



Thèse

En vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat LMD En Génie Mécanique

Option : Mécanique computationnelle

Présenté par :

MESKINE Abdennacer

Thème

Etude et optimisation de la vibration libre des poutres composites dans l'air et dans l'eau

Soutenu le 21/01/2021, devant le jury composé de :

Mr. CHEIKH Abdelmadjid	Professeur	Univ. Tlemcen	<i>Président</i>
Mr. HOUMAT Abderrahim	Professeur	Univ. Tlemcen	<i>Directeur de thèse</i>
Mr. TOUNSI Abdelwahab	Professeur	Univ. Sidi Bel-Abbes	<i>Examineur</i>
Mr. BOUAZZA Mokhtar	Professeur	Univ. Bechar	<i>Examineur</i>
Mr. HAMZA-CHERIF Sidi Mohammed	Maitre de conférence A	Univ. Tlemcen	<i>Examineur</i>

Année universitaire 2020-2021



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Cette thèse est dédiée aux personnes qui m'ont soutenu tout le long de mes études.

Merci de m'avoir fait voir cette aventure jusqu'au bout.

Remerciements

Je remercie principalement Dieu de m'avoir aidé à mener ce projet à terme.

Je tiens ensuite à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, le professeur Abderrahim Houmat, pour son soutien moral et académique. Sa patience et ses conseils, m'ont permis d'achever ce travail. J'apprécie vraiment le temps personnel qu'il a consacré pour m'aider. L'engagement et le respect du bien-être de ses élèves sont des qualités professionnelles qui deviennent rares de nos jours.

Je remercie du fond du cœur mon conseiller et mon ami, Mr Guenanou Ahmed, avec qui j'ai eu la chance de travailler. Il a joué un rôle très important dans ce projet. Je lui serai toujours reconnaissant pour son aide précieuse.

J'apprécie également l'aide apportée par la faculté de technologie de Tlemcen, le département de génie mécanique et le laboratoire de mécanique computationnelle pour la rédaction de cette thèse. Mes sincères remerciements vont également à Mr Benramdane Mohamed et à tous les enseignants qui m'ont permis d'évoluer durant mon parcours.

Je souhaite exprimer ma sincère reconnaissance à ma mère, mon père, mon frère et mes sœurs pour leur soutien, que ce soit à travers leur amour, ou encore leurs sacrifices sans faille. Grace à eux, j'ai pu poursuivre des études supérieures à la faculté de technologie de Tlemcen.

Je voudrais exprimer ma gratitude au Professeur CHEIKH Abdelmadjid président de jurys, Professeur TOUNSI Abdelwahab, Professeur BOUAZZA Mokhtar et Maître de conférence HAMZA-CHERIF Sidi Mohammed pour avoir siégé à mon comité de thèse et m'avoir accordé une partie de leurs temps précieux malgré leurs horaires chargés.

Finalement je remercie tous mes amis et mes collègues, en particulier Saad Mohamed Amine, Hannini Mohamed pour leur soutien, ainsi que toutes les personnes qui ont eu un rôle majeur ou mineur dans ma progression.

Résumé

L'étude des fréquences optimales pour les trois modes les plus bas en variant les paramètres géométriques, mécaniques, les conditions aux limites, ainsi que les angles d'orientation des fibres pour une poutre symétrique SCRIV avec fibres curvilignes dans l'air et dans l'eau est réalisé dans ce travail. La technique des trajectoires des fibres décalées est utilisée pour la construction des chemins de fibre. La version- p de MEF basée sur la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée avec la torsion est utilisée pour l'obtention des fréquences. La méthode d'optimisation couche par couche est établie pour atteindre la fonction objective. La poutre est modélisée comme un élément- p unidimensionnel. Les fonctions de forme sont obtenues à partir des polynômes de Legendre. L'équation du mouvement est donnée en appliquant le principe de déplacement virtuel. Deux programmes sont élaborés, un est pour le calcul des fréquences et les modes propres, l'autre est pour déterminer les séquences d'empilement optimales dans chaque couche de stratifié.

Mots clés :

Poutres SCRIV dans l'air et dans l'eau; théorie des poutres Euler-Bernoulli; version- p de MEF; vibration libre; fibres curvilignes; optimisation couche par couche; masse ajoutée; conception des séquences d'empilement optimales.

Abstract

Studying the optimal frequencies for the lowest three modes by varying the geometrical, mechanical parameters, boundary conditions, and fiber orientation angles for a symmetrical VSCL beam with curvilinear fibers in air and in water is achieved in this work. The shifted path technique is used to construct the fiber paths. The p -version of FEM based on Euler-Bernoulli beam theory coupled with torsion is used to obtain frequencies. The layer-wise optimization method is established to achieve the objective function. The beam is modeled as one-dimensional p -element. The shape functions are obtained from Legendre polynomials. The equation of motion is given by applying the principle of virtual displacement. Two programs are developed, one for calculating frequencies and eigenmodes, and the other is for determining the optimal stacking sequences in each layer of laminate.

Keywords :

VSCL beams in air and in water; Euler-Bernoulli beam theory; p -version of FEM; free vibration; curvilinear fibers; layer-wise optimization method; added mass; design of optimal stacking sequences.

ملخص

في هذا العمل، تمت دراسة الترددات المثلى للثلاث وسائط الصغرى من خلال تغيير العوامل الهندسية، الميكانيكية، شروط الحدود، وكذا اتجاه زوايا الألياف لعارضة متمثلة ص م ص م بألياف منحنية في الهواء و في الماء. تقنية المسار المتحول للألياف استعملت لصناعة مسار الألياف. الاصدار p - من طريقة العناصر المنتهية المعتمدة على نظرية العوارض أولر- برنولي المشتركة مع الالتواء استعملت لحساب الترددات. استخدمت طريقة التصميم طبقة طبقة للحصول على الدالة الهدف. صممت العارضة كعنصر- p أحادي البعد. تم الحصول على دالات الأشكال من خلال كثير الحدود Legendre. يتم إعطاء معادلة الحركة من خلال تطبيق مبدأ التنقل الافتراضي. تم تطوير برنامجين، أحدهما لحساب الترددات والوسائط الذاتية، والآخر لتحديد تسلسل التراص الأمثل في كل طبقة من طبقات الصفيحة.

الكلمات الرئيسية:

عوارض ص م ص م في الهواء و الماء؛ نظرية العوارض أولر- برنولي؛ الاصدار- p من طريقة العناصر المنتهية؛ اهتزاز حر؛ ألياف منحنية؛ التصميم طبقة طبقة؛ كتلة مضافة؛ تصميم التسلسل الأمثل للتراص.

Sommaire

Sommaire.....	I
Liste des figures	IV
Liste des tableaux	VI
Liste des symboles et acronymes	IX
Introduction générale	1

Chapitre I : Introduction

I.1. Vibration des poutres composites dans l'air et dans l'eau	4
I.2. Stratifiés composites à rigidité variable	5
I.3. Théorie des bandes	7
I.4. Version- p de la méthode des éléments finis.....	10
I.5. Optimisation des stratifiés composites à rigidité variable	13

Chapitre II : Théorie des poutres Euler-Bernoulli

II.1. Introduction.....	15
II.2. Hypothèses de la théorie des poutres Euler-Bernoulli	15
II.3. Relations cinématiques.....	17
II.3.1. Champ de déplacements	17
II.3.2. Relations déformation-déplacement	17
II.3.3. Relations contrainte-déformation	18
II.3.4. Relations des moments	19
II.4. Orientation des fibres	20
II.5. Energie de déformation de la poutre	21
II.6. Energie cinétique de la poutre.....	21
II.7. Equation du mouvement	22

Chapitre III : Formulation par la version- p de la méthode des éléments finis

III.1. Introduction.....	25
III.2. Avantages et inconvénients de la version- p de MEF.....	26
III.3. Polynômes de Legendre.....	26

III.4. Formulation par l'élément- p unidimensionnel	27
III.4.1. Fonctions de forme hiérarchiques.....	27
III.4.1.1. Fonctions de forme hiérarchiques externes pour la torsion	27
III.4.1.2. Fonctions de forme hiérarchiques internes pour la torsion	28
III.4.1.3. Fonctions de forme externes pour la flexion.....	30
III.4.1.4. Fonctions de forme de flexion internes.....	32
III.4.2. Déplacements et rotations pour l'élément- p unidimensionnel	32
III.4.3. Equation du mouvement.....	33

Chapitre IV : Méthode d'optimisation couche par couche

IV.1. Optimisation déterministe et stochastique	37
IV.2. Méthode d'optimisation couche par couche.....	40
IV.3. Description de la méthode	41
IV.4. Avantages et inconvénients de la méthode d'optimisation couche par couche.....	44

Chapitre V : Techniques de programmation

V.1. Introduction.....	45
V.2. Logiciels et matériel utilisés	45
V.3. Programme de calcul des fréquences.....	45
V.3.1. Organigramme du programme.....	45
V.3.2. Description des sous-programmes	45
V.3.2.1. Sous-programme INPUT	47
V.3.2.1.1. Paramètres géométriques.....	47
V.3.2.1.2. Paramètres physiques	48
V.3.2.1.3. Paramètres des éléments.....	48
V.3.2.2. Sous-programme COURB	48
V.3.2.3. Sous-programme GAUSS	48
V.3.2.4. Sous-programme FFUNC et GFUNT	48
V.3.2.5. Sous-programme INTEGRAL	48
V.3.2.6. Sous-programme MASSE.....	48
V.3.2.7. Sous-programme RIGIDITE.....	49
V.3.2.8. Sous-programme BOUNDC	49
V.3.2.9. Sous-programme JACOBI.....	49

V.3.2.10. Sous-programme SORT	49
V.3.2.11. Sous-programme MODE	50
V.3.2.12. Affichage des résultats	50
V.4. Programme d'optimisation.....	50
V.4.1. Description de programme.....	50
V.4.2. Description des sous-programmes	50
V.4.2.1. Fichier de données	51
V.4.2.2. Sous-programme OBJECTF	51
V.4.2.3. Sous-programme OPTIMUM	51
V.4.2.4. Fichier de sortie	51
 Chapitre VI : Résultats et interprétations	
VI.1. Convergence et validation des résultats.....	52
VI.1.1. Convergence des résultats	52
VI.1.2. Validation des résultats.....	53
VI.2. Analyse des vibrations libres des poutres SCRIV	55
VI.2.1. Espace de conception des fibres	55
VI.2.2. Modes de vibration	55
VI.2.3. Changement des angles d'orientation T_0 et T_1	58
VI.2.4. Changement du nombre de couches	58
VI.2.5. Changement des dimensions	58
VI.3. Conception des poutres symétriques SCRIV pour les fréquences optimales	63
VI.3.1. Convergence de la méthode d'optimisation couche par couche	63
VI.3.2. Etude optimale en fonction de différents paramètres géométriques et mécaniques.....	63
VI.3.2.1. Influence des rapports de largeur-longueur	63
VI.3.2.2. Influence des rapports d'épaisseur-longueur	65
VI.3.2.3. Influence du nombre de couches	78
VI.3.2.4. Influence du type de matériau.....	78
Conclusions et perspectives	87
Références bibliographiques.....	89

Liste des figures

Chapitre I

Figure 1.1 : Procédure de résolution d'un problème d'optimisation..... 13

Chapitre II

Figure 2.1 : Poutre rectangulaire 15

Figure 2.2 : Géométrie de la poutre avant et après déformation.....18

Figure 2.3 : Fibre de référence et angles d'orientations pour une poutre SCRIV avec fibres curvilignes24

Chapitre III

Figure 3.1 : Élément- p unidimensionnel 28

Figure 3.2 : Dix premières fonctions de forme hiérarchiques polynomiales 30

Chapitre IV

Figure 4.1 : Procédure d'optimisation couche par couche pour des poutres stratifiées symétriques..... 42

Figure 4.2 : Algorithme de la méthode d'optimisation couche par couche..... 43

Chapitre V

Figure 5.1 : Organigramme du programme pour le calcul des paramètres de fréquences et les déplacements modaux 46

Figure 5.2 : Numérotation des nœuds de l'élément- p 49

Chapitre VI

Figure 6.1 : Comparaison des fréquences non dimensionnelles Ω pour les deux premiers modes d'une poutre composite en porte -à- faux monocouche $\langle \theta | \theta \rangle$ avec des fibres rectilignes dans l'air et dans l'eau en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ (a) premier mode, (b) deuxième mode 54

Figure 6.2 : Espace de conception d'une couche avec fibres curvilignes décalées 55

Figure 6.3 : Déflexions modales normalisées pour les trois premiers modes des poutres CF SCRV avec 4 couches dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.....56

Figure 6.4 : Déflexions modales normalisées pour les trois premiers modes des poutres CS SCRV avec 4 couches dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.....57

Figure 6.5 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_1 ($T_0 = 60^\circ$) pour des poutres SCRV $[\mp(T_0|T_1)]_s$ SS dans l'air et dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.....59

Figure 6.6 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 50^\circ$) pour des poutres SCRV $[\mp(T_0|T_1)]_s$ SS dans l'air et dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.....60

Figure 6.7 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de nombre de couches K pour des poutres en porte -à- faux SCRV dans l'air et dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.....61

Liste des tableaux

Chapitre III

Tableau 3.1 : Représentation des huit premiers polynômes de Legendre	27
Tableau 3.2 : Fonctions de forme internes g_{j+1} ($j = 2,3, \dots, 10$)	29
Tableau 3.3 : Fonctions de forme internes f_{j+1} ($j = 4,5, \dots, 10$)	33

Chapitre V

Tableau 5.1 : Introduction des conditions aux limites des nœuds.....	49
---	----

Chapitre VI

Tableau 6.1 : Convergence des fréquences non dimensionnelles Ω pour les trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec fibres curvilignes et 4 couches $[\mp\langle 45^\circ 30^\circ \rangle]_s$ dans l'eau en fonction de p	53
Tableau 6.2 : Les trois premiers paramètres de fréquences d'une poutre SCRIV $[\mp\langle 70^\circ 55^\circ \rangle]_s$ CC dans l'air et dans l'eau pour différents paramètres géométriques.....	62
Tableau 6.3 : Illustration de la méthode d'optimisation couche par couche pour une poutre symétrique SCRIV en porte -à- faux avec 8 couches dans l'eau	64
Tableau 6.4 : Paramètres mécaniques des matériaux composites utilisés	65
Tableau 6.5 : Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 1, $h/L = 0.02$)	66
Tableau 6.6 : Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 2, $h/L = 0.02$)	67
Tableau 6.7 : Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 3, $h/L = 0.02$)	68
Tableau 6.8 : Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau (matériau 1, $h/L = 0.02$)	69

Tableau 6.9: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau (matériau 2, $h/L = 0.02$) 70

Tableau 6.10: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau (matériau 3, $h/L = 0.02$) 71

Tableau 6.11: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 1, $b/L = 0.1$)72

Tableau 6.12: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 2, $b/L = 0.1$)73

Tableau 6.13: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 3, $b/L = 0.1$).....74

Tableau 6.14: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau (matériau 1, $b/L = 0.1$)75

Tableau 6.15: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau (matériau 2, $b/L = 0.1$) 76

Tableau 6.16: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau (matériau 3, $b/L = 0.1$) 77

Tableau 6.17: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV dans l'air (matériau 1, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$) 79

Tableau 6.18: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV dans l'air (matériau 2, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$) 80

Tableau 6.19: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV dans l'air (matériau 3, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$) 81

Tableau 6.20: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV dans l'eau (matériau 1, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$) 82

Tableau 6.21: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV dans l'eau (matériau 2, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$) 83

Tableau 6.22: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV dans l'eau (matériau 3, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$)..... 84

Tableau 6.23: Effet des paramètres mécaniques sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air ($h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$)..... 85

Tableau 6.24: Effet des paramètres mécaniques sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau ($h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).....86

Liste des symboles

x, y, z	Coordonnées Cartésiennes.
ξ, η	Coordonnées locales.
L	Longueur de la poutre.
b	Largeur de la poutre.
h	Épaisseur de la poutre.
θ	Angle d'orientation des fibres.
T_0	Angle d'orientation des fibres au centre de la poutre.
T_1	Angle d'orientation des fibres à une distance caractéristique.
κ	Contraint de courbure.
u	Déplacement latérale suivant la direction x .
v	Déplacement latérale suivant la direction y .
w	Déplacement transversal suivant la direction z .
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation.
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte.
Q_{ij}	Coefficients de rigidité.
\bar{Q}_{ij}	Coefficients de rigidité dans le repère globale.
E_1, E_2	Modules de Young dans longitudinal et transversale.
ν	Coefficient de Poisson.
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion et de torsion par unité de longueur.
D_{ij}	Constantes d'intégration suivant l'épaisseur.
w^0	Déplacement transversal de flexion.
α	Angle de flexion.
β	Angle de torsion.
U	Energie de déformation de la poutre.
T	Energie cinétique de la poutre.
m	Masse totale par unité de la longueur.
m_s	Masse de solide par unité de la longueur.
m_a	Masse de fluide par unité de la longueur.
I_y	Moment d'inertie masse totale par unité de la longueur.
$I_{y,s}$	Moment d'inertie masse de solide par unité de la longueur.

$I_{y,a}$	Moment d'inertie masse de fluide par unité de la longueur.
ρ_s	Masse volumique de solide.
ρ_f	Masse volumique de fluide.
EI	Paramètre de rigidité à la flexion.
GJ	Paramètre de rigidité à la torsion.
KJ	Paramètre de couplage de rigidité à la flexion-torsion.
p	Degré du polynôme.
P	Polynôme de Legendre.
f_i, f_j, g_i, g_j	Fonctions de forme.
q	Vecteur de déplacement.
ω	Pulsation propre.
K_{ij}	Matrice de rigidité.
M_{ij}	Matrice masse.
t	Temps.
Ω	Paramètre de fréquence.
Ω_i	Paramètre de fréquence de $i^{\text{ème}}$ mode.
k	Numéro d'étape pour la procédure d'optimisation.
K	Nombre de couches.
\vec{T}	Ensemble des séquences d'empilement optimales.
$\Omega_{i(opt)}^k$	Paramètre de fréquence optimale de $i^{\text{ème}}$ mode pour une étape k sélectionnée.
$\Omega_{i(opt)}$	Paramètre de fréquence optimale de $i^{\text{ème}}$ mode.

Liste des acronymes

SCRV : Stratifiées composites à rigidité variable.

CRC : Composites à rigidité constante.

SCRC : Stratifiées composites à rigidité constante.

MEF : Méthode des éléments finis.

MSC : Meditteranean Shipping Company.

Introduction générale

Une poutre est un élément unidimensionnel dont les dimensions de la section transversale sont très petites par rapport à la longueur. Les poutres peuvent être soumises à des charges horizontales, verticales, de cisaillement, etc. Les ailes d'avion, les hélices, les aubes de turbine, les quilles, les barres, les colonnes sont considérées comme des poutres. Les stratifiés composites peuvent former ces poutres pour atteindre une haute rigidité, une bonne résistance à la fatigue et la corrosion, ainsi que la légèreté. Selon sa rigidité, le stratifié se divise en deux catégories : rigidité constante et rigidité variable. Pour la conception du stratifié à rigidité constante, il sera composé de fibres rectilignes qui disposent d'une haute rigidité et résistance quand les charges sont soumises le long de la direction de la fibre. Ces propriétés sont minimales dans la direction transversale de la fibre. La deuxième catégorie est le stratifié à rigidité variable qui peut être réalisé par le changement de la fraction volumique des fibres dans le stratifié, en complément ou en additionnant des couches au stratifié, ou alors par utilisation des fibres curvilignes.

Les propriétés mécaniques des poutres composites renforcées par des fibres curvilignes dépendent de la forme des fibres. Elles possèdent une rigidité et une anisotropie variables contrairement aux poutres avec anisotropie homogène qui contiennent des fibres rectilignes. Les fibres les plus effectives pour les poutres composites sont les fibres curvilignes. Pour éviter le problème de la résonance vibratoire des poutres stratifiées composites à rigidité variable (SCRV), il est nécessaire d'avoir les fréquences maximales en adaptant les orientations des fibres curvilignes pour chaque couche formant les séquences d'empilement optimales de la poutre.

Contenu de mémoire

Ce mémoire comprend six chapitres comme suit :

Le premier chapitre présente d'une manière générale la vibration des poutres composites dans l'air et dans l'eau, les stratifiés composites à rigidité variable avec fibres curvilignes, les théories hydro-élastiques, la version- p de la méthode des éléments finis, et les méthodes d'optimisation pour les stratifiées composites à rigidité variable.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la théorie des poutres Euler-Bernoulli. Nous commencerons par définir une poutre suivie d'une présentation des hypothèses concernant la théorie des poutres Euler-Bernoulli. Nous allons détailler ensuite les différentes équations cinématiques ainsi que l'orientation des fibres dans les couches en respectant la contrainte de courbure κ . Après, nous allons représenter les formules d'énergie de déformation et cinétique. Nous allons conclure ce chapitre par formuler l'équation du mouvement pour la vibration libre de la poutre.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation d'une poutre rectangulaire SCRV soumise à une vibration libre avec un élément- p unidimensionnel. Nous allons commencer avec une introduction générale au MEF. Nous allons ensuite présenter les avantages et inconvénients de la version- p de MEF. Après, nous allons définir les polynômes de Legendre. Nous avons conclu ce chapitre par la formulation par un élément- p unidimensionnel pour avoir l'équation du mouvement.

Nous allons mentionner dans le quatrième chapitre les catégories d'optimisation existantes : déterministe et stochastique. Ensuite, nous allons discuter de la méthode d'optimisation couche par couche, de la procédure de cette méthode. Nous allons présenter à la fin de cette partie les avantages et les limites de cette méthode.

Le chapitre suivant sera consacré aux différentes méthodes et théories pour les codes de calcul, les logiciels et les matériels utilisés. Nous allons décrire par la suite le contenu des programmes élaborés.

Le sixième et dernier chapitre aura pour objectif d'optimiser les fréquences et leurs séquences d'empilement pour la vibration libre des poutres symétriques SCRV. Cette vibration libre sera étudiée dans l'air et dans l'eau par la version- p de MEF et sera basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli couplée à la torsion. Dans un premier temps, nous allons étudier la convergence d'un élément- p unidimensionnel. Les résultats sont atteints avec un degré polynomial égale à 10. Le résultat obtenu est compatible avec d'autres résultats après comparaison. Une étude paramétrique est établie dans la deuxième partie. La troisième et dernière partie confirme la convergence de la méthode d'optimisation couche par couche. Nous allons faire une étude optimale sur différent paramètres géométriques, mécaniques et conditions aux limites.

Notre travail se termine par une conclusion et des perspectives de travaux futurs pouvant être réalisés à la suite de ce travail.

Chapitre I

Introduction

Le premier chapitre présente d'une manière générale la vibration des poutres composites dans l'air et dans l'eau, les stratifiés composites à rigidité variable avec fibres curvilignes, les théories hydro-élastiques, la version- p de la méthode des éléments finis, et les méthodes d'optimisation pour les stratifiées composites à rigidité variable.

I.1. Vibration des poutres composites dans l'air et dans l'eau

Les matériaux composites sont constitués de deux matériaux minimum. Ils sont utilisés dans de nombreux domaines tels que la construction nautique, aéronautique, aérospatiale, automobile, ferroviaire, sports et loisirs ainsi que dans le secteur du bâtiment. L'utilisation de ces matériaux présente des avantages considérables : Un coût réduit, la légèreté, la maniabilité, la résistante à la fatigue, à la chaleur, à la corrosion, et une bonne isolation électrique.

Plusieurs études ont été faites sur la vibration des poutres composites. Ces travaux ont vu le jour avec Abarcar et Cunniff [1] qui ont étudié expérimentalement et numériquement la vibration libre des poutres composites à rigidité constante (CRC). Miller et Adams [2] ont étudié analytiquement le même problème en utilisant la théorie d'Euler-Bernoulli. La comparaison des résultats d'Abarcar et Cunniff [1] montrent une correspondance. Teoh et Huang [3] ont présenté une méthode analytique pour déterminer les fréquences naturelles et modes propres d'une poutre CRC. Les effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie de rotation ont été inclus. Teh [4] a utilisé deux modèles d'éléments finis pour déterminer les fréquences naturelles d'une poutre CRC en considérant les effets de la déformation de cisaillement transversale et de l'inertie de rotation.

Plusieurs études sur la vibration des poutres stratifiées composites ont été réalisées. Chandrashekhara *et al.* [5] ont prédit les fréquences de la vibration libre d'une poutre symétrique stratifiées composites à rigidité constante (SCRC) en utilisant une méthode analytique basée sur la théorie de déformation du premier ordre des poutres. Teboub et Hajela [6] ont présenté une étude paramétrique sur la vibration libre des poutres SCRC en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Aydogdu [7] a analysé la vibration

libre des poutres SCRC par la méthode de Ritz basée sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Jun et *al.* [8] ont étudié la vibration libre des poutres SCRC par la méthode des éléments finis basée sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Pagani et *al.* [9] ont appliqué une méthode basée sur la formulation unifiée de Carrera sur la vibration libre des poutres SCRC afin d'améliorer la théorie d'ordre supérieur. Kheladi et *al.* [10] ont étudié la vibration libre des poutres cylindriques SCRC avec fibres rectilignes et des stratifiés composites à rigidité variable (SCRV) avec fibres curvilignes en utilisant la théorie de la couche unique équivalente et l'analyse iso-géométrique.

Des études sur la vibration des poutres composites en interaction avec un fluide ont été effectuées par quelques chercheurs. Kwon et *al.* [11] ont examiné l'effet de l'interaction fluide-structure sur la vibration et la réponse dynamique des poutres composites. Stenius et *al.* [12] ont conduit une étude expérimentale sur la vibration forcée des poutres et plaques composites et métalliques dans l'air et complètement submergées dans l'eau.

I.2. Stratifiés composites à rigidité variable

Les stratifiés composites à rigidité variable peuvent être obtenus par changement d'orientation des fibres ou bien par changement d'espacement entre elles.

Dans cette étude, nous allons nous intéresser au premier type.

Hyer et Lee [13] ont étudié une plaque carrée avec un trou situé au centre de la plaque soumis à une charge de compression uni-axiale. Ils ont considéré le quart de la plaque en raison de la symétrie. Ce quart de la plaque a été divisé en dix-huit éléments. Chacun de ces éléments peut être attribué à une orientation des fibres différente. Une étude de sensibilité par élément a conclu que le gain en performance peut être réalisé en introduisant des fibres curvilignes au lieu des fibres rectilignes. Gürdal et Olmedo [14] ont étudié l'effet de l'orientation des fibres sur les propriétés élastiques d'un panneau composite. Ils ont conclu que ces effets peuvent être utilisés à l'avantage du concepteur pour adapter la répartition des contraintes dans une plaque composite. Nagendra et *al.* [15] se sont intéressés à l'augmentation de la performance en variant spatialement la trajectoire des fibres.

Waldhart [16] a analysé le flambage des SCRIV avec fibres curvilignes dû à un chargement uni-axial. Tatting [17] a étudié la réponse statique et le flambage des cylindres composites à rigidité variable. Tatting et Gürdal [18,19] ont développé un outil de conception avec

l'intégration du solveur automatisé STAGS (Structural Analysis of General Shells) avec le logiciel de conception de stratifiés. À l'aide du logiciel élaboré, ils ont réussi à analyser le flambage, pré-flambage, déformation et distribution des contraintes dans une plaque composite à rigidité variable. Gurdal et *al.* [20] ont étudié le flambage des panneaux SCRIV avec fibres curvilignes. Raju et *al.* [21] ont analysé le pré-flambage et le flambage d'une plaque à rigidité variable par la méthode de quadrature différentielle basée sur la théorie classique. Akbarzadeh et *al.* [22] ont étudié la flexion statique, le flambage et la vibration libre des plaques minces et épaisses SCRIV par la méthode de Fourier-Galerkin hybride basée sur différentes théories : les théories de déformation de cisaillement du premier ordre et du troisième ordre et la théorie des plaques stratifiées classique.

Yazdani et *al.* [23] ont étudié le comportement linéaire et non-linéaire des plaques stratifiées composites avec des fibres rectilignes et curvilignes en utilisant la théorie de couche par couche ou zigzag. Heydarbour et Aghdam [24] ont investi l'analyse transitoire d'une plaque SCRIV avec des fibres curvilignes. Cette plaque est soumise à une charge dynamique. L'analyse est effectuée via la méthode hybride quadratique différentielle de Bézier couplée avec la théorie d'élasticité tridimensionnelle. Heydarbour et Aghdam [25] ont étudié la réponse dynamique des plaques épaisses SCRIV avec des fibres curvilignes sous une charge mobile en utilisant une approche numérique hybride composée de la méthode quadratique différentielle couche par couche et la méthode intégrale quadratique basée sur la théorie d'élasticité tridimensionnelle.

Langley [26] a introduit un modèle d'éléments finis pour modéliser des SCRIV. Il a analysé la réponse dans le plan ainsi que les déformations et les contraintes. Akhavan et Ribeiro [27] ont développé une version- p de MEF combinée avec la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre pour l'étude de la vibration libre linéaire des plaques rectangulaires SCRIV. Ils ont démontré que l'utilisation des fibres curvilignes est meilleure en les comparant aux fibres rectilignes. Honda et Narita [28] ont utilisé la méthode des éléments finis basée sur la méthode de Ritz pour déterminer les fréquences naturelles et les modes de vibration des plaques SCRIV. Ribeiro et Akhavan [29] ont appliqué la version- p de MEF basée sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre à la vibration linéaire et non-linéaire des plaques SCRIV. Les résultats ont montré que les fibres curvilignes peuvent conduire à des différences importantes dans les amplitudes de la réponse non-linéaire.

Ribeiro [30] a appliqué la version- p de MEF basée sur la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre à la vibration non-linéaire des plaques rectangulaires SCR. Houmat [31] a appliqué la version- p de MEF couplée avec la théorie des plaques minces à la vibration non-linéaire des stratifiés composites rectangulaires symétriques et antisymétriques à rigidité variable composés de fibres curvilignes, les résultats ont montré que les stratifiés antisymétriques produisent des fréquences fondamentales linéaires et non linéaires légèrement inférieurs à celles des stratifiés symétriques. Yazdani et Ribeiro [32] ont développé une version- p de MEF basée sur la théorie des plaques couche par couche pour des plaques SCR et ont étudié l'effet des séquences asymétriques d'empilement sur la vibration non-linéaire et la distribution des contraintes à travers l'épaisseur du stratifié.

Houmat [33] a développé un élément- p biais couplé avec la théorie des plaques minces et celle de Von Karman pour étudier la vibration libre non-linéaire d'une plaque biaisée SCR. Guenanou et Houmat [34] ont étudié la vibration libre d'une plaque circulaire avec des fibres curvilignes en utilisant un élément fini carré hiérarchique courbé basé sur la théorie du cisaillement de premier ordre. Houmat [35] a analysé la vibration libre des plaques rectangulaires SCR par la version- p de MEF couplée avec la théorie d'élasticité. Bendahmane et *al.* [36] ont étudié la vibration libre d'une poutre SCR avec fibres curvilignes submergée dans l'eau en utilisant la version- p de MEF basée sur la théorie de déformation de cisaillement des plaques d'ordre supérieur. La masse ajoutée est modélisée en utilisant le potentiel de vitesse et les équations de Bernoulli.

I.3. Théorie des bandes

Au cours des dernières années, des études approfondies ont été réalisées sur les réponses hydro-élastiques des structures en mer profonde et ouverte. Les méthodes hydro-élastiques s'étendent de la théorie linéaire à deux dimensions [37] à la théorie linéaire à trois dimensions [38,39] et de la théorie non-linéaire bidimensionnelle [40,41] à la théorie non-linéaire tridimensionnelle [42–49] ainsi que les méthodes d'analyse hydro-élastiques hybrides [50–54]. Ces théories ont été appliquées à l'analyse des grandes structures flottantes [55–60]. La première théorie linéaire est la théorie des bandes. Il s'agit d'une théorie simple pour le calcul des mouvements d'un navire. Cette dernière était une base pour l'ensemble des autres théories.

Denis et Pierson [61] ont proposé l'application du principe de superposition aux problèmes de bateaux. Ils ont supposé que la réaction d'un bateau face aux vagues irrégulières peut être considérée comme la somme des réactions face aux vagues régulières. Korvin et Jacobs [62] ont fait des calculs numériques précis pour les grandes vagues. Jacob [63] a ajouté les forces verticales de cisaillement provoquées par les vagues et les moments de flexion pour un bateau soumis à de grandes vagues régulières. Ce travail a été modifié par Motora [64]. Les autres méthodes sont des extensions de la méthode de Salvesen et *al.* [65] qui ont calculé les forces hydrodynamiques sur une coque souple d'un navire.

