République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITÉ ABOU-BEKR BELKAID-TLEMCEN

THÈSE

Présentée à :

FACULTÉ DES SCIENCES-DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Géométrie Différentielle

Par :

Ali ZOUAOUI

Sur le thème

ÉQUATIONS ELLIPTIQUES AVEC SINGULARITÉ AU SECOND MEMBRE SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

Soutenue publiquement à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr Hacen DIB	Professeur	UABB Tlemcen	Président
Mr Mohammed BENALILI	Professeur	UABB Tlemcen	Directeur de thèse
Mr Noureddine RAHMANI	Professeur	UST d'Oran	Examinateur
Mr Mohammed BEKKAR	Professeur	Univ Es senia Oran	Examinateur
Mr Azzedine LANSARI	Professeur	UABB Tlemcen	Examinateur

Laboratoire Systèmes Dynamiques et Applications (SDA)

BP 119, 13000 Tlemcen-Algèrie

Remerciements

Tout d'abord, j'adresse mes plus vifs et sincères remerciements au Professeur Mohammed BENALILI, de m'avoir donné l'opportunité de travailler sous sa direction. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir constamment aidé. C'est grâce à ces conseils que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également au Professeur Hacen DIB, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie Professeur Mohammed BEKKAR, Professeur Noureddine RAHMANI, et Professeur Azzedine LANSARI, pour avoir accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury. Je les remercie tous pour leur disponibilité, les remarques et les suggestions qu'ils ont fait sur mon travail.

Je remercie l'équipe sympathique du département de Mathématiques.

Un grand Merci aussi à tous mes collègues du groupe de géométrie différentielle à l'université Abou-Bekr Belkaid de Tlemcen.

Je tient enfin à remercier profondément tous les membres de ma famille pour leur soutient constant durant toutes mes études, spécialement à mes parents à qui je dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction

Étant donné (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Yamabe a posé la question suivante

Existe-t-il une métrique $\tilde{g}$ conforme [1] à g telle que la courbure scalaire $Scal_{\tilde{g}}$ soit constante ?

Pour répondre à cette question, Yamabe remarqua que les deux courbures scalaires $Scal_g$ et $Scal_{\tilde{g}}$ sont liées par l'équation suivante

$$Scal_{\tilde{g}}.u^{\frac{n+2}{n-2}} = \frac{4(n-1)}{(n-2)}\Delta_g(u) + Scal_g.u \tag{0.0.1}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Ainsi d'après cette relation, le problème de Yamabe évoqué ci-dessus est équivalent à la résolution de l'équation

$$\Delta_g(u) + \frac{(n-2)}{4(n-1)}Scal_g.u = \lambda.u^{\frac{n+2}{n-2}} \qquad \forall u \in C^\infty(M), u > 0 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{0.0.2}$$

La résolution du problème de Yamabe a donné naissance à toute une théorie avec beaucoup de ramifications, à titre d'exemple, nous citons deux aperçus :

1. Le premier aperçu vient de la géométrie conforme.

   Commençons par l'opérateur Laplacien conforme L_g, c'est un opérateur différentiel de deuxième ordre qui s'écrit

$$L_g(u) := \Delta_g(u) + \frac{(n-2)}{4(n-1)}Scal_g.u \quad \text{pour } u \in C^2(M)$$

---

1. Bien entendu, une métrique $\tilde{g}$ conforme à g, signifie qu'il existe $u \in C^\infty(M);\ u > 0$ telle que $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$.

et qui est conformément covariant dans le sens : si $\tilde{g}$ désigne une métrique conforme à g : qui est telle que $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g \quad (\varphi \in C^\infty(M);\ \varphi > 0)$ alors

$$L_g(u.\varphi) = \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} L_{\tilde{g}}(u) \qquad \forall u \in C^\infty(M).$$

Il se trouve que cet opérateur n'est pas le seul opérateur qui jouit de cette propriété de la covariance conforme, en fait ; en 1983 Paneitz dans [19] introduit pour la première fois dans les variétés Riemanniennes compactes de dimension 4 un opérateur P_g^4 d'ordre 4 qui est aussi conformément covariant ; pour $u \in C^4(M)$ cet opérateur est donné par la formule suivante

$$P_g^4(u) = \Delta_g^2(u) - div\left(\frac{2}{3} Scal_g.g - 2Ric_g\right) du$$

où Ric_g est la courbure de Ricci associé à g.

En généralisant cet opérateur pour les variétés de dimensions supérieures, Branson dans [6] fait apparaître une quantité géométrique Q_g dite la Q-courbure ; qui est intimement liée à cet opérateur, en fait pour $n \geq 5$

$$Q_g = \frac{2}{n-4} P_g^n(1) \tag{0.0.3}$$

où P_g^n est l'opérateur de Paneitz-Branson agissant sur $C^4(M)$ et donné par

$$P_g^n(u) = \Delta_g^2(u) - div_g\left(a_n Scal_g.g + b_n Ric_g\right) du + \frac{n-4}{2} Q_g^n.u$$

avec

$$a_n = \frac{(n-2)^2 + 4}{2(n-1)(n-2)} \quad \text{et } b_n = \frac{4}{2-n}.$$

L'opérateur de Paneitz-Branson P_g^n est conformément covariant, si $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}} g$ alors pour tout u dans $C^4(M)$

$$P_g^n(u.\varphi) = \varphi^{\frac{n+4}{n-4}} P_{\tilde{g}}^n(u).$$

Ainsi, en généralisant ces opérateurs aux opérateurs conformément covariants de tout ordre, Graham-Jenne-Mason-Sparling [9] prouvent par construction, l'existence d'une famille d'opérateurs P_g connus sous le nom d'opérateurs GJMS.

Dans une variété Riemannienne compacte (M, g) de dimension n, l'opérateur GJMS d'ordre $2k \leq n$ est donné par

$$P_g = \Delta_g^k + l.o.t$$

où $l.o.t$ désigne un terme d'ordre inférieur à $2k$.

Pour $n > 2k$, si $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2k}} g$ est une métrique conforme à g, alors l'opérateur GJMS se transforme suivant la règle

$$P_g(u.\varphi) = \varphi^{\frac{n+2k}{n-2k}} P_{\tilde{g}}^n(u) \quad \forall u \in C^{2k}(M).$$

avec la propriété :

$$P_g(1) = \frac{n-2k}{2}.Q_g$$

où Q_g est la Q-courbure associée à P_g.

Par analogie avec le problème de Yamabe ; Mazumdar annonçait dans son article [16], que dans une variété Riemannienne compacte (M, g), il existe toujours une métrique $\tilde{g}$ conforme à g et a Q-courbure constante.

Plus précisément, si pour $x_0 \in M$, nous notons la sphère de dimension $n-1$ plongée dans M, par

$$\mathbb{S}_{x_0}(i_g/2) := \left\{ x \in M;\ d_g(x, x_0) = \frac{1}{2} i_g \right\}$$

où i_g désigne le rayon d'injectivité de M. Le théorème de Mazumdar s'énonce

Théorème 0.0.1. *(Théorème 1 de [16]) Étant donnés (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n, supposons que l'opérateur P_g d'ordre $2k < n$ est coercif et possède une fonction de Green positive.*

Si la sphère $\mathbb{S}_{x_0}(i_g/2)$ n'est pas contractible dans $M \setminus \{x_0\}$. Alors il existe $\epsilon_0 \in \left]0, \frac{i_g}{2}\right[$ tel que le problème suivant

$$\begin{cases} P_g(u) = |u|^{2^\sharp - 2} u & \textit{dans } \mathcal{M}_{\epsilon_0} \\ D^\alpha u = 0 & \textit{sur } \partial\mathcal{M}_{\epsilon_0} \textit{ et pour } |\alpha| \leq k-1 \end{cases} \tag{0.0.4}$$

admet une solution positive et de classe $C^{2k}(\mathcal{M}_{\epsilon_0})$, où $\mathcal{M}_{\epsilon_0} = M \setminus \overline{B}_{x_0}(\epsilon_0)$.

2. Le deuxième aperçu est fourni par la théorie de la relativité générale.

Nous serons très bref sur ce sujet, le lecteur intéressé pourra consulter Y. Choquet-Bruhat [23] ainsi qu'aux références qui y sont contenues.

Considérons pour commencer un espace-temps qui est modelé d'après cette théorie par une variété Lorentzienne (V, η) de dimension $n+1$. Par souci de simplicité, supposons que cette variété est munie d'une structure de variété produit (i.e) $V = \mathbb{R} \times M$ où M est une variété Riemannienne compacte de dimension n.

L'un des problèmes majeurs dans la relativité générale est le problème de Cauchy qui : consiste à munir la variété M d'une métrique $\tilde{g}$ de sorte que $(M, \tilde{g})$ soit une hypersurface de type espace dans (V, η) avec $\tilde{g},\ K$ la première et la deuxième forme fondamentale (respectivement) de M.

Si nous supposons que dans un système de coordonnées local $(t, x_1, ..., x_n)$ [2]la métrique η s'écrit sous la forme

$$\eta = -N^2 dt \otimes dt + \tilde{g}_{ij} d\theta^i \otimes d\theta^j$$

où N est une fonction qui dépend du temps et $\left\{d\theta^1, ..., d\theta^n\right\}$ la base dual à la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$.

Alors dans la variété (V, η), l'équation d'Einstein s'écrit

$$Ric_{ij} = \frac{1}{2} Scal_\eta . \eta_{ij} + 8\pi G T_{ij}$$

avec Ric_{ij} et η_{ij} désignent les composantes de la courbure de Ricci et la métrique η dans le système de coordonnés locales; $Scal_\eta$ la courbure scalaire, G la constante gravitationnelle de Newton et T_{ij} le tenseur énergie-impulsion de la matière.

Il se trouve d'après la théorie du champ scalaire, que le tenseur T_{ij} dépend de la métrique η et d'un champ scalaire $\psi : V \to \mathbb{R}$, à savoir

$$T_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2_\eta + \Omega \right) \eta_{ij}$$

2. t représente le temps, $x_1, ..., x_n$ les coordonnées spatiales.

où Ω est un potentiel

Dans la formulation du problème de Cauchy ; les physiciens furent amenés à déduire qu'il existe des contraintes pour le choix de ces données initiales $(\tilde{g}, K, \psi, \tau)$ (où τ est donné par la formule (0.0.6)), ces contraintes sont formulées dans l'équation d'Einstein mentionnée plus haut ; ensuite ils ont déduit que cette équation se décompose en deux systèmes ; le premier est un système d'équations d'évolution qui admet une solution en temps fini sur M.

Le deuxième système qui nous intéresse dans cette introduction est donné par

$$Scal_{\tilde{g}} + (trK)^2 = |K|^2_{\tilde{g}} + \tau^2 + |\nabla\psi|^2_{\tilde{g}} + 2\Omega \tag{0.0.5}$$

où K est le second forme fondamentale de la sous-variété M dans V, et

$$\tau = N^{-1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \beta^j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) \quad \text{avec } \beta^j \in \mathbb{R} \tag{0.0.6}$$

Beaucoup plus, ils ont remarqué que ce système est sous-déterminé dans le sens où, il contient plus d'inconnus que les équations ; pour surmonter cette difficulté un bon moyen est de fixer un certain nombre d'inconnus afin de rendre ce système déterminé.

Pour cela et dans l'esprit de Yamabe ; Lichnerowicz pensait à fixer la classe conforme de la métrique Riemannienne $\tilde{g}$ et chercher une métrique g conforme à $\tilde{g}$ (i.e) $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g$ avec $\varphi \in C^\infty(M)$ et $\varphi > 0$; remarquant que les courbures scalaires $Scal_g$ et $Scal_{\tilde{g}}$ vérifient l'équation (0.0.1), il abouti à l'équation suivante

$$\Delta_g(\varphi) + D.\varphi = B.\varphi^{2^\star-1} + \frac{A}{\varphi^{2^\star+1}} \tag{0.0.7}$$

où

$$D = \frac{n-2}{4(n-1)}\left(Scal_g - |\nabla\psi|^2_g\right) ;\ 2^\star = \frac{2n}{n-2}$$

et

$$B = \frac{n-2}{4(n-1)}\left(4\Omega - \frac{n-1}{n}\rho^2\right)$$

avec ρ la courbure moyenne de M dans l'espace-temps V et A une fonction non négative.

Beaucoup de Mathématiciens ont contribué à prouver l'existence de solution pour cette équation, citons par exemple Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, D. Pollack [24] par la méthode de sur et sous-solution, E. Hebey, F. Pacard, D. Pollack [12] et Q.A. Ngô, X. Xu [18] par la méthode variationnel ; en ce qui concerne les résultats de multiplicité voir B. Premoselli[20] et L. Ma, J. Wei [25].

Pour faire un lien avec ce que nous avons dit plus haut, au sujet des opérateurs conformes, citons le travail de A. Maalaoui [15] qui a considéré une équation de même type que l'équation (0.0.7), mais de 4^{eme} ordre, en remplaçant la courbure scalaire $Sc_{\tilde{g}}$ dans (0.0.5) par la Q-courbure donnée par (0.0.3).

En fait, il a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} P_g^n(u) = B\,(x)\,u^{2^\sharp-1} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp+1}} \\ u > 0 \end{cases} \tag{0.0.8}$$

où P_g^n est l'opérateur de Paneitz-Branson et $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$. En appliquant la méthode variationnelle , il arrive à déterminer des conditions assurant l'existence de solution pour ce problème.

Dans l'esprit de E. Hebey et ces collaborateurs [12], on s'intéresse dans ce travail au problème suivant

$$\begin{cases} P_g(u) = B\,(x)\,u^{2^\sharp-1} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp+1}} + \frac{C(x)}{u^p} \\ u > 0 \end{cases} \tag{0.0.9}$$

où P_g est l'opérateur GJMS d'ordre $2k$ avec $2k < n$; $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ et $1 + 2^\sharp > p > 1$.

Nous établissons dans un premier temps, un résultat d'existence

Théorème 0.0.2. *(Théorème 1 de [3]) Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n > 2k$, $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ des fonctions de classe $C^\infty(M)$. Supposons de plus que l'opérateur P_g est coercif et possède une fonction de Green positive. S'il existe une constante $C(n,p,k) > 0$ qui ne dépend que n, p, k telle que*

$$\frac{\|\varphi\|^{2^\sharp}}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\varphi^{2^\natural}}dv_g \le C\,(n,p,k)\left(S\max_{x\in M} B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \tag{0.0.10}$$

et

$$\frac{\|\varphi\|^{p-1}}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\varphi^{p-1}}dv_g \le C\,(n,p,k)\left(S\max_{x\in M} B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}} \tag{0.0.11}$$

pour une fonction $\varphi > 0$. Alors l'équation (0.0.9) *admet une solution positive et de classe $C^\infty(M)$.*

puis ; à l'aide du Lemme d'Ekeland on obtient un résultat de multiplicité, plus précisément en posant $t_0 = \left(\frac{1}{S\max\limits_{x\in M} B(x)}\right)^{\frac{n-2k}{4k}}$ et $a = \frac{1}{(2(n-k))^{\frac{2^\natural}{2}}}$ et choisissant θ de sort que $\frac{2}{3}a < \theta^{2^\sharp} < a$; nous aurons le théorème suivant :

Théorème 0.0.3. *(Théorème 2 de [3]) Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n > 2k$, $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ des fonctions de classe $C^\infty(M)$. Supposons de plus que l'opérateur P_g est coercif et possède une fonction de Green positive. S'il existe une constante $C(n,p,k) > 0$ qui ne dépend que n,p,k telle que*

$$\frac{\|\varphi\|^{2^\sharp}}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\varphi^{2^\natural}}dv_g \leq C\left(n,p,k\right)\left(S\max_{x\in M}B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \tag{0.0.12}$$

et

$$\frac{\|\varphi\|^{p-1}}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\varphi^{p-1}}dv_g \leq C\left(n,p,k\right)\left(S\max_{x\in M}B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}} \tag{0.0.13}$$

pour une fonction $\varphi > 0$ sur M. Si de plus, les conditions suivantes sont vérifiées

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \geq aS\frac{k}{4n}\left(S\max_{x\in M}B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \tag{0.0.14}$$

$$\frac{1}{p-1}\left(\int\limits_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 \geq (2-a)^{\frac{2^\sharp-p+1}{2^\sharp}}(aS)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\frac{k}{4n}\left(S\max_{x\in M}B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}} \tag{0.0.15}$$

avec $1 < p < 2^\sharp + 1$ (très proche de $2^\sharp + 1$) où $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$

et pour $k \geq 2$

$$a_1 \leq A(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right)a_2$$

où

$$a_1 = \frac{2^\sharp ak S t_0^{2+2^\sharp}}{4n\left[V_g(M)^2\right]}; \qquad a_2 = \frac{2^\sharp k\theta^{2^\sharp} S t_0^{2+2^\sharp}}{2n\left[V_g(M)^2\right]}$$

et

$$c_1 \leq C(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right)c_2$$

où

$$c_1 = \frac{(p-1)t_0^{p+1}k\left[(aS)(2-a)\right]^{\frac{p-1}{2^\sharp}}}{4n\left[V_g(M)\right]^2} \quad et \quad c_2 = \frac{(p-1)kS^{\frac{p-1}{2^\sharp}}t_0^{p+1}\theta^{p-1}}{2n\left[V_g(M)\right]^2}.$$

Alors l'équation (0.0.9) admet une deuxième solution.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Les outils analytiques

1.1.1 Les espaces de Sobolev et ces théorèmes d'inclusion

Définition 1.1.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n, $p \geq 1$ un nombre réel, k et r sont deux entiers naturels.

1. L'espace de Sobolev $H_k^p(M)$ est le complété de l'espace

$$\left\{f \in C^\infty(M),\ |\nabla^l f| \in L^p(M),\ \forall\, 0 \leq l \leq k\right\}$$

pour la norme

$$\|f\|_{p,k} := \sum_{l=0}^{k} \|\nabla^l f\|_p.$$

2. $C^{r,\beta}(M)$ est l'espace de Hôlder des fonctions C^r dont la $r-ème$ dérivée appartient à

$$C^\beta(M) = \left\{f \in C^0(M),\ \|f\|_{C^\beta} := \|f\|_\infty + \sup_{P \neq Q} \frac{|f(P) - f(Q)|}{d(P,Q)} < +\infty\right\}$$

avec $\beta \in [0, 1[$.

