



République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté De Technologie
Département de Génie Electrique et Electronique



Projet de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master En Génie Industriel

Spécialité : Ingénierie de la production
Ingénierie de système

Intitulé :

**Etude mathématiques et optimisation des dimensions
d'un système automatisé de stockage/déstockage (AS/RS)
à racks glissants**

Présenté par :

ARAIBI Safia

BELMAMOUNE Manal Abir

Devant les jurés :

Présidente	Mme. Y. HOUBAD	MAA UABB Tlemcen
Examineur	M. A. GUEZZEN	MCB UABB Tlemcen
Encadré par	M. A. RIMOUCHE	MCB UABB Tlemcen
	Mme. L. GHOMRI	MCA UABB Tlemcen

Année universitaire 2019-2020

Dédicace...

Du profond de mon cœur, je dédie ce modeste travail ...

A mes *parents*.

Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. J'aurais tant aimé que vous soyez présents, que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A ma chère sœur *Ismahane*,

A mes cher frère *Omar, Hakim, Mohammed*,

A mes chers oncles, tantes, leurs époux et épouses, et à mes chères
cousines cousins,

A toute ma grande famille,

Pour tous leurs encouragements et le soutien moral.

A mon binôme *Abir*

A mes chers encadrants *Mme Ghomri* et *Mr Rimouche*
Pour leurs patience, leurs encouragement, leurs aide pour la
réalisation de ce travail.

A tous mes amis, tout particulièrement *Assma Houar*.

A tous mes chers professeurs

A tous mes collègues de la filière Génie industriel

A vous cher lecteur

Safia

Dédicace...

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers,

A mes chers *parents*,
Pour tous leurs sacrifices, leurs amours, leurs tendresses
et leurs prières tout au long de mes études.

A mes *grandes mères*,
A mes chères sœurs *Samah, Fatima et Douaa*,
A mon cher frère *Benameur*,
A mes tantes *Rekia, Nacira, Souad, Atika, Khadîdja et Soumia*,
A mes oncles *Mohammed, Ismail, Ahmed, Omar et Ali*
A toute ma grande famille,
Pour tous leurs encouragements et le soutien moral.

A mon binôme *Safia*
A mes chers encadrants *Mme Ghomri* et *Mr Rimouche*
Pour leurs patience, leurs encouragement, leurs aide pour la
réalisation de ce travail.

A mes meilleurs amies *Assia, Siham et Sarah*.

A la mémoire de mon professeur *Mr Bensmaine Abderrahmane*, qui
était et reste pour moi l'exemple de la patience et la motivation.

A tous mes chers professeurs
A tous mes collègues de la filière Génie industriel

Abir

Remerciements

Un grand merci au tout puissant qui nous a donné force et persévérance.

Nous remercions particulièrement nos encadreurs Mme.GHOMRI Latéfa et M. RIMOUCHE Ali pour leurs soutiens et orientations qui nous ont permis de réaliser ce modeste travail.

Merci au membre de jury pour leurs critiques et leurs enrichissements.

Toutes notre gratitude va à tout nos enseignants qui nous ont suivie durant toute notre cursus est particulièrement M. MALIKI Fouad et Mme. HOUBAD Yamina pour leurs soutiens, conseils et disponibilités durant la réalisation de ce travail.

Toutes notre gratitude va à nos parents pour leurs sacrifices qui nous ont aidé pour arriver à terminer nos études supérieures par leurs encouragements et soutien.

Enfin un remerciement très particulier à ceux qui nous ont donné le courage pour surmonter les moments difficiles durant cette mémoire, pour leur soutien et leur confiance.

À toutes et à tous, un grand merci !

Sommaire

Introduction générale 9

Chapitre 1 : Modélisation du temps de simple cycle de l'AS/RS multi

allées et à rack glissant.....11

1. Introduction 12

2. Les AS/RS multi-allées 12

2.1 Description de l'AS/RS multi allées..... 12

2.2 Fonctionnement de l'AS/RS multi allées 13

2.3 Hypothèses et Notations 15

2.4 Modélisation mathématique du temps de simple cycle d'un AS/RS multi-allées
..... 15

3. AS/RS à rack glissant..... 16

3.1 Description..... 16

3.2 Fonctionnement 16

3.3 Modélisation mathématique du temps de simple cycle d'un AS/RS à rack
glissant..... 17

4. Conclusion.....20

Chapitre 2 : Etude mathématiques de la fonction du temps de simple

cycle de l'AS/RS à rack glissant21

1. Introduction 22

2. Cas $tr = 0$ 22

3. Cas $tr \neq 0$ 25

3.1 Continuité..... 25

3.2 Convexité 29

4. Conclusion.....30

Chapitre 3 : Optimisation du temps de simple cycle de l'AS/RS à rack

glissant	31
1. Introduction	32
2. Les Métaheuristique	33
2.1 Les métas heuristiques à solution unique	33
2.2 Les métas heuristiques à population de solutions.....	34
2.2.1 Méthodes basées sur des populations (Les méthodes évolutives).....	34
2.2.2 Les algorithmes génétiques	36
3. Les méthodes de descente :	40
4. Optimisation du temps de simple cycle pour un AS/RS à rack glissant....	42
4.1 Optimisation par Métaheuristique pour l'AS/RS à rack glissant	45
4.2 Optimisation par méthodes de descente pour l'AS/RS à rack glissant.....	50
5. Approximation des temps tp et th en fonction de tr	54
5.1 Approximation au sens des Splines cubiques	54
5.2 Approximation au sens des moindres carrées non linéaires	58
6. Etude de volume.....	61
7. Conclusion.....	66
Conclusion générale	67
Bibliographie	69
Annexes	70

Liste des figures

Figure 1: Vue de dessus d'un AS/RS multi allées	13
Figure 2: Déplacement de la machine S/R	13
Figure 3: Simple cycle.....	14
Figure 4: Double cycle	14
Figure 5: Configuration d'un système à rack glissant	17
Figure 6 : Graphe de la fonction $ESCtr$	25
Figure 7 : Organigramme d'un algorithme évolutionnaire	36
Figure 8 : Sélection par roulette	38
Figure 9 : Sélection par tournoi.....	38
Figure 10 : Croisement à un point.....	39
Figure 11 : Croisement à deux points.....	39
Figure 12 : Croisement uniforme	39
Figure 13 : Opérateur de mutation	40
Figure 14: Discriminant hessienne $\Delta = rt - s^2$	44
Figure 15 : Premier mineur "r" de la matrice hessienne.....	44
Figure 16 : Organigramme d'adaptation de l'AG pour le TSC de l'AS/RS multi allées.....	46
Figure 17 : Croisement.....	47
Figure 18 : Mutation.....	47
Figure 19 : Le résultat donné par l'AG	47
Figure 20 : Organigramme d'adaptation de l'AG pour le TSC de l'AS/RS à rack glissant.....	48
Figure 21 : Tracé de la fonction g_1 en positionnant les points minima	55
Figure 22 : Tracé de la fonction g_2 en positionnant les points minima	56
Figure 23 : Courbe représentante les points minima et la fonction approximative.....	60
Figure 24 : Courbe représentante les points minima et la fonction approximative.....	61
Figure 25 : tp minimal en fonction de tr pour des volumes différents	64
Figure 26 : la droite $tp = tr$	65

Liste des tableaux

Tableau 1 : Vérification numérique de l'égalité $2 * ESC0(tp, th, tv) = ESCtp, th, tv)$	24
Tableau 2 : Les courbes d'intersections entre les domaines	28
Tableau 3 : les résultats de la simulation par l'algorithme génétique.....	50
Tableau 4 : les Résultats de la simulation par l'algorithme du gradient	53
Tableau 5 : Résultat de la somme des dimensions optimales	57
Tableau 6 : tp minimal pour des volumes différents	63

Introduction générale

Au cours des dernières années, les systèmes automatisés de stockage / récupération (AS / RS) sont devenus le centre d'intérêt de nombreuses entreprises et centres de distribution, grâce aux principaux avantages qu'ils offrent, tels que la réduction des délais de livraison, des économies de main-d'œuvre et de l'espace au sol, plus rapidement et plus encore. Fonctionnement fiable de l'entrepôt, diminution des erreurs de manipulation et amélioration du débit. Les AS / RS sont principalement introduits pour éliminer la marche qui représentait 70% du temps de récupération manuelle (Lee 1997). Les AS / RS sont largement utilisés dans une variété d'industries, en tant que composant essentiel d'un système de fabrication flexible (FMS) (Van Den Berg et al. 2000). De plus, AS / RS peut être classé comme des systèmes mécatroniques (Sharma et Sharma 2015). [1]

Selon le Material Handling Institute of America, un système automatisé de stockage et de récupération (AS / RS) se compose d'une variété de systèmes de matériel et de contrôle qui manipulent le stockage et la récupération des charges avec précision, exactitude et grande vitesse (Material Handling Institute 1977). En général, un AS / RS comprend les principaux composants suivants : racks de stockage, allées, machines de stockage et de récupération (S / R), stations de ramassage / dépose (P / D) et système de contrôle. Les racks sont composés de bacs pouvant stocker des charges. Les allées sont les espaces entre les racks. Les machines de stockage et de récupération sont des grues entièrement automatisées qui peuvent ramasser et déposer des charges. Les stations de ramassage / dépose (P / D) sont utilisées pour les charges entrantes et sortantes. Le système de contrôle est responsable de la gestion des opérations de stockage et de récupération. [1]

Les structures AS / RS sont conçues en fonction de leurs différentes tailles, poids et volumes de charges à manipuler et caractérisées de l'entrepôt. Ces différentes structures comprennent l'AS / RS à charge unitaire, l'AS / RS à mini-charge, l'AS / RS homme à bord, le AS / RS carrousel, l'AS / RS à voie profonde, l'AS / RS à plusieurs allées, l'AS mobile-rack / RS et Flow-Rack AS / RS. [1]

Notre travail a pour objectif de faire une étude mathématique (continuité, convexité, dérivabilité) de la fonction qui représente le système automatisé de stockage et récupération et de déterminer les dimensions optimales d'un AS/RS à rack glissants en utilisant un algorithme génétique basée sur un modèle analytique du temps de cycle simple établies par Zeroual.

Sari a établi des expressions analytiques discrètes pour les AS/RS multi allées et à racks

glissants. Ghomri et al ont développé deux modèles analytiques continus permettant un calcul du temps moyen de simple cycle, dans le premier modèle le cas où le temps de glissement des racks est inférieur au temps de déplacement le long de l'allée principale, et dans le deuxième modèle le cas où le temps de glissement des racks est supérieur au temps de déplacement le long de l'allée principale.

En résumé, dans la littérature, plusieurs modèles de temps de parcours ont été développés et différents types de AS / RS ont été présentés.

A notre connaissance, aucune étude ne traite de l'optimisation de ce modèle continue développé par Zeroual.

Dans le premier chapitre, Nous présenterons initialement des définitions, la configuration ainsi que les hypothèses et les notations utilisées d'un AS/RS multi allées et à rack glissants. Par la suite, nous montrons L'expression analytique du temps de simple cycle d'un AS/RS multi allées établi par et (Ghomri et al) et à rack glissants. Dans deux travaux différents Guezzen et al. (2011a, 2011b) ont formulé les expressions analytiques qui évaluent le temps moyen de simple cycle pour le système à racks glissants en se basant sur les travaux de (Ghomri et al. 2008) et (Bozer et al. 1984).

Le deuxième chapitre nous effectuons une étude mathématique de l'expression analytique de l'AS/RS à rack glissant.

Le troisième chapitre nous proposons deux méthodes d'optimisation, une Métaheuristique qui représente l'algorithme génétique, et une méthode de descente qui représente l'algorithme de gradient qui donne un résultat plus précis du temps de parcours de la machine S / R, ainsi une approximation des points minima trouvé à des fonctions qui exprime le temps de déplacement en utilisant les Splines cubiques et les moindres carrés non linéaire.

Chapitre 1 : Modélisation du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées et à rack glissant

1. Introduction

Jusqu'à aujourd'hui, Les AS/RS amènent un intérêt de plus en plus grandissant, à cause des avantages importants qu'ils présentent (un faible coût au niveau de la main-d'œuvre, une meilleure exploitation de l'espace de stockage,...). Malgré le fait que les AS/RS disposent d'un grand nombre d'avantages, ils affichent quelques problèmes liées à leur structure de grandes dimensions par exemple la mesure des performances d'un AS/RS peut se faire par rapport à ses temps de cycle mais il n'existe pas un cadre théorique ou une méthodologie standard permettant une résolution de ces problèmes. Plusieurs modèles sont développés et il n'existe aucune réponse toute faite pour choisir le modèle le mieux adapté. Les modèles développés dans ce chapitre sont les AS/RS multi-allées et à racks glissants avec leurs expressions continu du temps de simple cycle de la machine S/R pour une opération de stockage ou déstockage.

Dans ce premier chapitre, nous présentons la modélisation du temps de simple cycle des systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS multi-allée et à rack glissant qui contiennent en premier des définitions, la configuration ainsi que les hypothèses et les notations utilisées respectivement. Par la suite, nous montrons L'expression analytique du temps de simple cycle d'un AS/RS multi allées établi par [2] et à rack glissants. Dans deux travaux différents (Guezen et al) ont formulé les expressions analytiques qui évaluent le temps moyen de simple cycle pour le système à racks glissants en se basant sur les travaux de [2] et (Bozer et al. 1984).

2. Les AS/RS multi-allées

2.1 Description de l'AS/RS multi allées

Un AS/RS multi allées est composé d'un ensemble de racks fixes, disposés deux à deux en parallèle et séparés par des allées. Chacune de ces allées, appelée allée de desserte donne accès aux deux racks. Une allée commune placée perpendiculairement aux racks relie toutes les allées de desserte (figure 1).

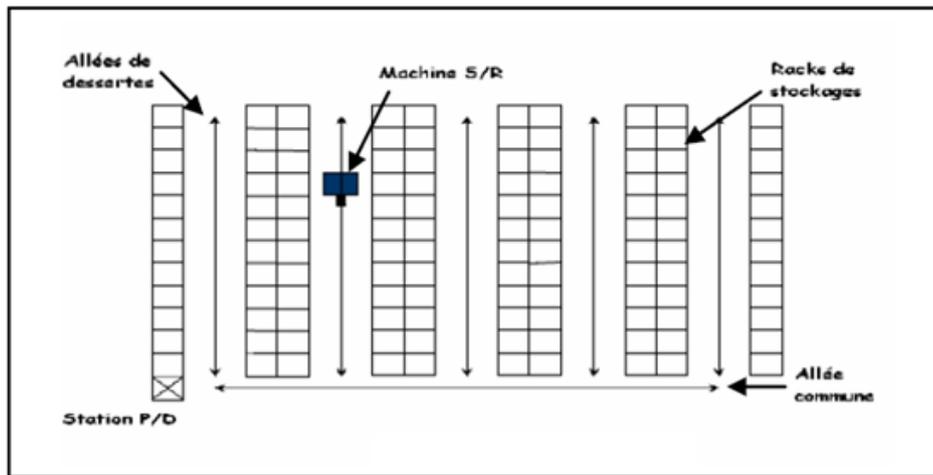


Figure 1: Vue de dessus d'un AS/RS multi allées

Une machine de stockage/déstockage dessert l'ensemble des racks, cette machine S/R se déplace, suivant trois axes : verticalement, le long des colonnes formants les racks, horizontalement, le long des allées de desserte et transversalement, le long de l'allée commune dont l'une des extrémités est équipée d'une station de dépôt/livraison (P/D). Cette machine se déplace simultanément dans les deux directions horizontale et verticale, afin de réduire le temps de cycle moyen. Ce mouvement est appelé déplacement de Tchebychev (Figure 2.).[7]

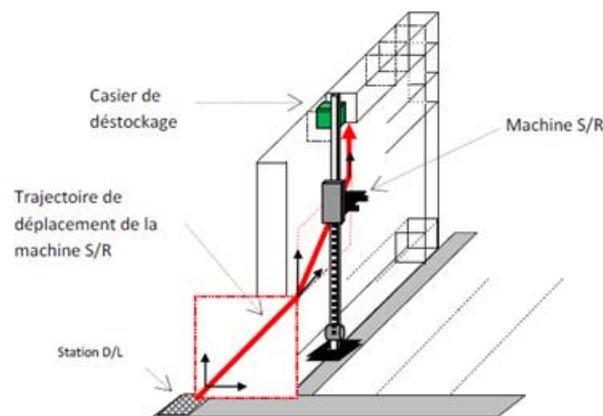


Figure 2: Déplacement de la machine S/R

2.2 Fonctionnement de l'AS/RS multi allées

La machine S/R pourrait fonctionner soit en simple cycle soit en double cycle. Dans le simple cycle, la machine S/R exécute, soit un stockage, soit un déstockage par cycle. Le temps nécessaire pour exécuter une seule commande est dit temps de simple cycle.

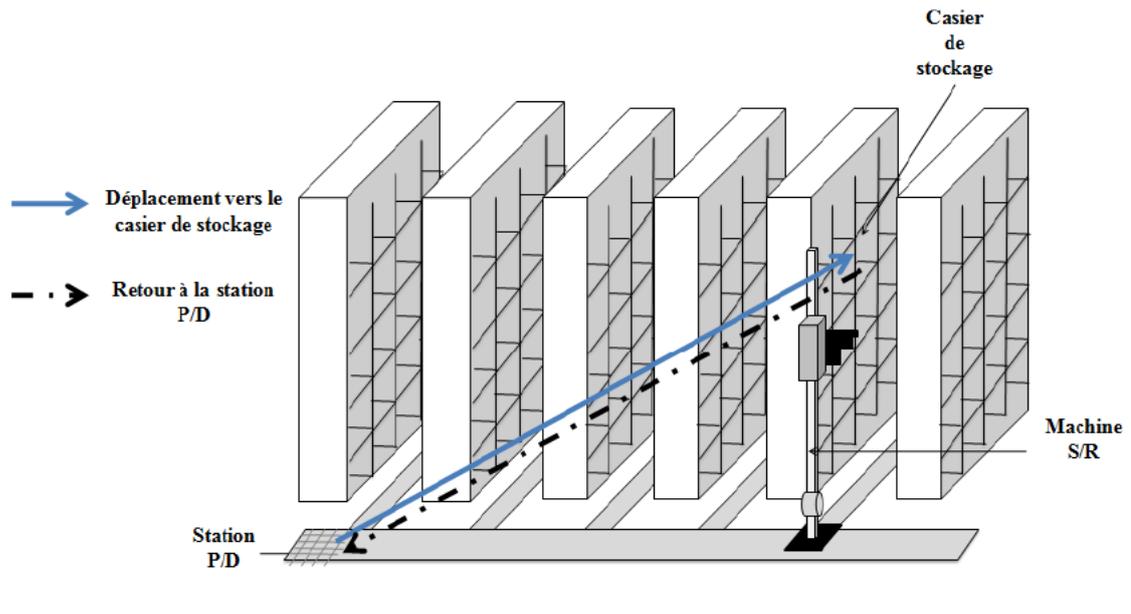


Figure 3: Simple cycle

Alors que dans le double cycle, la machine S/R exécute une opération de stockage, suivie par une opération de déstockage dans le même cycle. Le temps nécessaire pour exécuter un double cycle est dit temps de double cycle. Nous considérons que le point de repos de la machine S/R est positionné à la station de dépôt/livraison (D/L) avant la réception d'une commande. Après l'accomplissement de chaque opération de stockage ou de déstockage, la machine S/R revient à la station (D/L) en attendant un nouvel ordre.

