

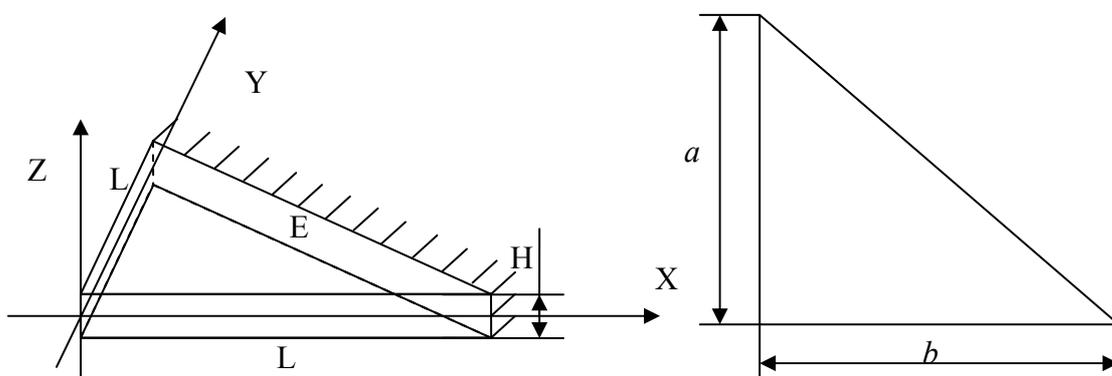
## 5.1 Introduction :

Une étape de validation du programme est donnée en premier lieu pour le calcul des paramètres de fréquence des plaques vibrantes. Nous donnons en suite une comparaison des résultats obtenus par le programme élaboré (théorie tridimensionnelle), avec les résultats obtenus par les théories bidimensionnelles approchées (contraintes planes, Mindlin, et Kirchhoff).

## 5.2 Validation et convergence de la méthode :

Pour la validation du programme, nous avons étudié une plaque triangulaire dans deux cas de vibrations (flexionnelles et extensionnelles). Nous avons utilisé trois différents maillages (version  $h$ ) avec un degré  $p$  variant de 3 jusqu'à la convergence des paramètres de fréquences (version  $p$ ). Dans cette partie nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux obtenus par la méthode de Rayleigh-Ritz utilisant la théorie d'élasticité tridimensionnelle **Ref[12]**.

Nous considérons une plaque triangulaire droite (figure (5.1)) soumise à deux types de vibrations : vibration extensionnelle (déplacement transversal nul dans le plan moyen), et vibration flexionnelle (déplacement longitudinal nul dans le plan moyen). La face encastree notée par E et la face libre est notée par L.



**FIG 5.1** : Plaque triangulaire droite E-L-L

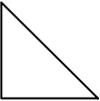
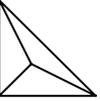
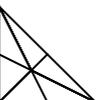
Les dimensions de la plaque sont :  $a = \sqrt{2}/2$ ,  $b = \sqrt{2}/2$  et  $H = 0.2$ , le coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ .

Le paramètre de fréquence utilisé dans cette étape de validation et dans tout ce qui suit est :

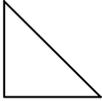
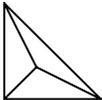
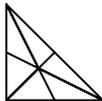
$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

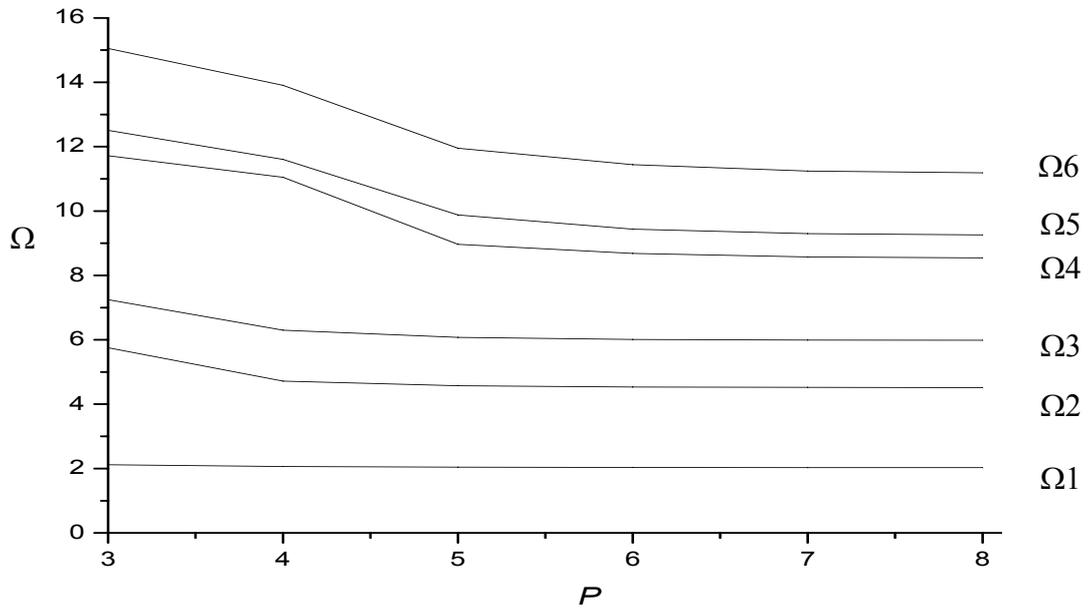
Pour cet exemple les tableaux (5.1 et 5.2) sont présentés suivis des figures (5.2-5.7) afin de mieux visualiser la convergence de la méthode  $h-p$ .

**Tableau 5.1 :** Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L.

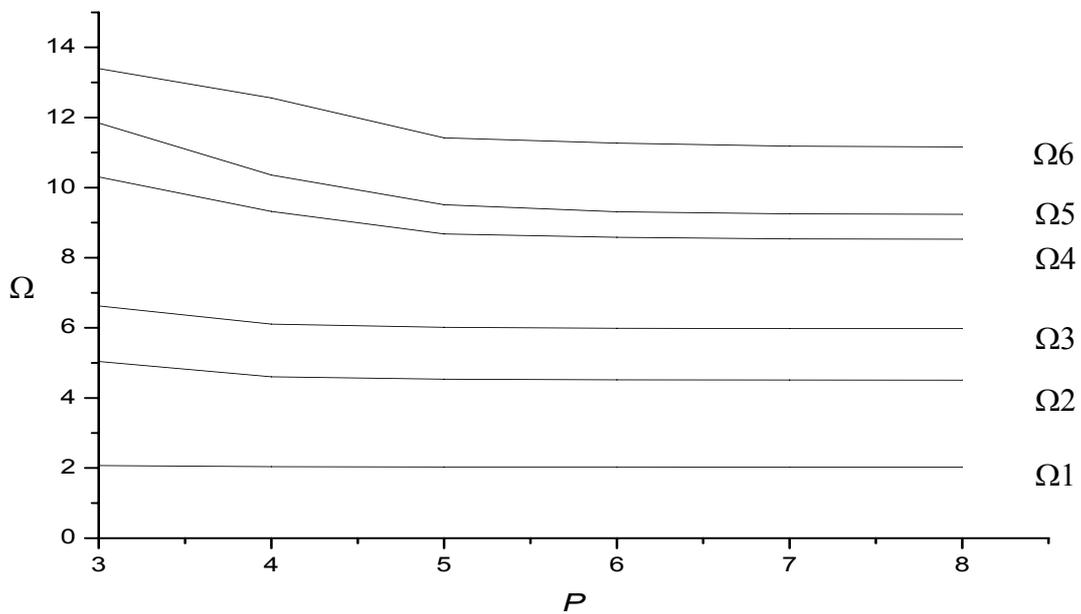
h	p	NDL	N° du mode					
			1	2	3	4	5	6
	3	30	2.121	5.756	7.247	11.719	12.506	15.051
	4	55	2.065	4.714	6.300	11.047	11.603	13.906
	5	93	2.044	4.572	6.076	8.965	9.876	11.950
	6	147	2.033	4.536	6.013	8.682	9.436	11.440
	7	220	2.030	4.521	5.994	8.577	9.298	11.248
	8	315	2.028	4.514	5.986	8.544	9.258	11.189
	3	72	2.073	5.042	6.624	10.306	11.841	13.397
	4	137	2.040	4.604	6.108	9.319	10.358	12.559
	5	238	2.030	4.534	6.014	8.681	9.513	11.418
	6	384	2.027	4.516	5.987	8.583	9.309	11.270
	7	584	2.025	4.510	5.979	8.540	9.252	11.182
	8	847	2.024	4.507	5.977	8.529	9.238	11.162
	3	144	2.051	4.641	6.157	9.287	10.113	11.952
	4	274	2.034	4.545	6.018	8.647	9.406	11.346
	5	476	2.029	4.520	5.992	8.562	9.284	11.204
	6	768	2.026	4.512	5.983	8.537	9.251	11.174
	7	1168	2.025	4.509	5.979	8.529	9.241	11.164
	8	1694	2.024	4.507	5.977	8.526	9.237	11.160
<b>Ref [12]</b>			<b>2.023</b>	<b>4.505</b>	<b>5.974</b>	<b>8.523</b>	<b>9.234</b>	<b>11.154</b>

