République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABOU-BEKR BELKAID-TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTÉ DES SCIENCES-DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Géométrie Différentielle

Par :

Mohamed BEKIRI

Sur le thème

PROBLÈMES ELLIPTIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Soutenue publiquement le 14/03/2020 à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr DIB Hacen	Professeur	UABB Tlemcen	Président
Mr BENALILI Mohammed	Professeur	UABB Tlemcen	Directeur de thèse
Mr BEKKAR Mohammed	Professeur	U.Ahmed Ben Bella Oran I	Examinateur
Mr RAHMANI Noureddine	Professeur	USTO Oran	Examinateur
Mr LANSARI Azzedine	Professeur	UABB Tlemcen	Examinateur

Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications (SDA)

BP 119, 13000 Tlemcen-Algérie

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse **Mr Mohammed BENALILI** Professeur à l'Université Abou-Bekr Belkaîd de Tlemcen. J'ai pu apprécier la justesse de ses conseils qui ont orienté mes travaux.

Je tiens à remercier **Mr Hacen DIB** Professeur à l'Université Abou-Bekr Belkaîd de Tlemcen d'avoir accepté de présider mon jury.

Je remercie également les professeurs **Mr Azzedine LANSARI** Professeur à l'Université Abou-Bekr Belkaîd de Tlemcen, **Mr Noureddine RAHMANI** Professeur à l'Université des sciences et de la technologie d'oran Mohamed Boudiaf (USTO) et **Mr Mohammed BEKKAR** Professeur à l'Université Ahmed Ben Bella d'Oran 1, d'avoir acceptés d'examiner ma thèse et de participer à mon jury. Je les remercie tous pour leurs disponibilités et les remarques et les suggestions sur mon travail.

Enfin, je remercie profondément mes parents pour leur soutien constant durant toutes mes études. Ils occupent une place particulière au fond de moi.

Table des matières

Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles se trouve à l'interface de nombreux problèmes d'origines purement géométriques. En effet, la plupart des problèmes issus de la géométrie conforme sont formulés à l'aide d'équations non linéaires critiques. La résolution de ces problèmes est l'objet de l'analyse non linéaire sur les variétés riemanniennes développée ces dernières années dans de nombreux travaux ([1], [3],[4], [5],[11] [14], [15], [16], [17], [25], [26], [27],[30], [32][33],[34], [35], [40]).

Le travail présenté dans cette thèse est divisé en deux parties principales. La première partie est consacrée à l'étude de solutions qui changent de signe pour un certain type d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Il s'agit du problème de Dirichlet du quatrième ordre de la forme

$$\begin{cases} \Delta_g^2 u - div_g \left(A\,(\nabla u)^{\#} \right) + au = \lambda f \, |u|^{2^\sharp - 2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1, \, \partial_\nu u = \phi_2 & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{1}$$

où a, f sont des fonctions régulières sur une variété riemannienne (M, g) à bord de dimension $n \geq 5$ telle que f est positive, A est un champ de tenseur deux fois covariants sur M, ϕ_1, ϕ_2 sont deux fonctions régulières sur le bord ∂M. Cette équation a la particularité de contenir l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-4}$ correspondant à l'inclusion de Sobolev.

La seconde partie est consacrée à l'étude de solutions qui changent de signe de certains types d'équations elliptiques polyharmoniques non linéaires sur une variété riemannienne compacte à bord. Il s'agit d'un problème de Dirichlet du $2k$-ème ordre de la forme

$$\begin{cases} \Delta_g^k u + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \ldots j_1} \left(A_{(l) i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_l} \nabla^{i_1 \ldots i_l} u \right) = \lambda f \, |u|^{2^\sharp - 2} \, u & \text{dans } M \\ u = \phi_1, \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi_2, \ldots \text{et } \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{2}$$

où f est une fonction positive régulière sur une variété riemannienne compacte (M, g) à bord de dimension $n > 2k$, $A_{(l)}$ est un champ de tenseur $2l$-fois covariants sur M pour tout $l \in \{0, 1, ..., k-1\}$, $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ sont des fonctions régulières sur le bord ∂M. Cette équation a la particularité aussi de contenir l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2k}$.

L'origine de ces problèmes est liée aux problèmes issus de la géométrie conforme comme le problème de Yamabe, le problème de la courbure scalaire prescrite et le problème de la Q- Courbure prescrite.

0.1 Problème de Yamabe

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$. Existe-t-il une métrique $\tilde{g}$ conforme à g dont la courbure scalaire est constante ?

Les courbures scalaires de deux métriques conformes sont reliées entre elles par une formule très simple et élégante. En effet, si $n = 2$ et $\tilde{g} = e^{2u} g$ est une métrique conforme à g où $u \in C^\infty(M)$, alors les deux courbures scalaires R_g et $R_{\tilde{g}}$ de g et de $\tilde{g}$ sont reliées par la relation

$$\Delta_g u + \frac{1}{2} R_g u = \frac{1}{2} R_{\tilde{g}} e^{2u}$$

Par ailleurs, si $n \geq 3$ et si on écrit $\tilde{g}$ sous la forme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ pour $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, on obtient facilement que

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} R_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur (M, g), ce qui ramène le problème à trouver une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction $u \in C^\infty(M)$ strictement positive solution de l'équation

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4\,(n-1)} R_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Ce problème a été conjecturé par Yamabe en 1960 qui l'énonça dans [40]. Quelques années plus tard en 1968 Trudinger [38] a découvert une erreur dans la preuve de Yamabe et il a résolut le problème dans certains cas particuliers. En 1976 Aubin [1] a amélioré l'approche de Yamabe en réduisant le problème à la preuve d'une certaine inégalité sur l'invariant de Yamabe. Cette inégalité a été démontrée par Aubin [1] dans certains cas, ensuite par Schoen [35] dans les autres cas en 1984.

0.2 Problème de courbure scalaire prescrite

Une généralisation naturelle du problème de Yamabe, qui peut être très utile dans l'étude de la classe conforme d'une métrique g, est le problème de la courbure scalaire prescrite. Il s'agit de trouver une métrique $\tilde{g}$ conforme à g dont la courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ est égale à une fonction donnée f. En terme d'analyse ce problème se ramène après calculs à l'équation en u suivante

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = f u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

0.3 Problème de Q-courbure prescrite d'ordre quatre

En 1983 Paneitz [30] a définit, sur les variétés riemanniennes de dimensions quatre l'opérateur

$$P_g^4 u := \Delta_g^2 u - div_g\left(\left(\frac{2}{3} R_g g - 2Ric_g\right) du\right)$$

Cet opérateur a été généralisé aux dimensions supérieures par Branson [7] où il a définit

$$P_g^n(u) := \Delta_g^2 u - div_g\left(\left(\frac{(n-2)^2+4}{2\,(n-1)\,(n-2)} R_g g - \frac{4}{n-2} Ric_g\right) du\right) + \frac{n-4}{2} Q_g u$$

où R_g est la courbure scalaire, Ric_g est la courbure de Ricci et Q_g est la $Q-$ courbure, exprimée par

$$Q_g = \frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}R^2 - \frac{2}{(n-2)^2}\left|Ric_g\right|^2$$

Tout comme le laplacien conforme, l'opérateur de *Paneitz-Branson* est invariant conforme en effet, si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-4}}g \;\; u \in C^{\infty}(M)$, $u > 0$, alors pour tout $\varphi \in C^{\infty}(M)$

$$P_g^n(u\varphi) = u^{\frac{n+4}{n-4}}P_{\tilde{g}}^n(\varphi)$$

Pour $\varphi \equiv 1$, Q_g et $Q_{\tilde{g}}$ sont alors reliées par l'équation en u

$$\Delta_g^2 u - div_g\left(\left(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}R_g g - \frac{4}{n-2}Ric_g\right)du\right) + \frac{n-4}{2}Q_g u = \frac{n-4}{2}Q_{\tilde{g}}u^{\frac{n+4}{n-4}}$$

Le problème de Q- courbure prescrite s'énonce par analogie comme le problème de Yamabe. Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^{∞} de dimension $n \geq 5$. Existe-t-il une métrique $\tilde{g}$ conforme à g dont la Q- courbure $Q_{\tilde{g}}$ est égale à une fonction donné f. En terme d'analyse ce problème se ramène après calculs à l'équation en u suivante

$$\Delta_g^2 u - div_g\left(\left(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}R_g g - \frac{4}{n-2}Ric_g\right)du\right) + \frac{n-4}{2}Q_g u = fu^{\frac{n+4}{n-4}}. \qquad (3)$$

Le problème de Q- courbure prescrite revient à chercher des solutions u, positive et de classe C^{∞} sur M de l'équation (3).

On peut aussi rechercher des solutions qui changent de signe de (3). De telles fonctions sont appelées *solutions nodales*.

0.4 Problème de Q-courbure prescrite d'ordre arbitraire

À l'aide de la métrique ambiante de Fefferman-Graham [18], Graham-Jenne-Mason-Sparling [22] ont construit une famille d'opérateurs différentiels d'invariants conformes.

Plus précisément pour toute variété riemannienne (M, g) de dimension $n > 2k$, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ il existe un opérateur différentiel $P_g^{n,k}$ d'ordre $2k$ qui s'appelle l'opérateur de Graham-Jenne-Mason-Sparling, en abrégé *GJMS*. Cet opérateur contient la partie principale Δ_g^k et il est défini par

$$P_g^{n,k} := \Delta_g^k + lot$$

où $\Delta_g := -div_g(\nabla.)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami et *lot* dénote les termes différentiels d'ordre inférieur à $2k$.
Lorsque $k = 1$, on retrouve le laplacien conforme et lorsque $k = 2$, on retrouve l'opérateur de *Paneitz-Branson*.

Tout comme le laplacien conforme et l'opérateur de *Paneitz-Branson*, on peut associer à l'opérateur *GJMS* une courbure $Q_g^{n,k}$ qui est invariante conforme au sens suivant : si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2k}} g$ pour $n > 2k$ et $u \in C^\infty(M)$ et positive, alors pour toute $\varphi \in C^\infty(M)$

$$P_g^{n,k}(u\varphi) = u^{\frac{n+2k}{n-2k}} P_{\tilde{g}}^{n,k}\varphi$$

En prenant $\varphi \equiv 1$, on obtient l'équation en u

$$P_g^{n,k} u = f u^{\frac{n+2k}{n-2k}} \tag{4}$$

où

$$f = \frac{n-2k}{2} Q_{\tilde{g}}^{n,k}$$

On peut alors se demander sous quelles hypothèses, une fonction $f \in C^\infty(M)$ est Q-courbure d'une métrique conforme à g

Le problème de *Q- courbure prescrite* associé à l'opérateur *GJMS* revient à chercher des solutions u, positive et de classe C^∞ sur M de l'équation (4).

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude des solutions nodales de certaines équations d'ordre supérieur de type *Q- courbure prescrite*.
Ce manuscrit est divisé en trois chapitres :

Nous commençons par un chapitre introductif, où nous rappelons l'essentiel des notions géométriques et quelques résultats de base de l'analyse sur les variétés riemanniennes qui seront utilisés dans cette thèse.

Dans le deuxième chapitre nous montrons l'existence de solutions nodales de certaines équations du quatrième ordre contenant l'opérateur de type *Paneitz-Branson.* Il s'agit d'un problème de la forme

$$\begin{cases} \Delta_g^2 u - div_g\left(A\left(\nabla u\right)^{\#}\right) + au = \lambda f\left|u\right|^{2^{\sharp}-2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1,\, \partial_\nu u = \phi_2 & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{5}$$

où a, f sont des fonctions régulières sur une variété riemannienne (M, g) à bord de dimension $n \geq 5$, A est un champ de tenseur deux fois covariants sur M. ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions régulières sur le bord de M et $2^{\sharp} = \dfrac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique de Sobolev. Le résultat principal de ce chapitre est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 6$, A un tenseur régulier deux fois covariants et symétrique. On se donne a, $f \in C^{\infty}(M)$ avec $f > 0$, et x_0 un point à l'intérieur de M où $f(x_0) = \max\limits_M f$. On suppose que l'opérateur*

$$P_g = \Delta_g^2 - div_g\left(A\left(\nabla .\right)^{\#}\right) + a$$

est coercif et que

$$8(n-1)\, Tr_g A(x_0) + (n-6)(n-4)(n+2)\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} - 4\left(n^2 - 2n - 4\right) R_g(x_0) < 0.$$

Alors, il existe un réel positif λ et une solution non triviale $u = w + h \in H_2^2(M) \cap C^4(M)$, de l'équation (5)
où w minimise la fonctionnelle I définie sur $H_{2,0}^2(M)$ par

$$I(w) = \int_M \left(\left(\Delta_g w\right)^2 + A\left(\left(\nabla w\right)^{\#}, \left(\nabla w\right)^{\#}\right) + aw^2\right) dv_g$$

sous la contrainte $\int_M f\left|w + h\right|^{2^{\sharp}} dv_g = \gamma$, et h est l'unique solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} \Delta_g^2 h - div_g\left(A\left(\nabla h\right)^{\#}\right) + ah = 0 & \textit{dans } M \\ h = \phi_1,\, \partial_\nu h = \phi_2 & \textit{sur } \partial M \end{cases}$$

où ϕ_1, ϕ_2 sont deux fonctions régulières sur ∂M avec ϕ_1 qui change de signe.

Dans le dernier chapitre, nous généralisons le résultat obtenu dans le deuxième chapitre concernant l'existence de solutions nodales d'un problème elliptique contenant l'opérateur de type Paneitz-Branson à un problème polyharmonique contenant l'opérateur de type *GJMS*. Plus précisément, on s'intéresse au problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \Delta_g^k u + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \ldots j_1} \left(A_{(l) i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_l} \nabla^{i_1 \ldots i_l} u \right) = \lambda f \left|u\right|^{2^\sharp - 2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi_2, \ldots \text{et } \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{6}$$

où f est une fonction régulière positive sur une variété riemannienne (M, g) à bord de dimension $n > 2k$, $A_{(l)}$ est un champ de tenseur $2l$-fois covariants sur M pour tout $l \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ et $\phi_1,\ \phi_2, \ldots, \phi_k$ sont des fonctions régulières sur ∂M avec ϕ_1 qui change de signe.

On énonce le résultat principal de ce chapitre dans le théorème suivant

Théorème 0.2 *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n > 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), $A_{(l)}$ un $(0, 2l)$-tenseur régulier sur M pour tout $l \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Soit f une fonction positive, de classe C^∞ sur M et x_0 un point de l'intérieur de M avec $f(x_0) = \max_M f$. On suppose que l'opérateur*

$$P_g^{n,k} = \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \ldots j_1} \left(A_{(l) i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_l} \nabla^{i_1 \ldots i_l} \right)$$

est coercif.
Sous la condition

$$\inf_{u \in H_k^2(M) - \{0\}} \frac{\int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u \right)^2 dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l \left(\nabla^l u, \nabla^l u \right) dv_g}{\left(\int_M f \left|u\right|^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{2}{2^\sharp}}} < \frac{1}{\left(f(x_0)\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0(n, k)}$$

il existe un réel positif λ et une solution non triviale $u = w + h \in H_k^2(M) \cap C^{2k}(M)$ de l'équation (6) *où w minimise la fonctionnelle I définie sur* $H_{k,0}^{2}(M)$ *par*

$$I(w) = \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} w\right)^2 dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l \left(\nabla^l w, \nabla^l w\right) dv_g$$

sous la contrainte $\int_M f|w+h|^{2^\sharp} dv_g = \gamma$ *et h est l'unique solution de l'équation linéaire*

$$\begin{cases} P_g^{n,k} h = 0 & \text{dans } M \\ h = \phi_1, \ \dfrac{\partial h}{\partial \nu} = \phi_2, \ldots \text{et } \dfrac{\partial^{k-1} h}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases}.$$

Les résultats obtenus dans cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

1. M. Bekiri, M. Benalili. Nodal solutions for fourth order elliptic equations with critical exponent on compact manifolds,
   Complex Var. Elliptic Equ. 63 (2018), no. 10, 1421-1437.
2. M. Bekiri, M. Benalili. Nodal solutions for elliptic equation involving GJMS operators on compact manifolds,
   Complex Var. Elliptic Equ. 64 (2019), no. 12, 2105-2116.

