REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID – TLEMCEN

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

# THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité: Equations différentielles

Présentée par

**Mme KERRIS -BOUKLI HACENE SOUHILA**

## Solvabilité d'une classe de problèmes non-linéaires singuliers associés à des équations différentielles ordinaires

Thèse dirigée par Madame Naima Daoudi-Merzagui
soutenue le 23/09/2020 devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *M*r YEBDRI Mustapha | Professeur | Université de Tlemcen | Président |
| *M*r BENCHOHRA Mouffak | Professeur | Université de Sidi Bel Abbès | Examinateur |
| *M*r BOUGUIMA Sidi Mohamed | Professeur | Université de Tlemcen | Examinateur |
| *M*r LAKMECHE Abdelkader | Professeur | Université de Sidi Bel Abbès | Examinateur |
| *M*me DAOUDI-MERZAGUI Naima | Professeur | Université de Tlemcen | Directeur de thèse |
| *M*r. BOUCHERIF. Abdelkader | Professeur | | Invité |

# 1 *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail à mes parents, mon mari, mes beaux parents.*
*Mes soeurs et mes deux plus beaux*
*cadeaux que Dieu m'a offert mon fils Mohamed Ismet*
*et ma fille Amira.*

# 1 *Remerciements*

En toute gratitude, je remercie le Tout-Miséricordieux pour toute sa générosité ainsi que pour la volonté et la patience qu'il m'a offert. Grâce à Dieu, j'ai rencontré des personnes qui m'ont soutenus, m'ont aidés et qui ont illuminés mon chemin de la réussite.

Bien évidemment, c'est à Mme Daoudi-Merzagui ,professeur à l'Université de Tlemcen ,ma directrice de thèse que vont mes remerciements, pour tout son aide qu'elle m'a apporté, ses conseils avisés et précieux qui m'ont permis non seulement d'effectuer cette thèse, mais aussi de découvrir la recherche mathématique avec beaucoup de précision et de rigueur, aussi pour sa supervision éclairée tout au long de la rédaction du mémoire . Je lui suis aussi reconnaissante d'avoir su rester très disponible jusqu'à la fin de ma thèse, malgré une vie professionnelle chargée. Pour moi, c'est un honneur et une immense joie de pouvoir progresser sous sa direction.

Mes sciencères remerciements vont aussi à Mr le professeur Benchohra et le Profeseur Lakmeche de l'Université Djillali Liabes-Sidi-Bel-Abbès d'avoir pris leur temps pour lire et évaluer ce manuscrit.

Je remercie Mr Yebdri et Mr Bouguima, d'avoir bien voulu me faire l'honneur de faire partie du jury également. Un merci spécial à eux car ils étaient mes professeurs tout au long de ma formation universitaire.

Je remercie Mr Boucherif, de nous avoir honnorer de sa présence, et d'avoir accepeter notre invitation.

Ainsi que je remercie toute l'équipe pédagogique pour leur collaboration dans les démarches administratives et épreuves rencontrées lors des recherches liées à ce mémoire, aussi pour leur contribution en termes de transmission d'informations et la qualité des enseignements fournis tout au long de mes études.

Je tiens à remercier aussi Mr Mabkhout notre ex chef de département pour tout ce qu'il nous a apporté comme aide à nous et au département de mathématiques en général, ainsi que toute l'équipe des enseignents qui ont répondu à toutes mes questions et de m'avoir apporté des précisions dans plusieurs domaines.

Je remercie tous mes amis du département de mathématiques, qui m'ont aidé chacun à sa manière; en particulier Yasmina Tabet Zatla, Wafaa Haffaf, Meriem Hellal, Noria Bekkouhe, Fatima Dib....

Du fond du coeur, je remercie ma famille qui m'ont beaucoup soutenu émotionnelement et d'avoir relu le mémoire et corrigé certaines imperfections.

Un grand merci particulier non seulement à ma mère et mon père, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et économique, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent cette thèse.

mais aussi à mon très cher Mari Mokhtar à qui je témoigne beaucoup d'estime et de reconaissance pour sa patience et son aide sans faille.

# Table des matières

# Introduction Générale

En mettant en équation un phénomène physique, nous traduisons la réalité en une expérience mathématique, virtuelle, selon certaines règles. Pour prédire où décrire un phénomène physique concret, on passe par un modèle analytique où, les différentes grandeurs sont exprimées par des indéterminées (valeurs abstraites), et les lois de la physique par des fonctions, dans la mesure où elles sont connues. Les équations différentielles représentent de bonnes candidates pour une telle description. Depuis son invention au $XVII$ ème siècle, les équations différentielles font partie des concepts qui assurent remarquablement la relation entre les mathématiques et les domaines de la science. L'étude de ces équations est un domaine mathématique qui, historiquement, a fait l'objet de nombreuses recherches, et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique [79], et plus récemment la biologie [12], la médecine [18] et l'électronique, spécialité où de nombreux "modèles" conduisent à des équations differentielles.
La théorie qualitative des équations différentielles traite, entre autres , les propriétés asymptotiques des solutions, ce qui se passe avec le système après une longue période de temps. Le type le plus simple du comportement se manifeste par des points d'équilibre, et par des orbites périodiques. Quand un système d'équations différentielles ordinaires a un point d'équilibre (c'est à dire des solutions constantes) dont les propriétés de stabilité sont connues, il devient significatif d'étudier les connexions entre eux par des trajectoires de solutions du système donné. Elles sont appelées solutions homocliniques ou hétérocliniques selon qu'elles décrivent un système basé sur un seul équilibre ou qu'elles commencent et finissent à deux équilibres distincts. Dans cette thèse, nous nous intéressons au cas où les solutions homocliniques et hétérocliniques sont considérées comme limites de solutions périodiques. Au $XIX$ ème siècle, Poincaré [79] étudia des systèmes périodiques perturbés. Les résultats de Poincaré ont été le déclenchement de nombreuses œuvres ([11], [71], [75], [95] et [96])
L'étude de l'existence de solutions homocliniques et hétérocliniques pour des systèmes Hamiltoniens a fait l'objet de beaucoup de travaux de grands mathematiciens tels que: Melnikov [71], Smale ([95], [96]), Birkhoff [11], Moser [75] et Wiggins [109]. En particulier, la théorie de Melnikov, dont l'idée principale est que l'existence de connexions entre certains équilibres, peut être prouvée en

analysant les propriétés d'intersection des variétés stable et instable à travers ces points d'équilibre, fournit un instrument pour analyser comment les homocliniques et les hétérocliniques sont affectées par les perturbations que peut subir un système Hamiltonien.
Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence de ces solutions: les méthodes topologiques (le degré topologique, les théorèmes de point fixe et la méthode de sur et sous solutions), (cf. [91], [92]), les méthodes numériques [59] et les méthodes variationnelles qui ont été l'outil de base dans un grand nombre de contributions consacrées à ce sujet, les principaux développements étant dûs à Ambrosetti, Bolotin, Coti Zelati, Ekeland, Rabinowitz et Séré ( [1], [13], [14], [31], [32] et [82]).
Les phénomènes soumis au cours de leurs développements à des influences externes «instantanées»,dont leurs durées sont négligeables par rapport à la durée totale des phénomènes et des processus étudiés, sont modélisés par des équations impulsives. Nous citerons comme exemples de processus:
-Le fonctionnement d'un amortisseur soumis aux effets de percussion.
-Modèle percussif d'un mécanisme d'horlogerie.
-Systèmes percussives avec vibrations.
-Systèmes électroniques.
-Le contrôle de l'orbite d'un satellite, en utilisant l'accélération radiale.
-Changement de la vitesse d'une réaction chimique par l'addition ou l'enlèvement d'un catalyseur.
-Les perturbations dans les réseaux de neurones cellulaires.
-Interférence externe impulsive et problèmes d'optimisation de la dynamique de population de types proies-prédateurs.
Les systèmes dynamiques soumis à des impulsions [7], [62] et [93],interviennent dans différents domaines de la science: la mécanique, la dynamique de la population, l'écologie, la robotique industrielle, la biotechnologie, la médecine, la théorie de controle, la théorie du chaos, la pharmacocinétique, l'épidémiologie et l'économie, ([**?**], [18], [29], [40], [47], [48], [60], [76], [8], [97] et [114]).
L'étude de la solvabilité des problèmes aux limites associés à des équations différentielles impulsives a été abordée par certains outils classiques, comme la théorie du degré topologique,([67], [73], [81], et [94])) ,la méthode de sur et sous solutions avec la technique itérative monotone ([26], [37], [41], [66] et [95]), certains théorèmes de points fixes ([27], [30] et [64]) et les méthodes variationnelles ([23], [50], [78], [82], [90], [98], [99], [102], [107], [108], [113], [115] et [116]).
Dans cette thèse, par approche variationnelle, nous considérons l'étude de la solvabilité de problèmes aux limites associés à des équations différentielles du second ordre pouvant présenter des singularités et sous l'effet d'impulsions.
Nous nous intéressons en particulier à l'existence de solutions périodiques, homocliniques et hétérocliniques. Les résultats obtenus dans cette thèse généralisent

les travaux suivants [17], [33], [42], [52], [69] et [82].
Les équations differentielles considérées sont du type suivant

$$-u^{''}(t) = \psi(t, u(t)) \tag{1}$$

où $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ avec $N = 1$ ou bien $N = 2$ et $\psi$ est une fonction de Caratheodory, qui est $T$-périodique par rapport à sa première variable vérifiant certaines hypothèses spécifiées par la suite.
(1) est soumise à des impulsions de type

$$\Delta u'(t_j) = J_j(u(t_j)), \tag{2}$$

où $\Delta u'(t_j) = u'(t_j^+) - u'(t_j^-)$, avec $u'(t_j^{\pm}) = \lim\limits_{t \to t_j^{\pm}} u'(t)$; $t_j$ sont les instants où les impulsions se produisent sur $\mathbb{R}$.
Cette thèse est constituée, en plus d'une introduction générale et d'une conclusion, de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons des notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Ce chapitre est partagé en trois sections. La première section présente les espaces fonctionnels utilisés dans le développement des chapitres qui suivent. Dans la deuxième section, nous introduisons quelques notions de base d'analyse fonctionnelle nécessaires . Et dans la troisième section, nous donnerons un apperçu sur l'approche variationnelle utilisée .
L'objet du second chapitre est l'étude de l'existence de solution pour l'équation (1) avec $\psi(t, u(t)) = -f(t, u(t))$ sous l'effet d'impulsions (2). Nous commençons tout d'abord par donner quelques définitions et résultats connus nécessaires à l'étude de notre problème. Ensuite, nous énonçons et prouvons deux résultats, l'un sur l'éxistence des solutions $T-$périodiques non constantes entre des solutions constantes et le second sur l'éxistence des connexions hétérocliniques entre ces solutions constantes, en utilsant une minimisation avec contraintes. Nous achevons le chapitre par un exemple.
Le troisième chapitre est le développement de l'article [35], il est consacré à l'étude de l'existence de solution pour l'équation (1) avec $\psi(t, u(t)) = u(t) - f(t, u(t))$ sous l'effet d'impulsions (2), où la nonlinéarité $f$ présente une singularité. Par une minimisation directe, nous prouvons l'existence de solutions homocliniques qui sont considérées comme limite de solutions périodiques de problèmes approximatifs du problème initial. Ce résultat est également illustré par un exemple.
Dans le quatrième chapitre, en utilisant une minimisation directe, nous montrons l'existence de solutions périodiques pour des systèmes amortis couplés présentant une asymétrie, dans le cas où

$$\psi(t, u(t)) = \psi(t, u_1(t), u_2(t)) = \begin{pmatrix} -g_1(t)u_1^{'}(t) + h_1(t)u_1(t) - f_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ -g_2(t)u_2^{'}(t) + h_2(t)u_2(t) - f_2(t, u_1(t), u_2(t)) \end{pmatrix},$$

Nous terminons ce chapitre par un exemple illustratif.
Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

# Chapitre 1

# Préliminaires

## Sommaire



Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations et outils utilisés tout au long de ce manuscrit. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte (dans les chapitres concernés). Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie et qui seront utilisés dans le texte .

## 1.1 Quelques Espaces fonctionnels

### 1.1.1 Espaces de Lebesgue

Nous commençons par introduire les espaces de Lebesgue.
Pour $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $D(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ et à support compact dans $\Omega$.

L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \int_\Omega |u(t)|^p \, dt < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

$L^p$ est muni de la norme

$$\|u\|_p = \left[ \int_\Omega |u(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Cette norme le rend complet, c'est donc un espace de Banach.
Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \, ess \sup |u| < +\infty\},$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme suivante: $\|u\|_\infty = ess\sup\limits_{\Omega} |u|$ ; avec

$$ess \sup |u| = \inf \{C > 0; \;\; |u(t)| \leq C \quad p.p \text{ dans } \Omega\}$$

**Inégalité de Hôlder**

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p <\to \infty$ et $q$ le conjugué de $p$ alors :

$$f.g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |f.g| \, dt \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.3}$$

**Lemme de Fatou**

**Lemme 1.1.1** ***(lemme de Fatou)*** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telle que , pour chaque $n$, $f_n(t) \geq 0$ $p.p$ sur $\Omega$, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n \in L^1(\Omega)$ alors*

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf f_n(t) \, dt \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(t) \, dt.$$

***Corollaire 1.1.1*** *Soient, $g$ une fonction mesurable intégrable et $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables intégrables (le signe de ces fonctions n'est pas prescrit).*

1. *Si $g \leq f_n$ alors $\int_\Omega \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(t) \, dt \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(t) \, dt$.*
2. *Si $f_n \leq g$ alors $\int_\Omega \lim\limits_{n\to\infty} \sup f_n(t) \, dt \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_\Omega f_n(t) \, dt$.*

### 1.1.2 Espace de Sobolev

**Définition 1.1.1** *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), pour\ i \in \{1,...,N\}\} \tag{1.4}$$

*où les dérivées sont au sens des distributions.*

$\left(W^{1,p}(\Omega); \|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$ , est un espace de Banach, où$\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$est définie par

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^p(\Omega)}$$

Dans cette thèse nous considérons $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $p = 2$ et dans ce cas l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$, son produit scalaire est donné par

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} [u^{'}(t)v^{'}(t) + u(t)v(t)]dt \tag{1.5}$$

Et, en s'interessant aux solutions périodiques , nous utiliserons l'espace de Sobolev $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ qui est l'espace des fonctions $T$-périodiques ayant une dérivée faible $u' \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W_T^{1,p}(\mathbb{R})} = \left[\int_0^T |u(t)|^p\, dt + \int_0^T |u'(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6}$$

Le théorème suivant dit " Théorème d'injection de Sobolev" très utilisé dans l'étude de la solvabilité des équations différentielles, permet de faire des estimations à prioris en fournissant des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

**Théorème 1.1** ([19])*)Soit $\Omega$ est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soient $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty)$. Alors*
*1. Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$.*
*2. Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, +\infty[$, (mais pas pour $q = +\infty$).*
*3. Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*
*Toutes ces injections sont continues.*

Sans hypothèse de régularité sur $\Omega$, les injections sont vraies localement : $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ . La compacité des injections précédentes, est donnée par le théorème de **Rellich-Kondrachov** ([19]))

**Inégalité de Poincaré-Wirtinger**

Soient p, tel que $1 \leq p \leq \infty$ et $\Omega$ borné régulier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de $\Omega$ et $p$, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u - u_\Omega\|_p \leq C \|\nabla u\|_p$$

où

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)dx,$$

est la valeur moyenne de u sur $\Omega$, le nombre $|\Omega|$ désignant la mesure de Lebesgue du domaine $\Omega$.
Il est possible de déterminer concrètement la constante C pour des cas particuliers. Par exemple, pour $p = 2$ et $N = 1$, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger donne, pour un intervalle $(0, T)$, $C = \frac{T}{2\pi}$. Ce qui permet d'obtenir pour des fonctions de valeur moyenne nulle

$$\|u\|_2 \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right) \|u'\|_2 \tag{1.7}$$

## 1.2 Quelques notions de l'analyse fonctionnelle

Soient $X$ un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$

### 1.2.1 Convergence forte

On dit que la suite $(u_n)_n$ de $X$ converge fortement vers $u$ dans $X$ si $\|u_n - u\|_X \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

### 1.2.2 Convergence faible

La suite $(u_n)_n$ est dite convergente faiblement vers $u$ si $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ $\forall v \in X'$ dual de $X$ et elle est notée par $u_n \rightharpoonup u$.

**Théorème 1.2** ***(Eberlein–Šmulian)***
*Un espace de Banach $X$ est réflexif si et seulement si de toute suite bornée $(u_n)$ de $X$, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $X$.*

**Proposition 1.2.1** *Si une suite $(u_k)_k$ converge faiblement vers u dans $W_T^{1,p}$, alors $(u_k)_k$ converge uniformement vers u sur $[0, T]$ .Et,il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{W_T^{1,p}([0,T])} \;\; \text{où} \;\; \|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|.$$

### 1.2.3 Fonction de Carathéodory

**Définition 1.2.1** *Nous rappelons que pour $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite une fonction $L^p$-Carathéodory si*
*(a) $f(t,u)$ est dans $L^p(\Omega)$ pour chaque $u \in \mathbb{R}$;*
*(b) $f(t,u)$ est continue presque pour tout $t \in \Omega$;*
*(c) Pour chaque $\rho > 0$ il existe une fonction $l_\rho \in L^p(\Omega)$ telle que p.p $t \in \Omega$.*

$$\sup_{|u|\leq\rho} |f(t,u)| \leq l_\rho(t).$$

## 1.3 Approche variationnelle

La méthode variationnelle appliquée dans les chapitres suivants, place la recherche de solutions des équations élliptiques dans le cadre des espaces de Sobolev definis ci-dessus. L'idée fondamentale est l'interprétation d'un problème différentiel, écrit abstraitement comme $F(u) = 0$, comme

$$E'(u) = 0, \tag{1.8}$$

où $E$ est une fonction appropriée définie sur un ensemble de fonctions, et $E'$ est la différentielle de $J$ dans un sens qu'on va préciser. En d'autres termes, les zéros de $F$ sont considérés comme des points critiques (pas nécessairement minimas) de $E$. L'équation (1.8) est l'équation d'Euler, ou l'équation d'Euler-Lagrange associé à $E$.
Par ailleurs, dans d'innombrables applications, la fonctionnelle $E$ a une signification physique qui est fondamentale. Souvent, $E$ est une énergie, écrite comme l'intégrale d'un Lagrangien, et donc trouver minimum signifie non seulement de résoudre l'équation différentielle, mais trouver la solution d'énergie minimale qui est souvent très importante dans les problèmes concrets. L'interprétation de $E$ comme une énergie est si fréquente que les fonctionnelles associées à des problèmes différentiels sont appelés fonctionnelles d'énergie, même lorsque le problème n'a pas d'applications directes en physique. Les problèmes différentiels pouvant être écrits sous la forme $E'(u) = 0$ sont des problèmes qui ont une structure variationnelle.
Les méthodes variationnelles ont une longue histoire, qui est probablement originaire du problème brachistochrone posé au $XVII$ ème siècle et résolu par Newton, Leibniz, Jakob et Bernoulli, ainsi que par L'Hôpital. Lagrange a introduit des formalismes et des techniques qui sont toujours en usage aujourd'hui. Au cours du $XX$ème siècle, après avoir donné les fondements de l'analyse fonctionnelle, l'extension du calcul différentiel aux espaces normés, les méthodes variationnelles n'ont jamais cessé d'être développées. D'une part, des techniques de minimisation ont évolué à un niveau très élevé, et ont été appliquées à un nombre énorme de problèmes dans beaucoup de domaines de la

science pure et appliquée. Les méthodes qui sont concernées par la minimisation de fonctionnelles sont appellées des méthodes directes du Calcul des Variations.
D'autre part, les procédures visant la recherche de points critiques des fonctionnelles et qui ne sont pas des points de minimum ont donné lieu à une branche de l'analyse non linéaire connue sous le nom de la théorie des points critiques. Parmi les précurseurs de cette théorie il y a Ljusternik et Schnirelman ([54]).

### 1.3.1 Solution faible

La notion de solution faible dépend du problème posé. Quand on a un problème à résoudre (souvent une équation ou un système d'équations avec des conditions aux limites), les solutions du problème sont des fonctions qui doivent avoir une certaine régularité pour que le problème ait un sens. Par exemple, dans notre cas où l'équation différentielle est donnée par

$$-u''(t) = \psi(t, u(t)), \tag{1.9}$$

**Définition 1.3.1** *$u$ est dite solution $T$-périodique de l'équation* (1.9) *si elle vérifie l'équation* (1.9) *pour presque tout $t \in (0, T)$ et:*

$$u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T) \tag{1.10}$$

**Définition 1.3.2** *Une solution T- périodique est dite solution faible de* (1.9) *si $u \in W_T^{1,2}(I)$ est tel que $\forall v \in W_T^{1,2}(I)$*

$$\int_I u'(t)v'(t)dt - \int_I \psi(t, u(t))v(t)dt = 0 \tag{1.11}$$

Cette nouvelle formulation (1.11) est dite formulation faible, obtenue en multipliant (1.9) par $v \in \ W^{1,2}(I)$ et intégrant par parties l'équation obtenue, en prennant en considération les conditions de periodicité. La fonctionnelle d'énergie assciée est donnée par

$$E(u) = \int_I \left[\frac{1}{2}\left(u(t)\right)^2 - \Psi(t, u(t))\right] dt \tag{1.12}$$

où $\Psi(t, u) = \int\limits_0^u \psi(t, s)ds$
Ainsi définie $E$ est differentiable si $\Psi$ est au moins de Carathéodory et sa dérivée au point $u \in W^{1,2}(I)$ est la fonctionnelle $E'(u)$ définie pour tout $v \in W^{1,2}(I)$ par la formule

$$E'(u)v = \int_I u'(t)v'(t)dt - \int_I \psi(t, u(t))v(t)dt$$

### 1.3.2 Points critiques

**1** Soit $E$ une fonctionnelle de classe $C^1$ définie sur $X$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $u \in X$ est un point critique de $E$ si $E'(u) = 0$.

**2** La valeur $c$ est dite valeur critique de $E$ s'il existe un point critique $u$ dans $X$ tel que : $E(u) = c$.

**Définition 1.3.3** *Une fonction $E : X \to \mathbb{R}$, est dite semi-continue inférieurement et on la note (s.c.i), en $x \in X$ si, pour toute suite $\{x_k\} \in X$ convergente vers $x$, on a*

$$\liminf_{x_k \to x} E(x_k) \geq E(x).$$

**Définition 1.3.4** *Une fonctionnelle $E$ est dite coercive si :* $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} E(u) =$

$+\infty$.