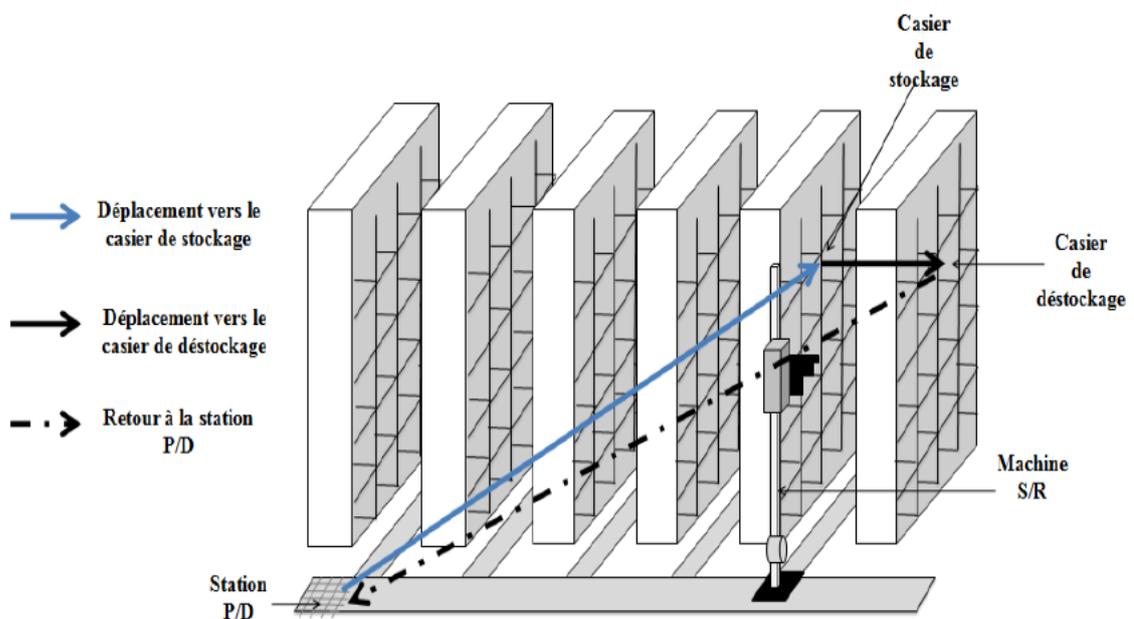


Figure 4: Double cycle

2.3 Hypothèses et Notations

➤ Hypothèses

Pour la modélisation mathématique de ce type de systèmes, ils ont utilisé les notations suivantes :

- La machine S/R se déplacer simultanément verticalement et horizontalement avec une vitesse constante, elle agir en simple ou double cycle.
- L'AS/RS est composé de N casiers, M racks et $M/2$ allées de dessertes.
- Les délais dus à l'accélération/décélération de la machine S/R sont négligés

➤ Notations

Les termes suivants ont utilisé pour présenter l'expression analytique discrète et continue :

M	Nombre de racks dans un AS/RS multi-allées
$M/2$	Nombre d'allées dans un AS/RS multi-allées
N	Nombre de casiers total dans le système $N= M.N_L.N_V$
N_h	Nombre de casiers par ligne (casiers horizontaux)
N_v	Nombre de casiers par colonne (casiers verticaux)
t'_h	Temps de déplacement horizontal d'un casier au suivant
t'_v	Temps de déplacement vertical d'un casier au suivant
t'_p	Temps de déplacement d'une allée à la suivante
t_h	Temps nécessaire pour parcourir la longueur d'un rack ou d'une allée
t_v	Temps nécessaire pour parcourir la hauteur d'un rack
t_p	Temps nécessaire pour parcourir l'allée principale du système
ESC	Temps moyen de simple cycle

2.4 Modélisation mathématique du temps de simple cycle d'un AS/RS multi-allées

Ghomri et al [2] ont formulé l'expression analytique continue qui évalue le temps moyen simple cycle pour le système multi allées. L'expression contient trois variables t_p , t_h et t_v correspondant à des durées de déplacements horizontaux et verticaux.

$$\text{ESC}(t_p, t_h, t_v) = \begin{cases} t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12t_p t_h} & 0 \leq t_v < \min(t_p, t_h) \\ t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12t_p t_h} - \frac{(t_v - \min(t_p, t_h))^4}{12t_p t_h t_v} & \min(t_p, t_h) \leq t_v < \max(t_p, t_h) \\ t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12t_p t_h} - \frac{(t_v - \min(t_p, t_h))^4 + (t_v - \max(t_p, t_h))^4}{12t_p t_h t_v} & \max(t_p, t_h) \leq t_v < t_p + t_h \\ t_p + t_h + \frac{t_v^3}{12t_p t_h} - \frac{(t_v - \min(t_p, t_h) - \max(t_p, t_h))^4 - (t_v - \min(t_p, t_h))^4 + (t_v - \max(t_p, t_h))^4}{12t_p t_h t_v} & t_p + t_h \leq t_v \end{cases} \quad (1)$$

Zeroual.F [3] à optimiser ce modèle sous un volume constant égale à 1, est-elle trouver avec les Métaheuristique avec solution unique (recuit simulé) les résultats suivant :

$$t_p = 0.8752726559$$

$$t_h = 0.8752726559$$

$$t_v = 1.305308836$$

$$\text{ESC}(t_p, t_h, t_v) = 1.986765443$$

3. AS/RS à rack glissant

3.1 Description

Un AS/RS à rack glissant est un système qui représente une variation des AS/RS multi allées, le système est composé d'une machine S/R pour le stockage/déstockage, une station de dépôt/livraison et d'un ensemble de racks déposés en parallèles placés sur des rails qui leur permettent de faire un déplacement latéralement pour qu'on puisse ouvrir une allée entre n'importe quels deux racks voisins. [3]

3.2 Fonctionnement

A l'état initial, il existe une seule allée aléatoire de service placée entre n'importe quels deux racks voisins, et la machine S/R se trouve dans la station de dépôt/livraison, son rôle est le même pour les AS/RS multi allées elle se déplace verticalement, horizontalement et transversalement pour faire les opérations soit de stockage et de déstockage en même cycle (double cycle) soit une seule opération de stockage ou de déstockage (simple cycle). Les allées dans ce cas n'apparaissent que lorsqu'une opération de stockage/déstockage est prévue dans les racks correspondants.

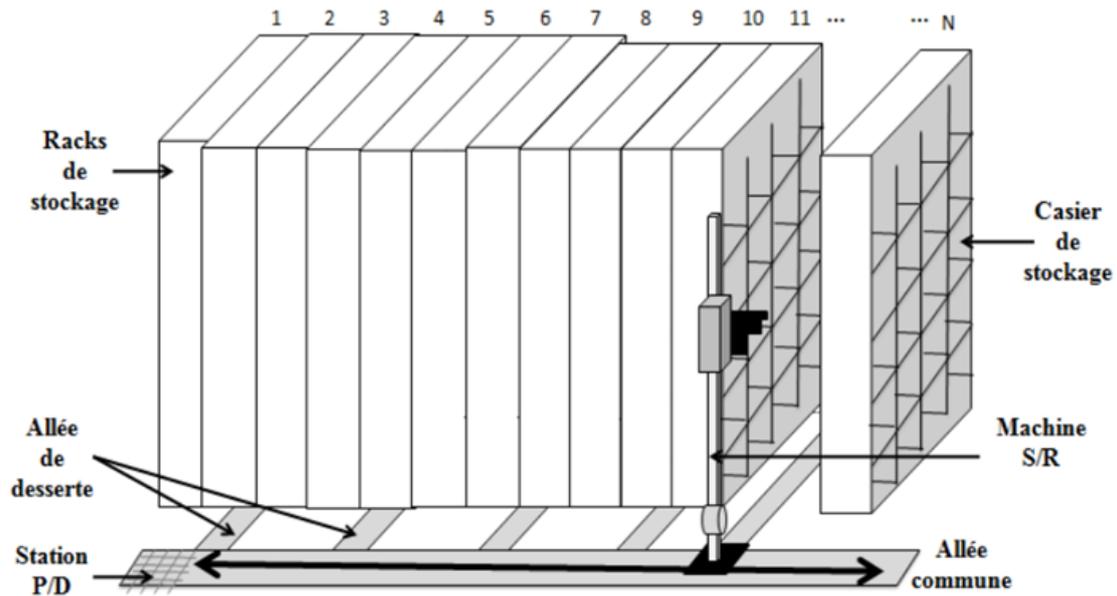


Figure 5: Configuration d'un système à rack glissant

3.3 Modélisation mathématique du temps de simple cycle d'un AS/RS à rack glissant

D'après les travaux de [2], nous présentons l'expression analytique continue qui évalue le temps d'allé de la machine S/R d'un AS/RS à racks glissants :

- Ce modèle est en fonction de trois variables t_p , t_h et t_v correspondant à des durées de déplacements horizontaux et verticaux, sont positives et non nul, et un paramètre t_r qui représente le temps de glissement des racks.

Dans notre étude nous allons faire une optimisation de ce modèle sous un volume constant.

$$\text{ESC}_{t_r}(t_p, t_h, t_v) = \left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{1}{2}t_h + t_r & t_p < t_r \text{ et } t_v \leq t_r \\
 \frac{1}{6t_h t_v} (3t_h^2 t_v + 6t_h t_r t_v - t_r^3 + 3t_r^2 t_v - 3t_r t_v^2 + t_v^3) & t_p < t_r \text{ et } t_v > t_r \\
 & \text{et } t_v \leq t_r + t_h \\
 \frac{1}{6t_v} (t_h^2 + 3t_h t_r + 3t_r^2 + 3t_v^2) & t_p < t_r \text{ et } \\
 & t_r + t_h < t_v \\
 \frac{1}{2t_p} (t_p t_h + t_p^2 + t_r^2) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_v \leq t_r \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_r < t_v \text{ et } t_v \leq t_r + t_h \\
 -\frac{1}{24t_p t_v} (t_h^3 - 4t_h^3 t_v - 12t_p t_h t_v - 6t_h t_r^2 + 6t_h t_v^2 - 12t_p^2 t_v - 8t_r^3 - 4t_v^3) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_v \leq t_p \text{ et } t_r + t_h < t_v \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v - 6t_h^2 t_r^2 + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 8t_h t_r^3 \\
 - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_p < t_v \text{ et } \\
 & t_v \leq t_p + t_h \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 3t_h t_r^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2 + 4t_r^3) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_p + t_h < t_v \\
 \frac{1}{2t_p} (t_h t_p + t_p^2 + t_r^2) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_v \leq t_r \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_r < t_v \text{ et } t_v \leq t_p \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - t_p^4 + 4t_p^3 t_v - 6t_p^2 t_v^2 \\
 + 4t_p t_v^3 - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_p < t_v \text{ et } t_v \leq t_r + t_h \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v - 6t_h^2 t_r^2 + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 8t_h t_r^3 \\
 - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_r + t_h < t_v \text{ et } \\
 & t_v \leq t_p + t_h \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 3t_h t_r^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2 + 4t_r^3) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \\
 & \text{et } t_p + t_h < t_v
 \end{array} \right. \quad (2)$$

Ou encore :

$$\text{ESC}_{t_r}(t_p, t_h, t_v) = \left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{1}{2}t_h + t_r & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_1 \\
 \frac{1}{6t_h t_v} (3t_h^2 t_v + 6t_h t_r t_v - t_r^3 + 3t_r^2 t_v - 3t_r t_v^2 + t_v^3) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_2 \\
 \frac{1}{6t_v} (t_h^2 + 3t_h t_r + 3t_r^2 + 3t_v^2) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_3 \\
 \frac{1}{2t_p} (t_p t_h + t_p^2 + t_r^2) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_4 \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2 + t_v^4) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_5 \\
 -\frac{1}{24t_p t_v} (t_h^3 - 4t_h^2 t_v - 12t_p t_h t_v - 6t_h t_r^2 + 6t_h t_v^2 - 12t_p^2 t_v - 8t_r^3 - 4t_v^3) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_6 \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v - 6t_h^2 t_r^2 + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 8t_h t_r^3 \\
 - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_7 \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 3t_h t_r^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2 + 4t_r^3) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_8 \\
 \frac{1}{2t_p} (t_h t_p + t_p^2 + t_r^2) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_9 \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2 + t_v^4) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_{10} \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - t_p^4 + 4t_p^3 t_v - 6t_p^2 t_v^2 \\
 + 4t_p t_v^3 - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_{11} \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v - 6t_h^2 t_r^2 + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 8t_h t_r^3 \\
 - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_{12} \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 3t_h t_r^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2 + 4t_r^3) & \text{si } (t_p, t_h, t_v) \in C_{13}
 \end{array} \right. \quad (3)$$

Avec : $C_1 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_p < t_r \text{ et } t_v \leq t_r\}$

$C_2 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_p < t_r \text{ et } t_v > t_r \text{ et } t_v \leq t_r + t_h\}$

$C_3 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_p < t_r \text{ et } t_r + t_h < t_v\}$

$C_4 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \text{ et } t_v \leq t_r\}$

$C_5 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \text{ et } t_r < t_v \text{ et } t_v \leq t_r + t_h\}$

$C_6 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \text{ et } t_r + t_h < t_v \text{ et } t_v \leq t_p\}$

$C_7 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p, t_h < t_p - t_r \text{ et } t_p < t_v, t_v < t_p + t_h\}$

$$C_8 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p, t_p - t_r \leq t_h, t_p + t_h < t_v\}$$

$$C_9 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p, t_p - t_r \leq t_h, t_v \leq t_r\}$$

$$C_{10} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p, t_p - t_r \leq t_h, t_r < t_v, t_v \leq t_p\}$$

$$C_{11} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p, t_p - t_r \leq t_h, t_p < t_v, t_v \leq t_r + t_h\}$$

$$C_{12} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p, t_p - t_r \leq t_h, t_r + t_h < t_v, t_v \leq t_p + t_h\}$$

$$C_{13} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_r \leq t_p, t_p - t_r \leq t_h, t_r + t_h < t_v\}$$

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les deux types de l'AS/RS le multi allées et à rack glissant, leurs fonctionnements et leurs modélisations continue, dans les travaux de Ghomri et al, ils ont fait la modélisation du modèle du multi allées et à rack glissant, Kouloughli elle a trouvé le temps de simple cycle minimum par une méthode analytique pour l'AS/RS multi allée et une simulation numérique pour un modèle de l'AS/RS à rack glissant, et Zeroual à confirmer le résultats trouvé une par une métaheuristique à solution unique pour l'AS/RS multi allée. Aussi elle a fait une approximation de l'expression qui représente le temps de simple cycle.

Dans les chapitres suivants on va s'intéresser à l'AS/RS à rack glissant, nous allons montrer que l'AS/RS multi allées est un cas particulier de l'AS/RS à rack glissant ($t_r = 0$). Ainsi nous allons faire l'étude mathématique de la fonction établie par [4], et nous allons étudier la continuité et convexité de cette expression pour savoir plus sur le comportement de la fonction.

Chapitre 2 : Etude mathématiques de la fonction du temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant

1. Introduction

La résolution des systèmes complexes nécessite une modélisation mathématique qui représente toutes sortes de situations, d'objets et de structures du système réel, la mise en place des modèles ça peut nous aider pour simuler et optimiser le système. Mais avant d'établir ces deux étapes nous allons faire l'étude mathématique de la fonction de notre système.

Dans ce chapitre nous allons étudier la fonction quand t_r tant vers 0, dans ce cas nous allons confirmer que nous sommes dans le cas de l'AS/RS multi allées c'est à dire que nous devons trouver la même formule de celle de l'AS/RS multi allées. Ensuite, nous allons étudier la continuité et la convexité de la fonction puis dessiner la courbe pour voir le comportement de la fonction pour une valeur du temps de glissement du rack de stockage.

2. Cas $t_r = 0$

L'AS/RS multi allées est un cas particulier de l'AS/RS à rack glissant ($t_r = 0$), la différence repose sur le temps de glissement du rack t_r , donc pour assurer la validité et la fiabilité de la fonction obtenue il faut que quand $t_r = 0$ on obtient la fonction de celle de l'AS/RS multi allées.

❖ Comparaison entre ESC et $ESC_{t_r=0}$

Le modèle de l'AS/RS à rack glissants s'écrit sur 13 domaines. Pour pouvoir comparait entre ESC et ESC_{t_r} , nous devons réécrire la fonction ESC_{t_r} pour $t_r = 0$.

Avant ça nous étudions nos 13 domaines. Nous réécrivons nos domaines pour $t_r = 0$:

$$C_1 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3: t_p < 0 \text{ et } t_v \leq 0\} = \emptyset$$

$$C_2 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3: t_p < 0 \text{ et } t_v > 0 \text{ et } t_v \leq t_h\} = \emptyset$$

$$C_3 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3: t_p < 0 \text{ et } t_v \leq 0\} = \emptyset$$

$$C_4 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3: t_p < 0 \text{ et } t_v \leq 0\} = \emptyset$$

$$C_9 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3: t_p < 0 \text{ et } t_v \leq 0\} = \emptyset$$

Nous avons aboutie aux domaines réduites en des ensembles vides C_1, C_2, C_3, C_4 et C_9 car on ne peut pas noter un temps de déplacement horizontal (t_p), ou un temps de déplacement vertical (t_v) qui est négatif (<0) nous allons supprimer ces domaines complètement.

Voici la fonction écrite pour $t_r = 0$:

$$\text{ESC}_0(t_p, t_h, t_v) = \left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + t_v^4) & t_h < t_p \text{ et } t_v \leq t_h \\
 -\frac{1}{24t_p t_h t_v} (t_h^3 - 4t_h^2 t_v - 12t_p t_h t_v + 6t_h t_v^2 - 12t_p^2 t_v - 4t_v^3) & \begin{array}{l} t_h < t_p \\ \text{et } t_v \leq t_p \text{ et } t_h < t_v \end{array} \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & \begin{array}{l} t_h < t_p \text{ et } t_p < t_v \text{ et} \\ t_v \leq t_p + t_h \end{array} \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2) & \begin{array}{l} t_h < t_p \\ \text{et } t_p + t_h < t_v \end{array} \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_p^2 t_v + t_v^4) & t_p \leq t_h \text{ et } t_v \leq t_p \\
 \frac{1}{24t_h t_v} (12t_h^2 t_v + 12t_h t_p t_v - t_p^3 + 4t_p^2 t_v - 6t_p t_v^2 + 4t_v^3) & \begin{array}{l} t_p \leq t_h \text{ et} \\ t_p < t_v \text{ et } t_v \leq t_h \end{array} \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & \begin{array}{l} t_p \leq t_h \text{ et } t_h < t_v \text{ et} \\ t_v \leq t_p + t_h \end{array} \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2) & t_p \leq t_h \text{ et } t_p + t_h < t_v
 \end{array} \right. \quad (4)$$

Après supprimer les 5 domaines on a obtenu une fonction à 8 fractions rationnelles, puisque nos domaines restants sont symétrique en t_p, t_h et notre fonction est symétrique, nous avons simplifié les autres domaines afin de clarifier la fonction, on peut formuler chaque un des domaines comme suit :

$$C_5 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : \min(t_h, t_p) \geq t_v \}$$

$$C_6 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : \max(t_h, t_p) \geq t_v \geq \min(t_h, t_p) \}$$

$$C_7 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : \max(t_h, t_p) < t_v < t_p + t_h \}$$

$$C_8 = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_p + t_h < t_v \}$$

$$C_{10} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_p \leq t_h \}$$

$$C_{11} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : \min(t_h, t_p) < t_v \leq \max(t_h, t_p) \}$$

$$C_{12} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : \max(t_h, t_p) < t_v < t_p + t_h \}$$

$$C_{13} = \{(t_p, t_h, t_v) \in (R_+^*)^3 : t_p + t_h < t_v \}$$

On remarque que ces domaines de définition sont symétriques : $C_5=C_{10}$, $C_6=C_{11}$, $C_7=C_{12}$ et $C_8=C_{13}$, ainsi que les polynômes définis sur ces domaines sont symétrique $F_5=F_{10}$, $F_6=F_{11}$, $F_7=F_{12}$ et $F_8=F_{13}$ donc on obtient une équation avec quatre fonctions :

$$ESC_0(t_p, t_h, t_v) = \begin{cases} \frac{t_v^3}{24t_p t_h} + \frac{1}{2}(t_p + t_h) & \min(t_h, t_p) \geq t_v \\ -\frac{1}{24\max(t_p, t_h)t_v} (\min(t_p, t_h)^3 - 4\min(t_p, t_h)^2 t_v - 12t_p t_h t_v + 6\min(t_p, t_h)t_v^2 - 12\max(t_p, t_h)^2 t_v - 4t_v^3) & \min(t_h, t_p) < t_v \\ \leq \max(t_h, t_p) \\ \frac{-1}{24t_p t_h t_v} ((t_v - \max(t_p, t_h))^4 + (t_v - \min(t_p, t_h))^4) + \frac{t_v^3}{24t_p t_h} + \frac{1}{2}(t_p + t_h) & \max(t_h, t_p) < t_v < t_p + t_h \\ \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2) & t_p + t_h < t_v \end{cases} \quad (5)$$

Cette fonction $ESC_0(t_p, t_h, t_v)$ représente que l'aller de la machine (S/R), pour avoir un temps de simple cycle il faut avoir l'aller et le retour, c'est pour cela on va multiplier cette fonction fois deux, pour voir si elle est égale à celle du multi allés. À l'aide du logiciel Maple nous avons vérifié par des valeurs numériques l'égalité des deux fonctions et nous avons trouvé les résultats suivants:

$t_r=0$	domaine	$2 * ESC_0(t_p, t_h, t_v)$	$ESC(t_p, t_h, t_v)$
$t_p=0.946589456$ $t_h=3$ $t_v=0.352141397$	$\min(t_h, t_p) \geq t_v$	3.947870864	3.947870863
$t_p=0.54$ $t_h=3$ $t_v=0.6172839507$	$\min(t_h, t_p) < t_v$ $\leq \max(t_h, t_p)$	3.552096284	3.552096284
$t_p=0.2$ $t_h=2.15$ $t_v=2.325581395$	$\max(t_h, t_p) < t_v$ $< t_p + t_h$	3.086323034	3.086323034
$t_p=0.24565869$ $t_h=2.4564896$ $t_v=1.657116107$	$t_p + t_h < t_v$	2.999797686	2.999797686

Tableau 1 : Vérification numérique de l'égalité $(2 * ESC_0(t_p, t_h, t_v)) = ESC(t_p, t_h, t_v)$

Avec : $ESC(t_p, t_h, t_v)$ la fonction du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allés.