$C^{0,1}(M)$ est l'ensemble des fonctions lipschitziennes.

L'espace $H_k^2(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant

$$(f_1, f_1)_{H_k^2} = \sum_{l=0}^{k} \left\langle \nabla^l f_1, \nabla^l f_2 \right\rangle_{L^2};\ \forall f_1, f_2 \in H_k^2(M)$$

où $\forall l = 0, ..., k$

$$\left\langle \nabla^l f_1, \nabla^l f_2 \right\rangle_{L^2} := \int_M \left(\nabla^l f_1 . \nabla^l f_2 \right) dv_g.$$

La norme correspondante au produit scalaire sur $H_k^2(M)$ est équivalente à la norme $\|.\|_{2,k}$.

1.1.2 Inclusions de Sobolev

Théorème 1.1.1. *(Théorème d'inclusion de Sobolev)*

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n

i) Si k et l deux entiers $(k > l \geq 0)$, p et q deux réels $(p > q \geq 1)$ qui vérifient

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{(k-l)}{n}$$

alors $H_k^q(M)$ est inclus dans $H_l^p(M)$ et l'inclusion $H_k^q(M) \subset H_l^p(M)$ est continue.

ii) Si $r \in \mathbb{N}$ et $\frac{(k-r)}{n} > \frac{1}{q}$ alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^r(M)$ est continue.

iii) Si $\frac{(k-r-\beta)}{n} \geq \frac{1}{q}$ alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^{r,\beta}(M)$ est continue avec $\beta \in]0, 1[$; dans tous les cas $H_k^q(M)$ ne dépend pas de la métrique g.

Une preuve détaillé est donnée dans le livre de E.Hebey [11].

Kondrakov a montré que les inclusions de Sobolev sont compactes dans les cas suivants :

Théorème 1.1.2. *(Théorème de Rellich-Kondrakov)*

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n ; k un entier naturel, p et q deux nombres réels qui vérifient $1 \geq \frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n} > 0$ alors

1. *l'inclusion $H_k^q(M) \subset L^p(M)$ est compacte*
2. *l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^\infty(M)$ est compacte si $k - \alpha > \frac{n}{q}$ avec $0 \leq \alpha < 1$*

Théorème 1.1.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, $q \geq 1$ réel, et $m < k$ deux entiers*

1. *Si $\frac{1}{q} > \frac{k-m}{n}$, alors $H_k^q(M) \subset H_m^p(M)$ pour tout $p \geq 1$ tel que $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$.*

2. Si $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n}$, alors l'inclusion est compacte.

3. Pour $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ l'inclusion de $H_k^2(M)$ dans $L^{2^\sharp}(M)$ cesse d'être compacte.

$2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ est dit exposant critique de Sobolev. Ainsi ; d'après la dernière assertion on définit la constante S comme étant la plus petite constante telle que $\forall u \in H_k^2(M)$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|u\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} \leq S.\|u\|^{2^\sharp} \tag{1.1.1}$$

Théorème 1.1.4. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 1$. Soient $p \geq 1$ et $0 \leq m < k$ deux entiers tels que $n > p(k-m)$. Alors $H_k^p(M) \subset H_m^q(M)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}$. De plus l'inclusion est continue. En d'autres termes pour tout $u \in H_k^p(M)$ il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_{H_m^q} \leq C\|u\|_{H_k^p}$.*

Théorème 1.1.5. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 1$. Soient $p \geq 1$ et $0 \leq m < k$ deux entiers tels que $n = p(k-m)$. Alors $H_k^p(M) \subset H_m^q(M)$ pour tout $q \geq 1$. De plus l'inclusion est continue. En d'autres termes pour tout $q \geq 1$ il existe une constante $C(q) > 0$ telle que pour tout $u \in H_k^p(M)$, $u \in H_m^q(M)$ et $\|u\|_{H_m^q} \leq C(q)\|u\|_{H_k^p}$.*

Étant donné $\alpha \in (0, 1)$, on dit que $u \in C^{0,\alpha}(M)$ s'il existe $C > 0$ tel que

$$|u(x) - u(y)| \leq C d_g(x, y)$$

pour tous x, $y \in M$, où d_g désigne la distance géodésique.

L'espace $C^{0,\alpha}(M)$ muni de la norme $\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_\infty + \sup_{\substack{x,y\in M \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{d_g(x,y)^\alpha}$ est un espace de Banach.

Théorème 1.1.6. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 1$. Soient $p \geq 1$ et un entier $k \geq 1$ tels que $pk > n$. Alors $H_k^p(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$ avec $\alpha < k - \frac{n}{p}$. De plus l'inclusion est continue et il existe $C(\alpha) > 0$ tel que pour tout $u \in H_k^p(M)$, $u \in C^{0,\alpha}(M)$ et $\|u\|_{C^{0,\alpha}(M)} \leq C(\alpha)\|u\|_{H_k^p}$.*

Théorème des espaces de Banach

Théorème 1.1.7. *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est faiblement compacte.*

Puisque les espaces de Sobolev sont réflexifs, on utilisera ce théorème comme suit : Si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions bornée dans un espace de Sobolev (par exemple $H_k^2(M)$)alors on peut extraire une sous suite $(u_{q_i})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers une certaine fonction u dans $H_k^2(M)$ et nous avons de plus

$$\|u\|_{H_k^2} \leq \liminf_{i\to\infty} \|u_{q_i}\|_{H_k^2}$$

Un autre théorème qui est clé dans les méthodes variationnelles

Théorème 1.1.8. *Soit $p \in]1,+\infty[$ et $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^p(M)$ qui converge presque partout vers u, alors $u \in L^p(M)$ et (u_i) converge faiblement vers u dans $L^p(M)$.*

1.1.3 Inégalité de Sobolev

La continuité de l'inclusion $H_k^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$ nous donne l'existence de deux constantes A et B telles que $\forall u \in H_k^2(M)$

$$\|u\|_{L^{2^\sharp}}^2 \leq A \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u\right)^2 dv_g + B\|u\|_{H_{k-1}^2}^2 \tag{1.1.2}$$

Ainsi dans l'esprit du programme AB initié par Aubin et continué par Hebey, Druet et d'autre ; nous définissons la première meilleure constante comme étant

$$\mathcal{A}(M) := \inf \left\{A \in \mathbb{R}; \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que l'inégalité (1.1.2) soit vérifiée}\right\}.$$

Il se trouve que la constante $\mathcal{A}(M)$ dépend seulement de k et la dimension n de la variété M. Plus présisement ; si on suppose que $D^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ soit l'espace complété de $C_c^\infty(M)$ pour la norme $\left\|\Delta_g^{\frac{k}{2}} u\right\|_2$ où

$$\Delta_g^{\frac{k}{2}}(u) = \begin{cases} \Delta_g^m(u) \text{ si } k = 2m \\ \nabla\Delta_g^m(u) \text{ si } k = 2m+1 \end{cases}$$

et nous déffinissons

$$\frac{1}{\left(K_0\left(n,k\right)\right)} := \inf_{u\in D^{k,2}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\Delta^{\frac{k}{2}}u\right)^2\ dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{2^\sharp}\ dx\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}$$

comme étant la meilleure constante dans l'inclusion continue de $D^{k,2}\left(\mathbb{R}^n\right)$ dans $L^{2^\sharp}(\mathbb{R}^n)$, alors Mazumdar dans [16] a trouvé une version plus générale pour les inégalités de Sobolev dans le cas des opérateurs GJMS. Une telle inégalité fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 1.1.9. *Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n>2k$. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe une constante $B_\varepsilon\in\mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall u\in H_k^2(M) : \|u\|_{2^\sharp}^2 \le \left(K_0\left(n,k\right)+\varepsilon\right)\int_M\left(\Delta_g^{\frac{k}{2}}u\right)^2 dv(g) + B_\varepsilon\|u\|_{H_{k-1}^2}^2$$

avec $2^\sharp=\frac{2n}{n-2k}$ et

$$K_0\left(n,k\right) = \pi^{-\frac{k}{2}}\left(\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right)^{\frac{k}{n}}\prod_{j=-k}^{k-1}(n+2j)^{-\frac{1}{2}}$$

où Γ est la fonction de Gamma d'Euler.

1.1.4 Solutions faibles

On précise la notion de solution faible, celle-ci fait intervenir les opérateurs GJMS qui sont la partie principale de notre équation.

On suit les notes de Fréderic Robert [22] (Proposition 1).

Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte, $A_{(l)}(g)$ un tenseur symétrique de type $(0,2l)$ et de classe $C^\infty(M)$. On considère l'opérateur GJMS suivant

$$P_g = \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\nabla^{j_l\ldots j_1}\left(A_{(l)}(g)_{i_1\ldots i_l j_1\ldots j_l}\nabla^{i_1\ldots i_l}\right)$$

ici les indices sont sommés suivant l'isomorphisme musical. Plus précisément $\forall l\in\{0,\ldots k-1\}$, $A_{(l)}(g)$ est symétrique dans le sens suivant :

$$A_{(l)}(g)\left(X,Y\right) = A_{(l)}(g)\left(Y,X\right);\ \forall X,Y \text{ deux tenseurs de type } (0,l)$$

Définition 1.1.2. Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension n ; A, B et C des fonctions réelles positives de classe C^∞ sur M ; on dit que $u \in H_k^2(M)$ est une solution faible de l'équation

$$P_g(u) = B(x)\, u^{2^\sharp-1} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp+1}} + \frac{C(x)}{u^p} \tag{1.1.3}$$

où P_g est l'opérateur GJMS d'ordre $2k$ (avec $n > 2k$), $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ et $1 < p < 2^\sharp + 1$; si

$$\int_M \varphi P_g(u)\, dv(g) = \int_M \left(B(x)\, |u|^{2^\sharp-1} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp+1}} + \frac{C(x)}{u^p} \right) \varphi\, dv(g)$$

ou encore

$$\int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u \Delta_g^{\frac{k}{2}} \varphi + \sum_{l=0}^{k-1} A_{(l)}(g) \left(\nabla^l u, \nabla^l \varphi \right) \right) dv_g = \int_M \left(B(x)\, |u|^{2^\sharp-1} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp+1}} + \frac{C(x)}{u^p} \right) \varphi\, dv(g)$$

pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$, où on a pris par convention

$$\Delta_g^{\frac{k}{2}} u \Delta_g^{\frac{k}{2}} \varphi := \left(\nabla \Delta_g^{\frac{k-1}{2}} u, \nabla \Delta_g^{\frac{k-1}{2}} \varphi \right)_g$$

si k est impair.

Pour résoudre l'équation (1.1.3), on utilisera la méthode variationnelle, qui consiste à trouver une fonctionnelle à optimiser sur un espace bien choisi (Dans notre cas il s'agit de l'espace $H_k^2(M)$), pour le problème d'optimisations il existe plusieurs résultats ; nous citons deux théorèmes qu'on vient d'utiliser dans ce travail.

1.1.5 Lemme du col (Ambrosetti-Rabinowitz).

On établit l'existence de la première solution en utilisant le théorème suivant

Théorème 1.1.10. *Soit F une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach E, telle que*

1. *Il existe $u_0 \in E$, $\rho > 0$, et $\alpha > 0$ tels que pour tout $u \in E$ vérifiant $\|u - u_0\| = \rho$ on a*

$$F(u) > F(u_0) + \alpha$$

2. Il existe un point $u_1 \in E$ *tel que*

$$\|u_0 - u_1\| > \rho \quad et \quad F(u_1) < F(u_0) + \alpha.$$

Soit Γ *l'ensemble des chemins reliant* u_0 *à* u_1*, c'est-à-dire*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) \text{ tels que } \gamma(0) = u_0,\ \gamma(1) = u_1\}.$$

Si

$$\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left(\sup_{t \in [0,1]} F(\gamma(t)) \right)$$

alors

$$\beta \geq F(u_0) + \alpha$$

et β *est une valeur critique de* F.

1.1.6 Lemme d'Ekeland

Le lemme d'Ekeland est un ingrédient essentiel pour établir l'existence de la deuxième solution, on présente une version de ce lemme, pour plus de détail on renvoi le lecteur à ([17])

Lemme 1.1.1. *Soit* V *un espace de Banach, et* J *une fonctionnelle borné inférieurement de classe* C^1 *sur un sous ensemble fermé* F *de* V *et* $c = \inf_F J$*. soit* $u_\varepsilon \in F$ *tel que* $c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon$*. alors il existe* $\overline{u}_\varepsilon \in F$ *tel que*

$$\begin{cases} c \leq J(\overline{u}_\varepsilon) \leq c + \varepsilon \\ \|\overline{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_V \leq 2\sqrt{\varepsilon} \\ \forall u \in F,\ u \neq \overline{u}_\varepsilon,\ J(u) - J(\overline{u}_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, \|u - \overline{u}_\varepsilon\|_V > 0. \end{cases}$$

Si de plus, $\overline{u}_\varepsilon$ *est dans l'intérieur de* F*, alors*

$$\|DJ(\overline{u}_\varepsilon)\|_{V'} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

On peut considérer la suite $(\ u_\varepsilon\ )_\varepsilon$ à l'intérieur de F. en effet si u_ε est dans le bord F alors par la continuité de J il y'a $\overline{u}_\varepsilon$ qui appartient à l'intérieur de F tel que $|J(\overline{u}_\varepsilon) - J(u_\varepsilon)| < \varepsilon$. qui donne pour ε suffisamment petit, $c - \varepsilon < J(\overline{u}_\varepsilon) < c + 2\varepsilon$ et $J(u) - J(\overline{u}_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, \|u - \overline{u}_\varepsilon\|_V = J(u) - J(u_\varepsilon) + J(u_\varepsilon) - J(\overline{u}_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, \|u - u_\varepsilon + u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon\|_V$

$\geq J(u)-J(u_\varepsilon)-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\,\|u-u_\varepsilon\|_V-\sqrt{\varepsilon}\,\|u_\varepsilon-\overline{u}_\varepsilon\|_V > J(u)-J(u_\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}\,\|u-u_\varepsilon\|_V-2\varepsilon > 0$. Donc on peut parler sur la différentielle $DJ(u_\varepsilon)$.

Lorsque on cherche des solutions d'équations aux dérivées partielles, la première étape donne fréquemment des solutions faibles (dans notre cas, elles sont dans $H_k^2(M)$). Pour traiter la question de régularité de ces solutions faibles on fait appelle aux théorèmes suivants

1.1.7 La régularité des solutions

Ici on donne deux types de résultats de régularité dans le contexte des variétés Riemanniennes : Dans un premier temps on donne des résultats concernant les opérateurs d'ordre quatre puis on passe aux opérateurs d'ordre supérieur.

Théorie L^p

Théorème 1.1.11. *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte et $a \in C^\infty(M)$. Soient A un tenseur symétrique de type (0,2) de classe C^∞ sur M et $f \in H_k^p(M)$. Si $u \in H_2^2(M)$ est une solution faible de $P_g u = f$ alors $u \in H_{k+4}^p(M)$. En plus nous avons*

$$\|u\|_{H_{k+4}^p} \leq C\left(\|f\|_{H_k^p(M)} + \|u\|_{L^p(M)}\right)$$

où $C(M,g,K)$ et

$$\|a\|_{C^{k+1}(M)} + \|A\|_{C^{k+2}(M)} < K.$$

Théorie de Schauder

Théorème 1.1.12. *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte et $a \in C^\infty(M)$. Soient A un tenseur symétrique de type (0,2) de classe C^∞ sur M et $\alpha \in (0,1)$. Soit encore $f \in C^{0,\alpha}(M)$. Si $u \in H_2^2(M)$ est une solution faible de $P_g u = f$ alors $u \in C^{4,\alpha}(M)$. En plus nous avons*

$$\|u\|_{C^4(M)} \leq C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^0(M)}\right)$$

où $C(M, g, K)$ *et*

$$\|a\|_{C^{k+1}(M)} + \|A\|_{C^{k+2}(M)} < K.$$

Dans notre situation nous aurons besoin d'un résultat plus général, à savoir pour des opérateurs elliptiques d'ordre l quelconque, un tel résultat a été trouvé récemment par Mazumdar dans [16].

Théorème 1.1.13. *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne compacte de dimension* n *et soit* k *un entier naturel non nul tel que* $n > 2k$ *et supposons que* u *soit une solution de l'équation*

$$P_g(u) = f(x, u)$$

où P_g *est l'opérateur GJMS d'ordre* $2k$*, et* $|f(x, u)| \leq C|u|\left(1 + |u|^{2^\sharp - 2}\right)$ *pour une certaine constante* C*, alors* $u \in L^p(M), \forall p \in]1, +\infty[$

La preuve de ce résultat établie par l'auteur dans [16] est analogue avec celle donnée par Djadli-Hebey-Ledoux [8] pour les équations de quatrième ordre ; en fait c'est une adaptation de leur preuve aux équations d'ordre supérieur. Comme conséquence de ce théorème on a la proposition suivante.

Proposition 1.1.1. *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne compacte de dimension* n *et soit* $k \in \mathbb{N}^\star$ *tel que* $n > 2k$*. Soit* $f \in C^{0,\theta}(M)$ *et supposons que* $u \in H_k^2(M)$ *est une solution faible de l'équation*

$$P_g(u) = f|u|^{2^\sharp - 2}u \text{ ou } f.(u^+)^{2^\sharp - 1}$$

où P_g *est l'opérateur GJMS d'ordre* $2k$ *et* $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ *; alors* $u \in C^{2k}(M)$*, et c'est une solution classique de l'équation précédente. De plus si* $u > 0$ *et* $f \in C^\infty(M)$ *alors* $u \in C^\infty(M)$*.*

1.2 Les outils géométriques

1.2.1 Courbures Riemanniennes

Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 3, (\Omega,\varphi)$ une carte locale dans M et ∇ la connexion de Levi-Civita donnée par son expression locale

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

où g_{ij} et g^{ij} désignent respectivement les composantes du tenseur métrique riemannien et son inverse dans la carte locale (Ω,φ) .

