

Résumé

Dans cette étude, nous avons étudié pour la première fois la conception optimale des séquences d'empilement des poutres symétriques SCRV dans l'air et dans l'eau. Cette étude était basée sur la méthode d'optimisation couche par couche. Deux angles d'orientation des fibres sont considérés comme variables de conception dans chaque couche. Nous avons ainsi inclus différents paramètres géométriques et mécaniques et des conditions aux limites. Nous avons utilisé pour le calcul des fréquences la version- p de MEF combinée à la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée à la torsion.

Une poutre est un élément unidimensionnel dont les dimensions de la section transversale sont très petites par rapport à la longueur. Les poutres peuvent être soumises à des charges horizontales, verticales, de cisaillement, etc. Les ailes d'avion, les hélices, les aubes de turbine, les quilles, les barres, les colonnes sont considérées comme des poutres. Les stratifiés composites peuvent former ces poutres pour atteindre une haute rigidité, une bonne résistance à la fatigue et la corrosion, ainsi que la légèreté. Selon sa rigidité, le stratifié se divise en deux catégories : rigidité constante et rigidité variable. Pour la conception du stratifié à rigidité constante, il sera composé de fibres rectilignes qui disposent d'une haute rigidité et résistance quand les charges sont soumises le long de la direction de la fibre. Ces propriétés sont minimales dans la direction transversale de la fibre. La deuxième catégorie est le stratifié à rigidité variable qui peut être réalisé par le changement de la fraction volumique des fibres dans le stratifié, en complément ou en additionnant des couches au stratifié, ou alors par utilisation des fibres curvilignes.

Les propriétés mécaniques des poutres composites renforcées par des fibres curvilignes dépendent de la forme des fibres. Elles possèdent une rigidité et une anisotropie variables contrairement aux poutres avec anisotropie homogène qui contiennent des fibres rectilignes. Les fibres les plus efficaces pour les poutres composites sont les fibres curvilignes.

La vibration d'une structure dans l'air et dans fluide sont totalement différents. Dans un fluide, la vibration de la poutre accélère les particules de fluide, ceci provoque une force d'inertie et une masse ajoutée pour le fluide qui agissent sur la vibration de la structure. Par contre, la masse ajoutée est négligeable dans l'air.

Plusieurs théories des poutres ont été développées en se basant sur diverses hypothèses et sur différents niveaux de précision pour calculer la flexion sous une distribution des charges. L'une des théories des plus simples et utiles est la théorie des poutres Euler-Bernoulli. Les hypothèses établies pour cette théorie sont :

H1 : la poutre est isotrope et élastique,

H2 : La poutre est longue et mince avec une section transversale constante le long de l'axe,

H3 : La déformation de la poutre est dominée par la flexion et les déplacements latéraux. La déformation de cisaillement et l'inertie de rotation sont négligeables,

H4 : La section d'une poutre reste plane après la déformation,

H5 : La section reste normale à l'axe déformé de la poutre.

Le modèle Euler-Bernoulli remonte au 18^{ème} siècle avec la découverte de Jacob Bernoulli que la courbure d'une poutre élastique en tout point est proportionnelle au moment de flexion à ce point. Daniel Bernoulli, le neveu de Jacob, est le premier à avoir formulé l'équation différentielle du mouvement d'une poutre vibrante. Plus tard, la théorie de Jacob Bernoulli fut acceptée par Leonhard Euler dans son enquête de la forme des poutres élastiques dans diverses conditions de chargement. Ce dernier a réalisé plusieurs avancées sur les courbes élastiques. Cependant, le modèle d'Euler-Bernoulli tend à surestimer légèrement les fréquences naturelles. Cette problématique est renforcée pour les fréquences propres des modes élevés et pour les poutres minces. Les poutres non minces ne sont pas concernées par cette problématique. Autres théories sont des extensions de cette théorie (théorie de Rayleigh, théorie de cisaillement, théorie de Timoshenko).