**Tableau 5.2 :** Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L.

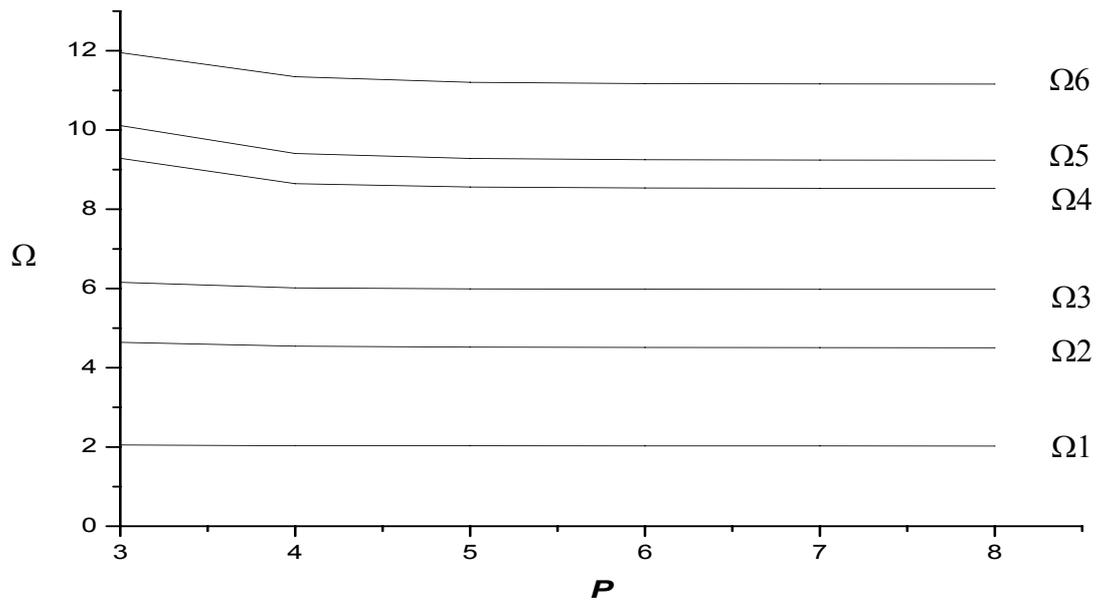
h	p	NDL	N° du mode					
			1	2	3	4	5	6
	3	36	4.341	7.172	9.527	12.642	14.762	18.062
	4	65	4.306	6.959	8.224	11.421	13.377	15.953
	5	108	4.300	6.903	7.897	11.253	12.774	14.291
	6	168	4.298	6.890	7.813	11.130	12.615	13.631
	7	248	4.298	6.886	7.795	11.095	12.420	13.418
	8	351	2.497	6.883	7.792	11.078	12.374	13.344
	3	87	4.317	7.019	8.305	11.691	13.216	15.020
	4	163	4.299	6.915	7.931	11.312	12.830	14.057
	5	278	4.297	6.888	7.818	11.160	12.540	13.614
	6	441	4.296	6.882	7.795	11.089	12.413	13.377
	7	661	4.296	6.880	7.790	11.073	12.369	13.332
	8	947	4.296	6.879	7.790	11.068	12.357	13.316
	3	174	4.301	6.918	7.893	11.202	12.740	13.801
	4	326	4.298	6.888	7.810	11.125	12.429	13.460
	5	556	4.297	6.884	7.793	11.079	12.382	13.339
	6	882	4.296	6.881	7.791	11.072	12.357	13.321
	7	1322	4.296	6.880	7.791	11.070	12.355	13.315
	8	1894	4.296	6.879	7.790	11.068	12.354	13.312
<b>Ref [12]</b>			<b>4.296</b>	<b>6.879</b>	<b>7.790</b>	<b>11.067</b>	<b>12.354</b>	<b>13.312</b>



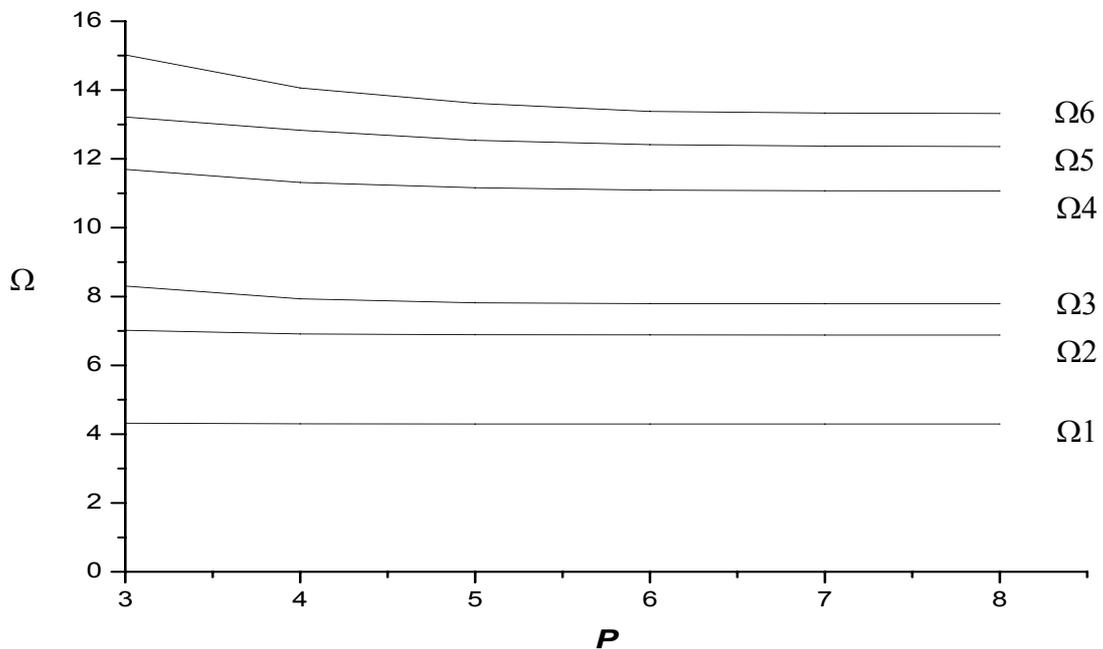
**FIG 5.2** : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L ( h =1).



**FIG 5.3** : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L ( h =3).



**FIG 5.4** : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L ( $h=6$ ).



**FIG 5.5** : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L ( $h=1$ ).

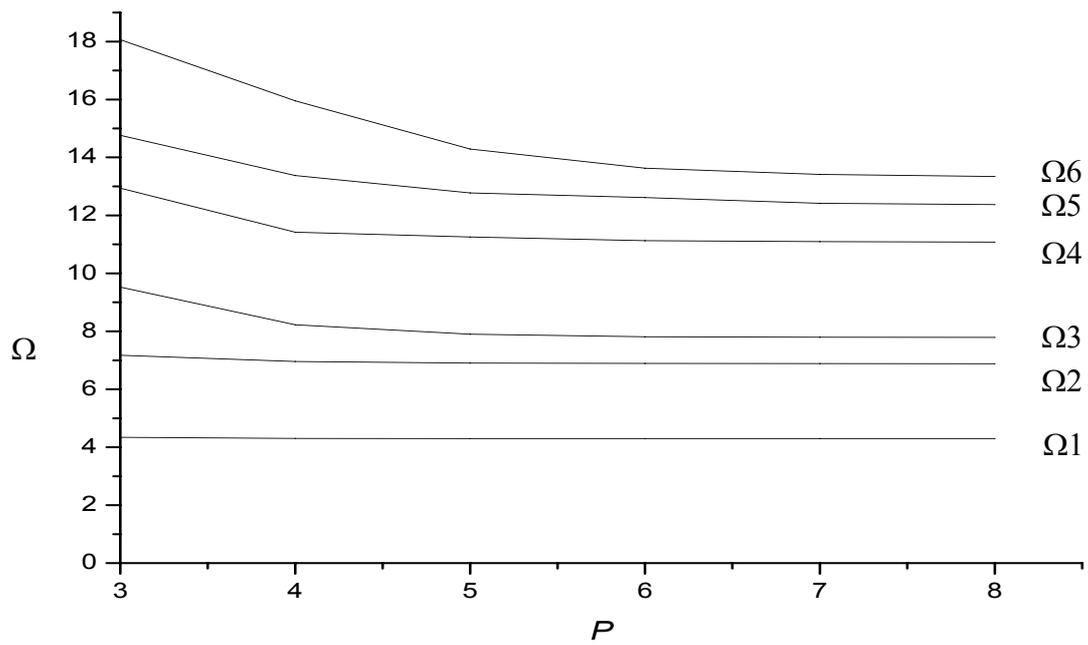


FIG 5.6 : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L ( h =3).

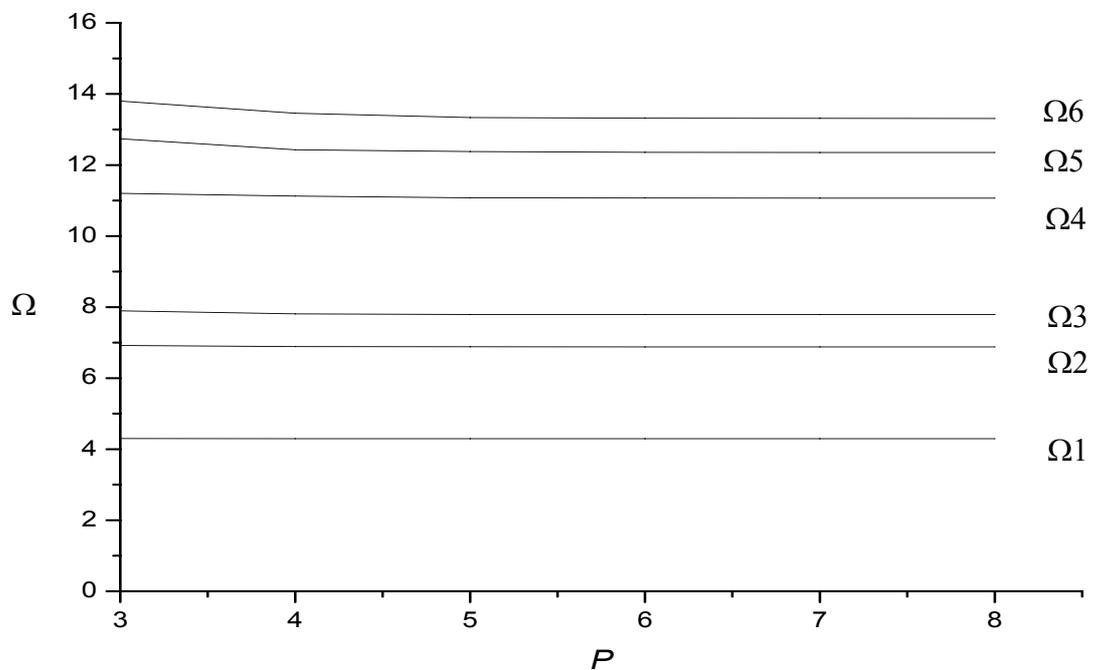


FIG 5.7 : Convergence des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels de la plaque triangulaire droite E-L-L ( h =6).