**Théorème 1.3** ***(minimisation directe*** [98]*) Si $X$ est réflexif, $M \subset X$ un sous ensemble faiblement fermé de $X$. et $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, coercive et faiblement semi continue inférieurement sur $M$, alors $E$ est borné inférieurement dans $M$ et atteint son minimum dans $M$.*

### 1.3.3 Solution hétéroclinique et solution homoclinique

Les orbites homocliniques et hétérocliniques proviennent de l'étude des bifurcations et des phénomènes du chaos (cf. [39, 114], [97] et [40]). Elles ont des applications en mécanique [4], biomathématiques [9]. et chimie [45]. Biologiquement, l'étude du cycle hétéroclinique est intéréssante car sa stabilité est étroitement liée au problème de la permanance, par exemple, dans [43], l'auteur a abordé le sujet de l'existence de cycles hétérocliniques pour le modèle de compétition entre $'n'$ espèces et sa stabilité. Beaucoup de travaux sur ce sujet ont été réalisés (cf. [71], [44], [28] et [70]).

**Définition 1.3.5** *La fonction $u$ est dite solution hétéroclinique de l'équation* (1.9) *connectant les deux équilibres $u = u_0$ et $u = u_1$, si et seulement si*

$$\begin{array}{ccll} u(t) & \to & u_0 & \textit{quand } t \to -\infty \\ & & \textit{et} & \\ u(t) & \to & u_1 & \textit{quand } t \to +\infty \end{array}$$

**Définition 1.3.6** *La fonction $u$ est dite solution homoclinique de l'équation* (1.9) *connectant le point d'équilibre $u = u_0$ à lui même, si et seulement si,*

$$u(t) \to u_0 \quad \textit{quand } t \to \pm\infty$$

**Exemple 1.3.1** [23] *Considérons le cas où* $\psi = a \sin u$*, nous avons alors l'equation du pendule,*

$$u'' + a \sin u = 0, \qquad a > 0 \tag{1.13}$$

*Intégrant* (1.13) *avec des conditions initiales* $u_0, u'_0$ *quelconques, on a :*

$$\frac{u'^2}{2} + a(1 - \cos u) = k = cste(u_0, u'_0) \tag{1.14}$$

*relation que l'on aurait également pu écrire directement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique du pendule et qui permet de tracer le portrait de phase de celui-ci comme un réseau de courbes paramétré par k ( réalisée en fait de façon plus rapide par un logiciel qui intègre numériquement l'équation* (1.13) *pour divers jeux de conditions initiales).*
*Dans le cas où* $k \in \mathbb{R}^+$*, la fonction suivante, dite fonction d'énergie associée à* (1.13)*,*

$$E(u, u') = \frac{u'^2}{2} + a(1 - \cos u),$$

*est constante le long des solutions de* (1.13)*. Quand* $k = 0$ *dans* (1.14)*, on obtient un équilibre stable* $u = 2k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*). Si* $0 < k < 2a$*, les trajectoires sont des courbes fermées qui correspondent à des solutions périodiques. Pour* $k > 2a$*, nous obtenons des trajectoires illimitées qui correspondent à des solutions avec une dérivée périodique. Et pour,* $k = 2a$ *dans* (1.14) *on obtient une trajectoire stationnaire, un équilibre instable (*$u = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$*) et le graphe des fonctions*

$$u' = \pm\sqrt{2a(1 + \cos u)}, \qquad u \neq (2k+1)\pi \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{Z} \tag{1.15}$$

*Par exemple, les solutions ayant des trajectoires comme le graphe de cette fonction dans* $]-\pi, \pi[$ *ont la propriété suivante:*

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \pi, \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = -\pi$$

*et*

$$\lim_{t\to\pm\infty} u'(t) = 0$$

*où les mêmes conditions avec les rôles de* $+\infty$ *et* $-\infty$ *inversées. Donc ces trajectoires connectent deux équilibres instables distincts (consécutifs). elles sont appelées hétérocliniques de* (1.13)*.*
*En donnant une interprétation physique, il est parfois préférable de présenter les trojectoires non pas sur un plan mais sur un cylindre (qui est plan où les points* $(u, u')$ *et* $(v, v')$ *sont identifiés si et seulement si* $u \equiv v \pmod{2\pi}$ *et* $u' \equiv v'$*). Alors* $(-\pi, 0)$ *et* $(\pi, 0)$ *sont en fait le même équilibre et une trajectoire reliant ces points dans le plan devient une trajectoire à limites égales en* $\pm\infty$*. Et dans ce cas là, nous parlerons des homocliniques.*

# Chapitre 2

# Solutions hétérocliniques d'une classe d'EDO soumises à des impulsions

**Sommaire**



## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, par une approche variationnelle basée sur une minimisation avec contraintes; nous montrons l'existence de solutions, périodiques et hétérocliniques (cf. [11], [46]), situées entre deux solutions constantes (équilibres) de l'équation (1.9) soumise à des impulsions.
Pour une équation différentielle du second ordre $u'' = f(t, u, u')$, on peut considérer en général des impulsions dans la position $u$ et la vitesse $u'$. Cependant, dans le mouvement des engins spatiaux, des impulsions instantanées sont considérées ce qui entraîne des discontinuités de type sauts de la vitesse, mais sans changement de position [24], [25], [68], [80].C'est ce type d'impulsions que nous considérons.
La recherche des solutions hétérocliniques a été l'objet de plusieurs travaux, comme par exemple ceux de Rabinowitz [82] et Felmer [42], qui ont prouvé

l'existence de ce type de solutions pour des systèmes Hamiltoniens, voir aussi [3], [20], [61] et [89].

## 2.2 Résultats principaux

### 2.2.1 Formulation du problème

Nous considérons l'équation différentielle

$$u''(t) = f(t, u(t)), \text{p.p } t \in \mathbb{R}, t \neq t_j \tag{2.1}$$

avec des effets impulsifs

$$\Delta u'(t_j) = J_j(u(t_j)), \ j \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

où $\Delta u'(t_j) = u'(t_j^+) - u'(t_j^-)$ avec $u'(t_j^{\pm}) = \lim_{t \to t_j^{\pm}} u'(t_j)$, $j = 1, 2, ..., p-1$ sont les instants où les impulsions se prduisent et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_p = T$, $t_{j+p} = t_j + T$.
Les fonctions $f$ et $J_j$ vérifient les hypothèses suivantes:
$(H_1)$

(i) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui est $T$-périodique par rapport à la première variable.

(ii) Il existe deux constantes $a, b$ $(a < b)$, tels que $f(t, a) = f(t, b) = 0$ p.p dans $\mathbb{R}$, $F(t, b) = 0$ et $F(t, c) \neq 0$, pour tout $c \in ]a, b[$, où $F$ est la primitive de $f$ définie pour presque tout $t$ dans $\mathbb{R}$ et tout $u$ dans $\mathbb{R}$, par, $F(t, u) = \int_a^u f(t, s) ds$.

$(H_2)$ $J_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction continue bornée telle que $J_{j+p} \equiv J_j$, pour tout $j$ et,

$$f(t, u) + \sum_{j=1}^{p-1} J_j(u) > 0 \text{ p.p } t \in \mathbb{R} \text{ et tout } u \in \mathbb{R}$$

**Remarque 1** *De $(H_2)$, on a l'existence de deux constantes $m$ et $M$ telles que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $m < J_j(s) \leq M$, pour tout $j = 1, 2, ..., p-1$.*

#### Notion de solution pour $(2.1) - (2.2)$

La présence d'impulsions nécessite une précision du concept de solution .
Soit $I = [0, T]$, pour $u \in W^{2,2}(I)$, nous avons $u$ et $u'$ sont absolument continues et $u'' \in L^2(I)$. Donc $\Delta u'(t_j) = u'(t_j^+) - u'(t_j^-) = 0$ pour tout $t \in I$.
Si $u \in W^{1,2}(I)$, alors $u$ est absolument continue $u' \in L^2(I)$. Dans ce cas, les dérivées $u'(t_j^+)$, $u'(t_j^-)$ peuvent ne pas exister. Et par concéquent, nous devons introduire la notion de solution du système impulsif (2.1)-(2.2)

**Définition 2.2.1** *$u \in C(I)$, est dite solution du problème impulsif* $(2.1)-(2.2)$ *sur $I$ si pour tout $j = 1, 2, ..p-1$, $u|_{[t_j,t_{j+1}]} = u_j \in W^{2,2}(t_j, t_{j+1})$, vérifie* $(2.1)$ *pour $t \neq t_j$, $t \in I$, les limites $u'(t_j^-)$, $u'(t_j^+)$ $j = 1, 2, ...p-1$ existent, et la condition* $(2.2)$ *est satisfaite.*

### 2.2.2 Existence de solution périodique pour $(2.1)-(2.2)$

**Théorème 2.1** *Si $(H_1)$ et $(H_2)$ sont vérifiées, alors* $(2.1)-(2.2)$ *possède au moins une solution $T-$périodique $u_0$ telle que, pour tout $t$*

$$a \leq u_0(t) \leq b,$$

**Preuve:** Pour la recherche des solutions $T$- périodiques, en utilisant la periodicité des fonctions $f$ et $J_j$ , nous pouvons limiter l'étude de $(\mathbf{2.1})$ sur l'intervalle $I$.
Soit $g$ la modifiée de $f$, définie p.p $t \in I$ par,

$$g(t,u) = \begin{cases} \frac{u-a}{1+u^2}, & \text{si } u < a \\ f(t,u), & \text{si } a \leq u \leq b \\ \frac{u-b}{1+u^2}, & \text{si } u > b \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors, $g$ satisfait l'hypothèse $(H_1)$. Et il existe une fonction positive $K_g \in L^1(I)$, telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et presque tout $t \in I$,

$$|g(t,u)| < K_g(t) \tag{2.4}$$

Considérons l'équation modifiée suivante,

$$u''(t) = g(t, u(t)), \text{p. p } t \in I, t \neq t_j \tag{2.5}$$

Le résultat suivant décrit la relation entre $(\mathbf{2.1})$ et $(\mathbf{2.5})$

**Lemme 2.2.1** *Chaque solution $T$-périodique de* $(2.5)$ *est une solution $T-$périodique de* $(2.1)$.

**Preuve:** Soit $u$ une solution $T$-périodique de $(\mathbf{2.5})$, considérons les ensembles $I_a$ et $I_b$, définis par,

$$I_b = \{t \in I; u(t) > b\} \text{ et } I_a = \{t \in I; u(t) < a\}$$

Nous montrons que $I_b$ et $I_a$ sont vides.
Supposons le contraire, que $I_b \neq \emptyset$, il existe alors $\tau \in I$, tel que $u(\tau) > b$.Alors, il existe un $t_0 \in I; u(t_0) = \max_{t \in I} u(t) > b$ et par $(\mathbf{2.3})$ , $u''(t_0) = g(t_0, u(t_0)) > 0$ ce qui contredit $t_0$ point où u atteint son maximum

Aussi, si $u(0) = u(T) = \max_{t\in I} u(t) > b$, la continuité de $u$ implique que pour tout $t$ près de 0 ou $T$, nous avons $t \in I_b$, et par la définition de $u'(0)$ et $u'(T)$, nous obtenons $u'(0) < 0$ et $u'(T) > 0$, ce qui est une contradiction avec le fait que $u$ est une solution $T$-périodique de (**2.5**). Et, si $u \equiv \max_{t\in I} u(t)$, alors $u$ est une solution de (**2.5**) implique que $g(t, M_u) \equiv 0$ pour presque tout $t$ dans $I$. A partir de (**2.3**) nous devons avoir $\max_{t\in I} u(t) = b$, qui est une contradiction avec $\max_{t\in I} u(t) > b$. Alors $u$ ne peut être constante $= \max_{t\in I} u(t)$.
Analogiquement, nous montrons que $I_a$ est vide, ce qui implique que $u(t) \geq a$ sur $I$. Donc, pour p.p $t \in I$, $a \leq u(t) \leq b$. Et à partir de (**2.3**), $u$ est une solution de (**2.1**). ■
En concéquence du lemme précédent (**2.2.1**), dans ce qui suit, nous traitons (**2.5**)-(**2.2**) à la place de (**2.1**)- (**2.2**). Et, en utilisant l'approche variationelle, nous prouvons l'existence de solution $T$-périodique de (**2.1**)- (**2.2**).

Tout d'abord, nous considérons l'espace de Sobolev $H_T^1$ defini par,

$$H_T^1 = \left\{ u \in W^{1;2}(I),\ u(0) = u(T) \right\}$$

muni de la norme (1.6), $H_T^1$ admet la décomposition orthogonale, $H_T^1 = H^+ \oplus H^-$, où $H^+$ est le sous espace des fonctions constantes dans $H_T^1$ et $H^-$ dénote l'espace des fonctions dans $H_T^1$ avec valeur moyenne nulle. Alors si $u \in H_T^1$ il peut être écrit comme,

$$u = \bar{u} + \tilde{u} \tag{2.6}$$

avec $\bar{u} \in H^+$et $\tilde{u} \in H^-$.

Ensuite, soit $\varphi : H_T^1 \to \mathbb{R}$, la fonctionnelle d'énergie associée à (**2.5**)-(**2.2**) définie par,

$$\varphi(u) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \left( u'(t) \right)^2 + G(t, u(t)) \right] dt + \sum_{j=1}^{p-1} \int_a^{u(t_j)} J_j(\tau) d\tau. \tag{2.7}$$

où $G(t, u) = \int_a^u g(t, s) ds$

$\varphi$ est bien définie dans $H_T^1$. En combinant la semicontinuité inférieure de la norme de $L^2$ , le lemme de Fatou et en utilisant $(H_1)(i)$, $(H_2)$, nous obtenons la semi continuité inférieure faible de $\varphi$.
$\varphi$ est une fonctionnelle differentiable et sa dérivée au point $u \in H_T^1$ est la fonctionelle $\varphi'(u) \in (H_T^1)^*$ définie , pour tout $v \in H_T^1$ par

$$\varphi'(u)v = \int_0^T u'(t)v'(t)dt + \int_0^T g(t, u(t))v(t)dt + \sum_{j=1}^{p-1} J_j(u(t_j))v(t_j) \tag{2.8}$$

Evidemment, si $u \in H_T^1$ est un point critique de la fonctionelle $\varphi$, alors $u$ est une solution $T$- périodique faible de (**2.5**) .($u$ satisfait la définition (**2.2.1**). Par

conséquent, il est suffisant de prouver l'éxistence des points critiques de $\varphi$ pour obtenir une solution $T$-périodique de (**2**.**5**)-(**2**.**2**).
En utilisant la décomposition (**2**.**6**), nous avons,

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_0^T \frac{1}{2}u'(t)^2dt + \int_0^T G(t,u)dt + \sum_{j=1}^{p-1}\int_a^{u(t_j)} J_j(\tau)d\tau \\ &= \int_0^T \frac{1}{2}\tilde{u}'(t)^2dt + \int_0^T G(t,\bar{u})dt + \int_0^T [G(t,u(t)) - G(t,\bar{u}(t))]dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p-1}\int_a^{u(t_j)} J_j(\tau)d\tau. \\ &= \int_0^T \frac{|\tilde{u}'|^2}{2}dt + \int_0^T G(t,\bar{u})dt + \int_0^T\int_0^1 \tilde{u}(t)g(t,\bar{u}+s\tilde{u}(t))dsdt \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p-1}\int_a^{u(t_j)} J_j(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Et à partir de (**2**.**4**), nous obtenons,

$$\varphi(u) \geq \int_0^T \frac{|u'^2|}{2}dt + \int_0^T G(t,\bar{u})dt - \|K_g(t)\|_{L^1}\|\tilde{u}\|_\infty + \sum_{j=1}^{p-1}\int_a^{u(t_j)} J_j(\tau)d\tau$$

L'inégalité de Poincaré-Wirtinger, implique l'éxistence d'une constante $C > 0$ telle que,

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leq C\|u\|,$$

Donc,

$$\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_0^T G(t,\bar{u})dt - C\|K_g(t)\|_{L^1}\|u\| + pm\,(u(t_j) - a)$$

En utilisant (**2**.**3**), nous avons,

$$\int_0^T G(t,\bar{u})dt \to +\infty, \text{ si } |\bar{u}| \to +\infty.$$

Par $(H_2)$, et puisque $\|u\| \to +\infty$ est équivalente à $(|\bar{u}|^2 + \int_0^T |u'(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}} \to +\infty$, nous obtenons que $\varphi$ est coercive (i.e $\varphi(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to +\infty$).
Et, en appliquant la méthode directe du calcul variationnel, nous trouvons qu'il existe $u_o$ tel que,

$$\varphi(u_0) = \inf_{H_T^1}\varphi$$

Du lemme (**2**.**2**.**1**) et l'hypothèse $(H_1)(ii)$, $u_o$ est une solution $T$- périodique non-constante de $(2.1) - (2.2)$ . De plus (2.3) implique que, pour tout $t$ dans $I$ , $a \leq u_0(t) \leq b$. ■

### 2.2.3 Existence des connexions hétérocliniques

En utilisant l'approche variationnelle, minimisation avec contraintes, nous obtenons l'éxistence d'une connexion hétéroclinique entre les solutions constantes $a$ et $b$. Notre résultat est donné comme suit

**Théorème 2.2** *Si* $(H_1)$ *et* $(H_2)$ *sont vérifiées, l'équation* (2.1) *admet au moins une solution hétéroclinique, satisfaisant* (2.2).

**Preuve:** Pour $F$ définie par

$$F(t,u)=\int_a^u f(t,s)ds,$$

Nous considérons la fonction modifiée de $F$ définie par,

$$\tilde{F}(t,u)=\begin{cases} F(t,u), & u\in[a,b] \\ 0, & u\in\mathbb{R}\backslash[a,b] \end{cases} \tag{2.9}$$

Cette modifiée est justifiée par le fait que l'on s'intéresse à l'éxistence d'une solution entre $a$ et $b$,
Soit $\Phi(u)$ la fonctionnelle donnée par,

$$\Phi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u'^2(t)}{2}+\tilde{F}(t,u(t))\right)dt+\sum_{j=1}^{p-1}\int_a^{u(t_j)}J_j(s)ds \tag{2.10}$$

Clairement, $\Phi$ est bien définie sur $W^{1;2}(\mathbb{R})$. En combinant la semicontinuité inférieure faible de la norme de $L^2$et le lemme de Fatou et en utilisant $(H_1)(i)$, $(H_2)$, nous avons la semicontinuité inférieure faible de $\Phi$.
$\Phi$ est une fonctionnelle différentiable, dont la dérivée au point $u\in W^{1;2}(\mathbb{R})$ est la fonctionnelle $\Phi'(u)$ définie, pour tout $v$ dans $W^{1;2}(\mathbb{R})$, par

$$\Phi'(u).v=\int_{-\infty}^{+\infty}u'(t)v'(t)dt+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,u(t)).v(t)dt+\sum_{j=1}^{p-1}J_j(u(t_j)).v(t_j) \tag{2.11}$$

Evidemment, si $u\in W^{1,2}(\mathbb{R})$ est un point critique de la fonctionnelle $\Phi$, alors $u$ est une solution faible de (**2.1**)-(2.2). Donc, on considère les orbites hétérocliniques de (2.1) satisfaisant (2.2) comme minimiseurs de $\Phi$ dans l'epace fonctionnel,

$$\Omega=\{u\in W^{1,2}(\mathbb{R});\lim_{t\to-\infty}u(t)=a,\lim_{t\to+\infty}u(t)=b\} \tag{2.12}$$

Dans ce qui suit, nous énoncerons et prouverons un résultat auxiliaire

**Lemme 2.2.2** *Pour $\epsilon$ dans $]0,1[$*

$$\Phi(u) \geq \epsilon[\frac{\sqrt{\beta_\epsilon}}{\sqrt{2}} + m(p-1)] \tag{2.13}$$

*où,*

$$\beta_\epsilon = \min\{\min_{t\in[0,T]} \tilde{F}(t,z) : b-\epsilon \leq z \leq b - \frac{\epsilon}{2} \text{ ou } a + \frac{\epsilon}{2} \leq z \leq a+\epsilon\} \tag{2.14}$$

**Preuve:** *Pour tout $u$ dans $\Omega$, il existe $t_1, t_2$ dans $\mathbb{R}$, tel que $u(t_1) = b - \frac{\epsilon}{2}$ et $u(t_2) = b - \epsilon$ (ou bien $u(t_1) = a + \frac{\epsilon}{2}$ et $u(t_2) = a + \epsilon$) assumons que $t_1 \leq t_2$ et $b - \epsilon \leq u(t) \leq b - \frac{\epsilon}{2}$ ou bien $a + \frac{\epsilon}{2} \leq u(t) \leq a + \epsilon$ pour tout $t$ dans $[t_1, t_2]$, à partir de $(H_1)$ et (**2.9**), nous avons que*

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{u'^2(t)}{2} + \tilde{F}(t,u(t)))dt + \sum_{j=1}^{p-1} \int_a^{u(t_j)} J_j(s)ds \\
&\geq \int_{t_1}^{t_2} (\frac{u'^2(t)}{2} + \tilde{F}(t,u(t)))dt + \sum_{j=1}^{p-1} \int_a^{u(t_j)} J_j(s)ds \\
&\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{2}dt + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{F}(t,u(t))dt + \sum_{j=1}^{p-1} \int_a^{u(t_j)} J_j(s)ds
\end{aligned}$$

*Par l'inégalité de Schwartz ([19]), nous obtenons*

$$(\int_{t_1}^{t_2} \left(u'\right)^2)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\int_{t_1}^{t_2} u'v}{(\int_{t_1}^{t_2} (v)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

*où, $v = \frac{1}{\sqrt{t_2 - t_1}}$, car $(\int_{t_1}^{t_2} v^2)^{\frac{1}{2}} = (\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t_2 - t_1})^{\frac{1}{2}} = 1$, nous avons alors,*

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2}{2} dt \geq \frac{\epsilon^2}{8(t_2 - t_1)}$$

*Donc, en utilisant la périodicité de $\tilde{F}$, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{2}dt + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{F}(t,u(t))dt + \sum_{j=1}^{p-1} \int_a^{u(t_j)} J_j(s)ds \\
&\geq \frac{\epsilon^2}{8(t_2 - t_1)} + \beta_\epsilon(t_2 - t_1) + m(p-1)(u(t_j) - a) \\
&\geq \frac{\epsilon^2}{8(t_2 - t_1)} + \beta_\epsilon(t_2 - t_1) + m(p-1)\epsilon, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

*pour* $\beta_\epsilon$ *défini par* $(\mathbf{2.14})$.
*A partir d'un résultat classique d'analyse,* $\frac{c^2}{x}+d^2x \geq 2cd$, *pour tout* $c,d \in \mathbb{R}$, *et* $x>0$, $(\mathbf{2.15})$ *devient,*

$$\Phi(u) \geq \left(\frac{\sqrt{\beta_\epsilon}}{\sqrt{2}} + m(p-1)\right)\epsilon.$$