Selon la théorie d'Euler-Bernoulli, le champ de déplacements est basé sur deux variables indépendants, le déplacement transversal w^0 et l'angle de torsion β .

La géométrie d'un bord de la poutre avant et après déformation est représentée dans la figure 1.

Les versions de la méthode des éléments finis ont été utilisées pendant de nombreuses années pour remédier à des problèmes d'ingénierie. Cette méthode comporte trois catégories :

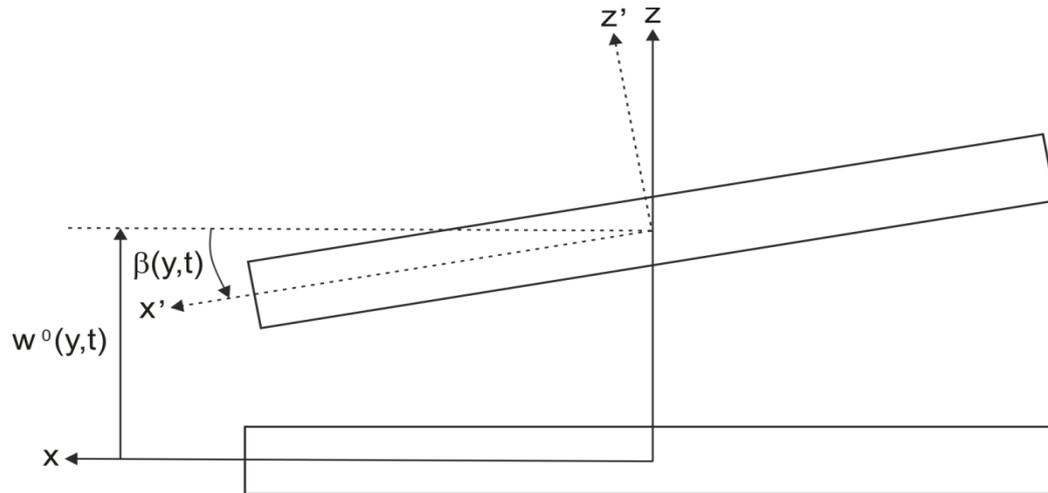


Figure 1 : Géométrie de la poutre avant et après déformation.

- ✓ La première catégorie est la version- h dans laquelle la précision des résultats est obtenue par raffinement du maillage tout en fixant le degré d'interpolation p des fonctions de forme.
- ✓ La deuxième catégorie est la version- p est basée sur l'augmentation d'une manière progressive du degré d'interpolation des fonctions de la forme tout en gardant le maillage constant.
- ✓ La troisième et dernière catégorie est la version $h-p$ qui est une combinaison de la version- h et de la version- p . Dans cette procédure, la taille h des éléments et le degré d'interpolation- p sont modifiés.

La version- p de MEF présente des avantages et des inconvénients. Nous allons citer certains avantages de cette version : Premièrement, la convergence rapide ne nécessitant pas un changement de maillage pour atteindre la solution. Deuxièmement, les matrices masse et rigidité de degré p sont toujours des sous matrices de $p+1$. Enfin, il est facile de joindre les éléments de différent degré polynomiaux. Par conséquent, il est possible d'inclure des degrés de liberté supplémentaires si nécessaire. Un inconvénient de cette version : l'utilisation de calcul symbolique est requise pour réaliser l'intégration des polynômes d'ordre élevé.

L'optimisation est un instrument efficace qui peut être appliqué à n'importe quel domaine d'ingénierie en utilisant plusieurs techniques. Une fois le problème d'optimisation est défini nous introduisons des paramètres qui s'appellent paramètres d'entrée. Les variables d'entrée sont un sous-ensemble de paramètres d'entrée. Il est évident que la complexité du problème

croît d'une façon progressive avec le nombre de variables d'entrée. Les paramètres de sortie sont générés par l'expérience ou la simulation. La fonction objective peut être un ou plusieurs paramètres de sortie. D'une façon générale, l'optimisation consiste à trouver l'ensemble des variables d'entrée qui minimisent ou maximisent la fonction objective. La figure 2 représente la procédure d'optimisation.