### 5.2.1 Discussion :

La variation des paramètres de fréquences des vibrations libres (modes flexionnels et extensionnels) d'une plaque triangulaire droite E-L-L, est présentée dans les tableaux (5.1 et 5.2). Nous remarquons que les résultats obtenus avec différentes discrétisations ( $h$ ) et pour différents degrés du polynôme d'interpolation ( $p$ ), la convergence est toujours atteinte. Ce qui indique que le programme est opérationnel.

Les résultats obtenus et celles données dans la référence [12] sont très proches et parfois identiques et cette légère différence est due aux nombres de degrés de liberté utilisés dans les deux méthodes.

Une convergence monotone et rapide a lieu en raffinant le maillage et/ou en augmentant le degré du polynôme d'interpolation  $p$ . Ceci confirme la convergence exponentielle de la méthode.

Les tableaux (5.1, 5.2) montrent que le degré  $p$  requis pour la stabilité de convergence change d'un maillage à un autre, d'où la convergence est assurée par un nombre bien déterminé de DDL : soit en augmentant  $h$  et en diminuant  $p$  soit l'inverse. Ainsi l'avantage de la version  $h-p$  n'est pas limité comme les deux autres version  $h$  et  $p$ .

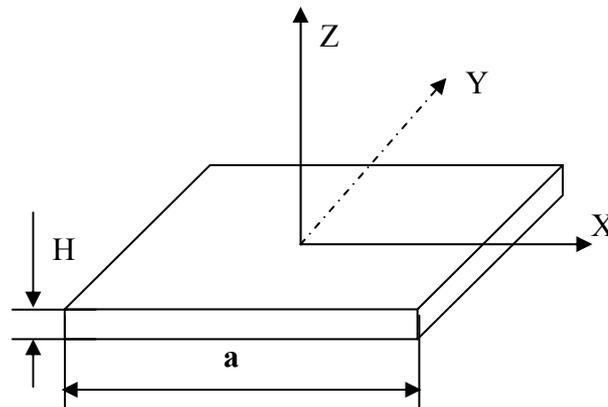
Nous constatons aussi que le maillage tridimensionnel assure une bonne répartition de DDL dans la discrétisation de la structure.

### **5.3 Etude Comparative de la théorie tridimensionnelle et les théories bidimensionnelles approchées des plaques :**

Dans cette partie nous étudierons une plaque carrée pour les cas de vibrations flexionnelles et extensionnelles. Après convergence nous fixerons le maillage ( $h=8$ ) et le degré de polynôme d'interpolation ( $p=6$ ). Les résultats obtenus pour les modes flexionnels sont comparés avec ceux obtenus par la théorie des plaques épaisses (théorie de Mindlin), et la théorie des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Les résultats correspondant aux modes extensionnels sont comparés avec ceux de la théorie des contraintes planes.

Les tableaux 5.3, 5.4, et les graphes (5.9-5.19) montrent la variation des paramètres de fréquences des modes flexionnels en fonction du rapport  $H/a$ , pour une plaque carrée A-A-A-A, A-L-A-L, les notations A et L indiquent un appui simple et un bord libre, respectivement avec  $a = 1$ .

Les tableaux 5.5, 5.6, et les graphes (5.20-5.31) montrent la variation des paramètres de fréquences des modes extensionnels en fonction du rapport  $H/a$ , pour une plaque carrée L-L-L-L, E-L-L-L la notation E indique un encastrement avec  $a = 1$ .



**FIG.5.8.** Plaque carrée L-L-L-L

### 5.3.1 Modes Flexionnels

a / Plaque carrée A-A-A-A :

**Tableau 5.3** : Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-A-A-A ( $\nu = 0.3$ ,  $a = 1$ ).

H/a	théories	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
0.01	3D	0.096	0.240	0.240	0.384	0.480	0.480
	Mindlin	0.096	0.240	0.240	0.384	0.480	0.480
	Kirchhoff	0.096	0.240	0.240	0.385	0.481	0.481
0.05	3D	0.468	1.162	1.162	1.822	2.287	2.287
	Mindlin	0.467	1.162	1.162	1.822	2.288	2.289
	Kirchhoff	0.481	1.204	1.204	1.925	2.409	2.409
0.1	3D	0.881	2.120	2.120	3.177	3.922	3.961
	Mindlin	0.893	2.166	2.166	3.285	4.091	4.098
	Kirchhoff	0.963	2.408	2.408	3.851	4.818	4.818
0.2	3D	1.450	3.109	3.109	3.919	4.178	4.178
	Mindlin	1.595	3.595	3.595	5.139	6.231	6.259
	Kirchhoff	1.926	4.816	4.816	7.703	9.636	9.636
0.3	3D	1.707	3.147	3.147	3.914	4.190	4.190
	Mindlin	2.112	4.446	4.446	6.124	7.247	7.311
	Kirchhoff	2.889	7.224	7.224	11.554	14.453	14.453
0.4	3D	1.767	2.824	2.824	3.821	3.954	4.001
	Mindlin	2.491	4.959	4.959	6.687	7.708	7.853
	Kirchhoff	3.852	9.631	9.631	15.405	19.271	19.271
0.5	3D	1.725	2.457	2.457	3.579	3.868	3.934
	Mindlin	2.773	5.274	5.274	6.283	6.283	6.283
	Kirchhoff	4.816	12.039	12.039	19.257	24.089	24.089

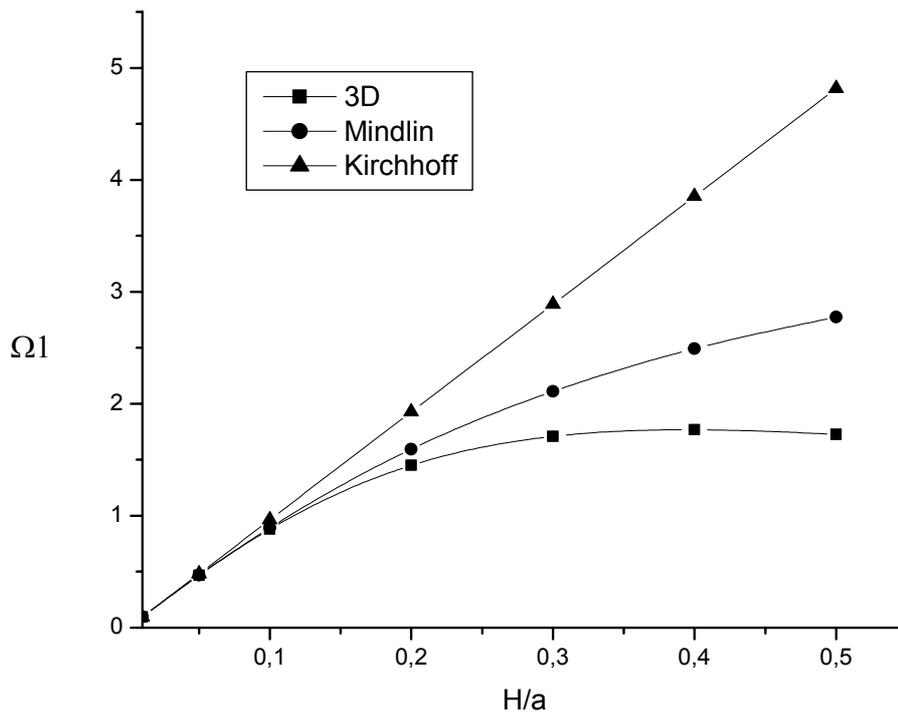


FIG 5.9 : Variation du paramètre de fréquence du premier mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-A-A-A.

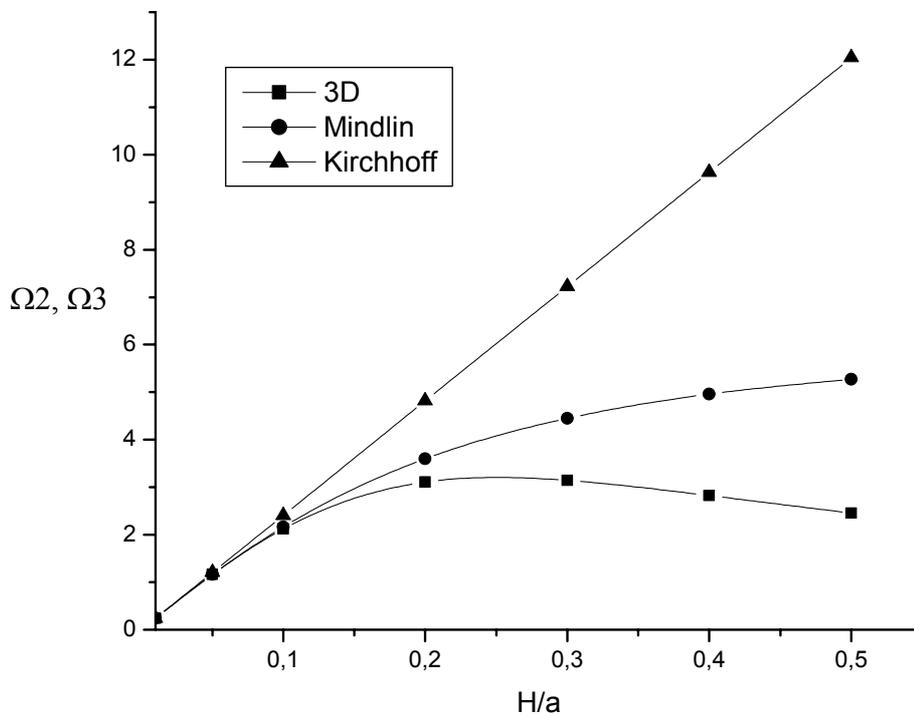


FIG 5.10 : Variation des paramètres de fréquences du 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> modes flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-A-A-A.

