

## Notations

$x, y, z$	: Coordonnées Cartésiennes.
$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	: Coordonnées d'aire.
$a, b$	: Dimensions de la plaque.
$H$	: Epaisseur de la plaque.
$t$	: Temps.
$A$	: Aire de l'élément fini.
$G$	: Module de cisaillement.
$E$	: Module de Young.
$D$	: Rigidité à la flexion.
$\nu$	: Coefficient de Poisson.
$\rho$	: Masse volumique.
$[M]$	: Matrice masse globale.
$[K]$	: Matrice de rigidité globale.
$[M^e]$	: Matrice masse élémentaire.
$[K^e]$	: Matrice de rigidité élémentaire.
$u$	: Déplacement suivant X.
$v$	: Déplacement suivant Y.
$w$	: Déplacement suivant Z.
$\theta_x, \theta_y$	: Rotations par rapport à X, Y respectivement.
$E_c$	: Energie cinétique.
$E_p$	: Energie potentielle.
$X^i$	: Composante contravariante.
$X_i$	: Composante covariante.
$e_{ij}$	: Tenseur de déformation.
$E^{ijkl}$	: Tenseur d'élasticité.
$g_{ij}, g^{ij}$	: Composantes contravariantes et covariantes du tenseur métrique Euclidien.
$g$	: Déterminant du tenseur métrique Euclidien covariant.

$\lambda, \mu$	: Constantes de Lamé
$\Gamma$	: Symbole de christoffel.
$L$	: Opérateur différentiel.
$K$	: Facteur de correction de cisaillement transversal.
$\omega$	: Pulsation propre.
$\Omega$	: Paramètre de fréquence.
$h$	: Nombre d'éléments finis
$p$	: Degré du polynôme d'interpolation.

## Liste des figures

<b>FIG 1.1</b> : Plaque de forme quelconque.....	3
<b>FIG1.2</b> : Elément linéaire dans deux systèmes de coordonnées .....	5
<b>FIG1.3</b> : Vecteurs de base .....	6
<b>FIG 1.4</b> : Cinématique de la plaque déformée .....	8
<b>FIG 1.5</b> : Equilibre du solide .....	11
<b>FIG1.6</b> : Effort de cohésion-contraintes.....	11
<b>FIG 2.1</b> : Etat plan de contrainte.....	18
<b>FIG 2.2</b> : Efforts appliqués à un élément infinitésimal de plaque.....	21
<b>FIG 2.3</b> : Moments appliqués à un élément infinitésimal de plaque.....	21
<b>FIG 2.4</b> : Déplacement $u$ d'un point dans un élément infinitésimal.....	22
<b>FIG 2.5</b> : Définition de l'état supposée de la déformée dans la direction Y.....	25
<b>FIG 2.6</b> : Contraintes dans une plaque.....	27
<b>FIG 2.7</b> : Moments de flexion et efforts de cisaillement dans une plaque.....	27
<b>FIG 3.1</b> : Elément pentaèdre de référence.....	29
<b>FIG 3.2</b> : Coordonnées locales du pentaèdre.....	30
<b>FIG 3.3</b> : Famille " Serendipity ".....	33
<b>FIG 3.4</b> : Famille " Lagrange".....	33
<b>FIG 3.5</b> : Représentation des nœuds, cotés, faces triangulaires et rectangulaires du Pentaèdre.....	34
<b>FIG 3.6</b> : Représentation du champ de déplacement d'un point quelconque dans la plaque.....	36
<b>FIG 4.1</b> : Ordre de numérotation des nœuds, cotés, faces triangulaires, faces rectangulaires, de l'élément pentaèdre.....	42
<b>FIG 5.1</b> : Plaque triangulaire droite E-L-L .....	52
<b>FIG 5.2</b> : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels d'une plaque triangulaire droite E-L-L ( $h = 1$ ).....	55
<b>FIG 5.3</b> : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels d'une plaque triangulaire droite E-L-L ( $h = 3$ ).....	55
<b>FIG 5.4</b> : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels d'une plaque triangulaire droite E-L-L ( $h = 6$ ).....	56

<b>FIG 5.5</b> : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels d'une plaque triangulaire droite E-L-L ( h =1).....	56
<b>FIG 5.6</b> : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels d'une plaque triangulaire droite E-L-L ( h =3).....	57
<b>FIG 5.7</b> : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels d'une plaque triangulaire droite E-L-L ( h =6).....	57
<b>FIG.5.8</b> : Plaque carrée L-L-L-L .....	59
<b>FIG 5.9</b> : Variation du paramètre de fréquence du premier mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-A-A-A .....	61
<b>FIG 5.10</b> : Variation du paramètre de fréquence du 2 <sup>ème</sup> et 3 <sup>ème</sup> modes flexionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-A-A-A .....	61
<b>FIG 5.11</b> : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-A-A-A .....	62
<b>FIG 5.12</b> : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-A-A-A .....	62
<b>FIG 5.13</b> : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-A-A-A .....	63
<b>FIG 5.14</b> : Variation du paramètre de fréquence du premier mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L.....	65
<b>FIG 5.15</b> : Variation du paramètre de fréquence du deuxième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L.....	65
<b>FIG 5.16</b> : Variation du paramètre de fréquence du troisième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L.....	66
<b>FIG 5.17</b> : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L .....	66
<b>FIG 5.18</b> : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L.....	67
<b>FIG 5.19</b> : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode flexionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L .....	67
<b>FIG 5.20</b> : Variation du paramètre de fréquence du premier mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.....	69
<b>FIG 5.21</b> : Variation du paramètre de fréquence du deuxième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.....	69