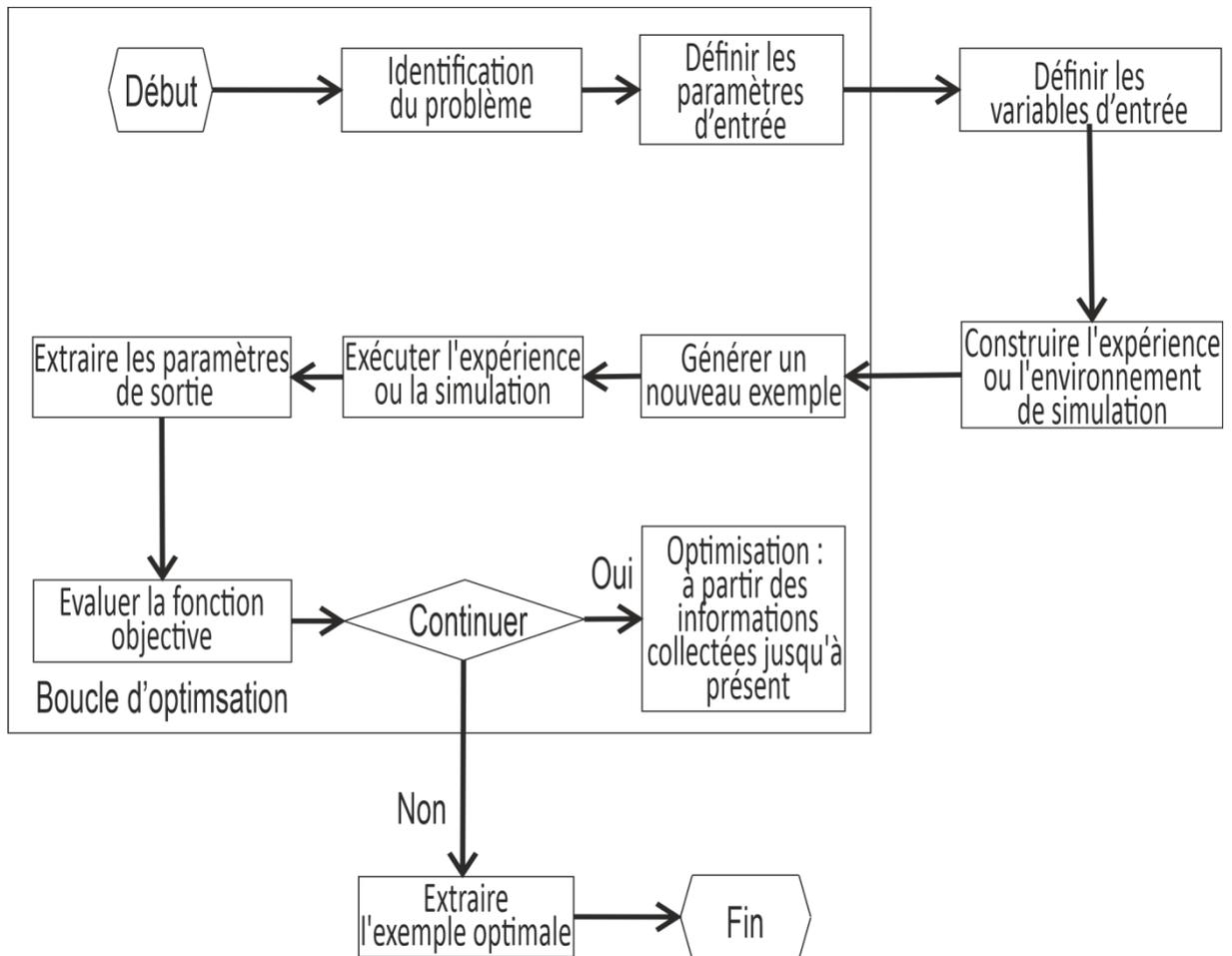


Figure 2: Procédure de résolution d'un problème d'optimisation.