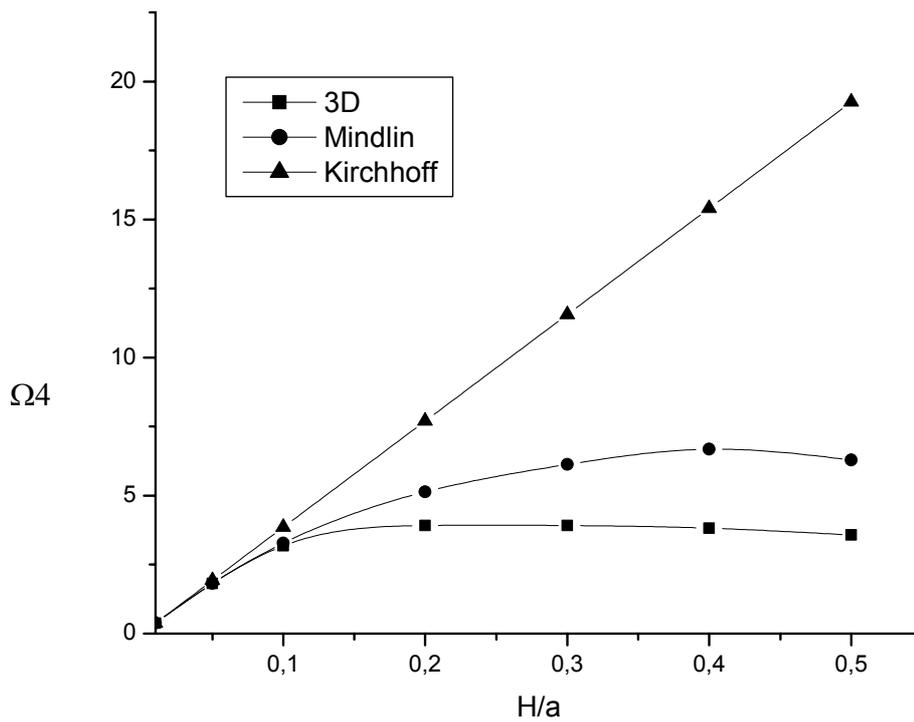


FIG 5.11 : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-A-A-A.

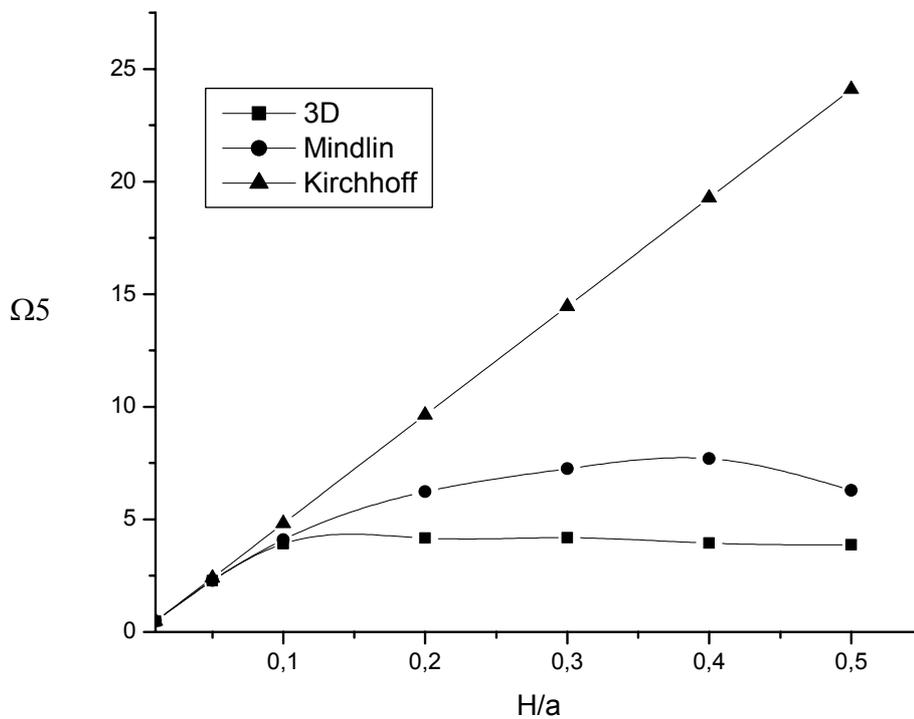
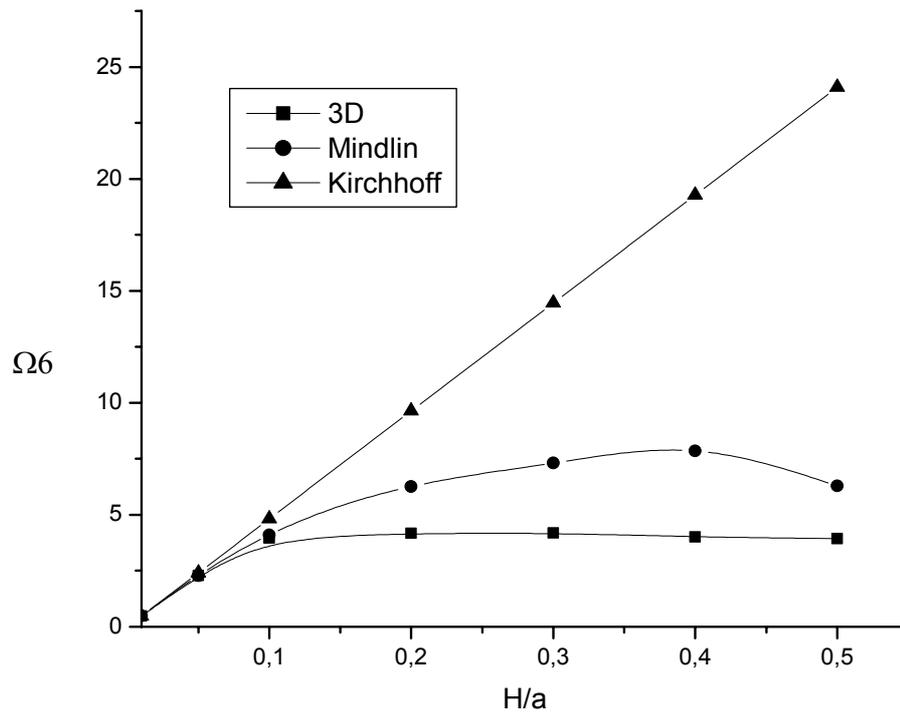


FIG 5.12 : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-A-A-A.



**FIG 5.13** : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-A-A-A.

**b / Plaque carrée A-L-A-L :****Tableau 5.4 :** Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes flexionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée A-L-A-L ( $\nu = 0.3$ ,  $a = 1$ ).

H/a	théories	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
0.01	3D	0.047	0.078	0.179	0.190	0.227	0.344
	Mindlin	0.047	0.078	0.186	0.190	0.227	0.343
	Kirchhoff	0.047	0.079	0.179	0.190	0.228	0.345
0.05	3D	0.233	0.380	0.860	0.931	1.101	1.633
	Mindlin	0.233	0.375	0.869	0.931	1.096	1.603
	Kirchhoff	0.235	0.393	0.896	0.950	1.140	1.726
0.1	3D	0.459	0.714	1.583	1.751	2.020	2.880
	Mindlin	0.460	0.711	1.599	1.770	2.035	2.832
	Kirchhoff	0.469	0.787	1.792	1.900	2.280	3.451
0.2	3D	0.843	1.169	2.508	2.725	3.003	3.922
	Mindlin	0.874	1.249	2.675	3.036	3.336	4.229
	Kirchhoff	0.940	1.574	3.584	3.801	4.561	6.903
0.3	3D	1.088	1.327	2.821	2.974	3.139	3.923
	Mindlin	1.222	1.619	3.363	3.828	4.049	4.832
	Kirchhoff	1.409	2.362	5.376	5.701	6.841	10.355
0.4	3D	1.188	1.292	2.538	3.062	3.251	3.923
	Mindlin	1.503	1.853	3.809	4.315	4.387	5.080
	Kirchhoff	1.880	3.149	7.168	7.602	9.122	13.807
0.5	3D	1.187	1.191	2.213	3.013	3.437	3.923
	Mindlin	1.727	1.983	4.106	4.426	4.611	5.163
	Kirchhoff	2.350	3.936	8.960	9.502	11.402	17.258

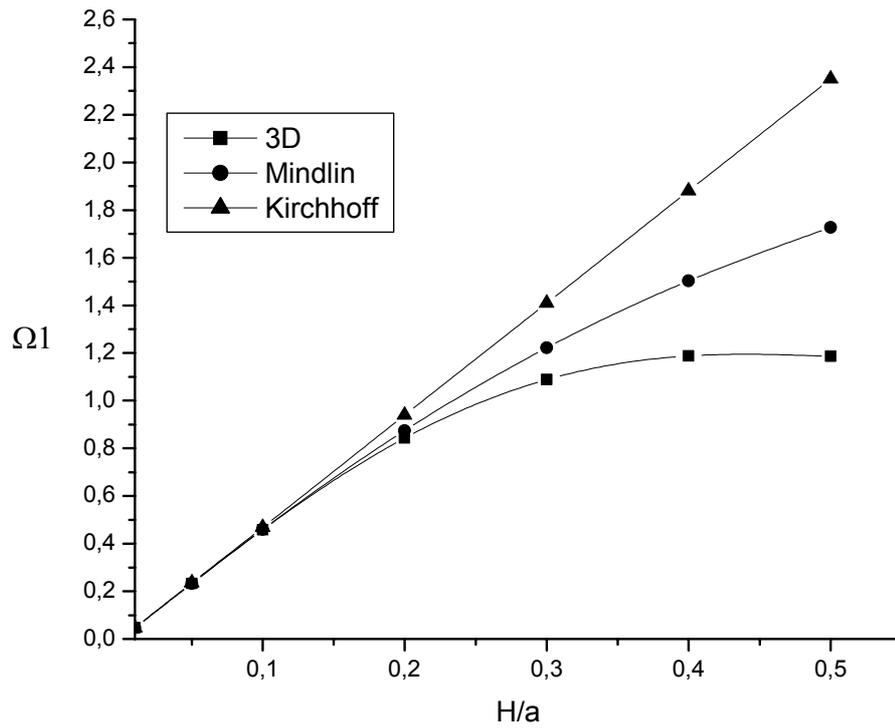


FIG 5.14 : Variation du paramètre de fréquence du premier mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-L-A-L