Chapitre 1

Outils d'analyse non linéaire sur les variétés

L'objectif de ce chapitre est d'introduire différents résultats et principes d'analyse sur les variétés riemanniennes que nous utiliserons dans la suite. Pour plus de détails on pourra se référer aux ouvrages de Hebey [24]et de Aubin [2].

1.1 Définitions et propriétés

1.1.1 Courbures riemanniennes

Définition 1.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 1$ et ∇ la connexion de Levi-Civita (i.e. la connexion sans torsion pour laquelle g est à dérivée covariante nulle), donnée par son expression locale*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial xj} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

où g_{ij} et g^{ij} désignent respectivement le tenseur métrique et son inverse

1. *Le tenseur de courbure R relatif à la connexion ∇ s'écrit*

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x_k} + \Gamma^l_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ki} - \Gamma^l_{k\alpha} \Gamma^\alpha_{ji}.$$

2. *On appelle tenseur de courbure de Riemann noté Rm_g, le champ de tenseur C^∞*

quatre fois covariants défini par

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl}.$$

3. *On appelle tenseur de courbure de Ricci, le champ de tenseur C^{∞} deux fois covariants, obtenu en contractant le tenseur de courbure riemannienne*

$$Ric_{ij} = R^{\alpha}_{i\alpha j} = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha j\beta}.$$

4. *La courbure scalaire est la fonction numérique de classe C^{∞} sur M notée R_g et définie par*

$$R_g = R_{ij} g^{ij}.$$

1.1.2 Métriques conformes

Définition 1.2 *Deux métriques riemanniennes g et g' sur une variété M sont dites conformes s'il existe une fonction strictement positive $\varphi \in C^{\infty}(M)$ telle que*

$$g' = \varphi g.$$

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n. On rappelle que la classe conforme de g notée $[g]$, est l'ensemble des métriques sur M qui s'écrivent sous la forme $\tilde{g} = \varphi g$ où φ est une fonction $C^{\infty}(M)$ strictement positive . On peut écrire que

$$[g] = \left\{ \; e^{f} g \quad / \; f \in C^{\infty}(M) \; \right\}$$

1.1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.3 *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, k est un entier positif.*

1. *L'espace de Sobolev $H^2_k(M)$ est le complété de $C^{\infty}(M)$ pour la norme*

$$\|u\|^2 := \sum_{i=0}^{k} \int_M \left|\nabla^i u\right|^2 dv_g$$

où $\nabla^i u$ est la i-ème dérivée covariante de u.

2. *L'espace de Sobolev $H_{k,0}^2(M)$ est la fermeture de $C_c^\infty(M)$ dans $H_k^2(M)$; où $C_c^\infty(M)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ à supports compacts dans M.*

Remarque 1.1 *L'espace $H_{k,0}^2(M)$ est un espace de Hilbert, on peut donc définir la norme équivalente suivante (voir Robert [34])*

$$\|u\|_{H_{k,0}^2(M)}^2 = \sum_{i=0}^{k} \left\|\Delta_g^{\frac{i}{2}} u\right\|_2^2 \tag{1.1}$$

où

$$\Delta_g^{\frac{i}{2}} u = \begin{cases} \Delta_g^m u & \text{si } i = 2m \text{ est pair} \\ \nabla \Delta_g^m u & \text{si } i = 2m+1 \text{ est impair} \end{cases}.$$

1.1.4 Espaces de Hölder

Définition 1.4 *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, m un entier naturel et $\alpha \in (0, 1)$.*

1. *L'espace de Hölder $C^{0,\alpha}(M)$ est l'espace des fonctions continues, muni de la norme*
$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(M)} := \|u\|_\infty + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|u(x) - u(y)|}{d_g(x, y)^\alpha}$$
où $d_g(.,.)$ est la distance géodésique.

2. *L'espace de Hölder $C^{m,\alpha}(M)$ est l'espace des fonctions de classe C^m, dont la m-ème dérivée covariante $\nabla^m u$ appartient à $C^{0,\alpha}(M)$. On munit $C^{m,\alpha}(M)$ d'une norme définie par*
$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(M)} := \|u\|_{C^m(M)} + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|\nabla^m u(x) - \nabla^m u(y)|}{d_g(x, y)^\alpha}.$$

Nous rappelons les deux résultats très importants sur les espaces de Sobolev.

Théorème 1.1 (Théorème d'inclusion de Sobolev) *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n.*

1. *Si k et l sont deux entiers avec $(k \geq l \geq 0)$, p et q deux réels tels que $(p > q \geq 1)$ qui vérifient $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{(k-l)}{n}$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset H_l^p(M)$ est continue.*

2. *Si $m \in \mathbb{N}$ et $\frac{(k-m-\alpha)}{n} \geq \frac{1}{q}$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^{m,\alpha}(M)$ est continue avec $\alpha \in (0,1)$.*

Le deuxième résultat donne des conditions de compacité des inclusions dans le théorème précédent.

Théorème 1.2 (Théorème de Rellich Kondrakov) *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n et soient k et l deux entiers avec $k \geq l \geq 0$*

1. *Si p, $q \geq 1$ sont deux réels tels que $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} - \frac{(k-l)}{n}$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset H_l^p(M)$ est compacte.*

2. *Si $\frac{(k-\alpha)}{n} > \frac{1}{q}$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$ est compacte avec $\alpha \in (0,1)$.*

1.1.5 Meilleure constante de Sobolev

Définition 1.5 *On définit $K_0(n,k) > 0$ par*

$$\frac{1}{K_0(n,k)} := \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta^{\frac{k}{2}} u\right)^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} dx\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

la meilleure constante dans l'inégalité $\|u\|_{2^\sharp}^2 \leq K \left\|\Delta^{\frac{k}{2}} u\right\|_2^2$ de l'inclusion de Sobolev $H_k^2(\mathbb{R}^n) \subset L^{2^\sharp}(\mathbb{R}^n)$ où $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ est l'exposant critique de Sobolev.

Cette constante a été calculée dans le cas où $k = 1$ par Talenti [37]. Il a montré que

$$\frac{1}{K_0(n,1)} = \frac{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}{4}$$

Dans le cas où $k = 2$, Edmunds-Fortunato-Jannelli [16], Lions [28] et Lieb [27], ont montrés que

$$\frac{1}{K_0(n,2)} = \frac{n\left(n^2-4\right)(n-4)\,\omega_n^{\frac{4}{n}}}{16} \tag{1.2}$$

où ω_n est le volume de la sphère unité (S^n, h) munie de la métrique standard.

Dans [36], Swanson a montré pour tout entier positif k que

$$\frac{1}{K_0(n,k)} = \pi^k \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right)^{\frac{2k}{n}} \prod_{h=-k}^{k-1}(n+2h) \tag{1.3}$$

où Γ désigne la fonction d Euler.

1.1.6 Inégalité de la meilleure constante

Nous citons l'inégalité de la meilleure constante de Sobolev $K_0(n,k)$, dans le contexte d'une variété riemannienne compacte à bord. Cette inégalité a été prouvé par Aubin [2] pour $k = 1$, par Biezuner-Montenegro [6] pour $k = 2$ et par Mazumdar [29] pour tout entier positif k.

Lemme 1.1 *([6]) Soit (M,g) une variété riemannienne compacte à bord, de dimension $n > 4$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in H^2_{2,0}(M)$ on a*

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq (K_0(n,2)+\varepsilon)\left\|\Delta_g u\right\|^2_2 + B_\varepsilon \|u\|^2_{L^2(M)}$$

où $K_0(n,k)$ est la meilleure constante Euclidienne et $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-4}$.

Lemme 1.2 *([29]) Soit (M,g) une variété riemannienne compacte à bord, de dimension $n > 2k$ où k est un entier positif. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in H^2_{k,0}(M)$*

$$\|u\|^2_{2^\sharp} \leq (K_0(n,k)+\varepsilon)\left\|\Delta_g^{\frac{k}{2}} u\right\|^2_2 + B_\varepsilon \|u\|^2_{H^2_{k-1}(M)}$$

où $K_0(n,k)$ est la meilleure constante Euclidienne et $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2k}$.

1.1.7 Opérateur de Laplace-Beltrami

Définition 1.6 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne, le Laplacien* $\Delta_g u$ *d'une fonction* $u \in C^2(M)$ *est l'opposé de divergence du gradient de u, Son expression en coordonnées locales donnée par*

$$\Delta_g u := -div_g(\nabla u) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

où $|g|$ *le déterminant de la métrique* g
En coordonnées polaires, si $u(r)$ *est une fonction radiale alors le Laplacien de u s'écrit*

$$\Delta_g u(r) = -u''(r) - u'(r)\left(\frac{n-1}{r} + \partial_r \log \sqrt{|g|}\right).$$

1.1.8 Opérateur de type Paneitz-Branson

Définition 1.7 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de dimension* $n > 4$. *L'opérateur de type Paneitz-Branson à coefficients générales est donné par*

$$P_g := \Delta_g^2 - div_g\left(A(\nabla.)^{\#}\right) + a$$

où A un $(0, 2)$*-tenseur régulier, symétrique,* $a \in C^\infty(M)$ *et* $A(\nabla u)^{\#}$ *est le* $(0, 1)$*-tenseur obtenu à partir* ∇u *via l'isomorphisme musical #, dans une carte on a*

$$\left(A(\nabla u)^{\#}\right)_i = A_{ij}\left((\nabla u)^{\#}\right)^j = A_{ij}g^{jk}(\nabla u)_k.$$

1.1.9 Opérateur de type GJMS

Définition 1.8 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de dimension* $n > 2k$ *avec* k *un entier. L'opérateur de type GJMS est l'opérateur différentiel défini par*

$$P_g^{n,k} := \Delta_g^k + lot$$

où $\Delta_g := -div_g(\nabla.)$ *est l'opérateur de Laplace-Beltrami et lot désigne les termes différentiels d'ordre inférieur.*

L'opérateur de type *GJMS* peut être écrit sous forme de divergence, La preuve détaillé de ce résultat se trouve dans [34].

Proposition 1.1 *([34]) Soit $P_g^{n,k}$ l'opérateur de type GJMS. Alors pour tout entier $l \in \{0,\ 1, ...,\ k-1\}$, il existe un $(0, 2l)$-tenseur régulier $A_{(l)}$ sur M tel que $P_g^{n,k}$ s'écrit sous la forme*

$$P_g^{n,k} = \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l ... j_1} \left(A_{(l) i_1 ... i_l j_1 ... j_l} \nabla^{i_1 ... i_l} \right)$$

où $A_{(l)} \left(\nabla^l u\right)^{\#}$ est le $(0, l)$-tenseur obtenu à partir $\nabla^l u$ via l'isomorphisme musical #, dans une carte on a

$$\left(A_{(l)} \left(\nabla^l u\right)^{\#} \right)_{i_1 ... i_l} = A_{(l) i_1 ... i_l j_1 ... j_l} \left(\left(\nabla^l u\right)^{\#} \right)^{j_1 ... j_l} = A_{(l) i_1 ... i_l j_1 ... j_l} g^{j_1 k_1} ... g^{j_l k_l} (\nabla u)_{k_1 ... k_l} .$$

Maintenant nous rappelons la notion de coercivité de l'opérateur de type *Paneitz-Branson* et l'opérateur de type *GJMS*.

Définition 1.9 *Soit (M, g) une variété riemannienne à bord de dimension n. On dit que l'opérateur de type*

1. *Paneitz-Branson*

$$P_g := \Delta_g^2 - div_g \left(A \left(\nabla .\right)^{\#} \right) + au$$

est coercif s'il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $u \in H_{2,0}^2 (M)$

$$\int_M \left(P_g u \right) u dv_g = \int_M \left((\Delta u)^2 + A \left((\nabla u)^{\#}, (\nabla u)^{\#} \right) + au^2 \right) dv_g \geq \Lambda \|u\|_{H_{2,0}^2 (M)}^2 .$$

2. *GJMS*

$$P_g^{n,k} = \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l ... j_1} \left(A_{(l) i_1 ... i_l j_1 ... j_l} \nabla^{i_1 ... i_l} \right)$$

est coercif s'il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $u \in H_{k,0}^2 (M)$

$$\int_M \left(P_g^{n,k} u \right) u dv_g = \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u \right)^2 dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l \left(\nabla^l u, \nabla^l u \right) dv_g \geq \Lambda \|u\|_{H_{k,0}^2 (M)}^2 .$$

1.1.10 Principe du maximum

Définition 1.10 *On dira qu'un opérateur P défini sur une variété Riemannienne (M, g) vérifie le principe de comparaison si*

$$\forall u \in C^{\infty}(M),\ Pu \geq 0 \Longrightarrow u > 0 \text{ ou } u \equiv 0$$

Théorème 1.3 *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte et $u \in C^{\infty}(M)$ une fonction positive ou nulle. On suppose qu'en tout point x de M*

$$(\Delta_g u)(x) \geq u(x) f(x, u(x))$$

où $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors u est soit partout strictement positive, soit identiquement nulle.

Les opérateurs du second ordre vérifient le principe du maximum si et seulement s'ils sont coercifs (à titre d'exemple, l'opérateur du Laplacien conforme $(\Delta_g + a)$). Ce résultat est important pour montrer la positivité des solutions d'un problème du second ordre sachant que si $u \in H_1^2(M)$ on a alors $|u| \in H_1^2(M)$. En revanche, pour un opérateur elliptique d'ordre quatre, une telle caractérisation est fausse. Il existe des opérateurs elliptiques d'ordre quatre coercifs ne vérifiant pas le principe de comparaison, en plus si $u \in H_2^2(M)$ on a pas $|u| \in H_2^2(M)$. Dans [33] Robert a montré que l'opérateur de type *Paneitz-Branson* P_g satisfait le principe de comparaison s'il s'écrit sous forme produit de deux opérateurs de second ordre coercifs.

1.1.11 Solutions faibles et résultats de régularité

Définition 1.11 *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n > 4$, A un $(0, 2)$-tenseur régulier, symétrique et a, $h \in C^{\infty}(M)$, $f \in L^1_{loc}(M)$. Alors u est dite solution faible de l'équation*

$$\begin{cases} \Delta_g^2 u - div_g\left(A(\nabla u)^{\#}\right) + au = \lambda f\,|u+h|^{2^\sharp - 2}(u+h) & \text{dans } M \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

si pour tout $\phi \in C^{\infty}(M)$

$$\int_M \left(\left\langle \Delta_g u, \Delta_g \phi \right\rangle_g + A\left((\nabla u)^{\#}, (\nabla \phi)^{\#}\right) + au\phi\right) dv_g = \lambda \int_M f\,|u+h|^{2^\sharp - 2}(u+h)\,\phi\, dv_g$$

où $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-4}$.