<b>FIG 5.22</b> : Variation du paramètre de fréquence du troisième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.....	70
<b>FIG 5.23</b> : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L . .....	70
<b>FIG 5.24</b> : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.. .....	71
<b>FIG 5.25</b> : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L . .....	71
<b>FIG 5.26</b> : Variation du paramètre de fréquence du premier mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.....	73
<b>FIG 5.27</b> : Variation du paramètre de fréquence du deuxième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.....	73
<b>FIG 5.28</b> : Variation du paramètre de fréquence du troisième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.....	74
<b>FIG 5.29</b> : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.....	74
<b>FIG 5.30</b> : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.....	75
<b>FIG 5.31</b> : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.....	75

## Liste des tableaux

<b>Tableau 5.1</b> : Variation des paramètres de fréquences des modes flexionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L .....	53
<b>Tableau 5.2</b> : Variation des paramètres de fréquences des modes extensionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L .....	54
<b>Tableau 5.3</b> : Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-A-A-A.....	60
<b>Tableau 5.4</b> : Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L.....	64
<b>Tableau 5.5</b> : Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L ....	68
<b>Tableau 5.6</b> : Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L ....	72

# Sommaire

<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Analyse tridimensionnelle des contraintes</b> .....	3
1.1. Introduction.....	3
1.2. Définition .....	3
1.3. Analyse tensorielle.....	4
1.3.1. Transformations de coordonnées .....	4
1.3.2. Tenseur métrique Euclidien .....	5
1.3.3. Dérivation covariante du champ vectoriel.....	7
1.4. Tenseur de déformation.....	8
1.4.1 Composantes physiques du tenseur de déformation .....	9
1.5. Tenseur de contrainte.....	10
1.5.1. Equilibre du milieu déformable.....	10
1.5.2. Tenseur de contraintes de Cauchy .....	11
1.6. Relation contraintes-déformations .....	12
1.6.1 Composantes physiques du tenseur de contraintes .....	13
1.7. Energie de Déformation.....	14
1.8. Energie Cinétique .....	16
1.9. Détermination des équations du mouvement.....	16
<b>Chapitre 2 : Théories bidimensionnelles des plaques</b> .....	18
2.1. Introduction.....	18
2.2. Théorie des contraintes planes.....	18
2.3. Théorie des plaques minces .....	19
2.3.1. Théorie de Kirchhoff.....	20
2.3.2. Equations des efforts et moments.....	20
2.3.3. Champs de déplacement .....	22
2.3.4. Relations déformations-déplacements .....	22
2.3.5. Relations contraintes-déformations.....	23
2.4. Théorie des plaques épaisses.....	24
2.4.1. Théorie de Mindlin.....	24
2.4.2. Champs de déplacements .....	24
2.4.3. Relations déformation-déplacements.....	25

2.4.4. Relations contraintes-déformations .....	26
<b>Chapitre 3 : formulation par la version <i>h-p</i> de la méthode des éléments</b>	
<b>Finis</b> .....	29
3.1 Introduction.....	29
3.2 Choix de l'élément .....	29
3.2.1 Changement de base.....	30
3.3 Sélection des fonctions de forme.....	32
3.3.1 Polynôme de Legendre déplacés.....	32
3.3.2 Espaces polynomiaux.....	32
3.3.3 Fonctions de forme hiérarchiques.....	34
3.4 Modélisation de la plaque.....	36
3.5 Détermination de la matrice de rigidité élémentaire .....	37
3.6 Détermination de la matrice masse élémentaire .....	38
3.7 Formes des matrices élémentaires .....	38
<b>Chapitre 4 : Organisation de la programmation</b> .....	42
4.1 Introduction .....	42
4.2 Environnement de la programmation.....	42
4.3 Organigramme.....	43
4.4 Description du programme.....	45
4.4.1 S/P INPUT .....	45
4.4.2 S/P INTEGER .....	46
4.4.3 S/P CONNECT (M) .....	46
4.4.4 S/P MATRIX (M) .....	46
4.4.5 Elimination des DDL restreints.....	46
4.4.6 Assemblage.....	47
4.4.7 S/P CMATRIX.....	47
4.4.8 S/P TRID.....	48
4.4.9 S/P QL .....	50
4.4.10 S/P SORT.....	50
4.4.11 Affichage des résultats .....	51
<b>Chapitre 5 : Résultats et interprétations</b> .....	52
5.1 Introduction.....	52
5.2 Validation et convergence de la méthode.....	52

5.2.1 discussion.....	58
5.3 Etude Comparative de la théorie tridimensionnelle et les théories bidimensionnelles approchées des plaques .....	59
5.3.1 Modes flexionnels .....	60
a / Plaque carrée A-A-A-A.....	60
b / Plaque carrée A-L-A-L .....	64
5.3.2 Modes extensionnels .....	68
a / Plaque carrée L-L-L-L .....	68
b / Plaque carrée E-L-L-L .....	72
5.3.5 Discussion .....	76
a / Modes flexionnels.....	76
b / Modes extensionnels .....	76
<b>Conclusion</b> .....	78
<b>Références bibliographiques</b> .....	80
<b>Annexes</b> .....	83