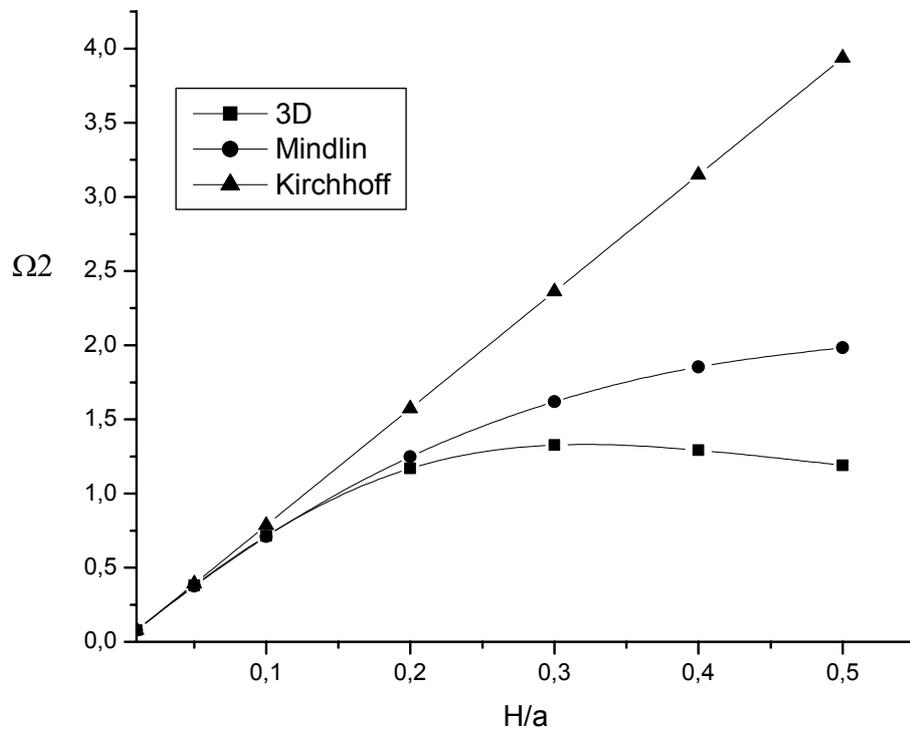


FIG 5.15 : Variation du paramètre de fréquence du deuxième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-L-A-L

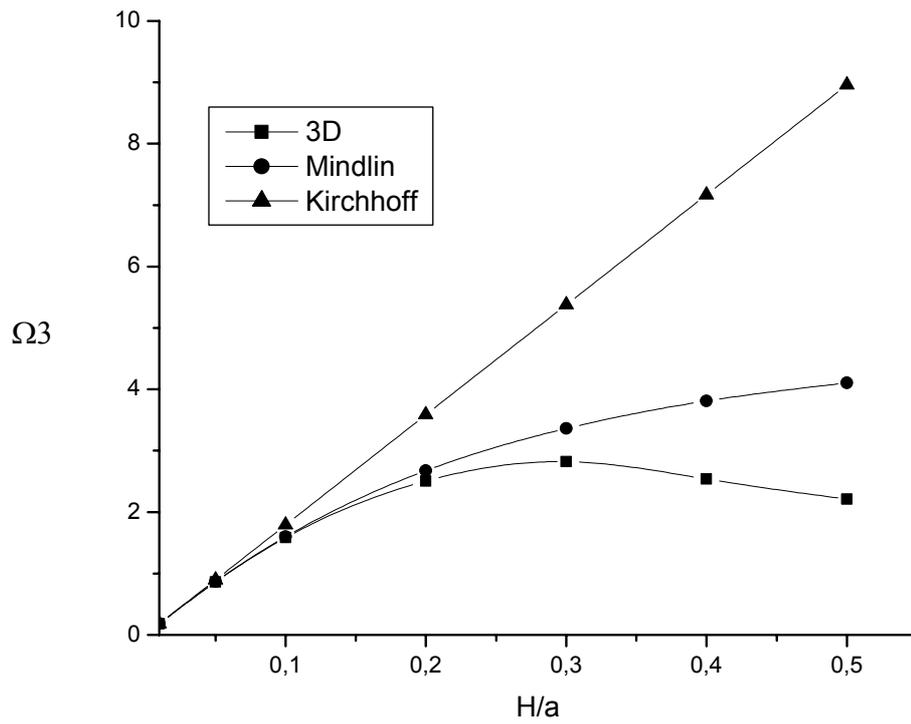


FIG 5.16 : Variation du paramètre de fréquence du troisième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-L-A-L.

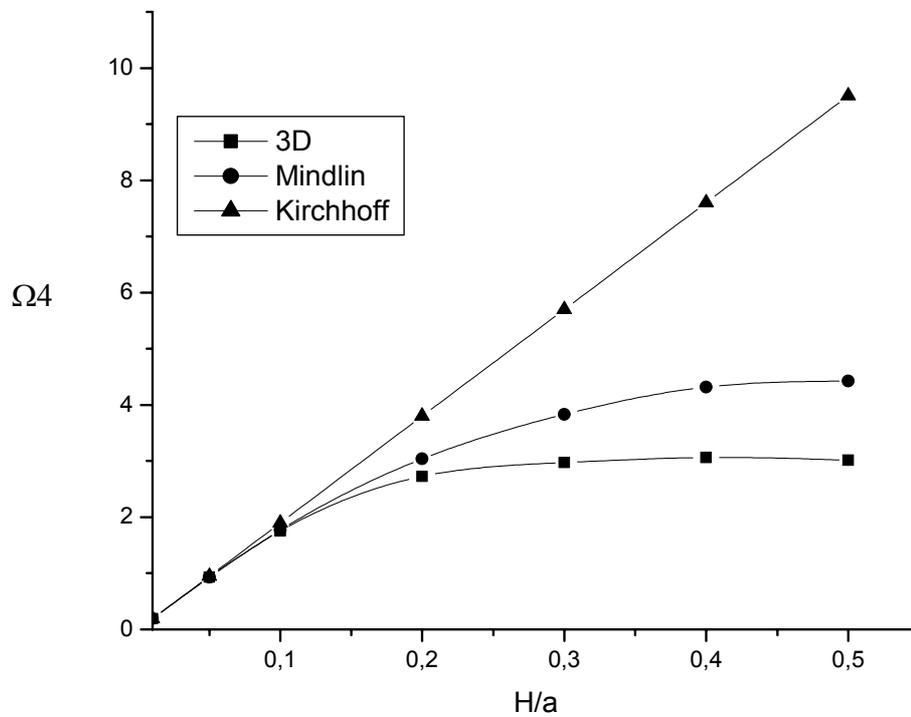


FIG 5.17 : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-L-A-L.

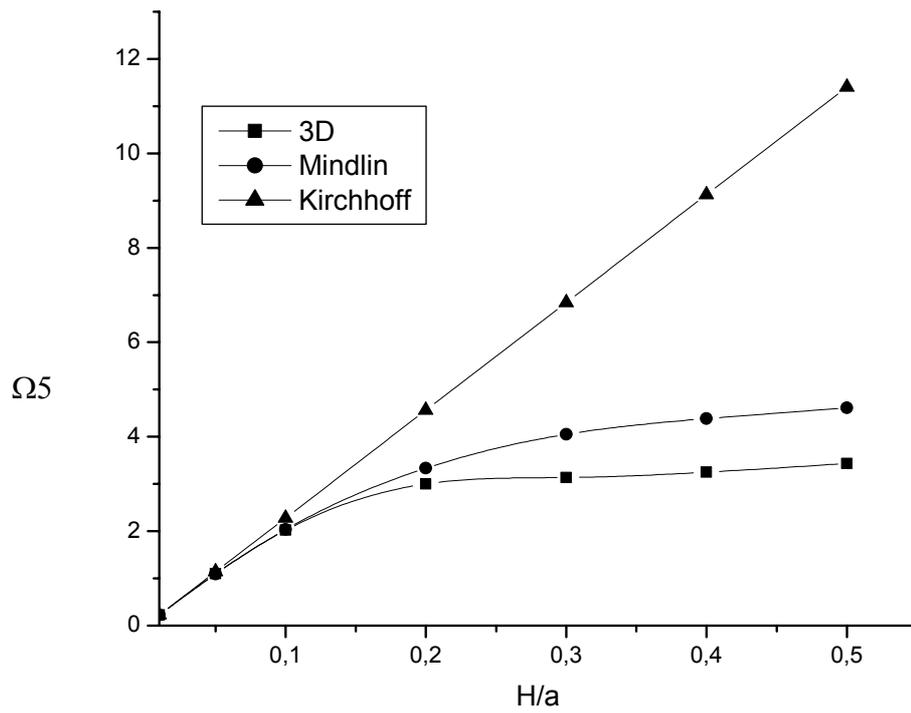


FIG 5.18 : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-L-A-L.