Le tenseur de courbure R relatif à la connexion ∇ s'écrit

$$R_{ijk}^{l} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^{l}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^{l}}{\partial x_k} + \Gamma_{j\alpha}^{l}\Gamma_{ki}^{\alpha} - \Gamma_{k\alpha}^{l}\Gamma_{ji}^{\alpha}$$

celui de Riemann Rm_g est alors donné par

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R_{jkl}^{\alpha}.$$

Le tenseur de courbure de Ricci est obtenu par contraction de R i.e.

$$Ric_{ij} = R_{i\alpha j}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha j\beta}.$$

La courbure scalaire est la fonction numérique de classe C^{∞}sur M notée par $Scal_g$ et définie par

$$Scal_g = Ric_{ij} g^{ij}$$

1.2.2 Classe conforme

Comme la famille des métriques Riemanniennes est très large on se restreint à une classe importante appelée la classe conforme.

Définition 1.2.1. Si $f > 0$ une fonction de classe C^{∞}sur M , $\tilde{g} = fg$ est dite métrique conforme à g. La classe conforme de g est notée $[g]$ et donnée par

$$[g] = \{fg,\ f \in C^{\infty}(M) \text{ et } f > 0\ \}.$$

1.2.3 Opérateurs géométriques

l'opérateur de Laplace-Beltrami

Définition 1.2.2. Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 2$, (Ω, φ) une carte locale dans M et $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées locales. Soit $u \in C^\infty(M)$, l'opérateur de Laplace-Beltrami est l'opérateur différentiel d'ordre deux défini dans la carte locale (Ω, φ) par la formule suivante :

$$\Delta_g(u) := -\frac{1}{\sqrt{|g(x)|}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g(x)|}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

où g_{ij} et g^{ij} désignent respectivement les composantes du tenseur métrique riemannien et son inverse dans la carte (Ω, φ) et $|g(x)|$ la valeur absolue du détérminat de la matrice associcée à la métrique g toujours dans la carte locale.

On sait que sur une variété Riemannienne de dimension 2, l'opérateur de Laplace-Beltrami est un opérateur géométrique naturel. Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2\varphi}.g$ et lorsque la dimension est 2, le Laplacien pour $\tilde{g}$ est relié au Laplacien pour g par la relation

$$\Delta_{\tilde{g}}(u) = e^{-2\varphi}.\Delta_g(u) \quad \forall u \in C^\infty(M) \tag{1.2.1}$$

Laplacien conforme

En dimension plus grande que 2, la même phénomène d'invariance conforme se répète mais dans ce cas là pour un opérateur (d'ordre 2 toujours) mais légèrement différent du Laplacien, opérateur appelé Laplacien conforme

$$L_g := \frac{4(n-1)}{(n-2)}\Delta_g + Scal_g. \tag{1.2.2}$$

On a, si $\tilde{g} = e^{2\varphi}.g$, pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$L_g\left(e^{\frac{n-2}{2}\varphi}.u\right) = e^{\frac{n+2}{2}\varphi}.L_{\tilde{g}}(u). \tag{1.2.3}$$

D'une façon plus générale, on dira qu'un opérateur T_g dépendant de la métrique g est conformément covariant de bi-degré (a, b) si, sous le changement conforme de métrique $\tilde{g} = e^{2\varphi}.g$, les opérateurs $T_{\tilde{g}}$ et T_g sont reliés par la relation

$$T_g\left(e^{a\varphi}.u\right) = e^{b\varphi}T_{\tilde{g}}(u) \quad \forall u \in C^\infty(M). \tag{1.2.4}$$

L'opérateur de Paneitz

Un opérateur d'ordre 4 particulièrement intéressant fut découvert en 1983 par **S. Paneitz**[19]. Cet opérateur n'est défini que sur les variétés de dimension 4. Il est donné par

$$P_g^4(u) = \Delta_g^2(u) - div\left(\frac{2}{3}Scal_g.g - 2Ric_g\right)du. \tag{1.2.5}$$

Cet opérateur est conformément covariant de bidegré $(0,4)$ i.e si $\tilde{g} = e^{2\varphi}.g$

$$P_{\tilde{g}}^4(u) = e^{-4\varphi}.P_g^4(u) \quad \forall u \in C^\infty(M). \tag{1.2.6}$$

L'opérateur de Paneitz sur les variétés de dimension 4 présente beaucoup de similitudes avec l'opérateur Laplacien sur les surfaces

Nous allons les présenter ici

1. Sur une surface compacte, l'invariant de courbure naturel associé à Δ_g est la courbure de Gauss K_g. Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2\varphi}.g$, on a,

$$-\Delta_g\varphi + K_g = K_{\tilde{g}}e^{2\varphi} \tag{1.2.7}$$

sur une variété de dimension 4 on a,

$$P_g^4(\varphi) + Q_g = Q_{\tilde{g}}e^{4\varphi}. \tag{1.2.8}$$

Où Q_g est l'invariant de courbure défini par

$$Q_g = \frac{1}{12}\left(-\Delta Scal_g + Scal_g^2 - 3|Ric_g|^2\right).$$

2. L'analogie entre K et Q est encore plus flagrante, en fait la quantité $\int_M K_g dv_g$ est un invariant conforme dans le sens où si M est une surface muni d'une métrique g donc si $\tilde{g} = e^{2\varphi}.g$ une métrique conforme à g alors

$$\int_M K_g dv_g = \int_M K_{\tilde{g}} dv_{\tilde{g}}$$

de même en dimension 4, $\int_M Q_g dv_g$ est un invariant conforme, en effet ; en intégrant des deux cotés la formule (1.2.8) par rapport à la mesure définie par la métrique g ; (dv_g) et puisque P_g^4 est un opérateur auto-adjoint on aura

$$\int_M \varphi P_g^4(1) dv_g + \int_M Q_g dv_g = \int_M Q_{\tilde{g}} e^{4\varphi} dv_g$$

d'où le résultat ; puisque $1 \in Ker(P_g^4)$ et $dv_{\tilde{g}} = e^{4\varphi} dv_g$.

Le problème de Yamabe

Lorsque la dimension de la variété est supérieurs ou égale à 3 on a vu que l'opérateur qui est conformément covariant d'ordre 2 est le Laplacien conforme L_g. Si on écrit le changement conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}.g$ où u est une fonction régulière et strictement positive, comme on l'a vu pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u.\varphi)$$

en prenant $\varphi \equiv 1$ dans cette égalité on obtient

$$L_g(u) = Scal_{\tilde{g}}.u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{1.2.9}$$

ou encore

$$\Delta(u)_g + \frac{(n-2)}{4(n-1)} Scal_g.u = \frac{(n-2)}{4(n-1)} Scal_{\tilde{g}}.u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{1.2.10}$$

Il se trouve que cette équation est intimement liée à un fameux problème dans l'analyse non linéaire sur les variétés c'est le problème de Yamabe.

L'opérateur de Panietz-Branson

De même pour les variétés de dimension $n \geq 5$ il existe aussi un opérateur d'ordre 4 qui est conformément covariant celui-ci fut mis en évidence par Branson [6] à savoir dans une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$ l'opérateur de Paneitz-Branson est défini par

$$P_g^n(u) = \Delta_g^2(u) - div_g\left(a_n Scal_g.g + b_n Ric_g\right) du + \frac{n-4}{2} Q_g^n.u$$

Où

$$Q_g^n = C_n |Ric_g|^2 + d_n Scal_g^2 - \frac{1}{2(n-2)} \Delta_g Scal_g.$$

$$a_n = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)},\ b_n = \frac{-4}{n-2},\ C_n = -\frac{2}{(n-2)^2}$$

et $d_n = \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}$. Cet opérateur est conformément covariant, si $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}}.g$ alors $\forall u \in C^\infty(M)$

$$P_{\tilde{g}}^n(u) = \varphi^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g^n(u.\varphi)$$

en particulier pour $u \equiv 1$ on obtient

$$P_g^n(\varphi) = \varphi^{\frac{n+4}{n-4}} P_{\tilde{g}}^n(1).$$

Or $P_{\tilde{g}}^n(1) = \frac{n-4}{2} Q_{\tilde{g}}^n$ et ainsi on aura

$$P_g^n(\varphi) = \frac{n-4}{2} Q_{\tilde{g}}^n . \varphi^{\frac{n+4}{n-4}}. \tag{1.2.11}$$

1.2.4 L'opérateur GJMS

La généralisation de ces opérateurs à l'ordre supérieur est apparue avec le fameux travail [9] où les auteurs en s'appuyant sur la métrique de Fefferman-Graham ont construit un opérateur P_g dite opérateur GJMS (Graham-Jenne-Mason-Sparling) qui s'écrit sous la forme suivante

$$P_g := \Delta_g^k + l.o.t$$

où $l.o.t$ est un terme d'ordre inférieur à $2k$.

Signalons au passage quelques propriétés essentielle de cet opérateur :

1. Si la dimension de la variété M est impaire alors P_g est un opérateur différentiel d'ordre quelconque ; sinon (c'est-à-dire n est paire) alors l'ordre $2k$ de l'opérateur GJMS P_g ne peut pas dépasser la dimension n (i.e $n \geq 2k$), dans la littérature les opérateurs d'ordre $2k = n$ sont dites des opérateurs critiques ; tandis que pour le cas $n > 2k$ sont dites sous-critique. Ainsi l'opérateur Laplacien ($k = 1, n = 2$) et l'opérateur de Paneitz ($k = 2, n = 4$) représentent les deux premiers opérateurs GJMS critiques pour les surfaces et les variétés de dimension 4 respectivement ; par contre le Laplacien conforme $k = 1, n > 2$ et l'opérateur de Paneitz-Branson ($k = 2, n > 4$) représentent les deux premiers opérateurs GJMS sous-critiques. Dans ce travail nous considérons un opérateur GJMS, P_g sous-critique (i.e $n > 2k$).
2. P_g est un opérateur auto-adjoint dans le sens ; $\forall u, v \in C^\infty(M)$

$$\int_M u P_g(v)\, dv_g = \int_M v P_g(u)\, dv_g$$

3. Pour $n \geq 2k$, P_g est un opérateur conformément covariant de bi-degré $(\frac{n-2k}{2}, \frac{n+2k}{2})$ en d'autre terme, si $\tilde{g}$ est une métrique conforme à g (i.e $\tilde{g} = e^{2\varphi}.g$) alors

$$P_{\tilde{g}}(u) = e^{-\frac{n+2k}{2}\varphi} P_g\left(e^{\frac{n-2k}{2}\varphi}.u\right) \quad \forall u \in C^\infty(M) \tag{1.2.12}$$

Dans le cas ou $n > 2k$, il est plus commode de considérer le changement conforme $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2k}} g$ de la métrique g, ce qui donne

$$P_g(u.\varphi) = \varphi^{\frac{n+2k}{n-2k}} P_{\tilde{g}}(u) \quad \forall u \in C^{2k}(M). \tag{1.2.13}$$

avec la propriété :

$$P_g(1) = \frac{n-2k}{2}.Q_g \tag{1.2.14}$$

où Q_g est la Q-courbure associée à P_g.

Coércivité de l'opérateur GJMS et conséquences

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$ avec $2k < n$, on désigne par $H_k^2(M)$ l'espace de Sobolev qui est par définition le complété de l'espace $C^\infty(M)$ pour la norme

$$\|u\|_{2,k} := \sum_{i=0}^{k} \left(\int_M |\nabla^i u|^2 dv_g\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\forall u \in C^\infty(M)$, cette norme est équivalente à la norme

$$\|u\|_{H_k^2(M)} := \left(\sum_{i=0}^{k} \int_M |\nabla^i u|^2 dv_g\right)^{\frac{1}{2}}$$

Considérons maintenant l'opérateur GJMS donné par

$$P_g := \Delta_g^k + l.o.t.$$

Définition 1.2.3. Étant donné (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n. On dit que l'opérateur P_g d'ordre $2k < n, (k \in \mathbb{N}^\star)$ est coercif s'il existe une constante positive C telle que

$$\forall u \in H_k^2(M); \quad \int_M u P_g(u) dv_g \geq C\|u\|^2_{L^2(M)}.$$

Il est démontré par F. Robert dans [22] que l'opérateur P_g possède la formule suivante

$$P_g = \Delta_g^k + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \nabla^{j_l \ldots j_1} \left(A_{(l)}(g)_{i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_l} \nabla^{i_1 \ldots i_l} \right) \text{ [1]} \tag{1.2.15}$$

où $A_{(l)}(g)$ est un tenseur symétrique de type $(0, 2l)$ et de classe $C^\infty(M)$. Plus précisément $\forall l \in \{0, ...k-1\}$, $A_{(l)}(g)$ est symétrique dans le sens suivant :

$$A_{(l)}(g)\,(X, Y) = A_{(l)}(g)\,(Y, X)\,;\ \forall X, Y \text{ deux tenseurs de type } (0, l)$$

ensuite avec une intégration par partie dans (1.2.15), il a déduit la formule suivante

$$\int_M u P_g(v) dv_g = \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u \Delta_g^{\frac{k}{2}} v + \sum_{l=0}^{k-1} A_{(l)}(g)(\nabla^l u, \nabla^l v) \right) dv_g \quad \forall u, v \in C^\infty(M). \tag{1.2.16}$$

avec la convention

$$\Delta_g^{\frac{k}{2}} u \Delta_g^{\frac{k}{2}} \varphi := \left(\nabla \Delta_g^{\frac{k-1}{2}} u, \nabla \Delta_g^{\frac{k-1}{2}} \varphi \right)_g$$

si k est impair. Beaucoup plus, il a démontré que la quantité

$$\sqrt{\int_M u P_g(u) dv_g} \tag{1.2.17}$$

est une norme équivalente $\forall u \in H_k^2(M)$ à la norme $\|u\|_{2,k}$ (c'est une conséquence de la coercivité de P_g) ; plus précisément

Proposition 1.2.1. *Proposition 2 de [22]*

Supposons que l'opérateur P_g est coercif, donc la quantité définie par (1.2.17) est une norme équivalente dans l'espace $H_k^2(M)$ à la norme $\|u\|_{2,k}$.

Vue l'importance de ce résultat nous présentons la preuve donnée par l'auteur.

Démonstration.

Il vient d'après la coercivité et la linéarité de l'opérateur P_g que la quantité (1.2.17) est une norme qu'on va la noter par $\|.\|$, il nous reste à montrer que cette norme est équivalente à $\|u\|_{2,k}$; pour cela on procède par l'absurde, on suppose que les deux norme ne sont pas équivalentes ; donc il existe une suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $H_k^2(M)$ telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}; \|u_i\|_{2,k} = 1 \quad \text{et} \quad \|u_i\| = o(1) \text{ quand } i \to +\infty \tag{1.2.18}$$

1. Ici les indices sont sommés suivant l'isomorphisme musical.

Puisque $H_k^2(M)$ est un espace réflexif d'après le théorème (1.1.7) on peut extraire une sous suite qu'on la note encore par $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers une certaine fonction u dans $H_k^2(M)$. Par ailleurs, il vient d'après la coercivité de P_g et (1.2.18) que

$$\|u_i\|_{L^2(M)} = o(1) \quad \text{ce qui donne } u \equiv 0.$$

Or, l'injection $H_{k-1}^2(M) \subset H_k^2(M)$ est compacte, donc

$$u_i \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } H_k^2(M) \text{ et } u_i \to 0 \text{ fortement dans } H_{k-1}^2(M).$$

et par conséquent, on aura d'après (1.2.18)

$$1 = \lim_{i\to+\infty} \|u_i\|_{2,k} = \lim_{i\to+\infty} \sqrt{\int_M |\nabla^k u_i|_g^2 dv_g + \lim_{i\to+\infty} \|u_i\|_{2,k-1}}$$

ce qui donne

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M |\nabla^k u_i|_g^2 dv_g = 1. \tag{1.2.19}$$

D'autre part, il vient d'après la formule (1.2.16) que

$$\|u_i\| = \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u_i\right)^2 dv_g + \int_M \sum_{l=0}^{k-1} A_{(l)}(g) \left\langle \nabla^l u_i, \nabla^l u_i \right\rangle_g dv_g$$

ou encore d'après (1.2.18)

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u_i\right)^2 dv_g = 0 \tag{1.2.20}$$

En utilisant maintenant la formule de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenbock [2], on obtient que

$$\int_M |\nabla^k u_i|_g^2 dv_g = \int_M |\nabla^{k-2} \Delta_g u_i|_g^2 dv_g + o(1) \quad \text{quand } i \to +\infty$$

on conclut par intégration par partie, après un certain nombre d'itérations que

$$\int_M |\nabla^k u_i|_g^2 dv_g = \int_M \left(\Delta_g^{\frac{k}{2}} u_i\right)^2 dv_g + o(1) \quad \text{quand } i \to +\infty$$

d'où la contradiction, d'après (1.2.19) et (1.2.20). □

2. On renvoie à [22] pour les détails.

Une deuxième conséquence de la coercivité de P_g est que

$$\int_M Q_g dv_g > 0. \tag{1.2.21}$$

En effet, puis que la définition de la coercivité est valable $\forall u \in H_k^2(M)$ alors il vient en particulier pour $u = 1$ qu'il existe une constante $C > 0$ telle que.

$$\int_M P_g(1) dv_g \geq C.V_g(M)$$

où $V_g(M)$ désigne le volume de la variété M. Or, on sait d'après (1.2.14) que

$$P_g(1) = \frac{n-2k}{2}.Q_g$$

d'où (1.2.21).

1.2.5 Fonctions de Green

Nous rappelons dans un premier temps les définitions de fonctions de Green pour les opérateurs ; Laplacien et le bi-Laplacien.

Fonction de Green du Laplacien

Définition 1.2.4. Soit M une variété Riemannienne compacte de volume $V(M)$. La fonction de Green $G(x, y)$ de l'opérateur Laplacien est la solution au sens des distributions de l'équation

$$\Delta_y G(x, y) = \delta_x(y) - \frac{1}{V(M)}$$

où δ_x est la mesure de Dirac.