Les théories bidimensionnelles ont été appliquées aux réponses symétriques et asymétriques des coques [66–68]. Bishop et *al.* [69] et Belik et *al.* [70] ont fait une analyse du domaine fréquentiel pour simuler temporellement les réactions d'une coque de navire flexible voyageant sur une voie maritime irrégulière avec l'ajout des contributions provenant du claquement. Une théorie unifiée pour les corps élancés a été développée par Newman [71,72] et Wu et *al.* [73]. Price et Temarel [74] ont réalisé des études approfondies sur les réponses horizontales de flexion et de torsion d'un porte-conteneur en tenant compte de la rigidité de gauchissement. Pedersen [75] a dérivé les relations de discontinuité cohérentes entre les sections de coques ouvertes et fermées. Il a montré la nécessité de ces relations pour obtenir des fréquences naturelles précises. Conceicao et *al.* [76] ont analysé l'influence du changement de la forme d'une coque sur les coefficients hydrodynamiques d'un chalutier et un navire. Clarke [77] a montré que la théorie des bandes surestime les moments de flexion des vagues, en particulier pour les vagues à grande hauteur. Dong [78,79] a prédit les vibrations des vagues excitées et les moments de flexion excités pour un navire complet un peu profond. Il a démontré un accord assez bon avec les résultats expérimentaux d'un modèle segmenté.

Aksu et *al.* [80] ont examiné l'apparition de la proportionnalité et ses conséquences pour divers navires, tels que les porte-conteneurs et les vraquiers dans une voie maritime. Bishop et *al.* [81] ont étudié le mécanisme de la perte du transporteur de pétrole, de vrac, et de minerai. Ils ont examiné des éléments de preuve similaires provenant de six navires jumeaux. Lin [82] a fait des calculs et des tests sur un grand pétrolier pour vérifier l'existence de vibrations élastiques induites par les vagues. Zhong et *al.* [83] ont développé une méthode de calcul des fréquences de résonance des vibrations induites par les vagues sur une coque d'un navire à grande vitesse. Zhong et Zhao [84] ont étudié les effets de la longueur des vagues et la vitesse

d'avant sur la fréquence naturelle et les réponses induites par les vagues. Cho et Kim [85,86] ont étudié l'interaction des vagues incidentes monochromatiques avec une membrane flexible poreuse horizontale dans le contexte d'une théorie hydro-élastique linéaire bidimensionnelle.

Hermundstad et *al.* [87] ont présenté une analyse hydro-élastique linéaire pour les navires à grande vitesse. Bereznitski [88] a montré par des calculs que l'hydro-élasticité joue un rôle important dans le problème de claquement. Il a constaté que le rapport entre la durée de l'impact et la période du premier mode de vibration d'une structure sèche est le facteur clé pour prendre la décision lorsque la réponse structurelle devrait inclure des effets hydro-élastiques. Liu et *al.* [89] ont réalisé des expériences sur un canal d'eau bidimensionnel pour mesurer la déformation élastique et la force d'amarrage d'une structure flottante à grande échelle sous des vagues régulières. Leurs travaux avaient pour objectif principal d'étudier l'effet de la réponse hydro-élastique sur la force d'amarrage en modifiant l'épaisseur et la longueur des structures du modèle. Hirdaris et *al.* [90,91] ont appliqué des théories d'hydro-élasticité bidimensionnelles et tridimensionnelles sur les monocoques pour prédire et comparer le comportement dynamique d'un vraquier dans les vagues. Ils ont utilisé la théorie des bandes pour calculer les forces d'interaction bidimensionnelle structure-fluide en conjonction avec la méthode 3D des éléments aux frontières. Une distribution de source pulsante sur la surface mouillée moyenne était appliquée pour des effets d'interaction tridimensionnelle structure-fluide.

Une analyse hydro-élastique symétrique bidimensionnelle a été réalisée pour étudier l'influence des charges induites par le claquement sur le comportement dynamique du porte-conteneur MSC (Mediterranean Shipping Company) Napoli qui a échoué sur la plage de Branscombe au sud-ouest de l'Angleterre [92]. Denchfield et *al.* [93] ont étudié les mouvements symétriques et des charges globales induites par les vagues pour une frégate de la classe Leander dans les vagues irrégulières. Ils ont utilisé une analyse hydro-élastique linéaire bidimensionnelle. Miao et Temarel [94] ont étudié l'échec du MSC Napoli en utilisant une analyse hydro-élastique symétrique bidimensionnelle. Le but de l'enquête était d'évaluer l'influence des charges induites par le claquement sur la force structurelle de ce porte-conteneur. Santos et *al.* [95] ont étudié le comportement dynamique induit par les vagues symétriques d'un bateau de surveillance rapide en utilisant les théories d'hydro-élasticité linéaires bidimensionnelles et tridimensionnelles.

Lee et *al.* [96] ont appliqué un outil informatique basé sur une méthode linéaire 2D pour prédire les charges hydrodynamiques d'un navire de guerre endommagé. Ils ont obtenu un moment de flexion vertical plus important pour les parties endommagées que pour le navire intact. Bennett et *al.* [97] ont comparé les résultats expérimentaux des mouvements de corps rigide et des charges induites par les vagues globales d'une frégate navale dans des vagues anormales par rapport aux prédictions établies par une méthode d'hydro-élasticité linéaire bidimensionnelle.

Bennett et *al.* [98] ont fait une étude expérimentale de l'influence des vagues anormales sur un navire qui se déplace à grande vitesse dans des vagues irrégulières. Ils ont comparé ces résultats avec les prédictions de mouvement d'une théorie de bande linéaire bidimensionnelle et d'un modèle tridimensionnel partiellement non-linéaire de tenue en mer. Les résultats ont été compatibles avec les résultats expérimentaux. Les mêmes auteurs [99] ont étudié les charges globales induites par les vagues et les réactions de claquement d'un navire rencontrant des séquences de vagues anormales. Zhu et Moan [100] ont étudié l'influence de l'angle de cap d'un porte-conteneur de 13000 TEU sur les réponses verticales en utilisant la théorie 2D des bandes dans le domaine temporel. Heo et *al.* [101] ont développé une méthode numérique permettant de prédire les vibrations résonantes verticales globales dues aux vagues d'un navire en se basant sur la théorie bidimensionnelle quadratique des bandes. Lin et *al.* [102] ont analysé les vibrations résonantes verticales globales d'un très grand pétrolier transporteur de brut de 350000 DT en combinant la méthode 2D des bandes et la méthode 3D des éléments finis dans le domaine fréquentiel.

I.4. Version- p de la méthode des éléments finis

Les versions de la méthode des éléments finis ont été utilisées pendant de nombreuses années pour remédier à des problèmes d'ingénierie. Cette méthode comporte trois catégories :

- ✓ La première catégorie est la version- h dans laquelle la précision des résultats est obtenue par raffinement du maillage tout en fixant le degré d'interpolation p des fonctions de forme.
- ✓ La deuxième catégorie est la version- p est basée sur l'augmentation d'une manière progressive du degré d'interpolation des fonctions de la forme tout en gardant le maillage constant.

- ✓ La troisième et dernière catégorie est la version $h-p$ qui est une combinaison de la version- h et de la version- p . Dans cette procédure, la taille h des éléments et le degré d'interpolation- p sont modifiés.

La version- p a été développée au milieu de l'année 1970 à l'université de Washington avec un code expérimental appelé COMET-X. Ce code est caractérisé essentiellement par l'utilisation d'éléments hiérarchiques. Ce type d'éléments a été utilisé par Zienkiewicz et *al.* [103] avec l'adhésion d'éléments finis de différents ordres. Les fonctions de forme hiérarchiques pour les extensions- p ont été construites pour la première fois par Peano [104,105]. Szabó et Mehta [106] ont démontré que les séquences de solutions de la MEF avec le raffinement- p convergent plus rapidement que celles basées sur le raffinement- h pour les problèmes de fracture élastique linéaire. Rossow et Katz [107,108] ont développé le travail de Peano en définissant un élément de référence et en utilisant des matrices universelles et de vecteurs pré-calculés pour augmenter la performance des calculs.

Une description cohérente de la version- p de la MEF a été donnée par Szabó [109]. Zienkiewicz [110] s'est intéressé à l'identification de l'erreur de discrétisation dans une solution d'éléments finis hiérarchiques ainsi qu'à la définition de processus de raffinement optimal. Les bases théoriques du raffinement- p ont été établies par Babuska et *al.* [111]. Pour de nombreux problèmes, le taux de convergence asymptotique du raffinement- p dans la norme énergétique est au moins deux fois plus élevé que celui du raffinement- h . La preuve de la convergence la plus rapide du raffinement- p a été présentée par Babuška et Szabó [112]. Babuška et *al.* [113] et Szabo [114] ont réalisé l'ajout de degrés de liberté locaux en utilisant des fonctions de base d'ordre supérieur dans certains éléments avec le raffinement- p . L'utilisation d'un raffinement- p non uniforme est bien possible s'il est fait de manière hiérarchique. De nombreuses tentatives ont été faites pour le faire efficacement [115,116]. Dorr [117,118] a fait une analyse théorique de la version- p 3D de la MEF.

En 1985, le premier logiciel commercial PROBE utilisant un raffinement- p a été publié par Noetic. D'autres codes sont arrivés après comme FIESTA, Pro/MECHANICA, Stress Check, et ANSYS.

La compréhension de la manière de combiner le raffinement du maillage avec les extensions- p a été réalisée par Babuška [119]. Au cours des années suivantes, les recherches ont explosé dans le domaine des techniques de calcul pour le raffinement- p de la MEF [120].

La difficulté associée à la version- p de la MEF est celle de déterminer avec précision les intégrales nécessaires à l'établissement des matrices de rigidité et de masse d'éléments d'ordre élevé. Bardell [121] a démontré que les intégrales peuvent être calculées exactement en utilisant l'informatique symbolique. Les résultats présentés permettent de construire des éléments finis hiérarchiques d'ordre élevé. Ces éléments sont applicables à divers problèmes impliquant l'élasticité bidimensionnelle et la flexion des plaques et des coques. Hinnant [122] a proposé un schéma de vecteur intégral spécifique aux avantages des éléments des matrices de la version- p pour minimiser l'effort de calcul.

Selon Champion et Jarvis [123], la méthode de la fonction de mélange est recommandée pour le mappage dans les domaines complexes et lors de l'utilisation de la version- p de la MEF. Cette méthode a été développée par Coons [124], Gordon [125], et Gordon et Hall [126,127]. Elle est basée sur le mélange des informations le long des courbes. Pour cela, nous devons trouver une surface qui inclut toutes les courbes. Ensuite, nous ajoutons les courbes intérieures pour obtenir des données séparées dans chaque interpolant au lieu d'avoir des données continues. Szabo et Babuska [128] ont fait le premier travail en combinant la version- p de la MEF avec la méthode de la fonction de mélange. Ce travail a été suivi par d'autres travaux. Dey et *al.* [129] ont présenté un maillage géométrique basé sur le mélange des faces et les conditions aux limites. Kirfilyfalvi et Szabo [130] ont établi une nouvelle technique de maillage qui s'appelle le maillage quasi-régional. Cette dernière est une combinaison des caractéristiques de la méthode de fonction de mélange et celles du maillage iso-paramétrique. Düster et *al.* [131] ont montré que la conjonction entre l'espace anisotrope d'Ansatz et la méthode de fonction de mélange permet de calculer le comportement structurel des plaques et des coques.

La version- p de la MEF est appliquée aux diverses structures notamment les plaques minces [132–137], plaques épaisses [138], plaques biaises [139], plaques en secteur annulaire [140,141], poutres [142,143], poutres rotatives [144], élément tétraédrique et triangulaire [145], élément triangulaire courbé [146], membranes [147], cadres d'avion [148] et colonnes en interaction avec un fluide [149].

Pour plus de travaux sur la version- p de la MEF voir (Babuška et Suri [150], Bank [151], et Petyt [152]).

I.5. Optimisation des stratifiés composites à rigidité variable

L'optimisation est un instrument efficace qui peut être appliqué à n'importe quel domaine d'ingénierie en utilisant plusieurs techniques. Une fois le problème d'optimisation est défini nous introduisons des paramètres qui s'appellent paramètres d'entrée. Les variables d'entrée sont un sous-ensemble de paramètres d'entrée. Il est évident que la complexité du problème croît d'une façon progressive avec le nombre de variables d'entrée. Les paramètres de sortie sont générés par l'expérience ou la simulation. La fonction objective peut être un ou plusieurs paramètres de sortie. D'une façon générale, l'optimisation consiste à trouver l'ensemble des variables d'entrée qui minimisent ou maximisent la fonction objective. La figure 1.1 représente la procédure d'optimisation.

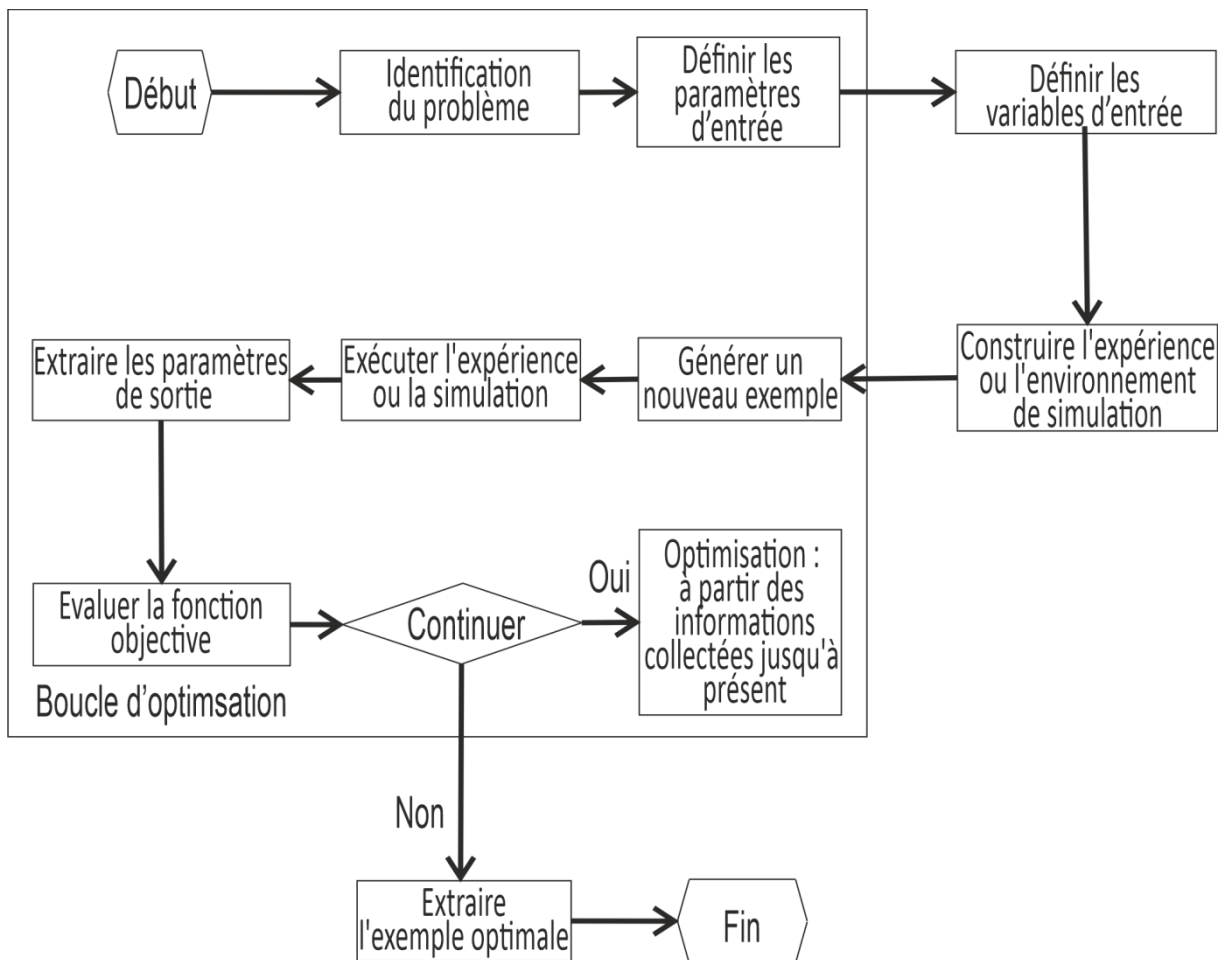


Figure 1.1: Procédure de résolution d'un problème d'optimisation.

L'optimisation des fréquences pour les structures composites à rigidité variable a une grande importance.

Abdallah [153] a fait une optimisation des fréquences pour les panneaux SCRIV avec fibres curvilignes. Il a utilisé la théorie de cisaillement du premier ordre pour le calcul des fréquences et la méthode de paramètre de cisaillement pour l'optimisation. Honda et *al.* [154] ont présenté une étude sur l'optimisation des fréquences fondamentales des plaques SCRIV avec fibres curvilignes. Des fonctions splines présentent les fibres curvilignes et la méthode de Ritz donne les équations des fréquences. La méthode d'optimisation utilisée est l'algorithme génétique. Houmat [155] a fait une optimisation des fréquences fondamentales pour les plaques SCRIV avec des fibres curvilignes en appliquant la méthode d'optimisation couche par couche et la théorie des plaques minces couplée avec la version p -de MEF.

Guenanou et Houmat [156] ont investi les séquences d'empilement optimales associées aux fréquences fondamentales maximales pour une plaque circulaire SCRIV avec des fibres curvilignes en utilisant la méthode d'optimisation couche par couche. Le calcul de la fonction objective est fait en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre des plaques et la version- p de MEF. Fazilati et Khalafi [157] ont fait une optimisation des fréquences et des séquences d'empilement des plaques SCRIV avec des fibres curvilignes par la méthode de l'algorithme génétique. La pression de l'écoulement autour de la structure a été calculée par la théorie du piston linéaire. La prédiction des fréquences a été faite par l'analyse iso-géométrique des fonctions B -splines rationnelles non-uniformes basée sur la théorie des classiques plaques. Meskine et *al.* [158] ont fait une investigation sur l'optimisation des séquences d'empilement des trois premiers modes des poutres SCRIV dans l'air et dans l'eau par la méthode d'optimisation couche par couche. La version- p de la MEF et la théorie des poutres Euler-Bernoulli ont été utilisées pour les calculs des fréquences.

Chapitre II

Théorie des poutres Euler-Bernoulli

Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie des poutres Euler-Bernoulli. Nous avons commencé par la définition de la poutre et nous avons poursuivi par les hypothèses appliquées à cette théorie. Ensuite, nous avons présenté les différentes équations cinématiques, l'orientation des fibres dans les couches tout en respectant la contrainte de courbure κ . Nous allons représenter après les formules d'énergie de déformation et cinétique. Enfin, nous avons formulé l'équation du mouvement pour la vibration libre de la poutre.

II.1. Introduction

D'une manière générale, une poutre est un élément structural utilisé pour supporter les charges verticales, les forces de cisaillement et les moments de flexion de sa capacité d'élasticité.

Les dimensions de la poutre (la largeur b et l'épaisseur h) sont très petits par rapport à la longueur. L'axe de référence (oy) est situé sur la surface moyenne de la poutre ($y - x$). L'axe (oz) est perpendiculaire à l'axe de référence (voir figure 2.1).

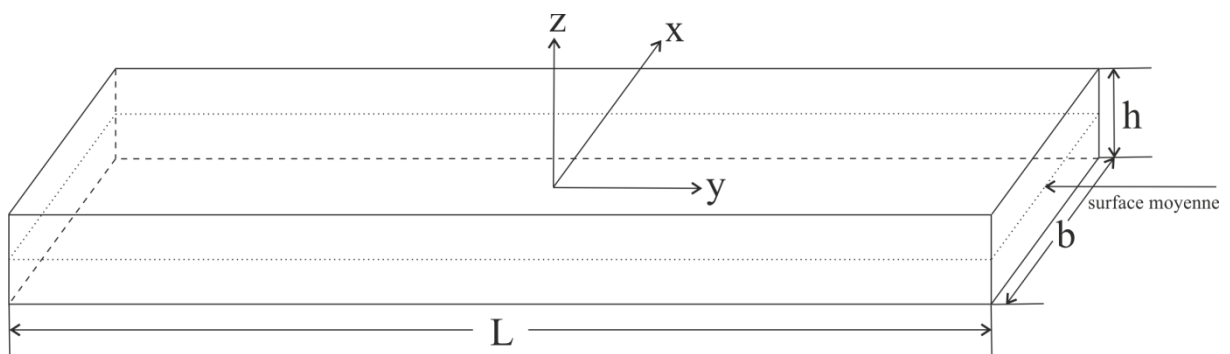


Figure 2.1 : Poutre rectangulaire.

II.2. Hypothèses de la théorie des poutres Euler-Bernoulli

Plusieurs théories des poutres ont été développées en se basant sur diverses hypothèses et sur différents niveaux de précision pour calculer la flexion sous une distribution des charges.

L'une des théories des plus simples et utiles est la théorie des poutres Euler-Bernoulli. Les hypothèses établies pour cette théorie sont :

H1 : la poutre est isotrope et élastique,

H2 : La poutre est longue et mince avec une section transversale constante le long de l'axe,

H3 : La déformation de la poutre est dominée par la flexion et les déplacements latéraux. La déformation de cisaillement et l'inertie de rotation sont négligeables,

H4 : La section d'une poutre reste plane après la déformation,

H5 : La section reste normale à l'axe déformé de la poutre.

Le modèle Euler-Bernoulli remonte au 18^{ème} siècle avec la découverte de Jacob Bernoulli que la courbure d'une poutre élastique en tout point est proportionnelle au moment de flexion à ce point. Daniel Bernoulli, le neveu de Jacob, est le premier à avoir formulé l'équation différentielle du mouvement d'une poutre vibrante. Plus tard, la théorie de Jacob Bernoulli fut acceptée par Leonhard Euler dans son enquête de la forme des poutres élastiques dans diverses conditions de chargement. Ce dernier a réalisé plusieurs avancées sur les courbes élastiques. Cependant, le modèle d'Euler-Bernoulli tend à surestimer légèrement les fréquences naturelles. Cette problématique est renforcée pour les fréquences propres des modes élevés et pour les poutres minces. Les poutres non minces ne sont pas concernées par cette problématique [159]. Autres théories sont des extensions de cette théorie (théorie de Rayleigh, théorie de cisaillement, théorie de Timoshenko).

La théorie des poutres de Rayleigh [160] apporte une légère amélioration à la théorie d'Euler-Bernoulli en incluant l'effet de la rotation de la section transversale. Par conséquence, elle corrige partiellement la surestimation des fréquences naturelles du modèle d'Euler-Bernoulli mais les fréquences naturelles sont toujours surestimées. Davies [161] a enquêté sur l'effet d'inertie de rotation sur une poutre en porte -à- faux.

Le modèle de cisaillement ajoute la distorsion de cisaillement au modèle d'Euler-Bernoulli. Le modèle de cisaillement est différent du modèle de cisaillement pur qui comprend la déformation de cisaillement et l'inertie rotative ou le modèle de cisaillement simple qui comprend la déformation de cisaillement et le déplacement latéral seulement [162]. Les modèles de cisaillement pur et simple excluent l'effet de flexion. En ajoutant la distorsion

de cisaillement à la poutre d'Euler-Bernoulli, l'estimation des fréquences naturelles est améliorée considérablement.

Timoshenko [163,164] a proposé une théorie des poutres qui ajoute l'effet de cisaillement ainsi que l'effet de la rotation au modèle d'Euler-Bernoulli. Le modèle de Timoshenko a apporté une amélioration majeure pour les poutres non-minces et des réponses-hautes fréquences lorsque les effets de cisaillement ou de rotation ne sont pas négligeables. Plusieurs auteurs ont obtenu après Timoshenko les équations de fréquence et les formes de mode pour divers conditions aux limites. Parmi ces auteurs, nous citons : Kruszewski [165], Trail-Nash et Collar [166], Dolph [167] et Huang [168].

II.3. Relations cinématiques

II.3.1. Champ de déplacements

Nous étudions une poutre composite stratifiée de longueur L , largeur b , épaisseur h .

Selon la théorie d'Euler-Bernoulli, le champ de déplacements est basé sur deux variables indépendants, le déplacement transversal w^0 et l'angle de torsion β . La formule est la suivante:

$$u(x, y, z, t) = z\beta(y, t) \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w^0}{\partial y} + xz \frac{\partial \beta(y, t)}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w^0(y, t) - x\beta(y, t) \quad (2.3)$$

La géométrie d'un bord de la poutre avant et après déformation est représentée dans la figure 2.2.

II.3.2. Relations déformation-déplacement

Les relations entre les déformations et les déplacements sont exprimées sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{yy} = z \left(-\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = 2z \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (2.5)$$

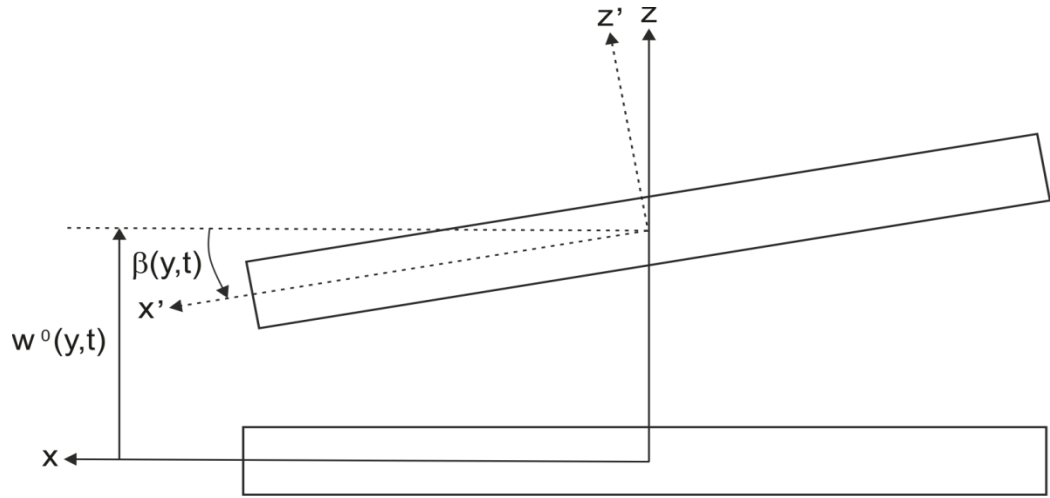


Figure 2.2 : Géométrie de la poutre avant et après déformation.

Les expressions des courbures sont définies comme suit :

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

$$\chi_{xy} = 2 \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (2.7)$$

Et sous forme vectorielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \left(-\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) \\ 2 \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

II.3.3. Relations contrainte-déformation

Les relations contraintes-déformations dans une couche orthotrope peuvent être écrites par la loi de Hook généralisée sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Où Q_{ij} sont les constants élastiques exprimés en fonction de module de Young longitudinal et transversal (E_1, E_2), les coefficients de Poisson (ν_{12}, ν_{21}), ils sont exprimés comme suit :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.10)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.11)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.12)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.13)$$

Les relations contraintes-déformations dans un pli en coordonnées globales sont données sous forme matricielle par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Les constants élastiques de transformation réduits \overline{Q}_{ij} sont exprimés comme suit:

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4 \quad (2.15)$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \quad (2.16)$$

$$\overline{Q}_{16} = Q_{11}c^3s - Q_{22}cs^3 - 2(Q_{12} + 2Q_{66})(c^3s - cs^3) \quad (2.17)$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4 \quad (2.18)$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s \quad (2.19)$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 - s^4) \quad (2.20)$$

Avec $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$.

II.3.4. Relations des moments

Les relations moments-contraintes sont données par :

$$M_x = \int \sigma_{xx} Z dZ \quad (2.21)$$

$$M_y = \int \sigma_{yy} Z dZ \quad (2.22)$$

$$M_{xy} = \int \tau_{xy} Z dZ \quad (2.23)$$

En utilisant l'équation (2.14), on obtient les relations moments-courbures suivantes :

$$M_x = D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y + D_{16}\chi_{xy} \quad (2.24)$$

$$M_y = D_{12}\chi_x + D_{22}\chi_y + D_{26}\chi_{xy} \quad (2.25)$$

$$M_{xy} = D_{16}\chi_x + D_{26}\chi_y + D_{66}\chi_{xy} \quad (2.26)$$

Où :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (Z_{k+1}^3 - Z_k^3) \bar{Q}_{ij}^{(k)} \quad (i, j) = (1, 2, 6) \quad (2.27)$$

Pour une poutre mince et selon Weishaar et Foist [169], on peut considérer que $M_x = 0$, de l'équation (2.24) on a :

$$\chi_x = -\frac{D_{12}}{D_{11}}\chi_y - \frac{D_{16}}{D_{11}}\chi_{xy} \quad (2.28)$$

Par substitution de l'équation (2.28) dans les équations (2.25) et (2.26), on obtient :

$$M_y = \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) \chi_y + \left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \chi_{xy} \quad (2.29)$$

$$M_{xy} = \left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \chi_y + \left(D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}} \right) \chi_{xy} \quad (2.30)$$

II.4. Orientation des fibres

L'orientation θ de fibre de référence varie linéairement en fonction de chemin de fibre x de T_0 dans le centre à T_1 sur une distance de $\frac{L}{2}$ à partir du centre de la poutre. Les chemins de fibres restants sont créés en décalant des distances fixes du chemin de fibres de référence le long de l'axe des x . Pour une poutre avec une seule couche, l'orientation des fibres est notée par $\langle T_0/T_1 \rangle$ comme il est montré dans la figure 2.3. Selon Olmedo et Gurdal [170], le chemin de la référence des fibres x et l'orientation des fibres θ peuvent être exprimés en fonction de T_0, T_1, y par :

$$x = \begin{cases} \frac{L}{2(T_1 - T_0)} \left\{ -\ln[\cos(T_0)] + \ln \left[\cos \left(T_0 - \frac{2(T_1 - T_0)}{L} y \right) \right] \right\} \text{ pour } -\frac{L}{2} \leq y \leq 0 \\ \frac{L}{2(T_1 - T_0)} \left\{ \ln[\cos(T_0)] - \ln \left[\cos \left(T_0 - \frac{2(T_1 - T_0)}{L} y \right) \right] \right\} \text{ pour } 0 \leq y \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\theta = \arctan(x') = \begin{cases} -\frac{2}{L}(T_1 - T_0)y + T_0 & \text{pour } -\frac{L}{2} \leq y \leq 0 \\ \frac{2}{L}(T_1 - T_0)y + T_0 & \text{pour } 0 \leq y \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (2.32)$$

Avec x' est la première dérivée de x par rapport à y .

La courbure de chemin de fibre de référence κ doit être inférieure ou égale à 3.28 m^{-1} selon Waldhart [16] pour éviter le vrillage (kinking) des fibres. La construction des autres fibres décalées est similaire au chemin de la fibre de référence. La courbure dans la région positive de y est donnée par :

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (2.33)$$

y' et y'' représentent la 1^{ère} et la 2^{ème} dérivée de y par rapport à x respectivement.

Par substitution de y' et y'' dans l'équation (2.33), on obtient :

$$\kappa = \frac{2}{L}(T_1 - T_0) \cos\left(\frac{2}{L}(T_1 - T_0)y + T_0\right) \quad (2.34)$$

II.5. Energie de déformation de la poutre

L'énergie de déformation U de la poutre est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} [M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}] dx dy \quad (2.35)$$

II.6. Energie cinétique de la poutre

L'énergie cinétique T de la poutre est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[m \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} + I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \right] dy \quad (2.36)$$

Avec :

m : la masse totale par unité de la longueur

I_y : le moment d'inertie masse par unité de la longueur.

Ils sont exprimés par :

$$m = m_s + m_a \quad (2.37)$$

m_s est la masse du solide et m_a est la masse de fluide ajoutée.

La masse du solide est exprimée par :

$$m_s = \rho_s b h \quad (2.38)$$

ρ_s est la masse volumique du solide.