3. Cas $t_r \neq 0$

Pour dessiner la fonction géométriquement on a utilisé le logiciel *Mathematica* nous avons supposé que le volume de l'AS/RS égale à 1, et le temps de glissement des racks $t_r = 1$. Voici le graphe de notre fonction est représenté comme suit :

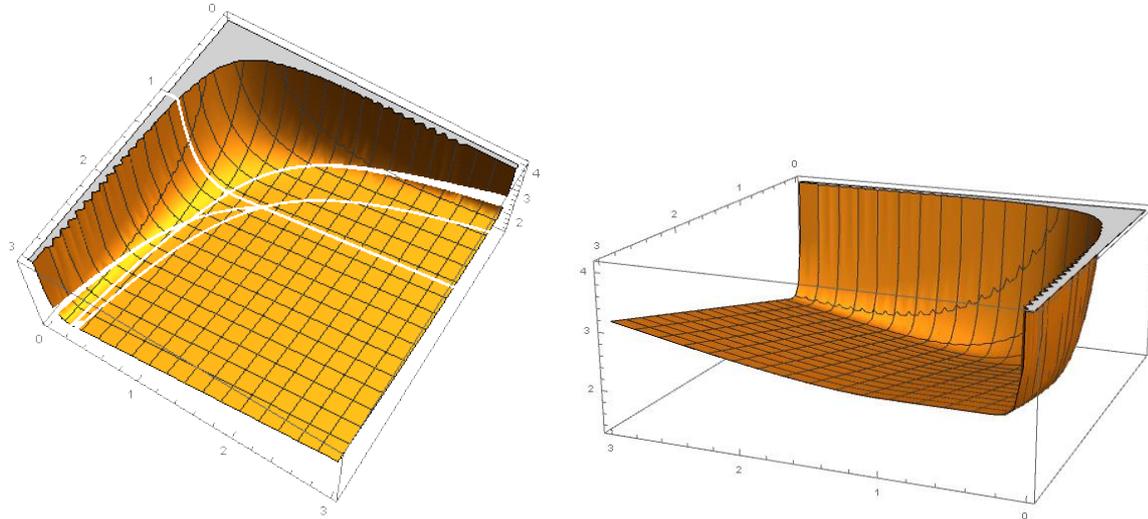


Figure 6 : Graphe de la fonction ESC_{t_r}

Après faire plusieurs essais en changeant les valeurs du volume et du temps de glissement t_r nous avons remarqué que la fonction garde la même forme.

3.1 Continuité

On munit R^n d'une norme notée $\|\cdot\|_{R^n}$ et R^p d'une norme notée $\|\cdot\|_{R^p}$. Soit D une partie de R^n et f une fonction de D dans R^p .

➤ Définition :

Soit $a \in D$ et $l \in R^p$. On dit que f tend vers l en a et on note

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} l$$

$$\text{Si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_{R^n} \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|_{R^p} \leq \varepsilon.$$

Les variables de la fonction ESC_{t_r} représentent des durées de déplacement, elles sont strictement positives donc leur domaine d'étude est :

$$D = R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$$

Donc :

$$D =] 0, +\infty [\times] 0, +\infty [\times] 0, +\infty [$$

Pour étudier la continuité de l'expression, nous étions intéressait de calculer la limite de chacun des polynômes. En dessous quelque exemple de calcule de limite.

Voici les courbes en communs entre chaque deux domaine de définitions, en écriture mathématiques, on peut représenter la continuité comme suit :

Soient $t_r \in R_+$ et $T_i \in D_i$, $i \in \{1, \dots, 12\}$

$$D_1 = C_1 \cap C_2 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_v = t_r\}$$

$$D_2 = C_1 \cap C_4 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_p = t_r\}$$

$$D_3 = C_2 \cap C_3 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_v = t_r + t_h\}$$

$$D_4 = C_4 \cap C_5 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_v = t_r\}$$

$$D_5 = C_5 \cap C_6 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_v = t_r + t_h\}$$

$$D_6 = C_6 \cap C_7 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_p = t_v\}$$

$$D_7 = C_7 \cap C_8 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_v = t_h + t_p\}$$

$$D_8 = C_4 \cap C_9 = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_r = t_p - t_h\}$$

$$D_9 = C_9 \cap C_{10} = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_r = t_v\}$$

$$D_{10} = C_{10} \cap C_{11} = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_p = t_v\}$$

$$D_{11} = C_{11} \cap C_{12} = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_v = t_r + t_h\}$$

$$D_{12} = C_{12} \cap C_{13} = \{(t_p, t_h, t_v) \in D : t_v = t_h + t_p\}$$

Posons $f_i = ESC_{t_r} \Big|_{C_i}$, $i \in \{1, \dots, 13\}$, ESC_{t_r} est continue sur D_i $i \in \{1, \dots, 12\}$ si et seulement si :

$$\lim_{t^- \rightarrow T_i} ESC_{t_r}(t^-) = \lim_{t^+ \rightarrow T_i} ESC_{t_r}(t^+)$$

Avec :

$$\begin{cases} t^- \in C_i \\ t^+ \in C_{i+1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} t^- \in C_1 \\ t^+ \in C_4 \end{cases} \text{ si } i = 2 \text{ et } \begin{cases} t^- \in C_4 \\ t^+ \in C_9 \end{cases} \text{ si } i = 8$$

- $\lim_{t^- \rightarrow T_i} ESC_{t_r}(t^-) = f_i(T_i)$ et $\lim_{t^+ \rightarrow T_i} ESC_{t_r}(t^+) = f_{i+1}(T_i)$

On a: $f_{i+1}(T_i) - f_i(T_i) = 0$

➤ Sachant que pour $i = 1$ on a:

• $\lim_{t^- \rightarrow T_1} ESC_{t_r}(t^-) = f_1(T_1)$ et $\lim_{t^+ \rightarrow T_1} ESC_{t_r}(t^+) = f_2(T_1)$

$$f_1(T_1) - f_2(T_1) = \left(\frac{1}{2}t_h + t_r\right) - \left(\frac{1}{6} \frac{3t_r t_h^2 + 6t_h t_r^2}{t_r t_h}\right) = 0$$

➤ Sachant que pour $i = 2$ on a:

• $\lim_{t^- \rightarrow T_2} ESC_{t_r}(t^-) = f_2(T_2)$ et $\lim_{t^+ \rightarrow T_2} ESC_{t_r}(t^+) = f_3(T_2)$

$$f_2(T_2) - f_3(T_2) = \left(\frac{1}{6} \frac{4t_h^2 + 9t_h t_r + 6t_r^2}{t_r + t_h}\right) - \left(\frac{1}{6} \frac{t_h^2 + 3t_h t_r + 3t_r^2 + 3(t_r + t_h)^2}{t_r + t_h}\right) = 0$$

• $\lim_{t^- \rightarrow T_2} ESC_{t_r}(t^-) = f_1(T_2)$ et $\lim_{t^+ \rightarrow T_2} ESC_{t_r}(t^+) = f_4(T_2)$

$$f_1(T_2) - f_4(T_2) = \left(\frac{1}{2}t_h + t_r\right) - \left(\frac{1}{2} \frac{t_h t_r + 2t_r^2}{t_r}\right) = 0$$

➤ Sachant que pour $i = 8$ on a:

• $\lim_{t^- \rightarrow T_8} ESC_{t_r}(t^-) = f_4(T_8)$ et $\lim_{t^+ \rightarrow T_8} ESC_{t_r}(t^+) = f_9(T_8)$

$$f_4(T_8) - f_9(T_8) = \frac{1}{2} \frac{t_p t_h + t_p^2 + (t_p - t_h)^2}{t_p} - \frac{1}{2} \frac{t_p t_h + t_p^2 + (t_p - t_h)^2}{t_p} = 0$$

Voici la matrice qui contient la courbe en commun entre chaque deux domaine :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}
C_1		$t_v=t_r$	Aucun	$t_p=t_r$	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_2	$t_v=t_r$		$t_v=t_r+t_h$	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_3	Aucun	$t_v=t_r+t_h$		Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_4	$t_p=t_r$	Aucun	Aucun		$t_v=t_r$	Aucun	Aucun	Aucun	$t_r=t_p-t_h$	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_5	Aucun	Aucun	Aucun	$t_v=t_r$		$t_v=t_r+t_h$	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_6	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	$t_v=t_r+t_h$		$t_p=t_v$	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_7	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	$t_p=t_v$		$t_v=t_h+t_p$	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_8	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	$t_v=t_h+t_p$		Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun
C_9	Aucun	Aucun	Aucun	$t_r=t_p-t_h$	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun		$t_r=t_v$	Aucun	Aucun	Aucun
C_{10}	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	$t_r=t_v$		$t_p=t_v$	Aucun	Aucun
C_{11}	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	$t_p=t_v$		$t_v=t_r+t_h$	Aucun
C_{12}	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	$t_v=t_r+t_h$		$t_v=t_h+t_p$
C_{13}	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	Aucun	$t_v=t_h+t_p$	

Tableau 2 : Les courbes d'intersections entre les domaines

3.2 Convexité

➤ **Définition :**

Soient, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un convexe. Alors :

- f convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Si cette dernière inégalité est stricte, alors f est strictement convexe.

➤ **Théorème :**

Soit f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I ,

Soit x et y deux réels de l'intervalle I et λ un réel de l'intervalle $[0,1]$

- f, g convexes si :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

En additionnant ces deux inégalités membre à membre, il vient :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) + \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Soit :

$$(f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(f + g)(x) + (1 - \lambda)(f + g)(y)$$

Ainsi, la fonction $(f + g)$ est convexe sur I , donc la somme de deux fonctions convexes sur un intervalle est convexe sur cet intervalle.

➤ **Théorème :**

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable.

- Si la hessienne $\nabla^2 f$ est une matrice symétrique définie positive alors f est strictement convexe.

- Si la hessienne $\nabla^2 f$ est une matrice symétrique semi-définie positive alors f est convexe.

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture on peut utiliser la notation de Monge :

On pose : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ donc :

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

La formule ci-dessus n'est toutefois guère opérationnelle. Pour un calcul manuel, on préfère employer le déterminant de la matrice hessienne : $\Delta = rt - s^2$

- Si $\Delta < 0$, on ne peut pas conclure.
- Si $\Delta > 0$ et $r > 0$, donc la fonction est convexe.

4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons concentré sur l'étude mathématique de l'expression du temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant, nous avons démontré que lorsque le temps de glissement des racks tant vers zéro l'expression représente que l'allée de l'AS/RS multi allées, ce qui valide notre expression. Par la suite nous avons fait une étude de continuité pour qu'on puisse entamer l'optimisation du temps de simple cycle de ce type d'AS/RS, lors de cette étude nous avons déduit les courbes d'intersection entre les domaines de définition des 13 fraction rationnel pour prouver la continuité de l'expression, et puis nous avons fait une étude de convexité de cette expression, cette étude nous ouvre la voie pour l'optimisation.

Dans le chapitre suivant, nous allons commencer par l'optimisation des dimensions de l'AS/RS à racks glissants par deux méthodes, en commençant premièrement par une méthode qui fait recours à l'intelligence artificielle c'est les Métaheuristique en particulier les algorithmes génétique puis avec une méthode déterministe pour valider nos résultats.

Chapitre 3 : Optimisation du temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant

1. Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques. Dans la pratique, on part d'un problème concret, on le modélise et on le résout mathématiquement (analytiquement : problème d'optimisation, numériquement : programme mathématique).

La résolution d'un problème d'optimisation consiste à explorer un espace de recherche afin de maximiser (ou minimiser) une fonction donnée. Les complexités (en taille ou en structure) relatives de l'espace de recherche et de la fonction à maximiser conduisent à utiliser des méthodes de résolutions radicalement différentes. [5]

Il existe des méthodes déterministes permettant de résoudre certains problèmes d'optimisation en un temps fini. Ces méthodes nécessitent généralement un certain nombre de caractéristiques de la fonction objectif, comme la stricte convexité, la continuité ou encore la dérivabilité. On peut citer comme exemple de méthodes : la programmation linéaire, quadratique ou dynamique, la méthode du gradient, la méthode de Newton...

Certains problèmes d'optimisation demeurent cependant hors de portée des méthodes exactes. Un certain nombre de caractéristiques peuvent en effet être problématiques, comme l'absence de convexité stricte, l'existence de discontinuités, une fonction non dérivable, présence de bruit, etc. [6]

Dans de tels cas, le problème d'optimisation est dit difficile, car aucune méthode exacte n'est capable de le résoudre exactement en un temps raisonnable, on devra alors faire appel aux techniques permettant une optimisation approchée. [6]

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'optimisation d'un temps de simple cycle par une méthode dénommée méta heuristiques comme particulier les algorithmes génétiques qui forment une famille d'algorithmes d'optimisation visant à résoudre des problèmes d'optimisation difficile, elles sont généralement utilisées comme des méthodes génériques pouvant optimiser une large gamme de problèmes différents, sans nécessiter de changements profonds dans l'algorithme employé.

Par la suite nous allons adapter une méthode d'optimisation déterministe, c'est la méthode de descente en particulier l'algorithme du gradient, à partir du résultat obtenue, nous allons utiliser des méthodes approximatives pour avoir les fonctions approximatives des dimensions optimales du système.

2. Les Métaheuristique

Méta heuristiques sont une famille d'algorithmes d'optimisation visant à résoudre des problèmes d'optimisation pour lesquels il n'existe pas d'approches conventionnelles plus efficaces. Elles sont décrites par leurs natures stochastiques et sont généralement développées sur la base de certains phénomènes naturels. Les métas heuristiques sont devenus parmi les techniques d'optimisation les plus étudiées ces dernières années en raison de leurs capacités à trouver des solutions prometteuses pour différents problèmes d'optimisation complexes ainsi que leurs aptitudes à gérer à la fois des variables discrètes et continues. Alors que, la complexité du problème, rend impossible de chercher toutes les solutions possibles, les métas heuristiques représentent un excellent moyen pour fournir des solutions efficaces et réalisables dans des délais acceptables avec peu d'informations sur l'espace de recherche. Toutefois, la capacité de ces techniques pour optimiser un problème à partir d'un minimum d'informations est contrebalancée par le fait qu'elles ne garantissent pas l'optimalité de la solution trouvée. En général, l'idée est d'avoir un algorithme efficace et capable de produire des solutions de bonne qualité ou presque optimal, mais il n'y a aucune garantie de cette optimalité.

Les métas heuristiques sont une nouvelle génération de méthodes approchées puissantes et générales, elles sont adaptables et applicables à une large classe de problèmes. Dans la littérature, plusieurs définitions sont proposées pour expliquer ce qu'est une Métaheuristique. Nous citons d'après Osman et Laporte [Osman 96]: qu'une méta heuristique est principalement définie comme un processus itératif de génération qui guide une heuristique subordonnée en combinant intelligemment divers concepts pour explorer et exploiter l'espace de recherche en élaborant des stratégies d'apprentissage pour structurer l'information dans le but de trouver au mieux des solutions quasi optimales.

2.1 Les métas heuristiques à solution unique

Les méthodes itératives à solution unique sont toutes basées sur un algorithme de recherche de voisinage qui commence avec une solution initiale, puis l'améliore pas à pas en choisissant une nouvelle solution dans son voisinage. Les méthodes les plus utilisées : le recuit simulé et la recherche tabou. [7]

2.2 Les métras heuristiques à population de solutions

Les méthodes d'optimisation à population de solutions améliorent, au fur et à mesure des itérations, une population de solutions. L'intérêt de ces méthodes est d'utiliser la population comme facteur de diversité. [7]

2.2.1 Méthodes basées sur des populations (Les méthodes évolutives)

Les méthodes basées sur des populations de solutions, aussi appelées méthodes évolutives.

Depuis le début des années 90, une autre famille d'heuristiques est devenue très populaire : les Méthodes Évolutives [Hertz et Kobler, 2000]. Contrairement à la Recherche Locale qui tente d'améliorer itérativement une solution courante, les Méthodes Évolutives travaillent sur une population de solutions en appliquant un processus cyclique composé d'une phase de coopération et d'une phase d'adaptation individuelle qui se succèdent à tour de rôle. Dans la phase de coopération, les solutions de la population courante sont comparées entre elles, puis combinées, dans le but de produire de nouvelles solutions qui héritent des bons aspects de chaque membre de la population. Dans la phase d'adaptation individuelle, chaque solution dans la population peut évoluer de manière indépendante. On peut utiliser le même type de critère d'arrêt que dans la Recherche Locale, ou alors on peut décider de stopper une Méthode Évolutives dès que les solutions dans la population sont jugées trop similaires. Une description générale des Méthodes Évolutives est donnée ci-dessous.

Générer un ensemble P de solutions dans S

Tant qu'aucun critère d'arrêt n'est satisfait **faire**

Appliquer un opérateur d'adaptation individuelle à chaque solution dans P.

Appliquer un opérateur de coopération afin d'effectuer des échanges d'information parmi les solutions de P et ainsi mettre à jour P.

Fin du tant que

Les principales caractéristiques qui permettent de faire la différence entre diverses méthodes évolutives sont les suivantes :

- **Types d'individus** : les individus qui évoluent dans une méthode basée sur des populations ne sont pas nécessairement des solutions. Il peut s'agir de morceaux de solutions ou d'objets que l'on peut facilement transformer en solutions.

- **Type d'évolution** : à chaque itération d'une méthode évolutive, de nouveaux individus sont créés et la population de l'itération suivante sera ainsi constituée d'anciens individus (qui auront survécu) et de nouveaux individus. La méthode évolutive doit indiquer comment décider de la survie des individus et comment choisir les nouveaux individus qui vont entrer dans la

population. Lorsqu'on toute la population est modifiée d'une itération à l'autre (c'est-à-dire que seuls les nouveaux individus sont conservés pour l'itération suivante), on parle de remplacement générationnel. Par contre, si une partie seulement de la population varie d'une itération à la suivante, on parle de remplacement stationnaire (steady state). La plupart des méthodes évolutives utilisent des populations de taille fixe p , et on décide généralement de garder les p meilleurs individus (parmi l'union des anciens et des nouveaux). Des populations de taille variable (où on décide par exemple de manière aléatoire de la survie des individus) sont cependant également possibles.

- **Sources d'information** : Le nombre d'individus qui coopèrent pour créer un nouvel individu est souvent égal à 2. On parle alors de parents qui génèrent des enfants. On peut cependant également combiner plus de 2 solutions pour créer des enfants. Certaines méthodes évolutives utilisent par exemple l'information contenue dans toute la population pour créer un nouvel individu. D'autres méthodes utilisent même toutes les populations de toutes les itérations précédentes pour créer des enfants : on dit alors que la source d'information est l'historique de la recherche. Par historique on entend généralement toute information qui ne peut pas être obtenue en analysant les individus de la population courante ; la connaissance des compositions des populations précédentes est nécessaire pour accéder à cette information.

- **Irréalisabilité** : un individu est un objet défini avec des règles bien précises. En combinant des individus pour en créer de nouveaux, il se peut que le nouvel objet résultant de l'échange d'information ne soit pas un individu admissible.

- **Intensification** : lorsqu'on peut localiser l'information pertinente qui rend un individu meilleur qu'un autre, il faut développer des procédures de coopération qui créent des enfants en combinant adéquatement les informations pertinentes de chacun des parents. La phase d'adaptation individuelle n'est alors pas indispensable au bon fonctionnement de la méthode évolutive.

- **Diversification** : une difficulté majeure rencontrée lors de l'utilisation des méthodes évolutives est leur convergence prématurée. Certains utilisent des procédures de bruitage qui modifient légèrement les individus de manière aléatoire. Ce bruitage est appliqué indépendamment sur chaque individu. Il diffère de l'utilisation d'une Recherche Locale par le fait que son effet sur la qualité de la solution n'est pas prévisible. L'opérateur de bruitage le plus connu est la mutation des algorithmes génétiques. Au lieu de modifier les individus

aléatoirement, certains préfèrent créer de nouveaux individus différents de ceux déjà rencontrés en faisant usage d'une mémoire à long terme basée, par exemple, sur la récurrence ou la fréquence.

2.2.2 Les algorithmes génétiques

La méthode évolutive la plus connue est inspirée de la théorie de l'évolution et des processus biologiques qui permettent à des organismes de s'adapter à leur environnement. Il s'agit de l'**algorithme génétique** qui a été proposé dans le milieu des années 60 (Holland, 1962 ; Rechenberg, 1965 ; Fogel et al, 1966). Les algorithmes génétiques appartiennent à la famille des algorithmes évolutionnaires qui sont des techniques d'optimisation itératives et stochastiques visant à résoudre des problèmes d'optimisation NP-difficiles. Ces algorithmes constituent une approche originale : il ne s'agit pas de trouver une solution analytique exacte, ou une bonne approximation numérique, mais de trouver des solutions satisfaisant au mieux à différents critères, souvent contradictoires. S'ils ne permettent pas de trouver à coup sûr la solution optimale de l'espace de recherche, du moins peut-on constater que les solutions fournies sont généralement meilleures que celles obtenues par des méthodes plus classiques, pour un même temps de calcul. [8]

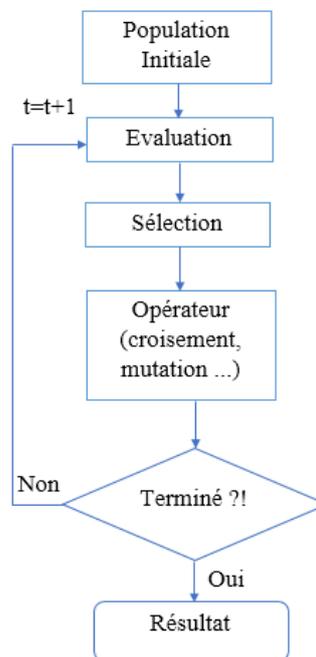


Figure 7 : Organigramme d'un algorithme évolutionnaire

Ci-dessus est présenté l'organigramme d'un algorithme évolutionnaire. Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation s'appuyant sur des techniques dérivées de la génétique et des mécanismes d'évolution de la nature : croisement, mutation, sélection. [8]

Un algorithme génétique recherche le ou les extrema d'une fonction définie sur un espace de données. Pour l'utiliser, on doit disposer des cinq éléments suivants :

➤ ***Un principe de codage de l'élément de population***

Cette étape associe à chacun des points de l'espace d'état une structure de données. Elle se place généralement après une phase de modélisation mathématique du problème traité. La qualité du codage des données conditionne le succès des algorithmes génétiques. Les codages binaires ont été très utilisés à l'origine. Les codages réels sont désormais largement utilisés, notamment dans les domaines applicatifs pour l'optimisation de problèmes à variables réelles.

