{N}^+ \quad \forall\lambda > \lambda^*$*

Démonstration. Soit $u \in$ E vérifiant :

$$\begin{cases} \|u\| = 1 \\ \int_\Omega a u^2 dx < 0 \\ \int_\Omega b|u|^{p+1}dx = 0 \end{cases}$$

En choisissant λ^* suffisamment grand on peut obtenir que

$$\int_\Omega(|\nabla u|^2 - \lambda a u^2)dx < 0 \quad \text{pour} \quad \lambda > \lambda^*$$

Ce qui implique que, pour $\lambda > \lambda^*$, $u \in \mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^0$. i.e. $\mathbf{L}^- \cap \mathbf{B}^0 \neq \emptyset$.
Par suite, et en vertu du théorème 2.4.2, J_λ n'est pas bornée inférieurement sur $\mathcal{N}^+$.

□

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre on présente quelques cas d'application de la méthode de Nehari.

3.1 Problème de p-Laplacien

On considère, d'une manière résumée, le problème de p-laplacien suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{r-2} & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où $1 < q < p < r < p^*$(avec $p^* = \frac{Np}{N-p}$), Ω un domaine borné de R^N, $\lambda \in \mathrm{R}\ \{0\}$ et les fonctions poids f et g sont dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et vérifient $f^{\pm} = max\{\pm f, 0\} \neq 0$ et $g^{\pm} = max\{\pm g, 0\} \neq 0$.

Dans [15], à l'aide de la méthode de Nehari, on montre l'existence d'au moins deux solutions positives du problème 3.1 pour tout $p \in (0, p^*)$.
Par la formulation variationnelle, on trouve que la fonctionnelle d'énergie associée à ce problème est définie sur $\mathrm{W}_0^{1,p}$ par

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^p - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f|u|^q - \frac{1}{r}\int_\Omega f|u|^p.$$

Ainsi, la variété de Nehari que J_λ définie s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\lambda &= \{u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}, < J'_\lambda(u), u >= 0\} \\ &= \{u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}, \|u\|_\lambda^p \int_\Omega f|u|^q - \int_\Omega g|u|^r = 0\}.\end{aligned}$$

On énonce alors le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $0 < |\lambda| < \lambda_0$, le problème ci-dessus admet au moins deux solutions positives.*

La preuve de ce théorème repose sur la décomposition de la variété de Nehari lorsque λ varie et sur l'extraction d'une suite de Palais-Smale sur cette variété. [15]

3.2 Problème avec exposant critique de Hardy-Sobolev

Le problème considéré s ?énonce comme suit

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2}u + \frac{u^{p^*(s)-2}}{|x|^s} & \text{pour} \quad x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

où Ω un domaine borné de R^N qui contient 0 et dont la frontière $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^1$, $1 < p < N$, $0 \leq s \leq p$, $p \leq q < p^*$, λ un paramètre positif dans R et $p^* = \frac{N-s}{N-p}p$.

Étant un problème variationnel, la fonctionnelle d'énergie qui lui associée s'écrit

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p^*(s)}\int_\Omega \frac{|u|^{p^*(s)}}{|x|^s}.$$

Et c'est en appliquant la méthode de Nehari, modulo certaines hypothèses de symétrie de domaine, que Zifei et Yang ont résolu, dans [17], ce problème de minimisation.

La variété de Nehari associée à la fonctionnelle J_λ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\lambda &= \{u \in \mathrm{H}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} :< J'_\lambda(u), u >= 0\} \\ &= \{u \in \mathrm{H}_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\|^p = \lambda \int_\Omega |u|^q dx + \int_\Omega \frac{|u|^{p^*(s)}}{|x|^s} dx\}.\end{aligned}$$

Et lorsque $\tau \in \mathcal{O}(N)$ l'ensemble des transformations linéaires orthogonales de R^N dans R^N, On définit la variété de Nehari τ-invariante par

$$\mathcal{N}_\lambda^\tau = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \tau u = u\} = \mathcal{N}_\lambda \cap \mathrm{H}_0^{1,p}(\Omega)^\tau.$$

Et sous l'hypothèse (H) suivante qu'on établie le résultat d'existence de solutions du problème 3.2
(H) Il existe $\tau \in \mathcal{O}(N)$ tel que $\tau \neq Id$, $\tau^2 = Id$ et $\tau(\Omega) = \Omega$.

Théorème 3.2.1. *Supposons que $0 \leq s < p$, $p \leq q < p^*$ et que (H) est satisfaite. Si, en plus, l'une de ces hypothèses est satisfaite*
(i) $q = p$, $N \geq p^2$,
(ii) $q > p$, $N > \frac{p(p-1)q+p^2}{p+(p-1)(q-p)}$,
alors, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$, le problème3.2 admet au moins une paire de solutions qui changent de signe exactement une fois.

Bibliographie

[1] ALVES C.O., EL HAMIDI A., Nehari manifold and existence of positive solutions to a class of quasilinear problems, Nonlinear Anal. 60(2005), 611-624.

[2] AMANN H., LOPEZ-GOMEZ J., A Priori Bounds and Multiple Solutions for Superlinear Indefinte Elliptic Problems, J. Differential Equations 146 (1998), 336-374.

[3] BREZIS H., Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Ed. DUNOD.

[4] BREZIS H., NIRENBERG L., Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents, Comm.Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[5] BROWN K.J., ZHANG Y., The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation with Sign-Chaging Weight Function, J. Differential Equations 193(2003), 481-499.

[6] COURANT R., HILBERT D., Methods of Mathematical Physics : Volume I, Ed. Wiley Classics Edition.

[7] COURANT R., HILBERT D., Methods of Mathematical Physics : Volume II, Ed. Wiley Classics Edition.

[8] COSTA D.G., An Invitation to Variationnel Methods in Differential Equations, Ed. Birkhäuser (2007).

[9] FLECKINGER J., LAPIDUS M.L., Eigenvalues of Elliptic Boundary Value Problems with an Indefinite Weight Function 295(1986), 305-324.

[10] NEHARI Z., On a Class of Nonlinear Second Order Differential Equations, Trans.Amer.Math.Soc.95(1960), 101-123.

[11] STRUWE M., Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Ed.Springer (2000).

[12] TAYLOR M.E., Partial Differential Equations I : Basic Theory, Ed. Springer.

[13] TAYLOR M.E., Partial Differential Equations II : Qualitative Studies of Linear Equations, Ed. Springer.

[14] TAYLOR M.E., Partial Differential Equations III : Nonlinear Equations, Ed. Springer.

[15] WU T., Multiplicity of Positive Solution of p-Laplacian Problems with Sign-Changing Weight Functions, Int.Journal of Math.Analysis 1(2007), 557-563.

[16] SZULKIN A., TOBIAS W., The Method of Nehari Manifold, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications(2010), 597-632.

[17] Zifei S., Minbo Y., Multiple nodal solutions for quasilinear elliptic problems involving Hardy-Sobolev critical exponents in symmetric domain, J.Math.Appl. 335 (2007), 524-542.

جامعة تلمسان

UNIVERSITE TLEMCEN