

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Aboubakr Belkaïd - Tlemcen -
Faculté de Technologie
Département de Génie Électrique et Électronique



THÈSE

En vue de l'obtention du grade de Docteur Es-Sciences
Spécialité : Automatique

Présentée par :
Farah Amel HAOUARI

Thème

Analyse d'observabilité et synthèse d'observateurs
à modes glissants pour des systèmes non linéaires
décrits par un modèle de Takagi-Sugeno

Soutenue le 25 juin 2020

Membres du jury :

Président :

Mme. AMAL CHOUKCHOU BRAHAM Professeur Université de Tlemcen

Directeur de thèse :

M. MOHAMED DJEMAI Professeur Université de Valenciennes

Co-Directeur de thèse :

M. BRAHIM CHERKI Professeur Université de Tlemcen

Examineurs :

M. MOHAMED FAYÇAL KHELFI Professeur Université d'Oran

M. HAFID HAFFAF Professeur Université d'Oran

M. BOUMEDIÈNE BENYAHIA MCA Université de Tlemcen

À mon petit ange Douaa

Remerciements

Je souhaiterais d'abord remercier mon directeur de thèse Monsieur Mohamed DJEMAI, Professeur à l'Université de Valenciennes, ainsi que mon encadrant Monsieur Brahim CHERKI, Professeur à l'Université de Tlemcen qui m'ont encadrée tout au long de cette thèse. Qu'ils soient aussi remerciés pour leur gentillesse, leur patience, leur disponibilité durant ces années, sans oublier leurs qualités pédagogiques et scientifiques.

C'est grâce à votre aide que j'ai pu mener cette thèse à son terme. Je suis ravie d'avoir travaillé avec vous, j'ai beaucoup appris. Je vous adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse mes remerciements aux membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie particulièrement Mme Amal CHOUKCHOU BRAHAM, Professeur à l'Université de Tlemcen d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse et de m'avoir fait l'honneur de le présider.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohamed Fayçal KHELFI et Monsieur Hafid HAFFAF, Professeurs à l'Université d'Oran, et Monsieur Boumediène BENYAHIA, Maître de conférences à l'Université de Tlemcen pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être examinateurs de cette thèse.

Je remercie aussi Professeur Lotfi BAGHLI, directeur du laboratoire d'automatique de Tlemcen (LAT) pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je n'oublierai certainement pas de remercier vivement Monsieur Noureddine RAHMANI, Professeur à l'Université des sciences et de la technologie d'Oran pour la discussion très enrichissante et ses remarques qui m'ont été d'une aide précieuse.

Enfin, un grand merci à ma mère, ma petite fille, mes sœurs et mes neveux, pour leur présence et leur soutien constant.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale | 1 |
| 1 État de l'art sur les modèles flous de type Takagi-Sugeno | 5 |
| 1.1 Introduction | 5 |
| 1.2 Modèles flous Takagi-Sugeno continus | 5 |
| 1.2.1 Modèle Takagi-Sugeno standard | 5 |
| 1.2.2 Modèle Takagi-Sugeno descripteur | 7 |
| 1.2.3 Approches de construction des modèles TS | 8 |
| 1.3 Observateurs pour les systèmes TS | 8 |
| 1.4 Conclusion | 10 |
| 2 Observabilité des systèmes TS | 11 |
| 2.1 Notion d'observabilité | 11 |
| 2.2 Analyse d'observabilité des modèles flous TS | 13 |
| 2.3 Analogie entre un modèle TS et un modèle LPV polytopique | 16 |
| 2.4 Observabilité des modèles flous TSD | 17 |
| 2.5 Mise sous forme triangulaire d'observation d'un système TS | 18 |
| 2.5.1 Modèle 1 | 19 |
| 2.5.2 Modèle 2 | 22 |
| 2.6 Conclusion | 22 |
| 3 Observateurs à modes glissants des systèmes TS | 23 |
| 3.1 Introduction | 23 |
| 3.2 Observateurs triangulaires à modes glissants | 24 |
| 3.2.1 Observateurs à modes glissants d'ordre 1 | 24 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2.2 | Observateurs à modes glissants d'ordre supérieur | 27 |
| 3.2.3 | Observateurs à modes glissants d'ordre 2 | 28 |
| 3.3 | Exemple 1 : Estimation d'état d'un système TS | 32 |
| 3.3.1 | Estimation d'état avec un observateur à modes glissants d'ordre 1 | 33 |
| 3.3.2 | Estimation d'état avec un observateur à modes glissants d'ordre 2 | 35 |
| 3.4 | Estimation d'état d'un système TS perturbé | 37 |
| 3.4.1 | Exemple 2 : Application à un bras manipulateur actionné par un moteur DC | 38 |
| 3.5 | Conclusion | 44 |
| 4 | Application à un procédé réel : le pendule inversé rotatif | 45 |
| 4.1 | Introduction | 45 |
| 4.2 | Description du pendule inversé rotatif | 45 |
| 4.3 | Modélisation du système | 46 |
| 4.3.1 | Modèle non linéaire | 46 |
| 4.3.2 | Modèle flou descripteur TSD | 48 |
| 4.4 | Stabilisation du RIP | 53 |
| 4.5 | Simulation | 54 |
| 4.6 | Observateurs à modes glissants d'ordre 2 pour le système RIP | 54 |
| 4.6.1 | Synthèse d'observateurs étape par étape d'ordre 2 | 56 |
| 4.6.2 | Analyse de convergence | 57 |
| 4.7 | Résultats de simulation | 60 |
| 4.8 | Résultats expérimentaux | 63 |
| 4.9 | Conclusion | 68 |
| 5 | Application à l'estimation de défauts des systèmes TS | 69 |
| 5.1 | Introduction | 69 |
| 5.2 | Différents types de défauts | 70 |
| 5.3 | Principe de l'approche d'estimation de défauts | 70 |
| 5.4 | Estimation de défauts de capteurs | 72 |
| 5.4.1 | Synthèse du banc d'observateurs (1) | 72 |
| 5.5 | Estimation de défauts d'actionneurs | 74 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 5.5.1 | Synthèse du banc d'observateurs (2) | 74 |
| 5.5.2 | Présence d'entrées inconnues | 75 |
| 5.6 | Exemple 1 : Application à un système hydraulique à 2 cuves | 76 |
| 5.7 | Exemple 2 : Application à un système hydraulique à 3 cuves | 81 |
| 5.7.1 | Description et Modèle Mathématique du procédé | 82 |
| 5.7.2 | Modèle flou TS du système hydraulique | 83 |
| 5.7.3 | Stabilisation du modèle flou TS | 87 |
| 5.7.4 | Résultats de simulation | 91 |
| 5.8 | Conclusion | 100 |
| | Conclusion générale | 101 |
| | Bibliographie | 103 |
| | Annexes | 109 |
| | A Rappels sur les modes glissants | 110 |
| A.1 | Principe des modes glissants | 110 |
| A.2 | Condition d'existence du mode de glissant | 112 |
| A.3 | Convergence en temps fini | 112 |
| A.4 | Comportement du système en régime glissant | 112 |
| | B Linéarisation du modèle non linéaire du système de 3 cuves | 114 |
| B.1 | Linéarisation autour d'un point d'équilibre | 114 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Schéma d'un observateur | 12 |
| 2.2 | Bras de robot à un degré de liberté | 20 |
| 2.3 | Secteur non linéaire local de $\sin(x_1(t))$ | 21 |
| 2.4 | Fonctions d'activation | 22 |
| 3.1 | Structure du différentiateur d'ordre deux. | 29 |
| 3.2 | Évolution de l'erreur d'estimation d'état | 33 |
| 3.3 | Erreur d'estimation d'état (zoom) | 34 |
| 3.4 | L'état x et son estimé | 34 |
| 3.5 | x et son estimé | 35 |
| 3.6 | Évolution de l'erreur d'estimation | 36 |
| 3.7 | Erreur d'estimation d'état (zoom) | 36 |
| 3.8 | Bras manipulateur actionné par un moteur DC | 39 |
| 3.9 | États du système (pointillé bleu) et leurs estimés (trait continu rouge) par observateurs à modes glissants | 42 |
| 3.10 | (a) Estimation de la perturbation $\omega(t)$, (b) Fonction d'activation $\mu_1(t)$ et son estimée | 43 |
| 3.11 | États du système (pointillé bleu) et leurs estimés (trait continu rouge) par observateur flou | 43 |
| 3.12 | Erreurs d'estimation d'état obtenues par le banc d'observateurs à modes glissants (MG) et l'observateur flou | 44 |
| 4.1 | Le pendule inversé rotatif de l'entreprise QUANSER. | 46 |
| 4.2 | Les fonctions d'appartenance du modèle flou TSD. | 51 |
| 4.3 | Les angles du RIP. | 55 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.4 | Les vitesses angulaires du RIP. | 56 |
| 4.5 | Évolution de l'erreur d'estimation d'état | 60 |
| 4.6 | Estimation des positions angulaires du RIP. | 61 |
| 4.7 | Estimation des vitesses angulaires du RIP. | 62 |
| 4.8 | Photo du banc d'essai de l'expérimentation. | 63 |
| 4.9 | Les angles du RIP et leurs estimés. | 64 |
| 4.10 | Les estimés des vitesses angulaires du RIP. | 65 |
| 4.11 | Les angles du RIP et leurs estimés. | 66 |
| 4.12 | Les estimés des vitesses angulaires du RIP. | 67 |
| | | |
| 5.1 | Schéma d'estimation de défauts | 71 |
| 5.2 | Système hydraulique à 2 réservoirs | 77 |
| 5.3 | Ensembles flous et zone de validité de chaque sous-modèle | 79 |
| 5.4 | Estimation des défauts de capteurs | 80 |
| 5.5 | Estimation de défauts affectant les deux capteurs | 80 |
| 5.6 | Estimation de défauts simultanés | 81 |
| 5.7 | Système à trois cuves | 82 |
| 5.8 | Fonctions d'appartenance des variables de prémisse $z_1(\xi_1)$, $z_2(\xi_2)$ et $z_3(\xi_3)$ (haut, milieu et bas, respectivement) | 86 |
| 5.9 | États du système et ceux du modèle TS | 87 |
| 5.10 | Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en absence de défauts | 91 |
| 5.11 | Les erreurs d'estimation du banc d'observateurs (1) | 92 |
| 5.12 | Estimation des défauts de capteurs \tilde{f}_{s1} , \tilde{f}_{s2} et \tilde{f}_{s3} | 93 |
| 5.13 | Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence de défauts de capteurs | 93 |
| 5.14 | Les erreurs d'estimation du banc d'observateurs (2) | 94 |
| 5.15 | Estimation des défauts d'actionneurs \tilde{f}_{a1} et \tilde{f}_{a2} | 95 |
| 5.16 | Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence de défauts d'actionneurs | 95 |
| 5.17 | Estimation des défauts d'actionneurs \tilde{f}_{a1} et \tilde{f}_{a2} | 96 |
| 5.18 | Les gains d'efficacité des deux actionneurs | 96 |
| 5.19 | Estimation des défauts simultanés \tilde{f}_{s1} et \tilde{f}_{a2} | 97 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.20 | Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence de défauts | 98 |
| 5.21 | Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence d'une perturbation | 98 |
| 5.22 | Estimation de la perturbation (fuite) dans T3 et erreurs d'observation . . . | 99 |
| 5.23 | Estimation des paramètres μ_{13} , μ_{32} et μ_{20} | 99 |
| A.1 | Attractivité de la surface S | 111 |
| A.2 | Phase de convergence et mode de glissement idéal | 111 |
| B.1 | Ensembles flous et degrés de validité des règles. | 116 |