1	0	0	1	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Codage binaire

3	4	1	7	5	8	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---

Codage entier

1,3	0,4	0,4	1,5	1,9	0,1	0	1,3
-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	-----

Codage réel

Vert	Rouge	Bleu	Vert	Vert	Bleu	Rouge	Rouge
------	-------	------	------	------	------	-------	-------

Codage type chaîne de caractère

➤ ***Un mécanisme de génération de la population initiale***

Ce mécanisme doit être capable de produire une population d'individus non homogène qui servira de base pour les générations futures. Le choix de la population initiale est important car il peut rendre plus ou moins rapide la convergence vers l'optimum global. Dans le cas où l'on ne connaît rien du problème à résoudre, il est essentiel que la population initiale soit répartie sur tout le domaine de recherche. L'opérateur de sélection est chargé de ce mécanisme. Cet opérateur est peut-être le plus important puisqu'il permet aux individus d'une population de survivre, de se reproduire ou de mourir. En règle générale, la probabilité de survie d'un individu sera directement reliée à son efficacité relative au sein de la population.

On trouve essentiellement quatre types de méthodes de sélection différentes :

a) Sélection par roulette

Ce type de sélection s'inspire des roues de loterie. A chacun des individus de la population est associé un secteur d'une roue. L'angle du secteur étant proportionnel à la qualité de l'individu qu'il représente ou leur fitness. En tournant la roue pour obtenir un individu. Les secteurs de la

roue représente la probabilité de chaque individus cette probabilité sera calculé en utilisant la fitness :

$$p_i = \frac{f_i}{\sum f_i}$$

⇒ p_i représente la probabilité de l'individu i

⇒ f_i l'évaluation par la fitness de l'individu i

⇒ $\sum f_i$ la somme des fitness de tous les individus

L'individu qui a la plus grande fitness a le plus grand secteur dans la roue donc les tirages des individus sont ainsi pondérés par leur qualité. Et presque logiquement, les meilleurs individus ont plus de chance d'être croisés et de participer à l'amélioration de la population.

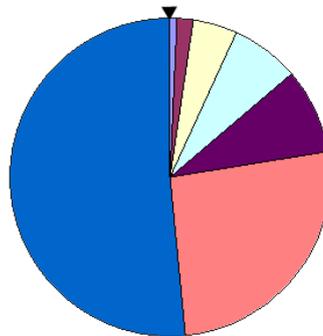


Figure 8 : Sélection par roulette

b) Sélection par tournoi

Cette technique utilise la sélection proportionnelle sur des paires d'individus, puis choisit parmi ces paires l'individu qui a le meilleur score d'adaptation.

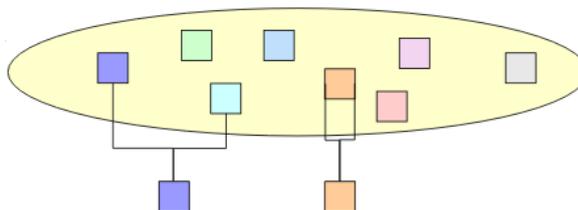


Figure 9 : Sélection par tournoi

c) Sélection uniforme

La sélection se fait aléatoirement, uniformément et sans intervention de la valeur d'adaptation. Chaque individu a donc une probabilité $1/P$ d'être sélectionné, où P est le nombre total d'individus dans la population.

➤ **Une fonction à optimiser**

Celle-ci retourne une valeur de R^+ appelée fitness ou fonction d'évaluation de l'individu.

➤ **Des opérateurs**

Permettant de diversifier la population au cours des générations et d'explorer l'espace d'état.

a) L'opérateur de croisement

Après avoir sélectionné des individus de la population initiale P, on a maintenant une population P' sur cette population on va appliquer le croisement ;

Les croisements permettent de simuler des reproductions d'individus dans le but d'en créer des nouveaux, lors de cette opérateur, deux chromosomes dites parents (individus de la population P') d'échangent des parties de leurs gènes pour donner de nouveaux chromosomes dites enfants, il existe plusieurs types de croisement :

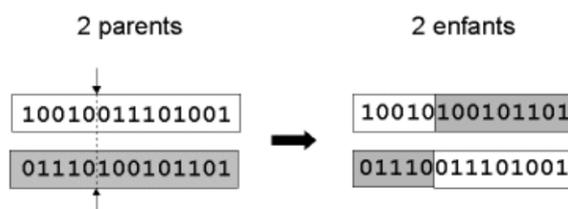


Figure 10 : Croisement à un point

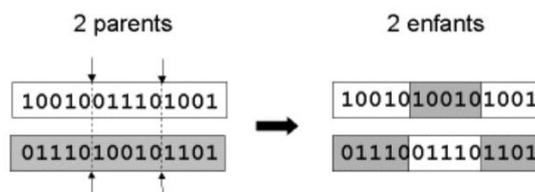


Figure 11 : Croisement à deux points

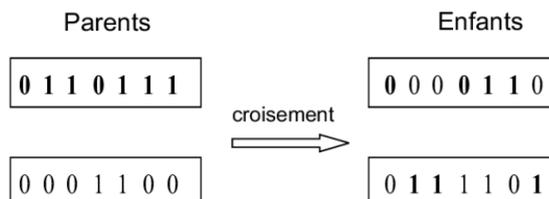


Figure 12 : Croisement uniforme

b) L'opérateur de mutation

Pour but de garantir l'exploration de l'espace d'états. De façon aléatoire, un gène peut, au sein d'un chromosome, être changé à un autre avec un taux de mutation généralement compris entre 0,001 et 0,01. La mutation sert à assurer une diversité de la population des solutions et éviter la convergence vers un extremum local.

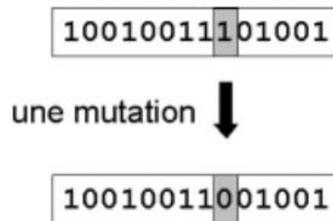


Figure 13 : Opérateur de mutation

➤ *Des paramètres de dimensionnement* : la taille de la population, nombre total de générations ou critère d'arrêt, probabilités d'application des opérateurs de croisement et de mutation. [9]

L'usage d'un algorithme génétique est adapté à une exploration rapide et globale d'un espace de recherche de taille importante et est capable de fournir plusieurs solutions.

3. Les méthodes de descente :

Une direction de descente d est une direction de l'espace R^n qui vérifie $\langle \nabla f, d \rangle < 0$

Soient $f : R^n \rightarrow R$ et $x \in R^n$. Le vecteur $d \in R^n$ est une direction de descente pour f à partir du point x si $t \rightarrow f(x + sd)$ est décroissante en $s = 0$, c'est-à-dire s'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in]0, \eta], f(x + sd) < f(x)$$

Au moins localement, la fonction f diminue en effectuant un déplacement dans la direction d . Les méthodes à directions de descentes suivent ce principe et construisent une suite d'itérés $(x_k)_{k \in N}$ approchant la solution x^* du problème de la façon suivante :

$$x_{k+1} = x_k + s_k * d_k$$

Un tel algorithme est ainsi déterminé par deux éléments : le choix de la direction d_k appelée direction de descente, et le choix de la taille du pas s_k à faire dans la direction d_k .

Algorithme. à directions de descente

Choix d'un itéré initial $x_1 \in R^n$ et d'un petit paramètre ε . Initialement $k = 1$.

1. **Faire** test de convergence : si $\|\nabla f(x_k)\|_2 < \varepsilon$ arrêt de l'algorithme
 2. Déterminer une direction de descente d_k
 3. Déterminer un pas $s_k > 0$ assez petit tel que la fonction f décroisse suffisamment
 4. Déterminer un nouvel itéré $x_{k+1} = x_k + s_k * d_k$
 5. Poser $k = k + 1$ et retourner à l'étape 1.
-

3.1 La méthode de descente du gradient :

Cette méthode utilise pour direction de descente l'opposée du gradient de la fonction f au point courant x , soit

$$d_k = -\nabla f(x_k).$$

Cette direction est évidemment direction de descente car on a

$$\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0$$

Le choix de la direction de plus forte descente définit une famille d'algorithmes appelés algorithmes de descente de gradient dont le schéma est le suivant :

Algorithme. Descente de gradient

Données : f, x_0 première approximation de la solution cherchée, $\varepsilon > 0$ précision demandée

Sortie : une approximation x^* de la solution de $:\nabla f(x) = 0$

1. $K := 0$;
 2. **Tant que** critère d'arrêt non satisfait,
 - A. Direction de descente : $d_k = -\nabla f(x_k)$.
 - B. Recherche linéaire : trouver un pas s_k tel que : $f(x_k + s_k d_k) < f(x_k)$
 - C. $x_{k+1} = x_k - s_k \nabla f(x_k)$; $k = k + 1$;
 3. Retourner x_k .
-

Il reste maintenant à définir une stratégie de recherche linéaire pour le calcul du pas. Nous étudions ici en première approche une méthode à pas fixe.

✓ **Algorithme de gradient à pas fixe**

L'idée est très simple : on impose une fois pour toutes la taille du pas effectué selon la direction de descente calculée à chaque itération. Les itérations 2 (b) et (c) de l'algorithme de descente de gradient sont alors remplacées par :

$$x_{k+1} = x_k - s\nabla f(x_k)$$

4. Optimisation du temps de simple cycle pour un AS/RS à rack glissant

Notre objectif est de trouver les dimensions optimales d'un AS/RS à rack glissant de tels sorts que le temps pour accéder à un casier donné soit minimum. Pour notre problème d'optimisation, nous avons deux contraintes :

- Les trois variables t_p , t_h et t_v correspondant à des durées de déplacements horizontaux et verticaux, sont positives et non nul, donc on a des contraintes d'inégalités liées à la positivité de ces variables :

$$\begin{cases} t_p > 0 \\ t_h > 0 \\ t_v > 0 \end{cases}$$

- Le nombre de casiers du système est constant, donc on a une contrainte d'égalité liée à la constance de la taille du système de stockage, pour faire notre étude nous avons considéré que la taille = 1 :

$$t_p * t_h * t_v = 1$$

A l'aide de cette dernière contrainte nous pouvons faire une réduction de la fonction liée au système d'une fonction à trois variables $ESC_{t_r}(t_p, t_h, t_v)$ en une fonction à deux variables $\overline{ESC}_{t_r}(t_p, t_h)$ ce qui nous permis de faciliter l'optimisation des dimensions du système :

$$t_p * t_h * t_v = 1 \Leftrightarrow t_v = \frac{1}{t_p t_h}$$

Nous obtenons la fonction suivante :

tracé le déterminant de la matrice hessienne, il est positive si seulement si le graphe de la fonction il est au-dessus du plan ($x=0 ; y=0$)

Par l'utilisation du logiciel Mathematica nous avons pu dessiner le déterminant de la matrice hessienne et la première dérivé par rapport à x .

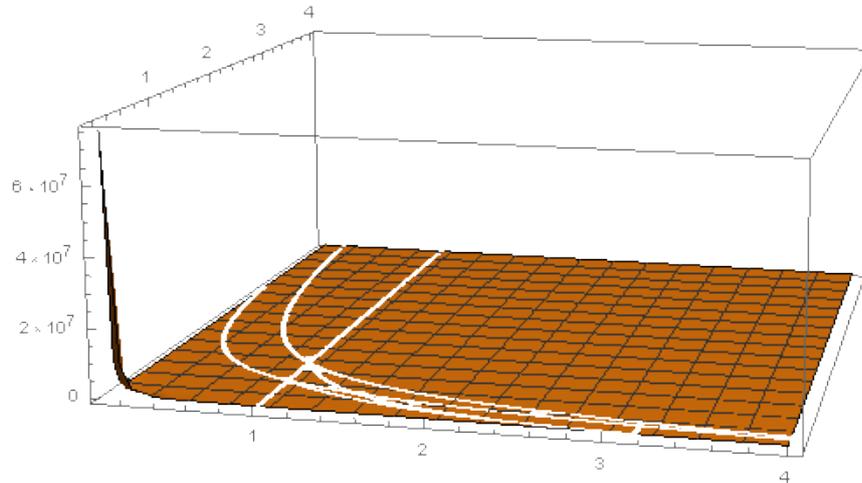


Figure 14: Discriminant hessienne $\Delta = rt - s^2$

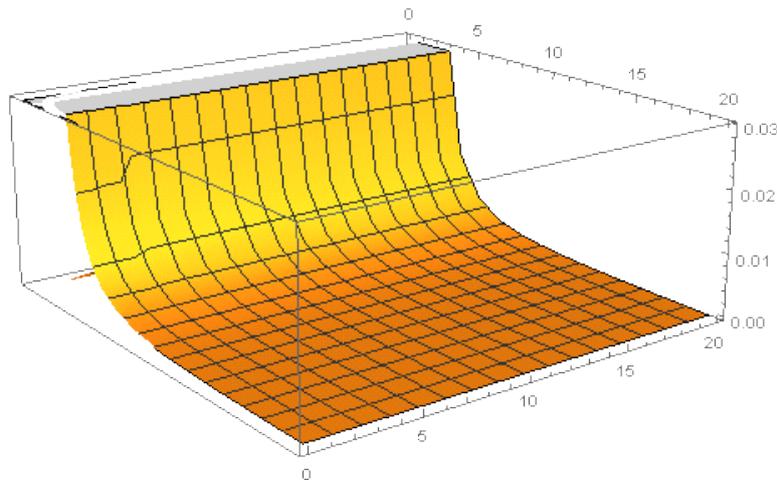


Figure 15 : Premier mineur "r" de la matrice hessienne

Nous avons remarqué que les deux graphes sont au-dessus du plan ($x=0 ; y=0$) donc $\Delta > 0$ et $r > 0$, donc la fonction $\overline{ESC}_{t_r}(t_p, t_h)$ qui représente le temps d'aller de la machine S/R est convexe.

Dans des travaux déjà fait par F.Zeroual, ils ont intéressé à l'étude de la convexité de la fonction du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées, ils ont trouvé que cette fonction est convexe, le temps que met la machine S/R pour retourner à la station dépôt/livraison ne dépend pas de paramètre t_r , il représente la moitié du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées.

En note :

ESC_{t_r} : Le temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant (l'aller + retour)

ESC : Le temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées

\overline{ESC}_{t_r} : Le temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant (l'aller)

$$ESC_{t_r} = \frac{1}{2} ESC + \overline{ESC}_{t_r}$$

La fonction du TSC de l'AS/RS à rack glissant est convexe puisque elle représente la somme de deux fonctions convexes, donc elle admet des minima globaux.

4.1 Optimisation par Métaheuristique pour l'AS/RS à rack glissant

Pour trouver la solution optimale qui représente le temps minimal du simple cycle on a deux possibilités soit d'utiliser une méthode analytique ou bien une méthode qui fait recours à l'intelligence artificielle. À cause de la complexité de ces formules, c'est très difficile de trouver l'optimum de manière analytique, donc on a choisi d'utiliser les Métaheuristiques comme particulier les algorithmes génétiques. D'un autre côté ce n'est pas facile d'utiliser l'algorithme génétique directement sur la fonction de temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant à cause du paramètre t_r . Pour cela nous avons préféré de l'essayer avec le modèle de temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées pour deux raisons : premièrement parce qu'on a déjà le résultat optimal pour comparer avec (Ce travail est déjà réalisé par S.Kholoughli et F.Zeroual), et deuxièmement parce que les équations sont plus faciles donc c'est facile d'adapter l'algorithme pour cette fonction.

Dans cette section nous optimisons les dimensions de l'AS/RS multi allée à l'aide d'algorithmes génétiques adaptés à notre problème avec une interprétation des résultats obtenus. Nous avons utilisé comme un langage de programmation PyCharm.

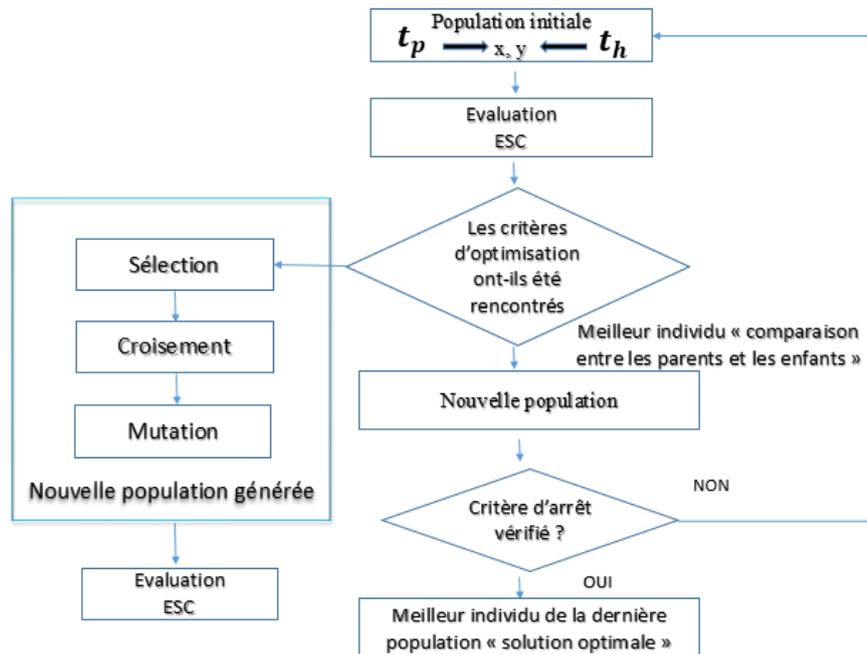


Figure 16 : Organigramme d'adaptation de l'AG pour le TSC de l'AS/RS multi allées

D'abord on génère une population initiale on utilisant le codage réel. Cette population contient 20 individus, ces individus représentent des points dans l'espace $[0; 2] \times [0; 2]$ de coordonnées (x, y) où x représente t_p et y représente t_h . Puis on va évaluer chaque individu dans la population initiale par une fonction objectif *ESC* qui représente le modèle du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées.

Par la suite on utilise les critères d'optimisation liés à cet algorithme pour reproduire une nouvelle population, commençant par la sélection nous avons choisi le type de sélection par tournoi, nous avons sélectionné nos individus et les stockés dans une nouvelle population P' .

Pour l'opération de croisement on a choisi une probabilité égale à 1, ce qui signifie qu'on va croiser tous les individus sélectionnés. Lors de cette opération, un chromosome dit parent s'échange une partie de ses gènes. Dans notre cas, on a deux gènes, donc le croisement se fait à 50% : le gène Y du premier chromosome parent s'échange avec le gène Y du deuxième chromosome et vice versa jusqu'à la fin du croisement de toute la population. Puisque notre chromosome contient deux gènes x et y , le type de croisement choisi est un croisement à un point :

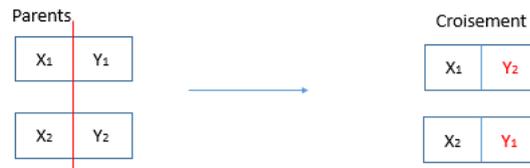


Figure 17 : Croisement

Puis on va passer à la mutation, sa probabilité égale à 0.05 veut dire qu'on va appliquer la mutation pour un seul individu parmi les 20, d'une façon aléatoire en choisissant un gène dans un chromosome soit x ou y qui va être complètement changé à une autre valeur cela permet d'introduire la diversité de la population de solutions. Une nouvelle population dite enfant est produit.



Figure 18 : Mutation

Maintenant une nouvelle population dite enfant est produit, nous avons concaténé les individus parents et les individus enfants dans une seule population et l'évaluation va être effectué sur cette population qui contient 40 individus, et garder les 20 meilleurs parmi ceux en fonction de leurs fitness (évaluation) ;

Ces derniers individus vont former une population qui va devenir une population initiale dans la prochaine itération jusqu'à l'obtention du critère d'arrêt choisis qui représente le nombre d'itérations. Après un certain nombre d'itération on va obtenir le minimum.

Les résultats trouvé après l'application de cet algorithme génétique sur le modèle du temps de simple cycle de l'AS/RS multi allée sont les même trouvé dans littérature au pare avant.

```
donc on a le resultat apres 999 iteration:  
Th= 0.8767367294698771  
Tp= 0.8677015002096595  
Tv= 1.3144995769560162
```

Figure 19 : Le résultat donné par l'AG

Après la validation de l'algorithme d'adaptation sur le modèle de l'AS/RS multi allée, il suffit de l'appliquer sur notre fonction à optimiser et celle du rack glissant.