*Maintenant, soit* $((u_n)_n)$ *une suite minimisante dans* $\Omega$, *telle que* $\Phi(u_n) \to \inf\Phi$ *quand* $n\to\infty$; *en passant par* $v_n = \sup(a, \inf(u_n, b))$, *et en observant que* $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$, *sans perte de généralité, nous supposons que,*

$$a \leq u_n \leq b$$

*Alors, par la continuité de* $u_n$,*on a :*
*pour tout* $\epsilon>0$, *il existe* $s_n, t_n$ *dans* $\mathbb{R}$ *tel que,*

$$\begin{cases} u_n(s_n) = a+\epsilon \text{ et } u_n(t_n) = b-\epsilon \\ a+\epsilon \leq u_n(t) \leq b-\epsilon, \text{ pour tout } t \text{ dans } [s_n, t_n] \end{cases}$$

*Si* $u_n$ *prend des valeurs plus grandes que* $a+\epsilon$ *pour* $t$ *dans* $]-\infty, s_n]$, *nous choisissons* $s'_n < s_n$ *alors que* $u_n(s'_n) = a+\epsilon$ *et* $a \leq u_n \leq a+\epsilon$ *pour* $t$ *dans* $]-\infty, s'_n]$, *de meme nous trouvons* $t'_n \geq t_n$ *alors que* $u_n(t'_n) = a-\epsilon$ *et* $b-\epsilon \leq u_n \leq b$ *pour* $t$ *dans* $[t'_n, +\infty[$.
*Ce qui nous ramène à définir une nouvelle fonction*

$$U_n(t) = \begin{cases} u_n(t-s_n+s'_n), & t \leq s_n \\ u_n(t), & s_n \leq t \leq t_n \\ u_n(t-t_n+t'_n), & t \geq t_n \end{cases} \tag{2.16}$$

*A partir de* $(\mathbf{2.16})$

$$U_n(t) \leq u_n(t)$$

*en utilisant* $(\mathbf{2.10})$, $(\mathbf{2.16})$ *et* $(H_2)$, *nous déduisons que*

$$\Phi(U_n) \leq \Phi(u_n)$$

*De* $(\mathbf{2.10})$, *nous obtenons*

$$\begin{aligned} \Phi(U_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{U_n'^2(t)}{2} + \tilde{F}(t, U_n(t)\right)dt + \sum_{j=1}^{p-1}\int_a^{U_n(t_j)} J_j(s)ds \\ &\geq \frac{1}{2}||U'_n||^2_{L^2} + \int_{s_n}^{t_n}\tilde{F}(t, U_n(t))dt + (p-1)m(U_n(t)-a) \\ &\geq \frac{1}{2}||U'_n||^2_{L^2} + \inf_{t\in[s_n,t_n]}(\min_{z\in(a,b)}\tilde{F}(t,z))(t_n-s_n) - (p-1)m\varepsilon \end{aligned}$$

*Et, $(u_n)_n$ une suite minimisante, implique que la suite $(t_n - s_n)_n$ est bornée, on peut alors en extraire une sous suite faiblement convergente, pour la simplicité, nous la noterons de la même manière.*
*A partir de $(H_1)(i)$ et à partir de l'invariance de l'intégrale par translation et la périodicité de $\tilde{F}$ en $t$, on peut supposer sans perte de généralités que $s_n = s_0 \in [0, T]$, alors il existe $\bar{t} > 0$ tel que $t_n \to \bar{t}$.Maintenant, de (**2.16**), la suite $(U_n)$ est bornée, alors, elle admet une sous suite convergente, qu'on la note par $(U_n)_n$. Donc, il existe $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ tel que*

$$U_n \overset{C(\mathbb{R})}{\to} u,$$

*et*

$$U_n' \overset{L^2(\mathbb{R})}{\to} u'$$

*A partir de la semi continuité inférieure de $\Phi$, nous avons,*

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(U_n)$$

*alors,*

$$\Phi(u) \leq \inf_{\Omega} \Phi \tag{2.17}$$

*et aussi, par la définition de l'infimum, nous avons*

$$\Phi(u) \geq \inf_{\Omega} \Phi \tag{2.18}$$

*Donc, par (**2.17**) et (**2.18**), nous obtenons*

$$\Phi(u) = \inf_{\Omega} \Phi$$

*Maintenant, la convergence uniforme de $(U_n)_n$ vers $u$, entraine que $a \leq u(t) \leq a + \epsilon$ pour $t$ dans $]-\infty, s_0]$, et $b - \epsilon \leq u(t) \leq b$ pour $t$ dans $[\bar{t}, +\infty[$, ce qui implique que*

$$\liminf_{t\to-\infty} u(t) = a \ \ et \ \ \limsup_{t\to+\infty} u(t) = b$$

*En fait nous avons*

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = a \ \ et \ \lim_{t\to+\infty} u(t) = b$$

*Sinon il existe $\delta > 0$, et plusieurs intervalles disjoints $[t_1, t_2]$, dans les conditions du lemme (**2.2.2**) (avec $\epsilon = \delta$), impliquant $\Phi(u) = +\infty$, et contredisant (**2.18**).*
*Il suit que $u$ est dans $\Omega$ et,*

$$\Phi(u) = \min_{\Omega} \Phi$$

*Nous concluons que l'équation* (**2.1**) *sous* (**2.2**) *admet au moins une connexion hétéroclinique entre les deux solutions constantes $a$ et $b$ .*

■

■

## 2.3 Exemple

**Exemple 2.3.1** [23] *Considérons l'équation suivante*

$$u''(t) = \alpha(t)h(u), t \neq t_j, t \in \mathbb{R}, \tag{2.19}$$

*sous les conditions impulsives*

$$\Delta u'(t_j) = J_j(u(t_j)),\ \ j = 1, 2, ..., p-1 \tag{2.20}$$

*où $\alpha(t)$ est une fonction mesurable $T-$périodique de période 2, qui est défini pour tout $t \in [-1, 1]$ par,*

$$\alpha(t) = (1 + t^2)$$

*La fonction $h$ est donnée par l'expréssion suivante*

$$h(u) = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ u\left(u^2 - 1\right) & -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases}$$

*telles que $h(1) = h(-1) = 0$*
*Soit $F$ est la primitive de $f$ définie pour presque tout $t \in [-1, 1]$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$, par,*

$$F(t, u) = \alpha(t) \int_{-1}^{u} h(s)ds = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{4} & -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases}$$

*alors $f\ (t, u) = \alpha(t)h(u)$;satisfait $(H_1)$ avec $a = -1$ et $b = 1$.*
*Et les fonctions $J_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues bornées définies par,*

$$J_j(u\left(t_j\right)) = 1 + u^2\left(t_k\right)\left|\sin\left(2\pi t_k\right)\right|,\ \ \textit{avec } t_k = \frac{k}{p};\ \ k = 1, 2; ...p-1,\ p = 4$$

*satisfont $f(t, u) + \sum_{j=1}^{p-1} J_j(u) > 0$ pour presque tout $t$ et tout $u \in \mathbb{R}$.*
*Les deux hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$ sont satisfaites, donc en appliquant le théorème* (**2.1**), *les équations* (**??**)-(**??**) *admettent une solution $T$-périodique* ($\mathbf{T = 2}$) *et le théorème* (**2.2**) *assure l'éxistence d'au moins une solution hétéroclinique pour* (**??**)-(**??**) *reliant $-1$ et 1.*

# Chapitre 3

# Solutions homocliniques d'une classe d'EDO singulières soumises à l'effet d'impulsions

## Sommaire



Dans ce chapitre, nous traitons l'existence de solutions homocliniques de l'équation (1) soumise à des impulsions (2.2) dans le cas où $\psi(t, u(t)) = u(t) - f(t, u(t))$ lorsque la nonlinéarité $f$ présente une singularité. Sous des conditions suffisantes simples, et en utlisant la minimisation directe, nous obtenons des solutions homocliniques, qui sont considérées comme limite de solutions périodiques de problèmes approximants le problème initial. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication [34]
Les méthodes variationnelles ont été appliquées pour montrer l'existence d'orbites homocliniques de systèmes Hamiltoniens, (cf. [2], [74], [83] et [117]), cependant, l'existence de solutions homocliniques pour les équations impulsives n'a reçu que peu d'attention. il est bien connu, que le phénomene de rupture des orbites homocliniques peut conduire au chaos, ce qui a intéréssé les mathématiciens ces dernières années [?], [119]. Coti-Zelati [?] a utilisé des méthodes variationnelles duales, Lions [65] Hofer et Wysocki [51] ont utlisé le principe de concentration de compacité avec le principe variationnel d'Ekland, ce qu'ils leur a permis d'établir l'existence de solutions homocliniques de systèmes hamiltoniens du premier ordre. Le cas des systèmes Hamiltoniens singuliers est assez

important, du fait que certains potentiels issus de la physique (comme par exemple, la mécanique céleste [57]) présentent des singularités. Il semble qu'il n'y a pas beaucoup de travaux sur cette catégorie de problèmes. Nous présentons un petit exposé des travaux antérieurs au notre. En 1996, dans l'article [88] P.H Rabinowitz a étudié un système planaire non autonome du second ordre $\ddot{q} + V_q(t,q) = 0$. En considérant que $V : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \backslash \{\xi\}) \to \mathbb{R}$ possèdant un maximum global et $V$ est singulière au point $\xi$. De plus, elle est périodique par rapport à la variable $t$. Il a prouvé qu'il existe au moins deux solutions homocliniques. Dans [21], par une hypothèse supplémentaire sur l'existence d'une orbite périodique minimale non contractile autour de $\xi$. Bolotin [15], P. Caldiroli ([21], [22]) et L. Jeanjean [10] ont établit que si $V$ est autonome alors il existe une multiplicité de solutions homocliniques. Dans [16] M. Borges a considéré un système hamiltonien planaire du second ordre avec un potentiel ayant un maximum global à l'origine et deux singularités aux points $\xi_1$ et $\xi_2$. Par des hypothèses additionnelles sur la régularité de $V : \mathbb{R}^2 \backslash \{\xi_1, \xi_2\} \to \mathbb{R}$ :$V$ de classe $C^2$ et la dérivée seconde de $V$ en 0 est définie négative, l'existence de solutions homocliniques autour de chaque singularité et autour des deux singularités, des solutions périodiques et des solutions hétérocliniques joignant 0 à des solutions périodiques, est établie.
Pour $n > 2$ et $V = V(q)$, l'existence des homocliniques a été établie par K. Tanaka dans [103]. Et, dans [87] Rabinowitz a prouvé l'existence des solutions dites solutions homocliniques multi bosses pour une classe des systèmes Hamiltonian singuliers dans $\mathbb{R}^2$ qui sont soumis à une puissance presque périodique dans le temps [86].
Récemment, dans [55] J.Janczewska considère une classe de systèmes Hamiltoniens du second ordre, où le potentiel a une singularité au point $\xi \in \mathbb{R}^2$ et son unique maximum global $0 \in \mathbb{R}$ est atteint en deux points distincts $a, b \in \mathbb{R}^2 \diagdown \{\xi\}$. Pour une classe de potentiels qui satisfait une condition forte introduite par W. B. Gordon [49], qui a utilisé la minimisation des intégrales d'action, elle établit l'existence d'au moins deux solutions autour de $\xi$. L'une d'entre elles, est une hétéroclinique, et l'autre est soit une homoclinique soit une hétéroclinique possédant un nombre de rotation différent de la première. Pour plus de travaux, (cf. [52], [53], [56]) et leurs références.
Dans ce chapitre, nous montrons l'existence de solutions homocliniques en présence des impulsions, pour des équations différentielles de second ordre singulières sous des hypothèses différentes de celles considérées dans les articles surcités: la nonlinéarité ne possède pas de maximum global à l'origine. Dans notre contexte, contrairement à celui de [84] et [85], nous ne demandons aucune isolation de l'orbite périodique.

## 3.1 Formulation du problème

Considérons le problème différentiel suivant,

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = g(t, u(t)) \quad t \neq t_j \ , t \in \mathbb{R} & (1.1) \\ \Delta u'(t_j) = J_j(u(t_j)) \ ; \ j \in A & (1.2) \\ \lim\limits_{t \to \pm\infty} u(t) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} u'(t) = 0 & (1.3) \end{cases}, \tag{3.1}$$

où $\Delta u'(t_j) = u'(t_j^+) - u'(t_j^-)$ avec $u'(t_j^\pm) = \lim_{t \to t_j^\pm} u'(t); j \in A$ , tel que A est un ensemble de $\mathbb{Z}$ et $t_j$,sont les instants où les impulsions se produisent $-T = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p = T$, $t_{j+kp} = t_j + 2kT$;pour tout $j \in \mathbb{Z}$ $k \in \mathbb{Z}$ et tel que $j + kp \in$A ($T$ est une constante positive fixée) et les fonctions $J_j$ representent le saut de discontinuité de $u'$ à l'instant d'impulsion.
Les deux fonctions $g$ et $J_j$ vérifient les hypothèses suivantes:
$(H_1)$ (i) $g : \mathbb{R} \times ]\xi, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est une fonction $L^1_{loc}$, $2T-$périodique en $t$; et continue par rapport à sa deuxième variable avec $\underset{u \to \xi}{lim} g(t, u) = -\infty$, où $\xi < 0$ .

(ii) $K := \sup\limits_{u \in ]\xi, +\infty[} g(., u)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

(iii) $\lim\limits_{u \to 0} \frac{g(t,u)}{u} = +\infty$, p. p $t \in \mathbb{R}$

(iv) $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{g(t,u)}{u} = 0$ p. p $t \in \mathbb{R}$.

$(H_2)$ $J_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction continue bornée tel que, $\max\limits_{s} J_j(s) < 0$ et $J_{j+p} \equiv J_j$, pour tout $j$.
Comme $g$ et $J_j$ sont $2T-$périodiques , et il est naturel de considérer les solutions homocliniques comme limites quand $n \to \infty$,des solutions $2nT-$périodiques (solutions subharminiques) . Alors, les solutions homocliniques du problème (3.1), sont considérées comme limite, quand $n \to +\infty$, des extensions périodiques des solutions $u_n$ des problèmes périodiques approximatifs (3.2) , définis dans les intervalles $I_n := [-nT, nT]$,par:

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = g(t, u(t)) \quad t \neq t_j \ , t \in I_n & (1.1)_n \\ \Delta u'(t_j) = J_j(u(t_j)) \ , \quad t_j \in I_n & (1.2)_n. \\ u(nT) - u(-nT) = u'(nT) - u'(-nT) = 0 & (1.3)_n \end{cases} \tag{3.2}$$

Tout au long de ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes, $L^\infty_{2nT}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est l'espace des fonctions bornées mesurables et $2nT$ périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, muni de la norme, $||u||_{L^\infty_{2nT}} = ess \sup\{|u(t)| : t \in I_n\}$, $L^p(I_n)$ est l'espace de Lebesgue classique déja défini par (1.1) pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous considérons l'espace de Sobolev $H_n = \{u \in W^{1,2}I_n); u(-nT) = u(nT)\}$. muni de la norme

$$\|u\| = \left( \left\| u' \right\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$(H_n; \|.\|)$ est un espace de Hilbert réflexif. Aussi, $H_n$ admet une décompsition orthogonale, $H_n = E_n \oplus F_n$, où $F_n$ est le sous espace des fonctions constantes

dans $H_n$ et $E_n$ dénote le sous espaces des fonctions à valeur moyenne nulle dans $H_n$. $E_n$ est un sous espace faiblement fermé de $H_n$ .
La définition d'une solution du problème (**3**.**2**) est donnée par (2.2.1)
Le lemme suivant introduit l'inclusion de $H_n$ dans $L^{\infty}_{2nT}$ .

**Lemme 3.1.1** *voir (lemma1.1 et corollaire 1.1 de [120]) Soit* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application continue tel que* $u^{'} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *les inégalités suivantes sont vérifiées:*

$$|u(t)| \leq 2(\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} (u'^2(s) + u^2(s))ds)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

*et, si* $u \in H_n$*, on a:*

$$||u||_{L^{\infty}_{2nT}} \leq 2||u||, \tag{3.4}$$

# 3.2 Résultat principal

Dans cette section, nous énonçons et prouvons un résultat d'existence de solutions $2nT$ périodiques, $n \in \mathbb{N}^*$ et un autre d'existence d'une solution de (3.1).

## 3.2.1 Existence des solutions de (3.2)

Nous avons le théorème suivant,

**Théorème 3.1** *Si* $(H_1)$ *et* $(H_2)$ *sont vérifiées, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *le problème* (**3**.**2**) *possède au moins une solution nonconstante.*

**Preuve:** La preuve est faite en plusieurs étapes,
**Etape 1** : Modification du problème (**3**.**2**).
Nous notons par $d = |\xi|$ la distance entre $\xi$ et 0 et par $\gamma = \inf(d, 1)$, pour $\beta \in (\xi, \xi + \gamma)$, nous définissons la fonction de troncature suivante $g_\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par

$$f(t,u) = g_\beta(t,s) = \begin{cases} g(t,s) & si \quad s > \beta \\ g(t,\beta) & si \quad s \leq \beta \end{cases}, \tag{3.5}$$

et le problème modifié correspondant est

$$\begin{cases} -u^{''}(t) + u(t) = f(t, u(t)) \;\; t \neq t_j \;, t \in I_n & (1.1)_n \\ \Delta u^{'}(t_j) = J_j(u(t_j)) \;, \quad t_j \in I_n & (1.2)_n. \\ u(nT) - u(-nT) = u^{'}(nT) - u^{'}(-nT) = 0 & (1.3)_n \end{cases} \tag{3.6}$$

A partir de $(H_1)$ la fonction $f$ satisfait les hypothèses suivantes:

$(H_1)'$ $(i)$ $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction $L^1_{loc}$ et $2T-$périodique par rapport à sa première variable et continue par rapport à la deuxième,

$(ii)$ $K' := \sup\limits_{u\in\mathbb{R}} f(.,u)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$,

$(iii)$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(t,u)}{u} = +\infty$, pour presque tout $t\in\mathbb{R}$

$(iv)$ $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\frac{f(t,u)}{u} = 0$, pour presque tout $t\in\mathbb{R}$.

**Etape 2**: Formulation variationelle

Nous étudions l'existence des solutions du problème $(\mathbf{3.6})$ en le ramenant à l'étude de l'existence des points critiques de fonctionnelles. Et, pour obtenir une solution non constante, nous prouvons l'existence des points critiques dans $E_n$.

Nous définissons la fonctionnelle $\varphi_n$ associée au problème $(\mathbf{3.6})$, par

$$\varphi_n(u) := \frac{1}{2}||u||^2 + \sum_{t_j\in I_n}\int_0^{u(t_j)} J_j(s)ds - \int_{-nT}^{nT} F(t,u(t))dt, \tag{3.7}$$

où $F(t,u) := \int_0^u f(t,s)ds$.

$\varphi_n$ est bien définie sur $H_n$, par $(H_1)'$ et $(H_2)$, $\varphi_n$ est faiblement semicontinue inférieurement et différentiable dont la dérivée est la fonctionnelle $\varphi_n'(u)$, définie pour tout $v\in H_n$, par

$$\varphi_n'(u)(v) = \int_{-nT}^{nT}[u'(t)v'(t)+u(t)v(t)]dt + \sum_{t_j\in I_n} J_j(u(t_j))v(t_j) - \int_{-nT}^{nT} f(t,u(t))v(t)\ dt, \tag{3.8}$$

Le résultat suivant caractérise les points critiques de $\varphi_n$,

**Lemme 3.2.1** *Les points critiques de $\varphi_n$ sont solutions de* $(\mathbf{3.6})$.

**Preuve:** *Soit $u\in H_n$ un point critique de la fonctionnelle $\varphi_n$, nous avons pour tout $v\in H_n$,*

$$\begin{aligned}\varphi_n'(u)(v) &= \int_{-nT}^{nT}[u'(t)v'(t)+u(t)v(t)]dt + \sum_{t_j\in I_n} J_j(u(t_j))v(t_j) \\ &\quad - \int_{-nT}^{nT} f(t,u(t))v(t)\ dt = 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

*Pour tout $t_j\in I_n$, nous considérons $v\in W_0^{1,2}(]t_j,t_{j+1}[)\setminus\{0\}$ tel que*

$$v(t) = \begin{cases} v(t) & si\ t\in\,]t_j,t_{j+1}[ \\ 0 & si\ t\in I_n\setminus\,]t_j,t_{j+1}[ \end{cases} \tag{3.10}$$

*Alors* $(\mathbf{3.8})$ *implique*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}[u^{'}(t)v^{'}(t)+u(t)v(t)]dt=\int_{t_j}^{t_{j+1}}f(t,u(t))v(t)dt$$

*Ceci signifie que, pour tout* $w\in W_0^{1,2}(t_j,t_{j+1})$, *nous avons*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}[u_j^{'}(t)w^{'}(t)+u_j(t)w(t)]dt=\int_{t_j}^{t_{j+1}}f(t,u_j(t))w(t)dt$$

*où* $u_j=u|_{(t_j,t_{j+1})}$, *donc pour* $t\in(t_j,t_{j+1})$, $u_j$ *est une solution faible de l'équation suivante:*

$$-u^{''}(t)+u(t)=f(t,u(t)), \tag{3.11}$$

*et* $u_j\in H^2((t_j,t_{j+1}))\subset C^1((t_j,t_{j+1}))$
*En effet,si l'on pose* $h(t)=u(t)-f(t,u(t))$, *alors la fonction* $h$ *est* $L^1(I_n)$ *et* $(\mathbf{3.11})$ *devient de la forme*

$$u^{''}(t)=h(t)\ sur\ (t_j,t_{j+1}) \tag{3.12}$$

*Alors la solution de* $(\mathbf{3.12})$ *peut être écrite comme suit*

$$u(t)=c_1+c_2t+\int_{t_j}^{t}\int_{t_j}^{s}h(\tau)d\tau ds \qquad pour\ t\in(t_j,t_{j+1})$$

*où* $c_1$ *et* $c_2$ *sont deux constantes. Alors* $u_j\in H^2(t_j,t_{j+1})$ *et les limites* $u^{'}(t_j^-),u^{'}(t_j^+)$ *existent.*
*D'un autre côté, par le choix de* $v$ *dans* $(\mathbf{3.10})$ *nous avons*

$$\int_{-nT}^{t_n}[u^{'}(t)v^{'}(t)+u(t)v(t)]dt-\int_{-nT}^{t_n}f(t,u(t))v(t)dt=0$$