Résumé

Cette thèse traite le problème de l'estimation d'état des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS). Dans la première partie, une synthèse des observateurs triangulaires à modes glissants est présentée pour les systèmes TS mis sous forme d'observation triangulaire. Les observateurs étape-par-étape à modes glissants, d'ordre un et d'ordre deux basés sur l'algorithme du super-twisting, sont élaborés et utilisés pour l'estimation d'état d'un bras manipulateur actionné par un moteur DC. Les résultats obtenus en simulation permettent de valider les bonnes performances des modes glissants d'ordre deux. Par la suite, les observateurs étape-par-étape à modes glissants d'ordre deux sont appliqués en expérimentation sur un pendule inversé rotatif réel. Les résultats expérimentaux illustrent une convergence en temps fini de l'erreur d'observation. Dans la dernière partie des travaux réalisés, un schéma d'estimation des défauts est proposé afin d'estimer les défauts de capteurs et d'actionneurs d'un système TS. L'efficacité de l'approche proposée est illustrée par un système hydraulique à deux cuves linéarisé et un système à trois réservoirs représenté par un modèle TS proposé.

Mots-clés—Modèle de Takagi-Sugeno, algorithme du Super-Twisting, observateur à modes glissants, pendule inversé rotatif, estimation de défauts.

Abstract

This thesis deals with state estimation of nonlinear systems represented by Takagi-Sugeno (TS) models. In the first part, a synthesis of step-by-step sliding mode observers is presented for systems TS in triangular observation form. The first-order and super-twisting algorithm-based second-order sliding mode observers are designed and used for state estimation of a robot arm actuated by a DC motor. The simulation results show the good performances of second-order sliding mode observers. Then, the step-by-step second-order sliding mode observers are applied to the rotary inverted pendulum with real-time implementation. The experimental results illustrate the exact finite-time estimation of the system states. In the last part of this work, a fault estimation scheme is proposed to faults detection and reconstruction in the TS system. The effectiveness of the proposed approach is shown by means of two simulation examples: the hydraulic two-tank system with linearized system representation and the three-tank system represented by a proposed TS model.

Keywords—Takagi-Sugeno model, super-twisting algorithm, sliding mode observer, rotary inverted pendulum, fault estimation.

Introduction générale

Au cours de ces dernières décennies, les modèles flous du type Takagi-Sugeno (TS) [67] constituent un outil puissant dans la modélisation des systèmes non linéaires et une alternative intéressante dans le domaine de la commande, de l'observation et du diagnostic des systèmes non linéaires. Ce type de modélisation permet de représenter un système non linéaire, quelle que soit sa complexité, par une interconnexion de sous-modèles linéaires pondérés par le biais de fonctions non linéaires issues des non-linéarités du système [57][69]. Cette représentation est connue pour ses propriétés d'approximateur universel et présente l'avantage de pouvoir représenter de manière exacte un modèle de connaissance non linéaire sur un compact de l'espace d'état [48][74]. En effet, la possibilité de décrire des comportements non linéaires très complexes avec une structure simple, inspirée des modèles linéaires, permet l'extension de nombreux concepts théoriques de l'automatique linéaire au cas des systèmes non linéaires.

Dans de nombreuses stratégies de commande et de diagnostic des systèmes dynamiques, le besoin de connaître entièrement le vecteur d'état du système est souvent une nécessité. Or, pour des raisons techniques et/ou économiques, il est difficile, voire impossible, de mesurer la totalité des variables d'état du système, d'où la nécessité de reconstruire entièrement ou partiellement, le vecteur d'état du système. Ce problème peut être résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire, appelé *observateur d'état*, dont le rôle est de fournir en temps réel une estimation du vecteur d'état du système étudié en fonction des entrées connues et des sorties mesurées du système.

Depuis quelques années, un grand intérêt est porté au problème de l'estimation d'état et de détection de défauts pour les systèmes non linéaires décrits par des modèles TS. Différentes techniques de conception d'observateurs ont été proposées et utilisées en commande et en diagnostic. Dans les observateurs flous de type TS [68][69], la technique consiste à associer à chaque modèle local un observateur local. L'observateur global est la somme des observateurs locaux pondérés par les fonctions d'appartenance associées aux modèles locaux. Ces observateurs ont été développés pour l'estimation d'état [54][57], et la détection et localisation de défauts [32][61].

Dans [14], des multiobservateurs à modes glissants sont basés sur l'interpolation convexe des observateurs classiques de Luenberger dotés de termes discontinus (glissants), pour compenser les entrées inconnues et les incertitudes des modèles. Ces observateurs ont été utilisés pour le diagnostic des systèmes non linéaires [2][43]. La synthèse de ces observateurs s'appuie sur l'analyse de la stabilité par la théorie de Lyapunov et les conditions obtenues de convergence de l'erreur d'observation sont formulées en utilisant des inégalités linéaires matricielles (LMIs). Le nombre de règles a une très grande influence sur la conservativité des résultats obtenus en stabilité et/ou en stabilisation. Le nombre de problèmes LMIs peut croître de façon exponentielle avec le nombre de règles [57].

La stratégie d'estimation d'état pour les modèles TS proposée, dans ce mémoire de thèse, utilise la technique des modes glissants [73], technique développée initialement pour la synthèse de lois de commande et connue par ses propriétés de robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes paramétriques. Les observateurs à modes glissants se révèlent être très intéressants du fait de leur robustesse vis-à-vis des perturbations externes et incertitudes du système, en plus, de la convergence en temps fini de l'erreur d'observation [9][66]. Ce type d'observateurs a été appliqué avec succès sur les systèmes non linéaires. Citons par exemples les travaux présentés dans [8][18][29][65].

Pour assurer la sûreté et la fiabilité de fonctionnement des systèmes, face à toute anomalie ou défaut, plusieurs techniques de diagnostic et de surveillance des systèmes ont été développées. La majorité des techniques de détection, localisation et identification de défaut (FDI) sont basées sur la génération des résidus, qui représentent la différence entre le comportement actuel du système et son comportement souhaité, par des bancs d'observateurs. Chacun de ces observateurs est sensible à un ensemble de défauts et insensible aux autres. La décision de la présence ou non d'un défaut est prise, en comparant le résidu à un certain seuil fixe ou adaptatif. L'ensemble de ces signaux génère une table de signature qui constitue l'outil d'isolation des défauts [2][43][56].

L'objectif de cette thèse est la synthèse des observateurs à modes glissants *étape par étape* pour des systèmes non linéaires représentés par des modèles flous TS. Des observateurs d'ordre deux sont élaborés pour l'estimation d'état de modèles flous standard (TS) et descripteur (TSD) ; du fait de leurs propriétés intéressantes : simplicité d'élaboration, robustesse, et meilleure précision de convergence. Une approche d'estimation de défauts d'un système TS, à base d'un banc de ces observateurs, est proposée. Elle permet non seulement de détecter et localiser un défaut mais aussi de l'estimer et de donner son allure au cours du temps, au lieu de générer un résidu. La reconstruction ou l'estimation de défauts est très importante dans un schéma de diagnostic.

Elle est très efficace pour les défauts de type intermittent ou graduel, qui sont très difficiles à être détectés à cause de leurs évolutions temporelles lentes [56]. En plus, cette approche est très bénéfique dans le cas de commande tolérante aux défauts (FTC) [62][59].

Les travaux réalisés au cours de cette thèse portent sur :

- L'estimation d'état d'un bras actionné par un moteur DC [40] et d'un pendule inversé rotatif réel [42] décrits par des modèles flous TS,
- Le diagnostic de défauts de capteurs d'un système hydraulique à 2 cuves représenté par un modèle TS obtenu par linéarisation autour de points de fonctionnement [41],
- L'estimation de défauts de capteurs et d'actionneurs d'un système hydraulique à 3 cuves. L'approche d'estimation proposée se base sur des bancs d'observateurs étape par étape à modes glissants d'ordre deux. Un modèle flou TS représentant exactement le modèle non linéaire du système étudié est proposé, en utilisant l'approche par transformation par secteurs non linéaires [69].