La méthode d'optimisation couche par couche est une méthode déterministe sous contrainte. Nous l'avons appliqué pour déterminer les séquences d'empilement optimales pour les fréquences maximales des trois premiers modes. Etant donné que les couches les plus externes ont plus d'effet de rigidité en cas de flexion que les couches internes. Les couches les plus externes ont plus d'effet pour déterminer les fréquences maximales. La fonction objective est prise comme paramètre de fréquence non dimensionnel $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_s h / D_0}$, où $D_0 = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12} \nu_{21})$. Les angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 sont utilisés comme variables de conception dans chaque couche. Ces angles doivent satisfaire la contrainte de

courbure κ . Les séquences d'empilement optimales $[\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}]_{opt}$ pour les fréquences maximales des poutres SCRIV dans l'air et dans l'eau peuvent être déterminées séquentiellement dans l'ordre des couches les plus externes aux couches les plus internes. En utilisant la méthode d'optimisation couche par couche, la forme mathématique est donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{T} = (\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}) \\ \text{Pour maximiser } \Omega_i = \Omega_i(\vec{T}) \\ \text{Soumise à des contraintes } \left\{ \begin{array}{l} -90^\circ \leq T_0^{(k)} \leq 90^\circ \\ -90^\circ \leq T_1^{(k)} \leq 90^\circ \\ \kappa_{max}^{(k)} \leq 3.28 \text{ m}^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

La procédure d'optimisation couche par couche pour des poutres stratifiées symétriques est représenté dans la figure 3.

La méthode d'optimisation couche par couche est appliquée en supposant que les couches de la moitié supérieure (ou inférieure) de la section transversale de stratifié ont une masse mais pas de rigidité. Le premier cycle itératif commence par l'étape 1 et se termine par l'étape $K/2$. Dans chaque étape, $\langle T_0|T_1 \rangle^k$ ($k = 1, 2, \dots, K/2$) est recherché en utilisant un petit incrément pour les variables de conception (par exemple $\Delta T_0 = \Delta T_1 = 5^\circ$) pour déterminer la fréquence maximale $\Omega_{i(opt)}^{(k)}$ du mode i . Les couches internes $k - 1$ restent sans rigidité. Après chaque étape, $\langle T_0|T_1 \rangle^k$ est remplacé par $\langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^k$. Lorsque l'étape $K/2$ est atteinte, nous obtenons la séquence d'empilement optimale $[\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}]_{opt}$. Cette dernière détermine la fréquence maximale $\Omega_{i(opt)} = \Omega_{i(opt)}^{(K)}$ du mode i . La solution optimale déterminée dans le premier cycle itératif est considérée comme une meilleure approximation initiale pour le cycle suivant tout en laissant tous les angles d'orientation des fibres dans l'itération précédente inchangés. Les itérations sont répétées jusqu'à l'obtention d'une solution convergente.

La méthode d'optimisation couche par couche est simple et efficace. Elle implique un nombre d'opérations moindre par rapport aux autres méthodes d'optimisation générales. Le coût et le temps de calcul sont minimes. Cependant cette méthode permet d'atteindre la solution locale et non globale. Par conséquent elle manque de précision. La figure 4 représente l'algorithme de la méthode d'optimisation couche par couche.