*où* $t_n\in I_n$, *est le premier instant où les impulsions se produisent sur* $I_n$, *et*

$$\int_{t_n^*}^{nT}[u^{'}(t)v^{'}(t)+u(t)v(t)]dt=\int_{t_n^*}^{nT}f(t,u(t))v(t)dt$$

*où* $t_n^*\in I_n$, *est le dernier instant où les impulsions se produisent sur* $I_n$. *Par conséquent,* $u$ *satisfait l'équation* $(1.1)_n$ *presque partout sur* $I_n$.
*En intégrant par parties l'équation* $(\mathbf{3.8})$, *nous obtenons*

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-nT}^{nT}[u^{'}(t)v^{'}(t)+u(t)v(t)]dt-\int_{-nT}^{nT}f(t,u(t))v(t)]dt+\sum_{t_j\in I_n}(J_j(u(t_j))v(t_j)\\ &= \int_{-nT}^{nT}[-u^{''}(t)+u(t)-f(t,u(t))]v(t)dt\\ &\quad+\sum_{t_j\in I_n}\Big[J_j(u(t_j))-\Delta u^{'}(t_j)\Big]v(t_j)+u^{'}(nT)v(nT)-u^{'}(-nT)v(-nT)\end{aligned} \tag{3.13}$$

*Puisque u satisfait l'équation* $(1.1)_n$ *du problème* $(\mathbf{3.6})$*, presque partout sur* $I_n$*, par* $(\mathbf{3.13})$*, nous aurons,*

$$\sum_{t_j\in I_n}(J_j(u(t_j))-\Delta u^{'}(t_j))v(t_j)+u^{'}(nT)v(nT)-u^{'}(-nT)v(-nT)=0 \quad (3.14)$$

*Ensuite, nous montrerons que u satisfait* $(1.2)_n$ *du problème* $(\mathbf{3.6})$*. Nous supposons le contraire, (sans perte de généralité), qu'il existe* $t_k \in I_n$*, tel que*

$$J_k(u(t_k))-\Delta(u^{'}(t_k))\neq 0 \quad (3.15)$$

*Soit*

$$v(t):=\prod_{t_j\in I_n, j\neq k}(t-t_j)(t^2-n^2T^2),$$

*évidemment,* $v\in H_n$*. Par des calculs simples, nous obtenons* $v(t_j)=0$ *pour* $t_j\in I_n$*,* $j\neq k$*. Alors, par* $(\mathbf{3.14})$*, nous avons*

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t_j\in I_n}(J_j(u(t_j))-\Delta u^{'}(t_j))v(t_j)+u^{'}(nT)v(nT)-u^{'}(-nT)v(-nT) \quad (3.16)\\ &= (J_k(u(t_k))-\Delta u^{'}(t_k))\prod_{t_j\in I_n, j\neq k}(t_k^2-t_j^2)(t_k^2-n^2T^2) \end{aligned}$$

*Ce qui contredit* $(\mathbf{3.15})$*. Ainsi u satisfait* $(1.2)_n$ *du problème* $(\mathbf{3.6})$*.*
*Maintenant, pour* $w\in H_n$ *tel que* $w(t):=\prod_{t_j\in I_n}(t^2-t_j^2)$*, nous avons,*$w(t_j)=0$ *pour* $t_j\in I_n$*, et* $w(\pm nT):=\prod_{t_j\in I_n}(n^2T^2-t_j^2)>0$*. Alors* $(\mathbf{3.14})$ *devient de la forme suivante:*

$$[\acute{u}(nT)-\acute{u}(-nT)]\,w(nT)=0 \quad (3.17)$$

$(\mathbf{3.17})$ *montre que* $\acute{u}(nT)-\ \acute{u}(-nT)=0$*. Par conséquent, u est une solution du problème* $(\mathbf{3.6})$ *.*

■

Le résultat auxiliaire suivant donne une propriété de $\varphi_n$.

**Lemme 3.2.2** $\varphi_n$ *est coercive sur* $E_n$*.*

**Preuve:** *Tout d'abord, a partir de* $(H_1)^{'}$*, nous établissons une propriété sur la fonction* $f$*. L'hypothèse* $(H_1)^{'}(iv)$*, implique que pour tout* $\varepsilon$*,* $0<\varepsilon<1$*, il existe un* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *tel que, pour presque tout* $t\in I_n$*, nous avons*

$$|f(t,s)|<\varepsilon\,|s|\,,$$

*chaque fois que* $|s|>\delta$*.*

*Par* $(H_1)'(i)$ *nous avons* $\max\limits_{|s|\leq\delta}|f\ (t,s)| = |f\ (t,s_0)|$, *pour certains* $s_0 \in (-\delta,\delta)$.
*Posons* $C(t) := |f\ (t,s_0)|$, *alors*

$$|F\ \ (t,u)| < \frac{\varepsilon}{2}\,|u|^2\ + C(t)\,|u| \tag{3.18}$$

*où* $C(t) \in L^1(I_n,\mathbb{R})$, *est une fonction positive.*
*Maintenant, en vue de* $(\mathbf{3.18})$ *et* $(H_2)$ $(m<0)$, *nous avons pour* $u$ *dans* $E_n$,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= \int_{-nT}^{nT}\left(\frac{1}{2}|u^{'}(t)|^2+|u(t)|^2-F(t,u(t))\right)dt+\sum_{t_j\in I_n}\int_0^{u(t_j)}J_j(s)ds\\
&\geq \int_{-nT}^{nT}\frac{1}{2}[|u^{'}(t)|^2+|u(t)|^2-\frac{\varepsilon}{2}\,|u(t)|^2\ ]dt-\int_{-nT}^{nT}C(t)u(t)dt+\sum_{t_j\in I_n}\int_0^{u(t_j)}J_j(s)ds\\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2-\frac{\varepsilon}{2}||u||_{L^2}^2-\|u\|_\infty\,\|C\|_{L^1}+n\,(p-1)\,mu(t_j),\\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2-\frac{\varepsilon}{2}||u||_{L^2}^2-\|u\|_\infty\,\|C\|_{L^1}+n\,(p-1)\,m\,\|u\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

*et en utilisant* (3.4), *nous obtenons*

$$\varphi_n(u) \geq \frac{1}{2}\,\|u\|^2\,(1-\varepsilon)-2\,\|u\|\,(\|C\|_{L^1}+np\,|m|)\,. \tag{3.19}$$

*Le choix de* $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $(H_2)$ *et* $\|C\|_{L^1}$*bornée impliquent* $\varphi_n(u) \geq -\infty$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(u)$ *est bornée inférieurement et donc il existe une constante positive* $B = B\,(n)$, *tel que*

$$\varphi_n(u) \geq -B, \tag{3.20}$$

*Considérons* $\varepsilon < \frac{1}{2}$, *à partir de* $(\mathbf{3.19})$, *nous avons que,* $\varphi_n(u) \to +\infty$ *quand* $\|u\| \underset{u\in E_n}{\to} +\infty$. *Alors,* $\varphi_n$ *est coercive sur* $E_n$.
■

$E_n$ est un sous espace faiblement fermé de $H_n$, alors en utilisant la méthode directe du calcul variationnel, nous obtenons immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_n \in E_n$, tel que,

$$\varphi_n(u_n) = \inf_{E_n}\varphi_n.$$

Posons

$$c_n = \varphi_n(u_n).$$

Le résultat suivant nous donne un ordre sur les $(c_n)_n$.

**Lemme 3.2.3** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *nous avons*

$$-\infty < c_n < c_1 < 0,$$

**Preuve:** A partir de (**3.19**), nous obtenons clairement que $c_n > -\infty$. De plus, le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $E_1 \subset E_n$, et donc $c_n \leq c_1$,

$$c_n = \inf_{E_n} \varphi_n \leq c_1 = \inf_{E_1} \varphi_1 \tag{3.21}$$

Enfin, pour prouver que $c_1 < 0$, nous utilisons $(H_1)'(iii)$, pour $\alpha > 0$, il existe, $1 > \delta_\alpha > 0$, tel que, pour presque tout $t$ et pour tout $|u| \leq \delta_\alpha$,

$$F(t,u) > \frac{\alpha}{2}|u|^2 \tag{3.22}$$

Maintenant, soit $\lambda_1$ la première valeur propre de $Lu = -u'' + u$ sur $H_1$ et $v_1$ la fonction propre correspondante dans $E_1$ ,

$$||v_1||^2 = \lambda_1 \int_{-T}^{T} |v_1(t)|^2 dt, \tag{3.23}$$

Alors, pour $\tau > 0$, tel que $||\tau v_1||_\infty < \delta_\alpha$, (**3.22**) et $(H_2)$ implique

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\tau v_1) &= \frac{1}{2}\tau^2||v_1||^2 - \int_{-T}^{T} F(t,\tau v_1(t))dt + \sum_{j=1}^{p-1}\int_0^{\tau v_1(t_j)} J_j(s)ds \\
&\leq \frac{1}{2}\tau^2||v_1||^2 - \frac{\alpha}{2}\int_{-T}^{T} |\tau v_1|^2 dt + \sum_{j=1}^{p-1}\int_0^{\tau v_1(t_j)} J_j(s)ds \\
&\leq \frac{\tau^2}{2}\left(\lambda_1||v_1||_{L^2}^2 - \alpha||v_1||_{L^2}^2\right) + (p-1)M\tau v_1(t_j) \\
&\leq T(\lambda_1 - \alpha)||\tau v_1||_\infty^2 + (p-1)|m|\,\|\tau v_1\|_\infty \\
&\leq T(\lambda_1 - \alpha)\delta_\alpha^2 + p|m|\delta_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En choisissant $\alpha$ suffisament grand $\alpha >> \lambda_1$, (**3.24**) et en utilisant $(H_2)$ on obtient

$$c_1 = \inf_{E_1} \varphi_1 < 0$$

■

$u_n$ est solution non constante de (**3.6**) ,en effet, à partir de (**3.7**)et le lemme (**3.2.3**) $\varphi_n(0) = 0 > c_n = \inf_{E_n} \varphi_n = \varphi_n(u_n)$, qui implique que $u_n \neq 0$, maintenant à partir de $u_n \in E_n$ , nous déduisons que $u_n$ est une solution non constante du problème (**3.6**).

**Lemme 3.2.4** *Il existe $\beta_* = \beta_*(n) \in ]\xi, \xi + \gamma[$ et une constante $D_* = D_*(n) > 0$ tel que toute solution $u_n \in E_n$, du problème* (3.6) , *satisfait $\beta_* < u_n(t) < D_*$, pour tout $t$.*
*En particulier, toute solution de* (3.6) *est une solution de* (3.2).

**Preuve:** *Ici, nous utiliserons certaines idées de* [17].
*Nous procédons par l'absurde. Nous supposons le contraire, que pour tout* $\beta \in ]\xi, \xi+\gamma[$ *et pour toute constante* $D > 0$, *il existe une solution* $u_n \in E_n$, *de* (3.6) *qui satisfait*

$$u_n(t) > D, \text{ ou } u_n(t) < \beta \text{ pour certains } t \in [-nT, nT].$$

*En particulier, si pour chaque entier* $k > 1$ *nous considérons* $\beta_k = \xi + \frac{1}{k}$, *et* $D = k$, *l'hypothèse précédente implique que il existe une solution* $u_n^k \in E_n$ *de* (3.6) *pour* $\beta = \beta_k$ *tel que*

$$\left\{u_n^k(t); t \in \mathbb{R}\right\} \subsetneqq [\beta_k, k]. \tag{3.25}$$

*Nous montrerons que cette hypothèse conduit à une contradiction.*
*Tout d'abord, nous affirmons que pour tout* $k > 1$, *il doit exister* $\tau_k \in [-nT, nT]$ *tel que,*

$$u_n^k(\tau_k) \in [\beta_k, k]. \tag{3.26}$$

*En effet, nous supposons le contraire, qu' il existe une sous suite de* $(u_n^k)_k$, *que nous la notons de la même façon, pour laquelle* $\min u_n^k(t) > k$. *alors* $(H_1)(iv)$ *et le corollaire du lemme de Fatou* (1.1.1), *nous donne*

$$\begin{aligned} n(p-1)M &> \liminf_{k\to+\infty} \sum_{t_j \in I_n} J_j(u_n^k(t_j)) = \liminf_{k\to+\infty} \int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt \\ &\geq \int_{-nT}^{nT} \liminf_{k\to+\infty} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt \geq \int_{-nT}^{nT} \lim_{x\to+\infty} g(t,x)dt \geq 0 \end{aligned}$$

*Alors,* $M > 0$,*ce qui contredit* $(H_2)$.
*De même, nous arriverons à une contradiction avec l'hypothèse* $(H_2)$, *si nous assumons que* $\max u_n^k < \beta_k$. *En effet,* $J_j$*étant borné, le corollaire du lemme de Fatou, nous permet d'écrire,*

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to+\infty} \sum_{t_j \in I_n} J_j(u_n^k(t_j)) &= \limsup_{k\to+\infty} \int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t, u_n(t)dt \\ &\leq \int_{-nT}^{nT} \limsup_{k\to+\infty} g_{\beta_k}(t, u_n(t))dt \\ &\leq \int_{-nT}^{nT} \limsup_{x\to\xi^+} g(t,x)dt \end{aligned}$$

*Donc,*

$$\limsup_{k\to+\infty}\sum_{t_j\in I_n} I_j(u_n(t_j)) \leq \int_{-nT}^{nT} \lim_{x\to\zeta^+} g(t,x)dt = -\infty.$$

*En second lieu, nous montrons que* $\left(u_n^k\right)_k$ *est majorée.*
*Pour* $k>1$, $u_n^k$ *est une solution faible de* (3.6), *alors, pour tout* $v\in H_n$,

$$\int_{-nT}^{nT}\left[\left(u_n^k\right)'(t)v'(t)+u_n^k(t)v(t)-g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))v(t)\right]dt+\sum_{t_j\in I_n} J_j(u_n^k(t_j))v(t_j)=0 \tag{3.27}$$

*Dans l'inégalité précedente, prenant* $v(t)\equiv 1$, *nous obtenons,*

$$-\int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))dt+\sum_{t_j\in I_n} J_j(u_n(t_j))=0 \tag{3.28}$$

(3.28) *et* $(H_2)$ *implique que,*

$$\int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))dt=\sum_{t_j\in I_n} J_j(u_n(t_j))\leq\sum_{t_j\in I_n}|J_j(u_n(t_j))| \tag{3.29}$$

*Soit*

$$I_{n,1}^k := \left\{t\in I_n;\ g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))\geq 0\right\},$$

*et*

$$I_{n,2}^k := \left\{t\in I_n;\ g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))< 0\right\}.$$

*A partir de* (**3.29**), $(H_1)$ *et* (**3.5**), *il suit que pour tout* $k\geq 1$,

$$\left|\int_{I_{n,2}} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))dt\right|\leq |m|\,np+\int_{I_{n,1}} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))dt\leq |m|\,np+\|K\|_{L^1}$$

*Donc,*

$$\int_{-nT}^{nT}\left|g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))\right|dt\leq |m|\,np+2\,\|K\|_{L^1} \tag{3.30}$$

*Aussi, prenons* $v=u_n^k$ *dans* (**3.27**), *nous obtenons*

$$\left\|u_n^k\right\|^2-\int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))u_n^k(t)dt+\sum_{t_j\in I_n} J_j(u_n^k(t_j))u_n^k(t_j)=0 \tag{3.31}$$

*ce qui signifie que,*

$$\int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))u_n^k(t)dt - \sum_{t_j\in I_n} J_j(u_n^k(t_j))u_n^k(t_j) = \left\|u_n^k\right\|^2 \geq 0$$

*Alors, (**3.31**) peut être écrite*

$$\begin{aligned} 0 &= \left\|u_n^k\right\|^2 - \left|\int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))u_n^k(t)dt - \sum_{t_j\in I_n} J_j(u_n^k(t_j))u_n^k(t_j)\right| \qquad (3.32)\\ &\geq \left\|u_n^k\right\|^2 - \left(\left|\int_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))u_n^k(t)dt\right| + \left|\sum_{t_j\in I_n} J_j(u_n^k(t_j))u_n^k(t_j)\right|\right)\\ &\geq \left\|u_n^k\right\|^2 - \left\|u_n^k\right\|_\infty \left[\int_{-nT}^{nT} \left|g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))\right| dt + \sum_{t_j\in I_n} \left|J_j(u_n^k(t_j)\right|\right] \end{aligned}$$

*Ainsi,* (3.4) *combinée avec* (3.32) *implique que,*

$$\left\|u_n^k\right\|^2 \leq 2\left\|u_n^k\right\| \left[\left|\int_{-nT}^{nT} \left|g_{\beta_k}(t,u_n^k(t))\right| dt\right| + |m|\, np\right], \qquad (3.33)$$

*De* (3.30) *, nous déduisons que, pour* $k > 1$*,*

$$\left\|u_n^k\right\| \leq D$$

*où,*

$$D = 4\left(\|K\|_{L^1} + |m|\, np\right), \qquad (3.34)$$

*Nous remarquons que* $D$ *est indépendent de* $k$*. Donc* $(u_n^k)_k$ *est bornée dans* $H_n$*. Pour tout* $k$ *,* $u_n^k \in E_n$ *, alors (**3.34**), implique que, il existe* $D_* > 0$

$$u_n^k(t) \leq D_*$$

*Par conséquent, pour* $k$ *suffisament grand* ($k > D_*$)*, pour tout* $t \in [-nT, nT]$*, nous avons* $u_n^k(t) < k$*. En outre, nous ne pouvons pas avoir* $u_n^k(t) \geq \beta_k$ *pour tout* $t \in [-nT, nT]$ *; autrement, nous obtiendrons* $\beta_k \leq u_n^k(t) \leq k$ *pour tout* $t \in [-nT, nT]$ *et ceci contredit l'hypothèse* (3.25)*. Donc, pour* $k$ *suffisament grand* ($k > D_*$)*, il doit exister un* $t_k^* \in [-nT, nT]$ *tel que* $u_n^k(t_k^*) < \beta_k$*. Ceci signifie que* $t_k^* \in I_{\beta_k}$*, où* $I_{\beta_k}$ *est l'ensemble défini par*

$$I_{\beta_k} = \{t \in [-nT, nT]\,;\; u_n^k(t) < \beta_k\}. \qquad (3.35)$$

*Alors, l'ensemble* $I_{\beta_k}$ *n'est pas vide, la continuété de la solution* $u_n^k(t)$ *en* $t = t_k^*$*, implique que* $\mathrm{meas}(I_{\beta_k}) > 0$*, ce qui implique*

$$\int\limits_{I_{\beta_k}} [g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))]dt \neq 0.$$

*Maintenant, nous considérons les ensembles*

$$I_{0,D_0} = \left\{t \in [0,T]\,;\; 0 \leq u_n^k(t) \leq D_*\right\}, \tag{3.36}$$

$$I_{\beta_k,0} = \left\{t \in [0,T]\,;\; \beta_k \leq u_n^k(t) < 0\right\}, \tag{3.37}$$

*ici, nous pouvons écrire*

$$[-nT, nT] = I_{\beta_k} \cup I_{\beta_k,0} \cup I_{0,D_*}.$$

*Alors, en intégrant l'équation* $-\left(u_n^k\right)''(t) + u_n^k(t) = g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))$ *de* $-nT$ *à* $nT$ *nous obtenons,*

$$\begin{aligned}
\Upsilon_k \quad : \quad &= \int\limits_{-nT}^{nT} \left(\left(u_n^k\right)''(t) + u_n^k(t)\right) dt = \int\limits_{-nT}^{nT} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt \\
&= \int\limits_{I_{\beta_k}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt + \int\limits_{I_{\beta_k,0}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt + \int_{I_{0,D_*}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt
\end{aligned}$$

***1) supposons que nous intégrons positivement sur tous les sous intervalles de*** $[-nT, nT]$***.***
*Si* $t \in I_{\beta_k}$ *alors* $u_n^k(t) < \beta_k$*. Donc,* (3.35) *et* $(H_1)$ *implique*

$$\int\limits_{I_{\beta_k}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt = \int\limits_{I_{\beta_k}} g(t, \beta_k)dt < 0,$$

*ce qui donne,*

$$\Upsilon_k < \int\limits_{I_{\beta_k,0}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt + \int_{I_{0,D_0}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt \tag{3.38}$$

*Si* $t \in I_{0,D*}$ *alors* $u_n^k(t) \in [0, D_*]$*. Ce qui signifie que* $u_n^k(t)$ *est bornée sur* $I_{0,D_*}$*, puisque* $g_{\beta_k}$ *est continue en* $u$*, alors* $g_{\beta_k}$ *est bornée presque partout dans* $I_{0,D_*}$*. Soit*

$$\alpha = \alpha(D_*) = \max\left\{\left|g_{\beta_k}(t, x)\right|\,;\; t \in [-nT, nT]\,, 0 \leq x \leq D_*\right\} \tag{3.39}$$

*Alors,*

$$\left| \int_{I_{0,D_0}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt \right| \leq \left| \int_{I_{0,D_0}} \left| g_{\beta_k}(t, u_n^k(t)) \right| dt \right| \leq 2\alpha nT \tag{3.40}$$

(**3.38**) *et* (3.40) *ménent à*

$$\Upsilon_n \leq \int\limits_{I_{\beta_k,0}} -g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt + 2\alpha nT. \tag{3.41}$$

*Par* $(H_1)$, $\lim\limits_{u \to \xi} g(t,u) = -\infty$ *alors, pour tout* $\sigma > 0$, *il existe* $\gamma_\sigma > 0$ *tel que* $g(t,u) < -\sigma$, *pour tout* $u \in ]\xi, \xi + \gamma_\sigma[$ *et pour presque tout* $t \in [-nT, nT]$. *Ainsi, pour* $k$ *suffisament grand, par* $(H_1)$ $(i)$, *nous avons*

$$\int\limits_{I_{\beta_k,0}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt < -\sigma \operatorname{meas}(I_{\beta_k,0}) \tag{3.42}$$

*Prenons* $\sigma = \frac{1}{\operatorname{meas}(I_{\beta_k,0})} k^2 2\alpha nT$, *nous obtenons,*

$$\Upsilon_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty. \tag{3.43}$$

*Donc,* $\Upsilon_k$ *n'est pas bornée.*
*2)**Supposons que nous intégrant négativement sur tous les sous intérvalles de*** $[-nT, nT]$, *alors, au lieu de* (3.42) *nous avons,*

$$\int\limits_{I_{\beta_k,0}} g_{\beta_k}(t, u_n^k(t))dt > \sigma \operatorname{meas}(I_J)$$

*Ceux-ci avec* (3.39) *ça mene à*

$$\Upsilon_k \to +\infty, \text{ as } k \to +\infty. \tag{3.44}$$

*D'un autre côté, en intégrant l'équation* $\left(-u_n^k\right)'' + u_n^k(t)$ *de* $-nT$ *à* $nT$ *et en utilisant la* $2nT$*- périodicité de* $\left(u_n^k\right)'$, *et* $u_n^k \in E_n$, *nous obtenons,*

$$\begin{aligned}
\Upsilon_k &= \int\limits_{-nT}^{nT} \left( \left(-u_n^k\right)'' + u_n^k(t) \right) dt = -\sum_{t_j \in I_n} \int\limits_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} u_n''(t)dt \\
&= \sum_{t_j \in I_n} \Delta u_n'(t_j) = \sum_{t_j \in I_n} J_j(u_n(t_j))
\end{aligned}$$

*Ainsi par* $(H_2)$,

$$n(p-1)m \leq \Upsilon_n \leq n(p-1)M$$

$$\textit{Pour chaque } n \in \mathbb{N}^*, \Upsilon_n < 0 \textit{ et } \Upsilon_n \textit{ est bornée} \tag{3.45}$$

(3.45) *contredit* (3.43) *et* (3.44) *et le lemme* (**3.2.4**) *est prouvé.* ■

Le lemme (**3.2.4**), montre qu'il existe $\beta \in ]\xi, \xi + \gamma[$, tel que chaque solution $u$ de (3.6) est une solution de (3.2), puisqu'elle satisfait $u(t) \geq \beta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $g_\beta(t, u(t)) = g(t, u(t))$, si $u(t) \geq \beta$. ■

### 3.2.2 Existence de solution homoclinique pour (3.1)

Nous présentons le résultat d'existence de solution homoclinique.