Définition 1.12 *Soient* (M,g) *une variété riemannienne compacte à bord de dimension* $n > 2k$ $(k \in \mathbb{N})$, A_l *un* $(0,2l)$*-tenseur régulier symétrique,* $h \in C^\infty(M)$ *et* $f \in L^1_{loc}(M)$. *Alors* u *est dite solution faible de l'équation*

$$\begin{cases} \Delta_g^k u + \displaystyle\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \dots j_1} \left(A_{(l)i_1 \dots i_l j_1 \dots j_l} \nabla^{i_1 \dots i_l} u \right) = \lambda f \left| u + h \right|^{2^\sharp - 2} (u+h) & \text{dans } M \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dots = \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

si pour tout $\phi \in C^\infty(M)$

$$\int_M \left\langle \Delta_g^{\frac{k}{2}} u, \Delta_g^{\frac{k}{2}} \phi \right\rangle_g dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l \left(\nabla^l u, \nabla^l \phi \right) dv_g = \lambda \int_M f \left| u + h \right|^{2^\sharp - 2} (u+h) \phi dv_g$$

où $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2k}$.

La résolution des équations aux dérivées partielles par une méthode variationnelle ne permet de trouver que des solutions faibles alors que très souvent on a besoin de montrer que les solutions faibles sont des solutions régulières (ou classiques). Pour cela on a besoin de rappeler quelques résultats de régularité des solutions faibles appliqués aux problèmes elliptiques d'ordre quatre et d'ordre supérieur. Les preuves de ces résultats sont essentiellement basées sur les techniques développées par Van Der Vorst [39] et utilisées par Djadli-Hebey-Ledoux [14], Esposito-Robert [17] et Mazumdar [29].

Théorème 1.4 *[33] Soient* (M,g) *une variété riemannienne compacte et* $a \in C^\infty(M)$. *Soient* A *un* $(0,2)$*-tenseur symétrique de classe* C^∞ *sur* M. *Soit encore* $f \in C^{0,\alpha}(M)$ *avec* $\alpha \in (0,1)$. *Si* $u \in H_2^2(M)$ *est une solution faible de*

$$\Delta_g^2 u - div_g \left(A (\nabla u)^\# \right) + au = f$$

alors $u \in C^{4,\alpha}(M)$. *En plus on a*

$$\|u\|_{C^4(M)} \leq C \left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^0(M)} \right)$$

où $C = C(M, g, K)$ et

$$\|a\|_{C^{k+1}(M)} + \|A\|_{C^{k+2}(M)} \leq K.$$

Théorème 1.5 *[29] Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et soit k un entier positif tel que $n > 2k$. Soit encore $f \in C^{0,\theta}(\Omega_M)$ où Ω_M un domaine régulier dans M, $\theta \in (0, 1)$. Si $u \in H^2_{k,0}(\Omega_M)$ est une solution faible de*

$$\begin{cases} \Delta_g^k u + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \dots j_1} \left(A_{(l) i_1 \dots i_l j_1 \dots j_l} \nabla^{i_1 \dots i_l} u \right) = f |u|^{2^\sharp - 2} u & \text{dans } \Omega_M \\ D^\alpha = 0 & \text{sur } \partial\Omega_M \text{ pour } |\alpha| \leq k-1 \end{cases}$$

alors $u \in C^{2k,\alpha}(\Omega_M)$.

1.1.12 Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Très souvent, trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles revient à minimiser une fonctionnelle sur un ensemble de contraintes. On rappellera le théorème du multiplicateurs de Lagrange qui est un résultat très important dans ce contexte.

Théorème 1.6 *[24] Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E ; $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω et $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur Ω de composantes $\phi_1, ..., \phi_n$. Étant donné a un point de $\mathbb{R}^n$, on pose $H = \phi^{-1}(a)$ que l'on suppose non vide ; si en un point x_0 de H*

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x) \tag{1.4}$$

et si de plus $D\phi(x_0) \in L(E, \mathbb{R}^n)$ est surjective, alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ pour lesquels

$$Df(x_0) = \lambda_1 D\phi_1(x_0) + ... + \lambda_n D\phi_n(x_0).$$

Cette relation est l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème de minimisation considéré par (1.4), les λ_i sont les coefficients de Lagrange .

Chapitre 2

Solutions nodales pour un problème de type Paneitz-Branson

2.1 Introduction

Dans [26], Holcman a montré l'existence de solutions nodales d'un problème elliptique contenant l'opérateur du Laplacien conforme. L'objectif de ce chapitre consiste à faire une étude similaire pour montrer l'existence de solutions nodales d'un problème elliptique du quatrième ordre contenant l'opérateur de type *Paneitz-Branson.* Plus précisément, soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$ à bord $\partial M \neq \emptyset$. On se donne A un tenseur régulier deux fois covariants et $a \in C^{\infty}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $f \in C^{\infty}(M)$, ϕ_1 et $\phi_2 \in C^{\infty}(\partial M)$. Nous montrons l'existence de solutions qui changent de signes du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} P_g u = \lambda f |u|^{2^\sharp - 2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1, \partial_\nu u = \phi_2 & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$P_g := \Delta_g^2 - div_g\left(A (\nabla .)^{\#}\right) + a$$

est l'opérateur de type *Paneitz-Branson* et $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique de Sobolev. L'origine de ce problème vient du problème de la Q-courbure prescrite qui a intéressé de nombreux auteurs ces dernières années, [5], [8], [9], [10] [13], [11], [14], [15],[16], [17], [12].

Le résultat principal de ce chapitre est dans le théorème suivant

Théorème 2.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne à bord de dimension $n \geq 6$, A un $(0,2)$-tenseur régulier, symétrique, $a \in C^{\infty}(M)$ et f une fonction positive de classe C^{∞} sur M et x_0 un point de l'intérieur de M avec $f(x_0) = \max_{\overset{\circ}{M}} f$. On suppose que l'opérateur*

$$P_g = \Delta_g^2 - div_g\left(A(\nabla.)^{\#}\right) + a$$

est coercif et

$$8(n-1)\,Tr_g A(x_0) + (n-6)(n-4)(n+2)\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} - 4\left(n^2 - 2n - 4\right)R_g(x_0) < 0.$$

Alors il existe un réel positif λ et une solution non triviale $u = w + h \in H_2^2(M) \cap C^4(M)$ solution de l'équation (2.1)
où w minimise la fonctionnelle I définie sur $H_{2,0}^2(M)$ par

$$I(w) = \int_M \left(\left(\Delta_g w\right)^2 + A\left((\nabla w)^{\#}, (\nabla w)^{\#}\right) + aw^2\right) dv_g$$

sous la contrainte $\int_M f\,|w+h|^{2^{\#}}\,dv_g = \gamma$, et h est l'unique solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} \Delta_g^2 h - div_g\left(A(\nabla h)^{\#}\right) + ah = 0 & dans\ M \\ h = \phi_1,\ \partial_\nu h = \phi_2 & sur\ \partial M \end{cases}$$

où ϕ_1, ϕ_2 sont deux fonctions régulières sur ∂M.
Enfin, cette solution est nodale si la donnée au bord ϕ_1 change de signe.

La démonstration du théorème 2.1 est constituée de plusieurs étapes :

1. Nous commençons par construire, en utilisant l'approche variationnelle développée par Yamabe [40], une suite de solutions minimisantes aux équations du type (2.1) avec l'exposant sous-critique.
2. Nous étudions le comportement de cette suite lorsque l'exposant sous-critique tend vers l'exposant critique ; plus précisément, nous montrons que cette suite converge faiblement vers une solution de l'équation critique (2.1) quand l'exposant sous-critique tend vers l'exposant critique.

3. Ensuite, nous montrons que sous certaine condition géométrique, la solution de l'équation critique n'est pas triviale.
4. Enfin, Nous utilisons des fonctions tests pour évaluer la condition géométrique.

2.2 Solutions sous-critiques

Dans ce paragraphe, nous montrons l'existence de solutions de l'équation sous-critique associée à l'équation (2.1). Il s'agit de la famille d'équations

$$\begin{cases} P_g u = \lambda f \left|u\right|^{q-2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1,\, \partial_\nu u = \phi_2 & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{2.2}$$

où $q \in \left(2, 2^\sharp\right)$ est l'exposant sous-critique.

2.2.1 Extension des données au bord

Nous commençons par étendre les données au bord par l'unique fonction régulière h définie sur tout M, par

$$\begin{cases} P_g h = 0 & \text{dans } M \\ h = \phi_1,\, \partial_\nu h = \phi_2 & \text{sur } \partial M \end{cases} . \tag{2.3}$$

Lemme 2.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 5$. On suppose que l'opérateur*

$$P_g := \Delta_g^2 - div_g \left(A \left(\nabla .\right)^\#\right) + a$$

est coercif. Alors il existe une unique solution $h \in C^{4,\alpha}(M)$, $\alpha \in (0, 1)$, de l'équation (2.3).

Preuve. Comme l'opérateur P_g est coercif et l'équation (2.3) est linéaire, alors on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, pour assurer l'existence et l'unicité de h. Il suit du résultat de régularité énoncé au théorème 1.4 que $h \in C^{4,\alpha}(M)$ pour $\alpha \in (0, 1)$. ■

Remarque 2.1 *À partir du lemme précédent, on peut dire que la résolution de l'équation* (*2.1*) *est équivalente à la résolution de l'équation du type*

$$\begin{cases} P_g w = \lambda f \left| w + h \right|^{2^\sharp - 2} (w + h) & \text{dans } M \\ w = \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases} . \tag{2.4}$$

2.2.2 Construction des solutions sous-critiques

Sur une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 5$, on considère

1. Pour $2 < q < 2^\sharp$, le problème sous-critique associé à l'équation (2.4).

$$\begin{cases} P_g w = \lambda f \left| w + h \right|^{q-2} (w + h) & \text{dans } M \\ w = \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{2.5}$$

2. L'espace de Sobolev $H_{2,0}^2(M)$ muni de la norme

$$\|u\|^2_{H_{2,0}^2(M)} = \left\|\Delta_g u\right\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2$$

3. La fonctionnelle I associée à l'équation (2.5) définie sur l'espace $H_{2,0}^2(M)$ par

$$I(w) = \int_M \left(P_g w\right) w dv_g = \int_M \left(\left(\Delta_g w\right)^2 + A\left((\nabla w)^\#, (\nabla w)^\#\right) + a w^2\right) dv_g. \tag{2.6}$$

4. Le minimum

$$\mu_{\gamma,q} := \inf_{w \in \mathcal{H}_q} I(w)$$

où $\mathcal{H}_q$ est la contrainte

$$\mathcal{H}_q = \left\{ w \in H_{2,0}^2(M) \ / \quad \int_M f \left| w + h \right|^q dv_g = \gamma \right\}$$

avec γ qui vérifie la condition

$$\int_M f \left| h \right|^{2^\sharp} dv_g < \gamma. \tag{2.7}$$

Nous commençons par montrer que la contrainte $\mathcal{H}_q$ n'est pas vide.

Lemme 2.2 *Sous la condition* $\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g < \gamma$*, la contrainte* $\mathcal{H}_q$ *n'est pas vide.*

Preuve. On pose

$$F(t) = \int_M f\,|t\psi_1 + h|^q\,dv_g$$

où ψ_1 une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 du bilaplacien Δ_g^2 définie par

$$\begin{cases} \Delta_g^2\psi_1 = \lambda_1\psi_1 & \text{dans } M \\ \psi_1 = \partial_\nu\psi_1 = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases}.$$

Il est clair que F est continue et qu'elle vérifie

$$F(0) = \int_M f\,|h|^q\,dv_g < \gamma$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty.$$

Par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel $t_q > 0$ tel que

$$F\left(t_q\right) = \int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^q dv_g = \gamma.$$

Ce qui prouve que la fonction $t_q\psi_1 \in \mathcal{H}_q$. ■

Montrons maintenant que le minimum $\mu_{\gamma,q}$ de la fonctionnelle I est atteint par une fonction dans $\mathcal{H}_q$.

Proposition 2.1 *Sous la condition* $\gamma > \int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g$ *et la coercivité de l'opérateur* P_g*, il existe un réel* $\lambda_{\gamma,q}$ *et une fonction* $w_{\gamma,q} \in \mathcal{H}_q$*, solution minimisante du problème (2.5).*

Preuve. Le minimum $\mu_{\gamma,q}$ est fini. En effet, comme le tenseur A est régulier, alors il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^2_{2,0}(M)$

$$\left|\int_M A\left((\nabla u)^{\#}, (\nabla u)^{\#}\right) dv_g\right| \leq C \int_M |\nabla u|^2 \, dv_g. \tag{2.8}$$

D'après une inégalité d'interpolation (Voir Aubin [2], page 93), pour chaque $\eta > 0$ il existe $C(\eta) > 0$ tel que pour tout $u \in H^2_{2,0}(M)$

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \eta \left\|\Delta_g u\right\|_2^2 + C(\eta) \|u\|_2^2. \tag{2.9}$$

En combinant (2.8) avec (2.9), on obtient

$$\left|\int_M A\left((\nabla u)^{\#}, (\nabla u)^{\#}\right) dv_g\right| \leq C(\eta) \left\|\Delta_g u\right\|_2^2 + C'(\eta) \|u\|_2^2. \tag{2.10}$$

De cette dernière inégalité et de l'expression de I, on déduit que

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_M \left(\left(\Delta_g w\right)^2 + A\left((\nabla w)^{\#}, (\nabla w)^{\#}\right) + a w^2\right) dv_g \\ &\geq (1 - C(\eta)) \left\|\Delta_g u\right\|_2^2 - (C'(\eta) + \|a\|_\infty) \|u\|_2^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $\|.\|_\infty$ est la norme du supremum.

D'autre part, de l'inégalité de Hölder, pour tout $u \in \mathcal{H}_q$, on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &\leq \|u+h\|_2^2 + \|h\|_2^2 \\ &\leq Vol_g(M)^{1-\frac{2}{q}} \|u+h\|_q^{\frac{2}{q}} + \|h\|_2^2 \\ &\leq Vol_g(M)^{1-\frac{2}{q}} \left(\min_M f\right)^{-\frac{2}{q}} \gamma^{\frac{2}{q}} + \|h\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2.11), on obtient

$$I(u) \geq (1 - C(\eta)) \left\|\Delta_g u\right\|_2^2 - (C'(\eta) + \|a\|_\infty) \left(Vol_g(M)^{1-\frac{2}{q}} \left(\min_M f\right)^{-\frac{2}{q}} \gamma^{\frac{2}{q}} + \|h\|_2^2\right)$$

On choisit η suffisamment petit, de sorte que $1 - C(\eta) = C_1 > 0$, on trouve ainsi que pour toute fonction $u \in \mathcal{H}_q$

$$I(u) \geq C_1 \left\|\Delta_g u\right\|_2^2 + C_2 \tag{2.13}$$

où C_2 est une constante.

Ce qui entraîne que $\mu_{\gamma,q}$ est fini.