Dans ce cas la fonction de Green est déterminée modulo une constante.

Théorème 1.2.1. *Soit M une variété Riemannienne compacte de classe C^∞. Le Laplacien admet une fonction de Green $G(x, y)$ qui satisfait les conditions suivantes :*

(a) pour tout $\varphi \in C^2(M)$

$$\varphi(x) = \int_M G(x, y) \Delta\varphi(y) dv_g(y) + \frac{1}{V(M)} \int_M \varphi(y) dv_g(y)$$

(b) Il existe une constante δ telle que

$$|G(x,y)| \leq \delta(1 + |\log r|), \text{ pour } n = 2$$

$$|G(x,y)| \leq \delta r^{2-n}, \text{ pour } \; n > 2, \; |\nabla_y G(x,y)| \leq \delta r^{1-n}$$

et

$$\left|\nabla_y^2 G(x,y)\right| \leq \delta r^{-n}$$

où $r = d(x,y)$.

(b) $G(x,y)$ est de classe C^∞ sur $M \times M$ privé de la diagonale ($x \neq y$).

(c) $G(x,y) = G(y,x)$

(d) Il existe une constante A telle que $G(x,y) \geq A$. Comme la fonction de Green est déterminée à une constante prés, on peut choisir la fonction de Green partout positive.

Fonction de Green du bi-Laplacien

Soit $\varphi \in C^4(M)$ et posons $\Delta\varphi \in C^2(M)$ alors d'après le paragraphe précédent

$$\Delta\varphi\,(y) = \int_M G(y,z)\Delta^2\varphi(z)dv_g\,(z)\,. \tag{1.2.22}$$

Multipliant (1.2.22) par $G(x,y)$, et intégrant sur M

$$\int_M G(x,y)\Delta\varphi\,(y)\,dv_g\,(y) = \int_M \int_M G(x,y)G(y,z)\Delta^2\varphi(z)dv_g\,(z)\,dv_g\,(y)\,.$$

En posant

$$G_o(x,z) = \int_M G(x,y)G(y,z)dv_g\,(y)$$

et en tenant compte de

$$\int_M G(x,y)\Delta\varphi\,(y)\,dv_g\,(y) = \varphi\,(x) - \frac{1}{V(M)}\int_M \varphi(y)dv_g\,(y)$$

on obtient que

$$\varphi\,(x) = \int_M G_o\,(x,y)\,\Delta^2\varphi(y)dv_g(y) + \frac{1}{V(M)}\int_M \varphi(y)dv_g\,(y)\,.$$

La fonction de Green de l'opérateur GJMS

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n ; une des façons pour étudier le problème suivant

$$(P) \begin{cases} P_g(u) = f(x) \\ u > 0 \end{cases} \tag{1.2.23}$$

où P_g est l'opérateur GJMS d'ordre $2k < n$; $k \in \mathbb{N}^\star$; est d'utiliser la fonction de Green de cet opérateur.

Définition 1.2.5. Soient x, y deux points de M, une fonction $G(x, y)$ est dite fonction de Green de l'opérateur P_g pour le problème (P), si la fonction $G(x, y)$ satisfait les conditions suivantes

1. $G(x, y)$ est de classe C^∞ sur $M \times M$ privé de la diagonale $(x \neq y)$.
2. $G(x, y) = G(y, x)$
3. $G(x, y)$ est l'unique fonction vérifiant l'équation

   $$P_g(G(x, y)) = \delta_x(y) \quad (\text{où } \delta \text{ est la mesure de Dirac})$$

   au sens des distributions.

Formellement, la fonction de Green, nous permet d'écrire la solution du problème (P) sous la forme

$$u(x) = \int_M G(x, y) f(y)\, dv_g(y)$$

dès que la fonction f appartient à un espace convenable.

Clairement, une formule explicite pour la fonction de Green, n'est pas toujours disponible, néanmoins dans le cadre des variétés d'Einstein on a le résultat suivant.

Proposition 1.2.2. *Supposons que la variété M est munie d'une métrique g d'Einstein et de courbure scalaire $Scal_g$ positive, alors l'opérateur GJMS P_g admet une fonction de Green positive.*

Démonstration.

Dans une variété d'Einstein (M, g) de dimension n, l'opérateur GJMS d'ordre $2k < n$ possède la formule suivante (voir [9])

$$P_g = \prod_{l=1}^{k} (\Delta - c_l Scal)$$

où $c_l = \frac{(n+2l-2)(n-2l)}{4n(n-1)}$, $Scal$ est la courbure scalaire.

Il est bien connu que si la courbure scalaire $Scal$ est positive alors l'opérateur $\Delta - c_l Scal$ possède une fonction de Green positive.

Pour $l = 1, ..., k$, notons par

$$L_l = \Delta - c_l Scal.$$

On sait par définition de la fonction de Green de L_l que $\forall u \in C^\infty(M)$,

$$(L_l u)(x) = \int_M G_{l+1}(x,y) (L_{l+1} L_l u)(y) dv_g(y).$$

donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_M G_l(x,z) (L_l u)(z) \, dv_g(z) + \frac{1}{Vol(M)} \int_M u(x) dv_g(x) \\ &= \int_M \left(\int_M G_l(x,z) G_{l+1}(z,y) dv_g(z) \right) (L_{l+1} L_l u)(y) dv_g(y) \\ &+ \frac{1}{Vol(M)} \int_M u(x) dv_g(x) \end{aligned}$$

et si on fait la notation suivante

$$G_{l,l+1}(x,y) = G_l * G_{l+1}(x,y) = \int_M G_l(x,z) G_{l+1}((z,y) dv_g(z).$$

Alors, il vient par récurrence que

$$u(x) = \int_M G_1 * ... * G_k(x,y) P_g(y) dv_g(y).$$

Ce qui prouve que P_g admet une fonction de Green positive. $\square$

Chapitre 2

L'existence de solutions d'une équation elliptique singulière

2.1 L'existence de la première solution

Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, A, B et C des fonctions positives de classe $C^{\infty}(M)$.

Dans cette section, nous étudions l'existence de la première solution pour l'équation suivante

$$\begin{cases} P_g(u) = B\left(x\right)u^{2^\sharp - 1} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp + 1}} + \frac{C(x)}{u^p} \\ u > 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où P_g est l'opérateur GJMS d'ordre $2k$ avec $2k < n$; $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ et $1 + 2^\sharp > p > 1$.

Pour démontrer l'existence de solutions, on se base essentiellement sur le travail de Hebey-Pacard-Pollack [12] et nous considérons l'équation approchée suivante ($\varepsilon > 0$)

$$P_g(u) = B\left(x\right)\left(u^+\right)^{2^\sharp - 1} + \frac{A\left(x\right)u^+}{\left(\varepsilon + (u^+)^2\right)^{2^\flat + 1}} + \frac{C(x)u^+}{\left(\varepsilon + (u^+)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} \tag{2.1.2}$$

où $2^\flat = \frac{2^\sharp}{2}$, $p > 1$. l'étude de cette équation nous donne l'existence d'une suite de solutions $(u_\epsilon)_\epsilon$ pour (2.1.2) ; cette suite de solutions admet comme limite la solution de notre équation (2.1.1).

Afin de démontrer l'existence de la suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ nous utilisons la méthode variationnelle ; qui consiste à déterminer une fonctionnelle à optimiser sur un espace bien choisi. Dans notre cas on se place dans l'espace $H_k^2(M)$ et nous considèrons la fonctionnelle I_ϵ définie pour tout $\varphi \in H_k^2(M)$ et pour tout $\epsilon > 0$, par

$$I_\epsilon(u) = I^{(1)}(u) + I_\epsilon^{(2)}(u)$$

où $I^{(1)} : H_k^2(M) \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$I^{(1)}(u) = \frac{1}{2}\int_M uP_g(u)dv_g - \frac{1}{2^\sharp}\int_M B(x)\left(u^+\right)^{2^\sharp} dv_g$$

et $I_\varepsilon^{(2)} : H_k{}^2(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$I_\varepsilon^{(2)}(u) = \frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\varepsilon + (u^+)^2\right)^{2^\flat}} dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon + (u^+)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}} dv_g.$$

2.1.1 La condition de Palais-Smale

Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $H_k^2(M)$.

Définition 2.1.1. On dit que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Palais-Smale (P-S) pour la fonctionnelle I_ε s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $I_\varepsilon(u_m) \to \beta$ et $DI_\varepsilon(u_m) \to 0$ fortement dans le dual $(H_k^2(M))'$. La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est dite de Palais-Smale pour la fonctionnelle I_ε au niveau β.

Définition 2.1.2. On dit que la fonctionnelle I_ε satisfait la condition de Palais-Smale au niveau β si pour toute suite de Palais-Smale $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $H_k^2(M)$, on peut extraire une sous-suite $(u_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement.

Nous allons maintenant prouvé que la fonctionnelle I_ε vérifie la condition de Palis-Smale. L'un des résultats principal dans ce chapitre est le suivant

Théorème 2.1.1. *(Théorème 4 de [3])*

Il existe une suite de Palais-Smale $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $H_k^2(M)$ pour la fonctionnelle I_ε, de plus à extraction prés d'une sous suite ; $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une solution u_ϵ positive et régulière de l'équation approchée (2.1.2).

Dans la preuve de ce Théorème on aura besoin de deux lemmes utiles ; avant de les énoncer faisons quelques remarques

1. Si on pose
$$\Phi\left(t\right)=\frac{1}{2}t^{2}-\frac{1}{2^{\sharp}}\left(S\max_{M}\left|B\right|\right)t^{2^{\sharp}} \tag{2.1.3}$$
et
$$\Psi\left(t\right)=\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{2^{\sharp}}\left(S\max_{M}\left|B(x)\right|\right)t^{2^{\sharp}}.$$
alors, il est facile de voir que $\forall u\in H_{k}^{2}(M)$; la fonctionnelle $I^{(1)}$ vérifie les inégalités suivantes
$$\Phi\left(\|u\|\right)\leq I^{(1)}\left(u\right)\leq\Psi\left(\|u\|\right) \tag{2.1.4}$$
où $\|u\|^{2}:=\int_{M}uP_{g}(u)\,dv_{g}$.
En effet, comme l'opérateur P_{g} est coercif alors la quantité $\left(\int_{M}uP_{g}(u)\,dv_{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalente à la norme standard de $H_{k}^{2}(M)$ qu'on la note par $\|.\|$, de plus comme $B(x)\in C^{\infty}(M)$ alors
$$\int_{M}B\left(x\right)\left(u^{+}\right)^{2^{\sharp}}dv_{g}\leq\max_{M}B(x)\|u\|_{L^{2^{\sharp}}}^{2^{\sharp}}$$
or, d'après l'inégalité (1.1.1) il vient que
$$\begin{aligned}I^{(1)}\left(u\right):=&\frac{1}{2}\int_{M}uP_{g}(u)dv_{g}-\frac{1}{2^{\sharp}}\int_{M}B\left(x\right)\left(u^{+}\right)^{2^{\sharp}}dv_{g}\\ \leq&\frac{1}{2}\|u\|^{2}+\frac{1}{2^{\sharp}}S\max_{M}B(x)\|u\|^{2^{\sharp}}\end{aligned}$$
d'où la deuxième inégalité dans (2.1.4) ; par la même technique on trouve la première inégalité.

2. L'étude des variations de la fonction $\Phi(t)$ montre que cette fonction est croissante sur $[0,t_{0}]$ et décroissante sur $]t_{0},+\infty[$ où
$$t_{0}=\left(\frac{1}{S\max\limits_{M}B(x)}\right)^{\frac{n-2k}{4k}} \tag{2.1.5}$$
de plus
$$\Phi(t_{0})=\frac{k}{n}t_{0}^{2}. \tag{2.1.6}$$

Énonçons maintenant notre premier lemme

Lemme 2.1.1. *Soit $\theta>0$ tel que*
$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2^{\natural}}}<\theta^{2}<a^{\frac{2}{2^{\natural}}}$$

où

$$a = \frac{1}{(2\,(n-k))^{\frac{2^\natural}{2}}}$$

et posons

$$t_1 = \theta t_0.$$

alors on a l'inégalité suivante

$$\Psi\,(t_1) \leq \theta^2 \frac{2^\sharp + 2}{2^\sharp - 2} \Phi\,(t_0) < \frac{1}{2k} \Phi\,(t_0)\,. \tag{2.1.7}$$

Démonstration.

En fait

$$\begin{aligned} \Psi\,(t_1) &= \frac{1}{2} t_1^2 + \left(S \max_{x \in M} B(x) \right) \frac{t_1^{2^\sharp}}{2^\sharp} \\ &= \theta^2 \left(\frac{1}{2} t_0^2 + S \max_{x \in M} B(x) \theta^{2^\sharp - 2} \frac{t_0^{2^\sharp}}{2^\sharp} \right). \end{aligned}$$

comme

$$t_0^{2^\sharp} \left(S \max_{x \in M} B(x) \right) = t_0^2 \tag{2.1.8}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Psi\,(t_1) &= \theta^2 \left(\frac{1}{2} t_0^2 + \frac{\theta^{2^\sharp - 2}}{2^\sharp} t_0^2 \right) \\ &= \theta^2 t_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\theta^{2^\sharp - 2}}{2^\sharp} \right] \\ &\leq \theta^2 t_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{n - 2k}{2n} \right) \\ &\leq \left(1 - \frac{k}{n} \right) \theta^2 t_0^2. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{2^\sharp + 2}{2^\sharp - 2} = \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \Phi\,(t_0) = \frac{k}{n} t_0^2$$

d'où

$$\Psi\,(t_1) \leq \theta^2 \frac{2^\sharp + 2}{2^\sharp - 2} \Phi\,(t_0) < \frac{1}{2k} \Phi\,(t_0)\,.$$

□

Le deuxième lemme s'énonce comme suit

Lemme 2.1.2. *La fonctionnelle I_ϵ satisfait la condition suivante : il existe une boule ouverte $B(u_1,\rho)$ de centre u_1 dans $H_k^2(M)$ et de rayon $\rho>0$ et ils existent $u_2\notin \overline{B}(u_1,\rho)$ et un nombre réel c_0 tels que*

$$\max\left(I_\epsilon(u_1), I_\epsilon(u_2)\right) < c_o \leq I_\epsilon(u)$$

pour tout $u\in\partial B(u_1,\rho)$ [1].

Démonstration.

Nous suivons la stratégie donnée dans le travail de Hebey-Pacard-Pollack [12], on considère une fonction $\varphi\in C^\infty(M)$, $\varphi>0$ sur M avec, sans restreindre la généralité, $\|\varphi\|=1$. Posons

$$C\left(n,p,k\right) = \left(2k-1\right)\frac{\theta^{2^\sharp+p}}{4n} \leq C_1\left(n,k\right) = \frac{\left(2k-1\right)\theta^{2^\sharp}}{4n}. \tag{2.1.9}$$

Donc l'inégalité (0.0.12) devient

$$\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(t_1\varphi\right)^{2^\sharp}} dv_g \leq \frac{2k-1}{4k}\Phi\left(t_0\right). \tag{2.1.10}$$

En fait, on a

$$\Phi(t_o) = \frac{k}{n}t_o^2. \tag{2.1.11}$$

et par (2.1.9), il vient que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^\natural}\int_M \frac{A(x)}{\left(t_1\varphi\right)^{2^\sharp}} dv_g &\leq \frac{C_1\left(n,k\right)}{t_o^{2^\natural}\theta^{2^\natural}}\left(S.\max_M B\left(x\right)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \\ &= \frac{2k-1}{4k}\Phi(t_o).\end{aligned}$$

On procède de manière analogue avec

$$C_2(n,p,k) = \frac{\left(2k-1\right)\theta^{p-1}}{4n} \tag{2.1.12}$$

c'est-à-dire, on remplace $C(n,p,k)$ dans (0.0.13) par $C_2(n,p,k)$; ce qui donne

$$\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(t_1\varphi\right)^{p-1}} dv_g \leq \frac{2k-1}{4k}\Phi(t_o). \tag{2.1.13}$$

1. $(\partial B(u_1,\rho)$ constitue le bord de la boule $B(u_1,\rho))$.

Combinant (2.1.4), (2.1.7), (2.1.10) et (2.1.13), on aboutit à

$$I_\epsilon(t_1\varphi) \leq \Psi(\|t_1\varphi\|) + \frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\varepsilon + (t_1\varphi)^2\right)^{2^\flat}}dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon + (t_1\varphi)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g$$

$$\leq \Psi(t_1) + \frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\varepsilon + (t_1\varphi)^2\right)^{2^\flat}}dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon + (t_1\varphi)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g \leq \Phi(t_0). \tag{2.1.14}$$

Toujours avec (2.1.4), il en résulte que

$$I_\epsilon(t_0\varphi) \geq \Phi(t_0) + \frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\varepsilon + (t_0\varphi)^2\right)^{2^\flat}}dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\varepsilon + (t_o\varphi)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g \tag{2.1.15}$$

et comme A et C sont supposées à valeurs positives, on trouve

$$I_\epsilon(t_0\varphi) \geq \Phi(t_0). \tag{2.1.16}$$

Finalement de (2.1.14) et (2.1.16), on conclut que

$$I_\epsilon(t_1\varphi) < \Phi(t_0) \leq I_\epsilon(t_0\varphi).$$

D'autre part, comme $\int_M B(x)\varphi^{2^\sharp}dv_g > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} I_\epsilon(t\varphi) &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\|t\varphi\|^2 - \frac{1}{2^\sharp}\int_M\left(B(x)(t\varphi)^{2^\sharp}dv_g - \frac{A(x)}{\left(\epsilon+(t\varphi)^2\right)^{2^\flat}}\right)dv_g\right]\\
&+ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\epsilon+(t\varphi)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g\\
&= \lim_{t\to+\infty} t^{2^\sharp}\left(\frac{1}{2t^{2^\sharp-2}} - \frac{1}{2^\sharp}\int_M B(x)\varphi^{2^\sharp}dv_g\right)\\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe t_2 tel que

$$t_2 > t_0 \quad \text{et} \quad I_\epsilon(t_2\varphi) < 0.$$

Maintenant, pour établir les conditions du Lemme 2.1.2, il suffit de poser

$$u_1 = t_1\varphi,\ u_2 = t_2\varphi,\ u = t_0\varphi$$

et on prend $\rho = t_0 - t_1 > 0$ et $c_0 = \Phi(t_0)$. $\square$

Il résulte alors du théorème (1.1.10) qu'il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que

$$C_\epsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma} I_\epsilon(u)$$

où Γ désigne l'ensemble des courbes dans $H_k^2(M)$ joignant les fonctions $u_1 = t_1\varphi$ et $u_2 = t_2\varphi$.