La masse de fluide ajoutée m_a est donnée par :

$$m_a = \rho_f \frac{\pi}{4} b^2 \quad (2.39)$$

ρ_f est la masse volumique de fluide.

$$I_y = I_{y,s} + I_{y,a} \quad (2.40)$$

$I_{y,s}$ est le moment d'inertie masse du solide, il est exprimé par :

$$I_{y,s} = \rho_s \frac{b h (b^2 + h^2)}{12} \quad (2.41)$$

$I_{y,a}$ est le moment d'inertie masse de fluide, il est donné par :

$$I_{y,a} = \rho_f \frac{\pi}{128} b^4 \quad (2.42)$$

II.7. Equation du mouvement

En appliquant le principe de déplacement virtuel, on obtient :

$$0 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [M_y \delta \chi_y + M_{xy} \delta \chi_{xy}] dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[m \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} \delta w^0 + I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \delta \beta \right] dy \quad (2.43)$$

Par substitution des équations (2.6), (2.7), (2.29), (2.30) dans l'équation (2.43), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ \left[\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) \chi_y + \left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \chi_{xy} \right] \delta \left(\frac{-\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) \right. \\
&\quad + \left. \left[\left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \chi_y + \left(D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}} \right) \chi_{xy} \right] \delta \left(\frac{2\partial\beta}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(m \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} \delta w^0 + I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \delta \beta \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{ \left[\left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) \left(\frac{-\partial^2 w^0}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \frac{2\partial\beta}{\partial y} \right] \delta \left(\frac{-\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) \right. \\
&\quad + \left. \left[\left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \left(\frac{-\partial^2 w^0}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + \left(D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}} \right) \frac{2\partial\beta}{\partial y} \right] \delta \left(\frac{2\partial\beta}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(m \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} \delta w^0 + I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \delta \beta \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[b \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) - 2b \left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \frac{\partial\beta}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) \right. \\
&\quad - 2b \left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} \right) + 4b \left(D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}} \right) \frac{\partial\beta}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} \right) \\
&\quad \left. + m \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} \delta w^0 + I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \delta \beta \right] dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[EI \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) - KJ \frac{\partial\beta}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) - KJ \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} \right) + GJ \frac{\partial\beta}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. + m \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} \delta w^0 + I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \delta \beta \right] dy \tag{2.44}
\end{aligned}$$

EI est le paramètre de rigidité à la flexion, GJ est le paramètre de rigidité à la torsion, KJ est le paramètre de couplage de rigidité à la flexion-torsion.

Les trois paramètres sont donnés par les relations suivantes :

$$EI = b \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) \quad (2.45)$$

$$KJ = 2b \left(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \quad (2.46)$$

$$GJ = 4b \left(D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}} \right) \quad (2.47)$$

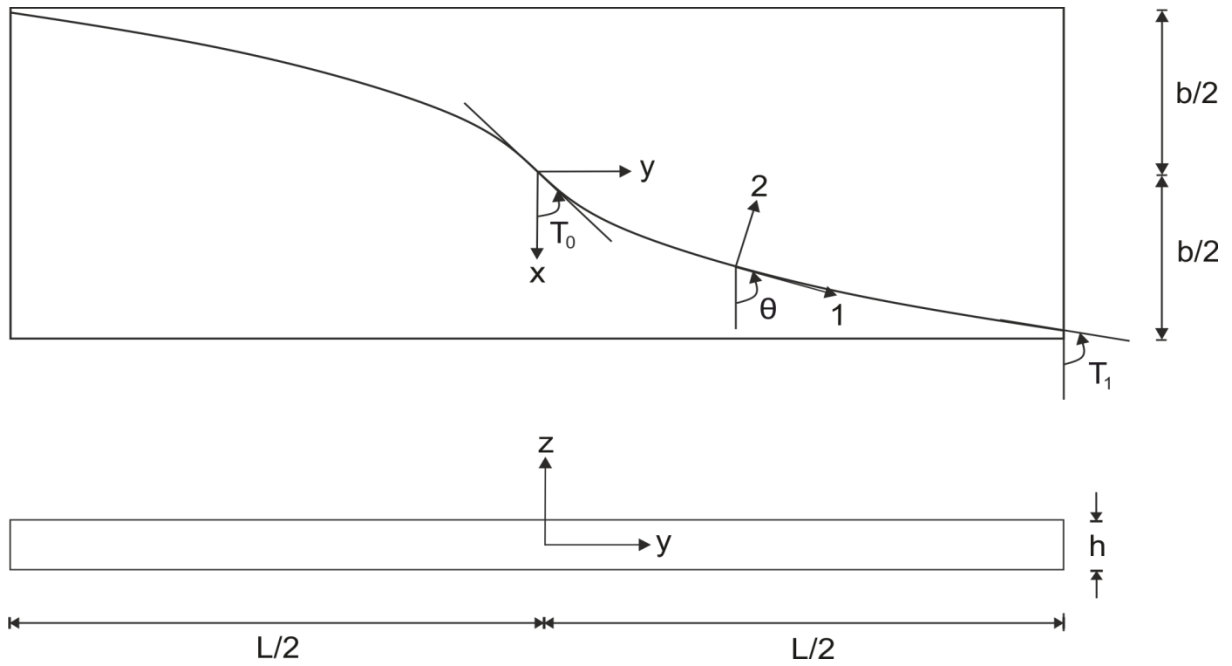


Figure 2.3 : Fibre de référence et angles d'orientations pour une poutre SCRIV avec fibres curvilignes

Chapitre III

Formulation par la version- p de la méthode des éléments finis

Ce chapitre est consacré à la modélisation d'une poutre rectangulaire SCRV soumise à une vibration libre avec un élément- p unidimensionnel. Nous avons abordé dans l'introduction la définition de méthode des éléments finis (MEF). Après, nous allons détailler les avantages et les inconvénients de la version- p de MEF. Ensuite, nous allons définir les polynômes de Legendre avant de formuler l'équation du mouvement par un élément- p unidimensionnel.

III.1. Introduction

La méthode des éléments finis est la technique la plus populaire et la plus utilisée. Elle implique l'utilisation des procédures suivantes :

- ✓ La formulation du problème sous forme résiduelle, ou sous forme de déplacement,
- ✓ La discrétisation par éléments finis et la résolution efficace du système d'équations résultant.

Ces étapes de base sont les mêmes pour presque tous les types de problèmes. Le résultat final est un processus numérique complet implémenté sur l'ordinateur numérique. Le temps et l'effort de calcul sont impliqués dans les éléments suivants:

- ✓ La formulation et l'intégration numérique des matrices d'éléments finis,
- ✓ L'assemblage des matrices élémentaires dans les matrices globales et la solution numérique des équations d'équilibre du système.

La version- p de MEF est une méthode puissante, elle consiste à augmenter l'ordre polynomial des fonctions d'interpolation p pour les variables inconnues associées aux éléments sélectionnés ou sur l'ensemble du domaine. On dit que la convergence est atteinte lorsque $p \rightarrow \infty$.

III.2. Avantages et inconvénients de la version- p de MEF

La version- p de MEF présente des avantages et des inconvénients. Nous allons citer certains avantages de cette version : Premièrement, la convergence rapide ne nécessite pas un changement de maillage pour atteindre la solution. Deuxièmement, les matrices masse et rigidité de degré p sont toujours des sous matrices de $p+1$. Enfin, il est facile de joindre les éléments de différent degré polynomiaux. Par conséquence, il est possible d'inclure des degrés de liberté supplémentaires si nécessaire. Un inconvénient de cette version : l'utilisation de calcul symbolique est requise pour réaliser l'intégration des polynômes d'ordre élevé.

III.3. Polynômes de Legendre

L'équation différentielle de Legendre pour $n = 0, 1, 2, \dots$ est présentée sous la forme suivante:

$$(1 - \xi^2)y'' - 2\xi y' + n(n + 1)y = 0 \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.1)$$

Les polynômes de Legendre $P_n(\xi)$ sont des solutions de l'équation (3.1). Nous pouvons les calculer par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} P_0(\xi) = 1 \\ P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} [(\xi^2 - 1)^n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Les huit premiers polynômes de Legendre $P_n(\xi)$ ($n = 1, \dots, 8$) sont présentés dans le tableau 3.1.

Les polynômes de Legendre peuvent être générés également à partir de la formule de récurrence de Bonnet suivante :

$$(n + 1)P_{n+1}(\xi) = (2n + 1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Les polynômes de Legendre satisfont la relation suivante :

$$(2n + 1)P_n(\xi) = P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

La propriété d'orthogonalité est réalisée pour les polynômes de Légende sous la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi)P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 2 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (3.5)$$

Tableau 3.1 : Représentation des huit premiers polynômes de Legendre.

n	$P_n(\xi)$
1	ξ
2	$\frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi)$
4	$\frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi)$
6	$\frac{1}{16}(231\xi^6 - 315\xi^4 + 105\xi^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429\xi^7 - 693\xi^5 + 315\xi^3 - 35\xi)$
8	$\frac{1}{128}(6435\xi^8 - 12012\xi^6 + 6930\xi^4 - 1260\xi^2 + 35)$

III.4. Formulation par l'élément- p unidimensionnel

III.4.1. Fonctions de forme hiérarchiques

III.4.1.1. Fonctions de forme hiérarchiques externes pour la torsion

Une construction simple pour tout ordre souhaité est la formule d'interpolation de Lagrange [171,172] donnée par la relation :

$$l_a^p(\xi) = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^n \frac{(\xi - \xi_b)}{(\xi_a - \xi_b)} = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\dots)(\xi - \xi_{a-1})(\xi - \xi_{a+1})(\dots)(\xi - \xi_n)}{(\xi_a - \xi_1)(\xi_a - \xi_2)(\dots)(\xi_a - \xi_{a-1})(\xi_a - \xi_{a+1})(\dots)(\xi_a - \xi_n)} \quad (3.6)$$

Où l'ordre du polynôme est $p = n - 1$. Dans cette forme, nous pouvons également choisir n'importe quelle plage pour le domaine de ξ . Dans l'exemple linéaire ci-dessous, nous définissons $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = 1$ avec $n = 2$. La raison de ce choix sera plus claire lorsque nous décrivons l'utilisation d'intégration numérique pour évaluer les intégrales. Une fois que nous avons choisi l'emplacement des points d'extrémité, les valeurs internes de ξ_a peuvent être espacées par incréments uniformes. Pour un élément unidimensionnel comme il est montré dans la figure 3.1 et afin de définir les fonctions de forme, nous pouvons poser :

$$g_a(\xi) = l_a^p(\xi) \quad (3.7)$$

En posant $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = 1$ et à partir de l'équation (3.6), on obtient pour $p = 1$ les deux premières fonctions de forme pour les angles de torsion aux extrémités pour chaque nœud :

$$g_1(\xi) = l_1^1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.8)$$

$$g_2(\xi) = l_2^1(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi + 1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.9)$$

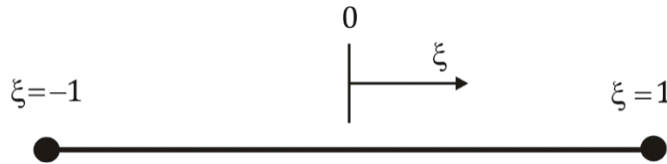


Figure 3.1 : Élément- p unidimensionnel.

III.4.1.2. Fonctions de forme hiérarchiques internes pour la torsion

Selon Szabo et Babuska [128], les fonctions de forme internes g_{j+1} ($j = 2, 3, \dots, p$) sont définies en termes de polynômes de Legendre P_{j-1} pour décrire les angles de torsion internes sous la forme suivante :

$$g_{j+1}(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(\xi) d\xi \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (3.10)$$

Les fonctions de forme internes g_{j+1} ($j = 2, 3, \dots, 10$) sont détaillées dans le tableau 3.2. Ces fonctions de forme sont bien adaptées à l'implémentation informatique. Elles ont des

propriétés très favorables du point de vue de la stabilité numérique. En utilisant l'équation (3.4), on peut démontrer que :

$$g_{j+1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} (P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)) \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (3.11)$$

Tableau 3.2 : Fonctions de forme internes g_{j+1} ($j = 2, 3, \dots, 10$).

j	g_{j+1}
2	$\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(\xi^3 - \xi)$
4	$\frac{1}{2}(5\xi^4 - 6\xi^2 + 1)$
5	$\frac{1}{8}(7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi)$
6	$\frac{1}{16}(21\xi^6 - 35\xi^4 + 15\xi^2 - 1)$
7	$\frac{1}{16}(33\xi^7 - 63\xi^5 + 35\xi^3 - 5\xi)$
8	$\frac{1}{128}(429\xi^8 - 924\xi^6 + 630\xi^4 - 140\xi^2 + 5)$
9	$\frac{1}{128}(715\xi^9 - 1716\xi^7 + 1386\xi^5 - 420\xi^3 + 35\xi)$
10	$\frac{1}{256}(2431\xi^{10} - 6435\xi^8 + 6006\xi^6 - 2310\xi^4 + 315\xi^2 - 7)$

D'après les équations (3.5) et (3.10), nous obtenons les deux relations suivantes :

$$g_{j+1}(-1) = g_{j+1}(+1) = 0 \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (3.12)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dg_{i+1}}{d\xi} \frac{dg_{j+1}}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (3.13)$$

Les dix premières fonctions de forme hiérarchiques sont présentées dans la figure 3.2.

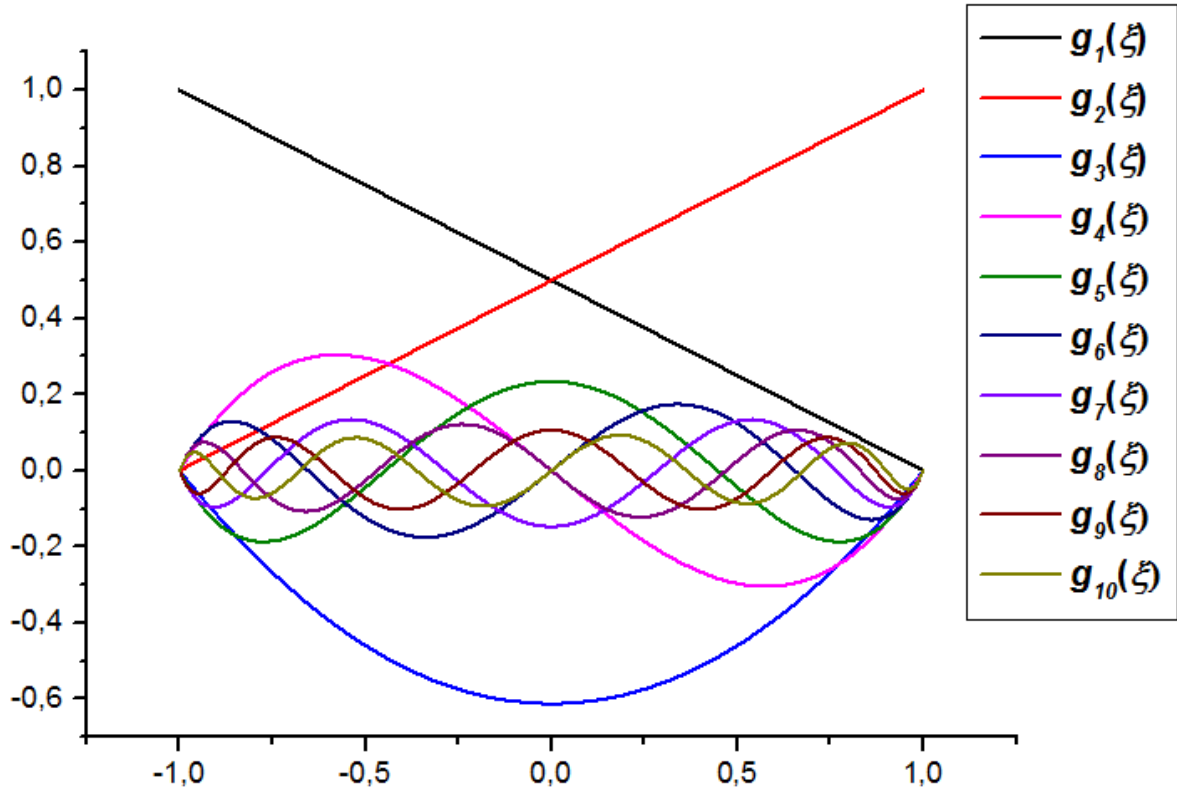


Figure 3.2 : Dix premières fonctions de forme hiérarchiques polynomiales [173].

III.4.1.3. Fonctions de forme externes pour la flexion

Pour un élément unidimensionnel et pour la flexion, nous avons deux degrés de liberté dans chaque nœud w^0 et $\frac{dw^0}{dy}$. Selon Thomas et *al.* [174], la fonction de déplacement est représentée par un polynôme avec quatre constants sous la forme suivante :

$$w^0 = \gamma_1 + \gamma_2 \xi + \gamma_3 \xi^2 + \gamma_4 \xi^3 \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) est présentée sous la forme matricielle suivante :

$$w^0 = [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Ou sous la forme suivante :

$$w^0 = [E(\xi)]\{\gamma\} \quad (3.16)$$

On dérive l'équation (3.14), on obtient :

$$\frac{L}{2}\alpha = \frac{L}{2} \frac{dw^0}{dy} = \frac{dw^0}{d\xi} = \gamma_2 + 2\gamma_3\xi + 3\gamma_4\xi^2 \quad (3.17)$$

Le développement des équations (3.14), (3.17) pour $\xi = \mp 1$ donne :

$$\begin{bmatrix} w_1^0 \\ \frac{L}{2}\alpha_1 \\ w_2^0 \\ \frac{L}{2}\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) peut être écrite sous la forme :

$$\{\bar{W}\}_e = [A]_e \{\gamma\} \quad (3.19)$$

Et donc :

$$\{\gamma\} = [A]_e^{-1} \{\bar{W}\}_e \quad (3.20)$$

Où :

$$[A]_e^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La forme alternative de l'équation (3.20) est :

$$\{\gamma\} = [C]_e \{W\}_e \quad (3.22)$$

Où :

$$\{W\}_e^T = [w_1^0 \quad \alpha_1 \quad w_2^0 \quad \alpha_2] \quad (3.23)$$

Et :

$$[C]_e = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & L/2 & 2 & -L/2 \\ -3 & -L/2 & 3 & -L/2 \\ 0 & -L/2 & 0 & L/2 \\ 1 & L/2 & -1 & L/2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Par substitutions de l'équation (3.22) dans l'équation (3.16), on obtient:

$$w^0 = [E(\xi)][C]_e \{W\}_e \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) peut être présentée sous la forme :

$$w^0 = [f(\xi)]\{W\}_e \quad (3.26)$$

Où :

$$[f(\xi)] = \left[f_1(\xi) \quad \frac{L}{2}f_2(\xi) \quad f_3(\xi) \quad \frac{L}{2}f_4(\xi) \right] \quad (3.27)$$

Les fonctions de déplacements dans l'équation (3.27) sont données comme suit :

$$\begin{cases} f_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\ f_2(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ f_3(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ f_4(\xi) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{cases} \quad (3.28)$$

III.4.1.4. Fonctions de forme de flexion internes

Les fonctions de forme d'ordre supérieur f_{j+1} ($j = 4, 5, \dots, p$) sont utilisées pour déterminer la translation et la rotation de flexion à l'intérieur de l'élément. Elles sont exprimées selon Szabo et Babuska [128] comme suit :

$$f_{j+1} = \int_{-1}^{\xi} g_j(\xi) d\xi \quad (j = 4, 5, \dots, p) \quad (3.29)$$

Le tableau 3.3 représente les fonctions de forme internes f_{j+1} ($j = 4, 5, \dots, 10$).

III.4.2. Déplacements et rotations pour l'élément- p unidimensionnel

Une poutre SCRV avec des fibres curvilignes dans l'air et dans l'eau est modélisée comme un élément- p unidimensionnel. La relation entre les coordonnées non dimensionnelles η et les coordonnées cartésiennes y est :

$$\eta = \frac{2y}{l} \quad (3.30)$$

Et donc:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 d\eta \quad (3.31)$$

Le déplacement flexionnel w^0 et l'angle de torsion β sont exprimés par :

$$w^0(\eta, t) = \sum_{j=1}^{p+1} q_{2j-1}(t) f_j(\eta) \quad (3.32)$$

$$\beta(\eta, t) = \sum_{j=1}^{p+1} q_{2j}(t) g_j(\eta) \quad (3.33)$$

Tableau 3.3 : Fonctions de forme internes f_{j+1} ($j = 4, 5, \dots, 10$).

j	f_{j+1}
4	$\frac{1}{8}(\xi^4 - 2\xi^2 + 1)$
5	$\frac{1}{8}(\xi^5 - 2\xi^3 + \xi)$
6	$\frac{1}{48}(7\xi^6 - 15\xi^4 + 9\xi^2 - 1)$
7	$\frac{1}{16}(3\xi^7 - 7\xi^5 + 5\xi^3 - \xi)$
8	$\frac{1}{128}(33\xi^8 - 84\xi^6 + 70\xi^4 - 20\xi^2 + 1)$
9	$\frac{1}{384}(143\xi^9 - 396\xi^7 + 378\xi^5 - 140\xi^3 + 15\xi)$
10	$\frac{1}{256}(143\xi^{10} - 429\xi^8 + 462\xi^6 - 210\xi^4 + 35\xi^2 - 1)$

III.4.3. Equation du mouvement

On développe l'équation (2.44), on obtient :

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[EI \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \right) - KJ \frac{\partial \beta}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \right) - KJ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + GJ \frac{\partial \beta}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w^0}{\partial t} \right) \delta w^0 + I_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \delta \beta \right] dy = 0 \quad (3.34)$$

On injecte les équations (3.31), (3.32), et (3.33) dans l'équation (3.34), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \left[EI \frac{\partial}{\frac{L}{2} \partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\frac{L}{2} \partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial}{\frac{L}{2} \partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\frac{L}{2} \partial \eta} \right) \right) - KJ \frac{\partial \beta}{\frac{L}{2} \partial \eta} \delta \left(\frac{\partial}{\frac{L}{2} \partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\frac{L}{2} \partial \eta} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - KJ \frac{\partial}{\frac{L}{2} \partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\frac{L}{2} \partial \eta} \right) \delta \left(\frac{\partial \beta}{\frac{L}{2} \partial \eta} \right) + GJ \frac{\partial \beta}{\frac{L}{2} \partial \eta} \delta \left(\frac{\partial \beta}{\frac{L}{2} \partial \eta} \right) + m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w^0}{\partial t} \right) \delta w^0 \right. \\ & \quad \left. + I_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \delta \beta \right] d\eta \\ & = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{4EI}{L^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \eta} \right) \frac{4}{L^2} \delta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \eta} \right) \right) - \frac{2KJ}{L} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \frac{4}{L^2} \delta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \eta} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{4KJ}{L^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \eta} \right) \frac{2}{L} \delta \left(\frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) + \frac{2GJ}{L} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \frac{2}{L} \delta \left(\frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) + m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w^0}{\partial t} \right) \delta w^0 \right. \\ & \quad \left. + I_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \delta \beta \right] d\eta \\ & = \int_{-1}^1 \left[\frac{8EI}{L^3} \frac{\partial}{\partial \eta} (q_{2j-1} f_j') \delta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (q_{2j-1} f_i') \right) - \frac{4KJ}{L^2} q_{2j} g_j' \delta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} (q_{2j-1} f_i') \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{4KJ}{L^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (q_{2j-1} f_j') \delta (q_{2j} g_i') + \frac{2GJ}{L} q_{2j} g_j' \delta (q_{2j} g_i') \right. \\ & \quad \left. + \frac{mL}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{q}_{2j-1} f_j) \delta (q_{2j-1} f_i) + \frac{I_y L}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{q}_{2j} g_j) \delta (q_{2j} g_i) \right] d\eta \\ & = \int_{-1}^1 \left[\frac{8EI}{L^3} q_{2j-1} f_j'' \frac{\partial q_{2j-1} f_i''}{\partial q} \delta q - \frac{4KJ}{L^2} q_{2j} g_j' \frac{\partial q_{2j-1} f_i''}{\partial q} \delta q - \frac{4KJ}{L^2} q_{2j-1} f_j'' \frac{\partial q_{2j} g_i'}{\partial q} \delta q \right. \\ & \quad \left. + \frac{2GJ}{L} q_{2j} g_j' \frac{\partial q_{2j} g_i'}{\partial q} \delta q + \frac{mL}{2} \ddot{q}_{2j-1} f_j \frac{\partial q_{2j-1} f_i}{\partial q} \delta q + \frac{I_y L}{2} \ddot{q}_{2j} g_j \frac{\partial q_{2j} g_i}{\partial q} \delta q \right] d\eta \\ & = \int_{-1}^1 \left[\frac{8EI}{L^3} q_{2j-1} f_j'' f_i'' \delta q - \frac{4KJ}{L^2} q_{2j} g_j' f_i'' \delta q - \frac{4KJ}{L^2} q_{2j-1} f_j'' g_i' \delta q \right. \\ & \quad \left. + \frac{2GJ}{L} q_{2j} g_j' g_i' \delta q + \frac{mL}{2} \ddot{q}_{2j-1} f_j f_i \delta q + \frac{I_y L}{2} \ddot{q}_{2j} g_j g_i \delta q \right] d\eta = 0 \quad (3.35) \end{aligned}$$

Du fait de l'indépendance des coordonnées généralisées $q_j (j = 1, \dots, p + 1)$, l'équation (3.35) devient :

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{8EI}{L^3} q_{2j-1} f_j'' f_i'' - \frac{4KJ}{L^2} q_{2j} g_j' f_i'' - \frac{4KJ}{L^2} q_{2j-1} f_j'' g_i' + \frac{2GJ}{L} q_{2j} g_j' g_i' + \frac{mL}{2} \ddot{q}_{2j-1} f_j f_i + \frac{I_y L}{2} \ddot{q}_{2j} g_j g_i \right] d\eta \quad (3.36)$$

L'équation (3.36) peut être exprimée dans la forme matricielle sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L^3} \int_{-1}^1 f_i'' f_j'' d\eta & -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 f_i'' g_j' d\eta \\ -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 g_i' f_j'' d\eta & \frac{2GJ}{L} \int_{-1}^1 g_i' g_j' d\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{2j-1} \\ q_{2j} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} mL \int_{-1}^1 f_i f_j d\eta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_y L \int_{-1}^1 g_i g_j d\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 q_{2j-1}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 q_{2j}}{\partial t^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Avec $i, j = 1, 2, \dots, p + 1$.

On suppose que :

$$\begin{Bmatrix} q_{2j-1} \\ q_{2j} \end{Bmatrix} = \cos(\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

On obtient:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 q_{2j-1}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 q_{2j}}{\partial t^2} \end{Bmatrix} = -\omega^2 \cos(\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

On remplace les équations (3.38), (3.39) dans l'équation (3.37), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L^3} \int_{-1}^1 f_i'' f_j'' d\eta & -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 f_i'' g_j' d\eta \\ -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 g_i' f_j'' d\eta & \frac{2GJ}{L} \int_{-1}^1 g_i' g_j' d\eta \end{bmatrix} \cos(\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} mL \int_{-1}^1 f_i f_j d\eta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_y L \int_{-1}^1 g_i g_j d\eta \end{bmatrix} \cos(\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Puis que $\cos(\omega t) \neq 0$, l'équation (3.40) devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L^3} \int_{-1}^1 f_i'' f_j'' d\eta & -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 f_i'' g_j' d\eta \\ -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 g_i' f_j'' d\eta & \frac{2GJ}{L} \int_{-1}^1 g_i' g_j' d\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} mL \int_{-1}^1 f_i f_j d\eta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_y L \int_{-1}^1 g_i g_j d\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{2j-1} \\ Q_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Avec:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L^3} \int_{-1}^1 f_i'' f_j'' d\eta & -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 f_i'' g_j' d\eta \\ -\frac{4KJ}{L^2} \int_{-1}^1 g_i' f_j'' d\eta & \frac{2GJ}{L} \int_{-1}^1 g_i' g_j' d\eta \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} mL \int_{-1}^1 f_i f_j d\eta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_y L \int_{-1}^1 g_i g_j d\eta \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Où K_{ij} et M_{ij} représentent les matrices rigidité, masse respectivement.

La forme finale de l'équation du mouvement est la suivante :

$$[K_{ij} - \omega^2 M_{ij}]q = 0 \quad (3.44)$$

Chapitre IV

Méthode d'optimisation couche par couche

Dans ce chapitre, nous allons mentionner les différentes catégories d'optimisation existantes. Nous décrivons d'une manière précise la méthode d'optimisation couche par couche, sa procédure ainsi que ses avantages et limites.

IV.1. Optimisation déterministe et stochastique

L'optimisation déterministe dite aussi programmation mathématique, est la branche classique des algorithmes d'optimisation en mathématiques. Elle contient des algorithmes qui dépendent fortement de l'algèbre linéaire car elles sont entièrement basées sur le calcul du gradient et sur les variables de réponse dans certains cas. L'optimisation déterministe a ses avantages et ses limites. Un avantage intéressant de cette méthode est la rapidité remarquable de la convergence vers une solution. D'une manière plus précise, il faut un nombre inférieur d'évaluations des variables de réponse ou d'évaluations de fonctions pour arriver à la solution. Une évaluation de fonction implique une expérience ou une simulation à effectuer. Le nombre d'estimations requis par un algorithme d'optimisation pour atteindre une solution est une mesure du temps requis par le processus d'optimisation lui-même. Les résultats d'un processus d'optimisation déterministe sont reproductibles et indiscutables. D'autre part, les algorithmes d'optimisation déterministes recherchent des points stationnaires dans la variable de réponse. Ainsi, la solution optimale finale trouvée pourrait être locale et non globale. Les deux principaux aspects de l'optimisation déterministe sont l'optimisation sans contraintes et l'optimisation sous contraintes.

Supposons un problème d'optimisation sans contraintes, tel que $\min f(x)$ avec $x \in R^n$, où la fonction objectif $f: R^n \rightarrow R$ est suffisamment lisse avec une dérivée seconde continue. Conformément à la théorie des fonctions du calcul, les conditions nécessaires et suffisantes pour que x^* soit un minimum local sont :

1. Le gradient $f'(x^*) = 0$
2. Hessian $H(x^*) (= \nabla^2 f(x))$ est défini positivement

Pour certains problèmes, la solution peut être obtenue analytiquement en déterminant les zéros du gradient et en vérifiant la précision positive de la matrice de Hesse en ces points. Une propriété particulièrement intéressante d'une fonction objective est la convexité. Si f est une fonction convexe, satisfaire $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ où $\alpha \in [0,1]$, il y'a alors qu'un minimum (global). Il existe des méthodes d'optimisation sans contraintes telles que la méthode du simplexe [175], la méthode de Nelder-Mead [176], la méthode de Levenberg-Marquardt [177,178].

La structure d'un problème d'optimisation sous contrainte est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) & x \in R^k \\ \text{Soumise à des contraintes} & \begin{cases} c_i(x) = 0 & i \in E \\ c_i(x) \geq 0 & i \in I \end{cases} \end{cases} \quad (4.1)$$

Où $f(x)$ est la fonction objective, $c_i(x)$ sont des fonctions de contrainte, E est l'ensemble des contraintes d'égalité et I l'ensemble des contraintes d'inégalité. Le point qui satisfait toutes les contraintes est nommé un point faisable. L'ensemble des points faisables est la région faisable R . On suppose que $c_i(x)$ et $f(x)$ sont continus, R est fermé, et aucune contrainte de la forme $c_i(x) > 0$ n'est autorisée. Si la région réalisable n'est pas vide et bornée, il existe une solution x^* au problème d'optimisation. On définit l'ensemble des contraintes actives au point x :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x) = \{i : c_i(x) = 0\} \quad (4.2)$$

L'approche la plus simple pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contrainte en cas de contraintes d'égalité est par élimination. C'est-à-dire que les équations de contraintes sont utilisées pour éliminer certaines variables du problème :

$$c(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \Phi(x_2) \Rightarrow \Psi(x_2) = f(\Phi(x_2), x_2) \quad (4.3)$$

Où x_1 et x_2 forment une partition de x . $\Psi(x_2)$ est alors minimisé sur x_2 sans contraintes. Une alternative est d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Les méthodes d'optimisation sous contraintes ne sont pas applicables aux problèmes de contraintes d'inégalité sauf si l'ensemble des contraintes actives à la solution $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(x^*)$ est connu. Quelques méthodes sont utilisées pour ce type d'optimisation, on peut citer : l'optimisation quadratique successive [179], la méthode des fonctions de pénalité et de barrière [180–182] et la méthode de programmation non linéaire par lagrangien quadratique [183,184].