**Théorème 3.2** *Si* $(H_1)$ *et* $(H_2)$ *sont vérifiées, alors le problème* (3.1) *possède au moins une solution.*

**Preuve:** Observons que puisque la fonction $f$ est une fonction $2T-$périodique en $t$, et $J_{j+p} = J_j$, si $u$ est une solution $2nT$-périodique de (1.1), alors $u(. + 2kT)$ est aussi une solution $2nT$-périodique de (1.1), pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, en remplaçant $u(t)$ par $u(t + 2kT)$ si nécéssaire, nous obtenons toujours des solutions $2nT$-périodiques de (1.1).
Nous notons par $\tilde{H}_n$ l'espace des extensions $2T-$périodiques $\breve{u}$ des fonctions $u$ de $H_n$ et dénotons par $\tilde{\varphi}_n$ la fonctionelle définie sur $\tilde{H}_n$ par $\tilde{\varphi}_n(\breve{u}) = \varphi_n(u)$.
Il est facile de voir que la fonctionelle $\tilde{\varphi}_n$ est invariante par translation $\tau_k$ de $t$ par $2kT$, $\tilde{\varphi}_n(\tau_k u) = \tilde{\varphi}_n(u)$, où $\tau_k u(t) = u(t + 2kT)$.
Considérons à présent $\tilde{u}_n$ les extensions périodiques sur $\tilde{H}_n$, des solutions $u_n$ du problème (3.6). Par le lemme (3.2.4) $u_n$ est bornée dans $H_n$, alors $\tilde{u}_n$ est bornée dans $\tilde{H}_n$. Si $\left(\tilde{u}_n^k\right)_k$ est une suite de telles fonctions, à partir de la reflexivité de $\tilde{H}_n$, nous pouvons en extraire une sous suite faiblement convergente de $\left(\tilde{u}_n^k\right)_k$ que pour la simplicité, nous l'appelons $\left(\tilde{u}_n^k\right)_k$, telle que $\tilde{u}_n^k \rightharpoonup u_0$ dans $\tilde{H}_n$. Le théorème des inclusions de Sobolev implique $\tilde{u}_n^k \to u_0$ dans $C_{2nT}$, l'espace des extensions périodiques des fonctions continues sur $I_n$ et

$$\tilde{u}_n^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ dans l'espace } L^2_{2nT} \tag{3.46}$$

des extensions périodiques des fonctions de $L^2(I_n)$Maintenant, en utilisant (**3.8**), nous avons,

$$\left(\tilde{\varphi}_n'\left(\tilde{u}_n^k\right) - \tilde{\varphi}_n'\left(u_0\right)\right)\left(\tilde{u}_n^k - u_0\right) = ||\tilde{u}_n^k - u_0||^2 - \int_{-nT}^{nT} \left(f(t, \tilde{u}_n^k) - f(t, u_0)\right)\left(\tilde{u}_n^k(t) - u_0(t)\right)dt$$
$$+ \sum_{t_j \in I_n} \left[J_j(\tilde{u}_n^k(t_j)) - J_j(u_0(t_j))\right]\left(\tilde{u}_n^k(t_j) - u_0(t_j)\right),$$

$(H_1)$ et (3.46) impliquent que,

$$\begin{aligned} \int_{-nT}^{nT}((f(t,\tilde{u}_n^k)-f(t,u_0))|\tilde{u}_j^k(t)-u_0(t)|dt &\rightarrow 0 \text{ quand } k\rightarrow+\infty \quad (3.47)\\ \sum_{t_j\in I_n}[J_j(\tilde{u}_j^k(t_j))-J_j(u_0(t_j))]|\tilde{u}_j^k(t)-u_0(t)| &\rightarrow 0 \text{ quand } k\rightarrow+\infty \end{aligned}$$

A présent, de $\tilde{\varphi}_n^{'}\left(\tilde{u}_n^k\right)=0$ pour tout $k$ , nous avons $\lim_{k\to\infty}\tilde{\varphi}_n'\left(\tilde{u}_n^k\right)=0$, par conséquent en utilisant $\tilde{u}_n^k\rightharpoonup u_0$, nous obtenons

$$\left(\tilde{\varphi}_n^{'}\left(\tilde{u}_n^k\right)-\tilde{\varphi}_n^{'}\left(u_0\right)\right)\left(\tilde{u}_n^k-u_0\right)\to 0, \text{ quand } k\to\infty. \tag{3.48}$$

Par (**3.47**), (**3.48**) et $\tilde{u}_n^k\to u_0$ dans $L^2\left([-nT,nT]\right)$ nous obtenons,

$$\left\|\tilde{u}_n^k-u_0\right\|\to 0, \quad \text{quand} \quad k\to\infty. \tag{3.49}$$

D'où, $\left(\tilde{u}_n^k\right)_k$ converge fortement vers $u_0$ dans $\tilde{H}_n$.
**Maintenant, nous montrons que $u_0$ est une solution de (1.1), (1.2)**.
Pour tout intervalle donné $(a,b)\subset[-nT,nT]$ et tout $h\in W_0^{1,2}((a,b),\mathbb{R})$,nous définissons la fonction $h_1$ par

$$h_1=\begin{cases} h & t\in(a,b)\\ 0 & t\in[-nT,nT]\backslash(a,b)\end{cases} \tag{3.50}$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_n^{'}\left(\tilde{u}_n^k\right)h_1 &= \int_a^b[\tilde{u}_n^k(t)h^{'}(t)+\tilde{u}_n^k(t)h(t)]dt+\sum_{t_j\in(a,b)}J_j(\tilde{u}_n^k(t_j))h(t_j)\\ &\quad+\int_a^b f(t,\tilde{u}_n^k(t))h(t)\ dt=0\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} &\int_a^b[u_0'(t)h'(t)+u_0(t)h(t)]dt+\sum_{t_j\in(a,b)}J_j(u_0(t_j))h(t_j)+\int_a^b f(t,u_0(t))h(t)\ dt\\ =&\lim_{k\to+\infty}\left(\int_a^b[\left(\tilde{u}_n^k\right)'(t)h'(t)+\tilde{u}_n^k(t)h(t)]dt+\sum_{t_j\in(a,b)}J_j(\tilde{u}_n^k(t_j))h(t_j)+\int_a^b f(t,\tilde{u}_n^k(t))h(t)\ dt\right)\\ =&\lim_{k\to+\infty}0=0\end{aligned}$$

Alors $u_0$ est une solution du problème (1.1), (1.2).
**En second lieu, nous montrons que $u_0(t)\to 0$, quand $t\to\pm\infty$.**

Par (3.49) , $\left(\tilde{u}_n^k\right)_k$ est bornée dans $\tilde{H}_n$ ,ceci implique qu'il existe une constante positive $D$ (3.34) tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(|u_0|^2+|u_0^{'}|^2)dt=\int_{-nT}^{+nT}(|u_0|^2+|u_0^{'}|^2)dt+\int_{\mathbb{R}\setminus[-nT,nT]}(|u_0|^2+|u_0^{'}|^2)dt$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(|u_0|^2+|u_0^{'}|^2)dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-nT}^{nT}(|u_0\left(t\right)|^2+|u_0^{'}\left(t\right)|^2)dt \\ &\leq \lim_{n\to+\infty}\left(\liminf_{n\to+\infty}\int_{-nT}^{+nT}(|\tilde{u}_n\left(t\right)|^2+|\tilde{u}_n^{'}\left(t\right)|^2)dt\right)\leq D,\end{aligned}$$

donc

$$\int_{|t|\geq r}(|u_0|^2+|u_0^{'}|^2)dt\to 0,\ \text{quand } r\to+\infty \tag{3.51}$$

Par la première inégalité du lemme (**3.1.1**) et (**3.51**), nous obtenons

$$u_0(t)\to 0,\ \text{quand } t\to\pm\infty. \tag{3.52}$$

**Troisièmement, nous prouvons que,** $u_0^{'}(t)\to 0$ **quand** $t\to\pm\infty$. Nous avons prouvé que $u_0(t)$ est une solution de (1.1), alors nous avons

$$\begin{aligned}\int_{t_{j-1}}^{t_j}|u_0^{''}(s)|^2ds &= \int_{t_{j-1}}^{t_j}(-u_0(s)+f(s,u_0(s)))^2ds \\ &= \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[-u_0(s)+f(s,u_0(s))\right]^2ds \\ &\leq 2\int_{t_{j-1}}^{t_j}(u_0(s))^2+\left(f(s,u_0(s))\right)^2ds\end{aligned}$$

Par $(H_2)$ et (**3.52**), nous avons $\int_{t_{j-1}}^{t_j}|u_0^{''}(s)|^2ds\to 0$ quand $t_j\to\pm\infty$.
En utlisant la notion de solution (**2.2.1**), le lemme (**3.1.1**), et le fait que $u_0$ soit solution de (1.1), nous obtenons pour tout $t\in\,]t_j,t_{j+1}[$

$$\begin{aligned}|u_0^{'}(t)| &\leq 2\int_{t_{j-1}}^{t_j}(|u_0''(s)|^2+|u_0'(s)|^2)ds \\ &\leq 2\int_{t_{j-1}}^{t_j}(|u_0(s)|^2+|u_0'(s)|^2)ds+2\int_{t_{j-1}}^{t_j}|u_0''(s)|^2ds.\end{aligned}$$

Par conséquent $u_0^{'}(t)\to 0$ quand $t\to\pm\infty$.
nous concluons que le problème (3.1) a au moins une solution homoclinique. ■

## 3.3 Exemple

**Exemple 3.3.1**

$$\begin{cases} -u^{''}(t)+u(t)=g(t,u) \quad t\neq t_j \ , \ t\in\mathbb{R} \qquad \textit{(1.1)} \\ \Delta u^{'}(t_j)=J_j(u(t_j)) \ ; \ \ j\in\{-5;...;5\}\subset\mathbb{Z} \quad \textit{(1.2)} \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t)=\lim\limits_{t\to\pm\infty} u^{'}(t)=0 \qquad\qquad \textit{(1.3)} \end{cases} \tag{3.53}$$

*où,* $g:\mathbb{R}\times\,]-1,+\infty[\,\to\mathbb{R}$, *est tel que* $g(t,u)=\cot t\left(1-\left(\frac{u}{1+u}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. *Alors, elle est* $L^1_{loc}$, $2\pi-$*périodique en* $t$; *et continue par rapport à sa deusième variable et* $\underset{u\to-1}{lim}\, g(t,u)=-\infty$.
*et* $J_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est définie par*

$$J_j(s)=\sin s-2$$

*Nous voyons que* $J_j$ *est une fonction continue bornée tel que,* $\max\limits_{s} J_j(s)=-1<0$, *pour tout* $j$,
$K:=\sup\limits_{u\in]-1,+\infty[} g(.,u)$ *est définie par* $K(t)=0$ *est dans* $L^1(\mathbb{R})$.
$\lim\limits_{u\to0}\frac{g(t,u)}{u}=+\infty$ , *p.p.* $t\in\mathbb{R}$
$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{g(t,u)}{u}=0$ *p.p.* $t\in\mathbb{R}$.
$g$ *et* $J_j$ *verifient les hypothèses* $(H_1)$ *et* $(H_2)$ *alors à partir du théorème (*3.2*), nous obtenons l'existence d'au moins une solution homoclinique du problème (*3.1*).*

# Chapitre 4

# Solution périodique d'un système couplé

## Sommaire



Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions périodiques d'un système d'équations de type (1.9) soumises à des impulsions de type (2.2) . lorsque l'une au moins des nonlinéarités présente une singularité. Nous utliserons une approche variationnelle basée sur la minimisation directe.
Les systèmes d'équations elliptiques non linéaires [38] présentent certains phénomènes intéressants, qui ne sont pas présents dans l'étude d'une seule équation. En général, les systèmes sont dit couplés dans le cas où les variables sont dépendantes. Ainsi, les notions de surlinéarité et sublinéarité et celles de singularité doivent prendre en considération un tel couplage. Pour les systèmes hamiltoniens de second ordre avec des effets impulsifs, nous référons le lecteur à [100], [101] et [118] .
Un système hamiltonien de second ordre avec des vibrations amorties impulsives est considéré dans [69], où, en utilisant l'approche variationnelle, J. Liu and Z. Zhao prouvent l'existence de solutions pour le problème aux limites suivant,

$$\left\{\begin{array}{ll} u''(t)+g(t)u'(t)-\lambda A(t)u(t)=-\nabla F(t,u), & \text{p.p. } t\in[0,T] \\ \triangle u'^{i}(t_j)=I_{ij}(u^i(t_j)), & i=1,2,...,N, j=1,2,...,p \\ \qquad u(0)-u(T)=u'(0)-u'(T)=0 & \end{array}\right. , \tag{4.1}$$

où $\lambda>0$; $T>0$, $g\in L^1[0,T]$, $\int\limits_0^T g(s)ds=0$, $A:[0,T]\to\mathbb{R}^{N\times N}$ est une appli-

cation continue de $[0,T]$ à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques d'ordre $N$, $I_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,2,...,N, j = 1,2,...,p)$ sont continues, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, et $F \in C([0.T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, tel qu'il existe $a \in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$, $b \in L^1([0;T];\mathbb{R}^+)$ satisfaisant $|F(t;x)| \leq a(|x|)b(t); |\nabla F(t;x)| \leq a(|x|)b(t)$; pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et p.p $t \in [0;T]$.
Quand $g(t) \equiv 0$, $A(t)$ est une matrice nulle et $I_{ij} \equiv 0$, le système Hamiltonian (4.1) a été étudié de manière approfondie dans [72], [104], [105], [106], [110] et [111]).
Dans ce chapitre, afin de maintenir une exposition légère, tout en soulignant les points essentiels réels, nous nous limitons aux systèmes de second ordre avec deux variables dépendantes $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Nous considérons le système différentiel couplé impulsif suivant:

$$\begin{cases} -u_1''(t) - g_1(t)u_1'(t) + h_1(t)u_1(t) = f_1(t,u_1,u_2), \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ -u_2''(t) - g_2(t)u_2'(t) + h_2(t)u_2(t) = f_2(t,u_1,u_2), \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ u_1(0) - u_1(T) = u_1'(0) - u_1'(T) = 0, \\ u_2(0) - u_2(T) = u_2'(0) - u_2'(T) = 0, \\ \Delta u_1'(t_k) = J_k^1(u_1(t_k)) \qquad k = 1,2,.....,p, \\ \Delta u_2'(t_k) = J_k^2(u_2(t_k)), \qquad k = 1,2,.....,p, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $T > 0$, $J_k^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1,2 \quad et \quad k = 1,2,...,p)$ sont continues, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, les fonctions $g_i; h_i$ et $f_i$ vérifient des hypothèses précisées ultérieurement.
Nous étendons les études réalisées dans [5], [6], [69], [77] et [112]. Utilisons une méthode variationnelle, nous obtenons l'existence d'au moins une solution non triviale de(4.2) dans le cas où $f_1$ présente une singularité en $(u_1,u_2) = (0,0)$.
Nous devons indiquer qu'en général, dans les systèmes couplés, il existe une certaine symétrie dans le sens où les hypothèses considérées sur les non-linéarités $f_1$, $f_2$ sont de même type, [112]. Dans ce travail, nous considérons une certaine asymétrie, en supposant une différence de régularité entre les non-linéarités.

## 4.1 Formulation du problème

Le système différentiel couplé (4.2), est considéré sous les hypothèses suivantes sur les fonctions $f_i$, $h_i$, $g_i$ et $J_k^i$ :
$(H_1)$ $(i)$ $f_i : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \times (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,sont des fonctions de Carathéodory $T-$périodiques en $t$, pour $i = 1,2$,

avec $K_1 := \sup\limits_{(u_1,u_2)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)} f_1(.,u_1,u_2)$, est une fonction dans $L^1(I,\mathbb{R})$

$(ii)$ $\lim\limits_{(u_1,u_2)\rightarrow(0,0)} f_1(t,u_1,u_2)) = -\infty$, pour p.p $t$ dans $I$

$(iii)$ $\lim\limits_{||(u_1,u_2)||\rightarrow(0,0)} \frac{f_2(t,u_1,u_2)}{|(u_1,u_2)|} = +\infty$ et $\lim\limits_{||(u_1,u_2)||\rightarrow+\infty} \frac{f_2(t,u_1,u_2)}{|(u_1,u_2)|} = 0$ pour p.p $t$ dans $I$ où $||$ note la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

$(H_2)$ $(i)$ $h_i \in L^\infty(I)$ tel que $\min\{\underset{t\in I}{essinf} h_1(t), \underset{t\in I}{essinf} h_2(t)\} = \alpha > -\lambda_1$, où $\lambda_1$ est la première valeur propre du PL périodique associé à $Lu = -u''$,

$(ii)$ $\lim\limits_{||(u_1,u_2)||\to+\infty} f_1(t,u_1,u_2) - h_1(t)u_1 > 0$ , pour p.p $t$ dans $I$ .

$(iii)$ $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire, continue, $T-$périodique à valeur moyenne nulle.

$(iv)$ $J_k^i$ sont des fonctions continues , bornées et négatives, pour $i = 1, 2$. tel que,

$$j_{k+p}^i \equiv j_k^i \quad \text{pour tout } k$$

Tout au long de ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes. $I = [0, T]$ ,et $H_T^1$ muni de la norme,

$$\|u\|_1 = \left(\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.3}$$

est un espace de Banach réflexif. Aussi, $H_T^1$ admet la décomposition orthogonale, $H_T^1 = E + F$, où $F$ est le sous espace des fonctions constantes dans $H_T^1$ et $E$ désigne le sous espace des fonctions de $H_T^1$ à valeur moyenne nulle. $E$ est un sous espace faiblement fermé de $H_T^1$. Si $u \in E$, alors l'inégalité de Wirtinger

$$\int_0^T |u(t)|^2\, dt \le \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |u'(t)|^2\, dt \tag{4.4}$$

implique que sur $E$, nous pouvons considérer la norme équivalente

$$\| u \|_2 := \|u'\|_{L^2}$$

Aussi, pour $u \in E$ nous avons

$$\|u\|_\infty \le \sqrt{T}\, \|u\|_2 \tag{4.5}$$

Soit $X = H_T^1 \times H_T^1$. Dans l'espace de Banach $X$, par (4.4), la norme définie pour tout $(u, v) \in X$, par

$$\|(u,v)\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$$

est équivalente sur $Y = E \times E \subset X$ à

$$\|(u,v)\|_1^2 = \|u\|_1^2 + \|v\|_1^2$$

**Remarque 2** *Soit* $G_i(t) := \int_0^t g_i(s)ds$, *à partir de* $(H_2)(iii)$, *il est clair que*

$$e^{-\|g_i\|_{L^1}} \le e^{G_i(t)} \le e^{\|g_i\|_{L^1}}$$

*Et* $(H_2)(iv)$,*implique qu'il existe deux constantes* $m$ *et* $M$ *tel que pour tout* $s \in \mathbb{R}$, $m < j_k^i(s) \le M < 0$, *pour chaque* $k = 1, 2, ...p$, *et* $i = 1, 2$.