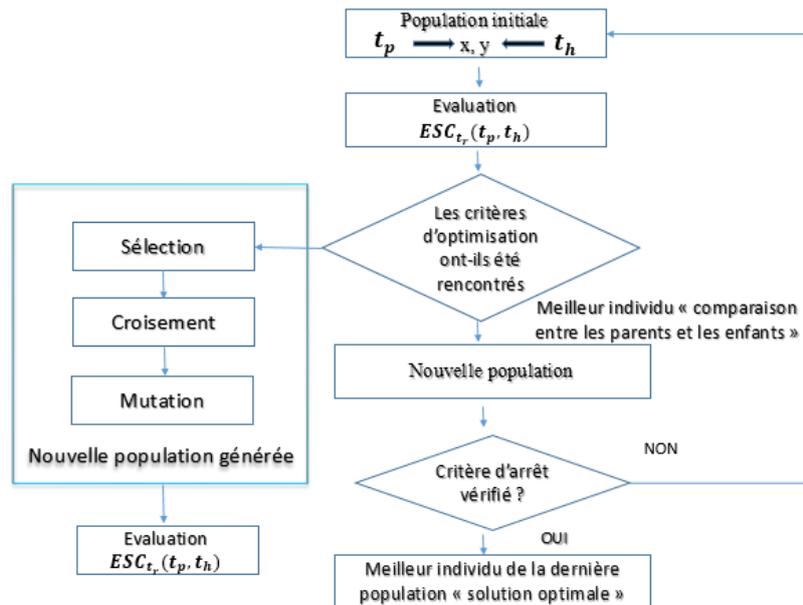


Figure 20 : Organigramme d'adaptation de l'AG pour le TSC de l'AS/RS à rack glissant

Après une simulation sous le programme de l'algorithme génétique, nous avons pris plusieurs valeurs différentes de t_r dans un intervalle de 0 à 10 d'un pas de 0.1 afin d'obtenir les valeurs minima de t_p et t_h et le temps de simple cycle minimal. Pour chacune des valeurs fixe de t_r nous avons obtenir les résultats présenter dans le tableau suivant :

t_r	t_p	t_h	ESC_{t_r}	t_r	t_p	t_h	ESC_{t_r}	t_r	t_p	t_h	ESC_{t_r}
0	0.87116	0.87673	1.98906	1.5	1.25313	0.52822	2.83281	3	1.25874	0.52822	4.33286
0.1	0.87116	0.87673	1.98906	1.6	1.25251	0.52822	2.93281	3.1	1.24361	0.52822	4.43284
0.2	0.89445	0.87237	1.99734	1.7	1.25162	0.52822	3.03281	3.2	1.24091	0.52822	4.53288
0.3	0.86598	0.87237	2.01205	1.8	1.17778	0.57091	3.13387	3.3	1.24028	0.76680	4.63289
0.4	0.88113	0.87237	2.03585	1.9	1.19298	0.57091	3.23378	3.4	1.21257	0.52822	4.73400
0.5	0.87036	0.87237	2.07079	2	1.22288	0.52822	3.33343	3.5	1.25304	0.52822	4.8328
0.6	0.91639	0.87237	2.12035	2.1	1.24691	0.52822	3.43282	3.6	1.18360	0.57091	4.93379
								4.5	1.20201	0.57091	5.83390
								4.6	1.19473	0.57091	5.93379
								4.7	1.25454	0.52822	6.03282
								4.8	1.25846	0.52822	6.13285
								4.9	1.01160	0.72339	6.26670
								5	1.19317	0.57091	6.33378
								5.1	1.24394	0.52822	6.43284

0.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.00455 0.72339 2.15686	2.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.26661 0.52822 3.53301	3.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18868 0.57091 5.03376	5.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18428 0.57091 6.53378
0.8	t_p t_h ESC_{t_r}	0.98682 0.72339 2.21806	2.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.26983 0.52822 3.63310	3.8	t_p t_h ESC_{t_r}	1.26286 0.52822 5.13292	5.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24760 0.52822 6.63281
0.9	t_p t_h ESC_{t_r}	0.99961 0.76278 2.29790	2.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18397 0.57091 3.73378	3.9	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24798 0.52822 5.23281	5.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.25949 0.52822 6.73287
1	t_p t_h ESC_{t_r}	0.98364 0.76680 2.38839	2.5	t_p t_h ESC_{t_r}	1.23654 0.52822 3.83297	4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24328 0.52822 5.33285	5.5	t_p t_h ESC_{t_r}	1.20841 0.57091 6.83408
1.1	t_p t_h ESC_{t_r}	0.99618 0.76278 2.48318	2.6	t_p t_h ESC_{t_r}	1.21752 0.52822 3.93371	4.1	t_p t_h ESC_{t_r}	1.25808 0.52822 5.43285	5.6	t_p t_h ESC_{t_r}	1.17854 0.57091 6.93386
1.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.27304 0.52822 2.54023	2.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18953 0.57091 4.03376	4.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.25067 0.52822 5.53281	5.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18837 0.57091 7.03376
1.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19765 0.57091 2.63468	2.8	t_p t_h ESC_{t_r}	1.25235 0.52822 4.13281	4.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19067 0.57091 5.63377	5.8	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18053 0.57091 7.13382
1.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.26553 0.52822 2.73317	2.9	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24791 0.52822 4.23281	4.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18790 0.57091 5.73376	5.9	t_p t_h ESC_{t_r}	1.23803 0.52822 7.23293
t_r			t_r			t_r			t_r		
6.0	t_p t_h ESC_{t_r}	1.27171 0.52822 7.33316	7.1	t_p t_h ESC_{t_r}	1.20343 0.57091 8.43394	8.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24546 0.52822 9.53283	9.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.25499 0.52822 10.63282
6.1	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18877 0.57091 7.43376	7.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19792 0.57091 8.53383	8.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24218 0.52822 9.63286	9.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24030 0.52822 10.73289
6.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.20142 0.57091 7.53389	7.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19705 0.57091 8.63382	8.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.25937 0.52822 9.73287	9.5	t_p t_h ESC_{t_r}	1.25322 0.52822 10.83281
6.3	t_p t_h ESC_{t_r}	1.17625 0.57091 7.63390	7.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.17734 0.57091 8.73388	8.5	t_p t_h ESC_{t_r}	1.20720 0.57091 9.83404	9.6	t_p t_h ESC_{t_r}	0.97230 0.75395 10.97762
6.4	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19685 0.57091 7.73381	7.5	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18927 0.57091 8.83376	8.6	t_p t_h ESC_{t_r}	1.17231 0.57091 9.93400	9.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24648 0.52822 11.03282
6.5	t_p t_h ESC_{t_r}	1.17642 0.57091 7.83390	7.6	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19482 0.57091 8.93379	8.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24993 0.57091 10.03672	9.8	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19310 0.57091 11.13378

6.6	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18719 0.57091 7.93377	7.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18913 0.57091 9.03376	8.8	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19532 0.57091 10.13380	9.9	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18042 0.57091 11.23382
6.7	t_p t_h ESC_{t_r}	1.17022 0.57091 8.03406	7.8	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19090 0.57091 9.13377	8.9	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18936 0.57091 10.23376	10	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18040 0.57091 11.33383
6.8	t_p t_h ESC_{t_r}	1.21588 0.57091 8.13436	7.9	t_p t_h ESC_{t_r}	1.24625 0.52822 9.23282	9.0	t_p t_h ESC_{t_r}	1.16629 0.57091 10.33421			
6.9	t_p t_h ESC_{t_r}	1.20038 0.57091 8.23387	8.0	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18774 0.57091 9.33376	9.1	t_p t_h ESC_{t_r}	1.19587 0.57091 10.43380			
7.0	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18026 0.57091 8.33383	8.1	t_p t_h ESC_{t_r}	1.18402 0.57091 9.43378	9.2	t_p t_h ESC_{t_r}	1.21347 0.76680 10.53426			

Tableau 3 : les résultats de la simulation par l'algorithme génétique

4.2 Optimisation par méthodes de descente pour l'AS/RS à rack glissant

Nous avons confirmé les résultats par l'application d'un algorithme déterministe plus précisément l'algorithme du gradient puisque la fonction de l'AS/RS à rack glissant ESC_{t_r} est différentiable et convexe, par ailleurs disons que les algorithmes déterministes sont les plus efficaces pour la minimisation de fonctions convexes, tandis que les algorithmes stochastiques permettent d'approcher des minima globaux (et pas seulement locaux) de fonctions non convexes (à un prix toutefois assez élevé en pratique).

Nous présentons dans cette partie l'algorithme du gradient adaptée au problème d'optimisation du temps simple cycle d'AS/RS à rack glissant. Nous avons utilisé comme un logiciel de programmation Maple :

Algorithme. Gradient

1. Choisir un point initial $x_0 \in E$;
 2. Calculer de $\nabla ESC_{t_r}(x_k)$;
 3. Fixer une valeur de t_r ;
 4. Fixer une valeur $s > 0$;
 5. Calculer $x_{k+1} = x_k - s * \nabla ESC_{t_r}(x_k) \quad k \in (0, n)$;
 6. **Pour** chaque itération i de 1 à N **Faire**
 7. $x_k = x_{k+1}$;
 8. $x_{k+1} = x_k - s * \nabla ESC_{t_r}(x_k)$;
 9. **Fin Pour** ;
 10. x_{k+1}
-

Puisque cette fonction est à deux variables (t_p, t_h) , le point initiale est un vecteur tel que :

$$x_0 = \begin{pmatrix} t_p \\ t_h \end{pmatrix}$$

La dérivée de cette fonction est un vecteur vertical, chaque ligne contient la dérivée par rapport à l'un de ces variables :

$$\nabla ESC_{t_r}(t_p, t_h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial ESC(t_p, t_h)}{\partial t_p} \\ \frac{\partial ESC(t_p, t_h)}{\partial t_h} \end{pmatrix}$$

La fonction ESC_{t_r} contient un paramètre t_r qui représente le temps de glissement des racks, pour calculer les points minima, il faudra fixer la valeur du paramètre t_r et chercher les valeurs optimales de t_p, t_h .

Soit E un espace de recherche et on se donne un point/itéré initial $x_0 = (t_p, t_h)$.

$ESC_{t_r}(t_p, t_h)$ Une fonction différentiable. On note $ESC_{t_r}'(x_k)$ et $\nabla ESC_{t_r}(x_k)$ la dérivée et le gradient de ESC_{t_r} en x_k . L'algorithme de gradient définit une suite d'itérés $x_1, x_2, \dots \in E$, jusqu'à ce que le teste d'arrêt soit satisfait, Il passe de x_k à x_{k+1} par les étapes précédent pour atteindre la solution optimale.

Après une simulation sous le programme du gradient, nous avons pris plusieurs valeurs différentes de t_r dans un intervalle de 0 à 10 d'un pas de 0.1 afin d'obtenir les valeurs minima

de t_p et t_h et le temps de simple cycle minimal. Pour chacune des valeurs fixe de t_r nous avons obtenir les résultats présenter dans le tableau suivant :

t_r			t_r			t_r			t_r		
0	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.87527 0.87527 1.98676	1.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 2.83262	3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.33262	4.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.83262
0.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.87735 0.87261 1.98896	1.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 2.93262	3.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.43262	4.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.93262
0.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.88410 0.86410 1.99664	1.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.03262	3.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.53262	4.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.03262
0.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.89602 0.84932 2.01124	1.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.13262	3.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.63262	4.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.13262
0.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.91339 0.82840 2.03390	1.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.23262	3.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.73262	4.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.23262
0.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.93619 0.80193 2.06541	2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.33262	3.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.83262	5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.33262
0.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.96422 0.77098 2.10625	2.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.43262	3.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.93262	5.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.43262
0.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	0.99690 0.73738 2.15653	2.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.53262	3.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.03262	5.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.53262
0.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.03385 0.70229 2.21606	2.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.63262	3.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.13262	5.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.63262
0.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.07470 0.66664 2.28447	2.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.73262	3.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.23262	5.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.73262
1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.11910 0.63129 2.36123	2.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.83262	4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.33262	5.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.83262
1.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.16669 0.59700 2.44570	2.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 3.93262	4.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.43262	5.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 6.93262
1.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.21710 0.56445 2.53714	2.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.03262	4.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.53262	5.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.03262

1.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23479 0.54820 2.63400	2.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.13262	4.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.63262	5.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.13262
1.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23335 0.54247 2.73281	2.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 4.23262	4.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 5.73262	5.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.23262
t_r			t_r			t_r			t_r		
6.0	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.332622	7.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.43262	8.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.53262	9.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.63262
6.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.43262	7.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.53262	8.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.63262	9.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.7326
6.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.53262	7.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.63262	8.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.73262	9.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.8326
6.3	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.63262	7.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.73262	8.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.83262	9.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.9326
6.4	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.73262	7.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.83262	8.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.93262	9.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 11.0326
6.5	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.83262	7.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.93262	8.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.0326	9.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 11.1326
6.6	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 7.93262	7.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.03262	8.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.1326	9.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 11.2326
6.7	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.03262	7.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.13262	8.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.2326	10.0	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 11.3326
6.8	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.13262	7.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.23262	9.0	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.3326			
6.9	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.23262	8.0	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 9.33262	9.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.4326			
7.0	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 8.33262	8.1	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.232564 0.540260 9.432622	9.2	t_p t_h ESC $_{t_r}$	1.23256 0.54026 10.5326			

Tableau 4 : les Résultats de la simulation par l'algorithme du gradient

Nous remarquons que pour les valeurs de t_p ça évolues de manier croissant en fonction de t_r jusqu'aux se stabilise pour une valeur $t_p = 1.23256$. Par contre pour les valeurs de t_h ça

évolues de manière décroissant en fonction de t_r jusqu'à ce qu'il se stabilise pour une valeur de $t_h = 0.54026$.

Nous pouvons remarquer que les résultats trouvés par l'algorithme génétique et par l'algorithme du gradient sont très proches.

Dans cette section, nous allons utiliser la méthode des moindres carrés non linéaire pour trouver les fonctions approximatives qui permettent d'avoir directement la valeur des trois dimensions optimales t_p , t_h et t_v sachant que la valeur du temps de glissement des racks t_r est connue, et cela à partir des points minima calculés (voir tableau). Nous expliquons dans cette partie la notion mathématique de cette méthode et l'approximation au sens des moindres carrés non linéaire. S'en suivra une interprétation des résultats obtenus.

5. Approximation des temps t_p et t_h en fonction de t_r

Nous avons effectué une étude d'optimisation avec deux méthodes sous la contrainte de la taille du système égale à 1, nous allons maintenant utiliser la même contrainte pour faire l'approximation des dimensions temporelles du système (t_p, t_h) en fonction du temps de glissement t_r . Les fonctions approximatives obtenues pour un volume égale 1.

5.1 Approximation au sens des Splines cubiques

L'idée du lissage par Splines est de découper la plage de la fonction à ajuster en sous intervalles, puis d'ajuster sur chaque sous-intervalle une fonction simple, en prenant des précautions pour le raccordement aux points de jonction. Un découpage bien choisi doit en effet permettre d'utiliser sur chaque sous-intervalle une fonction sensiblement plus simple que la fonction qu'il aurait fallu ajuster globalement.

Trouver la fonction s qui minimise $W(s, \lambda)$ pour λ donné se simplifie si l'on suppose que cette fonction est une spline cubique : courbe par morceaux constituée de polynômes du troisième degré. Si l'on doit lisser n valeurs (ou nœuds), il y a $n-1$ intervalles et donc $n-1$ polynômes du troisième degré définis chacun par quatre paramètres, soit au total $4n-4$ paramètres à déterminer.

- **Ajustement de courbe :**

On a utilisé la méthode des splines et avec la commande *spline* de MATLAB nous permet de trouver une fonction $D_{g1} = [0, +\infty [$ à huit polynômes du troisième degré car en a pris neuf

points pour lisser, il y a huit intervalles. Cette fonction reliant le temps déplacement sur les allées t_p à la valeur de t_r .

$$g1(tr) \approx Tp \approx \begin{cases} 0.87 + 0.06t_r + 0.25t_r^3 & t_r < 0.5 \\ 0.95 + 0.39t_r + 0.91t_r^2 - 0.36t_r^3 & t_r < 0.7 \\ 0.61 + 1.05t_r - 1.16t_r^2 + 0.62t_r^3 & t_r < 0.8 \\ 2.07 + 4.43t_r - 5.70t_r^2 + 2.23t_r^3 & t_r < 0.9 \\ 0.37 + 1.22t_r - 0.58t_r^2 + 0.09t_r^3 & t_r < 2.1 \\ 1.24 + 0.01t_r - 0.004t_r^2 + 0.0004t_r^3 & t_r < 3.2 \\ 1.22 + 0.006t_r - 0.001t_r^2 + 0.0001t_r^3 & t_r < 3.2 \\ 1.23 + 0.002t_r - 0.0005t_r^2 + 0.00003t_r^3 & \text{autre} \end{cases} \quad (7)$$

Nous pouvons représenter graphiquement les points minima (en a pris 9 points sur l'intervalle de $t_r = [0,5]$ pour avoir une fonction réduite, dans ce cas on a 8 polynômes) ainsi que la fonction $g1$ exprimant le temps de déplacement sur les allées :

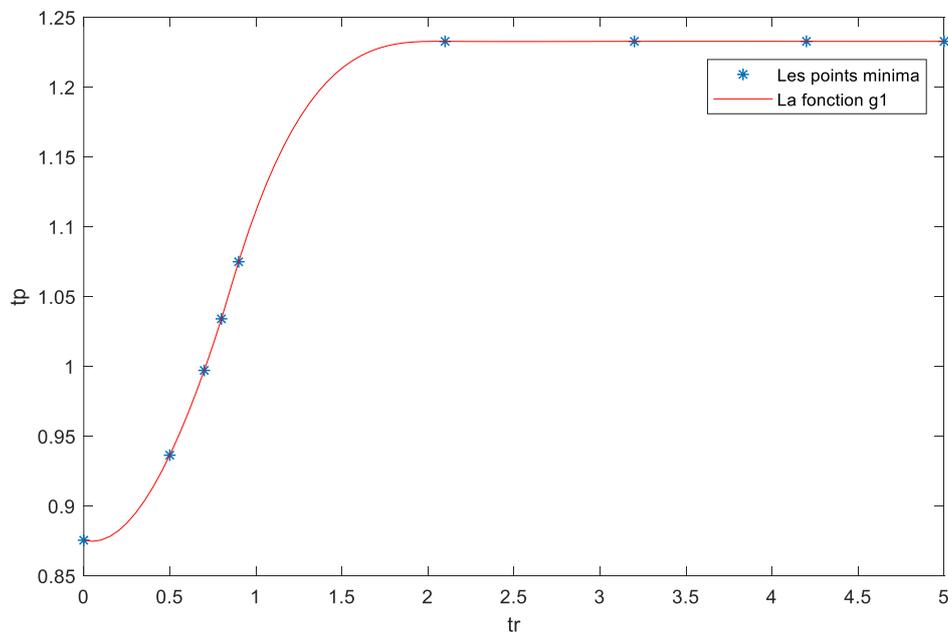


Figure 21 : Tracé de la fonction $g1$ en positionnant les points minima

Cette méthode nous permet de trouver une fonction $D_{g2} = [0, +\infty[$ à huit polynômes du troisième degré car en a pris neuf points pour lisser, il y a huit intervalles. Cette fonction reliant le temps déplacement sur l'allée de service t_h à la valeur de t_r .

$$g2(t_r) \approx t_h \approx \begin{cases} 0.87 - 0.08t_r - 0.25t_r^3 & t_r < 0.5 \\ 0.76 - 0.58t_r - 1.33t_r^2 - 0.63t_r^3 & t_r < 0.7 \\ 1.12 - 0.95t_r - 3.45t_r^2 - 1.38t_r^3 & t_r < 0.8 \\ 0.2 - 2.49t_r - 3.45t_r^2 - 1.38t_r^3 & t_r < 0.9 \\ 1.27 - 1.08t_r - 0.53t_r^2 - 0.08t_r^3 & t_r < 2.1 \\ 0.44 - 0.09t_r - 0.03t_r^2 - 0.003t_r^3 & t_r < 3.2 \\ 0.61 - 0.05t_r - 0.01t_r^2 - 0.001t_r^3 & t_r < 4.2 \\ 0.5 - 0.02t_r - 0.004t_r^2 - 0.0003t_r^3 & 4.2 \leq t_r \end{cases} \quad (8)$$

Nous pouvons représenter graphiquement les points minima ainsi que la fonction $g2$ exprimant le temps de déplacement sur les allées :

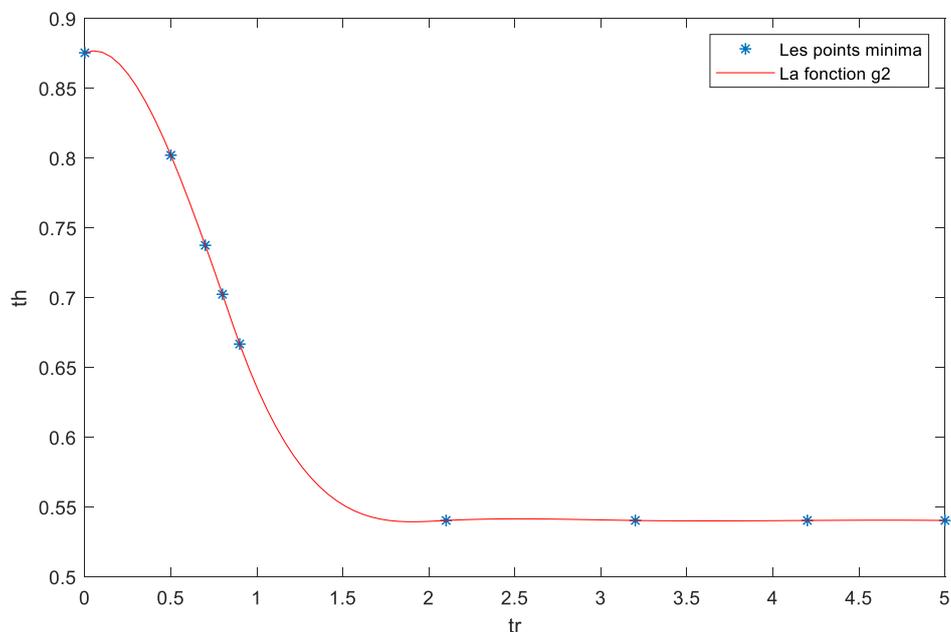


Figure 22 : Tracé de la fonction $g2$ en positionnant les points minima

Cette méthode nous a donné un bon résultat points de vue approximation de la fonction comme en voit dans les tracés des courbes, elles passent exactement par toutes les points minima par contre points de vue l'écriture de la fonction elle est très grande et ce n'est pas facile

à manipulé, c'est pour cela en a essayer d'autre méthode qui est la méthode des moindre carré pour avoir un résultat performant au niveau de l'écriture de la fonction.