Soit (w_i) une suite minimisante de la fonctionnelle I sur $\mathcal{H}_q$ .i.e

$$\lim_i I(w_i) = \mu_{\gamma,q}$$

Par conséquent, pour i suffisamment grand on a

$$I(w_i) \leq \mu_{\gamma,q} + 1$$

De cette dernière inégalité et de l'inégalité (2.13), on déduit que

$$\left\|\Delta_g w_i\right\|_2^2 \leq \frac{1}{C_1}\left(\mu_{\gamma,q} + 1 - C_2\right). \tag{2.14}$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2.9) et avec (2.12), on conclut que $\|\nabla w_i\|_2^2$ et $\|w_i\|_2^2$ sont bornées. Ce qui prouve que la suite (w_i) est bornée dans $H_{2,0}^2(M)$, qui est un espace réflexif ; ce qui entraîne l'existence d'une fonction $w_{\gamma,q} \in H_{2,0}^2(M)$ et une sous-suite (w_i) encore notée (w_i) telle que

(a) $w_i \rightharpoonup w_{\gamma,q}$ faiblement dans $H_{2,0}^2(M)$

(b) $w_i \to w_{\gamma,q}$ fortement dans $H_1^2(M)$ et dans $L^s(M)$ pour tout $s < 2^\sharp$

(c) $\left\|w_{\gamma,q}\right\|_{H_{2,0}^2} \leq \liminf_i \|w_i\|_{H_{2,0}^2}$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
I\left(w_{\gamma,q}\right) &= \int_M \left(\left(\Delta_g w_{\gamma,q}\right)^2 + A\left(\left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^\#, \left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^\#\right) + a w_{\gamma,q}^2\right) dv_g \\
&\leq \liminf_i \left\|\Delta_g w_i\right\|_2^2 + \lim_i \int_M A\left((\nabla w_i)^\#, (\nabla w_i)^\#\right) dv_g + \lim_i \int_M a w_i^2 dv_g \\
&= \lim_i I(w_i) = \mu_{\gamma,q}
\end{aligned}$$

Comme

$$\int_M f\left|w_{\gamma,q} + h\right|^q dv_g = \lim_i \int_M f|w_i + h|^q dv_g = \gamma$$

on récupère que

$$I\left(w_{\gamma,q}\right) = \mu_{\gamma,q}$$

Il s'ensuit du théorème des multiplicateurs de Lagrange qu'il existe un réel $\lambda_{\gamma,q}$ tel que pour tout $\varphi \in H_{2,0}^2(M)$

$$\begin{aligned}
&\int_M \left(\langle \Delta_g w_{\gamma,q}, \Delta_g \varphi \rangle_g + A\left(\left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^\#, (\nabla\varphi)^\#\right) + a w_{\gamma,q}\varphi\right) dv_g \\
&= \lambda_{\gamma,q} \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) \varphi dv_g
\end{aligned}$$

D'où $w_{\gamma,q}$ est une solution faible de l'équation

$$\begin{cases} \Delta_g^2 w_{\gamma,q} - divA\left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^\# + a w_{\gamma,q} = \lambda_{\gamma,q} f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q} + h\right) & \text{dans } M \\ w_{\gamma,q} = \partial_\nu w_{\gamma,q} = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{2.15}$$

La méthode de bootstrap employée par Yamabe [40] montre que $w_{\gamma,q} \in L^\infty(M)$ et d'après les théorèmes standards de régularité on déduit que $w_{\gamma,q} \in C^{4,\alpha}(M)$ pour un certain $\alpha \in (0, 1)$. ■

2.3 Solutions critiques

Dans cette section, on étudie le comportement de la suite $w_{\gamma,q}$ lorsque q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-4}$. Plus précisément nous voulons montrer que la suite minimisante $w_{\gamma,q}$ converge vers une solution non triviale de l'équation critique (2.4).

Proposition 2.2 *Sous l'hypothèse* $\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g < \gamma$*, la suite des multiplicateurs de Lagrange* $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)$ *est strictement positive et bornée lorsque* q *tend vers* $2^\sharp$*. De plus la suite* $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ *est bornée dans* $H_{2,0}^2(M)$*.*

Preuve. En multipliant l'équation (2.15) par $w_{\gamma,q}$ et en intégrant sur M, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 \leq \mu_{\gamma,q} &= \int_M \left(P_g w_{\gamma,q}\right) w_{\gamma,q} dv_g \\
&= \lambda_{\gamma,q} \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) w_{\gamma,q} dv_g \\
&= \lambda_{\gamma,q} \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right)\left(w_{\gamma,q} + h - h\right) dv_g \\
&= \lambda_{\gamma,q} \left(\gamma - \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) h dv_g\right).
\end{aligned}
$$

Comme l'inégalité stricte $\int_M f |h|^q \, dv_g < \gamma$ reste vraie pour q plus proche de $2^\sharp$ et par l'inégalité de Hölder on a

$$
\int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) h dv_g \leq \gamma^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_M f |h|^q \, dv_g\right)^{\frac{1}{q}} < \gamma \tag{2.16}
$$

ce qui entraine que

$$\lambda_{\gamma,q} \geq 0$$

De plus, on constate facilement que

$$\lambda_{\gamma,q} \neq 0$$

Pour le voir il suffit de remarquer que si $\lambda_{\gamma,q} = 0$, alors

$$w_{\gamma,q} = 0$$

Or $w_{\gamma,q} \in \mathcal{H}_q$ .i.e

$$\gamma = \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^q dv_g = \int_M f |h|^q \, dv_g$$

Ce qui contredit la condition

$$\int_M f |h|^{2^\sharp} dv_g < \gamma.$$

D'où la suite $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)$ est strictement positive.

Montrons maintenant que la suite $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ est bornée dans $H_{2,0}^2(M)$. Pour cela, on considère ψ_1 une fonction propre du bilaplacien Δ_g^2 associée à la première valeur propre λ_1 telle que

$$\begin{cases} \Delta_g^2\psi_1 = \lambda_1\psi_1 & \text{dans } M \\ \psi_1 = \partial_\nu\psi_1 = 0 & \text{sur } \partial M \\ \int_M \psi_1^2 dv_g = 1 \end{cases}$$

On pose

$$F(t,q) = \int_M f\,|t\psi_1 + h|^q\, dv_g$$

Comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 2.2, il existe un réel t_q tel que la fonction $t_q\psi_1 \in \mathcal{H}_q$ i.e.

$$F\left(t_q, q\right) = \int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^q dv_g = \gamma.$$

D'autre part, on montre que $\dfrac{\partial F}{\partial t}\left(t_q, q\right) \neq 0$. Pour cela on raisonne par absurde. Supposons que

$$\frac{\partial F}{\partial t}\left(t_q, q\right) = 0$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} t_q\frac{\partial F}{\partial t}\left(t_q, q\right) &= t_q\int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^{q-2}\left(t_q\psi_1 + h\right)\psi_1 dv_g \\ &= \int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^{q-2}\left(t_q\psi_1 + h\right)\left(t_q\psi_1 + h - h\right)dv_g \\ &= \gamma - \int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^{q-2}\left(t_q\psi_1 + h\right)hdv_g \end{aligned}$$

D'où

$$\gamma = \int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^{q-2}\left(t_q\psi_1 + h\right)hdv_g. \tag{2.17}$$

De l'inégalité de Hölder et la condition $\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g < \gamma$, on pourra déduire que

$$\int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^{q-2}\left(t_q\psi_1 + h\right)h dv_g \leq \left(\int_M f\left|t_q\psi_1 + h\right|^q dv_g\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f\,|h|^q\,dv_g\right)^{\frac{1}{q}} < \gamma.$$

Ce qui contredit (2.17). D'où $\frac{\partial F}{\partial t}\left(t_q, q\right) \neq 0$.

Le théorème des fonctions implicites assure alors la continuité de t_q par rapport à q, ce qui montre l'existence d'une constante $C(\gamma)$ indépendante de q telle que

$$\int_M \left(P_g w_{\gamma,q}\right) w_{\gamma,q} dv_g \leq I\left(t_q\psi_1\right) = t_q^2 I\left(\psi_1\right) \leq C(\gamma). \tag{2.18}$$

En outre d'après la coercivité de l'opérateur P_g et de cette dernière inégalité, la suite $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ est bornée dans $H_{2,0}^2(M)$ lorsque q tend vers $2^\sharp$.

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite de $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ encore noté $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$, telle que

(a) $w_{\gamma,q} \rightharpoonup w$ faiblement dans $H_{2,0}^2(M)$ lorsque $q \to 2^\sharp$

(b) $w_{\gamma,q} \to w$ fortement $H_1^2(M)$ et $L^s(M)$ pour tout $s < 2^\sharp$ lorsque $q \to 2^\sharp$

(c) $w_{\gamma,q} \to w$ presque partout sur M lorsque $q \to 2^\sharp$.

Il nous reste à montrer que la suite des multiplicateurs de Lagrange $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)_q$ est bornée lorsque q tend vers $2^\sharp$.

De l'inégalité (2.16), on peut écrire

$$\gamma - \int_M f\left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q} + h\right)h dv_g \geq \gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f\,|h|^q\,dv_g\right)^{\frac{1}{q}}$$

En combinant cette dernière inégalité avec l'inégalité (2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
0 < \lambda_{\gamma,q} &= \frac{\int_M \left(P_g w_{\gamma,q}\right) w_{\gamma,q} dv_g}{\int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) w_{\gamma,q} dv_g} \\
&= \frac{\int_M \left(P_g w_{\gamma,q}\right) w_{\gamma,q} dv_g}{\gamma - \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) h dv_g} \\
&\leq \frac{I\left(t_q \psi_1\right)}{\gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_M f \left|h\right|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \frac{t_q^2 I\left(\psi_1\right)}{\gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_M f \left|h\right|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq C\left(\gamma, h\right).
\end{aligned}$$

où $C(\gamma, h)$ est une constante qui ne dépend pas de q.

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite de $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)_q$ encore noté $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)_q$ qui converge vers un réel λ.

En passant à la limite dans l'équation (2.15), on obtient facilement que w est solution faible de l'équation critique (2.4).

De plus, les résultats de régularité obtenus par Esposito-Robert ([17] et Djadli-Hebey-Ledoux [14] (inspirés par le travail de Van Der Vorst [39]) restent valables pour notre cas, cela signifie que $w_{\gamma,q} \in C^{4,\alpha}(M)$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$. ■

Remarque 2.2 – *Si on pose $u = w + h$. Il est clair que si les données au bord $(\phi_1, \phi_2) \not\equiv (0,0)$, alors la fonction $u \not\equiv 0$ est une solution non triviale de l'équation*

$$\begin{cases} P_g u = \lambda f \left|u\right|^{2^\sharp - 2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1 \text{ et } \partial_\nu u = \phi_2 & \text{sur } \partial M \end{cases}. \tag{2.19}$$

– *Si $(\phi_1, \phi_2) \equiv (0,0)$, alors $h \equiv 0$ i.e. $u = w$. Dans ce cas on veut savoir sous quelle condition la fonction $u = w$ va être solution non triviale de l'équation (2.19). C'est l'objet de la proposition suivante.*

Proposition 2.3 *Soit w la limite faible de la suite minimisante $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$. On pose $\mu = \lim_q \mu_{\gamma,q}$. Si la condition suivante est vérifiée*

$$K_0 f(x_0)^{\frac{2}{2^\sharp}} \frac{\mu}{\gamma^{\frac{2}{2^\sharp}}} < 1 \tag{2.20}$$

où $f(x_0) = \max_M f(x)$

Alors w est une solution non triviale de l'équation (2.19).

Preuve. En utilisant l'inégalité de Hölder, on peut écrire que

$$\gamma^{\frac{2}{q}} = \left(\int_M f\left|w_{\gamma,q}\right|^q dv_g\right)^{\frac{2}{q}} \leq f(x_0)^{\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\sharp}} \left(\int_M \left|w_{\gamma,q}\right|^{2^\sharp}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}$$

Par conséquent

$$\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} \leq \left(\int_M \left|w_{\gamma,q}\right|^{2^\sharp}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}$$

En vertu du lemme 1.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} \\
&\quad\leq \left(\int_M \left|w_{\gamma,q}\right|^{2^\sharp}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \\
&\quad\leq (K_0+\varepsilon)\left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2 + B_\varepsilon \left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2 \\
&\quad\leq (K_0+\varepsilon)\left[(1+\bar{\eta})\left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2 - \bar{\eta}\left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2\right] + B_\varepsilon \left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2
\end{aligned}$$

où $\bar{\eta}$ est une constante assez petite.

Or

$$\left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2 = \mu_{\gamma,q} - \int_M \left(A\left(\left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^\#, \left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^\#\right) + a w_{\gamma,q}^2\right) dv_g$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} \\
&\qquad \leq \quad (K_0+\varepsilon)\left\{(1+\bar{\eta})\left[\mu_{\gamma,q} - \int_M \left(A\left(\left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^{\#}, \left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^{\#}\right) + a w_{\gamma,q}^2\right) dv_g\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\bar{\eta}\left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2\right\} + B_\varepsilon \left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Comme le tenseur A est régulier, alors pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C(\eta) > 0$ telle que

$$\left|\int_M A\left(\left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^{\#}, \left(\nabla w_{\gamma,q}\right)^{\#}\right) dv_g\right| \leq \eta \left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2 + C(\eta)\left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2 \tag{2.22}$$

En combinant (2.21) et (2.22), on obtient immédiatement que

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} - (K_0+\varepsilon)(1+\bar{\eta})\mu_{\gamma,q} \\
&\leq \quad (K_0+\varepsilon)\left\{(1+\bar{\eta})\left[\eta\left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2 + C(\eta)\left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2 + \|a\|_\infty \left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2\right] - \bar{\eta}\left\|\Delta_g w_{\gamma,q}\right\|_2^2\right\} \\
&\quad +B_\varepsilon \left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

On prend $\bar{\eta} = \dfrac{\eta}{1-\eta}$ avec $\eta > 0$, par suite, l'inégalité (2.23) devient

$$\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} - (K_0+\varepsilon)(1+\bar{\eta})\mu_{\gamma,q} \leq C(\varepsilon,\bar{\eta})\left\|w_{\gamma,q}\right\|_2^2 . \tag{2.24}$$

En passant à la limite dans (2.24), en choisissant $\varepsilon, \bar{\eta}$ assez petites et compte tenue de

$$K_0 f(x_0)^{\frac{2}{2^\sharp}} \frac{\mu}{\gamma^{\frac{2}{2^\sharp}}} < 1$$

on déduit finalement que

$$\|w\|_2^2 \geq C' > 0$$

Ce qui montre que

$$w \neq 0.$$

■

Remarque 2.3 *Si les données au bord du problème (2.19) ne sont pas toutes nulles, il n'y a pas d'obstruction à l'existence de solutions. Sinon, si les données sont toutes nulles la solution peut ne pas exister, comme le montre la proposition suivante dans le cas Euclidien.*

Proposition 2.4 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 4)$ un domaine régulier, étoilé et borné et f une fonction régulière sur Ω telle que $(x.\nabla f) < 0$. Alors le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \triangle^2 u = f\,|u|^{2^\sharp - 2}\,u & \text{dans } \Omega \\ u = |\nabla w| = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

n'admet que la solution triviale.

Preuve. En suivant les mêmes étapes de la preuve du théorème 7.27 page 250 dans [19], nous obtenons l'identité de Pohozaev suivante

$$\int_{\partial\Omega} (\triangle u)^2\,(x.\nu)\,d\sigma = \frac{n-4}{n}\int_{\Omega} (x.\nabla f)\,|u|^{2^\sharp}\,dx \tag{2.25}$$

où ν désigne le champ de vecteur normal extérieur sur $\partial\Omega$. Sans perte de généralité, on pourra supposer que Ω est un domaine étoilé par rapport à l'origine 0 i.e. $x.\nu > 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit de l'égalité (2.25) que $u \equiv 0$. ■

2.4 Fonctions tests

L'objet de cette section est de montrer que sous les hypothèses du théorème 2.1, la condition géométrique (2.20) de la proposition énoncée précédemment est vérifiée. Pour cela on introduit les fonctions radiales définies sur une variété riemannienne (M, g) compacte à bord de dimension $n \geq 6$ définies comme suit

$$u_\varepsilon(r) = \frac{\eta(r)}{(r^2 + \varepsilon^2)^{\frac{n-4}{2}}}$$

où $r = d(x_0, x)$ est la distance géodésique au point x_0 telle que $r < d$ (d est le rayon d'injectivité de la variété M) et η une fonction de classe C^∞ égale à 1 sur $B(x_0, \delta)$ et 0 sur $M - B(x_0, 2\delta)$ où $B(x_0, \delta)$ est la boule géodésique de centre x_0 et de rayon δ tel que $(2\delta < d)$.