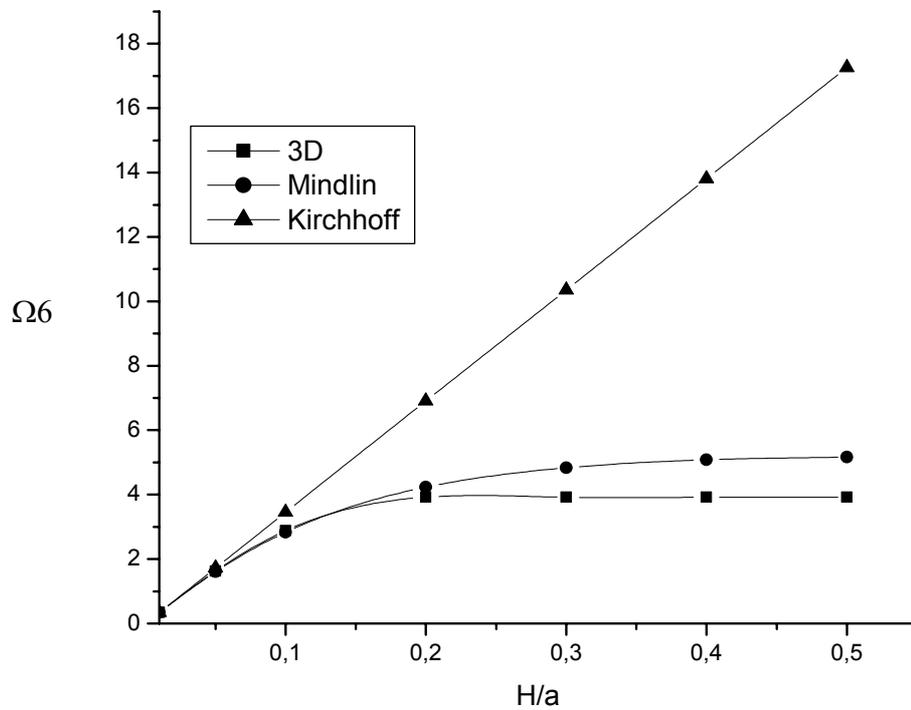


FIG 5.19 : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode flexionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée A-L-A-L.

### 5.3.2 Modes Extensionnels

#### a / Plaque carrée L-L-L-L :

**Tableau 5.5 :** Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L ( $\nu = 0.3$ ,  $a = 1$ ).

H/a	théories	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
0.01	3D	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835
	Contraintes-planes	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835
0.05	3D	3.922	4.177	4.177	4.442	5.047	5.828
	Contraintes-planes	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835
0.1	3D	3.922	4.174	4.174	4.442	5.042	5.806
	Contraintes-planes	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835
0.2	3D	3.921	4.164	4.164	4.442	5.015	5.705
	Contraintes-planes	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835
0.3	3D	3.920	4.142	4.142	4.442	4.947	5.470
	Contraintes-planes	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835
0.4	3D	3.917	4.087	4.087	4.442	4.765	5.018
	Contraintes-planes	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835
0.5	3D	3.846	3.846	3.912	4.442	4.442	4.442
	Contraintes-planes	3.922	4.177	4.177	4.443	5.049	5.835

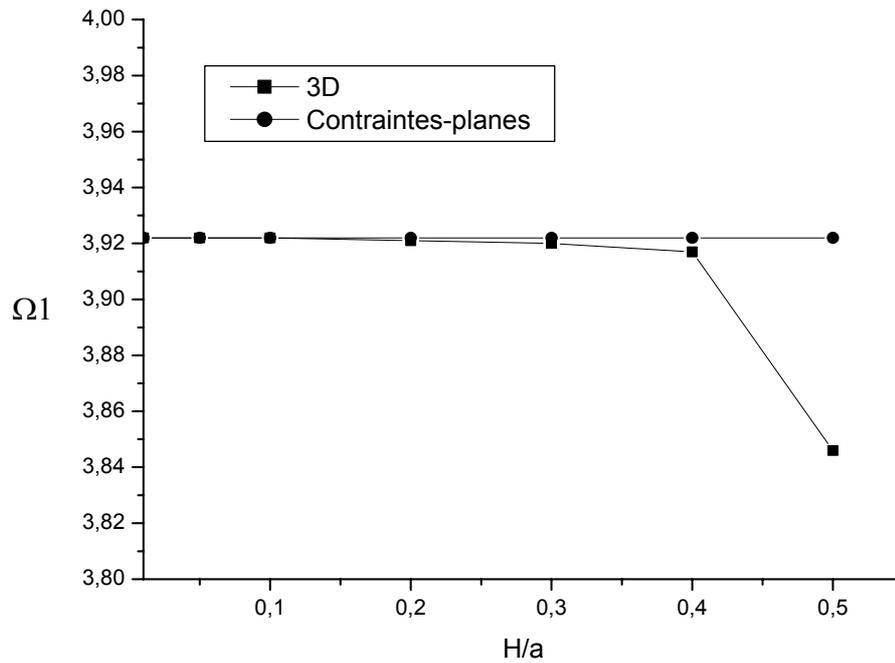


FIG 5.20 : Variation du paramètre de fréquence du premier mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.

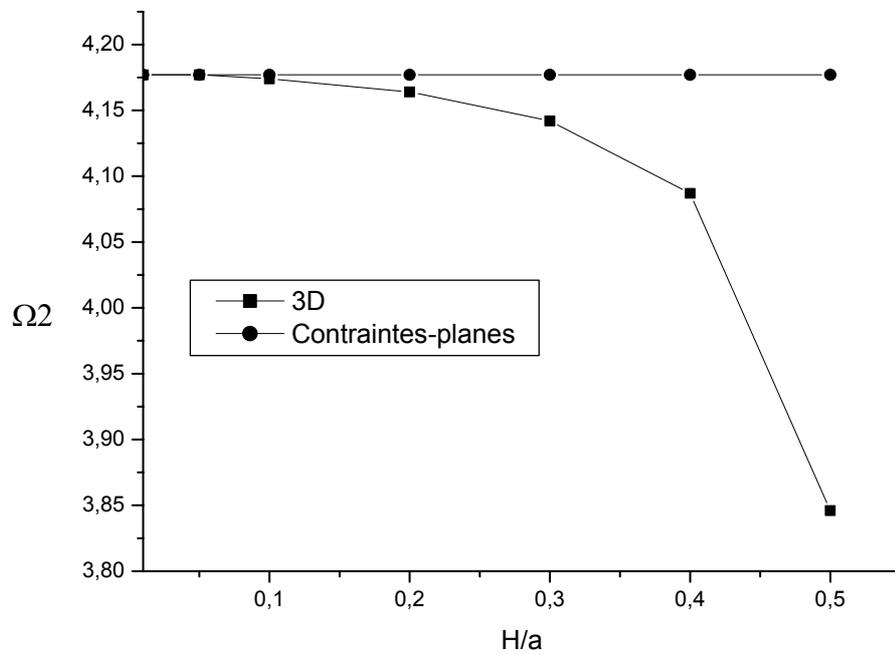


FIG 5.21 : Variation du paramètre de fréquence du deuxième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.

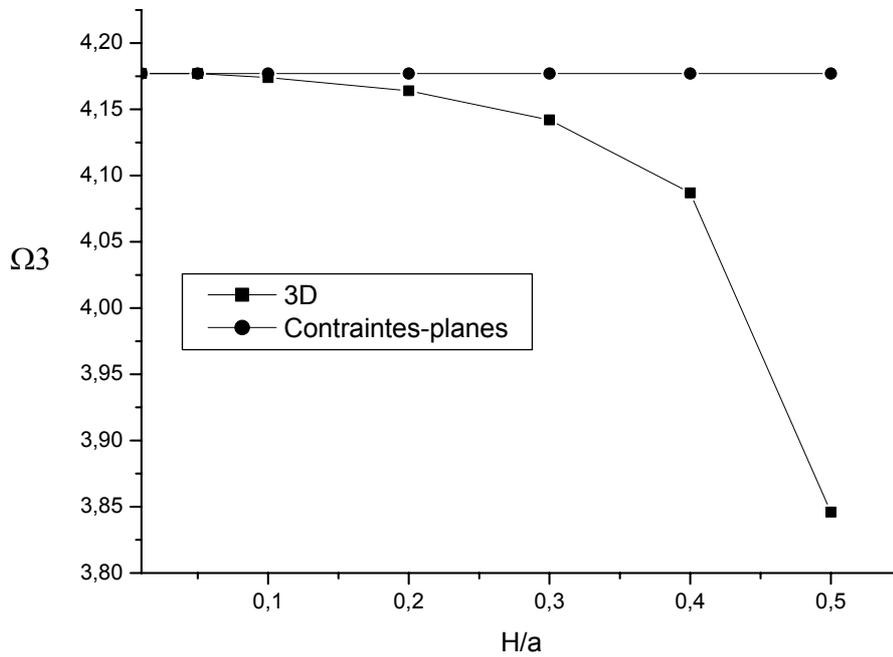


FIG 5.22 : Variation du paramètre de fréquence du troisième mode extensionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée L-L-L-L.

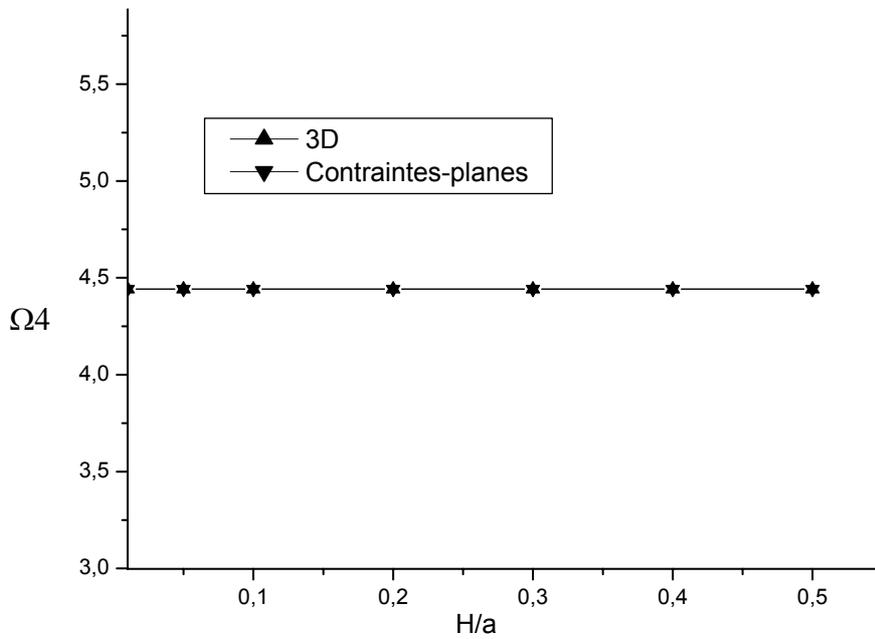


FIG 5.23 : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode extensionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée L-L-L-L.