Nous avons remarqué lors de la simulation numérique effectuée par les méthodes d'optimisations et l'analyse des courbes précédentes que la somme des dimensions optimales reste toujours approximative d'une constante pour chaque temps de glissement :

$$t_h + t_p = cst$$

Nous présentons dans le tableau 04 le résultat de la somme de dimensions optimales trouvées par l'optimisation pour t_r de 0 à 1.9, les autres résultats sont présentés dans l'annexe 01 :

t_r	t_p	t_h	$t_h + t_p$
0	0.87527	0.87527	1.75054
0.1	0.87735	0.87261	1.74996
0.2	0.8841	0.8641	1.7482
0.3	0.89602	0.84932	1.74534
0.4	0.91339	0.8284	1.74179
0.5	0.93619	0.80193	1.73812
0.6	0.96422	0.77098	1.7352
0.7	0.9969	0.73738	1.73428
0.8	1.03385	0.70229	1.73614
0.9	1.0747	0.66664	1.74134
1	1.1191	0.63129	1.75039
1.1	1.16669	0.597	1.76369
1.2	1.2171	0.56445	1.78155
1.3	1.23479	0.5482	1.78299
1.4	1.23335	0.54247	1.77582
1.5	1.23256	0.54026	1.77282
1.6	1.23256	0.54026	1.77282
1.7	1.23256	0.54026	1.77282
1.8	1.23256	0.54026	1.77282
1.9	1.23256	0.54026	1.77282

Tableau 5 : Résultat de la somme des dimensions optimales

Dans le cas de volume égal à 1 nous avons pris la moyenne de la somme des constantes :

$$cst = 1,7696508$$

5.2 Approximation au sens des moindres carrés non linéaires

❖ Présentation de la régression non linéaire

L'objectif de la régression non linéaire est d'ajuster les valeurs des variables dans le modèle pour trouver la courbe qui prédit le mieux Y de X. Plus simplement, un modèle de régression non linéaire se présente sous la forme suivante :

$$y_i = f(x_i, a) + r_i \quad i = 1, \dots, n$$

Ou :

⇒ Les y_i sont les réponses, f une fonction non linéaire dépendant du vecteur $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})'$ et du paramètre $a = (a_1, \dots, a_p)'$.

Les r_i sont résidus et l'écart entre y_i en réalité et y_i estimé, variables aléatoires inconnues ;

Donc le but est de trouver les paramètres qui minimisent la somme des carrés résiduels

$$SCR = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a)]^2 \quad (9)$$

Minimiser cette somme consiste à la dériver par rapport aux paramètres et à chercher les solutions annulant ses dérivés.

Dans le cas d'une régression linéaire, on aura un système de p équations linéaires à p inconnus simple à résoudre ce qui ne sera pas le cas dans une régression non linéaire ou on aura un système de p équations non linéaires en a et qui ne peut pas se résoudre analytiquement. [10]

Cependant, il existe plusieurs itératifs pour résoudre ce problème, mais on a choisi d'appliquer la méthode de gradient.

❖ L'application des moindres carrés

Les moindres carrés non linéaires est une forme des moindres carrés adaptée pour l'estimation d'un modèle non linéaire en n paramètres à partir de m observations ($m > n$). Une façon d'estimer ce genre de problème est de considérer des itérations successives se basant sur une version linéarisée du modèle initial.

Considérons un jeu de m couples d'observations, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, et une fonction de régression du type $y = f(x, \beta)$. Cette fonction dépend des *explicatives* x mais aussi

du vecteur des n paramètres $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ avec $m \geq n$. On souhaite trouver le vecteur de paramètres β qui ajuste au mieux les données, au sens des moindres carrés :

$$S = \sum_{i=1}^m r_i^2$$

Est minimisée en β , ou les résidus r_i sont données par

$$r_i = y_i - f(x_i, \beta) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Le minimum de la somme des carrés des résidus S est atteint lorsque le gradient s'annule (condition nécessaire). Puisque le problème est formulé avec n paramètre, il y a donc n équation normales :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 2 \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = 0 \quad , \quad (j = 1, \dots, n).$$

Dans un système non linéaire, les dérivées $\frac{\partial r_i}{\partial \beta_j}$ dépendent aussi bien des variables explicatives que des paramètres : il faut donc renoncer à résoudre les équations normales aussi simplement que dans le cas linéaire. On a alors recours à une résolution numérique, à l'aide d'un procédé itératif qui fournit des approximations successives de plus en plus proches de la vraie valeur (inconnue) des paramètres.

- **Ajustement de courbe :**

On a utilisé la méthode des moindres carrés et la commande *lsqcurvefit* de MATLAB nous permet de trouver une fonction non linéaire reliant le temps déplacement sur les allées t_p à la valeur de Tr .

$$F1(t_r) \approx t_p \approx \frac{1.23256t_r^3 + 0.87183t_r^2 + 0.89732t_r + 0.87527}{t_r^3 + t_r^2 + t_r + 1} \quad D = [0, +\infty [\quad (10)$$

Nous pouvons représenter graphiquement les points minima ainsi que la fonction $F1$ exprimant le temps de déplacement sur les allées :

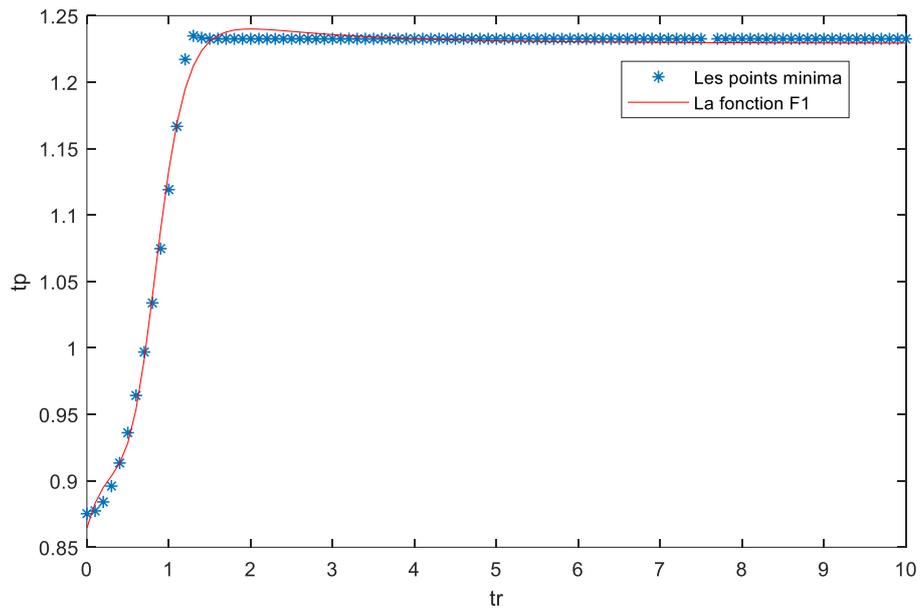


Figure 23 : Courbe représentant les points minima et la fonction approximative

L'égalité précédente $t_h + t_p = cst$ nous a permis de déduire que les deux courbes de t_h et t_p sont symétriques, nous pouvons trouver la courbe approximative de t_h en fonction de t_r à partir de celle de t_p :

$$t_h = cst - t_p$$

Donc la fonction approximatif qui relie le temps de déplacement sur l'allé de service t_h à la valeur de t_r devient :

Nous avons : $cst = 1,7696508$

Donc :

$$F2(t_r) \approx t_h \approx 1,7696508 - \frac{1.23256t_r^3 + 0.87183t_r^2 + 0.89732t_r + 0.87527}{t_r^3 + t_r^2 + t_r + 1} \quad D = [0, +\infty [\quad (11)$$

Nous pouvons représenter graphiquement les points minima ainsi que la fonction F2 exprimant le temps de déplacement sur l'allé de service :

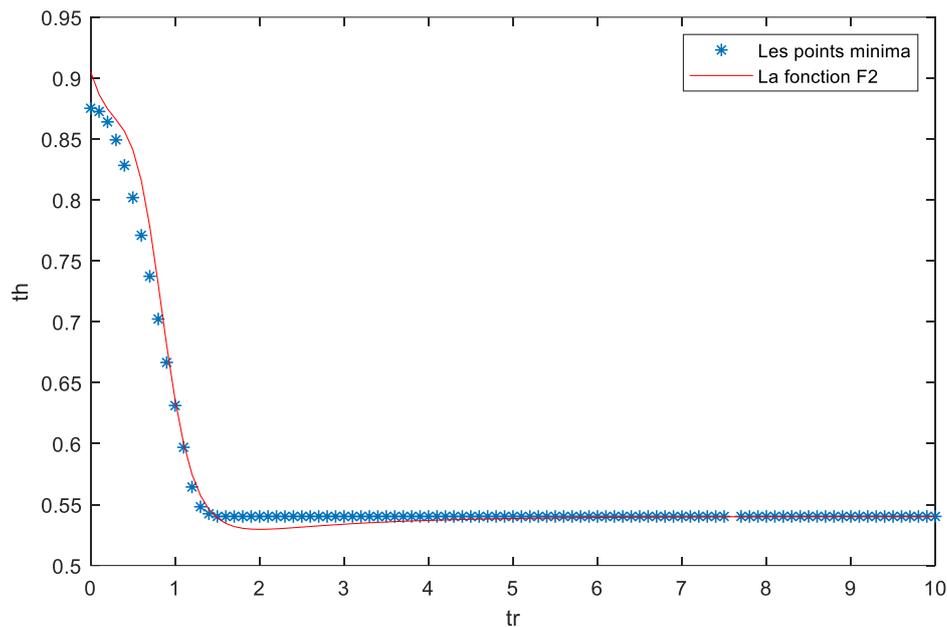


Figure 24 : Courbe représentant les points minima et la fonction approximative

Après l'application de la méthode des moindres carrés en remarque que les courbes ne passe pas exactement par toutes les points minima mais c'est approximative. D'un autre coté on a abouti à une fonction non linéaire simple et facile à manipuler.

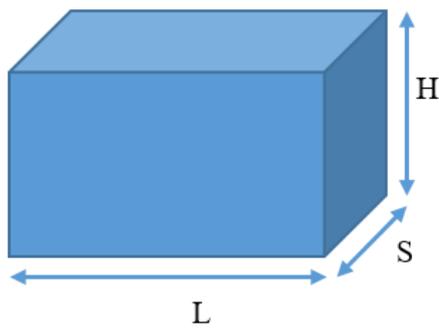
6. Etude de volume

Avant de faire une optimisation des dimensions d'un AS/RS que ce soit multi allés ou à rack glissant, les expressions liées à chaque type possèdent trois variables réelles (t_p, t_h, t_v), ça nous ramener à des problèmes pour faire une optimisation à trois variables, c'est ça ce que nous a mené à utiliser une contrainte liée à la taille du système, des travaux déjà fait, ils ont supposés que le volume est constant :

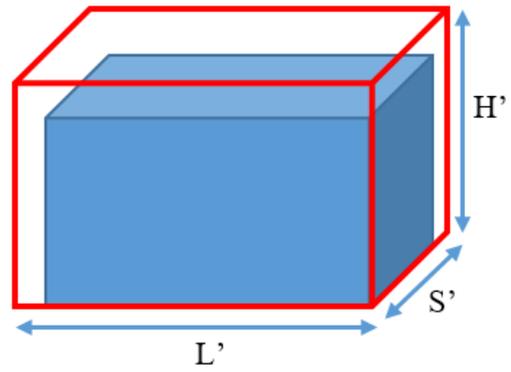
$$t_p * t_h * t_v = cst$$

Nous avons utilisé cette contrainte et supposer que cette constante =1 pour faire une réduction des fonctions liés au système à des fonctions à deux variables pour faire l'optimisation et l'approximation.

Maintenant nous voulons passer d'un volume constant =1 à un volume constant quelconque, sont toucher les propriétés des dimensions optimales du système, dans le cas général pour toute taille en utilisant une relation de la racine cubique de la division du volume voulu sur le volume qu'on a :



Volume (v)



Volume (v')

Pour qu'on puisse connaître les dimensions du volume (v') à partir du volume (v) nous utilisons la relation suivante :

$$L * \sqrt[3]{\left(\frac{v'}{v}\right)} = L'$$

$$S * \sqrt[3]{\left(\frac{v'}{v}\right)} = S'$$

$$H * \sqrt[3]{\left(\frac{v'}{v}\right)} = H'$$

❖ **Le cas de l'AS/RS multi allés :**

Dans le cas de l'AS/RS multi allés, on peut trouver les dimensions optimal d'un importe quel volume sans passer par l'étude de l'optimisation en utilisant la même relation de la racine cubique :

$$t_p(V = v) * \sqrt[3]{\left(\frac{v'}{v}\right)} = t_p(V = v')$$

Si on va supposer que v=1 la relation devient :

$$t_p(V = 1) * \sqrt[3]{v'} = t_p(V = v')$$

Donc pour ce type des AS/RS nous pouvons trouver les dimensions optimales de n'importe quel volume à l'aide de la relation de la racine cubique et le résultat optimal trouvé déjà dans la littérature pour le Volume =1.

❖ **Le cas de l'AS/RS à rack glissant :**

Pour voir si la relation de la racine cubique peut être appliqué dans le cas où il existe un paramètre t_r , nous avons réalisé un programme à l'aide du logiciel Maple qui nous permet d'avoir des dimensions optimales de t_p avec des valeurs quelconques de volume et en fonction de t_r qui varie de 0 à 10, le résultat de la simulation est présenté dans le tableau 05, les autres résultats sont présentés dans l'annexe 02 :

t_r	$t_p(V = 1)$	$t_p(V=1.5)$	$t_p(V = 2)$	$t_p(V=2.5)$	$t_p(V = 3)$	$t_p(V=3.5)$
0.1	0.87735957	1.00374558	1.10440909	1.18943956	1.26378017	1.33026604
0.2	0.88410246	1.00955112	1.10963281	1.19425439	1.26828566	1.33452634
0.3	0.89602847	1.01979534	1.1188307	1.20271608	1.27619116	1.34199103
0.4	0.91339138	1.0347372	1.13225114	1.21506056	1.28771983	1.35287201
0.5	0.93619728	1.05445944	1.15000665	1.2314131	1.30300238	1.36730138
0.6	0.96422268	1.07889658	1.17208955	1.251798	1.32208267	1.38533585
0.7	0.99690348	1.10780262	1.19839553	1.27615515	1.34492953	1.40696407
0.8	1.03385101	1.14071684	1.22860094	1.30432697	1.3714521	1.43212025
0.9	1.07470666	1.1773618	1.26237137	1.33595169	1.40138531	1.46065187
1	1.11910762	1.21746464	1.29948811	1.37081517	1.43445854	1.49225174
1.1	1.16669263	1.26074827	1.33972505	1.40872619	1.47050658	1.52675708
1.2	1.21710082	1.30693657	1.38285354	1.44948892	1.50935802	1.56401565
1.3	1.23479403	1.3557542	1.42864538	1.49290627	1.55083882	1.60387144
1.4	1.23335546	1.40692517	1.47687354	1.53878161	1.59477446	1.64616701
1.5	1.23256483	1.41330912	1.52730996	1.58691916	1.64099092	1.690745
1.6	1.23256451	1.41187309	1.55630205	1.63712308	1.68931491	1.73744861
1.7	1.23256452	1.41096696	1.55481902	1.67681432	1.73957312	1.78612152
1.8	1.23256452	1.41093415	1.55350209	1.67534122	1.7819726	1.83660713
1.9	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.6739221	1.78050668	1.87585876

Tableau 6 : t_p minimal pour des volumes différents

Nous avons tracé le résultat trouvé en utilisant Excel pour bien observer le comportement des résultats trouvés:

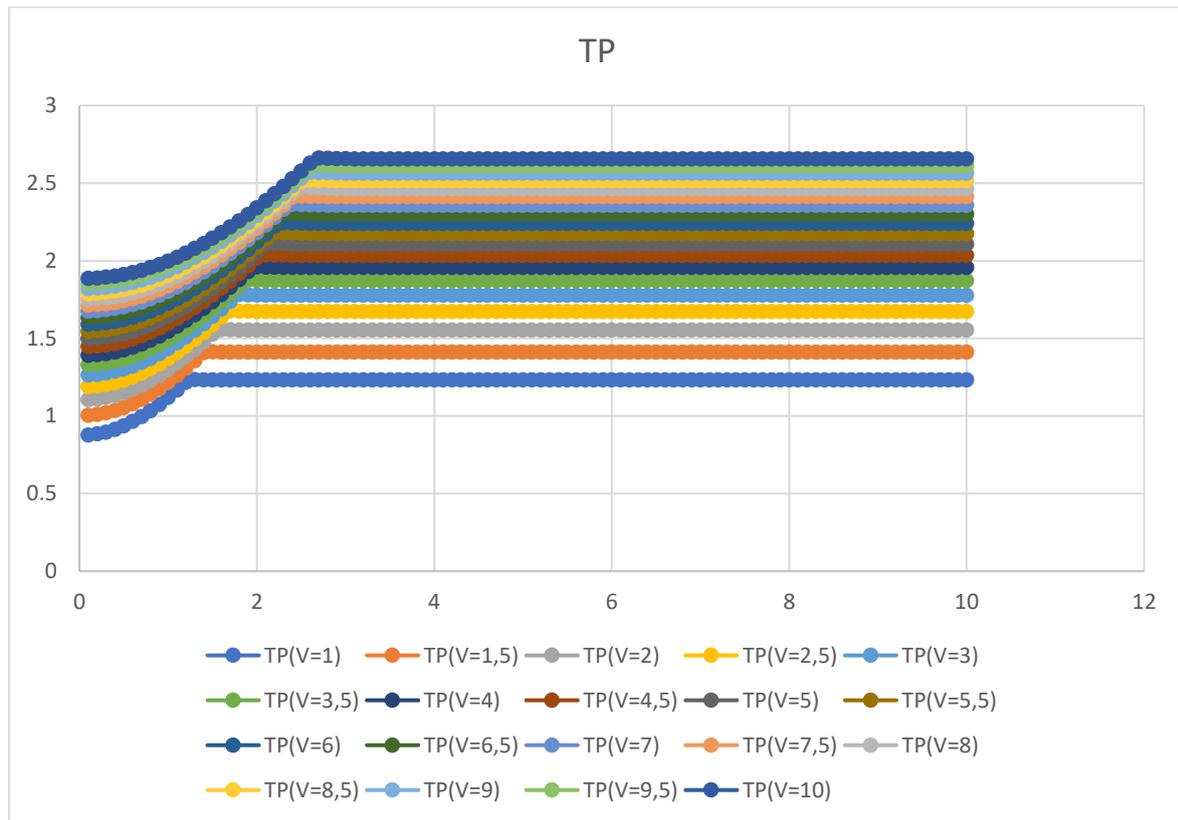


Figure 25 : t_p minimal en fonction de t_r pour des volumes différents

On peut remarquer que les graphiques sont similaires en deux points :

- Du point initial jusqu'à point de cassure nous trouvons une parabole
- Les graphes changent leurs directions et devient constant dans une valeur jusqu'à l'infini

Résultats :

- Ces points de cassure se produisent lorsque la valeur de : t_p et t_r sont égaux, donc nous trouvons une droite passe directement par le point d'origine.