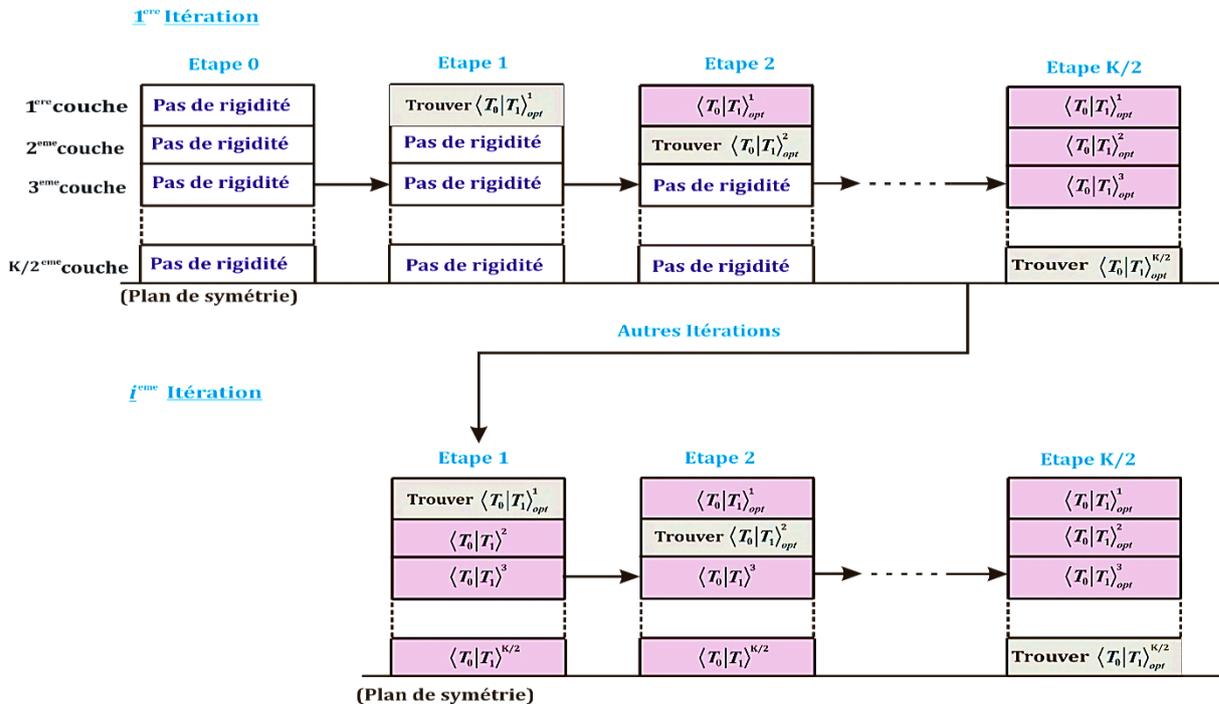


Figure 3 : Procédure d’optimisation couche par couche pour des poutres stratifiées symétriques.

La plupart des problèmes qui nécessitent un programme informatique pour les résoudre sont trop complexes pour être résolus et ils sont traités dans une seule opération. L'utilisation des sous-programmes permet de traiter individuellement les problèmes liés au grand problème. Une fois que chaque pièce fonctionne correctement, on assemble les pièces pour créer la solution complète. Pour implémenter les sous-programmes, on écrit d’abord un programme principal qui référence tous les sous-programmes dans l’ordre souhaité, puis on commence à écrire les sous-programmes. Ceci est similaire à la composition d’un plan pour un essai avant d’écrire l’essai et il aide à rester sur la bonne voie.

Deux codes de calcul ont été établis. Le premier code est pour la vibration libre des poutres en utilisant la version- p de MEF basée sur la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée à la torsion. Le deuxième est basé sur la méthode d’optimisation couche par couche et une combinaison entre la version- p de MEF et la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée à la torsion pour le calcul de la fonction objective qui donne les fréquences optimales et leurs séquences d’empilement.