Organisation de la thèse

Ce mémoire, décomposé en cinq chapitres, est organisé de la façon suivante :

Le chapitre 1 consiste en un état de l'art portant sur les modèles flous TS continus, sous forme standard et descripteur, ainsi que les méthodes de construction d'un modèle TS. Les principaux types d'observateurs existants pour les systèmes TS sont présentés à la fin de ce chapitre.

Dans le chapitre 2, la notion d'observabilité des modèles flous standard et descripteur est abordée. Une analyse de l'observabilité des modèles TS est présentée ainsi qu'une analogie entre ces systèmes et les systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) polytopiques. Deux modèles de systèmes flous TS mis sous forme triangulaire d'observation sont proposés, permettant la conception des observateurs triangulaires à modes glissants.

Dans le chapitre 3, les observateurs *étape par étape* à modes glissants d'ordre un et deux sont présentés. Les techniques de conception de ces observateurs, pour les modèles TS, sont proposées pour l'estimation d'état. Des résultats de simulation d'un premier exemple illustreront les caractéristiques propres de ces deux types d'observateurs pour l'estimation d'état d'un système TS. L'estimation d'état d'un système TS perturbé, basée sur un banc d'observateurs à modes glissants d'ordre 2, est traitée dans un deuxième exemple. Ensuite, une comparaison, entre les estimations issues des observateurs élaborés et l'observateur flou TS proposé dans [43], est faite pour mettre en évidence les performances des observateurs étape par étape à modes glissants d'ordre deux.

Dans le chapitre 4, la synthèse d'observateur par modes glissants d'ordre deux, proposée en chapitre 3, est validée sur un procédé réel. Des résultats de simulation et expérimentaux pour l'estimation d'état d'un pendule inversé rotatif réel valident l'approche proposée.

Dans le chapitre 5, l'estimation des défauts de capteurs et d'actionneurs d'un système TS est étudiée. Une approche d'estimation est proposée en se basant sur les résultats obtenus dans le chapitre 3. Deux exemples de simulation sont considérés afin d'en présenter les performances, un système hydraulique à deux cuves représenté par un modèle linéarisé et un système à trois réservoirs décrit par un modèle TS proposé.

Chapitre 1

État de l'art sur les modèles flous de type Takagi-Sugeno

1.1 Introduction

Les modèles flous TS ont été largement utilisés dans différents contextes : la modélisation, l'estimation d'état, la commande et le diagnostic. La structure simple de ces modèles permet de simplifier et d'étudier aisément la stabilité d'un système non linéaire, grâce à l'outil numérique LMI (Linear Matrix Inequalities) qui permet de trouver des solutions aux équations de Lyapunov, la synthèse des correcteurs (PDC : Parallel Distributed Control) constitués d'un retour d'état pour chaque modèle local et la synthèse des multiobservateurs.

Les modèles flous TS descripteurs (TSD) ont également été utilisés dans la littérature. L'intérêt de la la forme descripteur est, pour certains modèles non linéaires, de réduire le nombre de règles du modèle flou TS et ainsi réduire le conservatisme des résultats classiques.

1.2 Modèles flous Takagi-Sugeno continus

1.2.1 Modèle Takagi-Sugeno standard

Un système non linéaire peut être modélisé sous la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et f, g sont des fonctions non linéaires.

Un modèle TS est basé sur des règles du type "**Si** *prémisse* **Alors** *conséquence*", où les conséquences correspondent aux sous-modèles linéaires,

Règle i : **Si** $\xi_1(t)$ est M_1^i et...et $\xi_q(t)$ est M_q^i

$$\mathbf{Alors} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$$

où $\xi_1(t) \dots \xi_q(t)$ sont les variables de prémisse pouvant être mesurables (e.g. l'entrée $u(t)$ ou la sortie $y(t)$ du système) ou non mesurables (l'état $x(t)$ du système) et $M_1^i \dots M_q^i$ sont les ensembles flous. Le $i^{\text{ème}}$ sous-modèle est défini par les matrices connues A_i, B_i et C_i de dimensions appropriées.

Le connecteur "et" des prémisses est généralement modélisé par l'opérateur de multiplication. Pour chaque règle i est associé un degré de vérité ou d'appartenance du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle au modèle global, donné par :

$$w_i(\xi) = \frac{\alpha_i(\xi)}{\sum_{i=1}^r \alpha_i(\xi)}, \quad \alpha_i(\xi) = \prod_{j=1}^q \mu_{M_j^i}(\xi_j) \quad (1.2)$$

où $\mu_{M_j^i}(\xi_j) \in [0, 1]$ est le degré d'appartenance de la variable de prémisse ξ_j à l'ensemble flou M_j^i .

Ce modèle flou TS est composé d'un ensemble fini de modèles linéaires interconnectés grâce à des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe. La représentation mathématique du modèle T-S relatif au système (1.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où r est le nombre de règles du modèle et les fonctions de pondération $w_i(\xi(t))$ sont des fonctions non linéaires dépendant du paramètre $\xi(t)$. Ces fonctions satisfont la propriété de somme convexe :

$$\begin{cases} 0 \leq w_i(\xi(t)) \leq 1, i = 1, \dots, r \\ \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t)) = 1 \end{cases}, \forall t \quad (1.4)$$

1.2.2 Modèle Takagi-Sugeno descripteur

La forme descripteur d'état [53] d'un système non linéaire a également été utilisée dans la littérature. Les descripteurs élargissent la classe des systèmes non linéaires standards (représentés par un ensemble d'équations différentielles ordinaires) aux cas des systèmes algébro-différentiels (représentés par un ensemble d'équations différentielles algébriques) tels que les systèmes singuliers et les systèmes mécaniques à inertie variable [4]. Dans [70][71], les auteurs ont présentés les modèles flous descripteurs (TSD) pour ce type de systèmes.

Soit le modèle descripteur non linéaire affine en la commande suivant :

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

où $E(x(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $A(x(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ sont des matrices de fonctions non linéaires.

De même que pour l'obtention d'un modèle flou standard présenté précédemment, le modèle (1.5) est décomposé en deux parties (gauche et droite). La construction des fonctions de pondération du membre droit du modèle reste la même que précédemment avec les définitions des $w_i(z(t))$, $i = 1 \dots r_a$, avec r_a étant le nombre de règles floues associées au membre droit de l'équation. À cela vient s'ajouter les fonctions de pondération du membre gauche du modèle relatives à la matrice $E(x(t))$: $v_k(z(t))$, $k = 1 \dots r_e$, où r_e est le nombre de règles floues associées au membre gauche de l'équation. Les fonctions de pondération vérifient la propriété de somme convexe :

$$\begin{aligned} v_k(z(t)) &\geq 0, & \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t)) &= 1, \\ w_i(z(t)) &\geq 0, & \sum_{i=1}^{r_a} w_i(z(t)) &= 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La forme descripteur d'un modèle TS est alors la suivante :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t))E_k\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_a} w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r_a} w_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

Le modèle TS descripteur est alors composé de $2^{n_e} \times 2^{n_a}$ règles floues, avec n_e et n_a sont, respectivement, les nombres de termes non linéaires contenus dans les matrices $E(x)$ et $A(x)$ de l'équation d'état (1.5). L'intérêt principal de cette représentation réside dans la possibilité de réduire de façon significative le nombre de règles du modèle flou TS et par conséquent le conservatisme des conditions LMIs, pour certains types de modèles non linéaires, e.g., le pendule inversé rotatif [20] et le robot auto-équilibré à deux roues [5].

1.2.3 Approches de construction des modèles TS

Afin d'obtenir un modèle flou, il existe trois approches largement utilisées dans la littérature :

- La première est basée sur des méthodes d'identification à partir des données d'entrées /sorties [33][67].
- La seconde approche repose sur la linéarisation du modèle non linéaire autour de différents points de fonctionnements. Des sous-modèles linéaires sont alors obtenus pour chaque zone de fonctionnement. Ces derniers sont par la suite interconnectés entre eux par le biais de fonctions non linéaires afin d'obtenir le modèle TS [2][45].
- La dernière approche est appelée *approche par secteurs non linéaires* [69]. Elle est basée sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires du modèle. Le nombre de règles floues est 2^p avec p correspondant au nombre de transformations effectuées [57]. Cette méthode permet de construire un modèle TS représentant exactement le modèle non linéaire dans un compact de l'espace d'état, contrairement aux deux approches précédentes qui donnent une approximation du modèle non linéaire.

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse utilise les deux dernières approches pour l'obtention de modèles flous TS et TSD, des systèmes dynamiques considérés.

1.3 Observateurs pour les systèmes TS

Depuis quelques années, un grand intérêt est porté au problème de l'estimation d'état et de détection de défauts pour les systèmes non linéaires décrits par des modèles TS. Différentes méthodes de conception d'observateurs ont été développées. L'observateur le plus largement développé dans la littérature est une extension de celui de Luenberger [52] pour les systèmes linéaires.

Une classe d'observateurs flous de type Takagi-Sugeno non linéaires a été proposée [68][69], basés sur la structure du modèle flou TS. La technique consiste à associer à chaque modèle local un observateur local. L'observateur global (observateur flou) est la somme des observateurs locaux pondérés par les fonctions d'activation associées aux modèles locaux. La synthèse de l'observateur s'appuie sur l'analyse de la stabilité par la théorie de Lyapunov et les conditions obtenues sont formulées en utilisant des LMIs. Plusieurs travaux ont été développés pour concevoir des observateurs flous ou multiobservateurs pour les systèmes physiques réels représentés par des modèles flous TS. Des observateurs flous ont été développés pour l'estimation d'état pour la commande d'un pendule inversé réel [54], la détection et localisation de défauts dans

un moteur [61] et l'estimation des défauts de capteurs d'un système perturbé [32]. Bergsten et al [12][13] présentent une structure de multiobservateur caractérisée par une somme pondérée d'observateurs locaux de type de Luenberger et les conditions de stabilité sont exprimées en utilisant des LMIs.