Avant de donner le résultat principal de ce chapitre, nous énonçons le lemme suivant

**Lemme 4.1.1** *Si les hypothèses $(H_2)(i)$ et $(H_2)(iii)$ sont vérifiées, alors sur $Y$, la norme $\|.\|_2$ est équivalente à la norme suivante,*

$$\|(u_1,u_2)\| = \left(\int_0^T e^{G_1(t)}\left(u_1'(t)^2+h_1(t)u_1(t)^2\right)dt + \int_0^T e^{G_2(t)}\left(u_2'(t)^2+h_2(t)u_2(t)^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Preuve:** Puisque $\min\{\underset{t\in[0,T]}{essinf} h_1(t), \underset{t\in[0,T]}{essinf} h_2(t)\} = \alpha > -\lambda_1$, il existe une constante positive $c_1 \in (0,1)$ tel que $-\alpha \leq \lambda_1(1-c_1)$. En utilisant l'inégalité de Poincaré, pour tout $v \in E$, nous avons

$$(1-c_1)\int_0^T |v'(t)|^2\,dt \geq (1-c_1)\lambda_1\int_0^T |v(t)|^2\,dt \geq -\alpha\int_0^T |v(t)|^2\,dt.$$

Donc, pour $(u_1,u_2)\in Y$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\|(u_1,u_2)\| &= (\int_0^T e^{G_1(t)}\left(u_1'(t)^2+h_1(t)u_1(t)^2\right)dt + \int_0^T e^{G_2(t)}\left(u_2'(t)^2dt+h_2(t)u_2(t)^2\right)dt)^{\frac{1}{2}}\\
&\geq \min(e^{-\|g_1\|_{L^1}}, e^{-\|g_2\|_{L^1}})c_1(\|u_1\|_2+\|u_2\|_2)\\
&= \min(e^{-\|g_1\|_{L^1}}, e^{-\|g_2\|_{L^1}})c_1\,\|(u_1,u_2)\|_2\,.
\end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\|(u_1,u_2)\| &= (\int_0^T |u_1'(t)|^2 e^{G_1(t)}dt + \int_0^T h_1(t)u_1(t)^2e^{G_1(t)}dt + \int_0^T |u_2'(t)|^2 e^{G_2(t)}dt\\
&\quad + \int_0^T e^{G_1(t)}h_2(t)u_2(t)^2dt)\\
&\leq e^{\|g_1\|_{L^1}}\|h_1\|_\infty\int_0^T u_1(t)^2dt + e^{\|g_2\|_{L^1}}\|h_2\|_\infty\int_0^T u_2(t)^2dt\\
&\quad + e^{\|g_1\|_{L^1}}\int_0^T |u_1'(t)|^2\,dt + e^{\|g_2\|_{L^1}}\int_0^T |u_2'(t)|^2\,dt\\
&\leq \left(max\left(e^{\|g_1\|_{L^1}}\frac{\|h_1\|_\infty}{\lambda_1}, e^{\|g_2\|_{L^1}}\frac{\|h_2\|_\infty}{\lambda_1}\right) + \max(e^{\|g_1\|_{L^1}}, e^{\|g_2\|_{L^1}})\right)\|(u_1,u_2)\|_2\,.
\end{aligned}$$

De ce fait, la norme $\|.\|$ et la norme $\|.\|_2$ sont équivalentes sur $Y$. ■
En combinant la définition de $\|(.,.)\|_2$, le lemme (4.1.1),et (4.5), nous déduisons que pour chaque $(u_1,u_2)\in Y$ il existe $c_2>0$ tel que pour $i=1,2$.

$$\|u_i\|_\infty \le c_2\|u_1,u_2\| \tag{4.6}$$

### 4.1.1 Concept de solution

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème (4.2), alors les fonctions $u_1$,$u_2$ sont soumises aux impulsions dans les dérivées aux instants $t_k$, $k=1,..,p$.
Nous nous intéressons à la solution $(u_1;u_2)$ du système différentiel

$$\begin{cases}-u_1''(t)-g_1(t)u_1'(t)+h_1(t)u_1(t)=f_1(t,u_1,u_2), & \text{p.p } t\in I\\ -u_2''(t)-g_2(t)u_2'(t)+h_2(t)u_2(t)=f_2(t,u_1,u_2), & \text{p.p } t\in I\end{cases}, \tag{4.7}$$

satisfaisant les conditions de périodicité

$$\begin{cases}u_1(0)-u_1(T)=u_1'(0)-u_1'(T)=0\\ u_2(0)-u_2(T)=u_2'(0)-u_2'(T)=0\end{cases}, \tag{4.8}$$

sous les effets impulsifs

$$\begin{cases}\Delta u_1'(t_k)=J_k^1(u_1(t_k)) & k=1,2,.....,p,\\ \Delta u_2'(t_k)=J_k^2(u_2(t_k)) & k=1,2,.....,p.\end{cases} \tag{4.9}$$

Si $(u_1,u_2)\in X$, alors $u_1,u_2$ sont absolument continues, et $u_1',u_2'\in L^2(I)$. Dans ce cas là, les dérivées $u_1'(t_j^+),u_1'(t_j^-),u_2'(t_j^+),u_2'(t_j^-)$ peuvent ne pas exister, alors par analogie à (2.2.1) , la définition de solution pour le problème (**3**.**1**)est comme suit.

**Définition 4.1.1** *On dit que $(u_1,u_2)\in X$ est une solution classique de* (**3**.**1**) *si pour tout $k=0,1,2,...,p$, $u_1|_{(t_k,t_{k+1})}$, $u_2|_{(t_k,t_{K+1})}\in H^2((t_k,t_{k+1}))$, vérifie l'équation correspondante* (4.7) *p.p sur $I$, avec les conditions périodiques* (4.8) *et les limites $u'(t_k^-),u'(t_k^+)$ existent et les conditions* (4.9)*sont vérifiées.*

Nous introduisons la définition de la solution faible du problème (4.2) , et dans ce qui suit nous spécifions le rapport de la solution (4.1.1) avec la notion de solution faible.
Si $(u_1,u_2)\in X$ satisfait (4.7) , en multipliant les équations différentielles correspondantes dans (4.7) par $e^{G_i(t)}$, nous obtenons pour tout $i=1,2$.

$$-\left(e^{Gi(t)}u_i'(t)\right)'+e^{G_i(t)}h_i(t)u_i(t)=e^{G_i(t)}f_i(t,u_1(t),u_2(t)), \tag{4.10}$$

En supposant que pour presque tout $t\in I$, $(u_1(t),u_2(t))\neq(0,0)$ ,en intégrant par parties sur $I$, le produit de(4.10) par $\varphi_i\in H_T^1$, en utilisant (4.8) et (4.9) ,nous obtenons pour $i=1,2$ ,

$$\begin{aligned}&\int_0^T e^{G_i(t)}u_i'(t)\varphi_i'(t)dt+\int_0^T e^{G_1(t)}h_i(t)u_i(t)\varphi_i(t)dt+\sum_{k=1}^{p}e^{G_i(t_k)}J_k^i(u(t_k))\varphi_i(t_k)\\ =&\int_0^T e^{G_i(t)}f_i(t,u_1(t),u_2(t))\varphi_i(t)dt, \qquad (4.11)\end{aligned}$$

De (4.11), nous avons :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^T e^{G_i(t)}u_i'(t)\varphi_i'(t)dt+\int_0^T e^{G_1(t)}h_i(t)u_i(t)\varphi_i(t)dt+\sum_{k=1}^{p}e^{G_i(t_k)}J_k^i(u(t_k))\varphi_i(t_k)\right)\\ =&\sum_{i=1}^{2}\int_0^T e^{G_i(t)}f_i(t,u_1(t),u_2(t))\varphi_i(t)dt \qquad (4.12)\end{aligned}$$

En se basant sur l'égalité (4.12), nous introduisons le concept de la solution faible du problème (4.2).

**Définition 4.1.2** $(u_1,u_2)\in X$ , $((u_1,u_2)\neq(0,0))$ *est une solution faible du problème* (4.2) *si pour chaque* $(\varphi_1,\varphi_2)\in X$, *l'identité* (4.12) *est vérifiée.*

**Lemme 4.1.2** *Pour le problème* (4.2), $(u_1,u_2)\in X$ *est une solution faible si et seulement si elle vérifie la définition* (4.1.1).

**Preuve:** *Tout d'abord, soit* $(u_1,u_2)\neq(0,0)$ *une solution faible du problème (4.2), c'est à dire* (4.12) *est vérifiée pour tout* $(\varphi_1,\varphi_2)\in X$. *Pour* $k\in\{1,2,...,p\}$ *nous considérons les fonctions test* $w_{i,k}$ *tel que* $w_{i,k}(t)=0$ *pour* $t\in[0,t_k]\cup[t_{k+1},T]$. *Nous avons par* (4.12) *que*

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_i(t)}u_i'(t)w_{i,k}'(t)dt+\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_1(t)}h_i(t)u_i(t)w_{i,k}(t)dt\right)\\ =&\sum_{i=1}^{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_i(t)}f_i(t,u_1(t),u_2(t))w_{i,k}(t)dt\end{aligned}$$

*Ceci veut dire que pour tout* $w_i\in H^2(t_k,t_{k+1})\cap H^1(t_k,t_{k+1})\subset C^1([t_k,t_{k+1}])$,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_i(t)}u_i'(t)w_i'(t)dt+\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_1(t)}h_i(t)u_i(t)w_i(t)dt\right)\\ =&\sum_{i=1}^{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_i(t)}f_i(t,u_1(t),u_2(t))w_i(t)dt\end{aligned}$$

*en particulier, en coisissant $w_1 \neq 0$ et $w_2 \equiv 0$,nous obtenons:*

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_1(t)}u_1'(t)w_1'(t)dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_1(t)}h_1(t)u_1(t)w_1(t)dt\right)\\
= &\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_1(t)}f_1(t,u_1(t),u_2(t))w_1(t)dt
\end{aligned}$$

*et en utilisant l'intégration par parties , nous aurons $u_1|_{(t_k\ ,\ t_{k+1})}$ satisfait l'équation*

$$-\left(e^{G_1(t)}u_1'(t)\right)' + e^{G_1(t)}h_1(t)u_1(t) = e^{G_1(t)}f_1(t,u_1(t),u_2(t)), \text{pou p.p. } t \in (t_k,t_{k+1})$$

*donc*

$$-u_1''(t) - g_1(t)u_1'(t) + h_1(t)u_1(t) = f_1(t,u_1\left(t\right),u_2\left(t\right)), \quad \text{pour p.p. } t \in (t_k,t_{k+1})$$

*Par un argument de régularité standard (voir [107]) la dérivée faible $u_1'' \in L^2\left((t_k,t_{k+1})\right)$ et donc les limites $u'(t_k^-), u'(t_k^+)$ existent.*
*Nous avons pour $v \in H_T^1$*

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_1(t)}u_1'(t)v'(t)dt = e^{G_1(t)}u_1'(t)v(t)\Big|_{t_k}^{t_{k+1}} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(e^{G_1(t)}u_1'(t)\right)' v(t)dt$$

*Par $(H_2)\,(iii)$ nous avons $e^{G_1(0)} = e^{G_1(T)} = 1$,en sommant donc les dernières identités pour $k = 1,...,p$ nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{G_1(t)}u_1'(t)v'(t)dt &= \sum_{k=0}^{p}\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{G_1(t)}u_1'(t)v'(t)dt \\
&= -u_1'(0)v(0) + u_1'(T)v(T) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)}\Delta u_1'(t_k)v(t_k) - \int_0^T \left(e^{G_1(t)}u_1'(t)\right)' v(t)dt
\end{aligned} \tag{4.13}$$

*et donc, par (4.12) et (4.13), nous avons*

$$\begin{aligned}
0 &= -u_1'(0)v(0) + u_1'(T)v(T) - \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)}\Delta u_1'(t_k)v(t_k) + \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)}J_k^1(u(t_k))v(t_k) \\
&\quad -\int_0^T \left(e^{G_1(t)}u_1'(t)\right)' v(t)dt + \int_0^T e^{G_1(t)}h_1(t)u_1(t)v(t)dt - \int_0^T e^{G_1(t)}f_1(t,u_1(t),u_2(t))v(t)dt
\end{aligned}$$

*Maintenant, prenons une fonction test $T-$périodique $v = v_j$, pour $j = 0,1,...,p$ , tel que*

$$\text{pour } j = 1,...,p \begin{cases} v_j\left(t_k\right) = 0,\ \ k = 0,...,j-1,j+1,...,p+1 \\ \qquad v_j\left(t_j\right) = 1 \end{cases}$$

*et en respectant la $T$-périodicité, nous considérons*

$$\begin{aligned} v_0(t_k) &= 0, pour\ k = 1, ..., p \\ v_0(t_0) &= v_0(0) = 1 = v_0(t_{p+1}) = v_0(T) \end{aligned}$$

*Alors nous obtenons $J_k^1(u(t_j)) = \Delta u_1'(t_j)$ et $u\prime(0) = u\prime(T)$ .*
*En procédant de la même manière, on obtient un résultat similaire pour $u_2$ en choisissant $w_2 \neq 0$ et $w_1 \equiv 0$.*
*Ceci montre que $(u_1, u_2)$ est une solution du problème* (4.2)*vérifiant la définition* (4.1.1)
*D'autre part, il est clair que si $(u_1, u_2) \in X$ est une solution de* (4.2) *vérifiant la définition* (4.1.1) *alors elle est solution faible de* (4.2)*. Le lemme est prouvé.*
■

**Remarque 3** *Il est facile de voir qu'une solution $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ de* (4.2) *tel que $u_i$ est à valeur moyenne nulle, pour $i = 1, 2$, est une solution non constante de* (4.2)*.*

## 4.2 Résultat principal

Dans cette section, nous énonçons et prouvons un résultat d'existence d'au moins une solution non constante de notre problème (4.2).

**Théorème 4.1** *Si $(H_1) - (H_2)$ sont satisfaites. Alors le problème* (4.2) *a au moins une solution non constante.*

**Preuve:** *Pour prouver ce résultat, nous utiliserons la méthode variationnelle et nous procédons en plusieurs étapes.*
***Etape 1: modification du problème***
*Tout d'abord, vu que la non linéarité $f_1$ présente une singularité au point $(u_1, u_2) = (0, 0)$, nous considérons la fonction modifiée de $f_1$ définie pour $\beta \in (0, 1)$, par $f_{1,\beta} : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f_{1,\beta}(t, u_1, u_2) = \begin{cases} f_1(t, u_1, u_2) & si\ \ \sup(u_1; u_2) \geq \beta \\ f_1(t, \beta, \beta) & si\ \ \sup(u_1; u_2) < \beta \end{cases}, \tag{4.14}$$

*et la fonction modifiée de $f_2$ est $\tilde{f}_2 : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par,*

$$\tilde{f}_2(t, u_1, u_2) = \begin{cases} f_2(t, u_1, u_2) & si\ \ (u_1, u_2) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \\ f_2(t, \sup(0, u_1), \sup(0, u_2)) & si\ \ (u_1, u_2) \notin (0, +\infty) \times (0, +\infty) \end{cases} \tag{4.15}$$

*Le problème modifié correspondant est alors,*

$$\begin{cases} -u_1''(t) - g_1(t)u_1'(t) + h_1(t)u_1(t) = f_{1,\beta}(t, u_1, u_2), & p.p.\ t \in I, \\ -u_2''(t) - g_2(t)u_2'(t) + h_2(t)u_2(t) = \tilde{f}_2(t, u_1, u_2), & p.p\ t \in I \\ u_1(0) - u_1(T) = u_2(0) - u_2(T) = 0, \\ u_1'(0) - u_1'(T) = u_2'(0) - u_2'(T) = 0, \\ \Delta u_1'(t_k) = J_k^1(u_1(t_k)) \qquad k = 1, 2, \cdots, p, \\ \Delta u_2'(t_k) = J_k^2(u_2(t_k)), \qquad k = 1, 2, \cdots, p, \end{cases} \tag{4.16}$$

*De* $(H_1)$, $(H_2)$ *les fonctions* $f_{1,\beta}$, $\tilde{f}_2$, $g_i$, $h_i$ *et* $j_k^i$ *satisfont les hypothèses suivantes:*

$(H_1)'$ $(i)$ $f_{1,\beta} : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est une fonction de Carathéodory,* $T-$*périodique en* $t$ *avec* $K_{1,\beta} := \sup_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{1,\beta}(., u_1, u_2)$, *est une fonction dans* $L^1(I, \mathbb{R})$

$(ii)$ $\lim_{(u_1,u_2)\to(0,0)} f_{1,\beta}(t, u_1, u_2)) = -\infty$, *pour presqur tout* $t$ *dans* $I$

$(iii)$ $\lim_{(u_1,u_2)\to(0,0)} \frac{\tilde{f}_2(t,u_1,u_2)}{|(u_1,u_2)|} = +\infty$ *et* $\lim_{|(u_1,u_2)|\to+\infty} \frac{\tilde{f}_2(t,u_1,u_2)}{|(u_1,u_2)|} = 0$ *pour presque tout* $t$ *dans* $I$, *où* $|.|$ *dénote la norme euclidiènne dans* $\mathbb{R}^2$

$(H_2)'$ $(i)$ $h_i \in L^\infty(I)$ *tel que* $\min\{essinf_{t\in[0,T]} h_1(t), essinf_{t\in[0,T]} h_2(t)\} = \alpha > -\lambda_1$,*où* $\lambda_1$ *est la première valeur propre de BVP périodique associé à* $Lu = -u''$,

$(ii)$ $\lim_{|(u_1,u_2)|\to+\infty} f_{1,\beta}(t, u_1, u_2) - h_1(t)u_1 > 0$ , *pour presque tout* $t$ *dans* $I$

$(iii)$ $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction scalare, continue,*$T-$*périodique à valeur moyenne nulle.*

$(iv)$ $J_k^i$ *sont des fonctions continues , bornées et négatives, pour* $i = 1, 2.$ *tel que,*

$$j_{k+p+1}^i \equiv j_k^i \qquad \textit{pour tout } k$$

***Etape2: Structure variationnelle***

*nous établirons une structure variationnelle qui nous permettra de réduire l'existence de solutions non constantes de* (4.16) *à celui de trouver les points critiques de la fonctionnelle d'énergie correspondante définie sur l'espace* $X$.

*La fonctionnelle d'énergie correspondante* $\Phi_\beta : X \to \mathbb{R}$, *du problème* (4.16) *est définie par*

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(u_1, u_2) &= \sum_{i=1}^{2} \left( \frac{1}{2} \int_0^T e^{G_i(t)} \left[ (u_i'(t))^2 + h_i(t)u_i^2(t) \right] dt + \sum_{k=1}^{p} e^{G_i(t_k)} \int_0^{u_i(t_k)} J_k^i(s)ds \right) \\ &\quad - \int_0^T e^{G_1(t)} F_{1,\beta}(t, u_1(t), u_2(t))dt - \int_0^T e^{G_2(t)} \tilde{F}_2(t, u_1(t), u_2(t))dt, \\ &= \frac{1}{2} \|(u_1, u_2)\| + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{p} e^{G_i(t_k)} \int_0^{u_i(t_k)} J_k^i(s)ds \\ &\quad - \int_0^T e^{G_1(t)} F_{1,\beta}(t, u_1(t), u_2(t))dt - \int_0^T e^{G_2(t)} \tilde{F}_2(t, u_1(t), u_2(t))dt, \end{aligned}$$

*où* $F_{1,\beta}(t,u_1,u_2) := \int_0^{u_1} f_{1,\beta}(t,s,u_2)ds$ *et* $\tilde{F}_2(t,u_1,u_2) := \int_0^{u_2} \tilde{f}_2(t,u_1,s)ds$ *.*
***Tout d'abord*** *, nous prouvons que* $\Phi_\beta$ *est faiblement semi continue sur* $Y$
*Considérons une suite* $\{(u_{1,n},u_{2,n})_n\} \subset Y$ *avec* $(u_{1,n},u_{2,n}) \rightharpoonup (v_1,v_2)$*, alors,*$\{(u_{1,n},u_{2,n})_n\}$ *est bornée dans* $Y$*, alors, puisque* $(4.5)$ *est vérifiée, nous avons, en passant à une sous suite si c'est necessaire* $(u_{i,n})_n$ *converge uniformement vers* $v_i$ *sur* $I$*.*
*Par la semi continuité de la norme, c'est à dire:*

$$\liminf_{n\to\infty} \|(u_{1,n},u_{2,n})\| \geq \|(v_1,v_2)\|$$

*et en utilisant la continuité de* $J_k^i$ *, la continuité de* $F_{1,\beta}$ *et* $\tilde{F}_2$ *par rapport à leurs deux derniers argument, et le lemme de Fatou, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\Phi_\beta(u_{1,n},u_{2,n})\\
=\ &\liminf_{n\to\infty}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\|(u_{1,n},u_{2,n})\| + \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{p} e^{G_i(t_k)}\int_0^{u_{i,n}(t_k)} J_k^i(s)ds\\ -\int_0^T e^{G_1(t)}F_{1,\beta}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t))dt - \int_0^T e^{G_2(t)}\tilde{F}_2(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t))dt,\end{array}\right\}\\
\geq\ &\|(v_1,v_2)\| - \int_0^T e^{G_1(t)}F_{1,\beta}(t,v_1(t),v_2(t))dt - \int_0^T e^{G_2(t)}\tilde{F}_2(t,v_1(t),v_2(t))dt\\
&+\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{p} e^{G_i(t_k)}\int_0^{v_i(t_k)} J_k^i(s)ds
\end{aligned}$$

*Donc,*

$$\liminf_{n\to\infty}\Phi_\beta(u_{1,n},u_{2,n}) \geq \Phi_\beta(v_1,v_2)$$

*Ceci implique que la fonctionnelle est faiblement semi continue infèrieurement.*
***Ensuite****, en utilisant la continuité de* $f_{1,\beta},\tilde{f}_2$*,par rapport à* $(u_1,u_2)$ *et la continuité de* $J_k^i$ *, pour* $k=1,2,...,p$*, par rapport à* $u_i$*,pour* $i=1,2$*,nous obtenons facilement que* $\Phi_\beta$ *est continuement différentiable, dont la dérivée* $\Phi'_\beta$ *est définie par ,*

$$\begin{aligned}
\Phi'_\beta(u_1,u_2)(\varphi_1,\varphi_2) \ =\ &\sum_{i=1}^{2}\Big(\int_0^T e^{G_i(t)}\left[u_i'(t)\varphi_i'(t) + h_i(t)u_i(t)\varphi_i(t)\right]dt\\
&+\sum_{k=1}^{p} e^{G_i(t_k)}J_k^i(u_i(t_k))\varphi_i(t_k)\Big) - \int_0^T e^{G_1(t)}f_{1,\beta}(t,u_1(t),u_2(t))\varphi_1(t)dt\\
&-\int_0^T e^{G_2(t)}\tilde{f}_2(t,u_1(t),u_2(t))\varphi_2(t)dt
\end{aligned}$$

*Si les hypothèses* $(H_1)',(H_2)'$ *sont satisfaites et* $(u_1,u_2)\in Y$ *est une solution de l'équation d'Euler correspondante* $\Phi'_\beta(u_1,u_2)=0$*, alors en utilisant* $(4.12)$ *en remplaçant* $f_1$ *par* $f_{1,\beta}$ *et* $f_2$ *par* $\tilde{f}_2$ *, nous concluons que* $(u_1,u_2)$ *est une solution faible de (*$4.16$*).*

*Conclusion, nous réduisons le problème de la recherche des solutions non constantes de* (4.16) *à celui de la recherche des points critiques de la fonctionnelle correspondanet* $\Phi_\beta$ *sur* $Y$.