L'optimisation stochastique comprend les méthodes d'optimisation dans lesquelles le caractère aléatoire est présent dans la procédure de recherche. Il s'agit d'une définition assez générale de l'optimisation stochastique, car le caractère aléatoire peut être inclus de différentes manières. L'optimisation stochastique se divise en deux types : l'optimisation stochastique à une étape et à multi étapes.

L'optimisation stochastique à une étape est l'étude de l'optimisation problèmes avec une fonction objective aléatoire ou contraintes. Une décision est mise en œuvre sans recours ultérieur. Un exemple serait la sélection des paramètres pour un modèle statistique: les observations sont tirées d'une distribution inconnue, donnant une perte aléatoire pour chaque observation. Nous souhaitons sélectionner les paramètres du modèle pour minimiser la perte attendue en utilisant les données. Pour généraliser le problème, nous commençons par introduire quelques concepts formels et quelques notations. Soit χ le domaine de toutes les décisions possibles et x une décision spécifique. Nous voudrions rechercher sur χ pour trouver une décision qui minimise une fonction de coût F . Soit ξ une information aléatoire qui est disponible seulement après la prise de décision. Autrement, nous limiterons notre discussion aux fonctions de coût aléatoire notées $F(x, \xi)$ (les ensembles des contraintes aléatoires peuvent être écrits comme des fonctions de coût aléatoires). Puisque nous ne pouvons pas optimiser directement $F(x, \xi)$. Nous allons minimiser la valeur attendue $E[F(x, \xi)]$. Le problème général d'optimisation stochastique en une seule étape devient :

$$\zeta = \min_{x \in \chi} \{f(x) = E[F(x, \xi)]\} \quad (4.4)$$

Définissons l'ensemble d'optima comme $\mathcal{S}^* = \{x \in \chi : f(x) = \zeta^*\}$. Pour tous les problèmes à une seule étape, nous supposons que l'espace de décision χ est convexe et la fonction objective $F(x, \xi)$ est convexe en x pour toute réalisations ξ . Ce type d'optimisation contient des méthodes fréquemment utilisées comme : la méthode d'approximation moyenne par échantillonnage [185–188], la méthode de l'approximation stochastique [189] et méthodologie de surface de réponse [190].

Les problèmes d'optimisation stochastique à plusieurs étapes visent à trouver une séquence de décisions $(x_t)_{t=0}^T$ qui minimise une fonction de coût attendue. L'indice t désigne le moment auquel la décision x_t est prise. Généralement, les décisions et les résultats aléatoires au moment t affectent la valeur des décisions futures. Un exemple qui illustre cette problématique est de faire un pas dans une partie d'échecs. Avec un mouvement, le joueur

peut capturer une des pièces de ses adversaires, changer sa position sur le plateau et modifier ses prochains mouvements possibles. Il doit tenir compte de ces résultats pour sélectionner le mouvement qui maximise son probabilité de gagner. Mathématiquement, nous pouvons décrire les problèmes d'optimisation stochastique à plusieurs étapes comme une prévision itérée:

$$\zeta = \min_{x_0 \in \mathcal{X}_0} \mathbb{E} \left[\inf_{x_1 \in \mathcal{X}_1(x_0, \xi_1)} F_1(x_1, \xi_1) + \mathbb{E} \left[\dots + \mathbb{E} \left[\inf_{x_T \in \mathcal{X}_T(x_{0:T-1}, \xi_{1:T})} \gamma^{T-1} F_T(x_T, \xi_T) \right] \right] \right] \quad (4.5)$$

On considère que T est le nombre de périodes de temps; $x_{0:t}$ est la collection de toutes les décisions entre 0 et t ; ξ_t est un résultat aléatoire observable au temps t ; $\mathcal{X}_T(x_{0:t-1}, \xi_{1:t})$ est un ensemble de décisions qui dépend de toutes les décisions et des résultats aléatoires entre les instants 0 et t ; $F_t(x_t, \xi_t)$ est une fonction de coût pour la période t qui dépend de la décision et du résultat aléatoire pour la période t ; et γ est le taux de remise. L'horizon temporel T peut être fini ou infini. Les méthodes les plus communes pour ce type d'optimisation sont : problème du bandit manchot [191], processus de décision markovien [192–196] et problèmes convexes multi étapes [197, 198].

IV.2. Méthode d'optimisation couche par couche

La méthode d'optimisation couche par couche a été proposée par Narita [199] pour la première fois. Elle est appliquée sur une plaque symétrique SCRC vibrante afin de trouver les fréquences maximales et leurs séquences d'empilement. Cette méthode est basée sur la détermination des fréquences pour les couches externes passant aux couches internes en supposant que les couches internes ayant une masse mais pas une rigidité. Narita et Turvey [200] ont fait une optimisation sur le flambage maximale et les séquences d'empilement des plaques symétriques SCRC soumises à des compressions uniformes, uni axiales et bi axiales en utilisant la méthode d'optimisation couche par couche. La procédure itérative est introduite, les charges de flambage sont calculées par la méthode d'énergie de Ritz.

L'extension de cette méthode [201] a inclut des plaques symétriques SCRC avec des points supportes flexibles et rigides dans différentes positions le long de la plaque. L'objectif est d'extraire les fréquences fondamentales maximales ainsi que les séquences d'empilement qui conviennent. Le problème de vibration est résolu par une combinaison entre la méthode de Ritz et l'énergie de déformation stockée pour les points supportes flexibles et le multiplicateur

de Lagrange pour les points supports rigides. Narita [202] a calculé la fonction objective avec la méthode d'optimisation couche par couche et la MEF pour les plaques symétriques minces SCRC soumises à la vibration libre.

Narita et Robinson [203] ont fait une optimisation sur les fréquences fondamentales maximales et les séquences d'empilement pour la vibration libre des panneaux courbé cylindriques SCRC. Ils ont utilisé la méthode d'optimisation couche par couche. Les fréquences ont été calculées par la méthode de Ritz basée sur la théorie classique de cisaillement. Honda et *al.* [204] ont utilisé la méthode d'optimisation couche par couche pour les plaques sandwichs SCRC afin d'atteindre les fréquences maximales fondamentales ainsi que leurs séquence d'empilement. Les fréquences ont été calculées par la méthode de Ritz basée sur la théorie de zigzag raffinée. Houmat [155] a développé la méthode d'optimisation couche par couche pour une plaque SCRV. Ce travail a été suivi d'autres travaux établis par Guenanou et Houmat [156], Meskine et *al.* [158].

IV.3. Description de la méthode

La méthode d'optimisation couche par couche est une méthode déterministe sous contrainte. Nous l'avons appliqué pour déterminer les séquences d'empilement optimales pour les fréquences maximales des trois premiers modes. Etant donné que les couches les plus externes ont plus d'effet de rigidité en cas de flexion que les couches internes. Les couches les plus externes ont plus d'effet pour déterminer les fréquences maximales. La fonction objective est prise comme paramètre de fréquence non dimensionnel $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_s h / D_0}$, où $D_0 = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12} \nu_{21})$. Les angles d'orientation des fibres T_0 et T_1 sont utilisés comme variables de conception dans chaque couche. Ces angles doivent satisfaire la contrainte de courbure κ . Les séquences d'empilement optimales $[\langle T_0 | T_1 \rangle^1, \langle T_0 | T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0 | T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0 | T_1 \rangle^{K/2}]_{opt}$ pour les fréquences maximales des poutres SCRV dans l'air et dans l'eau peuvent être déterminées séquentiellement dans l'ordre des couches les plus externes aux couches les plus internes. En utilisant la méthode d'optimisation couche par couche, la forme mathématique est donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{T} = (\langle T_0 | T_1 \rangle^1, \langle T_0 | T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0 | T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0 | T_1 \rangle^{K/2}) \\ \text{Pour maximiser} \quad \Omega_i = \Omega_i(\vec{T}) \\ \text{Soumise à des contraintes} \quad \left\{ \begin{array}{l} -90^\circ \leq T_0^{(k)} \leq 90^\circ \\ -90^\circ \leq T_1^{(k)} \leq 90^\circ \\ \kappa_{max}^{(k)} \leq 3.28 \text{ m}^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

La procédure d'optimisation couche par couche pour des poutres stratifiées symétriques est représenté dans la figure 4.1.

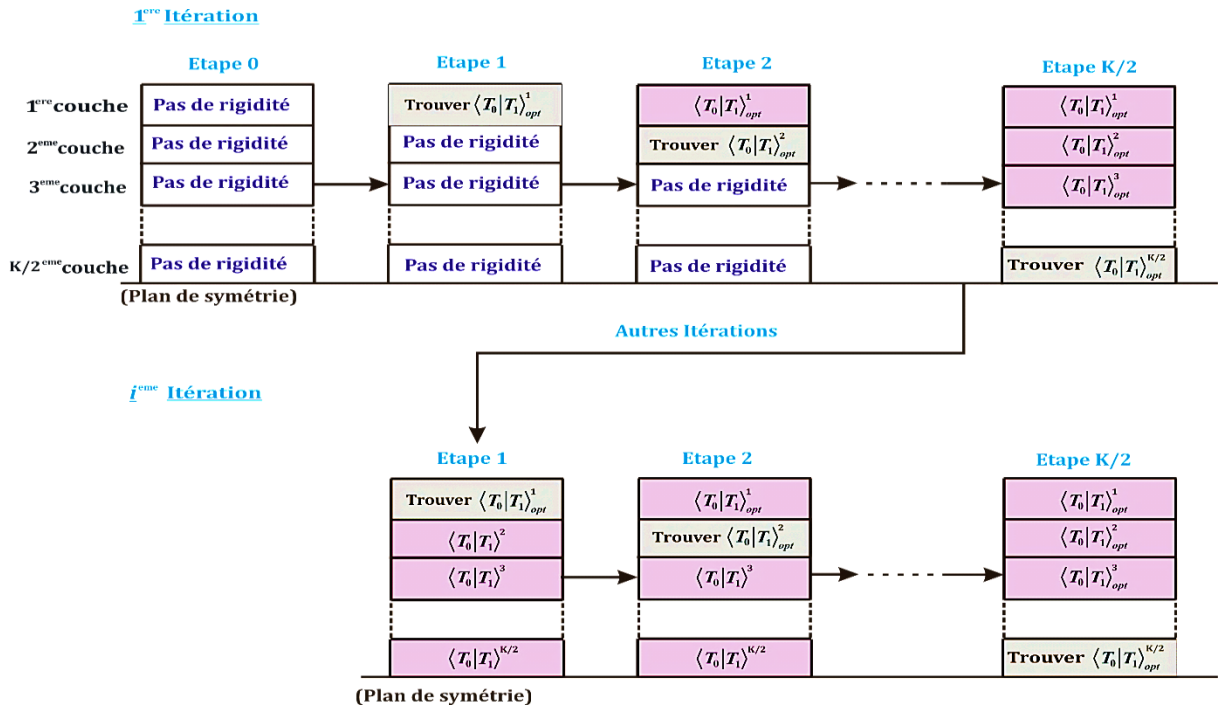


Figure 4.1 : Procédure d'optimisation couche par couche pour des poutres stratifiées symétriques [205].

La méthode d'optimisation couche par couche est appliquée en supposant que les couches de la moitié supérieure (ou inférieure) de la section transversale de stratifié ont une masse mais pas de rigidité. Le premier cycle itératif commence par l'étape 1 et se termine par l'étape $K/2$. Dans chaque étape, $\langle T_0|T_1 \rangle^k$ ($k = 1, 2, \dots, K/2$) est recherché en utilisant un petit incrément pour les variables de conception (par exemple $\Delta T_0 = \Delta T_1 = 5^\circ$) pour déterminer la fréquence maximale $\Omega_i^{(k)}(opt)$ du mode i . Les couches internes $k - 1$ restent sans rigidité. Après chaque étape, $\langle T_0|T_1 \rangle^k$ est remplacé par $\langle T_0|T_1 \rangle_{opt}^k$. Lorsque l'étape $K/2$ est atteinte, nous obtenons la séquence d'empilement optimale $[\langle T_0|T_1 \rangle^1, \langle T_0|T_1 \rangle^2, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^k, \dots, \langle T_0|T_1 \rangle^{K/2}]_{opt}$. Cette dernière détermine la fréquence maximale $\Omega_i(opt) = \Omega_i^{(K)}(opt)$ du mode i . La solution optimale déterminée dans le premier cycle itératif est considérée comme une meilleure approximation initiale pour le cycle suivant tout en laissant tous les angles d'orientation des fibres dans l'itération précédente inchangés. Les itérations sont répétées jusqu'à l'obtention d'une solution convergente. La figure 4.2 représente l'algorithme de la méthode d'optimisation couche par couche.

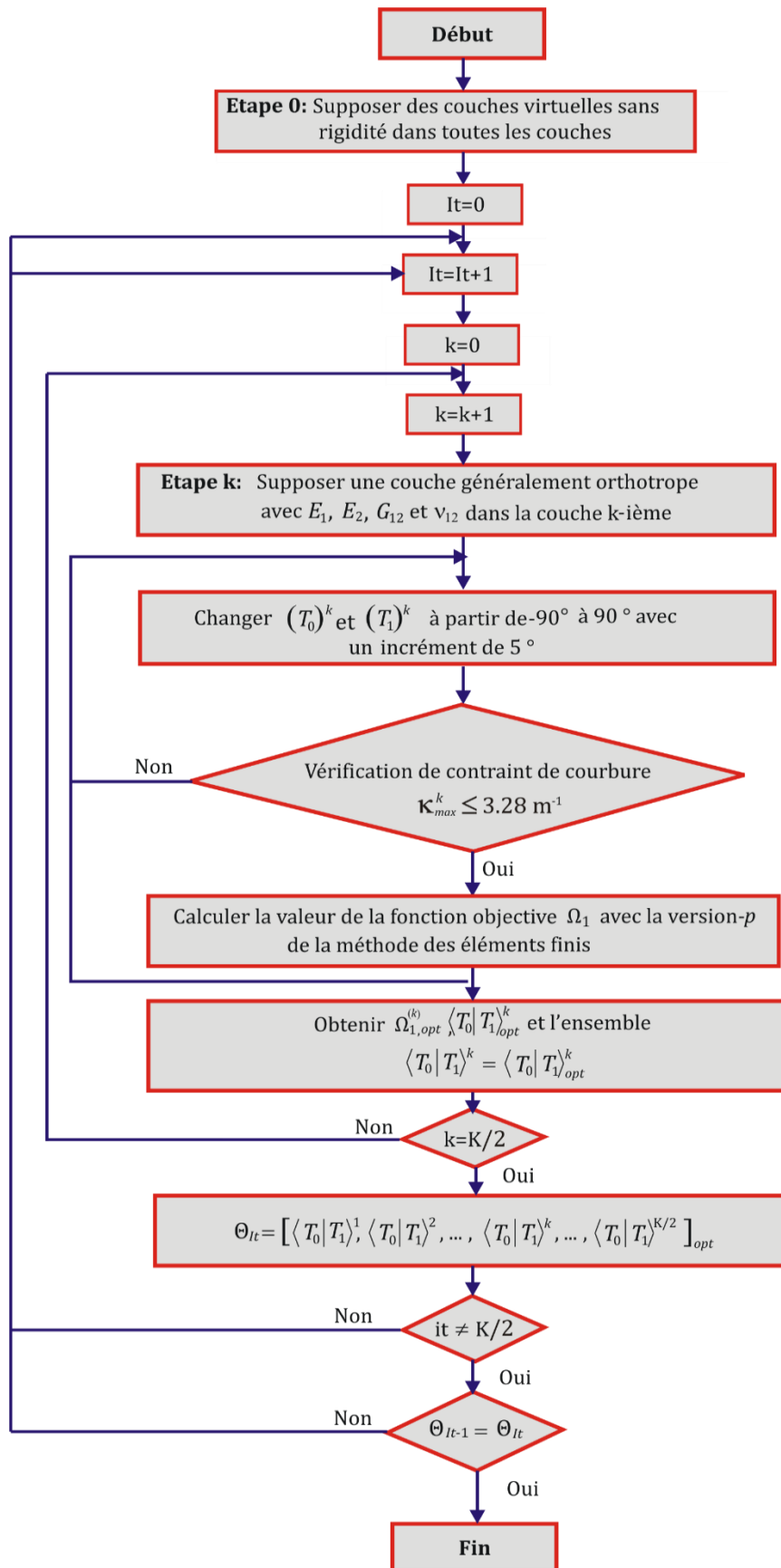


Figure 4.2 : Algorithme de la méthode d'optimisation couche par couche [155].

La méthode d'optimisation couche par couche peut fournir une solution optimale locale si les solutions optimales globales et locales sont proches l'une de l'autre comme démontré par Narita [199].

IV.4. Avantages et limites de la méthode d'optimisation couche par couche

La méthode d'optimisation couche par couche est simple et efficace. Elle implique un nombre d'opérations moindre par rapport aux autres méthodes d'optimisation générales. Le coût et le temps de calcul sont minimes. Cependant cette méthode permet d'atteindre la solution locale et non globale. Par conséquent elle manque de précision.

Chapitre V

Techniques de programmation

Ce chapitre sera consacré aux différentes méthodes et théories concernant les codes de calcul ainsi que les logiciels et les matériels utilisés. Nous allons décrire dans cette partie le contenu des programmes élaborés.

V.1. Introduction

Deux codes de calcul ont été établis. Le premier code concerne la vibration libre des poutres en utilisant la version- p de MEF basée sur la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée à la torsion. Le deuxième code est basé sur la méthode d'optimisation couche par couche et une combinaison entre la version- p de MEF et la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée à la torsion. Ce dernier est utilisé pour le calcul de la fonction objective qui donne les fréquences optimales et leurs séquences d'empilement.

V.2. Logiciels et matériel utilisés

Nous avons utilisé comme le Matlab 7.14 pour le calcul symbolique des fonctions de forme et leurs dérivées et le fortran 90 comme langage de programmation et le logiciel Origin 8 pour les graphes. Pour la réalisation des figures, nous avons utilisé Corel Draw X7. L'exécution du programme a été réalisée à l'aide un pc de processeur Intel®, Core™, i7 7500U, CPU@ (2.7 Ghz-2.9 Ghz) et une RAM de 8 Go.

V.3. Programme de calcul des fréquences

V.3.1. Organigramme du programme

La figure 5.1 présente les différentes étapes du programme élaboré.

V.3.2. Description des sous-programmes

La résolution de la plupart des problèmes qui nécessitent un programme informatique est très complexe. Cette complexité est due à la nécessité d'une seule opération pour le traitement de ces problèmes. L'utilisation des sous-programmes permet de traiter individuellement les problématiques liées au problème principal.

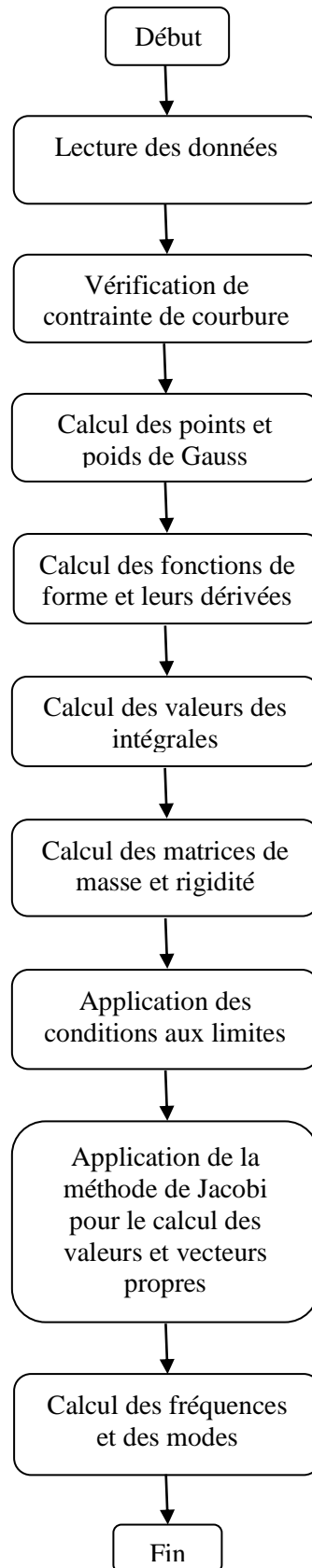


Figure 5.1 : Organigramme du programme pour le calcul des paramètres de fréquences et les déplacements modaux.

Une fois le bon fonctionnement de chaque pièce est confirmé, nous les assemblons pour aboutir à la solution finale. Pour implémenter les sous-programmes, on note d'abord le programme principal qui référence tous les sous-programmes dans l'ordre souhaité avant de commencer à écrire les sous-programmes.

Notre programme est réalisé pour l'étude de la vibration libre des poutres rectangulaires SCRV dans l'air et dans l'eau par un élément- p unidimensionnel. Il permet de déterminer les paramètres de fréquence et des déplacements modaux. Les étapes et les procédures sont illustrées dans l'organigramme de la figure 5.1. Ce programme contient les sous-programmes suivants :

- Sous-programme **INPUT**
- Sous-programme **COURB**
- Sous-programme **GAUSS**
- Sous-programme **FFUNC**
- Sous-programme **GFUNC**
- Sous-programme **INTEGRAL**
- Sous-programme **MASS**
- Sous-programme **STIFF**
- Sous-programme **BOUNDC**
- Sous-programme **JACOBI**
- Sous-programme **SORT**
- Sous-programme **MODE**

V.3.2.1. Sous-programme INPUT

Le sous-programme INPUT est un module qui permet de transmettre les données aux autres modules pour la résolution du problème. Les données sont introduites au programme à partir d'un fichier d'entrée qui s'appelle curviligne.DAT. Ces données sont divisées en trois sortes :

V.3.2.1.1. Paramètres géométriques

- B : Rapport de largeur de la poutre par rapport à la longueur,
- H : Rapport d'épaisseur de la poutre par rapport à la longueur.

V.3.2.1.2. Paramètres physiques

- NC : Nombre de couches,
- ROF : Masse volumique de fluide,
- E : Module de Young,
- G : Module de cisaillement,
- PR : Coefficient de Poisson,
- T0 : Angle d'orientation des fibres au centre de la poutre,
- T1 : Angle d'orientation des fibres à une distance caractéristique à partir du centre de la poutre.

V.3.2.1.3. Paramètres des éléments

- IP : Degré du polynôme de l'élément- p ,
- NRN : Nombre des nœuds restreints,
- NMODE : Numéro de mode spécifique,
- IRN : Conditions aux limites des nœuds restreints.

V.3.2.2. Sous-programme COURB

Il sert à définir les angles d'orientation T_0 et T_1 qui vérifient la contrainte de courbure κ .

V.3.2.3. Sous-programme GAUSS

Pour calculer les abscisses des points et poids pour l'intégration numérique.

V.3.2.4. Sous-programme FFUNC et GFUNT

Ces deux sous-programmes permettent de calculer les fonctions de forme et leurs dérivées.

V.3.2.5. Sous-programme INTEGRAL

Ce sous-programme permet de calculer les intégrales des éléments matrice masse et matrice rigidité.

V.3.2.6. Sous-programme MASSE

Ce sous-programme calcule la matrice masse élémentaire.

V.3.2.7. Sous-programme RIGIDITE

Ce sous-programme calcule la matrice rigidité élémentaire.

V.3.2.8. Sous-programme BOUNDC

Nous devons tenir compte les conditions aux limites. Elles sont représentées par 0 ou 1 ou la valeur 0 est associée à un degré de liberté libre et la valeur 1 est associée à un degré de liberté fixe. La figure 5.2 représente un élément unidimensionnel avec 2 nœuds, chacun contient trois degrés de liberté représentés selon l'ordre suivant :

- w^0 : Déplacement flexionnel,
- α : angle de rotation pour la flexion,
- β : angle de rotation pour la torsion.



Figure 5.2 : Numérotation des nœuds de l'élément- p .

Les conditions aux limites dans chaque nœud sont représentées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 5.1 : Introduction des conditions aux limites des nœuds.

Nœud	w^0	α	β
1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1
2	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1

V.3.2.9. Sous-programme JACOBI

Il permet de calculer les valeurs et vecteurs propres.

V.3.2.10. Sous-programme SORT

Pour mettre en ordre croissant les valeurs et les vecteurs propres.

V.3.2.11. Sous-programme MODE

Pour le calcul des déplacements modaux.

V.3.2.12. Affichage des résultats

L'affichage des résultats est fait à partir du fichier de sortie appelé CURVILIGNE.OUT. Ce fichier donne les paramètres de fréquence, ainsi que du fichier W.DAT qui donne les déplacements modaux. Les paramètres calculés par le programme réalisé sont :

- OM : Paramètre de fréquence pour un mode précis.
- W : Déplacement modal.

V.4. Programme d'optimisation

V.4.1. Description de programme

Ce programme permet d'établir les trois premières fréquences optimales ainsi que leurs séquences d'empilement pour des poutres SCRIV dans l'air et dans l'eau avec une méthode d'optimisation couche par couche et la version- p de MEF basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli couplée à la torsion.

V.4.2. Description des sous-programmes

Les sous programmes de ce programme sont :

- Sous-programme **INPUT**
- Sous-programme **COURB**
- Sous-programme **GAUSS**
- Sous-programme **FFUNC**
- Sous-programme **GFUNC**
- Sous-programme **INTEGRAL**
- Sous-programme **MASS**
- Sous-programme **STIFF**
- Sous-programme **BOUNDC**
- Sous-programme **JACOBI**
- Sous-programme **SORT**

- Sous-programme **OBJECTF**
- Sous-programme **OPTIMUM**

V.4.2.1. Fichier de données

Le fichier de données de ce programme contient les mêmes paramètres du programme précédent à l'exception du rajout de la longueur de la poutre et de la suppression des angles d'orientation de la fibre T_0 et T_1 .

Les sous-programmes **INPUT**, **COURB**, **GAUSS**, **FFUNC**, **GFUNC**, **INTEGRAL**, **MASS**, **STIFF**, **BOUNDC**, **JACOBI** et **SORT** sont définis précédemment.

V.4.2.2. Sous-programme OBJECTF

Il permet de calculer la fréquence pour l'ensemble d'orientations T_0 et T_1 qui vérifient la contrainte de la courbure κ .

V.4.2.3. Sous-programme OPTIMUM

Le sous-programme **OPTIMUM** donne les fréquences maximales et leurs séquences d'empilement.

V.4.2.4. Fichier de sortie

Les résultats de ce programme sont stockés dans le fichier OPTIMUM.OUT et sont définis comme suit :

- **ITER** : Nombre d'itérations,
- **KK** : Couche sélectionnée,
- **T0(KK)** : Angle d'orientation optimale au centre de la poutre pour une couche sélectionnée,
- **T1(KK)** : Angle d'orientation optimale à une distance caractéristique pour une couche sélectionnée,
- **OMKK** : Paramètre de fréquence maximale de la couche sélectionnée,
- **OMMAX** : Paramètre de fréquence maximale pour le stratifié.

Chapitre VI

Résultats et interprétations

L'objectif de ce chapitre est d'optimiser les fréquences et leurs séquences d'empilement pour la vibration libre des poutres symétriques SCRIV dans l'air et dans l'eau. Pour atteindre cet objectif, nous utilisons la version- p de MEF basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli couplée à la torsion. Dans la première partie, nous avons étudié la convergence d'un élément- p unidimensionnel. Les résultats sont atteints avec un degré polynomial égale à 10. Nous avons obtenu une concordance des résultats après une comparaison avec d'autres résultats. Une étude paramétrique est établie dans une deuxième partie. Dans la troisième partie, nous avons démontré la convergence de la méthode d'optimisation couche par couche. Ensuite, nous avons effectué une étude optimale sur différents paramètres géométriques, mécaniques et conditions aux limites.

VI.1. Convergence et validation des résultats

Pour valider la méthode numérique, des études de convergence et de comparaison sont réalisées. Les propriétés mécaniques du matériau composite utilisées sont $E_2 = 9.08 \text{ GPa}$, $E_1 = 171.42 \text{ GPa}$, $G_{12} = 5.29 \text{ GPa}$ et $\nu_{12} = 0.32$. La densité du fluide est $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, celle du solide est $\rho_s = 1500 \text{ kg/m}^3$. Le rapport d'épaisseur-longueur est $h/L = 0.017$ et le rapport de largeur-longueur est $b/L = 0.083$. L représente la longueur de la poutre ($L = 243,8 \text{ mm}$).

La fréquence propre est exprimée sous forme non dimensionnelle comme :

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho_s h / D_0} \quad (6.1)$$

Où :

$$D_0 = E_1 h^3 / 12 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (6.2)$$

VI.1.1. Convergence des résultats

L'étude de convergence des fréquences en fonction de l'ordre p du polynôme d'interpolation est réalisée pour une poutre en porte -à- faux SCRIV avec fibres curvilignes et

4 couches $[\mp\langle 45^\circ | 30^\circ \rangle]_s$ immergée dans l'eau. Les stratifiés sont fabriqués pour que la contrainte de courbure des fibres κ dans chaque couche soit atteinte. Les fréquences non dimensionnelles Ω pour les trois premiers modes sont calculées en augmentant l'ordre p du polynôme d'interpolation de 4 à 10 avec un incrément de 2. Les résultats sont présentés dans le tableau 6.1.

Tableau 6.1: Convergence des fréquences non dimensionnelles Ω pour les trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec fibres curvilignes et 4 couches $[\mp\langle 45^\circ | 30^\circ \rangle]_s$ dans l'eau en fonction de p .

Mode	p				Solution convergée
	4	6	8	10	
1	0.497	0.497	0.497	0.497	0.497
2	3.333	3.309	3.307	3.307	3.307
3	16.175	9.078	8.991	8.988	8.988

On peut voir d'après le tableau que les fréquences convergent rapidement en cas d'augmentation de l'ordre p du polynôme d'interpolation. La précision est obtenue jusqu'à trois chiffres significatifs en utilisant des polynômes d'interpolation de quatrième, sixième, huitième et dixième ordre pour le premier mode, le deuxième mode et le troisième mode, respectivement. Pour garantir que les fréquences des trois premiers modes soient précises jusqu'à trois chiffres significatifs, les calculs ultérieurs sont effectués sur la base d'un polynôme d'interpolation p de dixième ordre.

VI.1.2. Validation des résultats

Nous avons réalisé une étude de comparaison pour une poutre composite en porte-à-faux monocouche avec des fibres rectilignes dans l'air et dans l'eau. la poutre est notée par $\langle \theta | \theta \rangle$. Les fréquences non dimensionnelles Ω pour les deux premiers modes sont calculées en variant l'angle d'orientation de la fibre θ de 0° à 90° avec un incrément de 5° . Les résultats pour les deux premiers modes ainsi que celles obtenues analytiquement par Kramer et al. [206] basées sur les hypothèses de la théorie des poutres Euler-Bernoulli sont présentés dans la figure 6.1. Nous avons pris en compte dans l'analyse les effets du couplage flexion-torsion et de la masse ajoutée. Kramer et al. [206] ont validé les résultats analytiques grâce à une comparaison avec des solutions d'éléments finis en utilisant le logiciel commercial d'éléments finis Abaqus. Le

fluide est supposé non visqueux, non rotationnel, compressible linéairement. Les effets gravitationnels étaient négligeables. On peut voir dans la figure 6.1 que les résultats actuels coïncident avec celles obtenus par Kramer et les co-auteurs. Les angles d'orientation des fibres θ définis ici et les angles d'orientation des fibres θ^* définis par Kramer et *al.* [206] sont liées par l'équation $\theta + \theta^* = 90^\circ$.