Palm et al [60] ont présenté une méthode de conception d'un multiobservateur pour un modèle flou de forme canonique. Dans [14], les auteurs ont présenté l'analyse et la conception d'un multiobservateur à mode glissant, pour un multimodèle constitué de fonctions d'activation dépendant de variables non mesurables, afin de prendre en considération les incertitudes de modélisation.

Dans [2], des observateurs à structures variables (à mode glissant) ont été développés pour les systèmes de structure TS. Les multiobservateurs sont basés sur l'interpolation convexe des observateurs classiques de Luenberger dotés de termes discontinus (glissants) pour compenser à la fois les entrées inconnues et les incertitudes de modèles. La stabilité a été étudiée par la théorie de Lyapunov et les conditions obtenues de convergence de l'erreur d'estimation d'état sont formulées en utilisant des LMIs. Ces observateurs ont été utilisés pour le diagnostic d'un système à trois cuves et d'un turbo-réacteur d'avion.

Dans [43], des bancs d'observateurs sont développés pour la conception d'une stratégie de diagnostic pour systèmes non linéaires, représentés par la structure TS à variables de décision non mesurables, permettant la détection, la localisation et l'estimation des défauts. Des observateurs à entrées inconnues, Proportionnel-Intégral (PI) et Proportionnel-Multi-Intégral (PMI) sont utilisés. La synthèse des observateurs s'effectue par la résolution d'un ensemble de LMIs. Dans [57], des lois de commande associées à un observateur flou sont proposées pour un double pendule inversé réel. Une réduction du nombre de règles du modèle TS du système et de l'observateur flou est réalisée en utilisant la structure spécifique des termes non linéaires du système.

Des observateurs flous basés sur une forme descripteur ont été proposés pour les modèles flous TSD et utilisés en commande et en diagnostic [1][34][35][39][55]. Les conditions de convergence de l'erreur d'observation sont obtenues sous la forme de problèmes LMIs.

Cependant, le nombre de règles a une très grande influence sur le conservatisme des résultats obtenus en stabilité et/ou en stabilisation. Le nombre de problèmes LMIs peut croître de façon exponentielle avec le nombre de règles [57]. Plusieurs travaux proposent des solutions afin de réduire le conservatisme des conditions LMI pour les modèles TS [2][43][68] et des méthodes de relaxation des conditions de stabilité [17][34][36][57].

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté les structures des modèles flous TS standard et descripteur, ainsi que les approches d'obtention de ces modèles. Le travail présenté dans ce mémoire utilise majoritairement l'approche par secteurs non linéaires. Un état de l'art des différents observateurs pour les modèles flous TS existants dans la littérature a été présenté.

Chapitre 2

Observabilité des systèmes TS

En pratique, il n'est généralement pas possible de mesurer complètement l'état d'un système. Il existe dans la plupart des cas un vrai besoin d'une estimation fiable des variables non mesurées, particulièrement quand elles sont employées pour la synthèse de lois de commande ou pour la surveillance des systèmes physiques. Ainsi, lorsqu'une partie de l'état n'est pas disponible à la mesure, il devient primordial de pouvoir en donner une estimation. Ceci peut être réalisé par la construction d'un autre système dynamique appelé observateur dont le rôle est de fournir une estimée satisfaisante des variables d'état du système.

La notion d'observabilité est essentielle avant d'entamer une procédure de conception d'un observateur. L'observabilité des systèmes flous de forme standard (TS) et descripteur (TSD) constitue l'objet de ce chapitre.

2.1 Notion d'observabilité

La conception d'un observateur, pour un système dynamique, exige la propriété d'observabilité. Cette propriété se traduit par la capacité de reconstruire, à tout instant, l'état à partir des entrées et des sorties mesurées du système. Cette propriété peut être définie d'une façon générale en se basant sur la notion d'indistinguabilité (ou d'indiscernabilité) d'une paire d'états. Soit le système dynamique suivant :

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

Définition 2.1.1. [30] : pour le système (2.1), deux états initiaux $x(0)$ et $x'(0)$, sont dits indis-

tinguables si, pour toute fonction d'entrée $u(t)$ du système et $\forall t > 0$, les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont identiques.

Définition 2.1.2. [30] : le système (2.1) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts $\{x(0), x'(0)\}$ indiscernables.

L'étude de l'observabilité d'un système consiste à chercher les conditions qui permettent de déterminer, de manière unique, l'état du système $x(t)$ pour tout $t \in [0; T]$ à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $[0; T]$.

En supposant que le système (2.1) est observable, on peut alors construire un observateur qui revêt usuellement la forme d'un système dynamique. La condition d'observabilité du système suffit pour assurer la convergence de l'observateur.

Définition 2.1.3. [30] On appelle observateur (ou reconstituteur d'état) un système dynamique auxiliaire O dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie $\hat{x}(t)$ est l'état estimé :

$$O : \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

telle que l'erreur entre le vecteur d'état $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ tende asymptotiquement vers zéro.

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Le schéma d'un tel observateur est donné sur la figure 2.1.

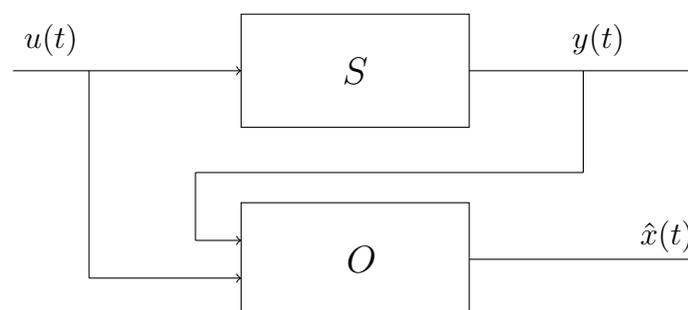


FIGURE 2.1 – Schéma d'un observateur

2.2 Analyse d'observabilité des modèles flous TS

L'intérêt de la structure du modèle flou TS est que des propriétés importantes comme la stabilité, la commandabilité et l'observabilité ayant été largement étudiées dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant (LTI), peuvent être utilisées, au moins partiellement, sur les modèles flous TS car les sous-systèmes qui les constituent sont de type linéaire.

Considérons le système TS suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

À chaque règle i du modèle TS est attribué un poids $w_i(\xi(t))$ déterminant le degré d'activation du $i^{\text{ème}}$ modèle local associé. Ce poids indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global. Le calcul des poids s'effectue à partir des variables de prémisse $\xi(t)$. Les fonctions de pondération satisfont la propriété de somme convexe :

$$\begin{cases} 0 \leq w_i(\xi(t)) \leq 1, i = 1, \dots, r \\ \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t)) = 1 \end{cases}, \forall t \quad (2.5)$$

Pour les modèles TS, une condition nécessaire et suffisante d'observabilité est donnée par la contrainte d'observabilité des modèles locaux, i.e. de chaque paire (A_i, C_i) des sous-modèles du système, ou au moins leur détectabilité [43].

Théorème 2.2.1. *Le système TS global (2.4) est observable si et seulement si les paires (A_i, C_i) , $\forall i = 1, 2, \dots, r$ sont observables, i.e.*

$$\text{rang}(\mathcal{O}_i) = \text{rang} \begin{pmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{pmatrix} = n, \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (2.6)$$

Preuve. On exploite la propriété de somme convexe (2.5) et en multipliant par $x(t)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^r w_i(\xi) x(t) = x(t) \quad (2.7)$$

On pose $w_i(\xi(t))x(t) = x_i(t)$, (2.7) devient :

$$\sum_{i=1}^r x_i(t) = x(t) \quad (2.8)$$

Multiplions (2.5) par $y(t)$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^r y_i(t) = y(t), \quad y_i(t) = w_i(\xi)y(t) \quad (2.9)$$

et par $u(t)$:

$$\sum_{i=1}^r u_i(t) = u(t), \quad u_i(t) = w_i(\xi)u(t) \quad (2.10)$$

On peut remarquer que le modèle TS (2.4) est composé de r sous-modèles linéaires, (S_i) , $i = 1, 2, \dots, r$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \dot{x}_i(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r y_i(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

où le sous-modèle (S_i) est donné par :

$$(S_i) \begin{cases} \dot{x}_i(t) = w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y_i(t) = w_i(\xi(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Analysons maintenant l'observabilité du sous-modèle linéaire (S_i) , représenté par la structure suivante :

$$(S_i) \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

où : $x_i(t) = w_i(\xi)x(t)$, $u_i(t) = w_i(\xi)u(t)$, et $y_i(t) = w_i(\xi)y(t)$.