On veut évaluer les deux quantités

$$\begin{cases} \mu_\varepsilon = & \int_M \left(\left(\Delta_g u_\varepsilon \right)^2 + A^{\#}(du_\varepsilon, du_\varepsilon) + a u_\varepsilon^2 \right) dv_g \\ \gamma_\varepsilon = & \int_M f \left| u_\varepsilon \right|^{2^\sharp} dv_g \end{cases}$$

pour montrer que le quotient

$$Q_\varepsilon = K_0 f(x_0)^{\frac{2}{2^\sharp}} \frac{\mu_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon^{\frac{2}{2^\sharp}}} \tag{2.26}$$

est plus petit que 1.

Pour faire les calculs, nous utilisons les résultats suivants (voir Aubin [1].

Soient (M, g) une variété riemannienne et $\left(x^1, ..., x^n\right)$ un système de coordonnées géodésiques centré en $x_0 \in M$. Soit $S(r)$ l'ensemble des points situés à une distance r de x_0 ($r < d$ le rayon d'injectivité) posons :

$$G(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S(r)} \sqrt{|g|} d\Omega$$

où ω_{n-1} étant le volume de la sphère unité $S^{n-1}(1)$ de dimension $(n-1)$, $d\Omega$ l'élément de volume riemannien et $|g|$ le déterminant de la métrique g.

Lemme 2.3 *[1] Un développement limité de* $\sqrt{|g|}$ *au voisinage de* $r = 0$ *est donné*

$$\sqrt{|g|} = 1 - \frac{1}{6} R_{ij} x^i x^j + o\left(r^2\right). \tag{2.27}$$

où R_{ij} *les coordonnées de la courbure de Ricci.*

Lemme 2.4 *[1] Un développement limité de* $G(r)$ *au voisinage de* $r = 0$ *est donné*

$$G(r) = 1 - \frac{R(x_0)}{6n} r^2 + o\left(r^2\right). \tag{2.28}$$

où R *la courbure scalaire.*

Lemme 2.5 *[1] Soient p, q deux réels positifs. Posons pour $p-q>1$*

$$I_p^q = \int_0^\infty \frac{t^q}{(1+t)^p} dt$$

Alors

$$I_{p+1}^q = \frac{p-q-1}{p} I_p^q, \quad I_{p+1}^{q+1} = \frac{q+1}{p-q-1} I_{p+1}^q.$$

2.4.1 Développement limité de μ_ε et γ_ε pour $n>6$

Nous commençons par écrire

$$\begin{aligned}
\mu_\varepsilon &= \int_{B(x_0,\delta)} \left(\left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 + A^\# \left(du_\varepsilon, du_\varepsilon\right) + a u_\varepsilon^2 \right) dv_g + \\
&\quad \int_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)} \left(\left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 + A^\# \left(du_\varepsilon, du_\varepsilon\right) + a u_\varepsilon^2 \right) dv_g \\
\gamma_\varepsilon &= \int_{B(x_0,\delta)} f \left|u_\varepsilon\right|^{2^\sharp} dv_g + \int_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)} f \left|u_\varepsilon\right|^{2^\sharp} dv_g
\end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous faisons le développement limité des différents termes de μ_ε sur la boule $B(x_0,\delta)$. Pour cela nous reprenons les calculs qui sont utilisés dans [11] et [17].

Pour le calcul de

$$\int_{B(x_0,\delta)} \left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 dv_g \tag{2.29}$$

on rappelle d'abord l'expression radiale du laplacien

$$\begin{aligned}
-\Delta_g u_\varepsilon(r) &= u_\varepsilon''(r) + u_\varepsilon'(r) \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{|g|} \right) \\
&= (4-n) \left(\frac{n\varepsilon^2 + 2r^2}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{r}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{|g|} \right)
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(x_0,\delta)} \left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 dv_g \\
&= \int_0^\delta \left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 r^{n-1} \left(\int_{S(r)} \sqrt{|g|} d\Omega\right) dr \\
&= \omega_{n-1} (n-4)^2 \int_0^\delta \left(\frac{n\varepsilon^2 + 2r^2}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{r}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{|g|}\right)^2 r^{n-1} \left(1 - \frac{R(x_0)}{6n} r^2 + o\left(r^2\right)\right) dr \\
&= \omega_{n-1} (n-4)^2 \int_0^\delta \left(\frac{\left(n\varepsilon^2 + 2r^2\right)^2 r^{n-1}}{(\varepsilon^2 + r^2)^n} + \frac{r^{n+1}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{n-2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{|g|}\right)^2 + \frac{2r^n \left(n\varepsilon^2 + 2r^2\right)}{(\varepsilon^2 + r^2)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{|g|}\right) \times \\
&\quad \left(1 - \frac{R(x_0)}{6n} r^2 + o\left(r^2\right)\right) dr
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

En faisant le changement de variable $\left(r = \varepsilon \sqrt{t} \Longrightarrow dr = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}} dt\right)$, pour la première intégrale dans (2.30), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta \frac{\left(n\varepsilon^2+2r^2\right)^2 r^{n-1}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^n} \left(1 - \frac{R(x_0)}{6n} r^2 + o\left(r^2\right)\right) dr \\
&\qquad = \frac{1}{2\varepsilon^{n-4}} \left\{\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{(n-2)}{2}} (n+2t)^2}{\left(1+t\right)^n} dt - \frac{R(x_0)}{6n} \varepsilon^2 \int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}} (n+2t)^2}{\left(1+t\right)^n} dt + o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \\
&\qquad = \frac{1}{2\varepsilon^{n-4}} \left\{n^2 I_n^{\frac{n}{2}-1} + 4n I_n^{\frac{n}{2}} + 4 I_n^{\frac{n}{2}+1}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{R(x_0)}{6n} \varepsilon^2 \left(n^2 I_n^{\frac{n}{2}} + 4n I_n^{\frac{n}{2}+1} + 4 I_n^{\frac{n}{2}+2}\right) + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Comme

$$
I_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{n-2} I_n^{\frac{n}{2}-1}, \quad I_n^{\frac{n}{2}+1} = \frac{n(n+2)}{(n-2)(n-4)} I_n^{\frac{n}{2}-1}, \text{ et } I_n^{\frac{n}{2}+2} = \frac{n(n+2)(n+4)}{(n-2)(n-4)(n-6)} I_n^{\frac{n}{2}-1}
$$

par suite

$$\int_0^\delta \frac{\left(n\varepsilon^2+2r^2\right)^2 r^{n-1}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^n}\left(1-\frac{R(x_0)}{6n}r^2+o\left(r^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon^{n-4}}I_n^{\frac{n}{2}-1}\left\{\frac{n(n+2)(n-2)}{n-4}-\frac{R(x_0)\left(n^2+4\right)}{6(n-6)}\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}.$$

Pour la deuxième intégrale dans (2.30), rappelons que

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g|}=-\frac{R(x_0)}{3n}r+o\left(r^2\right)$$

ce qui donne

$$\int_0^\delta \frac{r^{n+1}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{n-2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g|}\right)^2\left(1-\frac{R(x_0)}{6n}r^2+o\left(r^2\right)\right)dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\delta \frac{r^{n+1}\left(-\frac{R(x_0)}{3n}r+o\left(r^2\right)\right)^2}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{n-2}}\left(1-\frac{R(x_0)}{6n}r^2+o\left(r^2\right)\right)dr\\
&= \left(-\frac{R(x_0)}{3n}\right)^2\int_0^\delta \frac{r^{n+3}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{n-2}}\left(1+o\left(r^2\right)\right)dr\\
&= \frac{1}{2\varepsilon^{n-8}}\frac{R(x_0)^2}{9n^2}\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}\frac{t^{\frac{n}{2}+1}}{(1+t)^{n-2}}\left(1+o\left(\varepsilon^2\right)\right)dt\\
&= \frac{1}{2\varepsilon^{n-8}}\frac{R(x_0)^2}{9n^2}\left\{I_{n-2}^{\frac{n}{2}+1}+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}\\
&= \ =\frac{1}{\varepsilon^{n-4}}o\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned}$$

Pour la dernière intégrale dans (2.30) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta \frac{2r^n\left(n\varepsilon^2+2r^2\right)}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g|}\left(1-\frac{R(x_0)}{6n}r^2+o\left(r^2\right)\right)dr\\
&\quad=\int_0^\delta \frac{2r^n\left(n\varepsilon^2+2r^2\right)}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{n-1}}\left(-\frac{R(x_0)}{3n}r+o\left(r^2\right)\right)\left(1-\frac{R(x_0)}{6n}r^2+o\left(r^2\right)\right)dr\\
&\quad=\left(\frac{-2R(x_0)}{3n}\right)\int_0^\delta \frac{r^{n+1}\left(n\varepsilon^2+2r^2\right)}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{n-1}}\left(1+o\left(r^2\right)\right)dr\\
&\quad=\frac{1}{2\varepsilon^{n-6}}\left(\frac{-2R(x_0)}{3n}\right)\left\{\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}\frac{t^{\frac{n}{2}}(n+2t)}{(1+t)^{n-1}}dt+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}\\
&\quad=-\frac{R(x_0)}{3n\varepsilon^{n-6}}\left\{nI_{n-1}^{\frac{n}{2}}+2I_{n-1}^{\frac{n}{2}+1}+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Comme

$$
I_{n-1}^{\frac{n}{2}}=\frac{2n(n-1)}{(n-2)(n-4)}I_n^{\frac{n}{2}-1}\quad\text{et}\quad I_{n-1}^{\frac{n}{2}+1}=\frac{2n(n-1)(n+2)}{(n-2)(n-4)(n-6)}I_n^{\frac{n}{2}-1}
$$

par suite

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\delta \frac{2r^n\left(n\varepsilon^2+2r^2\right)}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{|g|}\left(1-\frac{R(x_0)}{6n}r^2+o\left(r^2\right)\right)dr\\
&\qquad=-\frac{R(x_0)}{3n\varepsilon^{n-4}}I_n^{\frac{n}{2}-1}\left\{\frac{2n(n-1)(n-2)}{(n-4)(n-6)}\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

En regroupant les différents termes de (2.30), pour $n>6$, nous obtenons

$$
\int_{B(x_0,\delta)}\left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2dv_g=\frac{(n-4)\,\omega_{n-1}I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2\varepsilon^{n-4}}\left\{n\left(n^2-4\right)-\frac{n\left(n^2+4n-20\right)}{6(n-6)}R(x_0)\,\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}. \tag{2.31}
$$

Calculons maintenant le développement limité du second terme de $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)}$

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\delta)} A^{\#}(du_\varepsilon, du_\varepsilon)\, dv_g &= \int_0^\delta \left(r^{n-1} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} \right)^2 \left(\int_{S(r)} A^{ij}(x_0)\, x^i x^j \sqrt{|g|} d\Omega \right) \right) dr \\
&= \int_0^\delta \left\{ r^{n-1} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} \right)^2 \left(\int_{S(r)} \left(A^{ij}(x_0)\, x^i x^j + o\left(r^2\right) \right) d\Omega \right) \right\} dr \\
&= \frac{\omega_{n-1} Tr_g A(x_0)}{n} (n-2)^2 \int_0^\delta \frac{r^{n+1}}{\left(r^2+\varepsilon^2\right)^{n-2}} dr \\
&= \frac{\omega_{n-1} Tr_g A(x_0)}{2n\varepsilon^{n-6}} (n-2)^2 \left\{ \int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1+t)^{n-2}} dt + o\left(\varepsilon^2\right) \right\} \\
&= \frac{\omega_{n-1} Tr_g A(x_0)}{2n\varepsilon^{n-6}} (n-2)^2 \left\{ I_{n-2}^{\frac{n}{2}} + o\left(\varepsilon^2\right) \right\}.
\end{aligned}$$

où $Tr_g A$ est la trace de A. En coordonnées locales on a

$$Tr_g A = g_{ij} A^{ij} = g^{ij} A_{ij}$$

Comme

$$I_{n-2}^{\frac{n}{2}} = \frac{4n(n-1)}{(n-4)(n-6)} I_n^{\frac{n}{2}-1}$$

ce qui donne pour $n > 6$

$$\int_{B(x_0,\delta)} A^{\#}(du_\varepsilon, du_\varepsilon)\, dv_g = \frac{(n-4)\,\omega_{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1}}{2\varepsilon^{n-4}} \left\{ \frac{4(n-1)}{n-6} Tr_g A(x_0)\, \varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right) \right\}. \quad (2.32)$$

Pour le troisième terme de $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)}$

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x_0,\delta)} au_\varepsilon^2 dv_g \\
&= \int_0^\delta u_\varepsilon^2 r^{n-1}\left(\int_{S(r)} a\sqrt{|g|}d\Omega\right)dr \\
&= \omega_{n-1}\int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{(r^2+\varepsilon^2)^{n-4}}\left\{a(x_0)-\left(\frac{\Delta a(x_0)}{2n}+\frac{a(x_0)}{6n}R(x_0)\right)r^2+o\left(r^2\right)\right\}dr \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{n-8}}\left\{a(x_0)\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}\frac{t^{\frac{n}{2}}}{(t+1)^{n-4}}dt-\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}\frac{t^{\frac{n}{2}+1}}{(t+1)^{n-4}}dt\left(\frac{\Delta a(x_0)}{2n}+\frac{a(x_0)}{6n}R(x_0)\right)\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{n-8}}\left\{a(x_0)I_{n-4}^{\frac{n}{2}}-\left(\frac{\Delta a(x_0)}{2n}+\frac{a(x_0)}{6n}R(x_0)\right)I_{n-4}^{\frac{n}{2}+1}\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_{B(x_0,\delta)} au_\varepsilon^2 dv_g = \frac{1}{\varepsilon^{n-4}}o\left(\varepsilon^2\right). \tag{2.33}$$

En regroupant les relations (2.31), (2.32) et (2.33), on obtient finalement

$$\begin{aligned}
&\mu_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)} \\
&= \int_{B(x_0,\delta)}\left(\left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2+A^\#(du_\varepsilon,du_\varepsilon)+au_\varepsilon^2\right)dv_g \\
&= \frac{n(n-4)\left(n^2-4\right)\omega_n}{2^n\varepsilon^{n-4}}\times \\
&\quad\left\{1+\frac{1}{n(n^2-4)(n-6)}\left(4Tr_gA(x_0)(n-1)-\frac{n\left(n^2+4n-20\right)}{6}R(x_0)\right)\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}
\end{aligned}$$

où

$$\omega_n = 2^{n-1}I_n^{\frac{n}{2}-1}\omega_{n-1}.$$

Il nous reste à calculer l'intégrale $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)}$

On peut vérifier facilement que toutes les intégrales de $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)}$, sont de la forme

$$\left(C_1+C_2\varepsilon^2\right)\left|\int_{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}^{\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right)^2}\frac{t^q}{(1+t)^p}dt\right|$$

elles sont majorées par

$$\frac{\left(C_1 + C_2\varepsilon^2\right)}{p-q-1}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2(p-q-1)}$$

qui ne perturbent pas nos développements limités pour $n > 6$.
Par conséquent le développement limité de μ_ε pour $n > 6$, est le suivant

$$\begin{aligned}
&\mu_\varepsilon \\
= \quad & \frac{n(n-4)\left(n^2-4\right)\omega_n}{2^n\varepsilon^{n-4}}\times \\
& \left\{1 + \frac{1}{n(n^2-4)(n-6)}\left(4Tr_g A(x_0)(n-1) - \frac{n\left(n^2+4n-20\right)}{6}R(x_0)\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Calculons maintenant le développement de $\gamma_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)}$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)} &= \int_{B(x_0,\delta)} f\,|u_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g \\
&= \int_0^\delta u_\varepsilon^{2^\sharp} r^{n-1}\left(\int_{S(r)} f\sqrt{|g|}d\Omega\right)dr \\
&= \omega_{n-1}\int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{(r^2+\varepsilon^2)^n}\left(f(x_0) - \left(\frac{\Delta f(x_0)}{2n} + \frac{f(x_0)}{6n}R(x_0)\right)r^2 + o\left(r^2\right)\right)dr \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{2\varepsilon^n}\left\{f(x_0)\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}\frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{(t+1)^n}dt - \left(\frac{\Delta f(x_0)}{2n} + \frac{f(x_0)}{6n}R(x_0)\right)\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}\frac{t^{\frac{n}{2}}}{(t+1)^n}dt + o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{2\varepsilon^n}\left\{I_n^{\frac{n}{2}-1}f(x_0) - I_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{2n} + \frac{f(x_0)}{6n}R(x_0)\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Or

$$I_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{(n-2)}I_n^{\frac{n}{2}-1} \quad \text{et} \quad \omega_n = 2^{n-1}I_n^{\frac{n}{2}-1}\omega_{n-1}$$

ce qui donne pour $n > 6$

$$\gamma_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)} = \frac{f(x_0)\,\omega_n}{2^n\varepsilon^n}\left\{1 - \frac{1}{6(n-2)}\left(R(x_0) + \frac{3\Delta f(x_0)}{f(x_0)}\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}.$$