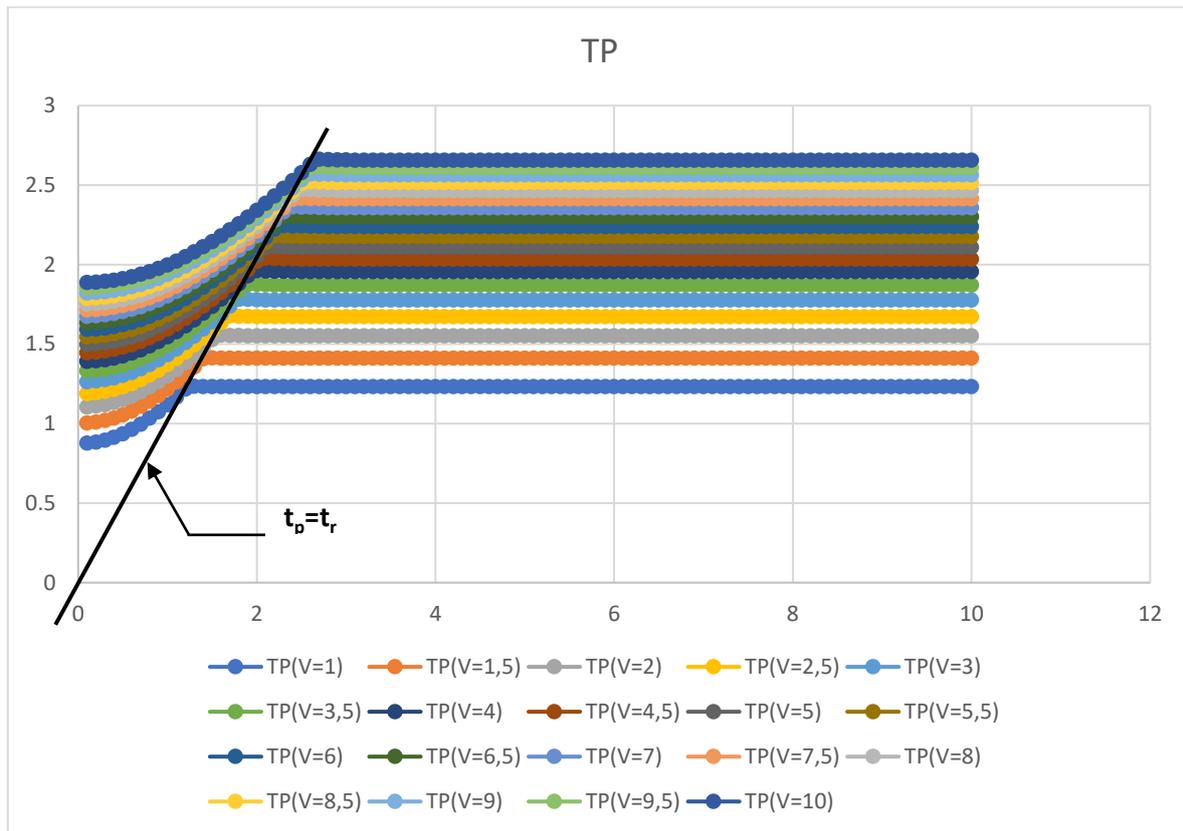


Figure 26 : la droite $t_p = t_r$

- Nous avons essayé la relation de la racine cubique dans ce cas mais elle est vérifiée que dans les deux cas suivants :
 - Le point initial de la courbe : puisqu'on a pris des points de t_r de 0 à 10 donc le point initial est l'image de t_p quand $t_r=0$, c'est exactement le cas de l'AS/RS multi allés ;
 - La partie constante de la courbe : nous avons essayé d'appliquer la relation dans cette partie, le résultat trouvé est exactement le même trouvé déjà dans la simulation numérique.
- La relation de la racine cubique ne donne pas un résultat satisfait dans la partie de parabole, la difficulté repose sur la valeur du point de cassure, nous savons que se points appartient dans la droite ou $t_p=t_r$ mais la valeur de t_r pour cette image change aléatoirement pour chaque volume.

7. Conclusion

Nous nous sommes intéressés à l'optimisation des dimensions temporelles de systèmes automatisés de stockage/déstockage de type rack glissant pour un temps de cycle minimal avec deux méthodes. Nous avons commencé par l'optimisation à l'aide d'une méthode stochastique c'est-à-dire les Métaheuristique précisément les algorithmes génétiques puis on a confirmé les résultats trouvés par une méthode déterministe en utilisant le gradient en minimisant la fonction du temps de simple cycle établie par Zeroual et Ghomri pour un temps de simple cycle minimal et en tenant compte des contraintes de causalité des durées de transports horizontaux et verticaux et une contrainte liée à la taille du système.

D'abord nous avons présenté la méthode qui est un algorithme de d'optimisation et qui possède les propriétés de converger théoriquement vers un minimum globale. En suite nous avons adapté l'algorithme génétique pour minimiser le temps de simple cycle d'AS/RS à rack glissant. Puisque la fonction de l'AS/RS à rack glissant ESC_{t_r} est différentiable et convexe donc nous avons appliqué l'algorithme du gradient adapté à notre problème d'optimisation, ceci nous a menés à obtenir les points minima qui est approximativement égal de l'algorithme génétique.

Après nous avons expliqué la notion des splines et de la régression linéaire et l'approximation au sens des moindres carrés qui nous a aidé à trouver les fonctions approximatives qui permettent d'avoir directement la valeur des trois dimensions optimales t_p , t_h et t_v sachant que la valeur du temps de glissement des racks t_r est connue, et cela à partir des points minima calculés.

Les résultats approximatifs que nous avons trouvés sont vérifiés pour un volume=1, donc nous avons commencé de trouver la relation entre les dimensions optimales pour ce volume et autres volumes quelconques, nous avons pu appliquer la notion de la racine cubique du rapport du volume à atteindre sur le volume qu'on a pour le cas de l'AS/RS multi allées, nous avons remarqué que cette relation est vérifié que pour certains cas pour l'AS/RS à rack glissant.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés aux systèmes automatisés de stockage/déstockage (AS/RS) en particulier l'AS/RS à rack glissant. Ce dernier se caractérise par l'existence de plusieurs racks qui se déplacent latéralement sur des rails de telle sorte qu'on puisse ouvrir une allée entre n'importe quels deux racks mitoyens dans laquelle la machine de stockage/déstockage circule. Ce type d'AS/RS, n'a jamais été étudié, il est utilisé en particulier dans l'industrie pharmaceutique et dans les bibliothèques. Il permet une utilisation optimale de l'espace de stockage, en réduisant au minimum le nombre des allées de service. Ce travail s'articule sur l'étude mathématique et l'optimisation par une Métaheuristique des dimensions d'un système automatisé de stockage/déstockage (AS/RS) à racks glissants.

Nous avons commencé, en premier chapitre par définir les deux systèmes automatisés de stockage/déstockage AS/RS multi-allée et à rack glissant leurs configuration ainsi que la modélisation du temps de simple cycle.

Dans le deuxième chapitre, nous avons fait une étude mathématique de la fonction du temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant. Nous avons démontré que lorsque le temps de glissement des racks tant vers zéro l'expression représente que l'allée de l'AS/RS multi allées, ce qui valide notre expression. Par la suite nous avons fait une étude de continuité pour qu'on puisse entamer l'optimisation du temps de simple cycle de ce type d'AS/RS, lors de cette étude nous avons déduit les courbes d'intersection entre les domaines de définition des 13 fonctions pour prouver la continuité de l'expression. Puis, par l'utilisation du logiciel Maple nous avons pu dessiner la deuxième dérivée (matrice hessienne) de la fonction ESC_{t_r} , et nous pouvons voir qu'elle est strictement positive en déduit que la fonction est convexe.

Ensuite, nous avons entamé notre objectif principale consiste à l'optimisation des dimensions de l'AS/RS à rack glissants pour minimiser le temps de simple cycle de la machine S/R. Nous optimisons les dimensions de à rack glissants par deux méthodes. D'abord en utilisant une métaheuristique comme particulier l'algorithme génétique, Ce n'est pas facile d'utiliser l'algorithme génétique directement sur la fonction de temps de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant à cause du paramètre t_r . Pour cela nous avons préféré de l'essayer avec le modèle de temps de simple cycle de l'AS/RS multi allées pour deux raisons : premièrement parce qu'on a déjà le résultat optimal pour comparer avec (Ce travail est déjà réalisé par S.Kholoughli et F.Zeroual), et deuxièmes parce que les expressions sont plus facile donc c'est facile d'adapter l'algorithme pour cette fonction. Après la validation de l'algorithme

d'adaptation sur le modèle de l'AS/RS multi allée, nous avons appliqué sur notre fonction à optimiser et celle du rack glissant en faisant appel à un langage de programmation PyCharm. Après une simulation sous le programme de l'algorithme génétique, nous avons pris plusieurs valeurs différentes de t_r dans un intervalle de 0 à 10 d'un pas de 0.1 afin d'obtenir les valeurs minima de t_p et t_h et le temps de simple cycle minimal. Pour chacune des valeurs fixe de t_r . Ensuite, nous avons confirmé les résultats par l'application d'un algorithme déterministe plus précisément l'algorithme du gradient puisque la fonction de l'AS/RS à rack glissant ESC_{t_r} est différentiable et convexe ceci nous a menés à obtenir les points minima qui est approximativement égal de l'algorithme génétique.

Après nous avons utilisé la technique de l'approximation au sens des splines cubiques et moindres carrés pour trouver les deux fonctions approximatives qui permettent d'avoir directement la valeur des trois dimensions optimales t_p , t_h et t_v sachant que la valeur du temps de glissement des racks t_r est connue, et cela a partir des points minima calculés. Nous avons utilisé le logiciel MATLAB qui nous a permis d'obtenir directement les meilleurs coefficients d'un polynôme de degré 3 par la méthode des moindres carrés.

Une perspective très intéressante peut-être proche serait de trouver la relation entre les dimensions optimales t_p , t_h et t_v pour des volumes quelconques, puisque nous avons trouvé la fonction approximative pour un seul volume, cette relation nous permet d'avoir les dimensions optimales d'AS/RS à rack glissant sans passer par l'optimisation, il suffit d'avoir le temps de glissement et le volume voulu pour l'entrepôt.

Bibliographie

- [1] Metahri,D.,& Hachemi, K.,«Modèle de récupération et de temps de déplacement pour un système automatisé de stockage et de récupération en rack à chute libre,» *Journal international du génie industriel*, 2018.
- [2] Ghomri, L., Sari, Z., Guezzen, A. H., & Sari,T., «Expression analytiques du temps de cycle pour les AS/RS,» *7e Conférence Internationale de modélisation et simulation-MOSIM 08*, 2008.
- [3] Guezzen, A.H.,Modélisation du temps de cycle d'un système automatisé de stockage/déstockage (AS/RS) multi-allées et à racks glissants, Université Abou Bakr Belkaid-Tlemcen, 2014.
- [4] Zeroual, F. Zahra, Modélisation et optimisation des systèmes automatisés de, Université Abou Bakr Belkaid-Tlemcen, 2019.
- [5] Taillard, J., Alain,P., Patrick,S., Éric, Métaheuristiques pour l'optimisation difficile, Eyrolles, 2003.
- [6] Souier, M., Métaheuristiques pour la manipulation de routages alternatifs en temps réel dans un Job Shop, Université Abou Bakr Belkaid.
- [7] Jourdan, L., Métaheuristiques pour l'extraction de connaissances: Application à la génomique, Université des Sciences et Technologie de Lille.
- [8] Francois,G., Souquet,A. Radet, ALGORITHMES GENETIQUES, 2004.
- [9] Jean,M., Nicolas,D., Algorithmes génétiques, 2005.
- [10] Sambakhe., Diariétou, Régression non linéaire : application à l'analyse de la rythmicité de gènes circadiens, 2011.

Annexes

Annexe 01 : Résultat de la somme des dimensions optimales pour t_r de 2 à 10

t_r	t_p	t_h	$t_h + t_p$	t_r	t_p	t_h	$t_h + t_p$
2	0.54026	1.23256	1.77282	6	0.54026	1.23256	1.77282
2.1	0.54026	1.23256	1.77282	6.1	0.54026	1.23256	1.77282
2.2	0.54026	1.23256	1.77282	6.2	0.54026	1.23256	1.77282
2.3	0.54026	1.23256	1.77282	6.3	0.54026	1.23256	1.77282
2.4	0.54026	1.23256	1.77282	6.4	0.54026	1.23256	1.77282
2.5	0.54026	1.23256	1.77282	6.5	0.54026	1.23256	1.77282
2.6	0.54026	1.23256	1.77282	6.6	0.54026	1.23256	1.77282
2.7	0.54026	1.23256	1.77282	6.7	0.54026	1.23256	1.77282
2.8	0.54026	1.23256	1.77282	6.8	0.54026	1.23256	1.77282
2.9	0.54026	1.23256	1.77282	6.9	0.54026	1.23256	1.77282
3	0.54026	1.23256	1.77282	7	0.54026	1.23256	1.77282
3.1	0.54026	1.23256	1.77282	7.1	0.54026	1.23256	1.77282
3.2	0.54026	1.23256	1.77282	7.2	0.54026	1.23256	1.77282
3.3	0.54026	1.23256	1.77282	7.3	0.54026	1.23256	1.77282
3.4	0.54026	1.23256	1.77282	7.4	0.54026	1.23256	1.77282
3.5	0.54026	1.23256	1.77282	7.5	0.54026	1.23256	1.77282
3.6	0.54026	1.23256	1.77282	7.7	0.54026	1.23256	1.77282
3.7	0.54026	1.23256	1.77282	7.8	0.54026	1.23256	1.77282
3.8	0.54026	1.23256	1.77282	7.9	0.54026	1.23256	1.77282
3.9	0.54026	1.23256	1.77282	8	0.54026	1.23256	1.77282
4	0.54026	1.23256	1.77282	8.1	0.54026	1.23256	1.77282
4.1	0.54026	1.23256	1.77282	8.2	0.54026	1.23256	1.77282
4.2	0.54026	1.23256	1.77282	8.3	0.54026	1.23256	1.77282
4.3	0.54026	1.23256	1.77282	8.4	0.54026	1.23256	1.77282
4.4	0.54026	1.23256	1.77282	8.5	0.54026	1.23256	1.77282
4.5	0.54026	1.23256	1.77282	8.6	0.54026	1.23256	1.77282
4.6	0.54026	1.23256	1.77282	8.7	0.54026	1.23256	1.77282
4.7	0.54026	1.23256	1.77282	8.8	0.54026	1.23256	1.77282

4.8	0.54026	1.23256	1.77282	8.9	0.54026	1.23256	1.77282
4.9	0.54026	1.23256	1.77282	9	0.54026	1.23256	1.77282
5	0.54026	1.23256	1.77282	9.1	0.54026	1.23256	1.77282
5.1	0.54026	1.23256	1.77282	9.2	0.54026	1.23256	1.77282
5.2	0.54026	1.23256	1.77282	9.3	0.54026	1.23256	1.77282
5.3	0.54026	1.23256	1.77282	9.4	0.54026	1.23256	1.77282
5.4	0.54026	1.23256	1.77282	9.5	0.54026	1.23256	1.77282
5.5	0.54026	1.23256	1.77282	9.6	0.54026	1.23256	1.77282
5.6	0.54026	1.23256	1.77282	9.7	0.54026	1.23256	1.77282
5.7	0.54026	1.23256	1.77282	9.8	0.54026	1.23256	1.77282
5.8	0.54026	1.23256	1.77282	9.9	0.54026	1.23256	1.77282
5.9	0.54026	1.23256	1.77282	10	0.54026	1.23256	1.77282

Annexe 02 : les dimensions optimales pour des volumes différents (cas : $V=1,1.5, 2,2.5, 3,3.5$) t_r de 2 à 10

t_r	$t_p(V = 1)$	$t_p(V=1.5)$	$t_p(V = 2)$	$t_p(V=2.5)$	$t_p(V = 3)$	$t_p(V=3.5)$
2	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67295388	1.77905877	1.87438943
2.1	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.7779458	1.87293655
2.2	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.6728474	1.77766582	1.87177926
2.3	1.23256448	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766574	1.8713959
2.4	1.2325645	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.7776657	1.87139591
2.5	1.2325645	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766567	1.8713959
2.6	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.8713959
2.7	1.23256453	1.41093415	1.55293397	1.67284743	1.77766563	1.8713959
2.8	1.2325646	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.871396
2.9	1.23256451	1.41093418	1.55293397	1.67284741	1.77766565	1.8713959
3	1.23256451	1.41093416	1.55293396	1.6728474	1.77766563	1.8713959
3.1	1.23256449	1.41093424	1.55293397	1.6728474	1.77766563	1.8713959
3.2	1.23256451	1.41093423	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.8713959
3.3	1.23256451	1.41093418	1.55293397	1.67284746	1.77766558	1.8713959
3.4	1.23256451	1.41093415	1.55293398	1.67284745	1.77766557	1.8713959
3.5	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284743	1.77766557	1.8713959
3.6	1.23256451	1.41093414	1.55293397	1.67284742	1.77766556	1.8713959
3.7	1.23256451	1.41093414	1.55293384	1.67284741	1.77766556	1.8713959
3.8	1.23256451	1.41093414	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.87139592
3.9	1.23256451	1.41093413	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.87139591
4	1.23256451	1.41093413	1.55293451	1.67284741	1.77766563	1.87139591
4.1	1.23256451	1.41093413	1.55293393	1.67284741	1.77766563	1.87139591
4.2	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.8713959
4.3	1.23256451	1.41093415	1.55293396	1.67284741	1.77766561	1.8713959
4.4	1.23256451	1.41093415	1.55293396	1.67284741	1.77766564	1.8713959
4.5	1.23256451	1.41093415	1.55293398	1.67284741	1.77766566	1.87139589
4.6	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.6728474	1.77766564	1.87139591
4.7	1.23256451	1.41093412	1.55293397	1.6728474	1.77766565	1.87139591

t_r	$t_p(V = 1)$	$t_p(V=1.5)$	$t_p(V = 2)$	$t_p(V=2.5)$	$t_p(V = 3)$	$t_p(V=3.5)$
4.8	1.23256451	1.41093415	1.55293398	1.67284741	1.77766565	1.87139589
4.9	1.23256451	1.41093415	1.55293428	1.67284741	1.77766564	1.87139591
5	1.23256451	1.41093415	1.55293395	1.67284741	1.77766564	1.8713959
5.1	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.87139597
5.2	1.23256453	1.41093415	1.55293399	1.67284741	1.77766563	1.87139602
5.3	1.23256451	1.41093415	1.55293403	1.67284739	1.77766563	1.8713958
5.4	1.23256449	1.41093415	1.55293409	1.67284734	1.77766563	1.87139589
5.5	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284725	1.77766563	1.871396
5.6	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284742	1.77766563	1.8713959
5.7	1.23256461	1.41093415	1.55293397	1.67284745	1.77766563	1.8713959
5.8	1.23256456	1.41093415	1.55293397	1.67284742	1.77766563	1.8713959
5.9	1.23256454	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.8713959
6	1.23256453	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.8713959
6.1	1.23256452	1.41093415	1.55293397	1.67284739	1.77766563	1.8713959
6.2	1.23256452	1.41093415	1.55293396	1.67284741	1.77766563	1.8713959
6.3	1.23256451	1.41093415	1.55293396	1.67284741	1.77766563	1.8713959
6.4	1.23256451	1.41093415	1.55293396	1.67284741	1.77766558	1.8713959
6.5	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766549	1.87139589
6.6	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.87139589
6.7	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284742	1.77766561	1.8713959
6.8	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284738	1.77766521	1.87139579
6.9	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.87139591
7	1.2325645	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.8713959
7.1	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284738	1.77766563	1.8713959
7.2	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284764	1.77766563	1.87139587
7.3	1.23256451	1.41093389	1.55293397	1.67284741	1.77766557	1.8713959
7.4	1.23256451	1.410934	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.8713959
7.5	1.23256451	1.41093404	1.55293397	1.67284715	1.77766563	1.8713959
7.6	1.23256442	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766556	1.8713959
7.7	1.23256451	1.41093414	1.55293396	1.67284739	1.77766562	1.87139587

t_r	$t_p(V = 1)$	$t_p(V=1.5)$	$t_p(V = 2)$	$t_p(V=2.5)$	$t_p(V = 3)$	$t_p(V=3.5)$
7.8	1.23256451	1.41093415	1.55293395	1.67284737	1.77766556	1.87139587
7.9	1.23256451	1.41093421	1.55293394	1.67284734	1.77766557	1.8713959
8	1.23256451	1.41093415	1.55293396	1.6728473	1.77766552	1.8713959
8.1	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284739	1.77766544	1.87139586
8.2	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284738	1.77766562	1.87139578
8.3	1.23256452	1.41093415	1.55293397	1.67284748	1.77766556	1.87139566
8.4	1.23256451	1.41093415	1.55293396	1.67284747	1.77766558	1.87139586
8.5	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284746	1.77766554	1.87139584
8.6	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284745	1.77766563	1.8713958
8.7	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284742	1.77766559	1.87139574
8.8	1.2325645	1.41093417	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.87139614
8.9	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.87139608
9	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.87139598
9.1	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.87139592
9.2	1.2325645	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.87139588
9.3	1.23256448	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766564	1.87139584
9.4	1.23256446	1.41093414	1.552934	1.67284741	1.77766562	1.87139567
9.5	1.23256446	1.41093415	1.55293397	1.67284742	1.77766563	1.8713959
9.6	1.23256449	1.41093415	1.55293397	1.67284742	1.77766567	1.8713959
9.7	1.23256451	1.41093413	1.55293397	1.67284751	1.77766567	1.87139588
9.8	1.23256456	1.41093414	1.55293397	1.67284741	1.77766563	1.8713959
9.9	1.23256451	1.41093411	1.55293397	1.67284732	1.77766562	1.87139591
10	1.23256451	1.41093415	1.55293397	1.67284741	1.77766562	1.87139585