En effectuant une série de dérivations successives, en premier de y_i , et utilisant l'équation d'état, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} C_i x_i(t) = y_i(t) = \bar{y}_{i0}(t) \\ C_i A_i x_i(t) = \bar{y}_{i1}(t) = \dot{\bar{y}}_{i0}(t) - C_i B_i u_i(t) \\ C_i A_i^2 x_i(t) = \bar{y}_{i2}(t) = \dot{\bar{y}}_{i1}(t) - C_i A_i B_i u_i(t) \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} x_i(t) = \bar{y}_{in-1}(t) = \dot{\bar{y}}_{in-2}(t) - C_i A_i^{n-2} B_i u_i(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Le système (2.14) peut être mis sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ C_i A_i^2 \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{pmatrix} x_i(t) = \begin{pmatrix} \bar{y}_{i0}(t) \\ \dot{\bar{y}}_{i0}(t) - C_i B_i u_i(t) \\ \dot{\bar{y}}_{i1}(t) - C_i A_i B_i u_i(t) \\ \vdots \\ \dot{\bar{y}}_{in-2}(t) - C_i A_i^{n-2} B_i u_i(t) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Avec $u_i(t) = w_i(\xi)u(t)$ et $y_i(t) = w_i(\xi)y(t)$, (2.15) devient :

$$\begin{pmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ C_i A_i^2 \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{pmatrix} x_i(t) = w_i(\xi) \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - C_i B_i u(t) \\ \dot{y}_1(t) - C_i A_i B_i u(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-2}(t) - C_i A_i^{n-2} B_i u(t) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Supposons $w_i(\xi) \neq 0$, (2.16) devient :

$$\frac{1}{w_i(\xi)} \begin{pmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ C_i A_i^2 \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{pmatrix} x_i(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - C_i B_i u(t) \\ \dot{y}_1(t) - C_i A_i B_i u(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-2}(t) - C_i A_i^{n-2} B_i u(t) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Remarque 2.1. Un poids $w_i(\xi) = 0$ correspond à une contribution nulle du $i^{\text{ème}}$ modèle local dans l'état du modèle global.

$$\text{On pose : } P = \frac{1}{w_i(\xi)} \begin{pmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si le modèle local i est observable, i.e. la paire (A_i, C_i) est observable, alors

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

En utilisant la propriété d'invariance du *rang* suivante : Multiplier une ligne par un scalaire non nul, conserve le rang de la matrice, on aura le $\text{rang}(P) = n$. Donc, le système (2.17) admet une solution unique $x_i(t)$, avec les variables $y(t)$ et $u(t)$ qui sont connues.

Ainsi, l'observabilité du modèle local i est nécessaire et suffisante pour assurer l'observabilité du sous-modèle (S_i).

Alors, si les paires (A_i, C_i) , $i = 1, 2, \dots, r$, sont observables, les sous-modèles (S_i), $i = 1, 2, \dots, r$, sont observables et, par conséquent, les états $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, peuvent être reconstruits ainsi que l'état $x(t)$ du système global selon (2.11). \square

2.3 Analogie entre un modèle TS et un modèle LPV polytopique

Un système non linéaire peut être représenté par une forme LPV (Linéaire à Paramètres Variables). Cette représentation constitue une forme polytopique, lorsque les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à coefficients constants constituant les sommets du polytope. Le comportement du système étant exprimé comme une combinaison barycentrique de ces matrices. Celles-ci sont obtenues en utilisant une transformation polytopique convexe (TPC) [58]. Chaque sommet du polytope définit un sous-modèle linéaire. La non-linéarité du système global étant rejetée dans les fonctions de pondération des sous-modèles.

Un modèle linéaire polytopique est défini par les équations suivantes [6] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (2.18)$$

où : θ est le vecteur des paramètres, N est le nombre de sommets définis par (A_i, B_i, C_i, D_i) , et μ_i sont les coefficients de la transformation polytopique convexe, tel que :

$$\sum_{i=1}^N \mu_i(\theta(t)) = 1, \mu_i(\theta(t)) \geq 0, \forall i = 1, \dots, N, \forall \theta \in \Theta \quad (2.19)$$

Il existe une forte analogie entre un système TS (2.4) et un système polytopique LPV [6][64]. En effet, la seule différence remarquable entre ces deux structures est l'ensemble des outils mathématiques utilisés pour obtenir une description du système. Dans le cas LPV, ces outils

appartiennent aux mathématiques standards ; alors que dans le cas TS, ils appartiennent à la théorie de la logique floue. En particulier, les correspondances entre un système LPV polytopique convexe et un système TS sont les suivantes [6] :

- le vecteur de paramètres θ du système LPV correspond au vecteur des variables de prémisse ξ du système TS ;
- les coefficients de la transformation polytopique μ_i correspondent aux coefficients w_i décrivant le degré de pondération de chaque modèle local ;
- les systèmes sommets dans le cas polytopique correspondent aux modèles locaux dans le cas TS.

Cette analogie est fortement utilisée pour étendre les techniques et résultats développés pour les systèmes LPV polytopiques aux cas des systèmes TS et vice-versa. La plupart des travaux réalisés pour les systèmes LPV polytopiques concernant l'analyse d'observabilité et de commandabilité sont basés seulement sur les matrices qui définissent les sommets du polytope [6].

2.4 Observabilité des modèles flous TSD

Comme dans le cas des systèmes standards l'observabilité se définit comme la possibilité de reconstruire l'état par la connaissance des entrées et des sorties du système. A la différence que pour les systèmes descripteurs linéaires (1.5), l'observabilité se décompose selon les deux propriétés suivantes : l'impulse observabilité et la R-observabilité [47].

Définition 2.4.1. (Observabilité) : le système (1.7) est dit observable si la condition initiale x_0 peut être déterminée de manière unique par $u(t)$ et $y(t)$ pour tout $t \geq 0$.

La régularité est une propriété très importante pour les systèmes descripteurs linéaires. Elle garantit l'existence et l'unicité des solutions pour cette classe de systèmes.

Définition 2.4.2. (Régularité) [38] : le couple matriciel (E_i, A_i) du système (1.7) est dit régulier, $\forall k = 1, \dots, n_e, \forall i = 1, \dots, n_a$, si et seulement si le polynôme :

$$\det(sE_k - A_i) \neq 0 \tag{2.20}$$

où s désigne l'opérateur de Laplace.

Les définitions suivantes caractérisent l'observabilité du système (1.7).

Définition 2.4.3. (R-Observabilité) [1] : le triplet (E_k, A_i, C) est R-observable, $\forall k = 1, \dots, n_e$, $\forall i = 1, \dots, n_a$, si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE_k - A_i \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}, \quad (2.21)$$

Le concept de R-observabilité caractérise la capacité de reconstruire seulement l'état atteignable à partir des données sur les entrées et les sorties. Elle ne reflète pas l'observabilité des termes impulsifs. L'observabilité de ces termes revient à étudier l'observabilité impulsive ou Impo-observabilité.

Définition 2.4.4. (Observabilité Impulsive) [1] Le triplet (E_k, A_i, C) est dit Impo-observable (les termes impulsifs de l'état sont observables), $\forall k = 1, \dots, n_e$, $\forall i = 1, \dots, n_a$, si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_k & A_i \\ 0 & E_k \\ 0 & C_i \end{bmatrix} = n + \text{rang}(E_k) \quad (2.22)$$

L'observabilité impulsive garantit la capacité d'estimer l'état de la partie statique.

Une présentation détaillée des propriétés structurales et des différents concepts intervenant dans l'analyse de l'observabilité des systèmes descripteurs linéaires est donnée en [25], [38] et [47].

2.5 Mise sous forme triangulaire d'observation d'un système TS

On considère dans cette thèse, les observateurs triangulaires par modes glissants introduits dans [8]. Leur conception requiert une transformation du système sous une forme triangulaire d'observation.

Considérons un système non linéaire qui peut se mettre sous la forme canonique d'observabilité [27], appelée forme triangulaire d'observation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x, u) \\ y = x_1 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

où $y = x_1$ est le signal de sortie du système et f est une fonction analytique bornée.

2.5.1 Modèle 1

Considérons un système dynamique non-linéaire d'ordre n régi par une équation différentielle ordinaire, reliant la sortie $y(t)$ à $u(t)$ l'entrée du système. Par conséquent, ce système peut être mis sous forme d'une représentation d'état en posant : $y = x_1$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, ..., la variable \dot{x}_n est déduite de l'équation différentielle, en fonction de x_1, x_2, \dots, x_n et u .

Par leur qualité d'approximateur universel, un modèle flou TS représentant ce système est construit par les méthodes de secteurs non linéaires ou de linéarisation autour de points de fonctionnement. Ainsi, le modèle flou TS est obtenu par interpolation de modèles locaux linéaires, comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

où $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ est l'état du système et les matrices constantes caractérisant les sous-modèles, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, sont définies par :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \dots a_{in} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{i1} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}.$$

La synthèse d'un observateur pour le modèle (2.24) suppose que les modèles locaux sont localement observables, i.e. toutes les paires (A_i, C) sont observables.

Supposons par la suite, pour des raisons de simplicité, que le modèle flou (2.24) est composé de 2 règles, i.e. $r = 2$. Ainsi, le modèle flou TS (2.24) peut être réécrit sous la forme triangulaire

d'observation (2.23) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x, u) \\ y = x_1 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

avec $f(x, u) = ((a_{11} - a_{21})w_1(z) + a_{21})x_1 + ((a_{12} - a_{22})w_1(z) + a_{22})x_2 + \dots + ((a_{1n} - a_{2n})w_1(z) + a_{2n})x_n + ((b_{11} - b_{21})w_1(z) + b_{21})u$.

2.5.1.1 Exemple

On considère un bras de robot à un degré de liberté de masse m et de longueur l , actionné par un moteur à courant continu (voir figure 2.2) [46].