***Maintenant, nous montrons que*** $\Phi_\beta$ ***est coercive sur*** $Y$***.***

*A partir de l'hypothèse* $(H_1)'\,(iii)$ *et* (4.15)*, nous avons que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que, pour presque tout* $t \in I$*., nous avons*

$$\left|\tilde{f}\ _2(t, u_1, u_2)\right| < \varepsilon \left|(u_1, u_2)\right|,$$

*Quand* $|(u_1, u_2)| > \delta$*. Et, par* $(H_1)'(i)$*,* $\tilde{f}_2$ *est continue par rapport à* $(u_1, u_2)$*, ceci implique que pour presque tout* $t$ *dans* $I$ *et pour tout* $(u_1, u_2)$ *dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left|\tilde{f}\ _2(t, u_1, u_2)\right| &< \varepsilon \left|(u_1, u_2)\right| + \max_{|(x,y)| \leq \delta} \left|\tilde{f}\ _2(t, x, y)\right| \\ &< \varepsilon \left(|u_1| + |u_2|\right) + \max_{|(x,y)| \leq \delta} \left|\tilde{f}\ _2(t, x, y)\right| \end{aligned} \tag{4.17}$$

*Soit* $C(t) := \max_{|(x,y)| \leq \delta} \left|\tilde{f}\ _2(t, x, y)\right|$*, par* $(H_1)'(i)$*,*$C(t) \in L^1(I, \mathbb{R})$. *Maintenant,en intégrant* (4.17) *sur* $[0, u_2]$, *nous obtenons*

$$\left|\tilde{F}\ _2(t, u_1, u_2)\right| < \varepsilon \left(|u_1|\,|u_2| + \frac{|u_2|^2}{2}\right) + C(t)\,|u_2|, \tag{4.18}$$

*en utilisant* (4.18) *et les hypothèses* $(H_1)'$*,* $(H_2)'$*, nous avons pour tout* $(u_1, u_2) \in Y$*,*

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(u_1, u_2) &= \sum_{i=1}^{2} \left( \int_0^T \frac{1}{2} e^{G_i(t)} \left[(u_i'(t))^2 + h_i(t) u_i^2(t)\right] dt + \sum_{k=1}^{p} e^{G_i(t_k)} \int_0^{u_i(t_k)} J_k^i(s) ds \right) \\ &\quad - \int_0^T e^{G_1(t)} F_{1,\beta}(t, u_1(t), u_2(t)) dt - \int_0^T e^{G_2(t)} \tilde{F}_2(t, u_1(t), u_2(t)) dt \\ &\geq \sum_{i=1}^{2} \left( \int_0^T \frac{1}{2} e^{G_i(t)} \left[(u_i'(t))^2 + h_i(t) u_i^2(t)\right] dt + \sum_{k=1}^{p} e^{\|g_i\|_{L^1}} m u_i(t_k) \right) \\ &\quad - e^{\|g_1\|_{L^1}} \left\|K_{1,\beta}\right\|_{L^2} \left(\|u_1\|_{L^2}\right) \\ &\quad - \left(e^{\|g_2\|_{L^1}} \|u_2\|_{L^2}\right) \left(\varepsilon \|u_1\|_{L^2} + \|C\|_{L^2} + \frac{\varepsilon}{2} \|u_2\|_{L^2}\right). \end{aligned}$$

*Maintenant utilisant $m < 0$ et l'inégalité de Wirtinger nous obtenons,*

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta(u_1, u_2) &\geq \left( \frac{1}{2} \min_{i=1,2}(e^{-\|g_i\|_{L^1}}) \|(u_1, u_2)\|^2 + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{p} e^{\|g_i\|_{L^1}} m \|u_i\|_\infty \right) \\
&\quad - e^{\|g_1\|_{L^1}} \|K_{1,\beta}\|_{L^2} \|u_1\|_{L^2} - e^{\|g_2\|_{L^1}} \|u_2\|_{L^2} \left( \varepsilon \|u_1\|_{L^2} + \|C\|_{L^2} + \frac{\varepsilon}{2} \|u_2\|_{L^2} \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \min_{i=1,2}(e^{-\|g_i\|_{L^1}}) \|(u_1, u_2)\|^2 - \frac{T}{2\pi} e^{\|g_1\|_{L^1}} \left( \|K_{1,\beta}\|_{L^2} - pm\sqrt{T} \right) \|u_1\|_2 \\
&\quad - \frac{T}{2\pi} e^{\|g_2\|_{L^1}} \left( \varepsilon \|u_1\|_2 + \|C\|_{L^2} + \frac{\varepsilon}{2} \|u_2\|_2 - pm\sqrt{T} \right) \|u_2\|_2 ,
\end{aligned}$$

*donc,*

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta(u_1, u_2) &\geq \frac{1}{2} \min_{i=1,2}(e^{-\|g_i\|_{L^1}}) \|(u_1, u_2)\|^2 - \left( \frac{T}{2\pi} \max_{i=1,2}(e^{\|g_i\|_{L^1}}) \right) \\
&\quad \left( \|K_{1,\beta}\|_{L^2} + \varepsilon \|u_1\|_{L^2} + \varepsilon \|u_2\|_{L^2} + \|C\|_{L^2} - 2pm\sqrt{T} \right) \|(u_1, u_2)\|
\end{aligned}$$

*Pour $\varepsilon < 1$, $\|K_{1,\beta}\|_{L^2} + \varepsilon \|u_1\|_{L^2} + \varepsilon \|u_2\|_{L^2} + \|C\|_{L^2} - 2pm\sqrt{T}$ est bornée , alors*

$$\Phi_\beta(u_1, u_2) \to +\infty \quad as \ \|(u_1, u_2)\| \to +\infty,$$

*ce qui montre que $\Phi_\beta$ est coercive sur $Y$. Puisque $Y$ est un sous espace faiblement fermé de $X$, en utilisant la méthode directe du calcul variationnel, il existe $(u_1^*, u_2^*) \in Y$ tel que*

$$\Phi_\beta\left(u_1^*, u_2^*\right) = \inf_Y \Phi_\beta.$$

***Etape3:*** $(u_1^*, u_2^*)$ ***est solution de*** (4.2)
*Dans ce qui suit, nous montrerons que $(u_1^*, u_2^*)$ est une solution de* (4.2). *Pour cela, nous introduisons le résultat auxiliaire suivant.*

***Lemme 4.2.1*** *Il existe $\beta_0 \in (0, 1)$ et une constante $C_0 > 0$ tel que chaque solution $(u_1, u_2) \in Y$, de(4.16) ,pour $\beta \leq \beta_0$ satisfait $\beta_0 \leq |(u_1(t), u_2(t))| \leq C_0$, pour tout $t \in I$. En particulier, chaque solution de* (4.16) *est une solution de* (4.2).

**Preuve:** *Nous procédons par l'absurde. Supposons le contraire que pour chaque $\beta \in (0, 1)$ et pour toute constante $C > 0$, il existe une solution $(u_1, u_2) \in Y$, de* (4.16) *qui satisfait*

$$|(u_1(t), u_2(t))| < \beta \ , \ ou \ |(u_1(t), u_2(t))| > C \ pour\ certains\ t \in I.$$

*En particulier, si pour chaque entier $n > 1$ nous considérons $\beta_n = \dfrac{1}{n}$, et $C = n$, la supposition ci-dessus implique qu'il existe une solution $(u_{1,n}, u_{2,n}) \in Y$ de* (4.16) *pour $\beta = \beta_n$ tel que*

$$\{|(u_1(t), u_2(t))| ; t \in \mathbb{R}\} \nsubseteq \left[\frac{1}{n}, n\right]. \tag{4.19}$$

*Nous montrerons que cette hypothèse conduit à une contradiction.*

*Tout d'abord, nous prétendons que pour chaque* $n > 1$*, il doit exister* $\tau_n \in I$ *tel que,*

$$|(u_1(t), u_2(t))| \in [\frac{1}{n}, n]. \tag{4.20}$$

*En effet, supposons le contraire, qu'il existe une sous suite de* $(u_{1,n}, u_{2,n})_n$*, que nous noterons de la meme manière telle que* $\min_t |(u_1(t), u_2(t))| > n$*. Alors, de* (4.16) *et* $(H_2)'(iii)$*, nous avons*

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{G_1(t)} \left(f_{1,\beta_n}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right) dt &= -\int_0^T \left(e^{G_1(t)} u'_{1,n}\right)'(t) dt \\
&= -\sum_{k=0}^{p+1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(e^{G_1(t)} u'_{1,n}(t)\right)' dt \\
&= -\sum_{k=0}^{p+1} e^{G_1(t_k)} \left(u'_{1,n}(t^-_{k+1}) - u'_{1,n}(t^+_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} \Delta u'_{1,n}(t_k)
\end{aligned}$$

*Donc,*

$$\int_0^T e^{G_1(t)} \left(f_{1,\beta_n}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J^1_k(u_{1,n}(t_k)). \tag{4.21}$$

*Il découle de la remarque (2) et le lemme de Fatou que*

$$\begin{aligned}
& p e^{\|G_1\|_\infty} M \geq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J^1_k(u_{1,n}(t_k)) \\
= & \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T e^{G_1(t)} \left(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t)\right) dt \\
\geq & \int_0^T e^{G_1(t)} \liminf_{n\to+\infty} \left(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t)\right) dt,
\end{aligned}$$

*et* $|(u_{1,n}(t), u_{1,n}(t))| > n$ *implique*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \liminf_{n\to+\infty} e^{G_1(t)} \left(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t)\right) dt \\
= &\int_0^T \liminf_{|(x,y)|\to+\infty} e^{G_1(t)}(f_1(t,x,y) - h_1(t)x)dt \\
= &\int_0^T e^{G_1(t)} \left(\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f_1(t,x,y) - h_1(t)x\right) dt > 0
\end{aligned}$$

*ceci conduit à*

$$pM > 0.$$

*Qui est une contradiction avec* $(H_2)'(iv)$. *De meme, nous aboutissons à une contradiction avec* $(H_2)'$, *si nous supposons que* $\max_t |(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))| < \frac{1}{n}$. *En réalité, par le lemme de Fatou nous avons*

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{p} J_k^1(u_{1,n}(t_k)) &= \limsup_{n\to+\infty} \int_0^T e^{G_1(t)} \left(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t)\right) dt \\
&\leq \int_0^T \limsup_{n\to+\infty} e^{G_1(t)} \left(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t)\right) dt \\
&\leq \int_0^T e^{G_1(t)} \limsup_{n\to+\infty} \left(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t)\right) dt
\end{aligned}$$

*Donc, par* (4.14)

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} J_k^1(u_{1,n}(t_k)) \leq \int_0^T \lim_{n\to+\infty} e^{G_1(t)} \left(f_1(t, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - h_1(t)\frac{1}{n}\right) dt = -\infty.$$

*Ceci est une contradiction avec,* $J_k^1$ *bornée.*

***Ensuite, nous montrons que*** $(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))_n$ ***est majorée****. Puisque pour tout* $n > 1$, $(u_{1,n}, u_{2,n})$ *est une solution de* (4.2), $\Phi'_r(u_{1,n}, u_{2,n}) = 0$. *Donc* *pour tout* $(\varphi_1, \varphi_2) \in X$ *et pour tout* $n > 1$, *nous avons pour tout* $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$,

$$\left| \begin{array}{c} \int_0^T e^{G_1(t)} \left[ u'_{1,n}(t)\varphi'_1(t) - \left( f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t) \right) \varphi_1(t) \right] dt + \\ \int_0^T e^{G_2(t)} \left[ u'_{2,n}(t)\varphi'_2(t) - \left( \tilde{f}_2(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_2(t)u_{2,n}(t) \right) \varphi_2(t) \right] dt + \\ \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{p} e^{G_i(t_k)} J_k^i(u_{i,n}(t_k))\varphi_i(t_k) \end{array} \right| \leq \varepsilon \left\| (\varphi_1, \varphi_2) \right\| \tag{4.22}$$

*En prenant* $\varphi_1(t) \equiv -1$ *et* $\varphi_2(t) \equiv 0$ *dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons,*

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T e^{G_1(t)} \left( f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t) \right) dt \right| - \left| \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J_k^1(u_n(t_k)) \right| \\ \leq & \left| \int_0^T e^{G_1(t)} \left( f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_2(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t) \right) dt - \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J_k^1(u_n(t_k)) \right| \leq \varepsilon \left\| h_1 e^{G_1} \right\|_{L^1}, \end{aligned}$$

*alors,*

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{G_1(t)} \left( f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t) \right) dt \right| & \leq \left| \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J_k^1(u_n(t_j)) \right| \\ + \varepsilon \left\| h_1 e^{G_1} \right\|_{L^1} & < e^{\|g_1\|_{L^1}} p \left| m \right| + \varepsilon \left\| h_1 e^{G_1} \right\|_{L^1} \end{aligned} \tag{4.23}$$

*Aussi, prenant* $\varphi_1 = u_{1,n}$ *et* $\varphi_2 = 0$ *dans* (4.22), *nous obtenons,*

$$\left| \begin{array}{c} \int_0^T e^{G_1(t)} \left[ \left| u'_{1,n}(t) \right|^2 + h_1(t) \left| u_{1,n}(t) \right|^2 - f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))u_{1,n}(t) \right] dt + \\ \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J_k^1(u_{1,n}(t_k))\varphi_1(t_k) \end{array} \right| \leq \varepsilon \left\| (u_{1,n}, 0) \right\|$$

*donc,*

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| (u_{1,n}, 0) \right\| \geq \; & e^{-\|g_i\|_{L^1}} \int_0^T \left| u'_{1,n} \right|^2 dt - \int_0^T e^{G_1(t)} \left( f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t) \right) u_{1,n}(t) dt \\ & + \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J_k^1(u_{1,n}(t_k))u_{1,n}(t_k). \end{aligned} \tag{4.24}$$

*En utilisant* (4.23) *nous aurons pour tout* $n > 1$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T e^{G_1(t)}\left(f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t))-h_1(t)u_{1,n}(t)\right)u_{1,n}(t)dt\right| \\
\leq\ & \|u_{1,n}\|_\infty\left(\int_0^T e^{G_1(t)}\left|f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t))-h_1(t)u_{1,n}(t)\right|dt\right) \\
<\ & \|u_{1,n}\|_\infty\left[e^{\|g_1\|_{L^1}}p\,|m|+\varepsilon\left\|h_1e^{G_1}\right\|_{L^1}\right]. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

*Alors, en utilisant* (4.25) *,l'inégalité* (4.24) *implique que,*

$$\varepsilon\|u_{1,n}\|_2\geq e^{-\|g_1\|_{L^1}}\|u_{1,n}\|_2^2-\|u_{1,n}\|_\infty e^{\|g_1\|_{L^1}}\left(\varepsilon\left\|h_1e^{G_1}\right\|_{L^1}+p|m|\right), \qquad (4.26)$$

*En combinant l'inégalité de Wirtinger avec* (4.26) *nous déduisons qu'il existe* $c_3>0$, *tel que pour tout* $n>1$,

$$\varepsilon\|u_{1,n}\|_2\geq\ e^{-\|g_1\|_{L^1}}\|u_{1,n}\|_2^2-\|u_{1,n}\|_2\,c_3e^{\|g_1\|_{L^1}}\left(\varepsilon\left\|h_1e^{G_1}\right\|_{L^1}+pm|\right).$$

*Nous déduisons que, pour* $n>1$,

$$\|u_{1,n}\|_2\leq\alpha_1$$

*où,*

$$\alpha_1=e^{\|g_1\|_{L^1}}+e^{2\|g_1\|_{L^1}}c_3\left(\left\|h_1e^{G_1}\right\|_{L^1}+p|m|\right),$$

*Remarquons que* $\alpha_1$ *est indépendant de* $n$. *De meme, en prenant* $\varphi_1=0$ *et* $\varphi_2=u_{2,n}$ *dans* (4.22), *nous prouvons que* $\|u_{2,n}\|_2\leq\alpha_2$, *où*

$$\alpha_2=e^{\|g_2\|_{L^1}}+c_3e^{2\|g_2\|_{L^1}}\left(\left\|h_2e^{G_2}\right\|_{L^1}+p|m|\right),$$

*maintenant du lemme* 4.1.1, *on en déduit qu'il existe une constante* $\alpha>0$ *tel que* $\|(u_{1,n},u_{2,n})\|\leq\alpha$. *Donc* $(u_{1,n},u_{2,n})_n$ *est bornée dans* $X$ .
*Pour tout* $n$ , $(u_{1,n},u_{2,n})\in Y$ , *alors* (4.6), *implique que, il existe* $C_0>0$,*tel que*

$$\|u_{i,n}\|_\infty\leq C_0$$

*Par conséquent, pour* $n$ *suffisement grand* ($n>C_0$), *pour tout* $t\in I$, *nous avons* $u_{i,n}<n$. *De plus, nous ne pouvons pas avoir* $|(u_{1,n}(t),u_{2,n}(t))|\geq\frac{1}{n}$ *pour tout* $t\in I$; *sinon, nous aurions* $\frac{1}{n}\leq|(u_{1,n}(t),u_{2,n}(t))|\leq n$ *pour tout* $t\in I$ *et ceci contredit l'hypothèse* (4.19). *Donc, pour* $n$ *suffisament grand* ($n>C_0$), *il doit exister un* $t_n^*\in I$ *tel que pour certains* $i$, $|(u_{1,n}(t_n^*),u_{2,n}(t_n^*))|<\frac{1}{n}$. *Ceci veut dire que* $t_n^*\in I_{\frac{1}{n}}$, *où* $I_{\frac{1}{n}}$ *est un ensemble défini par*

$$I_{\frac{1}{n}}=\{t\in I;\ \ |(u_{1,n}(t),u_{2,n}(t))|<\frac{1}{n}\}. \qquad (4.27)$$

*Alors, l'ensemble* $I_{\frac{1}{n}}$ *n'est pas vide, la continuité de la solution* $(u_{1,n}, u_{2,n})$ *en* $t = t_n^*$*, implique que* $\operatorname{meas}(I_{\frac{1}{n}}) > 0$*, ce qui implique*

$$\int_{I_{\frac{1}{n}}} e^{G_1(t)} f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))dt \neq 0.$$

*Maintenant, considérons les ensembles*

$$I_{1,C_0} = \{t \in I;\ 1 \leq |(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))| \leq C_0,\}, \tag{4.28}$$

$$I_{\frac{1}{n},1} = \left\{t \in I;\ \frac{1}{n} \leq |(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))| < 1\right\}, \tag{4.29}$$

*pour que, nous puissions écrire*

$$I = I_{\frac{1}{n}} \cup I_{\frac{1}{n},1} \cup I_{1,C_0}.$$

*Alors,*

$$\begin{aligned}
\Upsilon_n \quad : \quad &= \int_0^T e^{G_1(t)} \Big(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\Big)\, dt \\
&= \int_{I_{\frac{1}{n}}} e^{G_1(t)} \Big(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\Big)\, dt + \\
&\quad \int_{I_{\frac{1}{n},1}} e^{G_1(t)} \Big(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\Big)\, dt + \\
&\quad \int_{I_{1,C_0}} e^{G_1(t)} \Big(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\Big)\, dt
\end{aligned}$$

***Si nous intégrons positivement sur tous les sous-intervalles de*** $I$***.***
*Si* $t \in I_{\frac{1}{n}}$ *alors* $|(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))| < \frac{1}{n}$*. Donc, pour* $n$ *suffisement grand* (4.27) *et* $(H_1)'(ii)$ *implique*

$$\begin{aligned}
&\int_{I_{\frac{1}{n}}} e^{G_1(t)} \Big(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\Big)\, dt \\
= &\int_{I_{\frac{1}{n}}} e^{G_1(t)}[f_1(t, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - h_1(t)u_{1,n}(t)]dt < 0,
\end{aligned}$$

*qui donne,*

$$\begin{aligned}\Upsilon_n &< \int\limits_{I_{\frac{1}{n},1}} e^{G_1(t)}\left(f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right)dt + \\ &\quad \int\limits_{I_{1,C_0}} e^{G_1(t)}\left(f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right)dt\end{aligned} \tag{4.30}$$

*Si* $t \in I_{1,C_0}$ *alors* $|(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))| \in [1, C_0]$. *Ceci veut dire que* $(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))$ *est borné sur* $I_{1,C_0}$, *puisque* $f_{1,\frac{1}{n}}$ *est continue , alors* $f_{1,\frac{1}{n}}$ *est borné presque partout dans* $I_{1,C_0}$. *Soit*

$$\gamma = \gamma(C_0) = \max\left\{\left|f_{1,\frac{1}{n}}(t,x,y)\right|;\ t \in I, 1 \le |(x,y)| \le C_0\right\} \tag{4.31}$$

*Alors,*

$$\left|\int\limits_{I_{1,C_0}} e^{G_1(t)}\left(f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_{1,n}(t)\right)dt\right| \le T(\gamma e^{\|g_1\|_{L^1}} + C_0\|h_1\|_\infty) \tag{4.32}$$

*(*4.30) *et* (4.32) *mène à*

$$\Upsilon_n < \int\limits_{I_{\frac{1}{n},1}} e^{G_1(t)}\left(f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right)dt + e^{\|g_1\|_{L^1}}T(\gamma + C_0\|h_1\|_\infty) \tag{4.33}$$

*Par* $(H_1)'$ *(ii), nous avons que tout* $\sigma > 0$, *il existe* $\delta_\sigma > 0$ *tel que* $f_1(t,x,y) < -2\sigma$, *pour tout* $|(x,y)| < \delta_\sigma$ *et pour presque tout* $t \in I$. *Alors, pour* $n$ *suffisement grand* $(n > C_0)$, $J := I_{\frac{1}{n},1} \cap I_\delta \neq \varnothing$; *où* $I_\delta = \{t \in I; |(u_{1,n}(t), u_{2,n}(t))| < \delta_\sigma\}$. *Ce qui implique,*

$$\int\limits_{I_{\frac{1}{n},1}} e^{G_1(t)}\left(f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right)dt < (C_0\|h_1\|_\infty - 2\sigma)\, e^{-\|g_1\|_{L^1}}\operatorname{meas}(J) \tag{4.34}$$

*Alors que, pour* $\sigma = \frac{1}{\operatorname{meas}(J)} n^2(T(\gamma + C_0\|h_1\|_\infty)$, *nous obtenons,*

$$\begin{aligned}\Upsilon_n &< \int\limits_{I_{\frac{1}{n},1}} e^{G_1(t)}\left(f_{1,\frac{1}{n}}(t,u_{1,n}(t),u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right)dt + T(\gamma e^{\|g_1\|_{L^1}} + C_0\|h_1\|_\infty) \\ &< (C_0\|h_1\|_\infty - 2\sigma)\, e^{\|g_1\|_{L^1}}\operatorname{meas}(J) + e^{\|g_1\|_{L^1}}T(\gamma + C_0\|h_1\|_\infty) \\ &< 2e^{\|g_1\|_{L^1}}T(\gamma + C_0\|h_1\|_\infty) + (-\sigma)\, e^{\|g_1\|_{L^1}}\operatorname{meas}(J) \\ &< 2e^{\|g_1\|_{L^1}}T(\gamma + C_0\|h_1\|_\infty)(1-n^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.\end{aligned} \tag{4.35}$$

*Alors,* $\Upsilon_n$ *n'est pas borné.*
***Si nous supposons que nous intégrant négativement sur tout sous intervalles de*** $I$
*alors, au lieu de* (4.34) *nous aurons,*

$$\int\limits_{I_{\frac{1}{n},1}} e^{G_1(t)} \left(f_{1,\frac{1}{n}}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right) dt > \sigma \operatorname{meas}(J)$$

(4.31) *mène à*

$$\Upsilon_n \to +\infty, \text{ as } n \to +\infty. \tag{4.36}$$

*D'un autre coté, en utilisant* (4.21)

$$\Upsilon_n = \int_0^T e^{G_1(t)} \left(f_{1,\beta_n}(t, u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) - h_1(t)u_1(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{p} e^{G_1(t_k)} J_k^1(u_{1,n}(t_k)).$$

*donc par* $(H_2)$,

$$e^{-\|g_1\|_{L^1}} pm \leq \Upsilon_n \leq e^{\|g_1\|_{L^1}} pM$$

*Nous concluons que, pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*, \Upsilon_n < 0$ *et* $\Upsilon_n$ *est borné,ce qui contredit* (4.35) *et* (4.36). *Notre supposition est fausse, le contraire est vrai; the lemma 4.2.1 est prouvé.*
*Le lemme 4.2.1, montre qu'il existe* $\beta_0 \in ]0,1[$*,tel que la solution* $(u_1^*, u_2^*)$*de* (4.16)*,pour* $\beta \leq \beta_0 < 1$*,vérifie* $\beta_0 \leq \min_t \left|\left(u_{1,n}^*(t), u_{2,n}^*(t)\right)\right|$ *et de* (4.14) *et* (4.15)*,* $(u_1^*, u_2^*)$ *est solution de* (3.1)*.Cette solutionn'est pas constante car* $(u_1^*, u_2^*) \neq (0,0)$ *et* $(u_1^*, u_2^*) \in Y$*.Ce ci achève la déonstration du théorème* (4.1)*.*
■

■

A présent, nous donnons un exemple .