L’étude de convergence des fréquences en fonction de l’ordre p du polynôme d’interpolation est réalisée pour une poutre en porte-à-faux SCRV avec fibres curvilignes et

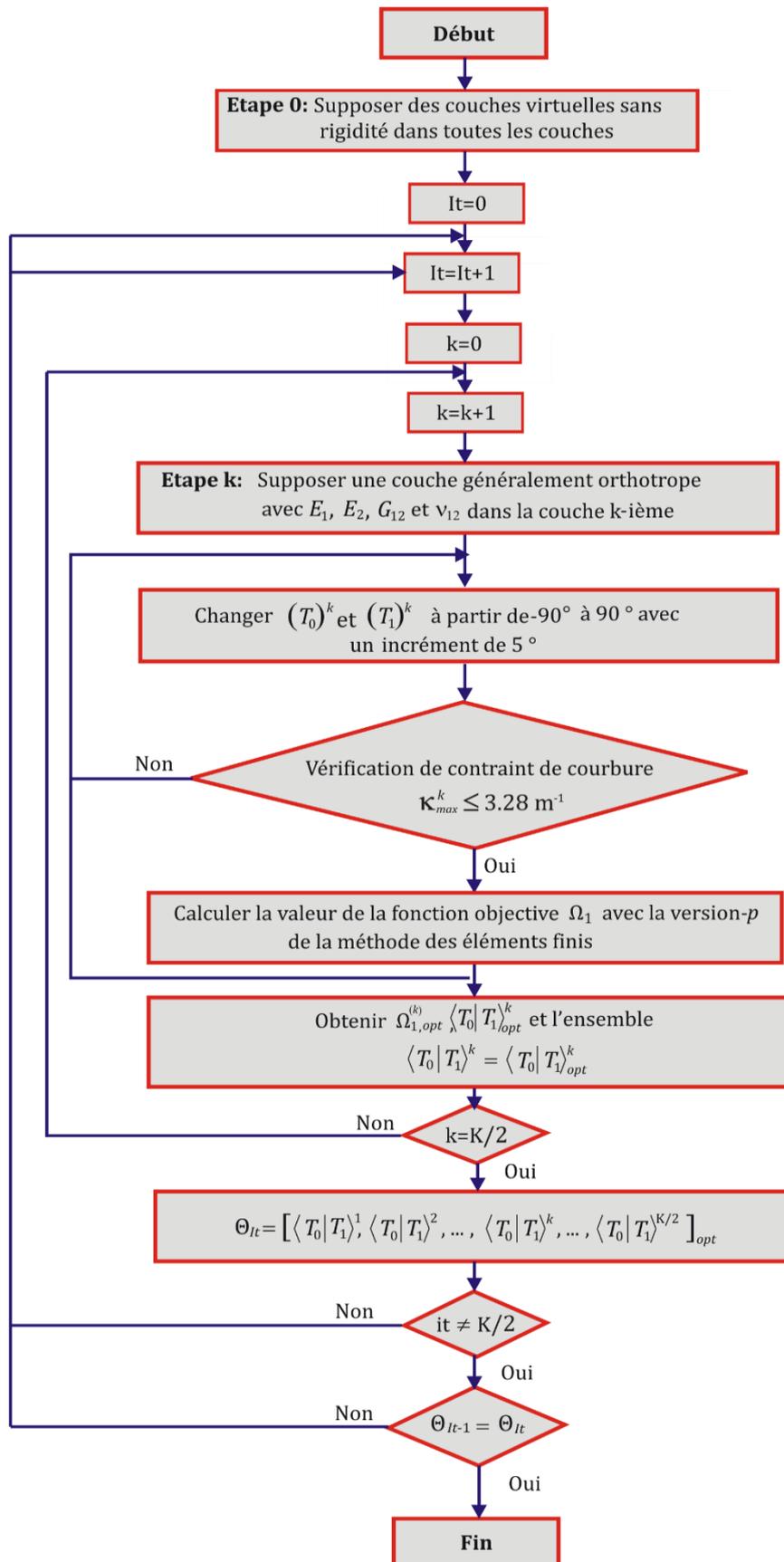


Figure 4 : Algorithme de la méthode d'optimisation couche par couche.