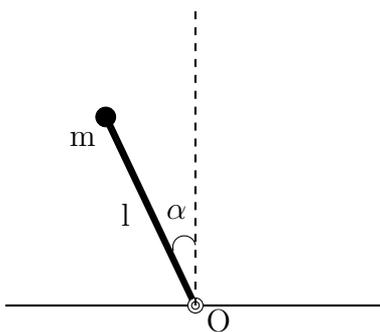


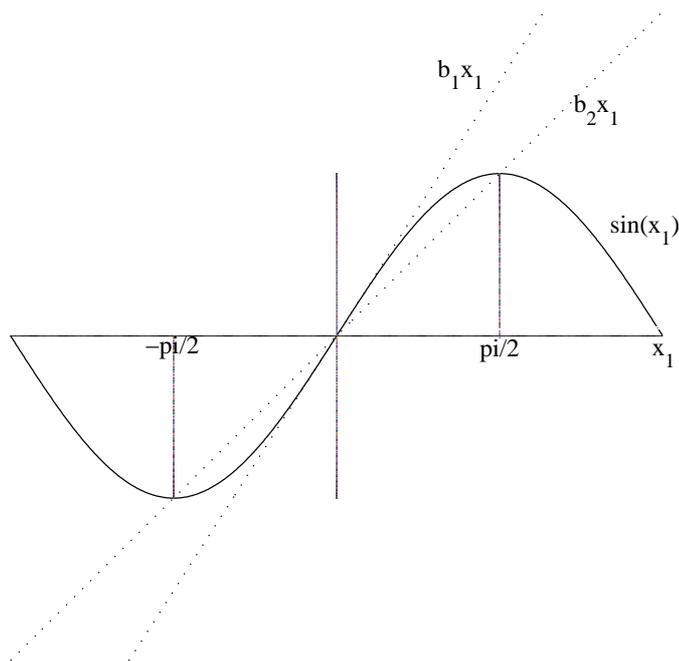
FIGURE 2.2 – Bras de robot à un degré de liberté

La dynamique du système est décrite par l'équation différentielle d'ordre 3 suivante :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{R}{L}\ddot{\alpha} - \left(\frac{0.06N^2}{ml^2L} + \frac{g \cos \alpha}{l}\right)\dot{\alpha} - \frac{Rg \sin \alpha}{lL} + \frac{0.3N}{ml^2L}u \quad (2.26)$$

avec α est la position angulaire du bras selon l'axe vertical et les paramètres du système sont donnés par : $g = 9.81m/s^2$, $m = 2Kg$, $R = 1.5\Omega$, $L = 0.05H$, $l = 0.5m$, $N = 100$.

Pour obtenir un modèle TS du système, on utilise l'approche de transformation par secteurs non linéaires (voir [69]). La figure 2.3 représente la fonction $\sin(x_1(t))$ et son secteur local $[b_2, b_1]$ pour $x_1(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, constitué de deux droites $b_1x_1(t)$ et $b_2x_1(t)$ de coefficients $b_1 = 1$ et $b_2 = \frac{2}{\pi}$.

FIGURE 2.3 – Secteur non linéaire local de $\sin(x_1(t))$

Le modèle flou TS est composé de 2 règles représentant le comportement du modèle (2.26) autour des deux points de fonctionnement 0 et $\pi/2$ est obtenu sous la forme (2.24) avec :

Règle 1 : Si $x_1(t)$ est proche de 0 Alors $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

Règle 2 : Si $x_1(t)$ est proche de $\frac{\pi}{2}$ Alors $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Rg}{lL} & -\left(\frac{0.06N^2}{m^2L} + \frac{g}{l}\right) & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2Rg}{\pi lL} & -\frac{0.06N^2}{m^2L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0.3N}{m^2L} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} \alpha & \dot{\alpha} & \ddot{\alpha} \end{bmatrix}^T.$$

Les fonctions d'activation (voir figure 2.4), dépendent de la variable d'état mesurable, $x_1(t)$, du système, selon :

$$\begin{cases} w_1(x_1) = \frac{1 - 1/(1 + \exp(-7(x_1 - \pi/4)))}{1 + \exp(-7(x_1 + \pi/4))} \\ w_2(x_1) = 1 - w_1(x_1) \end{cases} \quad (2.27)$$

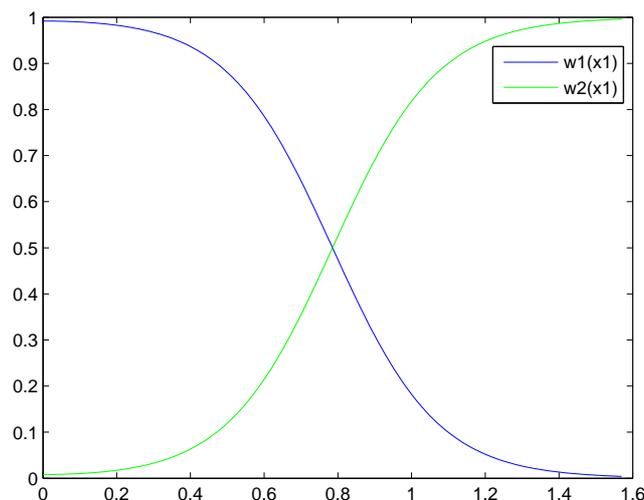


FIGURE 2.4 – Fonctions d'activation

Le modèle flou TS est alors obtenu sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 w_i(x_1(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.28)$$

2.5.2 Modèle 2

Considérons le modèle flou TS (2.4) où les variables d'état sont mesurables ($C_1 = \dots = C_r = I_n$). Le modèle peut être écrit alors en n sous-modèles sous la forme triangulaire (2.23) :

$$\Sigma_k \begin{cases} \dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j \\ y_k = x_k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.29)$$

où

$$\sum_{i=1}^r w_i(\xi) A_i = (a_{ij})_{j=1,n}^{i=1,n}, \quad \sum_{i=1}^r w_i(\xi) B_i = (b_{ij})_{j=1,m}^{i=1,n}.$$

2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons présenté les conditions d'observabilité des systèmes flous de forme standard (TS) et descripteur (TSD). La mise sous la forme triangulaire d'observation de deux modèles du système TS permet la conception des observateurs triangulaires à modes glissants pour les systèmes TS, qui feront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Observateurs à modes glissants des systèmes TS

3.1 Introduction

Les observateurs à modes glissants utilisent des techniques basées sur la théorie des systèmes à structure variable ou du mode glissant [73]. L'observateur à modes glissants est un observateur dont le terme de correction est une fonction *signe*. Le principe consiste à contraindre, à l'aide de fonctions discontinues, les dynamiques des erreurs d'observation d'un système non linéaire d'ordre n et de sortie p à converger vers une variété S de dimension $(n-p)$ dite surface de glissement. L'attractivité de cette surface est assurée par des conditions appelées conditions de glissement, les dynamiques sont calculées en utilisant la méthode de la commande équivalente [23][24] (voir Annexe A).

L'une des caractéristiques principales de ces observateurs est la robustesse vis-à-vis des perturbations externes et erreurs de modélisation ou incertitudes du système, en plus, de la propriété de convergence rapide et en temps fini des erreurs d'observation [9][66].

Dans ce chapitre, nous montrerons, à travers des exemples de systèmes décrits par des modèles TS, que l'utilisation des observateurs à modes glissants d'ordre 2, permet de réduire le phénomène de réticence ainsi que l'amélioration de la précision de convergence. Dans un premier exemple, une synthèse des observateurs à modes glissants d'ordre 1 et d'ordre 2 est réalisée pour l'estimation d'état d'un système TS. Le deuxième exemple traite l'estimation d'état en présence d'une entrée inconnue (perturbation externe). Une comparaison entre les performances du banc d'observateurs, à modes glissants d'ordre 2, élaboré et l'observateur flou proposé dans [43] est

réalisée.

3.2 Observateurs triangulaires à modes glissants

Dans la suite de cette section, nous allons présenter la structure des observateurs par modes glissants adaptée au cas où le système peut se mettre sous forme triangulaire d'observation [8][10]. Une stratégie de convergence dite étape par étape est réalisée afin d'assurer la convergence de chaque variable d'état l'une après l'autre en temps fini [29].

3.2.1 Observateurs à modes glissants d'ordre 1

La structure de l'observateur à mode glissant d'ordre 1 pour le système non linéaire (2.23), mis sous forme triangulaire observable, est la suivante [8] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + E_1 \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + E_{n-2} \lambda_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_n = f(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, u) + E_{n-1} \lambda_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

où \tilde{x}_i est l'état équivalent sur la surface de glissement :

$$\tilde{x}_i = \hat{x}_i + E_{i-1} \lambda_{i-1} \text{sign}(\tilde{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n$$

avec sign désignant la fonction sign classique filtrée par un filtre passe-bas [24] ; la fonction E_i est mise à zéro s'il existe $1 \leq j < i$ tel que $\tilde{x}_j - \hat{x}_j \neq 0$ (par définition $\tilde{x}_1 = x_1$), sinon E_i est égale à 1 ($E_i = 1$, si $E_1 = \dots = E_{i-1} = 1$ et $x_1 - \hat{x}_1 = 0$, sinon $E_i = 0$). Grâce à cela, les fonctions E_i assurent que les prochaines étapes sont activées qu'après avoir obtenu la convergence des étapes précédentes, ce qui implique qu'il n'apparaît pas de phénomène de pics [9].

3.2.1.1 Etude de convergence de l'observateur

La stratégie de convergence de l'observateur est réalisée étape par étape sur différentes surfaces de glissement et assure la convergence de l'erreur d'observation en n étapes et en temps fini vers zéro. La convergence en temps fini de l'observateur est assurée par le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. [8] *Considérons le système (2.23) et l'observateur (3.1). Si le système est*

à entrées bornées et à états bornés (EBEB) en temps fini, alors pour tout état initial $x(0)$, $\hat{x}(0)$ et toute entrée bornée u , il existe un choix de λ_i tel que l'état de l'observateur \hat{x} converge en un temps fini vers l'état du système x .

Preuve. L'étude de la stabilité et de la convergence de l'observateur utilise les méthodes du vecteur équivalent [23] et une convergence au sens de Lyapunov [8][9].