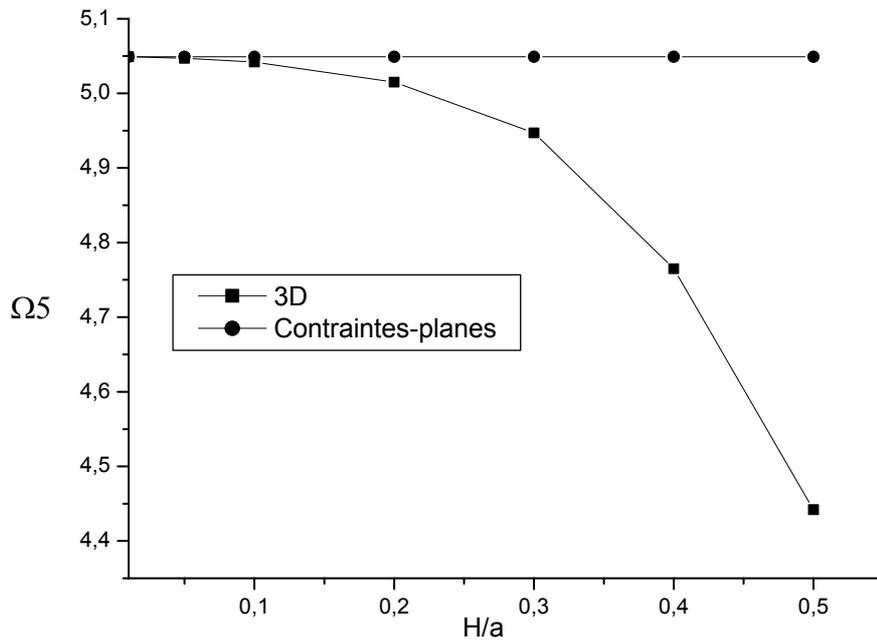


FIG 5.24 : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.

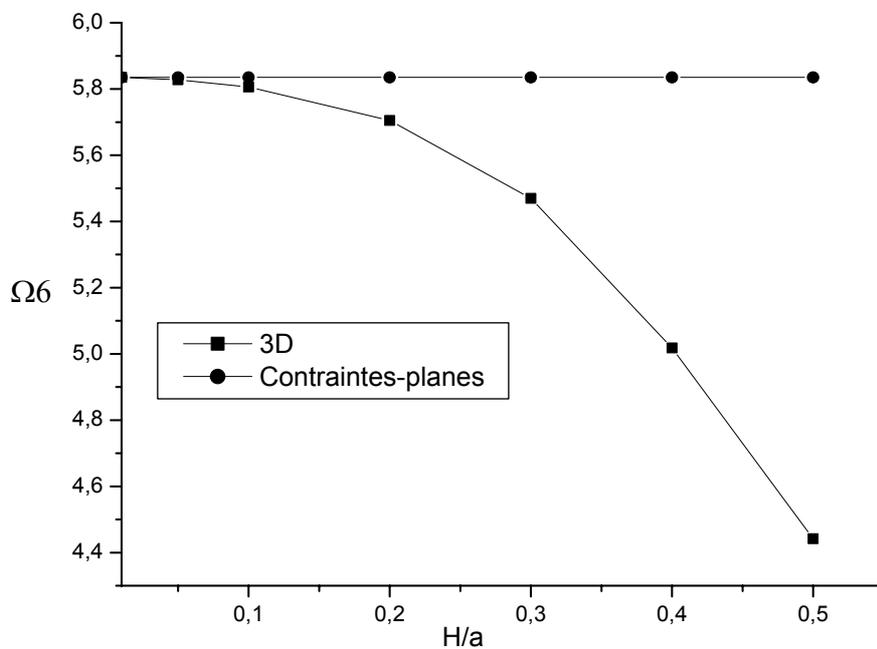


FIG 5.25 : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée L-L-L-L.

**b / Plaque carrée E-L-L-L :****Tableau 5.6 :** Variation des paramètres de fréquences des six premiers modes extensionnels en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée E-L-L-L ( $\nu = 0.3$ ,  $a = 1$ ).

H/a	théories	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
0.01	3D	1.065	2.551	2.858	4.541	4.900	5.198
	Contraintes-planes	1.061	2.547	2.858	4.540	4.897	5.196
0.05	3D	1.065	2.555	2.858	4.539	4.901	5.198
	Contraintes-planes	1.061	2.547	2.858	4.540	4.897	5.196
0.1	3D	1.067	2.559	2.858	4.536	4.903	5.195
	Contraintes-planes	1.061	2.547	2.858	4.540	4.897	5.196
0.2	3D	1.070	2.566	2.858	4.521	4.906	5.174
	Contraintes-planes	1.061	2.547	2.858	4.540	4.897	5.196
0.3	3D	1.073	2.571	2.856	4.488	4.905	5.119
	Contraintes-planes	1.061	2.547	2.858	4.540	4.897	5.196
0.4	3D	1.076	2.575	2.854	4.408	4.892	4.986
	Contraintes-planes	1.061	2.547	2.858	4.540	4.897	5.196
0.5	3D	1.078	2.577	2.850	4.161	4.439	4.697
	Contraintes-planes	1.061	2.547	2.858	4.540	4.897	5.196

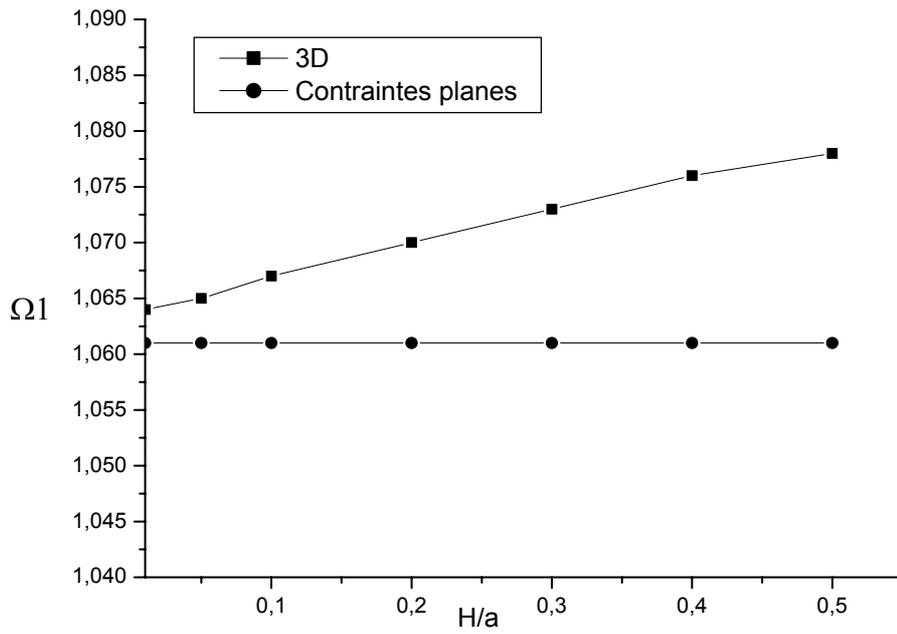


FIG 5.26 : Variation du paramètre de fréquence du premier mode extensionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée E-L-L-L.

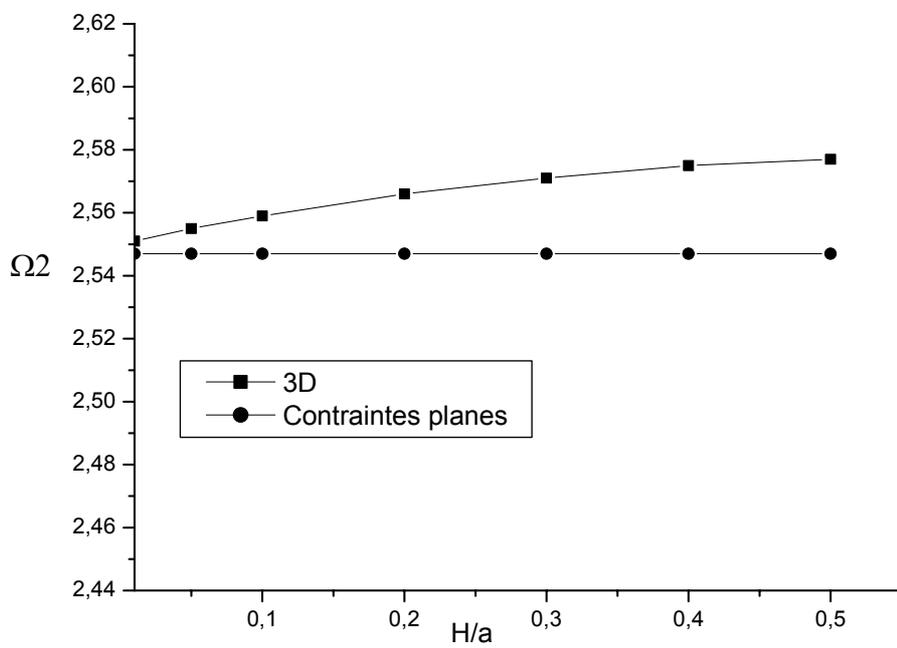


FIG 5.27 : Variation du paramètre de fréquence du deuxième mode extensionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée E-L-L-L.