**Exemple 4.2.1** *Considérons le PL périodique* (4.2), *où*

$$T = 2\pi$$

$$f_1(t, u_1, u_2) = \frac{-1}{u_1^2 + u_2^2} + \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{1 + (\sin t)^2},$$

$$f_2(t, u_1, u_2) = \frac{\cos t}{1 + u_1^2 + u_2^2},$$

*et,*

$$\text{pour tout } t \in [0, 2\pi], \; h_1(t) = \frac{1}{1+t^2} \text{ et } h_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$g_1(t) = g_2(t) = \cos t$$

$$J_k^1(u(t_k)) = J_k^2(u(t_k)) = -\frac{|\sin t_k|}{1 + [u(t_k)]^2}, \ \textit{avec } t_k = \frac{2\pi k}{p+1}; \ p \geq 4$$

*Dans ce cas,* $f_i, g_i, h_i$ *et* $J_k^i$ *satisfont les conditions* $(H_1)$ *et* $(H_2)$. *Alors par le théorème 4.1 le système* (4.2) *a au moins une solution non constante.*

# Conclusion et perspectives

## 1 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons appliqué une approche variationnelle pour l'étude de certains problèmes aux limites périodiques associés à des équations differentielles (systèmes d'équations differentielles) du second ordre sous l'effet d'impulsions

Nous avons été essentiellement concernés par l'étude de l'existence de solutions periodique au voisinage de solutions constantes et par l'étude de l'existence de solutions homoclinique et heteroclinique pour des equations differentielles et des systèmes couplés dans le cas de perte de régularité (singularité) et sous l'effet d'impulsions (cf. [34], [35] et [36])

Les résultats ont été établis par minimisation sous contraintes en considérant des conditions suffisantes assez simples.Ces résultats ont fait l'objet de deux publications

(1)N. Daoudi-Merzagui, S. Kerris ,Homoclinic solutions for singular impulsive second order differential equations , Applied Mathematical Sciences, Vol. 11, 2017, no. 24, 1187-1210 https://doi.org/10.12988/ams.2017.74120

(2)N. Daoudi-Merzagui, S. Kerris, Variational Approach to a Singular Damped Second-Order Systems under Impulses Effects, Afrika Matematika, 30 (2019), 857–877.

## 2 Perspectives

Nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solutions périodiques non triviales et à l'existence de connexions homocliniques et hétérocliniques et d'éventuelles bifurcations dans le cas de lacunes de compacité . Nous sommes sur un travail de généralisation de certains résultats de JeanJean ([58]) .
D'autre part, une étude visant la solvabilité par méthodes variationnelles de problème non local périodique est tout juste entammée.

# Chapitre 5

# Bibliographie

# Bibliographie


[1] A. Ambrosetti , V. Coti Zelati, Multiplicité des orbites homoclines pour des systèmes conservatifs, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 314 (1992), 601-604.

[2] A. Ambrosetti , M. Badiale, Homoclinic:Poincare-Melnikov Type Results via a Variational Approach, Ann. Inst. Henri Poincare, 15 (1998), 233-252.

[3] M. Arias, Fast and heteroclinic solutions for a second order ODE, Electronic Journal of Differential Equations, 14 (2006), 119-124.

[4] B. Aulbach , D. Flockerzi, The past in short hypercycles, J. Math. Biol, 27 (1989), 223-231.

[5] L. Bai , B. Dai, An application of variational method to a class of Dirichlet boundary value problems with impulsive effects, J. Franklin Inst., 348 (2011), 2607–2624.

[6] L. Bai , B. Dai, Existence and multiplicity of solutions for an impulsive boundary value problem with a parameter via critical point theory, Math. Comput. Modelling, 53 (2011), 1844–1855.

[7] D. Bainov , P. Simeonov, Systems with Impulse Effect, Ellis Horwood, Chichister, (1989).

[8] D. D. Bainov, A. B. Dishliev et I. M. Stamova, Lipschitz quasistability of impulsive differential–difference equations with variable impulsive perturbations, J. Comput. Appl. Math 70 (1996), 267-277.

[9] N. J. Balmforth, Solitary waves and homoclinic orbits, Annual review of fluid mechanics, Annual Reviews, Palo Alto, CA, 27 (1995), 335-373.

[10] M. L. Bertotti , L. Jeanjean, Multiplicity of Homoclinic Solutions for Singular Second-order Conservative Systems, Proc.Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 6 (1996), 1169-1180.

[11] G. D. Birkhoff, Nouvelles recherches sur les systemes dynamiques, Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lycaei 1 (1935), 85-216.

[12] S. Blower, L. Ma, P. Farmer , S. Koenig, Predicting the impact of antiretrovirals in resource-poor settings: preventing HIV infections whilst controlling drug resistance, Curr Drug Targets Infect Disord, 3 (2003), 345-353.

[13] S.V. Bolotin, Existence of homoclinic motions, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1983), 98-103.

[14] S.V. Bolotin, Variational methods for constructing chaotic motions in the dynamics of a rigid body, Prikl. Mat. Mekh. 56 (1992), 230-239.

[15] S.Bolotin, Variational Criteria for Nonintegrability and Chaos in Hamiltonian Systems, In: Hamiltonian Mechanics,Toruń, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys, Plenum, New York, 331 (1994), 173–179.

[16] M. J. Borges, Heteroclinic and Homoclinic Solutions for a Singular Hamiltonian System, European J. Appl. Math., 1 (2006), 1–32.

[17] A. Boucherif , N. Daoudi-Merzagui, Periodic Solutions of Singular Nonautonomous Second Order Differential Equations, Nonlinear Differ. Equ. Appl, 15 (2008), 147-158.

[18] M. Braun, Differential equations and their applications, Applied mathematical sciences 15, Edition 3 springer Verlag (1982).

[19] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris, (1983).

[20] A. Cabada , J. A. Cid, Heteroclinic solutions for non-autonomous boundary value problems with singular Φ-Laplacian operators, Discrete and Continuous Dynamical Systems, (2009), 118-122.

[21] P. Caldiroli , L. Jeanjean, Homoclinics and Heteroclinics for a Class of Conservative Singular Hamiltonian Systems, J. Differential Equations, 1 (1997), 76–114.

[22] P. Caldiroli , M. Nolasco, Multiple Homoclinic Solutions for a Class of Autonomous Singular Systems in $\mathbb{R}^2$, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1 (1998), 113–125.

[23] P. A. Canada , A. F. Drabek, Handbook of Differential Equation,Ordinary Differenial Equations, 3 (2006), 103-202.

[24] T.E. Carter, Optimal impulsive space trajectories based on linear equations, J. Optim. Theory Appl. 70 (1991) 277–297.

[25] T.E. Carter, Necessary and su¢ cient conditions for optimal impulsive rendezvous with linear equations of motion, Dynam. Control 10 (2000) 219–227.

[26] L. Chen , J. Sun, Nonlinear boundary value problem of first order impulsive functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2 (2006), 2726–741.

[27] J. Chen, C.C. Tisdel , R. Yuan, On the solvability of periodic boundary value problems with impulse, J. Math. Anal. Appl., 331 (2007), 902–912.

[28] L. A. Cerkas, On the stability of a singular cycle, differential'nye uravnenija, 4 (1968), 1012-1017.

[29] M. Choisy, J. F. Guégan , P. Rohani, Dynamics of infectious diseases and pulse vaccination: teasing apart the embedded resonance effects, Physica D, 1 (2006), 26-35.

[30] J. Chu , J. J. Nieto, Impulsive periodic solutions of first-order singular differential equations, Bulletin of the London Mathematical Society,1 (2008), 143–150.

[31] V. Coti Zelati, I. Ekeland , E. Séré, A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems, Math. Ann. 288 (1990), 133-160.

[32] V. Coti Zelati , P.H. Rabinowitz, Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 693-727.

[33] N. Daoudi-Merzagui , A. Boucherif, Nonconstant periodic solutions created by impulses for singular differential equations, Boundary Value Problems, 2015 (2015), 11 pages.

[34] N. Daoudi-Merzagui , S. Kerris, Homoclinic solutions for singular impulsive second order differential equations, Applied Mathematical Sciences, 24 (2017), 1187-1210.

[35] N. Daoudi-Merzagui , S. Kerris, Heteroclinic and periodic solution for impulsive second order differential equations, soumis à: Journal of Dynamics and Differential Equations.

[36] N. Daoudi-Merzagui , S. Kerris, Variational Approach to a Singular Damped Second-Order Systems under Impulses Effects, Afrika Matematika, 30 (2019), 857–877.

[37] C. De Coster , P. Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results, in: F. Zanolin (Ed.), Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations CISM-ICMS., 371 (1996), 1-78.

[38] D. G. Defigueiredo, "Nonlinear Elliptic Systems", An. Acad. Bras. Ci. 72, 17 pages, 2000.

[39] H. Dulac, On limit cycles, Bull, Soc. Math. France, 51(1923), 45-188.

[40] F. Dumortier, R. Roussarie , J. Sotomayor, Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part, The cusp case of codimension 3, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 7 (1987), 375-413.

[41] L. H. Erbe , X. Liu, Existence Results for Boundary Value Problems of Second Order impulsive Differential Equations, J. Math. Anal. Appl.,149, (1990), 56-69.

[42] P. L. Felmer, Heteroclinic orbits for spacially periodic Hamiltonian systems, Annales de l'I.H.P., Section C, 5 (1991), 477-497.

[43] B. Y. Feng , M. Qian, The stability of a saddle point separatrix loop and a criterion for its bifurcation limit cycles, Acta Math. Sinica, 28 (1985), 53-70 (in Chinese).

[44] B. Y. Feng, Condition for generating limit cycles by bifurcation of the loop of a saddle-point separatrix, Acta Math. Sinica, New series, 3 (1987), 373-382 (in Chinese).

[45] B. Y. Feng, The heteroclinic cycle in the model of competition between n species and its stability, Acta Math. Appl. Sinica, 14 (1998), 404-413.

[46] B. Y. Feng , R. Hu, A survey on homoclinic and heteroclinic orbits, Applied Mathematics E-Notes, 3 (2003), 16-37.

[47] S. Gao, L. Chen, J. J. Nieto , A.Torres, Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, Vaccine, 35-36 (2006), 6037-6045.

[48] R. K. George, A. K. Nandakumaran , A. Arapostathis, A note on controllability of impulsive systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2 (2000), 276-283.

[49] W. B. Gordon, Conservative Dynamical Systems Involving Strong Forces, Trans.Amer.Math.Soc, 1 (1975), 113-135.

[50] D. Guo, Variational approach to a class of impulsive differential equations, Boundary Value Problems, 2014 (2014), 10 pages.

[51] H. Hofer , K. Wysocki, First Order Elliptic Systems and the Existence of Homoclinic Orbits in Hamiltonian systems, Mathematische Annalen, 3 (1990), 483-503.

[52] M. Izydorek , J. Janczewska, Homoclinic Solutions for a Class of the Second Order Hamiltonian Systems, Journal of Differential Equations, 2 (2005), 375-389.

[53] M. Izydorek et J. Janczewska, Two Families of Infinitely Many Homoclinics for Singular Strong Force Hamiltonian Systems, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 1-2 (2015), 301-311.

[54] I.M. James, The Lusternik-Schnirelmann theorem reconsidered, Topology and its applications, 44 (1992), 197-202.

[55] J. Janczewska, The Existence and Multiplicity of Heteroclinic and Homoclinic Orbits for a Class of Singular Hamiltonian Systems in $\mathbb{R}^2$, Boll. Unione Mat. Ital., 3 (2010), 471-491.

[56] J. Janczewska , J. Maksymiuk, "Homoclinic Orbits for a Class of Singular Second Order Hamiltonian Systems in $\mathbb{R}^3$", Cent. Eur. J. Math, vol. 10, no. 6, (2012), 1920-1927.

[57] J. Janczewska, Homoclinic and Heteroclinic Solutions for a Class of Singular Planar Newtonian Systems, Extended Abstracts Spring 2014, Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics, (39-45). (DOI 10.1007/978-3-319-22129-8).

[58] L. Jeanjean, Solution in spectral gaps for a nonlinear equation of Schrödinger type. J. Diff. Equat., 112 (1994), 53-80.

[59] F. Jedrzejewski, Introduction aux méthodes numériques, Deuxième édition, Springer-Verlag France, Paris (2005).

[60] G. Jiang , Q. Lu, Impulsive state feedback control of a predator-prey model, Journal of Computational and Applied Mathematics, 1 (2007), 193-207.

[61] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden , S. D. Ross, Heteroclinic Connections between Periodic Orbits and Resonance Transitions in Celestial Mechanics, American Institute of Physics, 10 (1999), 427-469.

[62] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov , P. S. Simeonov, Theory of impulsive differential equations, World Scientific, Singapore, (1989).

[63] X. Li , S. Lu, Homoclinic Orbits for a Class of Second-Order Hamiltonian Systems Without a Coercive Potential, Journal of Applied Mathematics and Computing, 1-2 (2012), 121-130.

[64] J. Li , J. J. Nieto, Existence of positive solutions for multipoint boundary value problem on the half-line with impulses, Boundary Value Problems, 2009, Article ID 834158, (2009), 12 pages, .

[65] P. L. Lions, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case. I, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 2 (1984), 109-145.

[66] X. Liu, Periodic boundary value problems for impulsive systems containing Hammerstein type integrals, Dynam. Systems Appl., 6 (1997), 517-528.

[67] B. Liu , J. Yu, Existence of solution for m-point boundary value problems of second-order differential systems with impulses, Original Research Article Applied Mathematics and Computation, 125 (2002), 155-175.

[68] Y. Liu, "Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations", Nonlinear Anal. 70, 2106-2122, 2009.

[69] J. Liu , Z. Zhao, Variational approach to second-order damped Hamiltonian systems with impulsive effects, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 3459-3472.

[70] Z. E. Ma , E. N. Wang, The stability of a loop formed the separatrix of a saddle point and the condition to produce a limit cycle, Chin. Ann. of Math., 4A(1983), 105-110 (in Chinese).

[71] V.K. Melnikov, On the stability of a center for time-periodic perturbations, Trudy Moskov. Mat. Obsc. 12 (1963), 3-52.

[72] J. Mawhin , M. Willem, Critical Points Theory and Hamiltonian Systems, Springer-Verlag, New York, 1989.

[73] J. Mawhin, Topological Degree and Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations, Topological methods for ordinary differential equations, Lect. Notes Math., no. 1537, Springer, Berlin, (1993), 74-142.

[74] P. Montecchiari, M. Nolasco , S. Terracini, Multiplicity of Homoclinics for a Class of Time Recurrent Second Order Hamiltonian Systems, Calc.Var, 5 (1997), 523-555.

[75] J. Moser, Stable , Random Motions in Dynamical Systems: With Special Emphasis on Celestial Mechanics, Ann. Math. Studies, Vol. 77, Princeton University Press, Princeton, NJ (1973).

[76] S. I. Nenov, Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics, Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, 36 (1999), 881–890.

[77] J. J. Nieto, Basic theory non-resonance impulsive periodic problems of first order, J. Math. Anal. Appl., 205 (1997), 423-433.

[78] J.J. Nieto , D. O'Regan, Variational approach to impulsive differential equations, Nonlinear Anal. Real World Appl. 70 (2009), 680-690.

[79] H. Poincarré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (1892). Reprinted by Dover Publications Inc., New York (1957). Tome III. Invariants intrégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques.

[80] A.F.B.A. Prado, "Bi-impulsive control to build a satellite constellation", Nonlinear Dyn. Syst. Theory 5, 169–175, 2005.

[81] D. Qian , X. Li, Periodic solutions for ordinary differential equations with sublinear impulsive effects,Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1 (2005), 288–303.

[82] P. H. Rabinowitz, Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian system, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linraire 6 (1989), 331-346.

[83] P. H. Rabinowitz, Homoclinic and Heteroclinic for a Class of Hamiltonian Systems, Calc. Var, 1 (1993), 1-36.

[84] P. H. Rabinowitz, Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system, Ergodic Theory Dynam. Systems, 14 (1994), 817-829.

[85] P. H. Rabinowitz, Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system, 2, Differential Integral Equations 7 (1994), 1557-1572.

[86] P. H. Rabinowitz, Homoclinics for an Almost Periodically Forced Singular Hamiltonian System, Topol. Methods Nonlinear Anal., 1 (1995), 49-66.

[87] P. H. Rabinowitz, Multibump Solutions for an Almost Periodically Forced Singular Hamiltonian System, Electron. J. Differential Equations, (1995).

[88] P. H. Rabinowitz, Homoclinics for a Singular Hamiltonian System, In: Geometric Analysis and the Calculus of Variations, International Press, Cambridge, (1996), 267–296.

[89] P. H. Rabinowitz, Heteroclinics for a Hamiltonian system of double pendulum type, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 9 (1997), 41-76.

[90] P. H. Rabinowitz, Variational Methods for Hamiltonian Systems, Handbook of Dynamical Systems, 1A (2002), 1091-1127.

[91] I. Rachunkova, Upper and lower solutions and topological degree, Preprint 97-23, dept. Math. anal. Palacky Univ., Czech Republic, (1997).

[92] C. Rebelo, A note on the Poicarré-Birkhoff fixed point theorem and periodic solutions of planar systems, Nonlinear Anal, 3 (1997), 291-311.

[93] A. M. Samoilenko , N.A.Perestyuk, Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, (1995).

[94] S.H. Saker , J.O. Alzabut, Periodic solutions, global attractivity and oscillation of an impulsive delay host-macroparasite model, Mathematical and Computer Modelling, 45 (2007), 531-543.

[95] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1965) 63-80.

[96] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.

[97] J. Sotomayor, Curvas Definidas for Equagoes Diferencials No Plano, Instituo De Matematica Pura e Aplicada, (1981).

[98] M. Struwe, Variational methods, applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian Systems, Springer, Berlin, (1996).

[99] J. Sun , H. Chen, Variational method to the impulsive equation with Neumann boundary conditions, Boundary Value Problems, 2009 (2009), 17 pages.

[100] J. Sun, H. Chen, J. J. Nieto , M. Otero-Novoa,Multiplicity of solutions for perturbed second-order Hamiltonian systems with impulsive effects, Nonlinear Anal., 72 (2010), 4575-4586.

[101] J. Sun, H. Chen , L. Yang, The existence and multiplicity of solutions for an impulsive differential equation with two parameters via a variational method, Nonlinear Anal., 73 (2010), 440-449.

[102] J. Sun, J. Chu , H. Chen, Periodic Solutions Generated by Impulses of Singular Differential Equations, J. Math. Anal. Appl., 404 (2013), 562-569.

[103] K. Tanaka, Homoclinic Orbits for a Singular Second Order Hamiltonian System, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 5 (1990), 427-438.

[104] C. Tang, Periodic solutions of non-autonomous second order systems, J. Math. Anal. Appl., 202 (1996), 465-469.

[105] C. L. Tang, Periodic solutions for non-autonomous second order systems with sublinear nonlinearity, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 3263-3270.

[106] C. L. Tang, Existence and multiplicity of periodic solutions for nonautonomous second order systems, Nonlinear Anal., 32 (1998), 299-304.

[107] Y. Tian , W. Ge, Applications of variational methods to boundary-value problem for impulsive differential equations, Proc. Edinburgh Math. Soc., Series II, 51 (2008), 509-527.

[108] Y. Tian, W.Ge , D. Yang, Existence results for second-order system with impulse effects via variational methods, J. Applied Math. Computing, 31(2009), 255-265.

[109] S. Wiggins, Global bifurcations and chaos, Applied Mathematical Sciences, Vol. 73, Springer, New York (1988).

[110] X. P. Wu, C. L. Tang, Periodic solutions of a class of non-autonomous second order systems, J. Math. Anal. Appl., 23 (1999), 227-235.

[111] X. Wu, Saddle point characterization and multiplicity of periodic solutions of non-autonomous second order systems, Nonlinear Anal., 58 (2004), 899-907.

[112] Y. Wu , W.Liu, Variational approach to impulsive differential system, Adv. Differ. Equ. 2015, 303 (2015).https://doi.org/10.1186/s13662-015-0641-1.

[113] J. Xiao , J.J. Nieto, Variational approach to some damped Dirichlet nonlinear impulsive differential equations, J. Franklin Inst. 348 (2011), 369-377.

[114] Y. Q. Ye, Theory of Limit Cycle(2nd edition), Shanghai Science and Technology Press, Shanghai, China, 1984 (in Chinese).

[115] H. Zhang et Z. Li, Variational approach to impulsive differential equations with periodic boundary conditions, Nonlinear Anal. RWA., 11 (2010), 67-78.

[116] Z. Zhang , R. Yuan, An application of variational methods to Dirichlet boundary value problem with impulses, Nonlinear Anal. RWA., 11 (2010), 155-162.

[117] S. Q. Zhang, Symmetrically Homoclinic Orbits for Symmetric Hamiltonian Systems, JMAA, 247 (2000), 645-652.

[118] J. Zhou , Y. Li, Existence of solutions for a class of second-order Hamiltonian systems with impulsive effects, Nonlinear Anal., 72 (2010), 1594-1603.

[119] Z. Zhou, J. Yu et Y. Chen, Homoclinic Solutions in Periodic Difference Equations with Saturable Nonlinearity, Science China Mathematics, 1 (2011), 83–93.

[120] M. Zhu , S. P. Lu, Existence of Homoclinic Solution for a Class of Hamiltonian Systems, Journal of Mathematical Research with Applications, 1 (2012), 43–52.