Annexe 03 : les dimensions optimales pour des volumes différents (cas : V de 4 à 10 et t_r de 2 à 10)

t_r	$t_p(V = 4)$	$t_p(V=4.5)$	$t_p(V = 5)$	$t_p(V=5.5)$	$t_p(V = 6)$	$t_p(V=6.5)$
0.1	1.39069205	1.44627533	1.49788292	1.54615783	1.59159103	1.63456709
0.2	1.39475139	1.45016544	1.50162819	1.54977677	1.59509859	1.63797531
0.3	1.40185483	1.45696536	1.50816805	1.55609031	1.60121266	1.64391177
0.4	1.41220418	1.46686765	1.51768698	1.56527559	1.61010376	1.65254086
0.5	1.42593148	1.48000302	1.53031395	1.57745929	1.62189623	1.66398447
0.6	1.44310131	1.49644161	1.54612277	1.59271784	1.63666816	1.67832165
0.7	1.46371739	1.51619802	1.56513632	1.61108046	1.65445377	1.69559085
0.8	1.48773212	1.53923911	1.58733291	1.63253469	1.67524815	1.71579326
0.9	1.51505169	1.56549324	1.61265411	1.65703303	1.69901294	1.73889826
1	1.54540747	1.59477621	1.64098099	1.68449394	1.72568282	1.76484907
1.1	1.57860376	1.62684074	1.67205245	1.71468349	1.75508121	1.79352292
1.2	1.61450383	1.66156138	1.70573454	1.7474405	1.78700629	1.82469377
1.3	1.65296629	1.69880896	1.74190848	1.78265513	1.82135585	1.85825723
1.4	1.69384763	1.73845151	1.78045205	1.82021375	1.85802376	1.89411371
1.5	1.73700369	1.78035555	1.82124183	1.86000068	1.89690147	1.93216093
1.6	1.78229071	1.82438899	1.86415307	1.90189947	1.9378791	1.97229514
1.7	1.82956536	1.87041801	1.90906218	1.94579364	1.98084677	2.01441212
1.8	1.8786848	1.91831071	1.95584548	1.99156681	2.02569502	2.05840754
1.9	1.9295054	1.96793485	2.00437986	2.03910351	2.07231347	2.10417766
2	1.96104716	2.01915743	2.05454181	2.08828803	2.12059395	2.15161889
2.1	1.95957004	2.03928285	2.10620701	2.1390043	2.17042696	2.20062779
2.2	1.95812491	2.03779767	2.11180907	2.18100602	2.2217026	2.25110058
2.3	1.95697628	2.03637275	2.11032064	2.1795479	2.2446861	2.30293272
2.4	1.9565742	2.03527054	2.10893143	2.1780662	2.24320592	2.30482911
2.5	1.9565742	2.0349194	2.10791238	2.17673308	2.24174607	2.30333962
2.6	1.9565742	2.03491916	2.10765566	2.17583587	2.24049563	2.30192257
2.7	1.95657421	2.03491915	2.10765566	2.17569103	2.2397658	2.30078851
2.8	1.95657419	2.03491916	2.10765552	2.17569103	2.23971835	2.30028078
2.9	1.95657413	2.03491926	2.10765558	2.17569103	2.23971835	2.30028039
3	1.95657419	2.03491917	2.10765568	2.17569136	2.23971835	2.30028041

t_r	$t_p(V = 4)$	$t_p(V=4.5)$	$t_p(V = 5)$	$t_p(V=5.5)$	$t_p(V = 6)$	$t_p(V=6.5)$
3.1	1.95657419	2.03491917	2.10765567	2.17569132	2.23971835	2.30028039
3.2	1.95657419	2.03491917	2.10765567	2.17569128	2.23971835	2.30028039
3.3	1.95657419	2.03491917	2.10765567	2.17569125	2.23971833	2.30028039
3.4	1.95657419	2.03491917	2.10765567	2.17569123	2.23971832	2.30028039
3.5	1.95657419	2.03491917	2.10765567	2.17569122	2.23971832	2.30028039
3.6	1.95657419	2.03491917	2.10765598	2.17569122	2.23971833	2.30028039
3.7	1.95657419	2.03491917	2.10765596	2.17569122	2.23971833	2.30028039
3.8	1.95657419	2.03491917	2.10765594	2.17569122	2.23971834	2.30028039
3.9	1.9565742	2.03491917	2.10765592	2.17569121	2.23971835	2.30028039
4	1.9565742	2.03491906	2.10765566	2.17569121	2.23971835	2.30028039
4.1	1.9565742	2.0349191	2.10765563	2.17569103	2.23971835	2.30028039
4.2	1.9565742	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971831	2.30028039
4.3	1.9565742	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
4.4	1.9565742	2.03491917	2.10765568	2.17569103	2.23971835	2.30028039
4.5	1.95657413	2.03491917	2.10765611	2.17569103	2.23971835	2.30028039
4.6	1.95657428	2.03491916	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028037
4.7	1.9565742	2.03491916	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
4.8	1.9565742	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
4.9	1.9565742	2.03491917	2.10765565	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5	1.9565742	2.03491917	2.10765567	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5.1	1.9565742	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5.2	1.9565742	2.03491917	2.10765565	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5.3	1.9565742	2.03491917	2.10765564	2.17569103	2.23971835	2.30028038
5.4	1.9565742	2.03491905	2.10765564	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5.5	1.9565742	2.03491918	2.10765565	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5.6	1.9565742	2.03491938	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5.7	1.95657421	2.03491912	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
5.8	1.95657422	2.03491917	2.10765566	2.17569101	2.23971835	2.30028039
5.9	1.95657423	2.03491916	2.10765566	2.175691	2.23971871	2.30028039
6	1.95657424	2.03491914	2.10765566	2.175691	2.23971835	2.30028039
6.1	1.95657425	2.03491913	2.10765566	2.17569101	2.23971831	2.30028039
6.2	1.95657425	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039

t_r	$t_p(V = 4)$	$t_p(V=4.5)$	$t_p(V = 5)$	$t_p(V=5.5)$	$t_p(V = 6)$	$t_p(V=6.5)$
6.3	1.95657422	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971834	2.3002804
6.4	1.95657419	2.03491917	2.10765557	2.17569103	2.23971831	2.30028112
6.5	1.95657419	2.03491917	2.10765562	2.17569103	2.2397183	2.30028039
6.6	1.95657397	2.03491918	2.10765564	2.17569103	2.23971832	2.30028034
6.7	1.9565742	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
6.8	1.9565742	2.03491918	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028036
6.9	1.95657421	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028034
7	1.95657422	2.03491916	2.10765567	2.17569103	2.23971835	2.30028034
7.1	1.95657423	2.03491921	2.10765569	2.17569103	2.23971835	2.30028039
7.2	1.95657424	2.0349192	2.10765567	2.17569103	2.23971835	2.30028039
7.3	1.95657419	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
7.4	1.95657419	2.03491913	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
7.5	1.9565742	2.03491917	2.10765567	2.17569103	2.23971836	2.30028039
7.6	1.95657423	2.03491917	2.10765566	2.17569104	2.23971835	2.30028035
7.7	1.9565742	2.03491917	2.10765571	2.17569102	2.23971844	2.30028048
7.8	1.9565742	2.03491917	2.10765569	2.17569108	2.23971843	2.30028046
7.9	1.95657421	2.03491913	2.10765568	2.17569107	2.23971841	2.30028045
8	1.9565742	2.03491916	2.10765566	2.17569103	2.2397184	2.30028044
8.1	1.9565742	2.03491915	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028043
8.2	1.95657419	2.03491917	2.10765567	2.17569103	2.23971835	2.30028039
8.3	1.95657419	2.03491917	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
8.4	1.95657418	2.03491917	2.10765573	2.17569103	2.23971835	2.30028039
8.5	1.95657419	2.03491914	2.10765568	2.17569103	2.23971835	2.30028039
8.6	1.95657418	2.0349191	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
8.7	1.95657412	2.03491909	2.10765566	2.17569103	2.23971835	2.30028039
8.8	1.95657405	2.03491907	2.10765564	2.17569104	2.23971835	2.30028039
8.9	1.95657396	2.03491907	2.10765549	2.17569103	2.23971838	2.30028039
9	1.95657383	2.03491917	2.10765538	2.17569103	2.23971835	2.30028039
9.1	1.95657421	2.03491908	2.10765534	2.175691	2.23971835	2.30028042
9.2	1.95657421	2.03491882	2.1076553	2.17569073	2.23971836	2.30028037
9.3	1.9565742	2.03491934	2.10765531	2.17569035	2.23971835	2.30028039
9.4	1.9565742	2.03491917	2.1076556	2.175691	2.23971828	2.30028039

t_r	$t_p(V = 4)$	$t_p(V=4.5)$	$t_p(V = 5)$	$t_p(V=5.5)$	$t_p(V = 6)$	$t_p(V=6.5)$
9.5	1.95657434	2.03491917	2.10765564	2.17569099	2.23971777	2.3002804
9.6	1.95657414	2.03491917	2.10765565	2.17569097	2.23971831	2.30028038
9.7	1.95657419	2.03491917	2.10765566	2.17569098	2.23971828	2.30028019
9.8	1.9565742	2.03491917	2.10765562	2.17569103	2.23971825	2.30028037
9.9	1.9565742	2.03491916	2.10765566	2.17569101	2.23971822	2.30028031
10	1.9565742	2.03491915	2.10765565	2.17569105	2.23971835	2.30028024
t_r	$t_p(V=7)$	$t_p(V=7.5)$	$t_p(V=8)$	$t_p(V=8.5)$	$t_p(V=9)$	$t_p(V=9)$
0.1	1.67539349	1.71432062	1.75155491	1.78726925	1.82160994	1.85470186
0.2	1.67871256	1.71755873	1.75471918	1.79036582	1.82464392	1.85767792
0.3	1.68448925	1.72319076	1.76021936	1.79574523	1.82991179	1.86284262
0.4	1.69288269	1.73137085	1.76820493	1.8035523	1.83755461	1.87033323
0.5	1.70401242	1.74221616	1.7787908	1.81390012	1.84768299	1.88025832
0.6	1.71795831	1.75580669	1.79205694	1.82686903	1.86037646	1.89269713
0.7	1.7347614	1.7721864	1.80804941	1.84250487	1.87568402	1.90769964
0.8	1.75442851	1.79136613	1.82678274	1.8608272	1.89362619	1.92528863
0.9	1.77693551	1.81332754	1.84824353	1.88182627	1.91419757	1.94546212
1	1.80223302	1.83802771	1.87239456	1.90546993	1.9373704	1.96819643
1.1	1.83023399	1.86540089	1.89917926	1.93170704	1.96309857	1.99344968
1.2	1.86071643	1.89525092	1.92844537	1.96042538	1.99129851	2.02115773
1.3	1.89356073	1.92743351	1.96001603	1.99142761	2.02177063	2.05113362
1.4	1.92867329	1.96186023	1.99380739	2.02462783	2.05441855	2.08326433
1.5	1.96595741	1.99843937	2.02973226	2.05994303	2.08916374	2.11747412
1.6	2.0053148	2.03707773	2.06770202	2.09728854	2.12592438	2.1536851
1.7	2.04664634	2.07768046	2.10762584	2.13657765	2.16461749	2.19181757
1.8	2.0898526	2.12015297	2.14941322	2.17772291	2.20515952	2.23179084
1.9	2.13483464	2.16440066	2.19297334	2.2206377	2.24746668	2.27352406
2	2.18149382	2.21032841	2.23821524	2.26523471	2.29145486	2.31693648
2.1	2.22973171	2.25784285	2.28504946	2.31142656	2.33704039	2.36194679
2.2	2.27944984	2.3068499	2.33338524	2.35912783	2.38413938	2.40847445
2.3	2.33054885	2.35725514	2.38313291	2.40825124	2.43266964	2.45643993
2.4	2.36334645	2.40896353	2.43420166	2.4587104	2.48254733	2.50576231

t_r	$t_p(V=7)$	$t_p(V=7.5)$	$t_p(V=8)$	$t_p(V=8.5)$	$t_p(V=9)$	$t_p(V=9)$
2.5	2.3618792	2.41768839	2.47104761	2.5104172	2.53368869	2.55636115
2.6	2.36039801	2.41620122	2.46958804	2.52078632	2.56999506	2.60815494
2.7	2.35905096	2.41475122	2.46810057	2.51930078	2.56853649	2.61597266
2.8	2.35807567	2.41350885	2.46671095	2.51783797	2.56704727	2.61448721
2.9	2.35781109	2.41274504	2.46561671	2.51654528	2.56564023	2.61302084
3	2.35781108	2.41266346	2.46512965	2.51565297	2.56448971	2.61170825
3.1	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56386602	2.61075608
3.2	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
3.3	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
3.4	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.61046291
3.5	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.61046291
3.6	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.61046291
3.7	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
3.8	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
3.9	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
4	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
4.1	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
4.2	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
4.3	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
4.4	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.6104629
4.5	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
4.6	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
4.7	2.35781121	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
4.8	2.35781113	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
4.9	2.35781106	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5	2.35781108	2.41266352	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5.1	2.35781108	2.41266355	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5.2	2.35781108	2.41266343	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5.3	2.35781108	2.41266345	2.46512907	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5.4	2.35781108	2.41266346	2.46512912	2.51545161	2.5638375	2.61046291

t_r	$t_p(V=7)$	$t_p(V=7.5)$	$t_p(V=8)$	$t_p(V=8.5)$	$t_p(V=9)$	$t_p(V=9)$
5.5	2.35781108	2.41266346	2.46512906	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5.6	2.35781108	2.41266346	2.46512899	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5.7	2.35781106	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
5.8	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545166	2.5638375	2.61046291
5.9	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545158	2.5638375	2.61046291
6	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
6.1	2.35781108	2.41266343	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
6.2	2.35781108	2.41266345	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
6.3	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
6.4	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
6.5	2.35781108	2.41266346	2.465129	2.51545161	2.56383749	2.61046291
6.6	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.61046291
6.7	2.35781109	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.61046291
6.8	2.35781116	2.41266345	2.46512902	2.51545158	2.5638375	2.6104628
6.9	2.35781108	2.41266345	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
7	2.35781108	2.41266345	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
7.1	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383747	2.61046291
7.2	2.35781106	2.41266344	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.61046291
7.3	2.35781103	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
7.4	2.35781103	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.6104629
7.5	2.35781108	2.41266346	2.46512986	2.51545161	2.5638375	2.61046291
7.6	2.35781109	2.41266329	2.465129	2.51545161	2.5638375	2.61046297
7.7	2.35781113	2.41266347	2.4651288	2.51545161	2.56383749	2.61046286
7.8	2.35781113	2.41266346	2.46512902	2.51545162	2.56383749	2.61046288
7.9	2.35781112	2.41266346	2.46512902	2.51545164	2.56383751	2.61046291
8	2.35781112	2.41266346	2.46512903	2.51545161	2.5638375	2.61046291
8.1	2.35781111	2.41266345	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
8.2	2.3578111	2.41266345	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
8.3	2.3578111	2.41266345	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.6104629
8.4	2.35781109	2.41266346	2.46512902	2.51545162	2.56383749	2.61046294

t_r	$t_p(V=7)$	$t_p(V=7.5)$	$t_p(V=8)$	$t_p(V=8.5)$	$t_p(V=9)$	$t_p(V=9)$
8.5	2.35781108	2.41266348	2.46512902	2.51545163	2.56383749	2.61046291
8.6	2.35781108	2.41266347	2.46512902	2.51545161	2.56383749	2.61046291
8.7	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.6104629
8.8	2.35781108	2.41266346	2.46512905	2.51545161	2.5638375	2.61046291
8.9	2.35781108	2.41266346	2.46512903	2.51545161	2.5638375	2.61046291
9	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
9.1	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545163	2.5638375	2.61046292
9.2	2.35781108	2.41266346	2.46512903	2.51545163	2.5638375	2.61046291
9.3	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545163	2.56383754	2.61046291
9.4	2.35781089	2.41266346	2.46512902	2.51545162	2.56383753	2.61046291
9.5	2.35781108	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.56383753	2.61046298
9.6	2.35781108	2.41266327	2.46512902	2.51545161	2.56383751	2.61046296
9.7	2.3578111	2.41266346	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046295
9.8	2.35781108	2.41266346	2.46512903	2.51545161	2.56383749	2.61046291
9.9	2.35781104	2.41266347	2.46512902	2.51545161	2.5638375	2.61046291
10	2.35781108	2.41266347	2.46512902	2.51545165	2.5638375	2.61046291

t_r	$t_p(V=10)$	t_r	$t_p(V=10)$	t_r	$t_p(V=10)$
0.1	1.88665269	3.4	2.65547974	6.7	2.65547974
0.2	1.88957495	3.5	2.65547974	6.8	2.65547974
0.3	1.89464361	3.6	2.65547974	6.9	2.65547974
0.4	1.90199282	3.7	2.65547974	7	2.65547965
0.5	1.91172893	3.8	2.65547973	7.1	2.65547972
0.6	1.92393072	3.9	2.65547972	7.2	2.65547974
0.7	1.93864907	4	2.65547972	7.3	2.65547973
0.8	1.95590879	4.1	2.65547972	7.4	2.65547974
0.9	1.97571091	4.2	2.65547972	7.5	2.65547974
1	1.99803528	4.3	2.65547972	7.6	2.65547982
1.1	2.02284402	4.4	2.65547972	7.7	2.65547982
1.2	2.05008393	4.5	2.65547972	7.8	2.6554797
1.3	2.07959398	4.6	2.65547973	7.9	2.65547963

t_r	$t_p(V=10)$	t_r	$t_p(V=10)$	t_r	$t_p(V=10)$
1.4	2.1112382	4.7	2.65547973	8	2.6554796
1.5	2.14494422	4.8	2.65547972	8.1	2.65547961
1.6	2.18063716	4.9	2.65547972	8.2	2.65547966
1.7	2.21824035	5	2.65547972	8.3	2.65547969
1.8	2.25767603	5.1	2.65547972	8.4	2.65547973
1.9	2.29886611	5.2	2.65547972	8.5	2.65547974
2	2.34173254	5.3	2.65547973	8.6	2.65547974
2.1	2.38619678	5.4	2.65547973	8.7	2.65547974
2.2	2.43218071	5.5	2.65547973	8.8	2.65547974
2.3	2.47960743	5.6	2.65547973	8.9	2.65547974
2.4	2.528399	5.7	2.65547973	9	2.65547974
2.5	2.57847762	5.8	2.65547973	9.1	2.65547974
2.6	2.62976501	5.9	2.65547973	9.2	2.65547977
2.7	2.66175679	6	2.65547973	9.3	2.65547975
2.8	2.66029458	6.1	2.65547973	9.4	2.65547974
2.9	2.65880539	6.2	2.65547974	9.5	2.65547974
3	2.65739506	6.3	2.65547974	9.6	2.65547974
3.1	2.65622471	6.4	2.65547974	9.7	2.65547974
3.2	2.65553991	6.5	2.65547974	9.8	2.65547974
3.3	2.65547974	6.6	2.65547974	9.9	2.65547974
				10	2.65547974

Résumé

Dans ce travail nous nous intéressons aux systèmes automatisés de stockage/déstockage (AS/RS), en particulier l'AS/RS à racks glissants. Nous présenterons initialement des définitions, la configuration et la modélisation du temps de simple cycle d'un AS/RS multi allées et à rack glissants. Par la suite, ce travail consiste à l'étude mathématique (continuité, convexité, dérivabilité) de la fonction qui représente le système automatisé de stockage et récupération à rack glissants. Nous focalisons notre travail plus précisément sur l'optimisation des dimensions de l'AS/RS à rack glissants pour minimiser le temps de simple cycle de la machine S/R. Nous optimisons les dimensions de à rack glissants par deux méthodes. D'abord en utilisant une métaheuristique comme particulier l'algorithme génétique, ensuite une méthode déterministe du gradient. À l'aide de la technique de l'approximation au sens des splines et des moindres carrés nous trouvons les fonctions approximatives qui permettent d'avoir directement la valeur des trois dimensions optimales.

Abstract

In this work we are interested in automated storage and retrieval systems (AS / RS), in particular Mobile Racks AS / RS. We will initially present definitions, configuration and modeling of the single cycle time of a multi-aisle and Mobile Racks AS / RS. Subsequently, this work consists of the mathematical study (continuity, convexity, differentiability) of the function which represents the automated storage and retrieval system of mobile racks. We are focusing our work more precisely on optimizing the dimensions of the mobile rack AS / RS to minimize the single cycle time of the S / R machine. We optimize the mobile rack dimensions by two methods. First using a metaheuristic as a particular genetic algorithm, then a deterministic gradient method. Using the approximation technique in the sense of splines and least squares, we find the approximate functions which allow to obtain directly the value of the three optimal dimensions.

ملخص

في هذا العمل، نحن مهتمون بأنظمة التخزين / إزالة المخزون المؤتمتة، ولا سيما مع الرفوف المنزلقة. سنقدم في البداية تعريفات وتكوين ونمذجة وقت الدورة الواحدة للحامل المنزلق متعدد الممرات. في وقت لاحق، يتكون هذا العمل في الدراسة الرياضية (الاستمرارية، والتحدب، والتمايز) للوظيفة التي تمثل نظام التخزين والاسترجاع الآلي في الرفوف المنزلقة. نحن نركز عملنا بشكل أكثر دقة على تحسين أبعاد الحامل المنزلق لتقليل وقت الدورة الفردية لآلة. نقوم بتحسين أبعاد الرف المنزلق بطريقتين. أولاً باستخدام فوقية الاستدلالات كخوارزمية جينية معينة، ثم طريقة التدرج الحتمية. باستخدام تقنية التقريب بمعنى المفاتيح والمربعات الصغرى، نجد الوظائف التقريبية التي تسمح بالحصول مباشرة على قيمة الأبعاد المثلى الثلاثة.

Mots-Clés :

AS/RS Stockage/Déstockage, AS/RS Racks glissants, Modélisation, Optimisation, Métaheuristique, Approximation.

Key words:

AS/RS Storage/Retrieval, AS/RS Mobile racks, modeling, optimization, Metaheuristic, Approximation.

الكلمات الدالة :

نظام تخزين واسترجاع آلي، التخزين / التخليص، الرفوف المنزلقة، النمذجة، التحسين، فوقية الاستدلالات، تقريب.