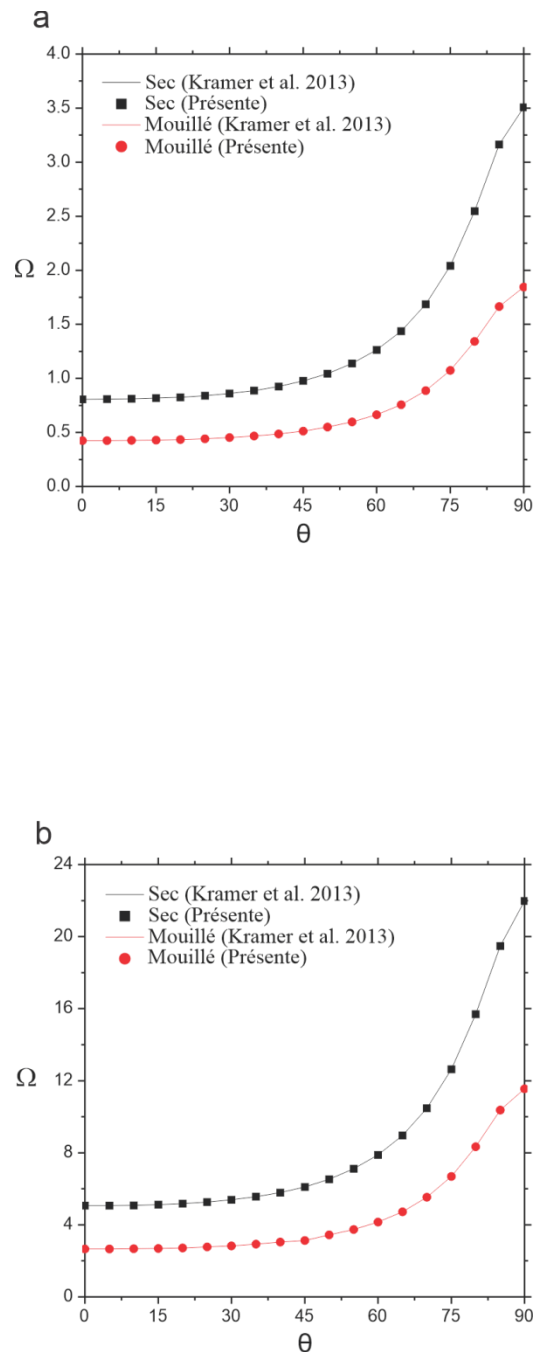


Figure 6.1: Comparaison des fréquences non dimensionnelles Ω pour les deux premiers modes d'une poutre composite en porte-à-faux monocouche ($\theta | \theta$) avec des fibres rectilignes dans l'air et dans l'eau en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ (a) premier mode, (b) deuxième mode.

VI.2. Analyse des vibrations libres des poutres SCRIV

VI.2.1. Espace de conception des fibres

Les paramètres de fréquence fondamentale pour une poutre composite en porte-à-faux monocouche avec fibres curvilignes sont étudiés dans cette partie. Deux angles d'orientation des fibres existent T_0 et T_1 qui sont comprises entre 0° et 90° avec un incrément de 5° . La figure 6.2 représente l'espace de conception. La région colorée vérifie la contrainte de courbure κ contrairement à la région non colorée. Les lignes pointées observées dans la figure ci-dessous représentent la stratifié avec rigidité constante (fibres rectilignes) dont $T_0 = T_1$. Les mêmes paramètres géométriques et physiques de la section précédente ont été repris.

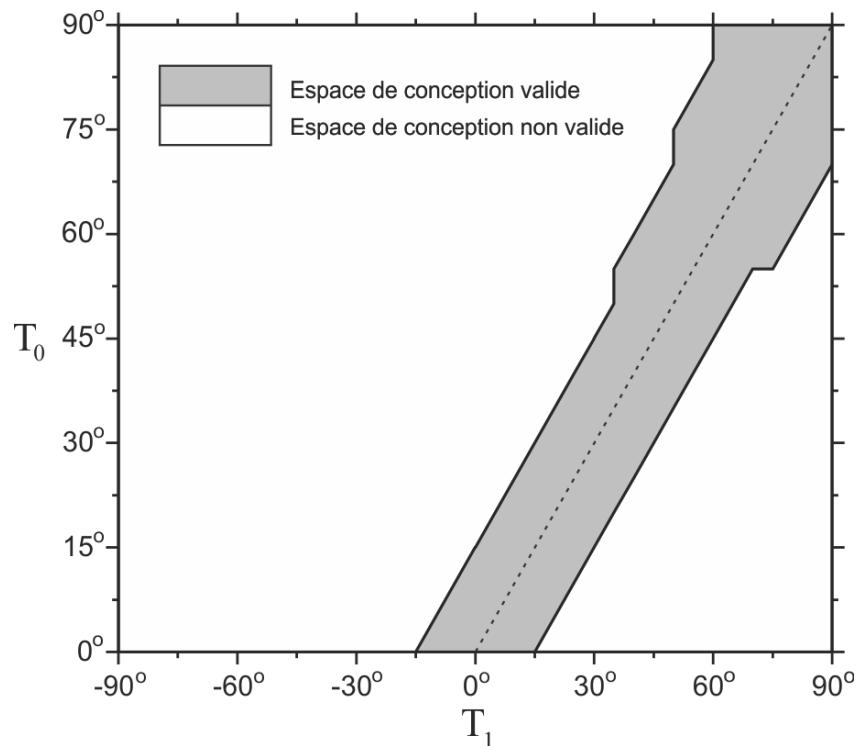


Figure 6.2: Espace de conception d'une couche avec fibres curvilignes décalées.

VI.2.2. Modes de vibration

Dans cette partie, on distingue la forme des trois premières déflexions modales normalisées des poutres symétriques $[\mp(15^\circ|0^\circ)]_s$, $[\mp(45^\circ|30^\circ)]_s$, $[\mp(75^\circ|60^\circ)]_s$ SCRIV dans l'eau. Les poutres sont CF et CS avec 4 couches. Les résultats sont représentées dans la figure 6.3 et la figure 6.4. Les paramètres géométriques et mécaniques sont celles de Kramer et *al.* [206].

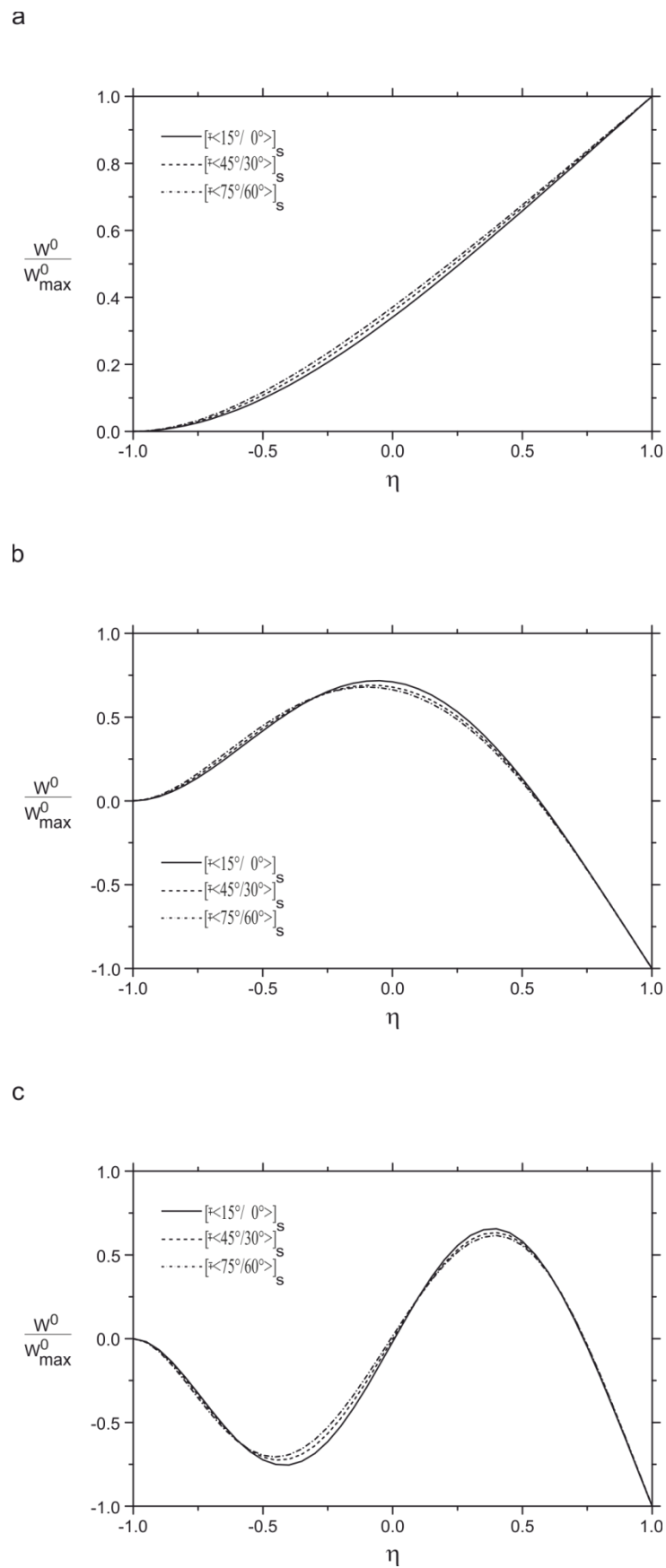


Figure 6.3 : Déflexions modales normalisées pour les trois premiers modes des poutres CF SCRIV avec 4 couches dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.

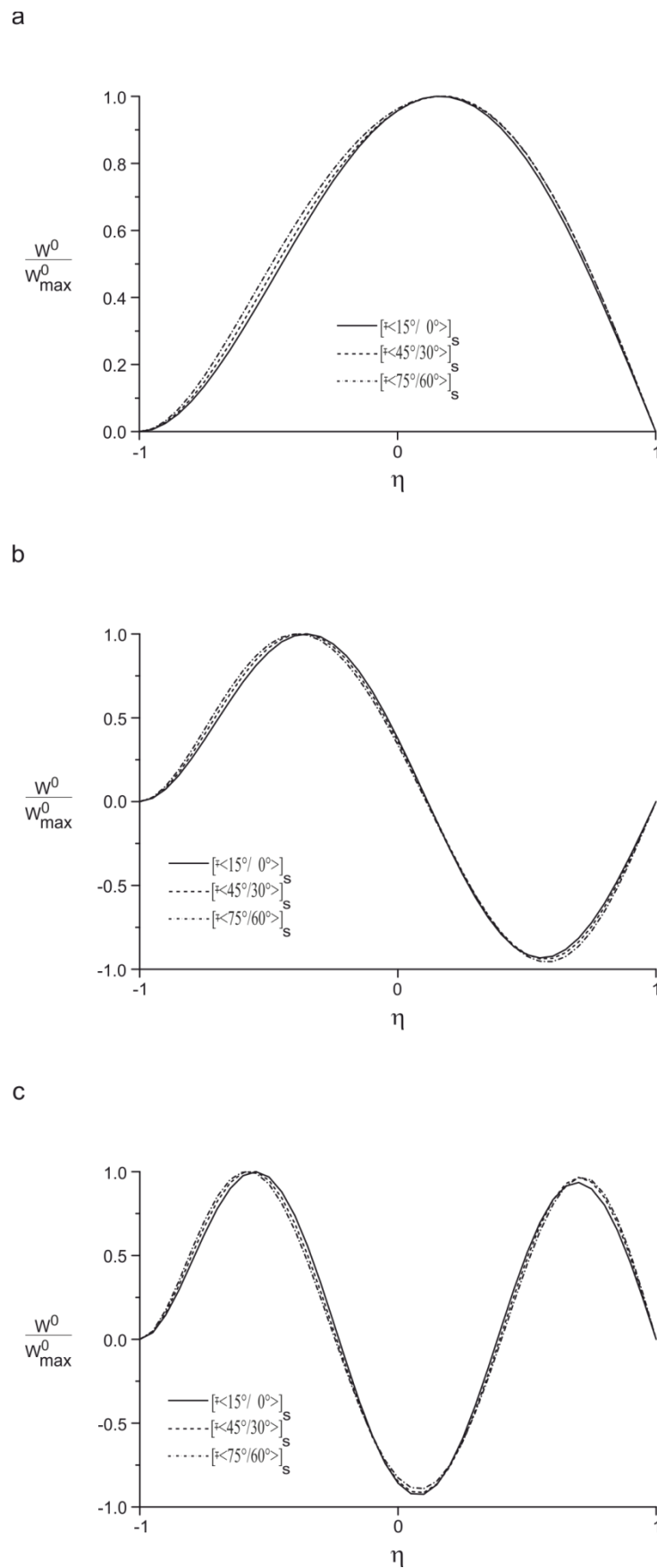


Figure 6.4 : Déflexions modales normalisées pour les trois premiers modes des poutres CS SCRIV avec 4 couches dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.

A partir de la figure 6.3 et la figure 6.4, On remarque que la variation des angles d'orientation des fibres affecte la forme de déflexions modales normalisées. La déflexion modale normalisée est nulle au niveau du côté encasté en raison de l'absence du mouvement. Néanmoins, elle est maximale au niveau du côté libre. La différence entre les deux côtés encasté et simplement appuyé est l'inclinaison plus importante au niveau du côté simplement appuyé en la comparant avec le côté encasté. En effet, le côté encasté a plus des contraintes par rapport au côté simplement appuyé.

VI.2.3. Changement des angles d'orientation T_0 et T_1

Dans cette partie, Nous avons étudié la vibration libre des poutres symétriques SCRv avec 4 couches dans l'air et dans l'eau. Les poutres sont associées simplement appuyé au niveau des deux côtés. Nous avons pris en compte les données de Kramer et *al.* [206]. Dans la figure 6.5, nous avons fixé l'angle d'orientation $T_0 = 60^\circ$ et nous avons changé l'angle d'orientation T_1 de 40° à 80° avec un incrément de 5° . Dans la figure 6.6, nous avons fixé l'angle d'orientation $T_1 = 50^\circ$ et nous avons changé l'angle d'orientation T_0 de 30° à 70° avec un incrément de 5° .

Nous remarquons pour les figures 6.5 et 6.6 que l'augmentation des angles d'orientation T_0 et T_1 accroît les fréquences pour les trois modes dans l'air comme dans l'eau.

VI.2.4. Changement du nombre de couches

Dans cette partie, nous avons établi les trois premières paramètres de fréquence des poutres symétriques SCRv en porte à faux 4-couches $[\mp\langle 45^\circ | 30^\circ \rangle]_5$, 8-couches $[\mp\langle 45^\circ | 30^\circ \rangle]_{25}$, 12-couches $[\mp\langle 45^\circ | 30^\circ \rangle]_{35}$ dans l'air et dans l'eau. Nous avons pris en compte les paramètres géométriques et mécaniques de Kramer et *al.* [206].

Nous constatons comme le montre la figure 6.7 que la fréquence augmente d'une manière réduite en augmentant le nombre de couche pour l'air comme pour l'eau. Cela est dû à l'augmentation du module d'élasticité E . Par conséquence, la structure est plus rigide.

VI.2.5. Changement des dimensions

Dans cette partie, nous avons analysé la vibration d'une poutre SCRv $[\mp\langle 70^\circ | 55^\circ \rangle]_5$ CC dans l'air et dans l'eau. Nous avons pris en compte les trois premiers paramètres de fréquence.

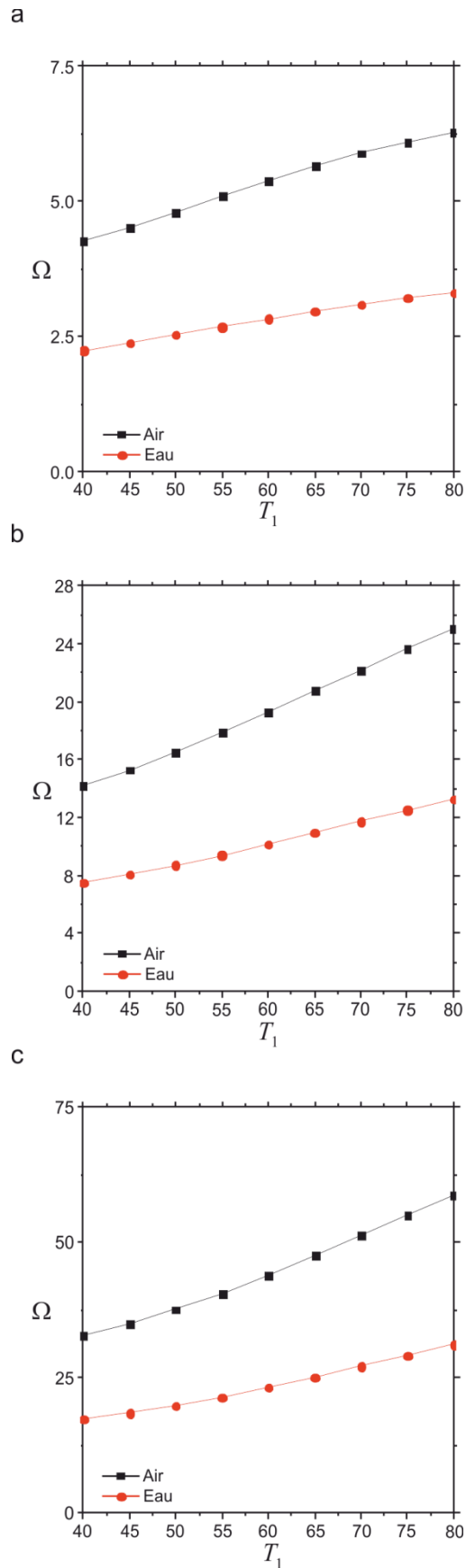


Figure 6.5 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_1 ($T_0 = 60^\circ$) pour des poutres SCRIV $[\mp(T_0|T_1)]_s$ SS dans l'air et dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.

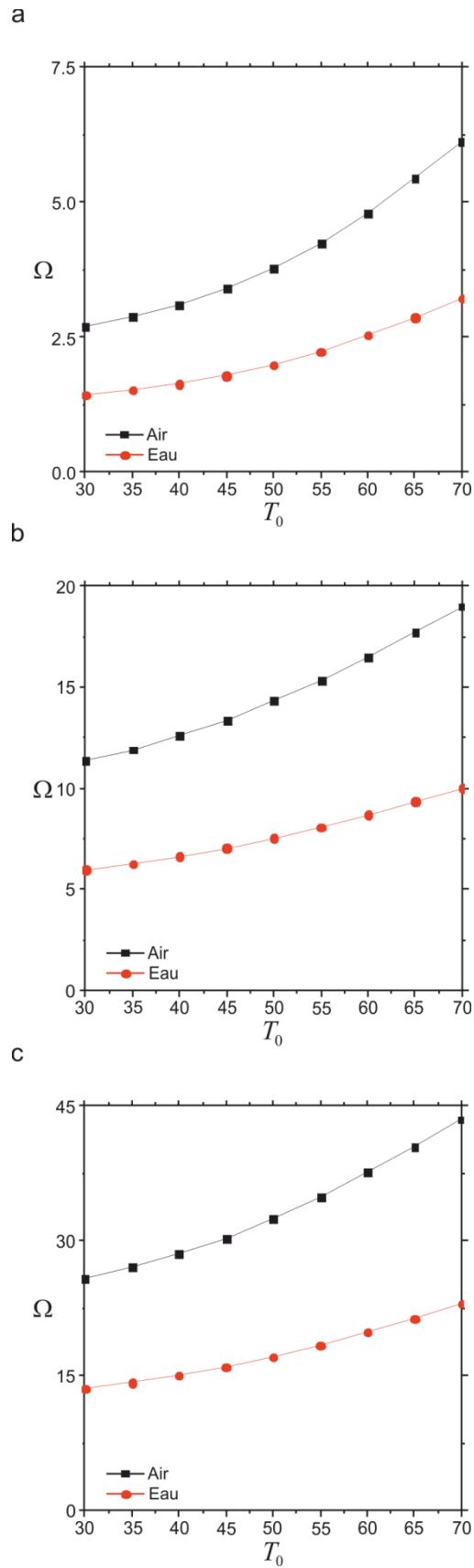


Figure 6.6 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de T_0 ($T_1 = 50^\circ$) pour des poutres SCRIV $[\overline{\mp}(T_0|T_1)]_s$ SS dans l'air et dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.

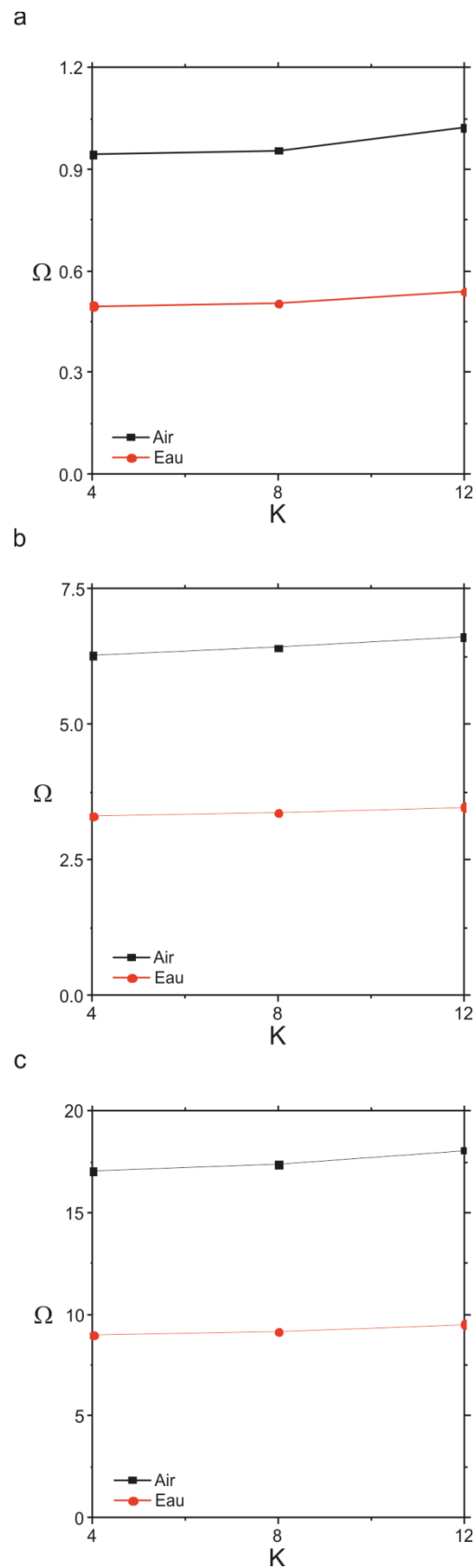


Figure 6.7 : Paramètre de fréquence Ω en fonction de nombre de couches K pour des poutres en porte -à- faux SCRIV dans l'air et dans l'eau (a) premier mode, (b) deuxième mode, (c) troisième mode.

Les différents paramètres géométriques ainsi que les paramètres mécaniques sont de Kramer et *al.* [206]. Les résultats sont illustrés dans le tableau 6.2.

Tableau 6.2 : Les trois premiers paramètres de fréquences d'une poutre SCR_V $[\mp(70^\circ|55^\circ)]_S$ CC dans l'air et dans l'eau pour différents paramètres géométriques

Spécimen n°	Longueur	Largeur	Epaisseur	Type	$\Omega_{1,air}$	$\Omega_{1,eau}$	$\frac{\Omega_{1,eau}}{\Omega_{1,air}}$	Ω_{2air}	$\Omega_{2,eau}$	$\frac{\Omega_{2,eau}}{\Omega_{2,air}}$	$\Omega_{3,air}$	$\Omega_{3,eau}$	$\frac{\Omega_{3,eau}}{\Omega_{3,air}}$
1	250	14	6	référence	11.518	7.728	0,67	31.380	21.067	0,67	62.951	42.295	0,67
2	375	14	6	longue	11.520	7.731	0,67	31.412	21.085	0,67	63.088	42.362	0,67
3	200	14	6	Courte	11.517	7.728	0,67	31.347	21.054	0,67	62.806	42.237	0,67
4	250	20	6	large	11.516	6.951	0,60	31.327	18.935	0,60	62.722	37.978	0,61
5	250	8	6	étroite	11.520	8.841	0,77	31.413	24.111	0,77	63.091	48.440	0,77
6	250	14	9	épaisse	11.518	8.551	0,74	31.369	23.304	0,74	62.901	46.770	0,74
7	250	14	3	mince	11.519	6.208	0,54	31.387	16.926	0,54	62.980	33.992	0,54
8	375	8	3	Longue/étroite/mince	11.521	7.446	0,65	31.429	20.314	0,65	63.162	40.829	0,65
9	375	8	9	Longue/étroite/épaisse	11.521	9.519	0,83	31.422	25.966	0,83	63.129	52.176	0,83
10	200	20	9	Courte/large/épaisse	11.511	7.828	0,68	31.240	21.291	0,68	62.340	42.612	0,68
11	200	20	3	Courte/large/mince	11.513	5.435	0,47	31.272	14.797	0,47	62.481	29.657	0,47

Nous constatons d'après le tableau 6.2 que la valeur de fréquence la plus élevée dans l'air est pour le spécimen 8. La plus basse fréquence est pour le spécimen 10. Ceci est dû à la rigidité maximale pour le spécimen 8 et à la rigidité minimale pour le spécimen 10. On remarque pour les spécimens 6 et 7 que les poutres minces sont plus affectées par l'eau en les comparant avec les poutres épaisses. Pour l'eau, les plus grandes fréquences sont obtenues pour le spécimen 9 et les plus basses sont obtenues pour le spécimen 11. Cela est dû au grand rapport des fibres parallèles au spécimen à partir de plane neutre pour les poutres épaisses.

Ainsi, la fréquence augmente lorsque la surface de projection est étroite. Le plus grand rapport de fréquence $\frac{\Omega_{1,eau}}{\Omega_{1,air}}$ est pour le spécimen 9. Il s'agit alors du spécimen le moins affecté par l'eau car les fréquences pour l'air et l'eau sont plus proches les unes des autres. Le moindre rapport de fréquence $\frac{\Omega_{1,eau}}{\Omega_{1,air}}$ est pour le spécimen 11. Il s'agit du spécimen le plus affecté par l'eau car les fréquences pour l'air et l'eau sont éloignées les unes des autres.

VI.3. Conception des poutres symétriques SCRIV pour les fréquences optimales

VI.3.1. Convergence de la méthode d'optimisation couche par couche

Pour démontrer l'efficacité de la méthode d'optimisation couche par couche, nous avons réalisé une étude de convergence pour une poutre symétrique SCRIV avec 8 couches dans l'eau. Les paramètres géométriques et mécaniques sont celles de Kramer et *al.* [206]. Les résultats sont présentés dans le tableau 6.3.

Les fréquences optimales pour les trois premiers modes ont été obtenues en utilisant $(37 \times 37) \times 4 = 5476$. Ce dernier résultat est une combinaison entre T_0 et T_1 plutôt que $(37 \times 37)^4 = 1874161$ utilisée par une méthode d'optimisation globale. La méthode d'optimisation couche par couche donne les solutions optimales avec un nombre minimum d'itérations. Les couches les plus externes ont un effet significatif sur la détermination des fréquences maximales. Les couches les plus externes ont un effet d'environ 76% sur les deux premiers modes et un effet de 59% sur le troisième mode.

VI.3.2. Etude optimale en fonction de différents paramètres géométriques et mécaniques

Les trois premiers modes sont susceptibles de contribuer à la réponse vibratoire des structures car ils ont des facteurs de participation plus élevés. L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'effet de l'orientation des fibres sur les fréquences maximales pour les trois premiers modes d'une poutre symétrique SCRIV avec fibres curvilignes dans l'air et dans l'eau. Différentes conditions aux limites ont été prises en compte. Les symboles C, F et S indiquent respectivement encasturé, libre et simplement appuyé. Trois matériaux composites avec des paramètres mécaniques indiqués dans le tableau 6.4 ont été utilisés.

VI.3.2.1. Influence des rapports de largeur-longueur

L'influence du rapport de largeur-longueur sur les solutions optimales est présentée dans les tableaux 6.5–6.10 pour les poutres symétriques SCRIV avec 8 couches dans l'air et dans l'eau. Le rapport d'épaisseur-longueur h/L est pris comme 0,02. Les trois matériaux sont utilisés.

Tableau 6.3 : Illustration de la méthode d'optimisation couche par couche pour une poutre symétrique SCRIV en porte -à- faux avec 8 couches dans l'eau

Mode	Itération	k	$\left[\left\langle T_0^{(1)} T_1^{(1)} \right\rangle, \left\langle T_0^{(2)} T_1^{(2)} \right\rangle, \left\langle T_0^{(3)} T_1^{(3)} \right\rangle, \left\langle T_0^{(4)} T_1^{(4)} \right\rangle \right]_s$	Ω_{opt}	
1	1	0	$[\langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	--	
		1	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	1.403	
		2	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	1.726	
		3	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle * * \rangle]_s$	1.831	
	4	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	1.845		
	2	0	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	1.845	
		1	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	1.845	
		2	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	1.845	
		3	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	1.845	
		4	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	1.845	
	3		même que l'itération 2		
	2	1	0	$[\langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	--
			1	$[\langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	8.792
			2	$[\langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	10.816
			3	$[\langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle * * \rangle]_s$	11.472
4		$[\langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563		
2		0	$[\langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
		1	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
		2	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle -90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
		3	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
4		$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563		
3		0	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
		1	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
		2	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
		3	$[\langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle, \langle 90^\circ 90^\circ \rangle]_s$	11.563	
4			même que l'itération 3		
3		1	0	$[\langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	--
			1	$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	16.387
	2		$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle * * \rangle, \langle * * \rangle]_s$	25.876	
	3		$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle -80^\circ 60^\circ \rangle, \langle * * \rangle]_s$	27.537	
	4	$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle -80^\circ 60^\circ \rangle, \langle 5^\circ -5^\circ \rangle]_s$	27.905		
	2	0	$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle -80^\circ 60^\circ \rangle, \langle 5^\circ -5^\circ \rangle]_s$	27.905	
		1	$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle -80^\circ 60^\circ \rangle, \langle 5^\circ -5^\circ \rangle]_s$	27.905	
		2	$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle -80^\circ 60^\circ \rangle, \langle 5^\circ -5^\circ \rangle]_s$	27.905	
		3	$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle -80^\circ 60^\circ \rangle, \langle 5^\circ -5^\circ \rangle]_s$	27.905	
	4	$[\langle 80^\circ 80^\circ \rangle, \langle -60^\circ 65^\circ \rangle, \langle -80^\circ 60^\circ \rangle, \langle 5^\circ -5^\circ \rangle]_s$	27.905		
	3		même que l'itération 2		

Tableau 6.4: Paramètres mécaniques des matériaux composites utilisés.

Matériaux	E_2/E_1	G_{12}/E_1	ρ_f/ρ_s	ν_{12}
1	0.0546	0.0203	0.7423	0.25
2	0.0367	0.0136	0.4631	0.25
3	0.1896	0.0708	0.4753	0.26

Les tableaux 6.5–6.7 montrent que les fréquences optimales fondamentales ne changent pas de manière significative en augmentant le rapport de largeur-longueur pour les mêmes conditions aux limites. Cependant, les fréquences optimales fondamentales diminuent pour une poutre SCRIV dans l'eau en raison de l'effet de masse ajoutée comme le confirme les tableaux 6.8–6.10. Le format de fibre dominant est $\langle 90^\circ | 90^\circ \rangle$. Les fréquences optimales pour le deuxième et le troisième mode diminuent en augmentant le rapport de largeur-longueur en raison d'une augmentation de la section de poutre. Aucun format de fibre dominant existe. Les fréquences optimales des poutres dans l'air et dans l'eau augmentent en augmentant les contraintes aux limites. Les fréquences optimales augmentent en augmentant le nombre de modes. En effet, plus le mode est élevé, plus la forme du mode est complexe.

VI.3.2.2. Influence des rapports d'épaisseur-longueur

Les tableaux 6.11–6.16 représentent les solutions optimales convergées en fonction de différents rapports d'épaisseur-longueur et conditions aux limites pour les poutres symétriques SCRIV avec 8 couches dans l'air et dans l'eau. Les trois matériaux sont utilisés. Le rapport de largeur est $b/L = 0.1$.

Les tableaux 6.11–6.13 montrent qu'il n'existe aucun effet du rapport d'épaisseur-longueur sur les fréquences optimales pour le premier mode. Cependant, il existe un effet mineur représenté par une diminution minimale. Cet effet concerne le deuxième et le troisième mode pour les mêmes conditions aux limites en augmentant le rapport d'épaisseur-longueur. Dans les tableaux 6.14–6.16, il y'a une augmentation des fréquences optimales en augmentant le rapport d'épaisseur-longueur. La partie VI.2.5. confirme que les poutres minces sont plus affectées par l'eau. Le format de fibre $\langle 90^\circ | 90^\circ \rangle$ constitue toutes les séquences d'empilement optimales pour le mode fondamental. Les plupart des séquences d'empilement du deuxième et du troisième mode ont un format de fibre optimal non-dominant.

Tableau 6.5: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 1, $h/L = 0.02$).