Autrement dit C_ϵ est une valeur critique pour la fonctionnelle I_ϵ avec

$$C_\epsilon > \Phi(t_0).$$

Remarque 2.1.1. Si nous considérons par exemple $\gamma(t) = t\varphi$, pour $t \in [t_1, t_2]$, donc on voit que C_ϵ est uniformément bornée quand ϵ tend vers 0, ainsi pour ϵ suffisamment petit on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ϵ telle que

$$0 < \Phi(t_0) < C_\epsilon \leq C. \tag{2.1.17}$$

De plus, d'après le lemme 2.1.2 il existe une suite de fonctions $(u_m)_m$ dans $H_k^2(M)$ telle que

$$I_\epsilon(u_m) \underset{m\to+\infty}{\to} C_\epsilon \quad \text{et} \quad DI_\epsilon(u_m) \underset{m\to+\infty}{\to} 0 \tag{2.1.18}$$

en d'autre terme, la suite $(u_m)_{m\in N}$ est une suite de Palais-Smale (P-S) pour la fonctionnelle I_ϵ.

Maintenant, nous somme dans une situation convenable pour démontrer le théorème (2.1.1).

Démonstration.

On a, grâce à (2.1.18)

$$DI_\epsilon(u_m)\varphi = o(\|\varphi\|) \qquad \forall\varphi \in H_k^2(M)$$

ou encore, $\forall\varphi \in H_k^2(M)$

$$\int_M \varphi P_g u_m dv_g = \int_M B(x)\left(u_m^+\right)^{2^\sharp-1}\varphi dv_g \tag{2.1.19}$$

$$+\int_M \frac{A(x)\,u_m^+\varphi}{\left(\epsilon+(u_m^+)^2\right)^{2^\flat+1}}dv_g + \int_M \frac{C(x)u_m^+\varphi}{\left(\epsilon+(u_m^+)^2\right)^{\frac{p}{2}+1}}dv_g + o(\|\varphi\|)$$

en particulier, pour $\varphi \equiv u_m$ il vient

$$\int_M u_m P_g u_m dv_g - \int_M B(x)\left(u_m^+\right)^{2^\sharp} dv_g = \int_M \frac{A(x)\left(u_m^+\right)^2}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{2^\flat+1}} dv_g$$

$$+ \int_M \frac{C(x)\left(u_m^+\right)^2}{\left(\epsilon + (u_m)^2\right)^{\frac{p}{2}+1}} dv_g + o\left(\|u_m\|\right).$$

ou encore

$$-\frac{1}{2}\int_M u_m P_g u_m dv_g + \frac{1}{2}\int_M B(x)\left(u_m^+\right)^2 dv_g$$

$$+\frac{1}{2}\int_M \frac{A(x)\left(u_m^+\right)^2}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{2^\flat+1}} dv_g + \frac{1}{2}\int_M \frac{C(x)\left(u_m^+\right)^2}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{\frac{p}{2}+1}} dv_g = o\left(\|u_m\|\right). \quad (2.1.20)$$

Toujours avec (2.1.18), on obtient ainsi que

$$\frac{1}{2}\int_M u_m P_g u_m dv_g - \frac{1}{2^\sharp}\int_M B(x)\left(u_m^+\right)^{2^\sharp} dv_g$$

$$+\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{2^\flat}} dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}} dv_g = C_\epsilon + o\left(\|u_m\|\right). \quad (2.1.21)$$

Donc, par addition (2.1.20) et (2.1.21) on trouve

$$\frac{k}{n}\int_M B(x)\left(u_m^+\right)^{2^\sharp} dv_g + \frac{1}{2}\int_M \frac{A(x)\left(u_m^+\right)^2}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{2^\flat+1}} dv_g + \frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{2^\flat}} dv_g \quad (2.1.22)$$

$$+\frac{1}{2}\int_M \frac{C(x)\left(u_m^+\right)^2}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{\frac{p}{2}+1}} dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\epsilon + (u_m^+)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}} dv_g = C_\epsilon + o\left(\|u_m\|\right).$$

Enfin pour m assez grand, on en déduit que

$$\frac{k}{n}\int_M B(x)\left(u_m^+\right)^{2^\sharp} dv_g \leq 2C_\epsilon + o\left(\|u_m\|\right)$$

ou encore

$$\frac{1}{2^\sharp}\int_M B(x)\left(u_m^+\right)^{2^\sharp} dv_g \leq \frac{n}{2^\sharp}C_\epsilon + o\left(\|u_m\|\right)$$

reportons cette inégalité dans (2.1.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_M u_m P_g u_m dv(g) &\leq C_\epsilon + \frac{n}{2^\sharp}C_\epsilon + o\left(\|u_m\|\right) \\
&\leq nC_\epsilon + \frac{n(n-2k)}{2n}C_\epsilon + o\left(\|u_m\|\right) \\
&\leq 2nC_\epsilon + o\left(\|u_m\|\right).
\end{aligned}$$

D'où pour m assez grand

$$\int_M u_m P_g u_m dv_g \leq 4nC_\epsilon + o(1)$$
$$\leq 4nC_\epsilon + 1$$

i.e.

$$\|u_m\|^2 \leq 4nC_\epsilon + 1. \tag{2.1.23}$$

Ainsi, on a démontré que la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $H_k^2(M)$.

Pour obtenir l'existence d'une solution faible pour l'équation (2.1.2) il suffit d'appliquer le théorème (1.1.7).

En effet, comme la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $H_k^2(M)$; donc d'après le théorème (1.1.7) [2] il existe $u_\epsilon \in H_k^2(M)$ telle que à extraction près d'une sous-suite

① $u_m \to u_\epsilon$ faiblement dans $H_k^2(M)$.

② $u_m \to u_\epsilon$ fortement dans $L^p(M)$, $\forall p < \frac{2n}{n-2k}$

③ $u_m \to u_\epsilon$ presque par tous dans M.

④ $(u_m)^{2^\sharp-1} \to u_\epsilon^{2^\sharp-1}$ faiblement dans $L^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp-1}}(M)$.

De plus, comme

$$\forall m \in \mathbb{N} : \left((u_m^+)^2 + \epsilon\right)^{-q} < \epsilon^{-q} \ \left(\text{notons que } \epsilon^{-q} \in L^p(M) \quad \forall p \geq 1\right).$$

où $\epsilon > 0$ et $q > 0$; alors par passage à la limite (quand $m \to +\infty$), par convergence dominée, il vient que

$$\left(\left(u_m^+\right)^2 + \epsilon\right)^{-q} \to \left((u_\epsilon)^2 + \epsilon\right)^{-q}$$

fortement dans $L^p(M)$ $\forall p \geq 1$.

Appliquant ② on voit que :

$$\frac{u_m^+}{\left((u_m^+)^2 + \epsilon\right)^q} \to \frac{u_\epsilon^+}{\left(\epsilon + (u_\epsilon^+)^2\right)^q}$$

fortement dans $L^2(M)$.

Enfin, en passant à la limite quand $m \to +\infty$ dans (2.1.19) on obtient que u_ϵ est

2. regarder ce que nous avons dit après ce théorème.

une solution faible de l'équation

$$P_g u_\epsilon = B\left(x\right)\left(u_\epsilon^+\right)^{2^\sharp - 1} + \frac{A\left(x\right)u_\epsilon^+}{\left(\epsilon + \left(u_\epsilon^+\right)^2\right)^{2^\flat + 1}} + \frac{C(x)u_\epsilon^+}{\left(\epsilon + \left(u_\epsilon^+\right)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} \tag{2.1.24}$$

où $2^\flat = \frac{2^\natural}{2}$ et $p > 1$.

On en conclut que u_ϵ est une solution faible de l'équation ϵ-approchée (2.1.2). Il nous reste donc la positivité et la régularité de u_ϵ. □

2.1.2 Positivité et régularité de la solution approchée

On va maintenant compléter le résultat du théorème (2.1.1) en montrant que la solution u_ϵ de (2.1.2) est positive et régulière.

1. **Positivité de la solution**

   On a d'après (2.1.22)

   $$\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(\epsilon + \left(u_m\right)^2\right)^{2^\flat}} dv_g \leq C_\epsilon + o(\|u_m\|).$$

   avec (2.1.17) et en faisant tendre $m \to +\infty$, on obtient

   $$\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(\epsilon + \left(u_\epsilon^+\right)^2\right)^{2^\flat}} dv_g \leq C \tag{2.1.25}$$

   où C est une borne supérieure de C_ϵ.

   Supposons maintenant, que pour une suite de nombres positifs $(\epsilon_j)_j$ (suffisamment petits), la solution u_{ϵ_j} s'annule ; donc (2.1.25) devient

   $$\frac{1}{2^\sharp \epsilon_j^{2^\flat}}\int_M A\left(x\right)dv\left(g\right) \leq C. \tag{2.1.26}$$

   Ainsi, pour ϵ_j assez petit, on aboutit à une contradiction avec le fait que $A > 0$ (une condition qu'on a supposé par hypothèse).

   D'où l'on déduit, que pour ϵ assez petit, u_ϵ est une solution non identiquement nulle de l'équation (2.1.2).

2. **Régularité de la solution**

   Il s'agit de montrer que la solution u_ϵ est de classe $C^\infty(M)$.

   Premièrement, on peut écrire l'équation (2.1.24) sous la forme

$$P_g u_\epsilon = b(x,u_\epsilon)u_\epsilon$$

où

$$b(x,u_\epsilon) = B\,(x)\left(u_\epsilon^+\right)^{2^\sharp-2} + \frac{A\,(x)}{\left(\epsilon+(u_\epsilon^+)^2\right)^{2^\flat+1}} + \frac{C(x)}{\left(\epsilon+(u_\epsilon^+)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}. \qquad (2.1.27)$$

Comme $\frac{A}{\left(\epsilon+\left(u_\epsilon^+\right)^2\right)^{2^\flat+1}} + \frac{C}{\left(\epsilon+\left(u_\epsilon^+\right)^2\right)^{\frac{p+1}{2}}} \in L^\infty\,(M)$ et $u_\epsilon \in H_k^2\,(M) \subset L^{2^\sharp}\,(M)$, on en déduit que $b \in L^{\frac{n}{2k}}\,(M)$. Ensuite, d'après ce qui a été fait par Mazumdar dans [16] [3], il vient que $u_\epsilon \in L^p(M)$ pour tout $0 < p < +\infty$. Grâce à [1], $u_\epsilon \in H_k^p\,(M)$ pour tout $0 < p < +\infty$ et on poursuit comme dans la démonstration de la proposition 8.3 dans [1], on conclut que $u_\epsilon \in C^{2k,\alpha}(M)$ avec $\alpha \in \,]0,1[$.

Maintenant, comme l'opérateur P_g possède une fonction de Green positive G, c'est-à-dire

$$u_\epsilon(x) = \int_M G(x,y)b(y,u_\epsilon(y))u_\epsilon(y)\;dv_g(y)$$

avec $b(x,u_\epsilon)u_\epsilon \geq 0$ donnée par la formule (2.1.27) ; on en déduit que $u_\epsilon \geq 0$ et par conséquent u_ϵ est une solution de classe $C^\infty(M)$ de l'équation (2.1.24) ; cela démontre le théorème (2.1.1).

2.1.3 Le passage à la limite

Ainsi, nous avons tous les outils nécessaire à la prouve du théorème 0.0.2.

Démonstration.

D'après ce qui précède, on sait déjà que l'équation (2.1.2) admet une solution u_ϵ non nulle et de classe $C^\infty(M)$, plus précisément la solution u_ϵ s'obtient comme étant la limite faible d'une suite de fonctions $(u_m)_m$ donnée par (2.1.23) ; ce qui nous permet d'écrire

$$\|u_\epsilon\| \leq \lim_{m\to+\infty}\inf\|u_m\|$$

d'après la semi-continuité inférieure de la norme.

3. Regarder la démonstration du théorème 5 page 28.

Par ailleurs, on conclut grâce aux inégalités (2.1.17) et (2.1.23) que la suite des solutions approchées $(u_\epsilon)_\epsilon$ est bornée dans $H_k^2(M)$ et par conséquent pour tout $\epsilon > 0$ (suffisamment petit), il existe une constante C (qui ne dépend pas de ϵ) telle que

$$\|u_\epsilon\|^2 \leq 4nC + 1. \tag{2.1.28}$$

Considérons maintenant $(\epsilon_m)_m$ une suite de nombre réels positifs convergeant vers 0 pour laquelle, les relations (2.1.25) et (2.1.28) demeurent valables pour $\epsilon = \epsilon_m$.

Ainsi et d'après (2.1.28) on pourra (a extraction près d'une sous-suite qu'on la note encore par $(u_{\epsilon_m})_{m\in\mathbb{N}}$) supposer que

① $u_{\epsilon_m} \to u$ faiblement dans $H_k^2(M)$.

② $u_{\epsilon_m} \to u$ fortement dans $L^p(M)$, $\forall p < \frac{2n}{n-2k}$

③ $u_{\epsilon_m} \to u$ presque par tous dans M.

④ $(u_{\epsilon_m})^{2^\sharp-1} \to u^{2^\sharp-1}$ faiblement dans $L^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp-1}}(M)$.

Faisons maintenant la remarque suivante :

Dans (2.1.25) si on remplace ϵ par ϵ_m puis on utilise le lemme de Fatou, alors il vient d'après ③ que

$$\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A}{u^{2^\sharp}} dv_g \leq C. \tag{2.1.29}$$

Il est important de noter que cette remarque implique automatiquement que la suite $(u_{\epsilon_m})_m$ est uniformément bornée inférieurement, c'est-à-dire, il existe $\delta > 0$ tel que $u_{\epsilon_m} \geq \delta$ pour tout m dans $\mathbb{N}$.

En effet, si on suppose le contraire, alors il existerait une suite de points $(x_{\epsilon_m})_m$ dans M telle que

$$u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}) \to 0 \quad \text{quand } m \to +\infty$$

comme la variété M est compacte, alors on peut extraire une sous-suite notée aussi $(x_{\epsilon_m})_m$ qui converge vers x_0. Mais comme l'opérateur P_g possède par hypothèse une fonction de Green G positive donc on peut écrire

$$u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}) =$$

$$\int_M G(x_{\epsilon_m}, y)\left(B(y)\left(u_{\epsilon_m}(y)\right)^{2^\sharp-1} + \frac{A(y)\,u_{\epsilon_m}(y)}{\left(\epsilon_m + (u_{\epsilon_m}(y))^2\right)^{2^\flat+1}} + \frac{C(y)u_{\epsilon_m}(y)}{\left(\epsilon_m + (u_{\epsilon_m}(y))^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}\right) dv_g(y)$$

Or $A > 0$ et $C(x) > 0$ par hypothèse, et par suite

$$u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}) \geq \int_M G\left(x_{\epsilon_m}, y\right) B\left(y\right) \left(u_{\epsilon_m}\left(y\right)\right)^{2^\sharp - 1} dv_g(y) \geq 0$$

en passant à la limite inférieure, on trouve

$$u_{\epsilon_m}(x_0) \geq \int_M G\left(x_0, y\right) B\left(y\right) \left(u\left(y\right)\right)^{2^\sharp - 1} dv_g(y) \geq 0$$

ce qui donne que $u \equiv 0$ d'où la contradiction avec (2.1.29).

Il suit de ce qui a été dit plus haut qu'il existe $\delta > 0$ tel que $u_{\epsilon_m} \geq \delta$, cela prouve que la fonction u limite de la suite de solution approchées de (2.1.2) est strictement positive ($u > 0$). Reste donc à montrer que cette fonction est en fait une solution de l'équation (0.0.9).

Tout d'abord, on sait déjà que pour m assez grand $u_{\epsilon_m} > 0$ et par conséquent il existe $\tilde{\epsilon} > 0$ tel que

$$\frac{1}{\left(\epsilon_m + u_{\epsilon_m}^2\right)^q} \leq \frac{1}{\tilde{\epsilon}^q} \text{ avec } q > 0.$$

Appliquant le théorème de la convergence dominée, il en résulte que

$$\frac{1}{\left(\epsilon_m + \left(u_{\epsilon_m}\right)^2\right)^q} \rightarrow \frac{1}{\left(u\right)^{2q}} \text{ fortement dans } L^p\left(M\right), \forall p \geq 1, \forall q \geq 1.$$

Enfin avec ②, il s'en suit que

$$\frac{u_{\epsilon_m}}{\left(\epsilon_m + \left(u_{\epsilon_m}\right)^2\right)^{2^\flat + 1}} \longrightarrow \frac{1}{u^{2^\sharp + 1}} \text{ fortement dans } L^2\left(M\right) \quad \text{avec } u > 0.$$

Par passage à la limite dans (2.1.24) quand $m \to +\infty$, on en déduit que u est une solution faible de l'équation (0.0.9). En reprenant pour une large part les arguments qu'on a utilisé pour démontrer la régularité de la solution u_ϵ, on prouve que $u \in C^{2k,\alpha}(M)$ avec $\alpha \in \left]0, 1\right[$; comme $u > 0$ le membre à droite dans (0.0.9) possède le même ordre de régularité que u et avec un procédure itératif on obtient que $u \in C^\infty(M)$, ce qui prouve le théorème (0.0.2).