4 couches $[\mp\langle 45^\circ | 30^\circ \rangle]_s$ immergée dans l'eau. Les stratifiés sont fabriqués pour que la contrainte de courbure des fibres κ dans chaque couche soit atteinte. Les fréquences non dimensionnelles Ω pour les trois premiers modes sont calculées en augmentant l'ordre p du polynôme d'interpolation de 4 à 10 avec un incrément de 2. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.

Tableau 1: Convergence des fréquences non dimensionnelles Ω pour les trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec fibres curvilignes et 4 couches $[\mp\langle 45^\circ | 30^\circ \rangle]_s$ dans l'eau en fonction de p .

Mode	p				Solution convergée
	4	6	8	10	
1	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497
2	3.333	3.309	3.307	3.307	3.307
3	16.175	9.078	8.991	8.988	8.988

On peut voir d'après le tableau que les fréquences convergent rapidement lorsque l'ordre p du polynôme d'interpolation est augmenté et la précision est obtenue jusqu'à trois chiffres significatifs en utilisant des polynômes d'interpolation de quatrième, sixième, huitième et dixième ordre pour le premier mode, le deuxième mode et le troisième mode, respectivement. Pour garantir que les fréquences des trois premiers modes soient précises jusqu'à trois chiffres significatifs, les calculs ultérieurs sont effectués sur la base d'un polynôme d'interpolation p de dixième ordre.

L'étude de comparaison est réalisée pour une poutre composite en porte -à- faux monocouche avec des fibres rectilignes dans l'air et dans l'eau. la poutre est notée par $\langle \theta | \theta \rangle$. Les fréquences non dimensionnelles Ω pour les deux premiers modes sont calculées en variant l'angle d'orientation de la fibre θ de 0° à 90° avec un incrément de 5° . Les résultats pour les deux premiers modes sont présentés dans la figure 5 ainsi que celles obtenues analytiquement par Kramer et *al.* (2013) basées sur les hypothèses de la théorie des poutres Euler-Bernoulli. Les effets du couplage flexion-torsion et de la masse ajoutée ont été pris en compte dans l'analyse. Kramer et *al.* (2013) ont validé les résultats analytiques par une comparaison avec des solutions d'éléments finis en utilisant le logiciel commercial d'éléments finis Abaqus. Le fluide est supposé non visqueux, irrotationnel, compressible linéairement et les effets

gravitationnels étaient négligés. On peut voir dans la figure 5 que les résultats actuels coïncident avec celles obtenus par Kramer et les co-auteurs. Notez que les angles d'orientation des fibres θ définis ici et les angles d'orientation des fibres θ^* définis par Kramer et *al.* (2013) sont liés par l'équation $\theta + \theta^* = 90^\circ$.