Mode	b/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.05	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.493	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.229	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.319	2
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	9.806	2
	0.1	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.493	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.229	3
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.319	3
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.806	2
	0.15	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.493	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.229	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.319	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.806	2
2	0.05	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	21.893	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	61.276	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	49.644	3
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	39.225	2
	0.1	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	21.893	2
		CC	$[-(85 85), (80 80), -(90 90), (90 90)]_s$	60.417	3
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	49.644	3
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	39.225	4
	0.15	CF	$[(90 75), -(90 70), -(90 70), (80 90)]_s$	21.272	2
		CC	$[-(90 70), (80 60), -(75 60), -(70 50)]_s$	53.817	4
		CS	$[(90 75), -(85 65), (90 80), -(65 75)]_s$	47.261	2
		SS	$[(85 90), -(85 90), -(85 80), (85 65)]_s$	39.012	3
3	0.05	CF	$[(80 90), -(70 85), (90 75), (90 70)]_s$	59.763	2
		CC	$[(90 80), -(90 75), -(90 85), -(90 75)]_s$	118.185	2
		CS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	103.579	3
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	88.256	2
	0.1	CF	$[(65 75), -(55 55), -(50 60), (15 30)]_s$	46.292	4
		CC	$[-(80 65), (60 50), (65 50), (65 60)]_s$	93.135	3
		CS	$[-(80 65), (75 60), (75 60), (40 60)]_s$	87.010	5
		SS	$[(85 70), -(70 65), -(85 65), -(80 70)]_s$	80.046	2
	0.15	CF	$[-(65 55), (45 45), -(50 35), (45 50)]_s$	35.337	2
		CC	$[(70 50), -(55 45), -(45 45), (45 45)]_s$	72.311	2
		CS	$[-(75 60), (40 55), -(55 35), (40 55)]_s$	67.344	3
		SS	$[(80 60), -(55 50), -(50 55), -(65 55)]_s$	65.341	2

Tableau 6.6: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv avec huit couches dans l'air (matériau 2, $h/L = 0.02$).

Mode	b/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.05	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.510	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.335	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	9.853	3
	0.1	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	3.510	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.335	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	9.853	2
	0.15	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.510	2
		CC	$[-(85 90), (85 85), -(90 80), (80 90)]_s$	22.156	3
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	9.853	2
2	0.05	CF	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	21.997	3
		CC	$[(90 90), -(85 85), (80 80), (80 85)]_s$	61.091	2
		CS	$[(90 90), -(90 90), (90 90), (90 90)]_s$	49.880	3
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	39.411	3
	0.1	CF	$[(90 85), -(85 65), (75 85), (70 90)]_s$	21.185	3
		CC	$[-(85 80), (75 65), -(70 80), -(0 10)]_s$	56.053	2
		CS	$[-(90 80), (85 65), -(75 90), -(80 90)]_s$	47.528	2
		SS	$[-(90 85), (85 75), -(80 80), -(80 80)]_s$	38.663	3
	0.15	CF	$[-(85 80), (55 70), -(85 70), (90 75)]_s$	19.298	2
		CC	$[(75 80), -(65 55), (15 35), -(60 80)]_s$	49.027	2
		CS	$[(90 75), -(65 60), (85 70), (20 20)]_s$	42.761	4
		SS	$[(85 85), -(80 65), (80 60), -(75 75)]_s$	36.715	8
3	0.05	CF	$[(80 80), -(70 65), -(80 75), (20 0)]_s$	55.220	4
		CC	$[-(90 75), (70 70), -(70 80), (5 -15)]_s$	108.578	3
		CS	$[(85 80), -(75 70), -(90 75), (80 90)]_s$	97.843	3
		SS	$[(90 80), -(85 70), (80 90), (90 90)]_s$	86.038	4
	0.1	CF	$[-(75 75), (50 55), -(45 40), -(45 40)]_s$	41.102	3
		CC	$[-(65 60), (75 60), -(10 5), (80 85)]_s$	82.482	3
		CS	$[(85 70), -(60 60), (55 35), -(35 55)]_s$	77.434	4
		SS	$[-(90 70), (50 60), -(5 15), (85 65)]_s$	70.957	2
	0.15	CF	$[-(70 60), (50 55), -(40 50), (45 65)]_s$	31.568	3
		CC	$[-(80 90), (65 85), -(90 80), -(90 80)]_s$	59.345	2
		CS	$[(85 90), -(70 90), (80 85), (85 90)]_s$	48.966	2
		SS	$[-(75 60), (75 55), (60 65), -(50 35)]_s$	59.042	3

Tableau 6.7: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv avec huit couches dans l'air (matériau 3, $h/L = 0.02$).

Mode	b/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.05	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.512	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.348	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.401	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.858	2
	0.1	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.512	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.348	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.401	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	9.858	2
	0.15	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	3.512	2
		CC	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 90 85\rangle, -\langle 85 85\rangle]_s$	21.947	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.401	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.858	2
2	0.05	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.009	3
		CC	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 85 85\rangle, \langle 85 90\rangle]_s$	60.645	2
		CS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 85\rangle, -\langle 85 85\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	49.744	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	39.433	2
	0.1	CF	$[-\langle 85 85\rangle, \langle 75 70\rangle, -\langle 85 85\rangle, -\langle 80 90\rangle]_s$	20.959	3
		CC	$[-\langle 85 80\rangle, \langle 75 60\rangle, -\langle 70 85\rangle, \langle 5 -15\rangle]_s$	54.795	3
		CS	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 80 65\rangle, -\langle 70 90\rangle, -\langle 70 90\rangle]_s$	46.627	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 45 25\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 70\rangle]_s$	33.300	6
	0.15	CF	$[-\langle 80 85\rangle, \langle 70 50\rangle, \langle -10 5\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	18.790	3
		CC	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 60 60\rangle, -\langle 40 45\rangle, -\langle 25 40\rangle]_s$	48.312	2
		CS	$[\langle 80 80\rangle, -\langle 75 60\rangle, \langle 15 35\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	42.510	3
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 65 45\rangle, -\langle 85 65\rangle, -\langle 75 70\rangle]_s$	33.521	4
3	0.05	CF	$[-\langle 85 80\rangle, \langle 60 65\rangle, \langle 5 -15\rangle, -\langle 75 90\rangle]_s$	52.745	3
		CC	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 75 65\rangle, \langle 70 80\rangle, \langle 15 15\rangle]_s$	107.076	2
		CS	$[\langle 85 80\rangle, -\langle 75 70\rangle, -\langle 90 75\rangle, \langle 65 45\rangle]_s$	96.495	4
		SS	$[\langle 90 80\rangle, -\langle 85 65\rangle, \langle 80 90\rangle, \langle 85 90\rangle]_s$	84.784	2
	0.1	CF	$[\langle 70 75\rangle, -\langle 60 60\rangle, \langle 50 40\rangle, -\langle 35 50\rangle]_s$	40.264	3
		CC	$[-\langle 85 90\rangle, \langle 75 90\rangle, -\langle 85 90\rangle, -\langle 85 85\rangle]_s$	60.976	3
		CS	$[-\langle 80 70\rangle, \langle 70 60\rangle, -\langle 55 35\rangle, \langle 30 50\rangle]_s$	75.874	3
		SS	$[-\langle 90 75\rangle, \langle 65 55\rangle, -\langle 50 30\rangle, \langle 10 30\rangle]_s$	71.527	3
	0.15	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	22.009	3
		CC	$[-\langle 80 90\rangle, \langle 75 75\rangle, -\langle 90 70\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	58.648	2
		CS	$[\langle 80 85\rangle, -\langle 75 85\rangle, -\langle 85 80\rangle, -\langle 85 75\rangle]_s$	48.237	4
		SS	$[\langle 65 60\rangle, -\langle 80 60\rangle, -\langle 10 15\rangle, -\langle 55 50\rangle]_s$	57.119	3

Tableau 6.8: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv avec huit couches dans l'eau (matériau 1, $h/L = 0.02$).

Mode	b/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.05	CF	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	2.515	2
		CC	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	15.988	2
		CS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	11.028	2
		SS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	7.059	3
	0.1	CF	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	2.066	2
		CC	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	13.146	2
		CS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	9.059	2
		SS	$[-\langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	5.792	2
	0.15	CF	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	1.795	2
		CC	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	11.420	2
		CS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	7.870	2
		SS	$[\langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	5.038	2
2	0.05	CF	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	15.760	3
		CC	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	44.071	2
		CS	$[-\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	35.737	3
		SS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	28.211	2
	0.1	CF	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	12.947	3
		CC	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	36.237	2
		CS	$[-\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	29.358	3
		SS	$[-\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	23.168	2
	0.15	CF	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	11.247	3
		CC	$[-\langle 90 80 \rangle, \langle 90 70 \rangle, -\langle 85 80 \rangle, -\langle 75 90 \rangle]_s$	30.607	2
		CS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	25.503	3
		SS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle]_s$	20.123	2
3	0.05	CF	$[\langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	44.128	3
		CC	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	86.477	4
		CS	$[\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle]_s$	74.563	3
		SS	$[\langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle, \langle 90 90 \rangle, -\langle 90 90 \rangle]_s$	63.474	2
	0.1	CF	$[\langle 70 80 \rangle, -\langle 70 60 \rangle, -\langle 75 55 \rangle, -\langle 70 90 \rangle]_s$	31.448	3
		CC	$[-\langle 85 70 \rangle, \langle 65 65 \rangle, \langle 80 65 \rangle, -\langle 85 70 \rangle]_s$	63.006	2
		CS	$[\langle 80 75 \rangle, -\langle 85 65 \rangle, -\langle 85 75 \rangle, -\langle 85 75 \rangle]_s$	57.193	3
		SS	$[\langle 90 75 \rangle, -\langle 90 75 \rangle, -\langle 90 75 \rangle, -\langle 85 85 \rangle]_s$	50.916	2
	0.15	CF	$[\langle 70 65 \rangle, -\langle 45 60 \rangle, -\langle 55 55 \rangle, \langle 25 20 \rangle]_s$	22.632	3
		CC	$[\langle 80 60 \rangle, -\langle 65 45 \rangle, -\langle 60 55 \rangle, \langle 15 30 \rangle]_s$	45.911	2
		CS	$[-\langle 85 65 \rangle, \langle 50 60 \rangle, \langle 75 55 \rangle, -\langle 55 35 \rangle]_s$	42.247	3
		SS	$[-\langle 85 70 \rangle, \langle 60 60 \rangle, \langle 80 65 \rangle, -\langle 80 65 \rangle]_s$	39.586	2

Tableau 6.9: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRV avec huit couches dans l'eau (matériau 2, $h/L = 0.02$).

Mode	b/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.05	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	2.239	2
		CC	$[(90 90), -(90 90), (90 90), (90 90)]_s$	14.248	3
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.819	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	6.285	2
	0.1	CF	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	1.774	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	11.288	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	7.779	3
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	4.980	2
	0.15	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	1.514	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.636	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	6.641	2
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	4.251	2
2	0.05	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	14.032	3
		CC	$[(90 90), -(90 90), (90 90), (90 90)]_s$	39.274	3
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	31.818	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	25.140	2
	0.1	CF	$[(90 90), -(90 85), (90 75), -(90 90)]_s$	11.080	4
		CC	$[-(90 80), (90 70), -(85 90), (85 85)]_s$	30.113	2
		CS	$[-(90 85), (90 75), -(85 85), -(90 85)]_s$	24.891	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	19.918	2
	0.15	CF	$[-(90 80), (85 65), -(70 90), -(85 90)]_s$	9.085	2
		CC	$[(85 80), -(80 60), (75 75), (-5 10)]_s$	23.929	3
		CS	$[(90 80), -(85 65), (70 90), -(90 90)]_s$	20.470	2
		SS	$[-(90 85), (85 75), -(80 80), -(80 75)]_s$	16.674	3
3	0.05	CF	$[(80 85), -(75 75), (90 75), -(65 80)]_s$	37.265	2
		CC	$[(90 80), -(85 70), (70 85), -(85 85)]_s$	73.691	2
		CS	$[(90 80), -(90 70), -(90 85), (85 90)]_s$	64.607	2
		SS	$[(90 85), -(85 80), (80 90), (85 90)]_s$	56.013	3
	0.1	CF	$[-(80 75), (55 60), -(15 20), (85 65)]_s$	24.734	2
		CC	$[-(90 70), (60 60), (0 -20), -(60 75)]_s$	49.004	2
		CS	$[-(80 75), (80 60), (85 65), -(40 20)]_s$	45.373	3
		SS	$[-(90 75), (80 60), -(65 85), -(5 5)]_s$	40.702	2
	0.15	CF	$[-(70 75), (50 60), -(40 40), (45 45)]_s$	17.513	3
		CC	$[-(90 90), (90 85), -(90 80), -(85 85)]_s$	26.477	3
		CS	$[-(85 70), (55 60), -(55 35), (40 60)]_s$	32.731	3
		SS	$[-(90 70), (50 60), -(15 20), (85 65)]_s$	30.415	2

Tableau 6.10: Effet de rapport largeur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRV avec huit couches dans l'eau (matériau 3, $h/L = 0.02$).

Mode	b/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.05	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	2.542	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	16.173	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	11.146	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	7.135	3
	0.1	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	2.092	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	13.311	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.173	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	5.872	2
	0.15	CF	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	1.819	3
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	11.574	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	7.976	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	5.106	2
2	0.05	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	15.928	3
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 85\rangle, -\langle 90 80\rangle, -\langle 90 80\rangle]_s$	44.429	2
		CS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	36.119	3
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	28.538	3
	0.1	CF	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 90 80\rangle, -\langle 85 90\rangle]_s$	12.727	2
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 85 65\rangle, -\langle 70 90\rangle, \langle 15 -5\rangle]_s$	34.433	2
		CS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 75 85\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	28.946	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 85 85\rangle, \langle 80 75\rangle, \langle 80 80\rangle]_s$	23.246	3
	0.15	CF	$[\langle 85 85\rangle, -\langle 75 65\rangle, \langle 85 90\rangle, \langle 70 90\rangle]_s$	10.711	3
		CC	$[-\langle 80 85\rangle, \langle 75 55\rangle, -\langle 15 10\rangle, -\langle 90 75\rangle]_s$	27.391	4
		CS	$[\langle 90 80\rangle, -\langle 75 65\rangle, \langle 70 85\rangle, \langle 65 85\rangle]_s$	23.679	3
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 40 35\rangle, -\langle 90 85\rangle, -\langle 80 90\rangle]_s$	17.272	4
3	0.05	CF	$[-\langle 85 80\rangle, \langle 70 70\rangle, -\langle 75 90\rangle, -\langle 0 20\rangle]_s$	41.099	2
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 75 70\rangle, -\langle 70 80\rangle, \langle 10 -10\rangle]_s$	81.052	2
		CS	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 85 70\rangle, -\langle 70 90\rangle, \langle 85 65\rangle]_s$	71.840	2
		SS	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 85 75\rangle, -\langle 85 90\rangle, \langle 90 85\rangle]_s$	62.745	2
	0.1	CF	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 35 40\rangle, -\langle 45 45\rangle]_s$	28.322	3
		CC	$[\langle 90 70\rangle, -\langle 65 55\rangle, \langle 35 15\rangle, -\langle 75 65\rangle]_s$	56.160	2
		CS	$[\langle 85 80\rangle, -\langle 70 55\rangle, \langle 45 25\rangle, -\langle 90 75\rangle]_s$	51.476	4
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 60 65\rangle, \langle 85 70\rangle, \langle 0 5\rangle]_s$	45.719	2
	0.15	CF	$[\langle 70 75\rangle, -\langle 50 60\rangle, \langle 45 45\rangle, \langle 50 40\rangle]_s$	19.766	3
		CC	$[\langle 75 70\rangle, -\langle 65 50\rangle, \langle 50 40\rangle, \langle 45 45\rangle]_s$	40.165	3
		CS	$[\langle 80 65\rangle, -\langle 75 60\rangle, \langle 60 40\rangle, -\langle 25 45\rangle]_s$	37.332	3
		SS	$[-\langle 85 75\rangle, \langle 65 55\rangle, -\langle 55 40\rangle, -\langle 55 40\rangle]_s$	35.414	3

Tableau 6.11: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 1, $b/L = 0.1$).

Mode	h/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.01	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.493	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.229	2
		CS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.319	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.806	2
	0.02	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.493	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.230	3
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.319	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.806	2
	0.03	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.493	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.230	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.319	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	9.806	2
2	0.01	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	21.893	2
		CC	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 90 85\rangle, -\langle 85 90\rangle]_s$	60.601	2
		CS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	49.644	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	39.225	2
	0.02	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	21.893	2
		CC	$[-\langle 85 85\rangle, \langle 80 80\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	60.418	3
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	49.644	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	39.225	4
	0.03	CF	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	21.893	3
		CC	$[\langle 90 80\rangle, -\langle 90 75\rangle, -\langle 90 85\rangle, \langle 80 90\rangle]_s$	60.198	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	49.644	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	39.225	2
3	0.01	CF	$[\langle 65 75\rangle, -\langle 55 55\rangle, -\langle 60 60\rangle, \langle 35 25\rangle]_s$	46.793	2
		CC	$[-\langle 80 65\rangle, \langle 60 50\rangle, \langle 70 55\rangle, -\langle 5 25\rangle]_s$	94.122	2
		CS	$[-\langle 85 65\rangle, \langle 65 60\rangle, \langle 80 60\rangle, \langle 85 65\rangle]_s$	87.020	2
		SS	$[\langle 85 70\rangle, -\langle 80 60\rangle, -\langle 80 70\rangle, -\langle 80 65\rangle]_s$	80.734	2
	0.02	CF	$[\langle 65 75\rangle, -\langle 55 55\rangle, -\langle 50 60\rangle, \langle 15 30\rangle]_s$	46.292	4
		CC	$[-\langle 80 65\rangle, \langle 60 50\rangle, \langle 65 50\rangle, \langle 65 60\rangle]_s$	93.135	3
		CS	$[-\langle 80 65\rangle, \langle 75 60\rangle, \langle 75 60\rangle, \langle 40 60\rangle]_s$	87.010	5
		SS	$[\langle 85 70\rangle, -\langle 70 65\rangle, -\langle 85 65\rangle, -\langle 80 70\rangle]_s$	80.046	2
	0.03	CF	$[\langle 70 70\rangle, -\langle 50 55\rangle, -\langle 55 60\rangle, \langle 45 35\rangle]_s$	45.504	3
		CC	$[\langle 80 65\rangle, -\langle 50 50\rangle, -\langle 70 50\rangle, \langle 10 25\rangle]_s$	91.294	2
		CS	$[-\langle 85 65\rangle, \langle 60 60\rangle, \langle 80 60\rangle, -\langle 55 35\rangle]_s$	85.267	2
		SS	$[-\langle 85 70\rangle, \langle 75 60\rangle, \langle 75 65\rangle, \langle 90 70\rangle]_s$	79.480	2

Tableau 6.12: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air (matériau 2, $b/L = 0.1$).

Mode	h/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.01	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.511	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.335	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.853	3
	0.02	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	3.511	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.336	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	9.853	2
	0.03	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	3.511	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.335	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[(90 90), -(90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	9.853	2
2	0.01	CF	$[(90 85), -(85 65), (75 85), (70 90)]_s$	21.193	3
		CC	$[-(85 80), (75 65), -(75 80), (10 -10)]_s$	56.249	2
		CS	$[(90 80), -(85 70), (90 70), -(85 85)]_s$	47.699	2
		SS	$[(90 85), -(85 75), (80 80), (85 80)]_s$	38.667	3
	0.02	CF	$[(90 85), -(85 65), (75 85), (70 90)]_s$	21.185	3
		CC	$[-(85 80), (75 65), -(70 80), -(0 10)]_s$	56.053	2
		CS	$[-(90 80), (85 65), -(75 90), -(80 90)]_s$	47.528	2
		SS	$[-(90 85), (85 75), -(80 80), -(80 80)]_s$	38.663	3
	0.03	CF	$[-(90 85), (85 65), -(70 90), -(85 80)]_s$	21.161	3
		CC	$[(85 80), -(70 65), (65 85), (0 10)]_s$	55.525	2
		CS	$[(90 80), -(85 65), (70 90), (90 90)]_s$	47.447	3
		SS	$[-(90 85), (85 75), -(80 80), -(85 75)]_s$	38.655	3
3	0.01	CF	$[(75 75), -(50 55), (45 40), (45 35)]_s$	41.674	3
		CC	$[(70 60), -(70 60), (10 0), -(80 85)]_s$	84.107	5
		CS	$[(90 70), -(55 60), (55 35), -(40 60)]_s$	77.592	2
		SS	$[(90 70), -(50 60), (0 15), -(85 75)]_s$	71.206	3
	0.02	CF	$[-(75 75), (50 55), -(45 40), -(45 40)]_s$	41.102	3
		CC	$[-(65 60), (75 60), -(10 5), (80 85)]_s$	82.482	3
		CS	$[(85 70), -(60 60), (55 35), -(35 55)]_s$	77.434	4
		SS	$[-(90 70), (50 60), -(5 15), (85 65)]_s$	70.957	2
	0.03	CF	$[-(70 75), (55 55), -(40 35), (40 55)]_s$	40.958	3
		CC	$[(65 60), -(75 60), (5 -5), -(70 80)]_s$	81.898	3
		CS	$[-(85 70), (55 60), -(50 30), (35 55)]_s$	76.387	3
		SS	$[(90 70), -(50 60), (10 20), -(80 70)]_s$	70.669	2

Tableau 6.13: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv avec huit couches dans l'air (matériau 3, $b/L = 0.1$).

Mode	h/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.01	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.512	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.348	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.401	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	9.858	2
	0.02	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.512	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.348	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.401	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	9.858	2
	0.03	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.512	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.348	4
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.401	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	9.858	2
2	0.01	CF	$[-\langle 85 85\rangle, \langle 75 75\rangle, -\langle 80 80\rangle, \langle 85 90\rangle]_s$	21.100	4
		CC	$[\langle 85 80\rangle, -\langle 70 65\rangle, \langle 70 85\rangle, \langle 0 20\rangle]_s$	55.200	4
		CS	$[\langle 90 80\rangle, -\langle 85 65\rangle, \langle 70 90\rangle, \langle -5 10\rangle]_s$	47.116	2
		SS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 85 75\rangle, -\langle 85 75\rangle, -\langle 70 75\rangle]_s$	38.571	5
	0.02	CF	$[-\langle 85 85\rangle, \langle 75 70\rangle, -\langle 85 85\rangle, -\langle 80 90\rangle]_s$	20.960	3
		CC	$[-\langle 85 80\rangle, \langle 75 60\rangle, -\langle 70 85\rangle, \langle 5 -15\rangle]_s$	54.795	3
		CS	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 80 65\rangle, -\langle 70 90\rangle, -\langle 70 90\rangle]_s$	46.627	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 45 25\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 70\rangle]_s$	33.300	6
	0.03	CF	$[\langle 85 85\rangle, -\langle 75 70\rangle, \langle 85 85\rangle, \langle 75 90\rangle]_s$	20.953	4
		CC	$[-\langle 85 80\rangle, \langle 55 70\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 0 20\rangle]_s$	54.000	3
		CS	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 80 65\rangle, -\langle 70 85\rangle, -\langle 75 90\rangle]_s$	46.479	2
		SS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 80 75\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	38.483	10
3	0.01	CF	$[\langle 75 70\rangle, -\langle 55 65\rangle, \langle 45 45\rangle, -\langle 40 45\rangle]_s$	40.682	4
		CC	$[\langle 85 90\rangle, -\langle 75 90\rangle, \langle 85 90\rangle, \langle 85 85\rangle]_s$	60.977	3
		CS	$[-\langle 75 75\rangle, \langle 75 55\rangle, -\langle 55 35\rangle, \langle 30 50\rangle]_s$	76.059	3
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 70 50\rangle, \langle 45 30\rangle, \langle 75 90\rangle]_s$	71.892	4
	0.02	CF	$[\langle 70 75\rangle, -\langle 60 60\rangle, \langle 50 40\rangle, -\langle 35 50\rangle]_s$	40.264	3
		CC	$[-\langle 85 90\rangle, \langle 75 90\rangle, -\langle 85 90\rangle, -\langle 85 85\rangle]_s$	60.976	3
		CS	$[-\langle 80 70\rangle, \langle 70 60\rangle, -\langle 55 35\rangle, \langle 30 50\rangle]_s$	75.874	3
		SS	$[-\langle 90 75\rangle, \langle 65 55\rangle, -\langle 50 30\rangle, \langle 10 30\rangle]_s$	71.527	3
	0.03	CF	$[-\langle 70 75\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 45 40\rangle, \langle 35 55\rangle]_s$	39.999	5
		CC	$[\langle 70 60\rangle, -\langle 70 60\rangle, -\langle 0 10\rangle, -\langle 70 75\rangle]_s$	81.304	3
		CS	$[\langle 85 65\rangle, -\langle 65 60\rangle, \langle 45 25\rangle, -\langle 30 50\rangle]_s$	75.436	5
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 70 50\rangle, \langle 55 35\rangle, \langle 50 30\rangle]_s$	70.930	4

Tableau 6.14: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau (matériau 1, $b/L = 0.1$).

Mode	h/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.01	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	1.343	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	8.546	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	5.890	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.770	3
	0.02	CF	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	1.774	3
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	11.288	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	7.779	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	4.980	2
	0.03	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	2.046	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	13.019	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	8.972	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	5.743	2
2	0.01	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	8.417	3
		CC	$[\langle 85 85\rangle, -\langle 80 75\rangle, \langle 90 85\rangle, \langle 90 85\rangle]_s$	22.943	2
		CS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 85 90\rangle, \langle 85 75\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	18.948	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.080	2
	0.02	CF	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	11.080	4
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 85 90\rangle, \langle 85 85\rangle]_s$	30.113	2
		CS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 85 85\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	24.891	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	19.918	2
	0.03	CF	$[\langle 90 85\rangle, -\langle 90 75\rangle, \langle 90 85\rangle, \langle 85 85\rangle]_s$	12.697	2
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 85 75\rangle, \langle 65 85\rangle]_s$	34.278	3
		CS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 85 85\rangle, -\langle 90 80\rangle]_s$	28.703	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	22.956	2
3	0.01	CF	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 15 15\rangle, -\langle 85 65\rangle]_s$	19.309	2
		CC	$[-\langle 90 70\rangle, \langle 70 60\rangle, -\langle 75 75\rangle, -\langle 30 10\rangle]_s$	38.452	2
		CS	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 75 60\rangle, \langle 85 70\rangle, -\langle 35 35\rangle]_s$	35.342	3
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 80 65\rangle, \langle 85 75\rangle, -\langle 85 70\rangle]_s$	31.466	2
	0.02	CF	$[-\langle 80 75\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 15 20\rangle, \langle 85 65\rangle]_s$	24.734	2
		CC	$[-\langle 90 70\rangle, \langle 60 60\rangle, -\langle 0 20\rangle, -\langle 60 75\rangle]_s$	49.004	2
		CS	$[-\langle 80 75\rangle, \langle 80 60\rangle, \langle 85 65\rangle, -\langle 40 20\rangle]_s$	45.373	3
		SS	$[-\langle 90 75\rangle, \langle 80 60\rangle, -\langle 65 85\rangle, -\langle 5 5\rangle]_s$	40.702	2
	0.03	CF	$[-\langle 80 75\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 30 25\rangle, \langle 70 65\rangle]_s$	27.991	2
		CC	$[-\langle 90 70\rangle, \langle 60 55\rangle, -\langle 25 10\rangle, \langle 80 65\rangle]_s$	55.216	2
		CS	$[-\langle 80 75\rangle, \langle 70 60\rangle, \langle 85 65\rangle, -\langle 40 20\rangle]_s$	50.789	3
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 65 65\rangle, \langle 85 70\rangle, \langle 0 10\rangle]_s$	45.876	2

Tableau 6.15: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv avec huit couches dans l'eau (matériau 2, $b/L = 0.1$).

Mode	h/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.01	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	1.606	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	10.218	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	7.042	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	4.507	4
	0.02	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	2.063	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	13.130	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.048	2
		SS	$[-(90 90), -(90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	5.792	2
	0.03	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	2.332	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	14.838	2
		CS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	10.226	2
		SS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	6.546	2
2	0.01	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	10.063	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	28.166	2
		CS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	22.819	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	18.030	2
	0.02	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	12.931	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	36.193	2
		CS	$[-(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	29.322	3
		SS	$[-(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	23.168	2
	0.03	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	14.614	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	40.903	2
		CS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	33.138	3
		SS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	26.183	2
3	0.01	CF	$[(75 80), -(70 60), -(65 85), -(80 85)]_s$	25.400	3
		CC	$[(90 70), -(75 65), -(85 70), (65 80)]_s$	50.529	2
		CS	$[(90 75), -(85 65), -(90 75), -(90 80)]_s$	45.359	2
		SS	$[-(90 80), (90 80), (90 80), (90 85)]_s$	40.133	2
	0.02	CF	$[-(75 75), (65 65), (70 65), (60 65)]_s$	31.559	4
		CC	$[-(85 70), (75 60), (75 65), (85 65)]_s$	63.138	2
		CS	$[(80 75), -(80 70), -(85 70), -(75 60)]_s$	57.049	3
		SS	$[(90 75), -(90 75), -(90 75), -(85 85)]_s$	50.854	2
	0.03	CF	$[(75 75), -(60 60), -(60 65), -(85 65)]_s$	34.511	2
		CC	$[(85 70), -(60 60), -(80 60), -(80 65)]_s$	69.031	2
		CS	$[-(80 75), (80 60), (80 70), (90 70)]_s$	63.252	3
		SS	$[-(90 75), (80 70), (90 75), -(85 90)]_s$	56.574	2

Tableau 6.16: Effet de rapport épaisseur-longueur sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRV avec huit couches dans l'eau (matériau 3, $b/L = 0.1$).

Mode	h/L	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	0.01	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	1.631	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	10.378	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	7.152	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	4.578	2
	0.02	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	2.092	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	13.312	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.174	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	5.873	2
	0.03	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	2.362	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.025	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	10.354	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	6.628	2
2	0.01	CF	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 85 85\rangle, \langle 85 90\rangle]_s$	10.023	2
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 90 75\rangle, \langle 85 70\rangle]_s$	27.194	2
		CS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 90 75\rangle, \langle 85 90\rangle]_s$	22.796	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 85\rangle, -\langle 85 80\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	18.248	3
	0.02	CF	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 90 80\rangle, -\langle 85 90\rangle]_s$	12.727	2
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 85 65\rangle, -\langle 70 90\rangle, \langle 15 -5\rangle]_s$	34.433	2
		CS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 75 85\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	28.946	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 85 85\rangle, \langle 80 75\rangle, \langle 80 80\rangle]_s$	23.246	2
	0.03	CF	$[\langle 90 85\rangle, -\langle 85 70\rangle, \langle 75 85\rangle, \langle 80 85\rangle]_s$	14.376	3
		CC	$[\langle 85 80\rangle, -\langle 70 75\rangle, \langle 70 90\rangle, \langle 0 20\rangle]_s$	38.452	3
		CS	$[\langle 90 85\rangle, -\langle 85 70\rangle, \langle 70 85\rangle, \langle 70 85\rangle]_s$	32.309	3
		SS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 85 80\rangle, -\langle 80 90\rangle, -\langle 75 85\rangle]_s$	26.241	5
3	0.01	CF	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 60 60\rangle, -\langle 35 30\rangle, \langle 65 75\rangle]_s$	23.011	2
		CC	$[-\langle 90 70\rangle, \langle 65 60\rangle, -\langle 25 10\rangle, -\langle 75 65\rangle]_s$	45.018	2
		CS	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 75 55\rangle, -\langle 0 20\rangle, \langle 85 75\rangle]_s$	41.205	3
		SS	$[-\langle 90 75\rangle, \langle 65 70\rangle, -\langle 85 70\rangle, \langle 5 -10\rangle]_s$	36.803	2
	0.02	CF	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 35 40\rangle, -\langle 45 45\rangle]_s$	28.322	3
		CC	$[\langle 90 70\rangle, -\langle 65 55\rangle, \langle 35 15\rangle, -\langle 75 65\rangle]_s$	56.160	2
		CS	$[\langle 85 80\rangle, -\langle 70 55\rangle, \langle 45 25\rangle, -\langle 90 75\rangle]_s$	51.476	4
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 60 65\rangle, \langle 85 70\rangle, \langle 0 5\rangle]_s$	45.719	2
	0.03	CF	$[-\langle 75 80\rangle, \langle 60 60\rangle, -\langle 45 45\rangle, \langle 45 45\rangle]_s$	30.605	3
		CC	$[\langle 90 70\rangle, -\langle 65 55\rangle, \langle 50 30\rangle, -\langle 10 25\rangle]_s$	62.051	2
		CS	$[\langle 80 80\rangle, -\langle 70 55\rangle, \langle 45 30\rangle, -\langle 90 70\rangle]_s$	56.811	4
		SS	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 70 55\rangle, -\langle 0 10\rangle, \langle 85 90\rangle]_s$	50.547	5

VI.3.2.3. Influence du nombre de couches

Les tableaux 6.17–6.22 représentent l'influence du nombre de couches K sur les solutions optimales convergées pour les trois modes d'une poutre SCRIV dans l'air et dans l'eau. Les trois matériaux sont utilisés. Le rapport d'épaisseur-longueur est 0.02 et le rapport de largeur-longueur est 0.1.