□

2.2 L'existence de la deuxième solution

On considère les nombres réels t_0, t_1 et la fonction φ introduits au lemme (2.1.1) et la preuve du lemme (2.1.2).

Il vient d'après la section précédente que la fonctionnelle I_ϵ vérifie les inégalités suivantes

$$I_\varepsilon(t_1\varphi) < \Phi(t_0) < I_\varepsilon(t_0\varphi) \leq C_\varepsilon$$

d'autre part, et comme

$$\lim_{t\to+\infty} I_\epsilon(t\varphi) = -\infty \tag{2.2.1}$$

il résulte aussi qu'il existe $t_2 >> t_0$ tel que $I_\epsilon(t_2\varphi) < 0$.

Avec ces donnés, on a démontré que la fonctionnelle I_ϵ possède une valeur critique C_ϵ [4] ; en poussant un peu plus cette étude, en faisant tendre t et ϵ tous les deux vers 0^+ dans la limite (2.2.1), on remarque que la fonctionnelle I_ϵ tend vers $+\infty$.

En effet

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0^+}\left[\lim_{\varepsilon\to0^+} I_\varepsilon(t.\varphi)\right] &= \lim_{t\to0^+}\left[I^{(1)}(t.\varphi) + I_0^{(2)}(t.\varphi)\right] \\
&= \lim_{t\to0^+}\int_M \left[(t.\varphi)P_g(t.\varphi) - \frac{2}{2^\sharp}B(x)(t.\varphi)^{2^\sharp}\right] dv(g) \\
&+ \lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{(t.\varphi)^{2^\sharp}}dv(g) + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{(t.\varphi)^{p-1}}dv(g).\right] \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit qu'il existe au voisinage de 0^+ un minimum local, en d'autre terme il existe $0 < t' << t_1$ tel que

$$I_\epsilon(t'\varphi) > \Phi(t_0 > I_\epsilon\left(t_1\varphi\right).$$

Dans ce qui suit, nous allons présenté des conditions assurant l'existence de ce minimum, ensuite à l'aide du principe variationnel d'Ekeland on démontre que ce minimum est atteint.

Commençons par démontrer quelques lemmes simples mais fondamentales dans la preuve du théorème (0.0.3).

Lemme 2.2.1. *Soit $\theta > 0$ tel que*

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} < \theta^2 < a^{\frac{2}{2^\natural}} \tag{2.2.2}$$

4. en fait c'est un maximum locale.

où

$$a = \frac{1}{(2\,(n-k))^{\frac{2^\natural}{2}}}$$

et posons

$$t_3 = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2^\sharp}} t_0$$

alors on a l'inégalité suivante

$$\Phi(t_3) > \frac{a}{2}\Phi(t_0). \tag{2.2.3}$$

Démonstration.

Comme

$$t_3 = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2^\sharp}} t_0 < \theta t_0 = t_1 \text{ [5]}$$

et

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} > \frac{a}{2}. \tag{2.2.4}$$

il vient alors, d'après (2.1.3) que

$$\begin{aligned}
\Phi(t_3) &= \frac{1}{2}t_3^2 - \left(S.\max_M B(x)\right)\frac{t_3^{2^\sharp}}{2^\sharp} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2^\sharp}} t_0\right]^2 - \frac{1}{2^\sharp}t_0^2\frac{a}{2} \\
&= \frac{n}{k}.\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} - \frac{a}{2}.\frac{n-2k}{2n}\right]\frac{k}{n}t_0^2.
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, grâce à (2.1.6) et (2.2.4), que

$$\begin{aligned}
\Phi(t_3) &= \left[\frac{n}{2k}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}\right]\Phi(t_0) \\
&> \frac{a}{2}.\Phi(t_0).
\end{aligned}$$

□

Un autre lemme qui va nous servir par la suite est le suivant.

Lemme 2.2.2. *Etant donnés* (M, g) *une variété Riemannienne compacte de dimension*

5. pour t_1, on suit les notations du Lemme 2.1.1

$n > 2k$, $k \in \mathbb{N}^\star$, $1 < p < 1 + 2^\sharp$ et $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$ sur M avec $\|\varphi\| = 1$.

Alors, il existe une constante $\lambda^\star > 0$ telle que $\forall \epsilon \in]0, \lambda^\star[$ les inégalités suivantes ont lieu

$$\int_M \frac{A(x)}{(\epsilon + (t_3.\varphi)^2)^{\frac{2^\sharp}{2}}} dv_g \geq \frac{2-a}{aSt_0^{2^\sharp}} \left(\int_M \sqrt{A(x)} dv_g \right)^2 \tag{2.2.5}$$

et

$$\int_M \frac{C(x)}{(\epsilon + (t_3.\varphi)^2)^{\frac{p-1}{2}}} dv_g \geq \left(\frac{2-a}{aS} \right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} \frac{1}{t_0^{p-1}} \left(\int_M \sqrt{C(x)} dv_g \right)^2 \tag{2.2.6}$$

où t_3, a sont comme dans le lemme 2.2.1 .

Démonstration.

Soit

$$\lambda^\star = \left[\left(\frac{2}{2-a} \right)^{\frac{2}{2^\sharp}} - 1 \right] \frac{\Omega}{V(M)^{\frac{2}{2^\sharp}}} \tag{2.2.7}$$

où $V(M)$ désigne le volume de M et

$$\Omega = \left(\frac{aS}{2} \right)^{\frac{2}{2^\sharp}} t_0^2.$$

Il vient d'après l'inégalité de Hölder, que

$$\left(\int_M \sqrt{A(x)} dv_g \right)^2 \leq I \left[\|\epsilon + (t_3.\varphi)^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}} \right]^{\frac{2^\sharp}{2}} \tag{2.2.8}$$

avec

$$I = \int_M \frac{A(x)}{(\epsilon + (t_3.\varphi)^2)^{\frac{2^\sharp}{2}}} dv_g.$$

D'autre part avec l'inégalité de Minkowski, on trouve

$$\|\epsilon + (t_3.\varphi)^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}} \leq \|\epsilon\|_{\frac{2^\sharp}{2}} + t_3^2 \|\varphi^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}}$$

par conséquent

$$\left[\|\epsilon + (t_3.\varphi)^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}} \right]^{\frac{2^\sharp}{2}} \leq \left(\|\epsilon\|_{\frac{2^\sharp}{2}} + t_3^2 \|\varphi^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}} \right)^{\frac{2^\sharp}{2}}. \tag{2.2.9}$$

Remarquer maintenant, que

$$\|\epsilon\|_{\frac{2^\sharp}{2}} = \epsilon. [V(M)]^{\frac{2}{2^\sharp}}$$

et

$$\|\varphi^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}} = \|\varphi\|^2_{2^\sharp}.$$

Donc, d'après l'inégalité (1.1.1) et le faite que $\|\varphi\| = 1$, (2.2.9) devient

$$\left(\|\epsilon + (t_3.\varphi)^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}}\right)^{\frac{2^\sharp}{2}} \leq \left(\epsilon.\,[V(M)]^{\frac{2}{2^\sharp}} + t_3^2.\,(S)^{\frac{2}{2^\sharp}}\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}.$$

Comme $t_3 = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2^\sharp}} t_0$, donc on peut écrire (2.2.8) sous la forme

$$\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \leq I\left(\epsilon V(M)^{\frac{2}{2^\sharp}} + \left(\frac{aS}{2}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} t_0^2\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}.$$

Pour $\epsilon \in]0, \lambda^\star[$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 &\leq I.\left(\left[\left(\frac{2}{2-a}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} - 1\right]\Omega + \left(\frac{aS}{2}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} t_0^2\right)^{\frac{2^\sharp}{2}} \\
&\leq I\left(\frac{2}{2-a}\right)\Omega^{\frac{2^\sharp}{2}} \\
&\leq I\frac{aSt_0^{2^\sharp}}{2-a}.
\end{aligned}$$

d'où (2.2.5).

On procède de la même façon, on obtient

$$\int_M \frac{C(x)}{(\epsilon + (t_3.\varphi)^2)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g \geq \left(\frac{2-a}{aS}\right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} \frac{1}{t_0^{p-1}} \left(\int\limits_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2. \tag{2.2.10}$$

□

Maintenant nous somme près à prouver l'existence de la deuxième solution de l'équation (0.0.9), autrement dit à démontrer le théorème 0.0.3.

Démonstration.

Afin de démontrer le théorème 0.0.3 on procède en quatre étapes.

Tout d'abord on montre que la fonctionnelle I_ϵ est bornée inférieurement, on montre ensuite à l'aide du lemme d'Ekeland que ce minimum est atteint sur un ensemble convenablement choisi.

Une fois l'existence de la deuxième solution établie, on s'aperçoit alors très vite qu'il va nous falloir vérifier que les deux solutions sont distinctes, c'est l'objectif de la troisième étape.

l'étape finale consiste à prouver que les conditions (0.0.12), (0.0.13), (0.0.14) et (0.0.15) dans le théorème 0.0.3 sont réalisées par des fonctions positives et régulières.

$1^{ère}$ **étape**

Nous allons maintenant aborder l'existence d'un minimum local pour la fonctionnelle I_ϵ, cela revient à démontrer que $\forall \epsilon \in]0, \lambda^\star[$, où $\lambda^\star$ est un nombre réel positif (à déterminer) ; I_ϵ vérifie les inégalités suivantes.

$$I_\epsilon(t_3\varphi) \geq \Phi(t_0) > I_\epsilon\left(t_1\varphi\right); \quad \forall \varphi \in C^\infty(M),\ \|\varphi\| = 1,\ \text{avec } t_3 < t_1.$$

Tout d'abord, notons que l'inégalité droite est toujours vérifiée dans (2.1.14), il nous reste alors, à prouver l'inégalité

$$I_\epsilon(t_3\varphi) \geq \Phi(t_0); \quad \forall \varphi \in C^\infty(M),\ \|\varphi\| = 1,\ \text{avec } t_3 < t_1.$$

Pour cela, on écrit

$$I_\epsilon(t_3\varphi) = I^{(1)}(t_3\varphi) + I^{(2)}(t_3\varphi)$$

Appliquant le lemme 2.2.1-inégalité (2.2.3) avec (2.1.4), on aura automatiquement

$$I_\epsilon(t_3\varphi) > \frac{a}{2}\Phi(t_0) + \frac{1}{2^\sharp}\int_M \frac{A\left(x\right)}{\left(\epsilon + (t_3\varphi)^2\right)^{2^\flat}} dv_g + \frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{\left(\epsilon + (t_3\varphi)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}} dv_g. \quad (2.2.11)$$

Rappelons, maintenant qu'on a par hypothèse (Théorème (0.0.3))

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 > S\frac{k}{4n}a\left(S\max_{x\in M}B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}}$$

et

$$\frac{1}{p-1}\left(\int\limits_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 \geq (2-a)^{\frac{2^\sharp-p+1}{2^\sharp}}(aS)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\frac{k}{4n}\left(S\max_{x\in M}B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}}$$

et puisque

$$\left(S\max_{x\in M}B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} = t_0^{2+2^\sharp}$$

il vient que
$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2\left(\frac{2-a}{a}\right)\frac{1}{S.t_0^{2^\sharp}} > \frac{k}{4n}t_0^2(2-a).$$
et
$$\frac{1}{p-1}\left(\int\limits_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 \geq (2-a)^{\frac{2^\sharp-p+1}{2^\sharp}}(aS)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\frac{k}{4n}t_0^{p+1}.$$
Donc, si on prend $\lambda^\star$ comme dans (2.2.7) alors il s'en suit d'après le Lemme 2.2.2 que, $\forall\epsilon\in\,]0,\lambda^\star[$
$$\frac{1}{2^\sharp}\int\limits_M \frac{A(x)}{(\epsilon+(t_3\varphi)^2)^{\frac{2^\sharp}{2}}}dv_g \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}\right)\Phi(t_0). \tag{2.2.12}$$
et
$$\frac{1}{p-1}\int\limits_M \frac{C(x)}{(\epsilon+(t_3\varphi)^2)^{\frac{p-1}{2}}}dv_g \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}\right)\Phi(t_0). \tag{2.2.13}$$
Enfin, par combinaison de (2.2.11), (2.2.12) et (2.2.13), on en déduit que
$$I_\epsilon(t_3\varphi)\geq\Phi(t_0)>I_\epsilon(t_1\varphi)\quad \text{pour } t_1>t_3. \tag{2.2.14}$$
ce qui signifie que la fonctionnelle I_ϵ possède une borne inférieure locale.

$2^{ème}$ **étape (Le minimum de la fonctionnelle I_ε est atteint).**

Pour t_1, t_3 et φ comme dans le lemme (2.2.2), on note $\overline{K}$ la boule fermée dans $H_k^2(M)$ de centre $t_1\varphi$ et de rayon t_1-t_3 par
$$\overline{K}=\left\{u\in H_k^2(M):\|u-t_1\varphi\|\leq t_1-t_3\right\}$$
et on pose
$$c_\epsilon=\inf_{\overline{K}} I_\epsilon.$$
L'objectif dans cette étape est de montrer que c_ϵ est atteint et vérifie $c_\epsilon<\Phi(t_0)$.

On a d'après (2.2.14)
$$\inf_{K} I_\epsilon \leq I_\epsilon(t_1\varphi)<\Phi(t_0)\quad \text{et } I_\epsilon(t_3\varphi)\geq \inf_{\partial K} I_\epsilon\geq\Phi(t_0).$$
Appliquant maintenant le lemme d'Ekeland à la fonctionnelle I_ϵ, on voit que pour tout $\eta>0$ tel que
$$\eta<\inf_{\partial K} I_\epsilon-\inf_{K} I_\epsilon$$

il existe u_η dans $\overline{K}$ vérifiant

$$I_\epsilon(u_\eta) < \inf_{\overline{K}} I_\epsilon + \eta$$

et

$$I_\epsilon(u_\eta) < I_\epsilon(u) + \eta \|u - u_\eta\| \quad \text{pour } u \neq u_\eta. \tag{2.2.15}$$

Ainsi, on en déduit que

$$I_\epsilon(u_\eta) < \inf_{\overline{K}} I_\epsilon + \eta \leq \inf_{K} I_\epsilon + \eta < \inf_{\partial K} I_\epsilon$$

ce qui donne $u_\eta \in K$.

en outre, de (2.2.15) on obtient ainsi que, pour toute fonction $u_\eta \in K$

$$\|DI_\epsilon(u_\eta)\| \leq \eta$$

d'où, l'on conclut qu'il existe une suite $(u_m)_m \subset K$ telle que

$$I_\epsilon(u_m) \to c_\epsilon \quad \text{et} \quad DI_\epsilon(u_m) \to 0 \quad \text{fortement dans l'espace dual de } H_k^2(M)$$

quand $m \to +\infty$.

Ce qui signifie que $(u_m)_m$ est une suite de Palais-Smale qui converge vers une solution faible v_ϵ de l'équation (2.1.2), de plus

$$I_\epsilon(v_\epsilon) = c_\epsilon \leq \Phi(t_0).$$

En procédant comme dans la preuve de la section (2.1.2), on prouve que la solution v_ϵ est positive et de classe $C^\infty(M)$.

Passant maintenant à la limite quand $\epsilon \to 0$, il vient d'après la faible semi-continuité inférieure de la norme, qu'une suite de solutions ϵ-approchées $(v_{\epsilon_i})_{i\in\mathbb{N}}$ dans K doit converger vers une limite v dans $\overline{K}$ qui représente une solution faible de l'équation (2.1.1) ; avec le même raisonnement qu'on a déjà fait dans la section (2.1.3) on conclut que v est une solution positive et de classe $C^\infty(M)$, ce qui achève la deuxième étape.

Nous avons démontrer dans les étapes précédentes que l'équation (0.0.9) possède deux solutions, qu'on les note par u et v respectivement, et qui représentent des points critiques pour la fonctionnelle

$$I := \lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon.$$

Cependant, il est fort possible que ces deux solutions soient identiques ! Un autre point important, c'est que dans le théorème (0.0.3), on a imposé que chacune des fonctions $A(x)$ et $C(x)$ doit vérifier une double inégalité, une question qui se pose : Existe-t-il des fonctions qui vérifient ces doubles inégalités ? Dans ce qui suit on va essayer de répondre à ces questions.