Il nous reste à calculer l'intégrale $\gamma_\varepsilon|_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)}$. Rappelons que les intégrales de $\gamma_\varepsilon|_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)}$ sont de type

$$\left(C_1 + C_2\varepsilon^2\right)\left|\int_{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}^{\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^q}{(1+t)^p}dt\right|$$

et sont majorées par

$$\frac{\left(C_1 + C_2\varepsilon^2\right)}{p-q-1}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2(p-q-1)}$$

qui ne perturbent pas nos développements limités pour $n > 6$.
Par conséquent le développoment limité de γ_ε pour $n > 6$ est donné par

$$\gamma_\varepsilon = \frac{f(x_0)\,\omega_n}{2^n\varepsilon^n}\left\{1 - \frac{1}{6(n-2)}\left(R(x_0) + \frac{3\Delta f(x_0)}{f(x_0)}\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}. \tag{2.35}$$

2.4.2 Développement limité de Q_ε pour $n > 6$

Déterminons maintenant le développement limité du quotient Q_ε pour $n > 6$ où

$$Q_\varepsilon = K_0 f(x_0)^{\frac{2}{2^\sharp}}\frac{\mu_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

Pour cela on a besoin du développement limité du dénominateur de Q_ε. De l'égalité (2.35) on aura

$$\begin{aligned}
\gamma_\varepsilon^{\frac{2}{2^\sharp}} &= \frac{f(x_0)\,\omega_n}{2^n\varepsilon^n}\left\{1 - \frac{1}{6(n-2)}\left(R(x_0) + \frac{3\Delta f(x_0)}{f(x_0)}\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \\
&= \frac{(f(x_0))^{\frac{2}{2^\sharp}}\,\omega_n^{\frac{2}{2^\sharp}}}{2^{n-4}\varepsilon^{n-4}}\left\{1 - \frac{1}{6(n-2)}\left(R(x_0) + \frac{3\Delta f(x_0)}{f(x_0)}\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}^{\frac{n-4}{n}} \\
&= \frac{(f(x_0))^{\frac{2}{2^\sharp}}\,\omega_n^{\frac{2}{2^\sharp}}}{2^{n-4}\varepsilon^{n-4}}\left\{1 - \frac{(n-4)}{6n(n-2)}\left(R(x_0) + \frac{3\Delta f(x_0)}{f(x_0)}\right)\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}.
\end{aligned}$$

par suite

$$\frac{1}{\gamma_\varepsilon^{\frac{2}{2^\sharp}}} = \frac{(f(x_0))^{-\frac{2}{2^\sharp}}\omega_n^{-\frac{2}{2^\sharp}}}{2^{4-n}\varepsilon^{4-n}}\left\{1+\frac{(n-4)}{6n(n-2)}\left(R(x_0)+\frac{3\Delta f(x_0)}{f(x_0)}\right)\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}. \tag{2.36}$$

En vertu de l'expression de Q_ε et les deux égalités (2.34), (2.36) et comme

$$\frac{1}{K_0} = \frac{n(n-4)\left(n^2-4\right)\omega_n^{\frac{4}{n}}}{16}$$

le développement limite de Q_ε pour $n > 6$ est donné par

$$\begin{aligned} &Q_\varepsilon \\ &= K_0 f(x_0)^{\frac{2}{2^\sharp}}\frac{\mu_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon^{\frac{2}{2^\sharp}}} \\ &= \left\{1+\tfrac{1}{2n\left(n^2-4\right)(n-6)}\times\right. \\ &\quad \left.\left((n+2)(n-4)(n-6)\tfrac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}+8(n-1)Tr_gA(x_0)-4\left(n^2-2n-4\right)R(x_0)\right)\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \end{aligned}$$

Il est clair que si

$$(n+2)(n-4)(n-6)\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}+8(n-1)Tr_gA(x_0)-4\left(n^2-2n-4\right)R(x_0) < 0$$

alors le quotient Q_ε est plus petit que 1.

2.4.3 Développement limité de μ_ε et γ_ε pour $n = 6$

Dans ce cas particulier, le développement limité de γ_ε est donné par la formule (2.35), donc il nous reste à calculer le développement de μ_ε. Nous reprenons les calculs utilisés dans ([17] et [3]).

Nous commençons par les développements des différents termes de $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)}$. De l'égalité (2.30) on obtient facilement que

$$\int_{B(x_0,\delta)}\left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 dv_g = \frac{(n-4)^2\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{n-4}}\left\{A+B+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}$$

avec

$$A = \frac{n\left(n^2-4\right)}{n-4} I_n^{\frac{n}{2}-1} - \frac{R}{6n}\varepsilon^2\left(n^2 I_n^{\frac{n}{2}} + 4n I_n^{\frac{n}{2}+1} + 4\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}+2}}{(1+t)^n}dt\right)$$

$$B = -\frac{2R}{3n}\varepsilon^2\left(n I_{n-1}^{\frac{n}{2}} + 2\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}+1}}{(1+t)^{n-1}}dt\right)$$

Comme $n = 6$ et si on fait le changement de variable

$$y = 1 + t$$

on pourra déduire immédiatement que

$$\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}+2}}{(1+t)^n}dt \sim \log\frac{1}{\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}+1}}{(1+t)^{n-1}}dt \sim \log\frac{1}{\varepsilon^2}$$

par suite

$$A = \frac{n\left(n^2-4\right)}{n-4} I_n^{\frac{n}{2}-1} - \frac{2R}{3n}\varepsilon^2 \log\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$B = -\frac{4R}{3n}\varepsilon^2 \log\frac{1}{\varepsilon^2}$$

ce qui donne

$$\int_{B(x_0,\delta)} \left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 dv_g = \frac{(n-4)^2\,\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{n-4}}\left\{\frac{n\left(n^2-4\right)}{n-4} I_n^{\frac{n}{2}-1} - \frac{2}{n}R(x_0)\,\varepsilon^2 \ln\frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \tag{2.37}$$

Pour le second terme de $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)}$ on a

$$\int_{B(x_0,\delta)} A^{\#}(du_\varepsilon, du_\varepsilon)\,dv_g == \frac{\omega_{n-1} Tr_g A(x_0)}{2n\varepsilon^{n-6}}(n-2)^2\left\{\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1+t)^{n-2}}dt + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}$$

on fait le changement de variable

$$y = 1 + t$$

ce qui permet d'écrire

$$\int_0^{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1+t)^{n-2}} dt \sim \log \frac{1}{\varepsilon^2}$$

par conséquent

$$\int_{B(x_0,\delta)} A^{\#}(du_\varepsilon, du_\varepsilon)\, dv_g = \frac{(n-4)^2\,\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{n-4}} \left(\frac{Tr_g A(x_0)}{n} \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\varepsilon^2\right) \right) \tag{2.38}$$

Le développement du troisième terme de $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)}$ est identique au cas $n \geq 6$ .i.e

$$\int_{B(x_0,\delta)} a u_\varepsilon^2 dv_g = \frac{1}{\varepsilon^{n-4}} O(\varepsilon^4) \tag{2.39}$$

En regroupant les égalités (2.37), (2.38) et (2.39), nous trouvons que

$$\begin{aligned} &\mu_\varepsilon|_{B(x_0,\delta)} \\ &= \int_{B(x_0,\delta)} \left(\left(\Delta_g u_\varepsilon\right)^2 + A^{\#}(du_\varepsilon, du_\varepsilon) + a u_\varepsilon^2 \right) dv_g \\ &= \frac{n(n-4)\left(n^2-4\right)\omega_n}{2^n \varepsilon^{n-4}} \left\{ 1 + \frac{n-4}{(n^2-4)\, I_n^{\frac{n}{2}-1}} \left(Tr_g A(x_0) - 2R(x_0) \right) \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\varepsilon^2\right) \right\} \end{aligned}$$

avec

$$\omega_n = 2^{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1}$$

Les intégrales dans $\mu_\varepsilon|_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)}$, sont de la forme

$$\left(C_1 + C_2\varepsilon^2\right) \left| \int_{\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2}^{\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right)^2} \frac{t^q}{(1+t)^p} dt \right|$$

elles sont majorées par

$$\frac{\left(C_1 + C_2\varepsilon^2\right)}{p-q-1} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2(p-q-1)}$$

qui ne perturbent pas nos développements limités pour $n = 6$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon \quad = \quad & \frac{n(n-4)\left(n^2-4\right)\omega_n}{2^n \varepsilon^{n-4}} \times \\ & \left\{1 + \frac{n-4}{(n^2-4)\, I_n^{\frac{n}{2}-1}} \left(Tr_g A(x_0) - 2R(x_0)\right) \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \qquad (2.40)\end{aligned}$$

2.4.4 Développement limité de Q_ε pour $n = 6$

En regroupant les deux formules (2.36) et (2.40), dans l'expression de Q_ε, on trouve finalement le développement limité du quotient Q_ε pour $n = 6$

$$\begin{aligned}Q_\varepsilon &= K_0 f(x_0)^{\frac{2}{2^\sharp}} \frac{\mu_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon^{\frac{2}{2^\sharp}}} \\ &= K_0 \frac{n(n-4)\left(n^2-4\right)\omega_n}{2^4} \left\{1 + \frac{n-4}{(n^2-4)\, I_n^{\frac{n}{2}-1}} \left(Tr_g A(x_0) - 2R(x_0)\right) \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\varepsilon^2\right)\right\} \\ &= \left\{1 + \frac{n-4}{(n^2-4)\, I_n^{\frac{n}{2}-1}} \left(Tr_g A(x_0) - 2R(x_0)\right) \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}\end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé le fait que

$$\frac{1}{K_0} = \frac{n(n-4)\left(n^2-4\right)\omega_n^{\frac{4}{n}}}{16}.$$

Il est clair que si

$$Tr_g A(x_0) < 2R(x_0)$$

alors

$$Q_\varepsilon < 1.$$

Chapitre 3

Solutions nodales pour un problème de type GJMS

3.1 Introduction

L'objectif de ce dernier chapitre consiste à généraliser le résultat obtenu au deuxième chapitre, concernant l'existence de solutions nodales d'un problème du quatrième ordre de type *Paneitz-Branson*, à un problème polyharmonique de type *GJMS*. Plus précisément, on considère (M, g) une variété riemannienne compacte à bord $\partial M \neq \emptyset$ de dimension $n > 2k$ où k est un entier positif. On se donne $A_{(l)}$ un champ de tenseur $2l$-fois covariants sur M pour tout $l \in \{0, 1, ..., k-1\}$ et λ un paramètre réel. Soient f une fonction régulière positive sur M et ϕ_1,..., $\phi_k \in C^\infty(\partial M)$. On s'intéresse tout particulièrement au problème elliptique de Dirichlet du $2k$-ème ordre

$$\begin{cases} P_g^{n,k} u = \lambda f \, |u|^{2^\sharp - 2} \, u & \text{dans } M \\ u = \phi_1, \; \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi_2, ... \text{et } \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$P_g^{n,k} = \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \, \nabla^{j_l ... j_1} \left(A_{(l) i_1 ... i_l j_1 ... j_l} \nabla^{i_1 ... i_l} \right)$$

est l'opérateur de type *GJMS.*

Comme le problème de type *paneitz-Branson,* cette équation a la particularité de contenir l'exposant critique de Sobolev $2^\sharp = \dfrac{2n}{n - 2k}$.

Le problème d'existence de solutions pour les équations polyharmoniques avec l'exposant critique a été étudié par plusieurs auteurs, nous citons brièvement quelques résultats.

Dans [31] Pucci-Serrin ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)^k u = |u|^{k_*-2} u + \lambda u \\ u \in H_0^k(\Omega), \lambda > 0 \end{cases}$$

où $k_* = \dfrac{2n}{n-2k}$ et Ω est un domaine étoilé borné dans $\mathbb{R}^n$.

Il ont montré que ce problème n'admet que la solution triviale $u \equiv 0$ pour $\lambda < 0$.

Dans [23] Grunau a montré l'existence de solutions positives d'un problème polyharmonique semi linéaire de type :

$$\begin{cases} (-\Delta)^k u = \lambda u + u^{s-1} & \text{dans } B \\ D^\alpha u = 0, \ |\alpha| \leq k-1 & \text{sur } \partial B \end{cases}$$

où, $k \in \mathbb{N}$, B est la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $n > 2k$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $s = \dfrac{2n}{n-2k}$ l'exposant critique.

Dans [20] Ge a obtenu un résultat d'existence de solutions positives d'un problème polyharmonique semi linéaire avec des conditions au bord de Navier.

Dans [21] Ge-Wei-Zhou ont montré l'existence de solutions pour un problème polyharmonique à terme perturbatif sous critique de la forme suivante

$$\begin{cases} (-\Delta)^k u = |u|^{s-2} u + f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = Du = ... = D^{k-1} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier dans $\mathbb{R}^n$, $s = \dfrac{2n}{n-2k}$ est l'exposant critique de Sobolev et $f(x,u)$ est un terme perturbatif sous critique.

Dans [29] Mazumdar a utilisé des méthodes topologiques, pour obtenir un résultat d'existence de solutions d'un problème polyharmonique contenant l'exposant critique de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes.

Pour plus de détails sur les problèmes polyharmonique, nous référons le lecteur à [19].

Le résultat principal de ce chapitre est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soient (M,g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n > 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), $A_{(l)}$ un $(0,2l)$-tenseur sur M pour tout $l \in \{0,1,...,k-1\}$. Soit f une fonction régulière positive sur M et x_0 un point de l'intérieur de M avec $f(x_0) = \max_{\mathring{M}} f$. On suppose que l'opérateur*

$$P_g^{n,k} = \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l...j_1} \left(A_{(l)i_1...i_l j_1...j_l} \nabla^{i_1...i_l} \right)$$

est coercif. Sous la condition

$$\inf_{u \in H_k^2(M)-\{0\}} \frac{\int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u\right)^2 dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l \left(\nabla^l u, \nabla^l u\right) dv_g}{\left(\int_M f\,|u|^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}} < \frac{1}{(f(x_0))^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0(n,k)}$$

Alors il existe un réel positif λ et une solution non triviale $u = w + h \in H_k^2(M) \cap C^{2k}(M)$ de l'équation (3.1)
où w minimise la fonctionnelle I définie sur $H_{k,0}^2(M)$ par

$$I(w) = \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} w\right)^2 dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l \left(\nabla^l w, \nabla^l w\right) dv_g$$

sous la contrainte $\int_M f\,|w+h|^{2^\sharp}\, dv_g = \gamma$ tel que h est l'unique solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} P_g^{n,k} h = 0 & \text{dans } M \\ h = \phi_1,\ \dfrac{\partial h}{\partial \nu} = \phi_2, ...\text{et } \dfrac{\partial^{k-1} h}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases}.$$

De plus, cette solution est nodale si la donnée au bord ϕ_1 change de signe.