Les fréquences fondamentales optimales sont identiques pour les différents nombres de couches. En effet, le format de fibre $\langle 90^\circ | 90^\circ \rangle$ constitue toutes les séquences d'empilement optimales dans les Tableaux 6.17–6.22. Néanmoins, les fréquences optimales pour le deuxième et le troisième mode augmentent en augmentant le nombre de couches. Il s'agit d'une augmentation considérable en passant de 4 couches à 8 couches puis d'une augmentation moins importante en passant de 8 couches à 12 couches. Les couches externes ont une importance majeure pour déterminer les fréquences optimales.

VI.3.2.4. Influence du type de matériau

Nous avons étudié l'effet du type de matériau sur les poutres symétriques SCRIV avec 8 couches dans l'air et dans l'eau. Nous avons pris un rapport d'épaisseur-longueur de 0.02 et un rapport de largeur-longueur de 0,1. Les solutions optimales convergées pour les trois premiers modes sont présentées dans les tableaux 6.23–6.24.

Le tableau 6.23 montre que les fréquences optimales pour le deuxième et le troisième mode augmentent lorsque le rapport E_2/E_1 augmente. En effet, la rigidité est maximale pour un rapport E_2/E_1 maximale. Les fréquences fondamentales optimales pour le tableau 6.24 sont maximales pour un rapport ρ_f/ρ_s minimal. Nous constatons l'existence d'un format de fibre dominant pour le premier mode. Concernant le deuxième et le troisième mode, le changement du type de matériau affecte les séquences d'empilement optimales. Nous observons également que le matériau ayant une densité moindre est le plus affecté par l'eau (le moindre rapport $\frac{\Omega_{opt,eau}}{\Omega_{opt,air}}$).

Tableau 6.17: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRV dans l'air (matériau 1, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	K	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	4	CF	$[(90 90), (90 90)]_s$	3.493	2
		CC	$[(90 90), (90 90)]_s$	22.229	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	15.319	2
		SS	$[(90 90), (90 90)]_s$	9.806	2
	8	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.493	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.229	3
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.319	3
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.806	2
	12	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.493	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	22.229	2
		CS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.319	3
		SS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	9.806	2
2	4	CF	$[(90 90), -(90 90)]_s$	21.893	2
		CC	$[-(85 85), (70 80)]_s$	59.644	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	49.644	3
		SS	$[(90 90), (90 90)]_s$	39.225	3
	8	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	21.893	2
		CC	$[-(85 85), (80 80), -(90 90), (90 90)]_s$	60.417	3
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	49.644	3
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	39.225	2
	12	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	21.893	3
		CC	$[-(85 85), (80 80), (90 90), -(85 85), -(85 80), -(80 90)]_s$	60.436	2
		CS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	49.644	3
		SS	$[-(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90), (90 90), (90 90)]_s$	39.225	2
3	4	CF	$[(70 70), -(50 55)]_s$	43.135	4
		CC	$[-(80 65), (50 45)]_s$	87.906	2
		CS	$[-(85 65), (65 55)]_s$	79.442	2
		SS	$[(85 70), -(65 60)]_s$	76.100	2
	8	CF	$[(65 75), -(55 55), -(50 60), (15 30)]_s$	46.292	4
		CC	$[-(80 65), (60 50), (65 50), (65 60)]_s$	93.135	3
		CS	$[-(80 65), (75 60), (75 60), (40 60)]_s$	87.010	5
		SS	$[(85 70), -(70 65), -(85 65), -(80 70)]_s$	80.046	2
	12	CF	$[(80 60), -(55 55), -(55 65), (60 75), (55 75), -(60 70)]_s$	46.516	2
		CC	$[-(80 65), (60 50), (75 55), -(75 60), -(70 65), -(75 60)]_s$	93.735	2
		CS	$[-(85 65), (65 60), (80 65), -(75 55), (90 70), -(60 40)]_s$	87.485	2
		SS	$[-(85 70), (80 60), (80 70), -(80 65), -(75 75), -(75 70)]_s$	80.347	2

Tableau 6.18: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv dans l'air (matériau 2, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	K	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	4	CF	$[(90 90), (90 90)]_s$	3.510	2
		CC	$[(90 90), (90 90)]_s$	22.335	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[-(90 90), -(90 90)]_s$	9.853	2
	8	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	3.510	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.335	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	2
		SS	$[(90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	9.853	2
	12	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.510	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.335	2
		CS	$[(90 90), -(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.392	3
		SS	$[(90 90), -(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.853	2
2	4	CF	$[-(90 90), -(45 65)]_s$	20.811	4
		CC	$[-(85 80), (65 50)]_s$	51.881	2
		CS	$[-(90 80), (65 60)]_s$	45.024	2
		SS	$[(90 90), -(20 35)]_s$	36.975	4
	8	CF	$[(90 85), -(85 65), (75 85), (70 90)]_s$	21.185	3
		CC	$[-(85 80), (75 65), -(70 80), -(0 10)]_s$	56.053	2
		CS	$[-(90 80), (85 65), -(75 90), -(80 90)]_s$	47.528	2
		SS	$[-(90 85), (85 75), -(80 80), -(80 80)]_s$	38.663	3
	12	CF	$[(90 80), -(85 65), (80 90), (90 85), (85 85), (85 90)]_s$	21.246	2
		CC	$[-(85 80), (80 65), -(80 75), (85 70), -(75 80), -(5 15)]_s$	56.385	2
		CS	$[-(90 80), (85 70), -(85 75), (90 80), -(90 75), (65 85)]_s$	47.771	2
		SS	$[-(90 90), (85 80), -(85 75), -(85 85), -(90 90), -(90 85)]_s$	38.848	5
3	4	CF	$[-(75 70), (50 60)]_s$	35.768	4
		CC	$[-(80 60), (70 70)]_s$	72.360	3
		CS	$[(85 65), -(65 60)]_s$	66.909	4
		SS	$[-(90 70), (40 60)]_s$	61.209	2
	8	CF	$[-(75 75), (50 55), -(45 40), -(45 40)]_s$	41.102	3
		CC	$[-(65 60), (75 60), -(10 5), (80 85)]_s$	82.482	3
		CS	$[(85 70), -(60 60), (55 35), -(35 55)]_s$	77.434	4
		SS	$[-(90 70), (50 60), -(5 15), (85 65)]_s$	70.957	2
	12	CF	$[-(80 70), (60 55), -(55 35), (55 70), -(25 30), (25 20)]_s$	42.235	3
		CC	$[(90 90), -(85 90), (85 90), (85 90), -(90 90), (90 90)]_s$	61.484	2
		CS	$[(90 70), -(55 60), (45 25), -(85 70), (75 55), -(85 65)]_s$	78.112	2
		SS	$[(90 70), -(55 60), (85 65), (5 15), -(80 65), -(75 60)]_s$	71.876	2

Tableau 6.19: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRV dans l'air (matériau 3, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	K	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	4	CF	$[(90 90), (90 90)]_s$	3.512	2
		CC	$[-(90 90), (90 90)]_s$	22.348	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	15.401	2
		SS	$[(90 90), (90 90)]_s$	9.858	2
	8	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.512	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	22.348	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.401	2
		SS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	9.858	2
	12	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	3.512	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	22.348	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	15.401	2
		SS	$[(90 90), -(90 90), -(90 90), -(90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	9.858	2
2	4	CF	$[-(90 80), (45 65)]_s$	19.661	2
		CC	$[-(85 80), (65 50)]_s$	48.765	2
		CS	$[-(90 80), (60 60)]_s$	42.744	2
		SS	$[(90 90), -(35 55)]_s$	36.033	2
	8	CF	$[-(85 85), (75 70), -(85 85), -(80 90)]_s$	20.959	3
		CC	$[-(85 80), (75 60), -(70 85), (5 -15)]_s$	54.795	3
		CS	$[-(90 80), (80 65), -(70 90), -(70 90)]_s$	46.627	2
		SS	$[(90 90), -(45 25), -(90 90), (90 70)]_s$	33.300	6
	12	CF	$[-(90 85), (80 65), -(75 90), -(85 85), -(85 85), -(90 80)]_s$	20.964	7
		CC	$[-(85 80), (75 65), -(80 75), (90 70), (5 -15), -(65 45)]_s$	55.347	3
		CS	$[-(90 80), (85 65), -(75 85), (90 75), -(70 85), (5 0)]_s$	47.013	2
		SS	$[(85 90), -(80 75), (90 75), (85 80), (90 80), (90 80)]_s$	38.337	5
3	4	CF	$[(75 75), -(50 55)]_s$	32.620	3
		CC	$[-(80 60), (70 70)]_s$	67.950	5
		CS	$[(85 65), -(65 65)]_s$	64.052	3
		SS	$[(90 70), -(40 60)]_s$	59.051	3
	8	CF	$[(70 75), -(60 60), (50 40), -(35 50)]_s$	40.264	3
		CC	$[-(85 90), (75 90), -(85 90), -(85 85)]_s$	60.976	3
		CS	$[-(80 70), (70 60), -(55 35), (30 50)]_s$	75.874	3
		SS	$[-(90 75), (65 55), -(50 30), (10 30)]_s$	71.527	3
	12	CF	$[(80 75), -(60 60), (45 45), -(35 50), (45 30), (45 30)]_s$	41.682	3
		CC	$[-(85 90), (75 90), -(80 90), -(90 90), -(90 90), -(90 85)]_s$	60.975	3
		CS	$[-(80 85), (70 60), -(55 50), (50 40), -(35 50), -(40 45)]_s$	77.465	3
		SS	$[-(90 75), (70 55), -(75 60), -(15 30), (85 65), (85 70)]_s$	71.836	3

Tableau 6.20: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv dans l'eau (matériau 1, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	K	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	4	CF	$[(90 90), (90 90)]_s$	2.063	2
		CC	$[(90 90), (90 90)]_s$	13.130	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	9.048	2
		SS	$[(90 90), (90 90)]_s$	5.792	2
	8	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	2.063	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	13.130	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.048	2
		SS	$[-(90 90), -(90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	5.792	2
	12	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	2.063	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	13.130	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.048	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	5.792	2
2	4	CF	$[(90 90), -(90 90)]_s$	12.931	3
		CC	$[(90 90), (90 90)]_s$	36.192	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	29.322	2
		SS	$[(90 90), (90 90)]_s$	23.168	2
	8	CF	$[(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	12.931	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	36.192	2
		CS	$[-(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	29.322	3
		SS	$[-(90 90), (90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	23.168	2
	12	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90), (90 90)]_s$	12.931	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	36.192	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90), (90 90), (90 90)]_s$	29.322	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90), -(90 90), -(90 90)]_s$	23.168	2
3	4	CF	$[-(70 80), (70 55)]_s$	29.612	3
		CC	$[-(85 70), (70 55)]_s$	60.269	2
		CS	$[(85 75), -(75 55)]_s$	53.176	3
		SS	$[(90 75), -(75 75)]_s$	49.443	2
	8	CF	$[-(75 75), (65 65), (70 65), (60 65)]_s$	31.559	4
		CC	$[-(85 70), (75 60), (75 65), (85 65)]_s$	63.138	2
		CS	$[(80 75), -(80 70), -(85 70), -(75 60)]_s$	57.049	3
		SS	$[(90 75), -(90 75), -(90 75), -(85 85)]_s$	50.854	2
	12	CF	$[-(65 85), (75 55), -(85 65), (60 75), (60 80), -(80 60)]_s$	31.450	2
		CC	$[-(85 70), (75 60), (85 65), -(75 70), -(65 75), -(75 70)]_s$	63.227	2
		CS	$[(90 70), -(85 65), -(90 70), (70 80), -(85 75), (85 65)]_s$	57.388	2
		SS	$[(90 75), -(90 75), -(90 75), (90 75), -(90 80), -(90 75)]_s$	50.937	2

Tableau 6.21: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv dans l'eau (matériau 2, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	K	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	4	CF	$[(90 90), (90 90)]_s$	1.774	2
		CC	$[(90 90), (90 90)]_s$	11.288	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	7.779	2
		SS	$[-(90 90), (90 90)]_s$	4.980	2
	8	CF	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	1.774	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	11.288	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	7.779	3
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	4.980	2
	12	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	1.774	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	11.288	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	7.779	3
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	4.980	2
2	4	CF	$[-(90 90), (90 75)]_s$	11.010	3
		CC	$[-(90 80), (85 65)]_s$	28.664	2
		CS	$[-(90 85), (80 70)]_s$	24.731	2
		SS	$[-(90 90), (90 90)]_s$	19.918	2
	8	CF	$[(90 90), -(90 85), (90 75), -(90 90)]_s$	11.080	4
		CC	$[-(90 80), (90 70), -(85 90), (85 85)]_s$	30.113	2
		CS	$[-(90 85), (90 75), -(85 85), -(90 85)]_s$	24.891	2
		SS	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	19.918	2
	12	CF	$[(90 90), (90 85), -(90 80), (90 85), -(90 85), (85 90)]_s$	11.086	3
		CC	$[-(90 80), (90 70), -(85 90), (90 80), -(90 75), (65 85)]_s$	30.144	3
		CS	$[-(90 85), (90 80), -(90 80), (85 85), -(90 90), -(80 90)]_s$	24.985	2
		SS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	19.918	2
3	4	CF	$[-(80 75), (50 55)]_s$	21.191	2
		CC	$[-(90 70), (50 50)]_s$	43.680	2
		CS	$[-(90 70), (60 60)]_s$	39.435	2
		SS	$[(90 75), -(40 60)]_s$	37.270	2
	8	CF	$[-(80 75), (55 60), -(15 20), (85 65)]_s$	24.734	2
		CC	$[-(90 70), (60 60), -(0 20), -(60 75)]_s$	49.004	2
		CS	$[-(80 75), (80 60), (85 65), -(40 20)]_s$	45.373	3
		SS	$[-(90 75), (80 60), -(65 85), -(5 5)]_s$	40.702	2
	12	CF	$[-(80 75), (60 60), -(5 20), -(60 80), (75 65), (90 80)]_s$	24.391	4
		CC	$[-(90 70), (65 60), -(70 75), -(5 25), (80 65), (85 65)]_s$	49.763	2
		CS	$[-(80 75), (80 60), (80 75), -(75 65), -(0 15), -(50 30)]_s$	45.911	3
		SS	$[-(90 75), (80 65), -(75 75), (85 70), (85 70), -(0 15)]_s$	41.044	2

Tableau 6.22: Effet du nombre de couches sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRv dans l'eau (matériau 3, $h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	K	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	4	CF	$[(90 90), (90 90)]_s$	2.092	2
		CC	$[(90 90), (90 90)]_s$	13.311	2
		CS	$[(90 90), (90 90)]_s$	9.173	2
		SS	$[(90 90), (90 90)]_s$	5.872	2
	8	CF	$[(90 90), (90 90), (90 90), -(90 90)]_s$	2.092	2
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	13.311	2
		CS	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.173	2
		SS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	5.872	2
	12	CF	$[(90 90), -(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	2.092	3
		CC	$[(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	13.311	2
		CS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	9.173	3
		SS	$[-(90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90), (90 90)]_s$	5.872	2
2	4	CF	$[-(90 80), (85 65)]_s$	12.272	2
		CC	$[-(90 80), (75 60)]_s$	32.675	2
		CS	$[-(90 85), (80 60)]_s$	28.812	2
		SS	$[-(90 90), (15 35)]_s$	22.026	4
	8	CF	$[-(90 80), (90 70), -(90 80), -(85 90)]_s$	12.727	2
		CC	$[-(90 80), (85 65), -(70 90), (15 -5)]_s$	34.433	2
		CS	$[-(90 85), (90 70), -(75 85), -(90 85)]_s$	28.946	2
		SS	$[-(90 90), -(85 85), (80 75), (80 80)]_s$	23.246	3
	12	CF	$[-(90 80), (90 70), -(90 80), -(90 80), (90 80), -(75 90)]_s$	12.739	2
		CC	$[-(90 80), (85 70), -(80 80), (90 70), -(75 90), (10 -5)]_s$	34.755	2
		CS	$[-(90 85), (90 70), -(80 85), -(90 90), -(90 85), (80 90)]_s$	28.997	2
		SS	$[(90 90), (90 80), -(90 75), -(90 85), (85 90), -(85 90)]_s$	23.304	2
3	4	CF	$[-(80 75), (50 55)]_s$	22.725	3
		CC	$[(80 75), -(55 55)]_s$	47.584	3
		CS	$[(90 70), -(55 60)]_s$	43.138	3
		SS	$[-(90 75), (40 60)]_s$	39.367	2
	8	CF	$[-(80 80), (55 60), -(35 40), -(45 45)]_s$	28.322	3
		CC	$[(90 70), -(65 55), (35 15), -(75 65)]_s$	56.160	2
		CS	$[(85 80), -(70 55), (45 25), -(90 75)]_s$	51.476	4
		SS	$[(90 75), -(60 65), (85 70), (0 5)]_s$	45.719	2
	12	CF	$[-(80 80), (60 60), -(25 35), -(65 75), (65 75), (60 75)]_s$	28.086	2
		CC	$[(90 70), -(60 60), (10 15), (75 60), (70 65), -(70 70)]_s$	55.014	2
		CS	$[(80 85), -(70 55), (80 60), (20 10), -(85 75), -(90 70)]_s$	51.809	4
		SS	$[(90 75), -(70 65), (75 75), (5 15), -(90 70), (85 65)]_s$	46.142	2

Tableau 6.23: Effet des paramètres mécaniques sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'air ($h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	Matériaux	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs
1	1	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.510	3
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.335	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.392	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	9.853	2
	2	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.512	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.348	2
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.401	2
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	9.8583	2
	3	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	3.493	2
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	22.229	3
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	15.319	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.806	2
2	1	CF	$[\langle 90 85\rangle, -\langle 85 65\rangle, \langle 75 85\rangle, \langle 70 90\rangle]_s$	21.185	3
		CC	$[-\langle 85 80\rangle, \langle 75 65\rangle, -\langle 70 80\rangle, -\langle 0 10\rangle]_s$	56.053	2
		CS	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 85 65\rangle, -\langle 75 90\rangle, -\langle 80 90\rangle]_s$	47.528	2
		SS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 85 75\rangle, -\langle 80 80\rangle, -\langle 80 80\rangle]_s$	38.663	3
	2	CF	$[-\langle 85 85\rangle, \langle 75 70\rangle, -\langle 85 85\rangle, -\langle 80 90\rangle]_s$	20.959	3
		CC	$[-\langle 85 80\rangle, \langle 75 60\rangle, -\langle 70 85\rangle, \langle 5 -15\rangle]_s$	54.795	3
		CS	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 80 65\rangle, -\langle 70 90\rangle, -\langle 70 90\rangle]_s$	46.627	2
		SS	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 45 25\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 70\rangle]_s$	33.300	3
	3	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	21.893	2
		CC	$[-\langle 85 85\rangle, \langle 80 80\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	60.417	3
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	49.644	3
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	39.225	2
3	1	CF	$[-\langle 75 75\rangle, \langle 50 55\rangle, -\langle 45 40\rangle, -\langle 45 40\rangle]_s$	41.102	3
		CC	$[-\langle 65 60\rangle, \langle 75 60\rangle, -\langle 10 5\rangle, \langle 80 85\rangle]_s$	82.482	3
		CS	$[\langle 85 70\rangle, -\langle 60 60\rangle, \langle 55 35\rangle, -\langle 35 55\rangle]_s$	77.434	4
		SS	$[-\langle 90 70\rangle, \langle 50 60\rangle, -\langle 5 15\rangle, \langle 85 65\rangle]_s$	70.957	2
	2	CF	$[\langle 70 75\rangle, -\langle 60 60\rangle, \langle 50 40\rangle, -\langle 35 50\rangle]_s$	40.264	3
		CC	$[-\langle 85 90\rangle, \langle 75 90\rangle, -\langle 85 90\rangle, -\langle 85 85\rangle]_s$	60.976	3
		CS	$[-\langle 80 70\rangle, \langle 70 60\rangle, -\langle 55 35\rangle, \langle 30 50\rangle]_s$	75.874	3
		SS	$[-\langle 90 75\rangle, \langle 65 55\rangle, -\langle 50 30\rangle, \langle 10 30\rangle]_s$	71.527	3
	3	CF	$[\langle 65 75\rangle, -\langle 55 55\rangle, -\langle 50 60\rangle, \langle 15 30\rangle]_s$	46.292	4
		CC	$[-\langle 80 65\rangle, \langle 60 50\rangle, \langle 65 50\rangle, \langle 65 60\rangle]_s$	93.135	3
		CS	$[-\langle 80 65\rangle, \langle 75 60\rangle, \langle 75 60\rangle, \langle 40 60\rangle]_s$	87.010	5
		SS	$[\langle 85 70\rangle, -\langle 70 65\rangle, -\langle 85 65\rangle, -\langle 80 70\rangle]_s$	80.046	2

Tableau 6.24: Effet des paramètres mécaniques sur les solutions optimales convergées des trois premiers modes d'une poutre SCRIV avec huit couches dans l'eau ($h/L = 0.02$, $b/L = 0.1$).

Mode	Matériaux	CL	Séquence d'empilement optimale	Ω_{opt}	Nombre de cycles itératifs	$\frac{\Omega_{opt,eau}}{\Omega_{opt,air}}$
1	1	CF	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	1.774	3	0.51
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	11.288	2	0.51
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	7.779	3	0.51
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	4.980	2	0.51
		CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	2.092	2	0.60
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	13.311	2	0.60
	2	CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.173	2	0.60
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	5.872	2	0.60
		CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	2.063	2	0.59
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	13.130	2	0.59
		CS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	9.048	2	0.59
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	5.792	2	0.59
2	1	CF	$[\langle 90 90\rangle, -\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	11.080	4	0.52
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 85 90\rangle, \langle 85 85\rangle]_s$	30.113	2	0.54
		CS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 75\rangle, -\langle 85 85\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	24.891	2	0.52
		SS	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle]_s$	19.918	2	0.52
	2	CF	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 90 80\rangle, -\langle 85 90\rangle]_s$	12.727	2	0.61
		CC	$[-\langle 90 80\rangle, \langle 85 65\rangle, -\langle 70 90\rangle, \langle 15 -5\rangle]_s$	34.433	2	0.63
		CS	$[-\langle 90 85\rangle, \langle 90 70\rangle, -\langle 75 85\rangle, -\langle 90 85\rangle]_s$	28.946	2	0.62
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, -\langle 85 85\rangle, \langle 80 75\rangle, \langle 80 80\rangle]_s$	23.246	3	0.70
	3	CF	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	12.931	2	0.59
		CC	$[\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	36.192	2	0.60
		CS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	29.322	3	0.59
		SS	$[-\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle, -\langle 90 90\rangle, \langle 90 90\rangle]_s$	23.168	2	0.59
3	1	CF	$[-\langle 80 75\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 15 20\rangle, -\langle 85 65\rangle]_s$	24.734	2	0.60
		CC	$[-\langle 90 70\rangle, \langle 60 60\rangle, -\langle 0 20\rangle, -\langle 60 75\rangle]_s$	49.004	2	0.59
		CS	$[-\langle 80 75\rangle, \langle 80 60\rangle, \langle 85 65\rangle, -\langle 40 20\rangle]_s$	45.373	3	0.59
		SS	$[-\langle 90 75\rangle, \langle 80 60\rangle, -\langle 65 85\rangle, -\langle 5 5\rangle]_s$	40.702	2	0.57
	2	CF	$[-\langle 80 80\rangle, \langle 55 60\rangle, -\langle 35 40\rangle, -\langle 45 45\rangle]_s$	28.322	3	0.70
		CC	$[\langle 90 70\rangle, -\langle 65 55\rangle, \langle 35 15\rangle, -\langle 75 65\rangle]_s$	56.160	2	0.92
		CS	$[\langle 85 80\rangle, -\langle 70 55\rangle, \langle 45 25\rangle, -\langle 90 75\rangle]_s$	51.476	4	0.68
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 60 65\rangle, \langle 85 70\rangle, \langle 0 5\rangle]_s$	45.719	2	0.64
	3	CF	$[-\langle 75 75\rangle, \langle 65 65\rangle, \langle 70 65\rangle, \langle 60 65\rangle]_s$	31.559	4	0.68
		CC	$[-\langle 85 70\rangle, \langle 75 60\rangle, \langle 75 65\rangle, \langle 85 65\rangle]_s$	63.138	2	0.68
		CS	$[\langle 80 75\rangle, -\langle 80 70\rangle, -\langle 85 70\rangle, -\langle 75 60\rangle]_s$	57.049	3	0.66
		SS	$[\langle 90 75\rangle, -\langle 90 75\rangle, -\langle 90 75\rangle, -\langle 85 85\rangle]_s$	50.854	2	0.64

Conclusions et perspectives

Les matériaux composites sont très utiles dans les domaines de l'industrie et de l'ingénierie tels que l'aéronautique, la marine, l'automobile, le sport et les loisirs. Ils sont largement utilisés compte tenu des performances qu'ils offrent comme leurs rigidité, leurs résistance à la corrosion ainsi que leurs maniabilité.

Dans cette étude, nous avons étudié pour la première fois la conception optimale des séquences d'empilement des poutres symétriques SCRIV dans l'air et dans l'eau. Cette étude était basée sur la méthode d'optimisation couche par couche. Deux angles d'orientation des fibres sont considérés comme variables de conception dans chaque couche. Nous avons ainsi inclus différents paramètres géométriques et mécaniques et des conditions aux limites. Nous avons utilisé pour le calcul des fréquences la version- p de MEF combinée à la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée à la torsion. Cette étude nous a permis d'obtenir les conclusions suivantes :

- ✓ La convergence rapide et la grande précision de la version- p de MEF font d'elle une excellente méthode de calcul des fréquences.
- ✓ La méthode d'optimisation couche par couche est caractérisée par sa simplicité et sa rapidité.
- ✓ La solution de la méthode d'optimisation couche par couche peut être locale et non globale. Plus on minimise l'incrément des angles d'orientation des fibres, plus on atteint la convergence vers la solution globale.
- ✓ La vibration de la poutre accélère les particules du fluide. Ceci provoque une force d'inertie et une masse ajoutée pour le fluide qui agissent sur la vibration de la structure.
- ✓ Les fréquences optimales augmentent avec l'ajout des contraintes aux limites.
- ✓ Les fréquences à l'état sec sont plus importantes qu'à l'état mouillé, cela est dû à l'effet de la masse ajoutée en cas d'état mouillé.
- ✓ Les fréquences fondamentales optimales dans l'air restent inchangées pour plusieurs paramètres géométriques ($h/L, b/L, N$).
- ✓ Les fréquences fondamentales optimales dans l'eau augmentent en cas d'augmentation de rapport d'épaisseur-longueur h/L et du nombre des couches K . Cependant, ces

fréquences diminuent en cas d'augmentation de rapport de largeur-longueur b/L et de rapport ρ_f/ρ_s .

- ✓ Les fréquences optimales pour le deuxième et le troisième mode dans l'air sont peu affectées par le rapport d'épaisseur-longueur h/L . Elles augmentent en cas d'augmentation du nombre de couches K et elles diminuent en cas d'augmentation de rapport de largeur-longueur b/L .
- ✓ Les fréquences optimales pour le deuxième et le troisième mode dans l'eau diminuent lorsque le rapport de largeur-longueur diminue. Néanmoins, elles augmentent en cas d'augmentation de rapport d'épaisseur-longueur et le nombre de couches K .
- ✓ Les propriétés mécaniques du matériau affectent de manière significative les séquences d'empilement optimales pour le deuxième et le troisième mode.
- ✓ Le matériau avec une densité moindre est le plus affecté en présence d'eau.
- ✓ Il n'existe aucun format de fibre dominant pour les séquences d'empilement optimales de deuxième et le troisième mode. Contrairement au premier mode, le format de fibre $\langle 90^\circ | 90^\circ \rangle$ constitue toutes les séquences d'empilement optimales.

Nous pouvons ainsi proposer plusieurs possibilités intéressantes de poursuite de ce travail :

- ✓ La vibration des poutres SCRIV non linéaire et forcée.
- ✓ Pour optimiser ces résultats, il est possible d'ajouter quelques variables de conception. La hauteur de chaque couche, la fraction volumique de la fibre pour chaque couche, ainsi que le poids d'élément peuvent être des exemples de variables permettant d'atteindre des performances plus intéressantes.

Références bibliographiques

- [1] Abarcar RB, Cuniff P. The vibration of cantilever beams of fiber reinforced material. *Journal of Composite Materials* 1972; 10(6): 504–17.
- [2] Miller AK, Adams DF. An analytic means of determining the flexural and torsional resonant frequencies of generally orthotropic beams. *Journal of Sound and Vibration* 1975; 41: 433–49.
- [3] Teoh LS, Huang CC. The vibration of beams of fibre reinforced material. *Journal of Sound and Vibration* 1977; 51: 467–73.
- [4] Teh KK, Huang CC. The vibrations of generally orthotropic beams, a finite element approach. *Journal of Sound and Vibration* 1979; 62: 195–206.
- [5] Chandrashekhara K, Krishnamurthy K, and Roy S. Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation. *Composite Structures* 1990; 14: 269–79.
- [6] Teboub Y, Hajela P. Free vibration of generally layered composite beams using symbolic computations. *Composite Structures* 1995; 33: 123–34.
- [7] Aydogdu M. Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *International Journal of Mechanical Science* 2005; 47: 1740–55.
- [8] Jun L, Hongxing H, and Rongying S. Dynamic finite element method for generally laminated composite beams. *International Journal of Mechanical Science* 2008; 50: 466–80.
- [9] Pagani A, Carrera E, and Boscolo M, Banerjee JR. Refined dynamic stiffness elements applied to free vibration analysis of generally laminated composite beams with arbitrary boundary conditions. *Composite Structures* 2014; 110: 305–16.
- [10] Kheladi Z, Hamza-Cherif SM, and Ghernaout MEA. Free vibration analysis of variable stiffness laminated composite beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. doi: 10.1080/15376494.2020.1712750
- [11] Kwon Y, Priest E, and Gordis J. Investigation of vibrational characteristics of composite beams with fluid–structure interaction. *Composite Structures* 2013; 105: 269–78.
- [12] Stenius I, Fagerberg L, and Kutteneuler J. Experimental eigenfrequency study of dry and fully wetted rectangular composite and metallic plates by forced vibrations. *Ocean Engineering* 2016; 111: 95–103.
- [13] Hyer MW, Charette RF. Use of curvilinear fiber format in composite structure design. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 1991; 29(6): 1011–15.

- [14] Gürdal Z, Olmedo RA. In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: variable stiffness panel concept. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 1993; 31: 751–58.
- [15] Nagendra S, Kodiyalam S, Davis JE, and Parthasarathy V. Optimization of tow fiber paths for composite design. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 36th structures, structural dynamics and materials conference*. New Orleans, LA; 1995: 1031–41.
- [16] Waldhart C. Analysis of tow-placed, variable-stiffness laminates. MSc thesis. Blacksburg: Virginia Tech 1996.
- [17] Tatting BF. Analysis and design of variable stiffness composite cylinders. PhD Thesis. Virginia Tech 1998.
- [18] Tatting BF, Gürdal Z. Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates 2002. NASA/CR-2002-211919.
- [19] Tatting BF, Gürdal Z. Automated finite element analysis of elastically tailored plates 2003. NASA/CR-2003-212679.
- [20] Gurdal Z, Tatting BF, and Wu CK. Variable stiffness composite panels: effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 2008; 39: 911–22.
- [21] Raju G, Wu Z, Kim BC, and Weaver PM. Prebuckling and buckling analysis of variable angle tow plates with general boundary conditions. *Composite Structures* 2012; 94: 2961–70.
- [22] Akbarzadeh AH, Arian NM, and Pasini D. The role of shear deformation in laminated plates with curvilinear fiber paths and embedded defects. *Composite Structures* 2014; 118: 217–27.
- [23] Yazdani S, Ribeiro P, and Rodrigues JD. A p -version layerwise model for large deflection of composite plates with curvilinear fibers. *Composite Structures* 2014; 108: 181–90.
- [24] Heydarpour Y, Aghdam MM. A hybrid Bézier based multi-step method and differential quadrature for 3D transient response of variable stiffness composite plates. *Composite Structures* 2016; 154: 344–59.
- [25] Guenanou A, Houmat A. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite circular plates with curvilinear fibers. *Science and Engineering of Composite Materials* 2017; 24(1): 111–21.
- [26] Langley PT. Finite element modeling of Tow-Placed variable-stiffness composite laminates. MSc Thesis. Virginia Tech 1999.