$3^{ème}$ **étape**

Pour la première question, il suffit de vérifier que les deux solutions ont des énergies différentes[6] ; en fait, en reprenant l'idée de la démonstration du lemme (2.2.2), on peut montrer que

$$I(u) > I(v). \tag{2.2.16}$$

En effet

$$\begin{aligned}\int_M \frac{A(x)}{(\epsilon + (t_0\varphi)^2)^{2^\sharp}} dv_g &\geq \frac{\left(\int_M \sqrt{A(x)} dv_g\right)^2}{\left(\|\epsilon\|_{\frac{2^\sharp}{2}} + t_0^2\|\varphi^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}}\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}} \\ &\geq \frac{\left(\int_M \sqrt{A(x)} dv_g\right)^2}{\left(\epsilon[V_g(M)]^{\frac{2}{2^\sharp}} + t_0^2 S^{\frac{2}{2^\sharp}}\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}}.\end{aligned}$$

Or, $\forall \epsilon \in]0, \beta_1[$ où $\beta_1 = t_0^2 \left[\left(\frac{2}{2-a}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}} - 1\right] \left(\frac{S}{V_g(M)}\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}$, il vient que

$$\int_M \frac{A(x)}{(\epsilon + (t_0\varphi)^2)^{2^\sharp}} dv_g \geq \frac{2-a}{aSt_0^{2^\sharp}} \left(\int_M \sqrt{A(x)} dv_g\right)^2$$

avec la condition (0.0.14), il en résulte que

$$\frac{1}{2^\sharp} \int_M \frac{A(x)}{(\epsilon + (t_0\varphi)^2)^{2^\sharp}} dv_g \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a}{2}\right) \frac{a}{2^\sharp} \Phi(t_0). \tag{2.2.17}$$

6. Il est important de noter que l'énergie de toute solution de l'équation (0.0.9) est positive.

On procède de manière analogue, on obtient

$$\int_M \frac{C(x)}{(\epsilon+(t_0\varphi)^2)^{p-1}}dv_g \geq \frac{\left(\int_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2}{\left(\|\epsilon\|_{\frac{2^\sharp}{2}}+t_0^2\|\varphi^2\|_{\frac{2^\sharp}{2}}\right)^{\frac{p-1}{2}}}$$
$$\geq \frac{\left(\int_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2}{\left(\epsilon[V_g(M)]^{\frac{2}{2^\sharp}}+t_0^2 S^{\frac{2}{2^\sharp}}\right)^{\frac{p-1}{2}}}.$$

et par conséquent, $\forall \epsilon \in]0, \beta_1[$, on trouve

$$\int_M \frac{C(x)}{(\epsilon+(t_0\varphi)^2)^{p-1}}dv_g \geq \left(\int_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 \left(\frac{2-a}{2S}\right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} t_0^{1-p}$$

avec la condition (0.0.15), on en déduit

$$\frac{1}{p-1}\int_M \frac{C(x)}{(\epsilon+(t_0\varphi)^2)^{p-1}}dv_g \geq \frac{1}{4(p-1)}(2-a)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} \varPhi(t_0). \tag{2.2.18}$$

Combinant (2.2.17), (2.2.18), et (2.1.15), on aboutit à

$$I_\epsilon(t_0\varphi) \geq (1+\alpha)\varPhi(t_0) \qquad \text{où} \qquad \alpha = \frac{1}{4}(2-a)\left(\frac{1}{p-1}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}+\frac{a}{2.2^\sharp}\right) > 0.$$

Enfin par passage à la limite quand $\epsilon \to 0^+$, il vient

$$I(u) = \lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon(u_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} C_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0^+}\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[t_1,t_2]} I_\epsilon(\gamma(t))$$
$$\geq (1+\alpha)\varPhi(t_0) > \varPhi(t_0) \geq \lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon(v_\epsilon) = I(v).$$

où Γ désigne l'ensemble des courbes régulières joignant $u_1 = t_1\varphi$ avec $u_2 = t_2\varphi$, d'où (2.2.16).

$4^{ème}$ **étape**

Passons maintenant à la deuxième question, il s'agit de montrer que les inégalités (0.0.12), (0.0.13), (0.0.14) et (0.0.15) dans le théorème 0.0.3 ont lieu.

Appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_M \sqrt{A(x)}dv_g &= \int_M \sqrt{\frac{A(x)}{\varphi^{2^\sharp}}}\varphi^{\frac{2^\sharp}{2}}dv_g \\ &\leq \left(\int_M \frac{A(x)}{\varphi^{2^\sharp}}dv_g\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M \varphi^{2^\sharp}dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\varphi\|_{2^\sharp}^{\frac{2^\sharp}{2}}\left(\int_M \frac{A(x)}{\varphi^{2^\sharp}}dv_g\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Sachant que $\|\varphi\| = 1$, il vient d'après (1.1.1) que

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \leq \frac{S}{2^\sharp}\int_M \frac{A(x)}{\varphi^{2^\sharp}}dv_g$$

Or, la condition (0.0.12) dans le théorème 0.0.3 et l'égalité (2.1.5), impliquent que

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \leq S.C(n,p,k)t_0^{2+2^\sharp}$$

ce qui donne, d'après (2.1.9)

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \leq S\frac{2k-1}{4n}\theta^{2^\sharp}t_0^{2+2^\sharp} \tag{2.2.20}$$

Indépendamment et toujours avec (2.1.5), on peut écrire la condition (0.0.14) sous la forme

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \geq \frac{k}{4n}t_0^{2+2^\sharp}aS. \tag{2.2.21}$$

Combinant (2.2.21) et (2.2.20) on aboutit à la double inégalité suivante

$$\frac{k}{4n}t_0^{2+2^\sharp}aS < \frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \leq S\frac{2k-1}{4n}\theta^{2^\sharp}t_0^{2+2^\sharp}.$$

qui est équivalente à

$$ka < \frac{4nt_0^{-2-2^\sharp}}{S2^\sharp}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \leq (2k-1)\,\theta^{2^\sharp}.$$

ou encore

$$\frac{a}{2\theta^{2^\sharp}} \leq \frac{2nt_0^{-2-2^\sharp}}{2^\sharp kS\theta^{2^\sharp}}\left(\int\limits_M \sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \leq \left(1-\frac{1}{2k}\right)$$

Donc, si nous choisissons θ de sorte que

$$\frac{2a}{3} < \theta^{2^\sharp} < a$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{2\theta^{2^\sharp}} < \frac{3}{4} \leq 1-\frac{1}{2k} \tag{2.2.22}$$

dès que $k \geq 2$.

En d'autre terme, les fonctions $A(x)$ qui vérifient les conditions (0.0.12) et (0.0.14) sont celles qui satisfont la double inégalité suivante

$$a_1 \leq A(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right) a_2$$

où

$$a_1 = \frac{2^\sharp a k S t_0^{2+2^\sharp}}{4n\left[V_g(M)^2\right]} \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{2^\sharp k \theta^{2^\sharp} S t_0^{2+2^\sharp}}{2n\left[V_g(M)^2\right]}$$

avec $k \geq 2$ et $V_g(M)$ est le volume de M.

On procède de façon analogue, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p-1}\left(\int_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 &\leq \frac{1}{p-1}\|\varphi\|_{p-1}^{p-1}\left(\int_M \frac{C(x)}{\varphi^{p-1}}dv_g\right) \\
&\leq \frac{1}{p-1}S^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\|\varphi\|^{p-1}\left(\int_M \frac{C(x)}{\varphi^{p-1}}dv_g\right) \\
&\leq \frac{1}{p-1}S^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\left(\int_M \frac{C(x)}{\varphi^{p-1}}dv_g\right)
\end{aligned}$$

ainsi, de (0.0.13), (0.0.15) et (2.1.12), on tire

$$(2-a)^{\frac{2^\sharp - p+1}{2^\sharp}}(aS)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\frac{k}{4n}t_0^{p+1} \leq \frac{1}{p-1}\left(\int_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 \leq (S)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\frac{(2k-1)}{4n}\theta^{p-1}t_0^{p+1}$$

ou encore

$$(2-a)^{\frac{2^\sharp - p+1}{2^\sharp}}\left(\frac{a}{2^{\frac{2^\sharp}{p-1}}\theta^{2^\sharp}}\right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} \leq \frac{2n}{(p-1)\,k\theta^{p-1}t_0^{p+1}(S)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}}\left(\int_M \sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

Or, on a par hypothèse $\frac{2a}{3} < \theta^{2^\sharp} < a$ et $k \geq 2$, ce qui donne

$$\frac{1}{2} < (2-a)^{\frac{2^\sharp - p+1}{2^\sharp}}\left(\frac{a}{2^{\frac{2^\sharp}{p-1}}\theta^{2^\sharp}}\right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} < \frac{3}{4} \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

pour $p < 1 + 2^\sharp$ suffisamment proche de $1 + 2^\sharp$; et par conséquent, les fonctions $C(x)$ qui vérifient les conditions (0.0.12)et (0.0.14) sont celles qui satisfont la double inégalité suivante

$$c_1 \leq C(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right) c_2$$

où
$$c_1 = \frac{(p-1)t_0^{p+1}k\left[(aS)(2-a)\right]^{\frac{p-1}{2^\sharp}}}{4n\left[V_g(M)\right]^2} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{(p-1)kS^{\frac{p-1}{2^\sharp}}t_0^{p+1}\theta^{p-1}}{2n\left[V_g(M)\right]^2}$$
avec $k \geq 2$ et $V_g(M)$ désigne le volume de la variété M. □

Nous terminons ce chapitre en disant quelque mots sur la non nullité de la deuxième solution v_ϵ de l'équation (2.1.2), en fait il est possible de démontrer que la solution v_ϵ n'est pas identiquement nulle sans faire appel à la section (2.1.2) (première partie).

En effet, puisque $v_\epsilon \in \overline{K}$ alors par construction de $\overline{K}$ il vient que

$$\|v_\epsilon - t_1\varphi\| \leq t_1 - t_3 \tag{2.2.23}$$

avec φ une fonction positive et de classe $C^\infty(M)$ de norme $\|\varphi\| = 1$.

Ainsi, il suffit de remarquer

$$t_1 = \|t_1\varphi\| \leq \|v_\epsilon\| + \|t_1\varphi - v_\epsilon\|$$

d'où $v_\epsilon \not\equiv 0$ d'après (2.2.23).

Chapitre 3

Non existence de solution

Dans ce chapitre nous donnons une condition suffisante pour la non existence de solution, en fait on a le résultat suivant :

Théorème 3.0.1. *Etant donné (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n > 2k$, $(k \in \mathbb{N}^\star)$ et A, B, C des fonctions positives régulières sur M et $2 < p < 2^\sharp + 1$. Supposons que*

$$C(n,p,k)\left(\frac{\int\limits_M \sqrt{B.C}dv_g}{\int\limits_M Bdv_g}\right)^{2.\frac{2^\sharp}{p-1+2^\sharp}} \int\limits_M Bdv_g > (S_1 R)^2 \tag{3.0.1}$$

où S_1, R soient deux constantes positives

$$C(n,p,k) = \frac{2^\sharp + p - 1}{p-1}\left(\frac{p-1}{2^\sharp}\right)^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp+p-1}}.$$

alors l'équation (0.0.9) n'admet pas de solution positive u de classe C^∞ sur M vérifiant $\|u\|_{H_k^2(M)} \leq R$.

Démonstration.

Supposons qu'il existe une solution positive $u \in H_k^2(M)$ telle que $\|u\|_{H_k^2(M)} \leq R$. En multipliant des deux cotés (0.0.9) par u et intégrant sur M, on trouve

$$\int_M uP_g(u)dv_g = \int_M \left(B(x)\, u^{2^\sharp} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp}} + \frac{C(x)}{u^{p-1}}\right) dv_g.$$

et puisque $\|u\|_{p_g} = \sqrt{\int\limits_M uP_g(u)dv_g}$ est une norme équivalente à $\|u\|_{H_k^2(M)}$, il existe une constante $S_1 > 0$ telle que

$$\|u\| \leq S_1 \|u\|_{H_k^2(M)}.$$

Alors il vient que

$$\int_M \left(B(x) u^{2^\sharp} + \frac{A(x)}{u^{2^\sharp}} + \frac{C(x)}{u^{p-1}} \right) dv_g \leq (S_1 R)^2 . \tag{3.0.2}$$

De plus avec l'inégalité de Hölder on peut écrire

$$\int_M \sqrt{B(x) C(x)} dv_g \leq \left(\int\limits_M \frac{C(x)}{u^{p-1}} dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_M B(x) u^{p-1} dv_g \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.0.3}$$

Toujours en utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_M B(x) u^{p-1} dv_g &= \int_M B(x)^{1-\frac{p-1}{2^\sharp}} \left(B(x)^{\frac{1}{2^\sharp}} u \right)^{p-1} dv_g \\
&\leq \left(\int_M B(x) dv_g \right)^{\frac{2^\sharp - p+1}{2^\sharp}} \left(\int_M \left[\left(B(x)^{\frac{1}{2^\sharp}} u \right)^{p-1} \right]^{\frac{2^\sharp}{p-1}} dv_g \right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} \\
&\leq \left(\int_M B(x) dv_g \right)^{\frac{2^\sharp - p+1}{2^\sharp}} \left(\int_M B(x) u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} .
\end{aligned} \tag{3.0.4}$$

donc

$$\left(\int_M \sqrt{B(x) C(x)} dv_g \right)^2 \leq \left(\int_M B(x) dv_g \right)^{\frac{2^\sharp - p+1}{2^\sharp}} . \left(\int_M B(x) u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} \int_M \frac{C(x)}{u^{p-1}} dv_g$$

Posons

$$D = \left(\int_M \sqrt{B(x) C(x)} dv_g \right)^2 \left(\int_M B(x) dv_g \right)^{\frac{p-2^\sharp-1}{2^\sharp}}$$

il vient

$$\int_M \frac{C(x)}{u^{p-1}} dv_g \geq D \left(\int_M B(x) u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{1-p}{2^\sharp}} .$$

et par suit (3.0.2) devient

$$(S_1 R)^2 \geq \int_M B(x) u^{2^\sharp} dv_g + \int_M \frac{A(x)}{u^{2^\sharp}} dv_g + D \left(\int_M B(x) u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{1-p}{2^\sharp}} .$$

Comme A a valeurs positives sur M, donc

$$\int_M \frac{A(x)}{u^{2^\sharp}} dv_g \geq 0$$

et par conséquent

$$(S_1R)^2 \geq \int_M B(x)\, u^{2^\sharp} dv_g + D \left(\int_M B(x)\, u^{2^\sharp} dv_g \right)^{\frac{1-p}{2^\sharp}}$$

et si on pose

$$t = \int_M B(x)\, u^{2^\sharp} dv_g$$

on trouve

$$(RS_1)^2 \geq f(t)$$

où

$$f(t) = t + Dt^{\frac{1-p}{2^\sharp}}.$$

f admet un minimum au point

$$t_0 = \left(\frac{p-1}{2^\sharp} D \right)^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp + p - 1}}$$

et par suit

$$\forall t > 0,\ f(t) \geq \min_{t>0} f(t) = f(t_0) = \frac{2^\sharp + p - 1}{p-1} \left(\frac{p-1}{2^\sharp} D \right)^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp + p - 1}}.$$

Finalement, remplaçons D par sa valeur, nous obtenons

$$(RS_1)^2 \geq \frac{2^\sharp + p - 1}{p-1} \left(\frac{p-1}{2^\sharp} \right)^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp + p - 1}} \left(\int_M \sqrt{B(x)\, C(x)} dv_g \right)^{2 \cdot \frac{2^\sharp}{2^\sharp + p - 1}} \left(\int_M B(x)\, dv_g \right)^{\frac{p-1-2^\sharp}{2^\sharp + p - 1}}.$$

et si on pose

$$C(n,p,k) = \frac{2^\sharp + p - 1}{p-1} \left(\frac{p-1}{2^\sharp} \right)^{\frac{2^\sharp}{2^\sharp + p - 1}}$$

alors il vient

$$(RS_1)^2 \geq C(n,p,k) \left(\frac{\int_M \sqrt{B(x)\, C(x)} dv_g}{\int_M B(x)\, dv_g} \right)^{2 \cdot \frac{2^\sharp}{2^\sharp + p - 1}} \int_M B(x)\, dv_g.$$

$\square$

Chapitre 4

Applications

On a vu dans le théorème (0.0.3) que les conditions d'existence dépendent de la fonction φ, nous allons ici donné deux exemples d'une telle fonction, le première exemple est en fait valable pour toute variété Riemannienne compacte, mais le deuxième est spécifiquement pour le cas de la sphère unitaire standard.

4.1 Application dans le cas général

Pour (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n > 2k$, nous considérons la fonction constante suivante

$$\varphi = \left(\frac{2}{(n-2k) \int_M Q_g dv_g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

il est claire que cette fonction vérifie les conditions de notre théorème ; en fait $\varphi \in C^\infty(M)$ et positive car $\int_M Q_g dv_g > 0$ [1] et $n > 2k$; de plus

$$\|\varphi\| = 1 \tag{4.1.1}$$

en effet

$$\|\varphi\|^2 = \int_M \varphi P_g(\varphi) dv_g$$

puisque $\varphi \in \mathbb{R}$ et P_g est linéaire alors

$$\|\varphi\|^2 = \int_M \varphi^2 P_g(1) dv_g$$

1. c'est une conséquence de la coercivité de l'opérateur GJMS

comme $P_g(1) = \frac{n-2k}{2} Q_g$ donc

$$\|\varphi\|^2 = \left(\frac{2}{(n-2k)\int_M Q_g dv_g}\right) \frac{n-2k}{2} \int_M Q_g dv_g$$

d'où (4.1.1).

Dans ce cas le théorème (0.0.3) devient

Théorème 4.1.1. *Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte dimension $n > 2k$, $(k \in \mathbb{N}^\star)$. Supposons que l'opérateur P_g soit coercif; possède une fonction de Green positive et il existe une constante $C(n,p,k) > 0$ qui dépend seulement de n,p,k tel que :*

$$\frac{1}{2^\sharp} \int_M A(x) dv_g \leq C(n,p,k) \frac{\left(S \max_{x\in M} B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}}}{\left(\frac{(n-2k)}{2}\int_M Q_g dv_g\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}} \tag{4.1.2}$$

et

$$\frac{1}{p-1} \int_M C(x) dv_g \leq C(n,p,k) \frac{\left(S \max_{x\in M} B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}}}{\left(\frac{(n-2k)}{2}\int_M Q_g dv_g\right)^{\frac{p-1}{2}}} \tag{4.1.3}$$

où Q_g est la Q-courbure de la variété M alors l'équation (0.0.9) admet une solution positive régulière. Si de plus $(k \geq 2)$ et les conditions suivantes sont vérifiées

1.

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int_M \sqrt{A(x)} dv_g\right)^2 \geq aS \frac{k}{4n}\left(S \max_{x\in M} B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \tag{4.1.4}$$

2.

$$\frac{1}{p-1}\left(\int_M \sqrt{C(x)} dv_g\right)^2 \geq (2-a)^{\frac{2^\sharp-p+1}{2^\sharp}} (aS)^{\frac{p-1}{2^\sharp}} \frac{k}{4n}\left(S \max_{x\in M} B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}} \tag{4.1.5}$$

avec $1 < p < 2^\sharp + 1$ (très proche de $2^\sharp + 1$) où $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$

3.

$$a_1 \leq A(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right) a_2$$

où

$$a_1 = \frac{2^\sharp ak S t_0^{2+2^\sharp}}{4n\,[V_g(M)^2]}; \qquad a_2 = \frac{2^\sharp k \theta^{2^\sharp} S t_0^{2+2^\sharp}}{2n\,[V_g(M)^2]}$$

4.
$$c_1 \leq C(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right) c_2$$
où
$$c_1 = \frac{(p-1)t_0^{p+1} k \left[(aS)(2-a)\right]^{\frac{p-1}{2^\sharp}}}{4n\left[V_g(M)\right]^2} \quad et \quad c_2 = \frac{(p-1)kS^{\frac{p-1}{2^\sharp}} t_0^{p+1}\theta^{p-1}}{2n\left[V_g(M)\right]^2}.$$
Alors l'équation (0.0.9) admet une deuxième solution.