La démonstration de ce théorème consiste à suivre étapes :

1. Dans un premier temps, nous construisons une suite de solutions minimisantes aux équations du type (3.1) avec exposant sous-critique.

2. Ensuite nous montrons que cette suite converge vers une solution de l'équation critique (3.1), quand l'exposant sous-critique tend vers l'exposant critique.
3. Dans la dernière étape, nous montrons que sous certaine condition géométrique, la solution de l'équation critique (3.1) n'est pas triviale.

3.2 Solutions sous-critiques

Nous allons montrer l'existence de solutions de l'équation sous-critique associée à l'équation (3.1). On s'intéresse à la famille d'équations

$$\begin{cases} P_g^{n,k} u = \lambda f \left|u\right|^{q-2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1, \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi_2, \ldots \text{et } \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{3.2}$$

où $q \in \left(2,\ 2^{\sharp}\right)$ est un exposant sous-critique.

3.2.1 Extension des données au bord

Nous commençons par étendre les données au bord par l'unique fonction régulière h qui vérifie sur toute M, l'équation linéaire

$$\begin{cases} P_g^{n,k} h = 0 & \text{dans } M \\ h = \phi_1, \dfrac{\partial h}{\partial \nu} = \phi_2, \ldots et \dfrac{\partial^{k-1} h}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases} . \tag{3.3}$$

Lemme 3.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n > 2k$ $(k \in \mathbb{N})$. On suppose que l'opérateur*

$$P_g^{n,k} := \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \ldots j_1} \left(A_{(l) i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_l} \nabla^{i_1 \ldots i_l} \right)$$

est coercif. Alors il existe une unique solution $h \in C^{2k,\alpha}(M)$, $\alpha \in (0,1)$, de l'équation (3.3).

Preuve. Comme l'opérateur $P_g^{n,k}$ est coercif, alors le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de h. On obtient avec le résultat de régularité énoncé au théorème 1.5 que $h \in C^{2k,\alpha}(M)$ pour $\alpha \in (0,1)$. ∎

Le lemme précédent, nous permet de transformer l'équation (3.1) à l'équation suivante

$$\begin{cases} P_g^{n,k} w = \lambda f \left|w+h\right|^{2^\sharp-2}(w+h) & \text{dans } M \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = \ldots = \dfrac{\partial^{k-1} w}{\partial \nu^{k-1}} = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases}. \tag{3.4}$$

3.2.2 Construction des solutions sous-critiques

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n > 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) sur laquelle on considère l'équation sous-critique ci-dessous associée à l'équation (3.4)

$$\begin{cases} P_g^{n,k} w = \lambda f \left|w+h\right|^{q-2}(w+h) & \text{dans } M \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = \ldots = \dfrac{\partial^{k-1} w}{\partial \nu^{k-1}} = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{3.5}$$

où $q \in \left(2,\ 2^\sharp\right)$ est un exposant sous-critique.

Rappelons que $H_{k,0}^2(M)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme équivalente (voir Robert [34])

$$\|u\|_{H_{k,0}^2(M)}^2 = \sum_{i=0}^{k} \left\|\Delta_g^{\frac{i}{2}} u\right\|_2^2 = \sum_{i=0}^{k} \int_M \left(\Delta_g^{\frac{i}{2}} u\right)^2 dv_g$$

où

$$\Delta_g^{\frac{i}{2}} u = \begin{cases} \Delta_g^m u & si\ i = 2m \text{ pair} \\ \nabla \Delta_g^m u & si\ i = 2m+1 \text{ impair} \end{cases}.$$

La fonctionnelle I associée à l'équation (3.5) est définie sur l'espace $H_{k,0}^2(M)$ par

$$I(w) = \int_M \left(P_g^{n,k} w\right) w dv_g = I(w) = \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} w\right)^2 dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l\left(\nabla^l w, \nabla^l w\right) dv_g. \tag{3.6}$$

Le minimum de I est donné par

$$\mu_{\gamma,q} := \inf_{w \in \mathcal{H}_q} I(w)$$

où $\mathcal{H}_q$ est la contrainte telle que

$$\mathcal{H}_q = \left\{ w \in H^2_{k,0}(M) \ / \quad \int_M f\,|w+h|^q\, dv_g = \gamma \right\}$$

avec γ qui vérifie la condition

$$\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\, dv_g < \gamma. \tag{3.7}$$

Dans un premier temps, nous montrons que la contrainte $\mathcal{H}_q$ est non vide.

Lemme 3.2 *Sous la condition* $\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\, dv_g < \gamma$, *la contrainte* $\mathcal{H}_q$ *n'est pas vide.*

Preuve. Comme dans le lemme (2.2), posons

$$F(t) = \int_M f\,|t\psi_1 + h|^q\, dv_g$$

où ψ_1 est une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 du Δ_g^k définie par

$$\begin{cases} \Delta_g^k \psi_1 = \lambda_1 \psi_1 & \text{dans } M \\ \psi_1 = \dfrac{\partial}{\partial \nu}\psi_1 = \ldots \dfrac{\partial^{k-1}}{\partial \nu^{k-1}}\psi_1 = 0 & \text{sur } \partial M \end{cases}.$$

La fonction F est continue et elle vérifie pour q proche de $2^\sharp$

$$F(0) = \int_M f\,|h|^q\, dv_g < \gamma$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty.$$

Par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel $t_{\gamma,q} > 0$ tel que

$$F\left(t_{\gamma,q}\right) = \int_M f\,\left|t_{\gamma,q}\psi_1 + h\right|^q\, dv_g = \gamma.$$

Ce qui prouve que

$$t_{\gamma,q}\psi_1 \in \mathcal{H}_q$$

d'où $\mathcal{H}_q \neq \emptyset$. ■

Proposition 3.1 *Sous la condition* $\gamma > \int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g$ *et la coercivité de l'opérateur* $P_g^{n,k}$, *il existe un réel* $\lambda_{\gamma,q}$ *et une fonction* $w_{\gamma,q} \in \mathcal{H}_q$, *solution minimisante du problème (3.5).*

Preuve. Comme l'opérateur $P_g^{n,k}$ est coercif, alors il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_{k,0}^2(M)$

$$I(u) = \int_M \left(P_g^{n,k}u\right) u dv_g > C\,\|u\|_{H_{k,0}^2}. \tag{3.8}$$

Par conséquent le minimum $\mu_{\gamma,q}$ est fini.

Considérons (w_i) une suite minimisante pour la fonctionnelle I sur $\mathcal{H}_q$ .i.e

$$\lim_i I(w_i) = \mu_{\gamma,q}$$

Par définition de $\mu_{\gamma,q}$, on peut écrire pour i suffisamment grand

$$I(w_i) \leq 1 + \mu_{\gamma,q}$$

En utilisant l'inégalité (3.8) pour i suffisamment grand, on obtient

$$\|w_i\|_{H_{k,0}^2(M)} \leq \frac{1}{C}\left(\mu_{\gamma,q} + 1\right). \tag{3.9}$$

Ce qui montre que la suite (w_i) est bornée dans $H_{k,0}^2(M)$ qui est un espace réflexif. Ce qui entraîne l'existence d'une fonction $w_{\gamma,q} \in H_{k,0}^2(M)$ et une sous-suite (w_i) encore notée (w_i) telle que

(a) $w_i \rightharpoonup w_{\gamma,q}$ faiblement dans $H_{k,0}^2(M)$

(b) $w_i \to w_{\gamma,q}$ fortement dans $H_{k-1,0}^2(M)$ et dans $L^s(M)$ pour tout $s < 2^\sharp$

(c) $\left\|w_{\gamma,q}\right\|_{H_{k,0}^2} \leq \liminf_i \|w_i\|_{H_{k,0}^2}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} I\left(w_{\gamma,q}\right) &= \int_M \left(\Delta^{\frac{k}{2}} w_{\gamma,q}\right)^2 dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l\left(\nabla^l w_{\gamma,q}, \nabla^l w_{\gamma,q}\right) dv_g \\ &\leq \lim_i \inf \left\|\Delta^{\frac{k}{2}} w_i\right\|_2^2 + \lim_i \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l\left(\nabla^l w_i, \nabla^l w_i\right) dv_g \\ &= \lim_i I\left(w_i\right) = \mu_{\gamma,q}. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_M f\left|w_{\gamma,q} + h\right|^q dv_g = \lim_i \int_M f\left|w_i + h\right|^q dv_g = \gamma$$

On récupère que

$$I\left(w_{\gamma,q}\right) = \mu_{\gamma,q}$$

En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange pour la fonction $w_{\gamma,q}$ on déduit qu'il existe un réel $\lambda_{\gamma,q}$ tel que pour tout $\varphi \in H_{k,0}^2(M)$

$$\begin{aligned} &\int_M \langle \Delta_g^{\frac{k}{2}} w_{\gamma,q}, \Delta_g^{\frac{k}{2}} \varphi\rangle_g dv_g + \sum_{l=0}^{k-1} \int_M A_l\left(\nabla^l w_{\gamma,q}, \nabla^l \varphi\right) dv_g \\ &= \lambda_{\gamma,q} \int_M f\left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q} + h\right) \varphi dv_g \end{aligned}$$

D'où $w_{\gamma,q}$ est une solution faible de l'équation

$$\begin{cases} \Delta_g^k w_{\gamma,q} + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \ldots j_1}\left(A_{(l) i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_l} \nabla^{i_1 \ldots i_l} w_{\gamma,q}\right) = \lambda_{\gamma,q} f\left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q} + h\right) & \text{in } M \\ w_{\gamma,q} = \frac{\partial}{\partial \nu} w_{\gamma,q} = \ldots = \frac{\partial^{k-1}}{\partial \nu^{k-1}} w_{\gamma,q} = 0 & \text{on } \partial M \end{cases} . \tag{3.10}$$

En utilisant la méthode de bootstrap [40], on montre que $w_{\gamma,q} \in C^{2k,\alpha}(M)$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$. ■

3.3 Solutions critiques et conditions géométriques

On s'intéresse maintenant au comportement de la suite $w_{\gamma,q}$ lorsque q tend vers l'exposant critique $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2k}$.

Proposition 3.2 *Sous l'hypothèse* $\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g < \gamma$*, la suite des multiplicateurs de Lagrange* $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)$ *est strictement positive et bornée lorsque* q *tend vers* $2^\sharp$*. De plus la suite* $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ *est bornée dans* $H^2_{k,0}(M)$*.*

Preuve. En multipliant l'équation (3.10) par $w_{\gamma,q}$ et en intégrant sur M, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \le \mu_{\gamma,q} &= \int_M \left(P_g^{n,k} w_{\gamma,q}\right) w_{\gamma,q} dv_g \\ &= \lambda_{\gamma,q} \int_M f\left|w_{\gamma,q}+h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q}+h\right) w_{\gamma,q} dv_g \\ &= \lambda_{\gamma,q} \int_M f\left|w_{\gamma,q}+h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q}+h\right)\left(w_{\gamma,q}+h-h\right) dv_g \\ &= \lambda_{\gamma,q}\left(\gamma - \int_M f\left|w_{\gamma,q}+h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q}+h\right) h dv_g\right). \end{aligned}$$

Comme l'inégalité stricte $\int_M f\,|h|^q\,dv_g < \gamma$ reste vraie pour q plus proche de $2^\sharp$, l'inégalité de Hölder montre que

$$\int_M f\left|w_{\gamma,q}+h\right|^{q-2}\left(w_{\gamma,q}+h\right) h dv_g \le \gamma^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f\,|h|^q\,dv_g\right)^{\frac{1}{q}} < \gamma \tag{3.11}$$

Ce qui entraine que

$$\lambda_{\gamma,q} \ge 0$$

Montrons que

$$\lambda_{\gamma,q} \ne 0$$

On raisonne par absurde. Supposons que $\lambda_{\gamma,q} = 0$,

$$w_{\gamma,q} = 0$$

Or $w_{\gamma,q} \in \mathcal{H}_q$ .i.e

$$\gamma = \int_M f \left| w_{\gamma,q} + h \right|^q dv_g = \int_M f \left| h \right|^q dv_g$$

Ce qui contredit la condition

$$\int_M f \left| h \right|^{2^\sharp} dv_g < \gamma.$$

Nous allons montrer maintenant que la suite $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ est bornée dans $H^2_{k,0}(M)$. Pour cela, on considère ψ_1 une fonction propre du Δ_g^k associée à la première valeur propre λ_1 telle que

$$\begin{cases} \Delta_g^k \psi_1 = \lambda_1 \psi_1 & \text{dans } M \\ \psi_1 = \dfrac{\partial}{\partial \nu}\psi_1 = \dots \dfrac{\partial^{k-1}}{\partial \nu^{k-1}}\psi_1 = 0 & \text{sur } \partial M \\ \displaystyle\int_M \psi_1^2 dv_g = 1 & \end{cases}$$

On pose

$$F(t,q) = \int_M f \left| t\psi_1 + h \right|^q dv_g$$

Comme $\mathcal{H}_q$ est non vide, il existe un réel $t_{\gamma,q}$ telle que la fonction $t_{\gamma,q}\psi_1 \in \mathcal{H}_q$ i.e.

$$F\left(t_{\gamma,q}, q\right) = \int_M f \left| t_{\gamma,q}\psi_1 + h \right|^q dv_g = \gamma.$$

On montre par absurde que $\dfrac{\partial F}{\partial t}\left(t_{\gamma,q}, q\right) \neq 0$. Supposons que

$$\frac{\partial F}{\partial t}\left(t_{\gamma,q}, q\right) = 0$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} t_{\gamma,q}\frac{\partial F}{\partial t}\left(t_{\gamma,q},q\right) &= qt_{\gamma,q}\int_M f\left|t_{\gamma,q}\psi_1+h\right|^{q-2}\left(t_{\gamma,q}\psi_1+h\right)\psi_1 dv_g \\ &= q\int_M f\left|t_{\gamma,q}\psi_1+h\right|^{q-2}\left(t_{\gamma,q}\psi_1+h\right)\left(t_{\gamma,q}\psi_1+h-h\right)dv_g \\ &= q\left(\gamma-\int_M f\left|t_{\gamma,q}\psi_1+h\right|^{q-2}\left(t_{\gamma,q}\psi_1+h\right)hdv_g\right)=0 \end{aligned}$$

D'où

$$\gamma=\int_M f\left|t_{\gamma,q}\psi_1+h\right|^{q-2}\left(t_{\gamma,q}\psi_1+h\right)hdv_g. \tag{3.12}$$

D'après l'inégalité de Hölder et le fait que la condition $\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g<\gamma$ reste vraie pour q proche de $2^\sharp$, on déduit que

$$\int_M f\left|t_{\gamma,q}\psi_1+h\right|^{q-2}\left(t_{\gamma,q}\psi_1+h\right)hdv_g\le\left(\int_M f\left|t_{\gamma,q}\psi_1+h\right|^{q}dv_g\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f\,|h|^q\,dv_g\right)^{\frac{1}{q}}<\gamma.$$

Ce qui contredit (3.12). D'où

$$\frac{\partial F}{\partial t}\left(t_{\gamma,q},q\right)\neq 0.$$

Par conséquent le théorème des fonctions implicites montre que la fonction $t_{\gamma,q}$ est continue par rapport à q. ce qui montre l'existence d'une constante $C(\gamma)$ indépendante de q telle que

$$\int_M\left(P_g^{n,k}w_{\gamma,q}\right)w_{\gamma,q}dv_g\le I\left(t_{\gamma,q}\psi_1\right)=t_{\gamma,q}^2 I(\psi_1)\le C(\gamma). \tag{3.13}$$

En outre d'après la coercivité de l'opérateur $P_g^{n,k}$ et cette dernière inégalité,la suite $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ est bornée dans $H_{k,0}^2(M)$.