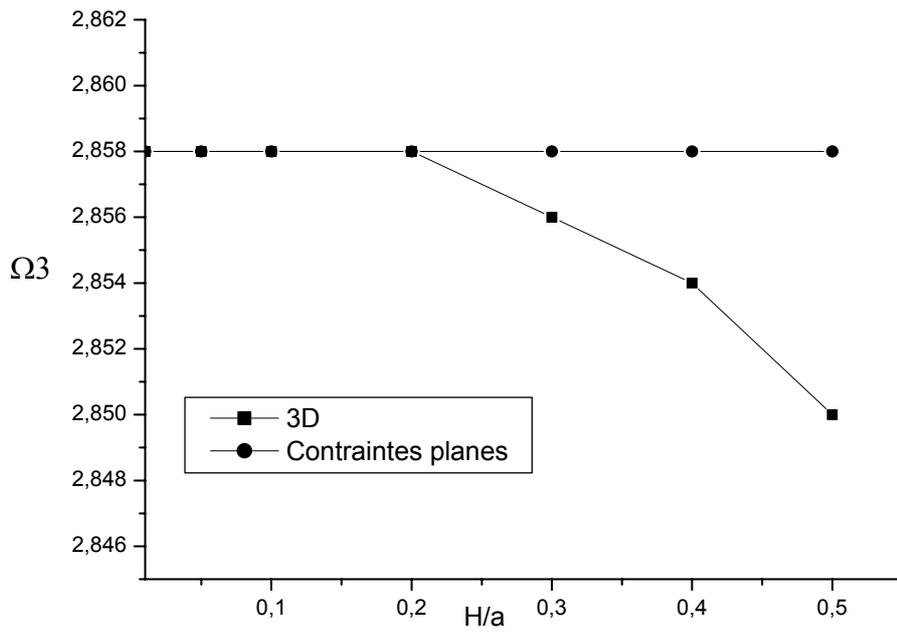


FIG 5.28 : Variation du paramètre de fréquence du troisième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.

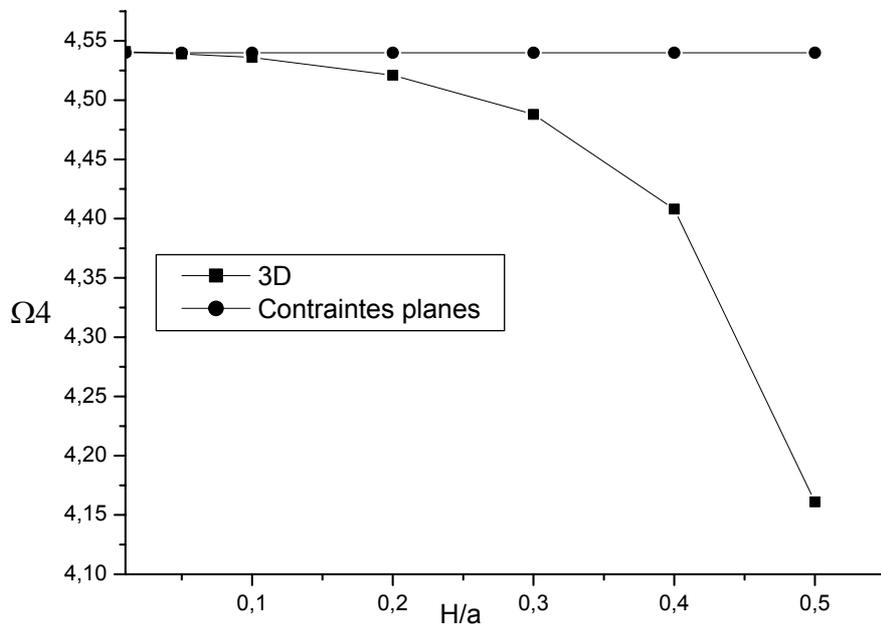
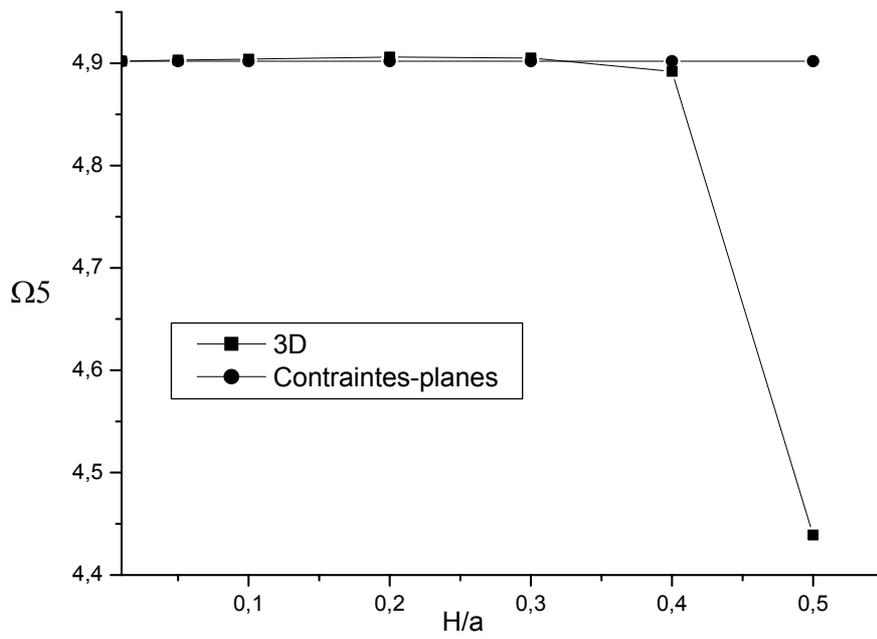
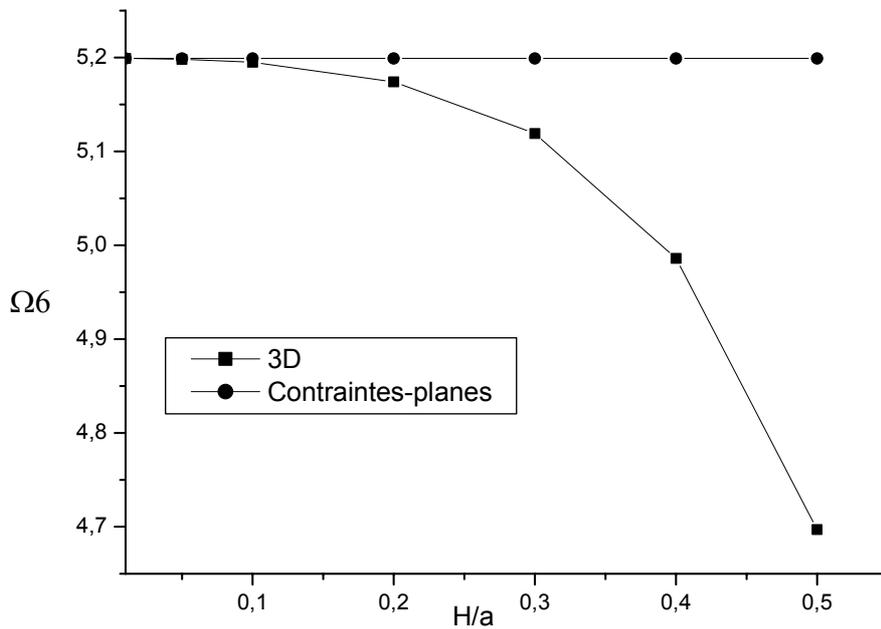


FIG 5.29 : Variation du paramètre de fréquence du quatrième mode extensionnel en fonction du rapport H/a de la plaque carrée E-L-L-L.



**FIG 5.30** : Variation du paramètre de fréquence du cinquième mode extensionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée E-L-L-L.



**FIG 5.31** : Variation du paramètre de fréquence du sixième mode extensionnel en fonction du rapport  $H/a$  de la plaque carrée E-L-L-L.

### 5.3.5 Discussion :

Dans cette étape de validation nous comparons les résultats obtenus par le programme élaboré (analyse tridimensionnelle) et les résultats obtenus par les trois autres théories de plaques (Mindlin, Kirchhoff et contraintes planes). Les résultats sont donnés sous forme de tableaux et de graphes.

#### **a / Modes flexionnels ( Fig5.9-Fig5.19) :**

Les courbes de variation des paramètres des fréquences en fonction du rapport  $H/a$  dans la théorie de Kirchhoff sont des droites d'où les paramètres de fréquences varient linéairement en fonction de  $H/a$ . La deuxième remarque dans le cas où  $H/a = 0.01$  (cas d'une plaque mince), les résultats des trois théories sont identiques, nous expliquons ce phénomène par le fait que les contraintes de cisaillements sont négligeables puisque l'épaisseur est très petite par rapport aux autres dimensions. Cette remarque est valable même pour  $H/a = 0.05$ . Par contre pour  $H/a \geq 0.1$ , les trois courbes s'éloignent l'une de l'autre jusqu'à où cette différence devient importante pour  $H/a = 0.5$  pour les six modes étudiés. Nous remarquerons pour le cas tridimensionnel, les courbes présentent une légère crête alors que les courbes des deux autres théories bidimensionnelles augmentent.

Donc d'après ces résultats, les approximations des contraintes faites dans la théorie de Kirchhoff, et le facteur de correction du cisaillement transversal utilisé dans la théorie de Mindlin sont valables uniquement pour des faibles épaisseurs.

#### **b / Modes extensionnels ( Fig5.20-Fig5.31) :**

Pour la plaque libre, les résultats obtenus par la théorie des contraintes planes sont des droites parallèles à l'axe des abscisses. Ainsi les paramètres de fréquences de cette théorie ne dépendent pas de l'épaisseur. Par contre les graphes obtenus par la théorie tridimensionnelle sont des courbes décroissantes pour les six modes dans le cas de la plaque libre, ce qui explique l'influence de l'épaisseur sur les paramètres de fréquences. Mais il existe des modes qui ne dépendent pas de l'épaisseur tel que le quatrième mode. Dans le cas d'une plaque très mince  $H/a = 0.01$ , les deux théories donnent les mêmes résultats.

Dans le cas de la plaque E-L-L-L nous remarquons à partir des graphes des deux premiers modes, que les paramètres de fréquences dépendent de l'épaisseur et aussi des conditions aux limites. Ces deux graphes augmentent en fonction de l'épaisseur. Par contre les quatre autres modes décroissent, ce qui explique l'influence des conditions aux limites sur les paramètres de fréquences.

D'après les résultats obtenus dans ce travail, nous observons que les critères qui déterminent si une plaque est mince ou épaisse (§2.3 ,§2.4) et qui sont valables en analyse statique, ne sont généralement pas le cas en analyse vibratoire. Ceci s'explique par le fait qu'en vibration l'épaisseur n'est pas le seul facteur déterminant mais d'autres facteurs tels que le coefficient de Poisson et le facteur de correction du cisaillement transversal peuvent aussi être déterminants.