4.2 Application dans le cas de la sphère unitaire standard

Nous présentons dans cette section un exemple de fonction φ vérifiant les hypothèses du théorème (0.0.2) ; la construction de cet exemple se base essentiellement sur les projections stéréographiques.

4.2.1 La construction de la fonction φ

En s'inspirant toujours du travail fait par Mr F, Robert dans [22] ; particulièrement la preuve de la proposition 9 nous construisons un exemple d'une fonction $\varphi > 0$ de classe $C^\infty(\mathbb{S}^n)$ et de norme $\|\varphi\|_{P_g} = 1$.

En effet, soit $\lambda > 1$ un nombre réel et $x_0 = (0, ..., 0, 1)$ le pôle nord de $\mathbb{S}^n$, on pose
$$\phi_\lambda : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$$
qui, à un point $x \in \mathbb{S}^n$ associe $\phi_\lambda(x) = \psi_{x_0}^{-1}\left(\lambda^{-1}.\psi_{x_0}(x)\right)$ si $x \neq x_0$ et $\phi_\lambda(x_0) = x_0$ où ψ_{x_0} est la projection stéréographique de pôle x_0 définie par :
$$\psi_{x_0} : \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$$
qui associe à un point $a = (a_1, ..., a_n, \zeta)$, $\psi_{x_0}(a) = \left(\frac{a_1}{1-\zeta}, ..., \frac{a_n}{1-\zeta}\right)$.

Comme ϕ_λ est la composée de transformations conformes donc c'est une transformation conforme, en fait et si on pose $\beta = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2-1}$ on a la formule suivante
$$\phi_\lambda^\star h = u_{x_0,\beta}^{\frac{4}{n-2k}}.h$$ [2]

2. h dénote la métrique canonique de la sphère unitaire $\mathbb{S}^n$

où

$$u_{x_0,\beta}(x) = \left(\frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta-\cos d_h(x,x_0)}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n \text{ et } \beta > 1.$$

donc si nous posons $g_0 = u_{x_0,\beta}^{\frac{4}{n-2k}}.h$, alors il est important de noter que

1. la courbure scalaire $Scal_{g_0}$ de g_0 vaut $n(n-1)$.
2. le volume de la sphère $(\mathbb{S}^n, g_0)$ est exactement le volume de la sphère munie de sa métrique canonique h [3].

En particulier on a :

$$\int_{\mathbb{S}^n} u_{x_0,\beta}^{2^\sharp} dv_h = \omega_n \tag{4.2.1}$$

où $\omega_n > 0$ le volume de la sphère unitaire standard $(\mathbb{S}^n, h)$.

Il vient de l'invariance conforme dans $(\mathbb{S}^n, h)$ de l'opérateur P_h que

$$P_h(u_{x_0,\beta}) = \frac{n-2k}{2}.Q_{g_0}.u_{x_0,\beta}^{2^\sharp-1} \tag{4.2.2}$$

où Q_{g_0} est la Q-courbure de la sphère unitaire standard muni de la métrique g_0 qui est égale à la Q-courbure de $(\mathbb{S}^n, h)$ [4] et qui vaut d'après la formule de Gover [10] :

$$Q_{g_0} = Q_h = \frac{2}{n-2k}P_h(1) = \frac{2}{n-2k}(-1)^k \prod_{l=1}^{k}(c_l\ Scal_h)$$

où $c_l = \frac{(n+2l-2)(n-2l)}{4n(n-1)}$ et $Scal_h$ la courbure scalaire et par conséquent et lorsqu'on suppose que l'opérateur P_h est d'ordre (k pair) la Q-courbure est une constante strictement positive ; en fait on a

$$Q_{g_0} = Q_h = \frac{2}{4^k(n-2k)} \prod_{l=1}^{k}((n+2l-2)(n-2l))$$

Multiplions (4.2.2) par $u_{x_0,\beta}$ des deux cotés et intégrons sur $\mathbb{S}^n$ nous obtenons

$$\int_{\mathbb{S}^n} u_{x_0,\beta} P_h(u_{x_0,\beta}) dv_h = \frac{n-2k}{2}.Q_h \int_{\mathbb{S}^n} u_{x_0,\beta}^{2^\sharp} dv_h.$$

3. Le lecteur intéressé par toutes ces affirmations pourra consulter [11], pages 292 – 293.
4. en fait il existe une infinité de métriques qui ont la même Q-courbure que h.

Or, avec (4.2.1) le deuxième membre dans cette égalité vaut $\frac{n-2k}{2}.Q_h.\omega_n$ où ω_n est le volume de la sphère unitaire standard $\mathbb{S}^n$ munie de la métrique canonique h et puisque

$$\int\limits_{\mathbb{S}^n} u_{x_0,\beta} P_h(u_{x_0,\beta}) dv_h = \|u_{x_0,\beta}\|^2_{P_h}$$

on conclut :

$$\|u_{x_0,\beta}\|^2_{P_h} = \frac{n-2k}{2}.Q_h.\omega_n.$$

Donc si on pose

$$\varphi := \left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{-1}{2}}.u_{x_0,\beta}$$

alors la fonction φ satisfait les conditions demandées dans la preuve de notre théorème (Théorème 2 de [3]) c'est à dire : $\varphi > 0$ de classe $C^\infty(\mathbb{S}^n)$ et de norme $\|\varphi\|_{P_h} = 1$

4.2.2 Résultats d'existence sur la sphère unitaire standard

Il vient d'après l'étape précédent que dans le cas où la variété (M, g) est la sphère unitaire standard si on remplace φ dans le théorème 2 dans [3] par $\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{-1}{2}}.u_{x_0,\beta}$ nous obtenons d'autres résultats d'existence par exemple le théorème 2 peut être reformuler comme suit

Théorème 4.2.1.
Soit $(\mathbb{S}^n, h)$ la sphère unitaire standard de dimension $n > 2k,\ k \in \mathbb{N}^\star$(pair) supposons qu'il existe une constante $C(n,p,k) > 0$ qui ne dépend que de n, p, k telle que

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{2^\sharp}{2}} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{A(x)}{u^{2^\natural}_{x_0,\beta}} dv_h \leq C(n,p,k)\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n} B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \tag{4.2.3}$$

et

$$\frac{1}{p-1}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{p-1}{2}} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{C(x)}{u^{p-1}_{x_0,\beta}} dv_h \leq C(n,p,k)\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n} B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}} \tag{4.2.4}$$

où

$$u_{x_0,\beta}(x) = \left(\frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta - \cos d_h(x,x_0)}\right)^{\frac{n-2k}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n \ \textit{et}\ \beta > 1.$$

alors l'équation (2.1.1) *admet une solution positive de classe* $C^\infty(\mathbb{S}^n)$*. Si de plus* $(k \geq 2)$ *et les conditions suivantes sont vérifiées*

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\int\limits_{\mathbb{S}^n}\sqrt{A(x)}dv_g\right)^2 \geq aS\frac{k}{4n}\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n}B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \tag{4.2.5}$$

$$\frac{1}{p-1}\left(\int\limits_{\mathbb{S}^n}\sqrt{C(x)}dv_g\right)^2 \geq (2-a)^{\frac{2^\sharp-p+1}{2^\sharp}}(aS)^{\frac{p-1}{2^\sharp}}\frac{k}{4n}\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n}B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}} \tag{4.2.6}$$

avec $1 < p < 2^\sharp + 1$ *(très proche de* $2^\sharp + 1$*) où* $2^\sharp = \frac{2n}{n-2k}$ *et*

$$a_1 \leq A(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right)a_2$$

où

$$a_1 = \frac{2^\sharp akSt_0^{2+2^\sharp}}{4n\omega_n^2}; \qquad a_2 = \frac{2^\sharp k\theta^{2^\sharp}St_0^{2+2^\sharp}}{2n\omega_n^2}$$

et

$$c_1 \leq C(x) \leq \left(1 - \frac{1}{2k}\right)c_2$$

où

$$c_1 = \frac{(p-1)t_0^{p+1}k\left[(aS)(2-a)\right]^{\frac{p-1}{2^\sharp}}}{4n\omega_n^2} \quad et \quad c_2 = \frac{(p-1)kS^{\frac{p-1}{2^\sharp}}t_0^{p+1}\theta^{p-1}}{2n\omega_n^2}$$

et ω_n *désigne le volume de la sphère unitaire* $\mathbb{S}^n$*.*

Alors l'équation (0.0.9) possède une deuxième solution positive et de classe $C^\infty(\mathbb{S}^n)$*.*

Signalons que ; comme

$$\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{n-2k}{4}} \leq u_{x_0,\beta}(x) \leq \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{n-2k}{4}} \tag{4.2.7}$$

on peut remplacer les deux conditions (4.2.3) et (4.2.4) par d'autres conditions qui ne dépendent pas de la fonction $u_{x_0,\beta}(x)$.

En effet ; (4.2.7) implique que si $\varphi(x) = u_{x_0,\beta}(x)\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{-\frac{1}{2}}$ alors

$$\varphi(x) \geq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{n-2k}{4}}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et par conséquent

$$\frac{\|\varphi\|^{2^\sharp}}{2^\sharp}\int_{\mathbb{S}^n}\frac{A(x)}{\varphi^{2^\sharp}}dv_h = \frac{1}{2^\sharp}\int_{\mathbb{S}^n}\frac{A(x)}{\varphi^{2^\sharp}}dv_h \leq \frac{1}{2^\sharp}\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}\int_{\mathbb{S}^n}A(x)dv_h$$

Ainsi, si

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}\int_{\mathbb{S}^n}A(x)dv_h \leq C\left(n,p,k\right)\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n}B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}}$$

alors (4.2.3) est vérifié,de même si

$$\frac{1}{p-1}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{n(p-1)}{2.2^\sharp}}\int_{\mathbb{S}^n}C(x)dv_h \leq C\left(n,p,k\right)\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n}B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}}$$

alors (4.2.4) est vérifié, et finalement on a le résultat suivant :

Corollaire 4.2.1.

Soit $(\mathbb{S}^n, h)$ *la sphère unitaire standard de dimension* $n > 2k,\ k \in \mathbb{N}^\star$*(pair) supposons qu'il existe une constante* $C(n,p,k) > 0$ *qui ne dépend que de* n, p, k *telle que*

$$\frac{1}{2^\sharp}\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{2^\sharp}{2}}\int_{\mathbb{S}^n}A(x)dv_h \leq C\left(n,p,k\right)\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n}B(x)\right)^{\frac{2+2^\sharp}{2-2^\sharp}} \tag{4.2.8}$$

et

$$\frac{1}{p-1}\left(\frac{n-2k}{2}.\omega_n.Q_h\right)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{n(p-1)}{2.2^\sharp}}\int_{\mathbb{S}^n}C(x)dv_h \leq C\left(n,p,k\right)\left(S\max_{x\in\mathbb{S}^n}B(x)\right)^{\frac{p+1}{2-2^\sharp}} \tag{4.2.9}$$

où $\beta > 1$ *un nombre réel alors l'équation* (2.1.1) *admet une solution positive de classe* $C^\infty(\mathbb{S}^n)$*.*

Bibliographie

[1] T. Bartsch, T. Weth and M. Willem, A Sobolev inequality with remainder term and critical equations on domains with topology for the polyharmonic operator, Calc. Var. Partial Differential Equations **18**, 253-268, (2003).

[2] M. Benalili, On the singular Q-curvature type equation. J. Differential Equations **254** no.2, 547-598 (2013).

[3] M. Benalili, A. Zouaoui, Elliptic equation with critical and negative exponents involving the GJMS operator on compact Riemannian manifolds, Journal of geometry and physics. **140**, 56-73(2019).

[4] M. Benalili, A. Zouaoui, Elliptic equation with critical and negative exponents involving the GJMS operator on the standard unit sphere (soumis)

[5] C. Birahim Ndiaye ; Constant Q-curvature metrics in arbitrary dimension. J. Funct. Anal. **251** no. 1, 1-58(2007).

[6] T. P. Branson, B. Oersted, Explicit functional determinants in four dimension, Proc. Amer. Math. Soc. **113-3**,669-682(1991).

[7] Z. Djadli, A. Malchiodi, Existence of conformal metrics with constant Q-curvature. Ann. of Math. (2) **168** no. 3, 813-856 (2008).

[8] Z. Djadli, E. Hebey, M. Ledoux, Paneitz-type operators and applications, Duke Math. J. **104**, no. 1, 129-169,(2000).

[9] C.R. Graham, R. Jenne, L.J. Masson, G.A.J. Sparling, Conformally invariant powers of the Laplacien. I. Existence. J. London Math. Soc. **46** , 557-565(1992).

[10] A.R. Gover, Laplacian operators and Q-curvature on conformaly Einstein manifolds. Math. Ann. **336** no. 2, 311-334 (2006).

[11] E. Hebey, Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, **Diderot**, (1997).

[12] E. Hebey, F. Pacard, D. Pollack, A variational Analysis of Einstein-scalar Field Lichnerowicz Equations on compact Riemannian Manifolds, commun. Math. Phys. **278**, 117-132, (2008).

[13] E. Hebey, F. Robert, Coercivity and Struwe's compactness for Paneitz type operators with constant coefficients, Calc.Var. **13**, p.p. 491-517(2001).

[14] E. Hebey, G. Veronelli, The Lichnerowicz equation in the closed case of the Einstein-Maxwell theory. Trans. Amer. Math. Soc., **366**, no. 3, 1179-1193(2014).

[15] A. Maalaoui, On a fourth order Lichnerowicz type equation involving the Paneitz-Branson operator. Ann. Global An. Geom. **42**, no 3, (2012) 391-412.

[16] S. Mazumdar, GJMS-type operators on a compact Riemannian manifold : best constants and Coron-type solutions, J. Differential Equations **261**, no. 9, 4997-5034(2016).

[17] I. Meghea, Ekeland Variational Principles with Generalizations and Variants, **Old City Publishing** , (2009).

[18] Q.A. Ngô, X. Xu, Existence results for the Einstein-scalar field Lichnerowicz equation on compact Riemannian manifolds. Adv. Math. **230** no. 4-6, 2379-2415(2012).

[19] S.M. Paneitz, A quartic conformally differential operator for arbitrary pseu-Riemannian manifolds. Symmetry Integrability Geom. Methods and Appl.,4, Paper 036, (2008).

[20] B. Premoselli, Effective multiplicity for the Einstein-scalar field Lichnerowicz equation. Calc. Var. Partial Differential Equations **53** no. 1-2, 29-64(2015).

[21] P. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference in Mathematics, **65**. Amer. Math. Soc., Providence, RI(1986).

[22] F. Robert, Admissible $Q-$curvatures under isometries for the conformal GJMS operators, Nonlinear elliptic partial differential equations, Contemporary Ma-

thematics, Volume in the honor of Jean-Pierre Gossez, **540**, 241-259. Amer. Math. Soc., Providence, RI(2011) .

[23] Y. Choquet-Bruhat, General Relativity and the Einstein Equations, in : Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, (2009).

[24] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg, D. Pollack, The constraints equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds, Class. Quantum Grav **24**, 809-828(2007).

[25] L. Ma, J. Wei, Stability and multiple solutions to Einstein-scalar field Lichnerowicz equation on manifolds, J. Math. Pures. Appl **99**, 174-186(2013).

Abstract
We investigate in this thesis an elliptic non linear partial differential equation. The order of this equation is $2k$, because it contains a differential operator of $2k$-order ($k \in \mathbb{N}^\star$) of type $GJMS$ as a principal part.
After giving a necessary notions for understanding the topic of this thesis in the first chapter; we prove in the second chapter by using critical point theory the existence of two distinct solutions. We present in the third chapter a special situation where our equation does note admit any solution with norm less than a given positive number. The last chapter is devoting to the applications of our results.
Key Words and Phrases: Critical point theory, $GJMS$ operators, Theorem of Ambrosetti-Rabinowitz, The variational principal of Ekeland.

Résumé
Nous étudions dans cette thèse une équation elliptique d'ordre $2k(k \in \mathbb{N}^\star)$ contenant un opérateur géométrique différentiel de type $GJMS$.
Après avoir donner les notions de base nécessaire pour la compréhension du sujet de cette thèse dans le premier chapitre; on démontre dans le deuxième chapitre l'existence de deux solutions distinctes pour cette équation.
Dans le chapitre 3, on présente un cas particulier où notre équation ne possède pas de solutions de normes inférieures à un nombre réel positif donné.
Le dernier chapitre est consacré aux applications, notamment dans la sphère unitaire standard $\mathbb{S}^n$.
Mots clés: La théorie des points critiques, les opérateurs $GJMS$, Le théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz, Le principe variationnel d'Ekeland.

ملخص
ندرس في هذه المذكرة معادلة إهليجية من الدرجة $2k$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم وذلك لاحتوائها على مؤثر من صنف $GJMS$ من الدرجة $2k$.
بعد أن نقدم بعض التعاريف كتوطئة للموضوع في الفصل الأول؛ نبرهن في الفصل الثاني باستعمال طريقة النقط الحرجة أن هذه المعادلة تقبل حلين متمايزين. نعطي في الفصل الثالث حالة خاصة لا تقبل فيها هذه المعادلة حلا.
في الفصل الرابع نقدم تطبيقين من تطبيقات النتيجة المتحصل عليها في الفصل الثاني؛ الأول عبارة عن تطبيق صالح من أجل أي منوعة من منوعات ريمان المتراصةذات بعد منته n حيث $n > 2k$ ؛ أما التطبيق الثاني فهو خاص بالكرة $\mathbb{S}^n$.
كلمات مفتاحية: نظرية النقط الحرجة؛ موثرات $GJMS$ ؛ نظرية أمبروزيتي ربينوفيتش؛ مبدأ أوكلاند.