- [27] Akhavan H, Ribeiro P. Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers. *Composite Structures* 2011; 93: 3040–47.
- [28] Honda S, Narita Y. Natural frequencies and vibration modes of laminated composite plates reinforced with arbitrary curvilinear fiber shape paths. *Journal of Sound and Vibration* 2012; 331: 180–91.
- [29] Ribeiro P, Akhavan H. Nonlinear vibrations of variable stiffness composite laminated plates. *Composite Structures* 2012; 94: 2424–32.
- [30] Ribeiro P. Nonlinear free periodic vibrations of variable stiffness composite laminated plates. *Nonlinear Dynamics* 2012; 70: 1535–48.
- [31] Houmat A. Nonlinear free vibration of laminated composite rectangular plates with curvilinear fibers. *Composite Structures* 2013; 106: 211–24.
- [32] Yazdani S, Ribeiro P. Geometrically non-linear static analysis of unsymmetric composite plates with curvilinear fibres: p -version layerwise approach. *Composite Structures* 2014; 118: 74–85.
- [33] Houmat A. Nonlinear free vibration analysis of variable stiffness symmetric skew laminates. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 2015; 50: 70–5.
- [34] Heydarpour Y, Aghdam MM. Response of VSCL plates under moving load using a mixed integral-differential quadrature and novel NURBS based multi-step method. *Composite Part B Engineering* 2018; 140: 260–80.
- [35] Houmat A. Three-dimensional free vibration analysis of variable stiffness laminated composite rectangular plates. *Composite Structures* 2018; 194: 398–412.
- [36] Bendahmane A, Hamza-Cherif SM, and Ouissi MN. Free vibration analysis of variable stiffness composite laminate (VSCL) plates coupled with fluid. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. doi:10.1080/15376494.2018.1553257
- [37] Bishop RED, Price WG. *Hydroelasticity of Ships*. Cambridge University Press, UK 1979.
- [38] Wu YS. *Hydroelasticity of Floating Bodies*. PhD Thesis, Brunel University, London, UK 1984.
- [39] Price WG, Wu YS. Structural responses of a SWATH of multi-hulled vessel traveling in waves. In: *International Conference on SWATH Ships and Advanced Multi-hulled Vessels*. RINA, London 1985.
- [40] Wu M, Moan T. Linear and nonlinear hydroelastic analysis of high-speed vessels. *Journal of Ship Research* 1996; 40(2): 149–63.

- [41] Xia JZ, Wang Z, and Jensen JJ. Non-linear wave loads and ship responses by a time-domain strip theory. *Marine Structures* 1998; 11(3): 101–23.
- [42] Wu YS, Maeda H, and Kinoshita T. The second order hydrodynamic actions on a flexible body. *Journal of Institute of Industrial Science* 1997; 49(4): 8–9.
- [43] Chen XJ, Wu Y, Cui W, and Tang X. Non-linear hydroelastic analysis of a moored floating body. *Ocean Engineering* 2003; 30(8): 965–1003.
- [44] Tian C. Study on the Theory and Applications of Nonlinear Hydroelasticity of Ships with Forward Speed. PhD thesis. Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China 2006.
- [45] Hu JJ, Wu YS, Tian C, Wang XL, and Zhang F. Hydroelastic analysis and model tests on the structural response and fatigue behaviors of an ultra-large ore Carrier in waves. *Journal of Engineering for the Maritime Environment* 2012; 226(2): 135–55.
- [46] Malenica S, Derbanne Q. Hydro structural issues in the design of ultra large container ships. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 2013; 6(4): 323–47.
- [47] Senjanović I, Vladimir N, Tomić M, Hadžić N, and Malenica S. Global hydroelastic analysis of ultra large container ships by improved beam structural model. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 2014; 6(4): 1041–63.
- [48] Senjanović I, Vladimir N, Tomić M, Hadžić N, and Malenica S. Some aspects of structural modelling and restoring stiffness in hydroelastic analysis of large container ships. *Ships and Offshore Structures* 2014; 9(2): 199–217.
- [49] Lee KH, Lee PS. Nonlinear hydrostatic analysis of flexible floating structures. *Applied Ocean Research* 2016; 59: 165–82.
- [50] Hamamoto T, Suzuki A, Tsujioka N, and Fujita KI. 3D BEM-FEM hybrid hydroelastic analysis of module linked large floating structures subjected to regular waves. In: *Proceedings of The Eighth International Offshore and Polar Engineering Conference* 1998; 1: 192–99.
- [51] Seto H, Ohta M, Ochi M, and Kawakado S. Integrated hydrodynamic structure analysis of very large floating structures (VLFS). *Marine Structures* 2005; 18(2): 181–200.
- [52] Belibassakis KA, Athanassoulis GA. A coupled-mode model for the hydroelastic analysis of large floating bodies over variable bathymetry regions. *Journal of Fluid Mechanics* 2005; 531: 221–49.
- [53] Loukogeorgaki E, Michailides C, and Angelides DC. Hydroelastic analysis of a flexible mat-shaped floating breakwater under oblique wave action. *Journal of Fluid and Structures* 2012; 31: 103–24.

- [54] Michailides C, Loukogeorgaki E, and Angelides DC. Response analysis and optimum configuration of a modular floating structure with flexible connectors. *Applied Ocean Research* 2013; 43: 112–30.
- [55] Riggs HR., Ertikin RC, and Mills TRJ. A comparative study of RMFC and FEA models for the wave induced response of a MOB. *Marine Structures* 2000; 13: 217–32.
- [56] Chen XJ, Moan T, Fu S, and Cui W. Second-order hydroelastic analysis of a floating plate in multi directional irregular waves. *Non-linear Mechanics* 2006; 41: 1206–18.
- [57] Senjanović, I., Tomić M, and Vladimir N. An advanced procedure for hydroelastic analysis of very large floating airport exposed to airplane load. In: *Proceedings of The Seventh International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology, Split, Croatia* 2015: 161–76.
- [58] Ding J, Tian C, Wu YS, Li ZW, Ling HJ, and Ma XZ. Hydroelastic analysis and model tests of a single module VLFS deployed near islands and reefs. *Ocean Engineering* 2017; 144: 224–34.
- [59] Wei W, Fu S, Moan T, Song C, and Ren T. A time-domain method for hydroelasticity of very large floating structures in inhomogeneous sea conditions. *Marine Structures* 2018; 57: 180–92.
- [60] Wu YS, Ding J, Tian C, Li ZW, Ling HJ, Ma XZ, and Gao JL. Numerical analysis and model tests of a three-module VLFS. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy* 2018; 2: 1–12
- [61] Denis MSt, Pierson WJ. On the Motion of Ships in Confused Seas. *Transactions Society of Naval Architects and Marine Engineering* 1953; 61: 280–354.
- [62] Korvin-Kroukovsky BV, Jacobs WR. Pitching and Heaving Motions of a Ship in Regular Waves. *Transactions Society of Naval Architects and Marine Engineering* 1957.
- [63] Jacobs WR. The Analytical Calculation of Ship Bending Moments in Regular Waves. *Journal of Ship Research* 1958; 2(1).
- [64] Motora S. Strip wise Calculation of Hydrodynamic Forces Due to Beam Seas. *Journal of Ship Research* 1964; 8(1): 1–9.
- [65] Salvesen N, Tuck EO, and Faltinsen O. Ship motions and sea loads. *Transactions Society of Naval Architects and Marine Engineering* 1970; 78: 250–87.
- [66] Betts CV, Bishop RED, and Price WG. The symmetric generalised fluid forces applied to a ship in a seaway. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 1977; 199: 265–78.

- [67] Bishop RED, Price WG. The generalized antisymmetric fluid forces applied to a ship in a seaway. *International Shipbuilding Progress* 1977; 24: 3–14.
- [68] Bishop RED, Price WG. *Hydroelasticity of Ships*. Cambridge University Press, London, UK 1979.
- [69] Bishop RED, Price WG, and Tam PKY. On the dynamics of slamming. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 1978; 120: 259–80.
- [70] Belik O, Bishop RED, and Price WD. On the slamming response of ships to regular head waves. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 1980; 122: 325–37.
- [71] Newman JN. The theory of ship motions. *Advances in Applied Mechanics* 1978; 18: 221–85.
- [72] Newman JN. *Marine Hydrodynamics*. The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, MA 1986.
- [73] Wu YS, Xia JZ, and Du SX. *Two Engineering Approaches to Hydroelastic Analysis of Slender Ships Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves*. Elsevier Science Publishers 1990: 157–165.
- [74] Price WG, Temarel P. The influence of hull flexibility in the antisymmetric dynamic behavior of ships in waves. *International Shipbuilding Progress* 1982; 29(340): 318–26.
- [75] Pedersen PT. A beam model of torsional-bending response of ship hulls. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 1983; 125: 171–82.
- [76] Conceicao CAL, Price WG, and Temarel P. The influence of heel on the hydrodynamic coefficients of ship-like sections and a trawler form. *International Shipbuilding Progress* 1984; 31: 56–66.
- [77] Clarke JD. Wave loading in warships. *Advances in Marine Structures Conference* 1986: 1–25.
- [78] Dong YQ, Lin WX, and Zhu JG. A study on wave-excited vibration of shallow draft full form ship. *Ship building of China* 1989; 1: 76–83.
- [79] Dong YQ, Lin WX. Hydroelasticity and wave loads for full form ship with shallow draft. *Journal of Ship Research* 1992.
- [80] Aksu S, Bishop RED, Price WG, and Temarel P. On the behavior of a product carrier in ballast traveling in a seaway. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 1991; 133: 45–59.
- [81] Bishop RED, Price WG, and Temarel P. A theory on the loss of the MV Derbyshire. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 1991; 133: 389–453.

- [82] Lin JR. Wave excited vibration of large ships. *Ship Engineering* 1995; 2: 4–9 (in Chinese).
- [83] Zhong TY, Lin Z, and Zhao DY. Calculation method of resonant frequency on wave-induced ship hull vibration. *Journal of Dalian University of Technology* 1995; 35(2): 212–15 (in Chinese).
- [84] Zhong TY, Zhao DY. Study of calculation of natural frequency and response of ship hull vibration in waves. *Journal of Dalian University of Technology* 1998; 38(4), 445–49 (in Chinese).
- [85] Cho IH, Kim MH. Interactions of a horizontal flexible membrane with oblique incident waves. *Journal of Fluid Mechanics* 1998; 367: 139–61.
- [86] Cho IH, Kim MH. Interactions of horizontal porous flexible membrane with waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* 2000; 126(5): 245–53.
- [87] Hermundstad OA, Aarsns JV, and Moan T. Linear hydroelastic analysis of high-speed catamarans and monohulls. *Journal of Ship Research* 1999; 43(1): 48–63.
- [88] Bereznitski A. Slamming: the role of hydroelasticity. *International Shipbuilding Progress* 2001; 48(454): 333–51.
- [89] Liu XD, Sakai S, Makino S, Hanai K, and Sasamoto M. Tsunami-induced mooring force nous avons flexible floating structure. *Proceedings of The Eleventh International Offshore and Polar Engineering Conference* 2001; 241–47.
- [90] Hirdaris SE, Price WG, and Temarel P. Two- and three-dimensional hydroelastic modelling of a bulker in regular waves. *Marine Structures* 2003; 16: 627–58.
- [91] Hirdaris SE, Miao SH, Price WG, and Temarel P. The influence of structural modelling on the dynamic behaviour of a bulker in waves. *Proceeding of the fourth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology* 2006: 25–33.
- [92] MAIB, Report on the investigation of the structural failure of MSC Napoli English Channel on 18 January 2007. *Marine Accident Investigation Branch, UK*, 2008.
- [93] Denchfield S, Hudson DA, Temarel P, Bateman W, and Hirdaris SE. Evaluation of rogue wave induced loads using 2D hydroelasticity analysis. *Proceedings of The fifth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology* 2009: 347–60.
- [94] Miao SH, Temarel P. Application of 2D hydroelasticity theory to investigate the failure of a containership. *Proceedings of The fifth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology* 2009: 245–54.

- [95] Santos FM, Temarel P, and Soares CG. On the limitations of two-and three-dimensional linear hydroelasticity analyses applied to a fast patrol boat. *Journal of Engineering for the Maritime Environment* 2009; 223(3): 457–78.
- [96] Lee Y, Chan HS, Pu Y, Incecik A, and Dow RS. Global wave loads on a damaged ship. *Ships and Offshore Structures* 2011; 7(3): 237–68.
- [97] Bennett SS, Hudson DA, Temarel P, and Price WG. The influence of abnormal waves on global wave-induced loads. *Proceeding of The sixth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology* 2012: 75–85.
- [98] Bennett SS, Hudson DA, and Temarel P. The influence of forward speed on ship motions in abnormal waves: experimental measurements and numerical predictions. *Journal of Fluids and Structures* 2013; 39: 154–72 .
- [99] Bennett SS, Hudson DA, and Temarel P. The effect of abnormal wave sequences on 2D hydroelastic predictions of global loads. *Proceedings of The seventh International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology* 2015: 363–74.
- [100] Zhu S, Moan T. Effect of heading angle on wave-induced vibrations and extreme vertical bending moments in a ultra large container ship model. *Proceedings of The seventh International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology* 2015: 375–88.
- [101] Heo K, Koo W, Park I, and Ryue J. Quadratic strip theory for high-order dynamic behaviour of a large container ship with 3D flow effects. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 2016; 8: 127–36.
- [102] Lin Y, Ma N, Wang DY, and Gu X. Hydroelastic analysis and experimental validation of a 350,000 DWT very large crude carrier. *Proceedings of the ASME 36th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering* 2017; 7A.
- [103] Zienkiewicz OC, Irons BM, Scott FC, and Campbell JS. Three-dimensional stress analysis. *Proceeding of IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures* 1970: 413–31.
- [104] Peano AG. Hierarchies of conforming finite elements. PhD Thesis, Washington University, St. Louis, 1975.
- [105] Peano AG. Conforming Approximations for Kirchhoff Plates and Shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1979; 14(9): 1273–91.
- [106] Szabo BA, Mehta AK. p -convergent finite element approximations in fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1978; 12(3): 551–60.
- [107] Rossow MP, Katz IN. Hierarchical finite elements and precomputed arrays. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1978; 12(6): 977–99.

- [108] Katz IN, Peano AG, and Rossow MP. Nodal variables for complete conforming finite elements of arbitrary polynomial order. *Computers & Mathematics with Applications* 1978; 4(2): 85–112.
- [109] Szabö BA. Some recent developments in finite element analysis. *Computers & Mathematics with Applications* 1979; 5(2): 99–115.
- [110] Zienkiewicz OC, Kelly DW, Gago J, and Babuska I. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. In *The Mathematics of Finite Elements and Applications* (Whiteman JR, Ed) 1981: 313–46.
- [111] Babuška I, Szabó BA, and Katz IN. The p -version of the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1981; 18(3): 515–45.
- [112] Babuška I, Szabó BA. On the rates of convergence of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1982; 18(3): 323–41.
- [113] Babuška I, Miller A, and Vogelius M. Adaptive methods and error estimation for elliptic problems of structural mechanics. *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics 1983: 35–56.
- [114] Szabo BA. Mesh design for the p -version of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1986; 55(1–2): 86–104.
- [115] Kelly DW, Gago J, Zienkiewicz OC, and Babuška I. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method. Part I—Error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1983; 19(11): 1593–619.
- [116] Gago J, Kelly DW, Zienkiewicz OC, and Babuška I. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method. Part II—Adaptive mesh refinement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1983; 19(11): 1621–56.
- [117] Dorr MR. The approximation theory for the p -version of the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1984; 21: 1181–207.
- [118] Dorr MR. The approximation of solutions of elliptic boundary value problems via the p -version of the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1986; 23: 58–77.
- [119] Babuska I. The p - and hp -Versions of the Finite Element Method: the State of the Art. *Finite Elements: Theory and Applications* 1988: 199–239.
- [120] Wiberg NE, Möller P. Formulation and solution of hierarchical finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1988; 26(5): 1213–33.
- [121] Bardell NS. The application of symbolic computing to the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1989; 28(5): 1181–204.

- [122] Hinnant HE. A fast method of numerical quadrature for p -version finite element matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1994; 37(21): 3723–50.
- [123] Champion SD, Jarvis JL. An investigation of the implementation of the p -version finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design* 1996; 23(1): 1–21.
- [124] Coons S. Surfaces for computer-aided design of space forms. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1967.
- [125] Gordon WJ. Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1971; 8(1): 158–77.
- [126] Gordon WJ, Hall CA. Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1973; 7(4): 461–77.
- [127] Gordon WJ, Hall CA. Transfinite element methods: Blending-function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numerische Mathematik* 1973; 21(2): 109–29.
- [128] Szabo BA, Babuska I. *Finite Element Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1991.
- [129] Dey S, Shephard MS, and Flaherty JE. Geometry representation issues associated with p -version finite element computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1997; 150(1–4): 39–55.
- [130] Királyfalvi G, Szabó BA. Quasi-regional mapping for the p -version of the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design* 1997; 27(1): 85–97.
- [131] Düster A, Bröker H, and Rank E. The p -version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001; 52(7): 673–703.
- [132] Han W, Petyt M, and Hsiao KM. An investigation into geometrically nonlinear analysis of rectangular laminated plates using the hierarchical finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design* 1994; 18(1–3): 273–88.
- [133] Han W, Petyt M. Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method—I: The fundamental mode of isotropic plates. *Computers & Structures* 1997; 63(2): 295–308.
- [134] Han W, Petyt M. Geometrically nonlinear vibration analysis of thin, rectangular plates using the hierarchical finite element method—II: 1st mode of laminated plates and higher modes of isotropic and laminated plates. *Computers & Structures* 1997; 63(2): 309–18.
- [135] Ribeiro P, Petyt M. Nonlinear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods. *International Journal of Mechanical Science* 1999; 41(4–5): 437–59.

- [136] Ribeiro P, Petyt M. Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method. *Composite Structures* 1999; 46(3): 197–208.
- [137] Ribeiro P. A Hierarchical Finite Element for Geometrically Non-linear Vibration of Thick Plates. *Meccanica* 2003; 38(1): 117–32.
- [138] Bardell N.S. The free vibration of skew plates using the hierarchical finite element method. *Computers & Structures* 1992; 45(5–6): 841–74.
- [139] Houmat A. Three-dimensional hierarchical finite element free vibration analysis of annular sector plates. *Journal of Sound and Vibration* 2004; 276(1–2): 181–93.
- [140] Houmat A. An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations. *Journal of Sound and Vibration* 1997; 206(2): 201–15.
- [141] Houmat A. Large amplitude free vibration of shear deformable laminated composite annular sector plates by a sector p -element. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 2008; 43(9): 834–43.
- [142] Ribeiro P, Van Der Heijden GHM. Elasto-plastic and geometrically nonlinear vibrations of beams by the p -version finite element method. *Journal of Sound and Vibration* 2009; 325(1–2): 321–37.
- [143] Ribeiro P. On the predictability of elasto-plastic and geometrically non-linear oscillations of beams under harmonic excitation. *Nonlinear Dynamics* 2012; 67(3): 1761–78.
- [144] Udupa KM, Varadan TK. Hierarchical finite element method for rotating beams. *Journal of Sound and Vibration* 1990; 138(3): 447–56.
- [145] Adjerid S, Aiffa M, and Flaherty JE. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2001; 190 (22–23): 2925–41.
- [146] Belalia SA, Houmat A. Nonlinear free vibration of functionally graded shear deformable sector plates by a curved triangular p -element. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 2012; 35: 1–9.
- [147] Houmat A. Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p -version of the finite-element method. *Thin-Walled Structures* 2006; 44(9): 943–51.
- [148] Ribeiro P. Hierarchical finite element analyses of geometrically non-linear vibration of beams and plane frames. *Journal of Sound and Vibration* 2001; 246(2): 225–44.
- [149] Houmat A. The coordinate ascent hierarchical infinite element method for the three-dimensional free flexural vibration analysis of water-column interaction systems. *Ocean Engineering*. doi:10.1016/j.oceaneng.2020.107005

- [150] Babuška I, Suri M. The p - and h - p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1990; 80(1–3): 5–26.
- [151] Bank RE. Hierarchical bases and the finite element method. *Acta Numerica* 1996; 23: 1–43.
- [152] Petyt M. *Introduction to Finite Element vibration analysis*, 2nd edition. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [153] Abdalla M.M, Setoodeh S, and Gürdal Z. Design of Variable Stiffness Composite Panels for Maximum Fundamental Frequency Using Lamination Parameters. *Composite Structures* 2007; 81: 283–91.
- [154] Honda S, Narita Y, and Sasaki K. Maximizing the Fundamental Frequency of Laminated Composite Plates with Optimally Shaped Curvilinear Fibers. *Journal of System Design and Dynamics* 2009; 3(6): 867–76.
- [155] Houmat A. Optimal Layup Design of Variable Stiffness Laminated Composite Plates by a Layer-wise Optimization Technique. *Engineering Optimization* 2017, 50(2): 1–13.
- [156] Guenanou A, Houmat A. Optimum stacking sequence design of laminated composite circular plates with curvilinear fibres by a layer-wise optimization method. *Engineering Optimization* 2017; 50(5): 1–15.
- [157] Fazilati J, Khalafi V. Aeroelastic panel flutter optimization of tow-steered variable stiffness composite laminated plates using isogeometric analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. doi:10.1177/0731684419854800
- [158] Meskine A, Houmat A, and Guenanou A. A layer-wise optimization method for the optimal stacking sequence design of symmetric VSCL beams in air and in water. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*.
- [159] Timoshenko SP. *History of strength of materials*. New York : Dover publications, Inc 1953.
- [160] Strutt JW. *Theory of sound*. London : Macmillan Publications Company, Inc 1877.
- [161] Davies RM. The frequency of transverse vibration of a loaded fixed-free bar III. The effect of rotary inertia of the bar *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 1937; 23(155).
- [162] Abbas BAH, Thomas J. The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibrations* 1977; 51(1): 123–37.
- [163] Timoshenko SP. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 1921; 41(245): 744–46.

- [164] Timoshenko SP. On the transverse vibration of bars of uniform cross-section. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 1922; 43(253): 125–31.
- [165] Kruszewski ET. Effects of transverse shear and rotary inertia on the natural frequencies of a uniform beam. National Advisory Committee For Aeronautics 1949; 1909: 1–15.
- [166] Trail-Nash RW, Collar AR. The effect of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibration of beams. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 1953; 6(2): 186–222.
- [167] Dolph CL. On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations. Quarterly of Applied Mathematics 1954; 12(2): 175–87.
- [168] Huang TC. The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. Journal of Applied Mechanics 1961; 28(4): 579–84.
- [169] Weisshaar TA, Foist BL. Vibration tailoring of advanced composite lifting surfaces. Journal of Aircraft 1985; 22(2): 141–47.
- [170] Olmedo R, Gürdal Z. Buckling response of laminates with spatially varying fiber orientations. In: Proceedings of the 34th structural dynamics and materials conference, La Jolla, 19–21 April 1993: 2261–9.
- [171] Kopal Z. Numerical Analysis. London: Chapman and Hall 1961.
- [172] Scheid F. Numerical Analysis. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill 1968.
- [173] Hachemi M. Analyse dynamique d'une plaque rectangulaire en composite avec des ouvertures. Thèse de doctorat, université de Tlemcen 2018.
- [174] Thomas DL, Wilson JM, and Wilson RR. Timoshenko beam finite elements. Journal of Sound and Vibration 1973; 31(3): 315–30.
- [175] Spendley W, Hext GR, and Himsworth FR. Sequential application of simplex design in optimization and evolutionary operation. Technometrics 1962; 4(4): 441–61.
- [176] Nelder JA, Mead R. A simplex method for function minimization. Computer Journal 1965; 7: 308–13.
- [177] Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. Quarterly of Applied Mathematics 1944; 2(2): 164–68.
- [178] Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of non linear parameters. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 1963; 11(2): 431–41.

- [179] Wilson RB. A Simplicial Method for Convex Programming. PhD thesis. Harvard University 1963.
- [180] Courant R. Variational methods for the solution of the problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Mathematical Society* 1943; 49(1): 1–23.
- [181] Carroll CW. The created response surface technique for optimizing nonlinear restrained systems. *Operations Research* 1961; 9(2): 169–84.
- [182] Frisch KR. The logarithmic potential method of convex programming. Memorandum, Institute of Economics, Norway, Oslo 1951.
- [183] Schittkowski K. NLPQL: A Fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research* 1986; 5(2): 485–500.
- [184] Schittkowski K. NLPQLP: A new Fortran implementation of a sequential quadratic programming algorithm for parallel computing. Technical report, University of Bayreuth 2001.
- [185] Healy K, Schruben LW. Retrospective simulation response optimization. In: *Proceedings of the Winter Simulation Conference* 1991; 1: 901–06.
- [186] Robinson SM. Analysis of sample-path optimization. *Mathematics of Operations Research* 1996; 21(3): 513–28.
- [187] Shapiro A, Wardi Y. Convergence analysis of stochastic algorithms. *Mathematics of Operations Research* 1996; 21(3): 615–28.
- [188] Shapiro A, Homem-de Mello T, and Kim J. Conditioning of convex piecewise linear stochastic programs. *Mathematical Programming* 2002; 94(1): 1–19.
- [189] Robbins H, Monro S. A stochastic approximation method. *The Annals of Mathematical Statistics* 1951; 22(3): 400–07.
- [190] Box GEP, Wilson KB. On the experimental attainment of optimum conditions. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 1951; 13(1): 1–45.
- [191] Robbins H. Some Aspects of the Sequential Design of Experiments. *Bulletin of the American Mathematical Society* 1952; 58(5): 527–35.
- [192] Bellman RE. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [193] Howard RA. *Dynamic Programming and Markov Processes*. MIT Press, Cambridge, MA 1960.
- [194] Fleming W, Rishel R. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer, New York 1975.
- [195] Puterman M. *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, New York 1994.

- [196] Bertsekas D, Tsitsiklis J. *Neuro-Dynamic Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA 1996.
- [197] Rockafellar RT, Wets RJB. Nonanticipativity and L^1 -Martingales in Stochastic Optimization Problems. *Mathematical Programming Study* 1976; 6: 170–87.
- [198] Rockafellar RT, Wets RJB. The optimal resource problem in discrete time: L^1 -multipliers for inequality constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 1978; 16: 16–36.
- [199] Narita Y. Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration* 2003; 263(5): 1005–16.
- [200] Narita Y, Turvey GJ. Maximizing the buckling loads of symmetrically laminated composite rectangular plates using a layerwise optimization approach. *Journal of Mechanical Engineering Science, Part C* 2004; 218(7): 681–91.
- [201] Narita Y, Hodgkinson JM. Layerwise optimisation for maximising the fundamental frequencies of point-supported rectangular laminated composite plates. *Composite Structures* 2005; 69(2): 127–35.
- [202] Narita Y. Maximum frequency design of laminated plates with mixed boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures* 2006; 43(14–15): 4342–56.
- [203] Narita Y, Robinson P. Maximizing the fundamental frequency of laminated cylindrical panels using layerwise optimization. *International Journal of Mechanical Sciences* 2006; 48(12): 1516–24.
- [204] Honda S, Kumagai T, Tomihashi K, and Narita Y. Frequency maximization of laminated sandwich plates under general boundary conditions using layerwise optimization method with refined zigzag theory. *Journal of Sound and Vibration* 2013; 332(24): 6451–62.
- [155] Houmat A. Optimal Layup Design of Variable Stiffness Laminated Composite Plates by a Layer-wise Optimization Technique. *Engineering Optimization* 2017; 50(2): 1–13.
- [156] Guenanou A, Houmat A. Optimum stacking sequence design of laminated composite circular plates with curvilinear fibres by a layer-wise optimization method. *Engineering Optimization* 2017; 50(5): 1–15.
- [158] Meskine A, Houmat A, Guenanou A. A layer-wise optimization method for the optimal stacking sequence design of symmetric VSCL beams in air and in water. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*.
- [205] Guenanou A. Conception de plaques composites épaisses à rigidité variable pour la fréquence fondamentale maximale. Thèse de doctorat. Université de Tlemcen 2015.

[206] Kramer MR, Liu Z, and Young YL. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water. *Composite Structures* 2013; 95: 254–63.

Résumé

L'étude des fréquences optimales pour les trois modes les plus bas en variant les paramètres géométriques, mécaniques, les conditions aux limites, ainsi que les angles d'orientation des fibres pour une poutre symétrique SCRIV avec fibres curvilignes dans l'air et dans l'eau est réalisé dans ce travail. La technique des trajectoires des fibres décalées est utilisée pour la construction des chemins de fibre. La version- p de MEF basée sur la théorie des poutres Euler-Bernoulli couplée avec la torsion est utilisée pour l'obtention des fréquences. La méthode d'optimisation couche par couche est établie pour atteindre la fonction objective. La poutre est modélisée comme un élément- p unidimensionnel. Les fonctions de forme sont obtenues à partir des polynômes de Legendre. L'équation du mouvement est donnée en appliquant le principe de déplacement virtuel. Deux programmes sont élaborés, un est pour le calcul des fréquences et les modes propres, l'autre est pour déterminer les séquences d'empilement optimales dans chaque couche de stratifié.

Mots clés :

Poutres SCRIV dans l'air et dans l'eau; théorie des poutres Euler-Bernoulli; version- p de MEF; vibration libre; fibres curvilignes; optimisation couche par couche; masse ajoutée; conception des séquences d'empilement optimales.

Abstract

Studying the optimal frequencies for the lowest three modes by varying the geometrical, mechanical parameters, boundary conditions, and fiber orientation angles for a symmetrical VSCL beam with curvilinear fibers in air and in water is achieved in this work. The shifted path technique is used to construct the fiber paths. The p -version of FEM based on Euler-Bernoulli beam theory coupled with torsion is used to obtain frequencies. The layer-wise optimization method is established to achieve the objective function. The beam is modeled as one-dimensional p -element. The shape functions are obtained from Legendre polynomials. The equation of motion is given by applying the principle of virtual displacement. Two programs are developed, one for calculating frequencies and eigenmodes, and the other is for determining the optimal stacking sequences in each layer of laminate.

Keywords

VSCL beams in air and in water; Euler-Bernoulli beam theory; p -version of FEM; free vibration; curvilinear fibers; layer-wise optimization method; added mass; design of optimal stacking sequences.

ملخص

في هذا العمل، تمت دراسة الترددات المثلى للثلاث وسائط الصغرى من خلال تغيير العوامل الهندسية، الميكانيكية، شروط الحدود، وكذا اتجاه زوايا الألياف لعارضة متماثلة ص م ص م بألياف منحنية في الهواء و في الماء. تقنية المسار المتحول للألياف استعملت لصناعة مسار الألياف. الإصدار- p من طريقة العناصر المنتهية المعتمدة على نظرية العوارض أولر-برنولي المشتركة مع الالتواء استعملت لحساب الترددات. استخدمت طريقة التصميم بطبقة بطبقة للحصول على الدالة الهدف. صممت العارضة كعنصر- p أحادي البعد. تم الحصول على دالات الأشكال من خلال كثير الحدود Legendre. يتم إعطاء معادلة الحركة من خلال تطبيق مبدأ التنقل الافتراضي. تم تطوير برنامجين، أحدهما لحساب الترددات والوسائط الذاتية، والآخر لتحديد تسلسل التراص الأمثل في كل طبقة من طبقات الصفيحة.

الكلمات الرئيسية:

عوارض ص م ص م في الهواء و الماء؛ نظرية العوارض أولر-برنولي؛ الإصدار- p من طريقة العناصر المنتهية؛ اهتزاز حر؛ ألياف منحنية؛ التصميم بطبقة بطبقة؛ كتلة مضافة؛ تصميم التسلسل الأمثل للترavas.