En soustrayant (3.1) à (2.23), la dynamique de l'erreur d'observation ($e = x - \hat{x}$) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = e_3 - E_1 \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - E_{n-2} \lambda_{n-1} \text{sign}(\tilde{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ \dot{e}_n = f(x, u) - f(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, u) - E_{n-1} \lambda_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{cases} \quad (3.2)$$

- **Étape 1** : Supposons que $x_1(0) \neq \hat{x}_1(0)$ et comme $E_i = 0$, $i \geq 1$ dans la première étape, nous obtenons la dynamique de l'erreur d'observation suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{e}_2 = e_3 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n \\ \dot{e}_n = f(x, u) - f(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, u) \end{cases} \quad (3.3)$$

Considérons l'ensemble $S = \{e/e_1 = 0\}$ représentant la surface de glissement et la fonction de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2}e_1^2$. La surface de glissement est attractive si et seulement si

$$\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1(e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1)) < 0$$

En choisissant $\lambda_1 > |e_2|_{max}$, une convergence de l'erreur d'observation vers zéro est garantie après un temps fini t_1 [9].

Ainsi, pour $\lambda_1 > |e_2|_{max}$ et sur la surface de glissement nous avons :

- \hat{x}_1 converge vers x_1 en temps fini et reste égal à x_1 pour $t > t_1$.
- $\forall t > t_1$, $E_1 = 1$ et $\dot{e}_1 = 0$, de (3.3) on obtient $e_2 = \lambda_1 \text{sign}(e_1)$ et par conséquent $\tilde{x}_2 = x_2$.

- **Étape 2** : Le but de cette étape est d'atteindre $e_1 = e_2 = 0$. Pour $t > t_1$ on a $e_1 = 0$ et la

dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_2 = e_3 - \lambda_2 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n \\ \dot{e}_n = f(x, u) - f(x_1, x_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n, u) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Posons $V_2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2$, on obtient :

$$\dot{V}_2 = e_1(e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1)) + e_2(e_3 - \lambda_2 \text{sign}(e_2))$$

Cependant, si la condition $\lambda_1 > |e_2|_{max}$ est vérifiée pour $t > t_1$, on obtient $e_1 = 0$ et $e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1) = 0$, ainsi on trouve :

$$\dot{V}_2 = e_2(e_3 - \lambda_2 \text{sign}(e_2))$$

Par conséquent, si $\lambda_2 > |e_3|_{max}$ alors e_2 converge vers zéro après un temps fini $t_2 > t_1$. Pour $t > t_2$, sur la surface $e_2 = 0$, on obtient $\dot{e}_2 = 0$ et on déduit donc $\tilde{x}_3 = x_3$ et $E_1 = E_2 = 1$.

Ainsi suivant le même raisonnement et procédons étape par étape, on obtient à l'étape $(n-1)$ la convergence de l'erreur d'observation vers la surface $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = 0$ après un temps fini t_{n-1} sous les conditions $\lambda_i > |e_{i+1}|_{max}$ et $\tilde{x} = x$.

- **Étape $n^{ième}$** : cette étape commence à l'instant t_{n-1} , à cet instant $e_k = 0$, pour tout $k < n$.

Ainsi, la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1) = 0 \\ \dot{e}_2 = e_3 - \lambda_2 \text{sign}(e_2) = 0 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - \lambda_{n-1} \text{sign}(e_{n-1}) = 0 \\ \dot{e}_n = -\lambda_n \text{sign}(x_n - \hat{x}_n) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Posons $V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}e_i^2$, on déduit de $e_i = 0 \forall i < n$ que

$$\dot{V}_n = e_n(-\lambda_n \text{sign}(e_n))$$

Alors e_n converge vers 0 en un temps fini $t_n > t_{n-1}$ pour toute valeur de $\lambda_n > 0$ et si toutes les

conditions λ_k , $k < n$ sont vérifiées après t_{n-1} . \square

Un inconvénient majeur de ce type d'observateur est le phénomène de réticence ou chattering en anglais [72] qui se produit à cause de la nature discontinue de la fonction *sign*. Ce phénomène engendre des oscillations de fréquence élevée une fois atteint le régime glissant et peut en outre exciter des dynamiques hautes fréquences non modélisées et conduire à l'instabilité.

Pour éviter ou atténuer ce phénomène, plusieurs solutions ont été proposées. L'une d'entre elles consiste à remplacer la fonction *sign* par des approximations continues à gain élevé dans un proche voisinage de la surface de glissement, et saturée en dehors de ce voisinage [37]. Parmi ces fonctions, on cite la fonction de saturation définie par :

$$sat(e) = \begin{cases} sign(e) & \text{si } |e| > \varepsilon \\ \frac{e}{\varepsilon} & \text{si } |e| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3.6)$$

En effet, cette fonction revient à filtrer les composantes hautes fréquences dans la région linéaire. Le régime glissant qui en résulte est donc confiné dans un ε -voisinage de la surface de glissement [28]. D'autres fonctions peuvent aussi être utilisées telles que les fonctions $tanh(\frac{e}{\varepsilon})$, $\frac{2}{\pi}arctan(\frac{e}{\varepsilon}) \dots$ [15].

De plus, bien que cette technique permette d'atténuer le phénomène de réticence, la robustesse et le temps de réponse s'en trouve dépréciés. Des compromis entre l'importance de la réticence et les performances doivent être faits [28]. Une autre solution, basée sur la théorie des modes glissants d'ordre supérieur [31][49][50], permet l'élimination du phénomène de réticence tout en préservant les propriétés de robustesse et garantissant même une meilleure précision de convergence en temps fini [11][22].

3.2.2 Observateurs à modes glissants d'ordre supérieur

Les modes glissants d'ordre supérieur sont une généralisation du concept des modes glissants classiques. Cette technique introduite dans [49][50][51] permet non seulement de bonnes propriétés de robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques, aux erreurs de modélisation et aux perturbations, mais aussi une simplicité de mise en œuvre des modes glissants classiques. Son atout remarquable, c'est qu'elle permet, l'élimination du phénomène de réticence, tout en préservant les principaux avantages de la précédente approche même une meilleure précision de convergence par rapport aux imperfections du modèle.

L'ensemble de glissement d'ordre r par rapport à la fonction contrainte s est défini par [28] :

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0\} \quad (3.7)$$

Dans la littérature, beaucoup d'algorithmes par modes glissants d'ordre supérieur ont été proposés, par exemple : algorithme du twisting, algorithme sous-optimal et algorithme du Super twisting [29][49]. Dans la suite, nous allons mettre l'accent sur un algorithme par mode glissant d'ordre supérieur dit *super-twisting*.

3.2.3 Observateurs à modes glissants d'ordre 2

Le *super-twisting* [49] est un algorithme d'ordre deux qui ne requiert que l'information sur s . Le but est d'établir un régime glissant d'ordre deux par rapport à la surface de glissement s , en imposant aux trajectoires d'état du système à évoluer au bout d'un temps fini sur l'ensemble S et à ne plus le quitter ensuite :

$$S = \{x : s = \dot{s} = 0\} \quad (3.8)$$

3.2.3.1 Principe de l'algorithme du super-twisting

Un différentiateur robuste basé sur l'algorithme du super-twisting (voir figure 3.1) est donné par les équations suivantes [65] :

$$\Sigma_{obs} = \begin{cases} u(e_1) = u_1 + \lambda_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{u}_1 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \lambda_1, \alpha_1 > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, λ_1 et α_1 sont des paramètres positifs, u_1 est la sortie du différentiateur,

$$\text{sign}(e_1) = \begin{cases} +1 & \text{si } e_1 > 0 \\ -1 & \text{si } e_1 < 0 \\ \in]-1, 1[& \text{si } e_1 = 0 \end{cases}$$

Une caractéristique importante du différentiateur est le fait que la sortie ne dépende pas directement des fonctions discontinues mais de l'intégrateur. Ainsi, le phénomène de réticence est atténué [65]. L'implémentation de cet algorithme est simple et ne requiert l'information que pour la surface de glissement e_1 et non pas de sa dérivée.

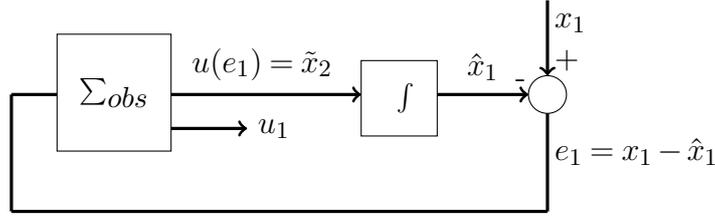


FIGURE 3.1 – Structure du différentiateur d'ordre deux.

3.2.3.2 Structure d'un observateur à modes glissants d'ordre 2

La structure générale de l'observateur étape par étape à mode glissant d'ordre 2, basé sur le différentiateur robuste (3.9), est la suivante [29] :

$$\Sigma_{obs} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_1 [\tilde{x}_3 + \lambda_2 |\tilde{e}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_2)] \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1 \alpha_2 \text{sign}(\tilde{e}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_2 [\tilde{x}_4 + \lambda_3 |\tilde{e}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_3)] \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = E_{n-3} \alpha_{n-2} \text{sign}(\tilde{e}_{n-2}) \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = E_{n-2} [\tilde{x}_n + \lambda_{n-1} |\tilde{e}_{n-1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_{n-1})] \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-2} \alpha_{n-1} \text{sign}(\tilde{e}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-1} [\tilde{\theta} + \lambda_n |\tilde{e}_n|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{e}_n)] \\ \dot{\hat{\theta}} = E_{n-1} \alpha_n \text{sign}(\tilde{e}_n) \end{cases} \quad (3.10)$$

où $\tilde{e}_i = \tilde{x}_i - \hat{x}_i$ pour $i = 1, \dots, n$ avec $\tilde{x}_1 = x_1$, $[\tilde{x}, \tilde{\theta}]^T = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{\theta}]^T$ est la sortie de l'observateur et $\lambda_i, \alpha_i > 0$ sont les gains de l'observateur. Pour $i = 1, \dots, n-1$, les valeurs E_i assurent que les prochaines étapes sont activées qu'après avoir obtenu la convergence des étapes précédentes, elles sont définies comme :

$$E_i = 1 \text{ si } |\tilde{e}_j| = |\tilde{x}_j - \hat{x}_j| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } j < i \text{ sinon } E_i = 0.$$

avec ε est une petite constante positive.