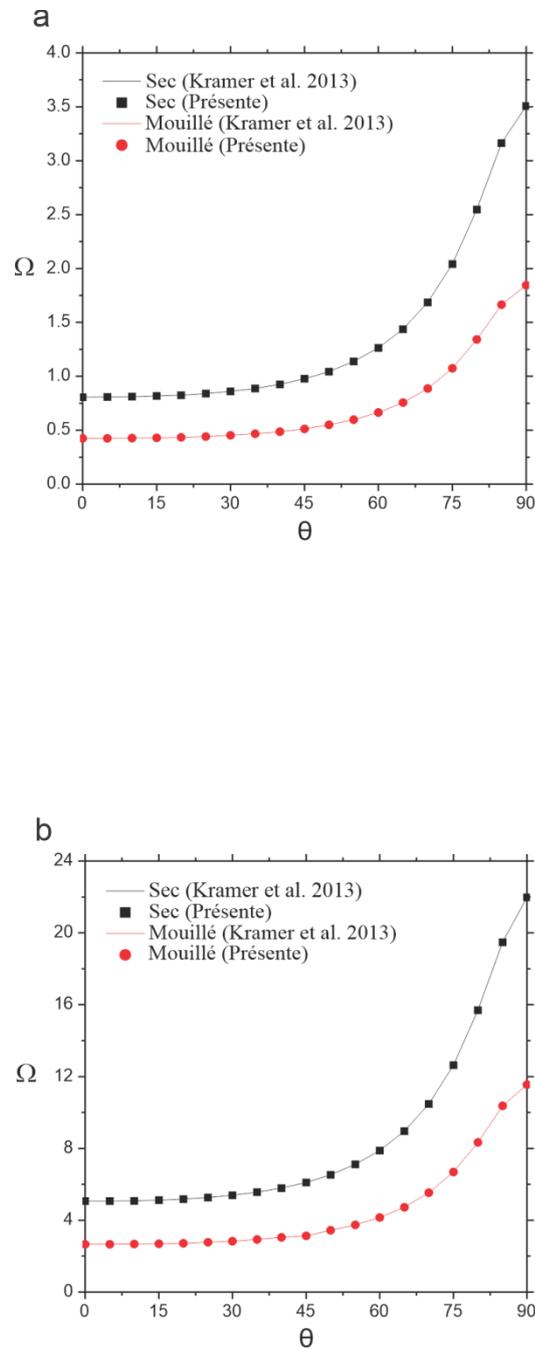


Figure 5: Comparaison des fréquences non dimensionnelles Ω pour les deux premiers modes d'une poutre composite en porte-à-faux monocouche $\langle \theta | \theta \rangle$ avec des fibres rectilignes dans l'air et dans l'eau en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ (a) premier mode, (b) deuxième mode.

Cette étude nous a permis d'obtenir les conclusions suivantes :

- ✓ La convergence rapide et la grande précision de la version- p de MEF font de d'elle une excellente méthode de calcul des fréquences.
- ✓ La méthode d'optimisation couche par couche est caractérisée par sa simplicité et sa rapidité.
- ✓ La solution de la méthode d'optimisation couche par couche peut être locale et non globale. Plus on minimise l'incrément des angles d'orientation des fibres, plus on atteint la convergence vers la solution globale.
- ✓ Les fréquences optimales augmentent avec l'accroissement des contraintes aux limites.
- ✓ Les fréquences à l'état sec sont plus importantes qu'à l'état mouillé, cela est dû à l'effet de la masse ajoutée en cas d'état mouillé.
- ✓ Les fréquences fondamentales optimales dans l'air restent inchangeables pour plusieurs paramètres géométriques ($h/L, b/L, N$). Ces fréquences augmentent lorsque E_2/E_1 diminue en raison de la rigidité.
- ✓ Les fréquences fondamentales optimales dans l'eau augmentent en cas d'augmentation de rapport d'épaisseur-longueur h/L et du nombre des couches K . Cependant, ces fréquences diminuent en cas d'augmentation de rapport de largeur-longueur b/L et de rapport ρ_f/ρ_s .
- ✓ Les fréquences optimales pour le deuxième et le troisième mode dans l'air sont peu affectées par le rapport d'épaisseur-longueur h/L . Elles augmentent en cas d'augmentation du nombre de couches K et elles diminuent en cas d'augmentation de rapport de largeur-longueur b/L .
- ✓ Les fréquences optimales pour le deuxième et le troisième mode dans l'eau diminuent lorsque le rapport de largeur-longueur diminue. Néanmoins, elles augmentent en cas d'augmentation de rapport d'épaisseur-longueur et le nombre de couches K .
- ✓ Les propriétés mécaniques du matériau affectent de manière significative les séquences d'empilement optimales pour le deuxième et le troisième mode.
- ✓ Le matériau avec une densité moindre est le plus affecté en présence l'eau.
- ✓ Il n'existe aucun format de fibre dominant pour les séquences d'empilement optimales de deuxième et le troisième mode. Contrairement au premier mode, le format de fibre $\langle 90^\circ | 90^\circ \rangle$ constitue toutes les séquences d'empilement optimales.