Comme l'espace $H_{k,0}^2(M)$ est réflexif, on peut alors extraire une sous-suite de $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$

encore noté $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$, telle que

(a) $w_{\gamma,q} \rightharpoonup w$ faiblement dans $H^2_{k,0}(M)$ lorsque $q \to 2^\sharp$

(b) $w_{\gamma,q} \to w$ fortement dans $H^2_{k-1}(M)$ et $L^s(M)$ pour tout $s < 2^\sharp$ lorsque $q \to 2^\sharp$

(c) $w_{\gamma,q} \to w$ presque partout sur M lorsque $q \to 2^\sharp$.

Il nous reste à montrer que la suite des multiplicateurs de Lagrange $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)_q$ est bornée lorsque q tend vers $2^\sharp$.

De l'inégalité (3.11), on a

$$\gamma - \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) h dv_g \geq \gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_M f \left|h\right|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}$$

En combinant cette dernière inégalité avec l'inégalité (3.13) et par définition de $\lambda_{\gamma,q}$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_{\gamma,q} &= \frac{\int_M \left(P_g^{n,k} w_{\gamma,q}\right) w_{\gamma,q} dv_g}{\int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) w_{\gamma,q} dv_g} \\ &= \frac{\int_M \left(P_g^{n,k} w_{\gamma,q}\right) w_{\gamma,q} dv_g}{\gamma - \int_M f \left|w_{\gamma,q} + h\right|^{q-2} \left(w_{\gamma,q} + h\right) h dv_g} \\ &\leq \frac{I\left(t_{\gamma,q}\psi_1\right)}{\gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_M f \left|h\right|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq \frac{t^2_{\gamma,q} I\left(\psi_1\right)}{\gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_M f \left|h\right|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq C\left(\gamma, h\right). \end{aligned}$$

où $C\left(\gamma, h\right)$ est une constante qui ne dépend pas de q.

Ce qui montre l'existence d'une sous-suite de $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)_q$ encore noté $\left(\lambda_{\gamma,q}\right)_q$ converge vers un réel λ.

En passant à la limite dans l'équation (3.10), on déduit facilement que w est une solution faible de l'équation (3.4).

De plus, les résultats de régularité obtenus par Mazumdar [29] restent valables pour notre problème, ce qui prouve que $w_{\gamma,q} \in C^{2k,\alpha}(M)$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$. ■

Remarque 3.1 – *Si on pose $u = w + h$. Il est clair que si les données au bord $(\phi_1,...,\phi_{k-1}) \not\equiv (0,...,0)$, alors la fonction $u \not\equiv 0$ est une solution non triviale de l'équation*

$$\begin{cases} P_g^{n,k} u = \lambda f \left|u\right|^{2^\sharp - 2} u & \text{dans } M \\ u = \phi_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi_2, ... \text{et } \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \phi_k & \text{sur } \partial M \end{cases}. \tag{3.14}$$

– *Si $(\phi_1,...,\phi_{k-1}) \equiv (0,...,0)$, alors $h \equiv 0$ i.e. $u = w$. Dans ce cas on veut savoir sous quelle condition la fonction $u = w$ va être solution non triviale de l'équation (3.14).*

Proposition 3.3 *Soit w la limite faible de la suite minimisante $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$. On pose*

$$\mu = \lim_q \mu_{\gamma,q}$$

Si la condition suivante est vérifiée

$$\mu < \frac{\gamma^{\frac{2}{2^\sharp}}}{f(x_0)^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0(n,k)} \tag{3.15}$$

où $f(x_0) = \max_M f(x)$

Alors w est une solution non triviale de l'équation (3.14).

Preuve. On raisonne par absurde. Supposons que $w \equiv 0$. Il est clair que la suite $\left(w_{\gamma,q}\right)_q$ converge faiblement vers 0 dans l'espace $H_{k,0}^2(M)$ et fortement dans l'espace $H_{k-1,0}^2(M)$ d'après l'inclusion compacte de $H_{k,0}^2(M)$ dans $H_{k-1,0}^2(M)$.

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\gamma^{\frac{2}{q}} = \left(\int_M f\left|w_{\gamma,q}\right|^q dv_g\right)^{\frac{2}{q}} \le f(x_0)^{\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{2^\sharp}} \left(\int_M \left|w_{\gamma,q}\right|^{2^\sharp}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}$$

Par conséquent

$$\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} \le \left(\int_M \left|w_{\gamma,q}\right|^{2^\sharp}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}$$

D'après le lemme 1.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} &\le \left(\int_M \left|w_{\gamma,q}\right|^{2^\sharp}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \\ &\le \left((K_0(n,k)+\varepsilon)\left\|\Delta^{\frac{k}{2}} w_{\gamma,q}\right\|_2^2 + B_\varepsilon \left\|w_{\gamma,q}\right\|_{H_{k-1}^2}^2\right)\end{aligned}$$

Or

$$\left\|\Delta^{\frac{k}{2}} w_{\gamma,q}\right\|_2^2 = \mu_{\gamma,q} - \sum_{l=0}^{k-1}\int_M A_l\left(\nabla^l w_{\gamma,q}, \nabla^l w_{\gamma,q}\right) dv_g$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} \\ &\quad\le \left\{(K_0(n,k)+\varepsilon)\left(\mu_{\gamma,q} - \sum_{l=0}^{k-1}\int_M A_l\left(\nabla^l w_{\gamma,q}, \nabla^l w_{\gamma,q}\right) dv_g\right) + B_\varepsilon \left\|w_{\gamma,q}\right\|_{H_{k-1}^2}^2\right\}\end{aligned} \tag{3.16}$$

Comme le tenseur A_l est régulier pour tout $l \in \{0, ..., k-1\}$, alors il existe une constante C qui ne dépend que de A_l telle que

$$\left|\sum_{l=0}^{k-1}\int_M A_l\left(\nabla^l w_{\gamma,q}, \nabla^l w_{\gamma,q}\right) dv_g\right| \le C \left\|w_{\gamma,q}\right\|_{H_{k-1}^2}^2$$

Par conséquent l'inégalité (3.16) devient

$$\begin{aligned}&\gamma^{\frac{2}{q}} f(x_0)^{-\frac{2}{q}} Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} \\ &\quad\le \left\{(K_0(n,k)+\varepsilon)\mu_{\gamma,q} + (B_\varepsilon + C(K_0(n,k)+\varepsilon))\left\|w_{\gamma,q}\right\|_{H_{k-1}^2}^2\right\}\end{aligned} \tag{3.17}$$

En passant à la limite dans (3.17) et en choisissant ε assez petit et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \left\| w_{\gamma,q} \right\|^2_{H^2_{k-1}} &= o(1) \\ Vol_g(M)^{\frac{2}{2^\sharp}-\frac{2}{q}} &= 1 + o(1) \end{aligned}$$

on conclut que

$$\mu > \frac{\gamma^{\frac{2}{2^\sharp}}}{(f(x_0))^{\frac{2}{2^\sharp}} K_0(n,k)}$$

Ce qui contredit la condition (3.15)

D'où $w \not\equiv 0$. ■

Bibliographie

[1] T. Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 269–296.*

[2] T. Aubin. Some nonlinear problems in Riemannian geometry, *Springer (1998).*

[3] M. Bekiri, M. Benalili, Nodal solutions for fourth order elliptic equations with critical exponent on compact manifolds, *Complex Var. Elliptic Equ. 63 (2018), no. 10, 1421-1437.*

[4] M. Bekiri, M. Benalili. Nodal solutions for elliptic equation involving GJMS operators on compact manifolds, *Complex Var. Elliptic Equ. 64 (2019), no. 12, 2105-2116.*

[5] M. Benalili. On singular Q-curvature type equations, *J. Differential Equations, 254, 2, (2013) 547-598.*

[6] R. J. Biezuner, M. Montenegro. Best constants in second-order Sobolev inequalities on Riemannian manifolds and applications, *J. Math. Pures Appl. 82 (2003), 457-502.*

[7] T.P. Branson. Group representations arising from Lorentz conformal geometry, *J. Funct. Anal. 74, 1987, 199-291.*

[8] TP. Branson, B. Ørsted. Explicit functional determinants in four dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), 669-682.*

[9] TP. Branson. The Functional Determinant, *Lecture Notes Series, vol.4, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1993.*

[10] TP. Branson. Sharp inequalities, the functional determinant, and the complementary series, *Trans. Amer. Math. Soc. 347(10) (1995) 3671–3742.*

[11] D. Caraffa. Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés Riemanniennes compactes. *J. Math. Pures Appl., 80, 9 (2001), 941-960.*

[12] SYA. Chang. On Paneitz operator, A fourth order differential operator in conformal geometry, *Harmonic Analysis and PDE, Essays in honor of Alberto P. Calderon, Eds : M. Christ, C. Kenig and C. Sadorsky, Chicago Lectures in Mathematics, 1999, 127-150.*

[13] S.Y.A Chang, P.C Yang. On a fourth order curvature invariant, *Comp. Math. 237, Spectral Problems in Geometry and Arithmetic, Ed : T. Branson, AMS, 1999, 9-28.*

[14] Z. Djadli, E. Hebey, M. Ledoux. Paneitz-type operators and applications. *Duke Math. J. 104, (2000), 129-169.*

[15] Z. Djadli, A. Malchiodi and M. Ould Ahmedou. Prescribed fourth order conformal invariant on the standard sphere - Part I : a perturbation result, *Commun. Contemp. Math. 04, 375 (2002).*

[16] D.E. Edmunds, D. Fortunato, E.Jannelli. Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator. *Arch. Rational Mech. Anal., 112, (1990), no. 3, 269-289.*

[17] P. Esposito, F. Robert. Mountain pass critical points for Paneitz-Branson operators, *Calc. Var. Partial Diferential Equations 15 (2002), no. 4, 493-517.*

[18] C. Fefferman, CR. Graham. The ambient metric. *arXiv :0710.0919.*

[19] F. Gazzola, HC. Grunau, G. Sweers. Polyharmonic boundary value problems, *LNM, vol. 1991, Springer, 2010.*

[20] Y. Ge. Positive solutions in semilinear critical problems for polyharmonic operators, *J. Math. Pures Appl. 84 (2005) 199–245.*

[21] Y. Ge, J. Wei and F. Zhou. A critical elliptic problem for polyharmonic operators, *J. Funct. Anal. 260 (2011), no. 8, 2247-2282.*

[22] CR. Graham,R. Jenne, LJ. Mason and GAJ. Sparling. Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence. *J. London Math. Soc. 46,(1992),557-565.*

[23] HC. Grunau. Positive solutions to semilinear polyharmonic Dirichlet problems involving critical Sobolev exponents, *Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995) 243–252.*

[24] E. Hebey, Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, *Diderot Editeur, Paris, 1997.*

[25] E. Hebey and F. Robert. Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz type operators with constant coefficients, *Calc. Var. Partial Differential Equations, 13, 2001, 491-517.*

[26] D. Holcman. Solutions nodales sur les variétés Riemanniennes non localement conformément plates à bord *Comment. Math. Helv. 76 (2001) 373-387*

[27] E.H. Lieb. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Ann. of Math., (2), 118, (1983), no. 2, 349-374.*

[28] PL. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I and II. *Rev. Mat. Iberoamericana, 1, (1985), no. 1, 145-201, no. 2, 45-121.*

[29] S. Mazumdar. GJMS-type Operators on a compact Riemannian manifold : Best constants and Coron-type solutions. *J of Differential Equations vol. 261 (2016) 4997-5034.*

[30] S. Paneitz. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary Riemannian manifolds. *Preprint, (1983).*

[31] P. Pucci, J. Serrin. A general variational identity. *Indiana Univ Math J, 1986, 35 : 681–703.*

[32] F. Robert. Positive solutions for a fourth order equation invariant under isometries, *Proc. Amer. Math. Soc, (2002), no 5, 1423-1431.*

[33] F. Robert. Fourth order equations with critical growth in Riemannian geometry. *Notes from a course given at the University of Wisconsin at Madison and at Technische Universitat in Berlin (2009).*

[34] F. Robert. Admissible Q-curvatures under isometries for the conformal GJMS operators, *Nonlinear elliptic partial differential equations, Contemp. Math., vol. 540, Amer. Math.Soc.,Providence, RI, 2011, pp. 241–259.*

[35] R. Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom, 20, (1984), 479-495.*

[36] CA. Swanson. The best Sobolev constant, *Appl. Anal. 47 (1992), no. 4, 227-239.*

[37] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, *Ann. di Matem. Pura ed Appl. 110 (1976), 353–372.*

[38] N.S. Trudinger. Remarks concerning the confomal deformation of Riemannian structures on compacts manifold. *Ann. Sc. Norm. Super. Pipa, Sci. Fis. Mat., III. Ser., 22(1968).265-274.*

[39] R.C.A.M. Van der Vorst. Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ into $L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega)$. *Differential Integral Equations, 6, (1993), 259-276.*

[40] H. Yamabe. On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.*

Abstract
The aim of this thesis is to study two problems arising from conformal geometry. Firstly, we are interested in the existence of nodal solutions for fourth order elliptic equations involving the *Paneitz-Branson* type operator on a compact Riemannian manifold with boundary of dimension $n > 5$.
For the second one, we are interested in the existence of nodal solutions for elliptic equations involving the *GJMS* type operator on a compact Riemannian manifold with boundary of dimension $n > 2k$ where $k \in \mathbb{N}^{\star}$.
The two problems have the peculiarity of containing the critical Sobolev exponent, which leads us to use the variational approach developed by H. Yamabe
Keywords: *Paneitz-Branson* type operator, *GJMS* type operator, nodal solutions, critical Sobolev exponent, compact Riemannian manifolds with boundary.

Résumé
Dans cette thèse nous étudions deux problèmes de Dirichlet issus de la géomtrie conforme.
Dans un premier temps, on s'intresse à l'existence de solutions nodales d'un problème elliptique d'ordre quatre de type *Paneitz-Branson* sur une variété Riemannienne compacte à bord de dimension $n > 5$.
Pour le second problème, nous étudions sur une variété Riemannienne compacte à bord de dimension $n > 2k$ où $k \in \mathbb{N}^{\star}$; l'existence de solutions nodales d'un problème contenant l'opérateur pohyarmonique de type *GJMS*.
Les deux problèmes ont la particularité de contenir l'exposant critique de Sobolev; ce qui nous conduit à utiliser l'approche variationnelle développée par H. Yamabe.
Mots clés: Opérateur de type *Paneitz-Branson*, opérateur de type *GJMS*, solutions nodales, exposant critique de Sobolev, variétés Riemanniennes compactes bord.

ملخص
الغرض من هذه الأطروحة هو دراسة بعض المشاكل الناجمة عن الهندسة التوافقية.
في البداية ندرس على منوعات ريمان المتراصة ذات الحدود، وجود الحلول التي تغير إشارتها لمعادلة إهليلجية من الدرجة الرابعة تنطوي على مؤثر باناتش برانسون $Paneitz - Branson$
في المرحلة الثانية ندرس على منوعات ريمان المتراصة ذات الحدود؛ وجود الحلول التي تغير إشارتها لمعادلة إهليلجية تنطوي على مؤثر $GJMS$ من الدرجة العالية $2k$ حيث k عدد طبيعي.
كلا من المعادلتين يحتويان على الأس الحاسم لسوبولاف $Sobolev$ ، الأمر الذي يقودنا إلى استخدام طريقة المتغير التي طورها يمابي $Yamabe$.
كلمات مفتاحية: مؤثر باناتش برانسون، مؤثر $GJMS$ ، الحلول التي تغير إشارة، منوعات ريمان المتراصة ذات الحدود، الأس الحاسم لسوبولاف.