3.2.3.3 Analyse de convergence

La convergence de l'erreur d'estimation pour un système de forme triangulaire (2.23) peut être garantie grâce au théorème suivant :

Théorème 3.2.2. [65] *Considérons le système (2.23), supposé à état borné pour tout $t < \infty$, et l'observateur à mode glissant d'ordre 2 (3.10). Pour toutes conditions initiales $x(0)$, $\hat{x}(0)$, il existe un choix de λ_i et α_i tel que l'état de l'observateur \hat{x} converge en temps fini vers l'état x du système.*

Preuve. La stratégie de convergence de l'observateur est réalisée étape par étape sur différentes surfaces de glissement. La convergence de l'erreur d'observation est obtenue en $(n - 1)$ étapes et en temps fini. Les $(n - 1)$ premières étapes permettent de reconstruire le vecteur d'état et la $n^{\text{ième}}$ étape permet d'estimer une entrée inconnue du système, e.g. un défaut ou une perturbation, supposée bornée.

La variable d'état du système (2.23) est supposée bornée, i.e. pour tout $t > 0$: $|x_i(t)| < d_i$ et $|f(t)| < K_1$, $|\dot{f}(t)| < K_2$ avec K_1 et K_2 sont des constantes positives.

- **Étape 1** : Supposons que $e_1(0) \neq 0$, la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en soustrayant (3.10) à (2.23), est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 = x_2 - \tilde{x}_2 - \lambda_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 = x_3 - E_1[\tilde{x}_3 + \lambda_2 |\tilde{x}_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)] \\ \dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\hat{x}}_i = x_{i+1} - E_{i-1}[\tilde{x}_{i+1} + \lambda_i |\tilde{x}_i - \hat{x}_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_i - \hat{x}_i)], \quad i = 3, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n = f(x, u) - E_{n-1}[\tilde{\theta} + \lambda_n |\tilde{x}_n - \hat{x}_n|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n)] \end{cases} \quad (3.11)$$

La première et la deuxième ligne du système d'équations (3.11) correspondent à l'algorithme super-twisting. La dérivée seconde de e_1 , par rapport au temps, est donnée par :

$$\ddot{e}_1 = x_3 - \alpha_1 \text{sign}(e_1) - \frac{1}{2} \lambda_1 \dot{e}_1 |e_1|^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

Les conditions suffisantes garantissant la convergence de l'état en temps fini sur l'ensemble de glissement d'ordre deux $\{e_1 = \dot{e}_1 = 0\}$, sont [65] :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> d_3, \\ \lambda_1 &> \sqrt{2} \frac{d_3 + \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1 - d_3}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ainsi, la surface de glissement $e_1 = 0$ est atteinte après un temps fini t_1 ce qui fait que $\dot{e}_1 = 0$ impliquant $\tilde{x}_2 = x_2$.

- **Étape 2** : Pour $t > t_1$, $E_1 = 1$ et la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_2 = x_3 - \tilde{x}_3 - \lambda_2 |\tilde{x}_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{e}_3 = x_4 - E_2 [\tilde{x}_4 + \lambda_3 |\tilde{x}_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3)] \\ \dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{\hat{x}}_i = x_{i+1} - E_{i-1} [\tilde{x}_{i+1} + \lambda_i |\tilde{x}_i - \hat{x}_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_i - \hat{x}_i)], \quad i = 4, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n = f(x, u) - E_{n-1} [\tilde{\theta} + \lambda_n |\tilde{x}_n - \hat{x}_n|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n)] \end{cases} \quad (3.14)$$

En choisissant,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &> d_4, \\ \lambda_2 &> \sqrt{2} \frac{d_4 + \alpha_2}{\sqrt{\alpha_2 - d_4}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

on obtient après un temps fini $t_2 > t_1$ la convergence de e_2 vers zéro. La dynamique du reste de l'erreur d'observation sur la surface de glissement est donnée par $\dot{e}_2 = 0$ et on déduit donc $x_3 = \tilde{x}_3$.

En répétant $(n-1)$ fois ce processus, nous obtenons après un temps fini t_{n-1} une estimation de toutes les variables de l'état x . Une estimation d'une entrée inconnue du système en temps fini peut être obtenue à la $n^{\text{ième}}$ étape.

- **Étape $n^{\text{ième}}$** : la dynamique de l'observateur sera donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dots = \dot{e}_{n-1} = 0 \\ \dot{e}_n = f(x, u) - \tilde{\theta} - \lambda_n |\tilde{x}_n - \hat{x}_n|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \\ \dot{\tilde{\theta}} = \alpha_n \text{sign}(\tilde{x}_n - \hat{x}_n) \end{cases} \quad (3.16)$$

La deuxième dérivée de e_n est donnée par :

$$\ddot{e}_n = \dot{f} - \alpha_n \text{sign}(e_n) - \frac{1}{2} \lambda_2 \dot{e}_n |e_n|^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

En choisissant les conditions suffisantes de convergence suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_n &> K_2, \\ \lambda_n &> \sqrt{2} \frac{K_2 + \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n - K_2}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

on obtient alors la convergence sur la surface de glissement $e_n = \dot{e}_n = 0$ après un temps fini

$t_n > t_{n-1}$, et par conséquent, $\tilde{\theta}$ fournit une estimation de la fonction $f(\tilde{x}, u)$. Ainsi, si le système est soumis à une entrée inconnue, supposée bornée, une estimation de cette dernière pourra être obtenue à partir de $\tilde{\theta}$. \square

3.3 Exemple 1 : Estimation d'état d'un système TS

Considérons le modèle flou TS (2.28) représentant le comportement non linéaire d'un bras actionné par un moteur DC décrit par (2.26).

Les fonctions d'activation du modèle (2.27) dépendent de la première composante $x_1(t)$ du vecteur d'état qui est mesurable.

L'observabilité de chaque sous-modèle, $i = 1, 2$ est nécessaire pour assurer l'observabilité du modèle global (2.28). Les conditions d'observabilité suivantes sont vérifiées : $\text{rang}(\mathcal{O}_i) = 3, \forall i = 1, 2$.

Le modèle flou TS (2.28) est alors réécrit sous la forme triangulaire observable (2.25) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f(x, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.19)$$

avec :

$$f(x, u) = (-213.89w_1(x_1) - 374.71)x_1 + (-19.62w_1(x_1) - 24000)x_2 - 30x_3 + 1200u.$$

On peut concevoir un observateur à mode glissant étape par étape qui permet de reconstruire toutes les variables d'état $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ en un temps fini. L'entrée du système est donnée par $u(t) = -40\sin(2t)$, et les conditions initiales sont $x(0) = [1, 0, 0]^T$ pour le système et $\hat{x}(0) = [0.5, 1, 1]^T$ pour l'observateur.

3.3.1 Estimation d'état avec un observateur à modes glissants d'ordre 1

L'observateur à modes glissants d'ordre 1 (3.1) proposé s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + E_1 \lambda_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = f(x_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, u) + E_2 \lambda_3 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \end{cases} \quad (3.20)$$

La convergence de l'erreur d'observation vers zéro est obtenue en 3 étapes et en temps fini. Les gains λ_i assurant la convergence de l'observateur sont : $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 8$ et $\lambda_3 = 4$.

Les résultats de simulation correspondant à l'évolution de l'erreur d'estimation d'état sont présentés à la figure 3.2, cependant le phénomène de réticence (chattering) est observé (figure 3.3).

La figure 3.4 montre la convergence de l'état de l'observateur $\hat{x}(t)$ vers celui du système $x(t)$.

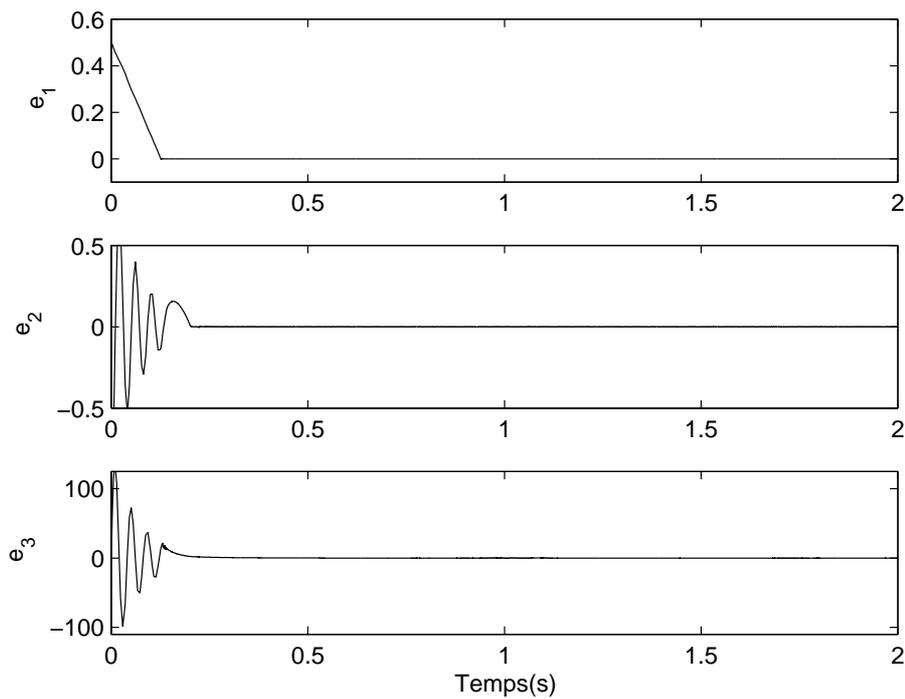


FIGURE 3.2 – Évolution de l'erreur d'estimation d'état

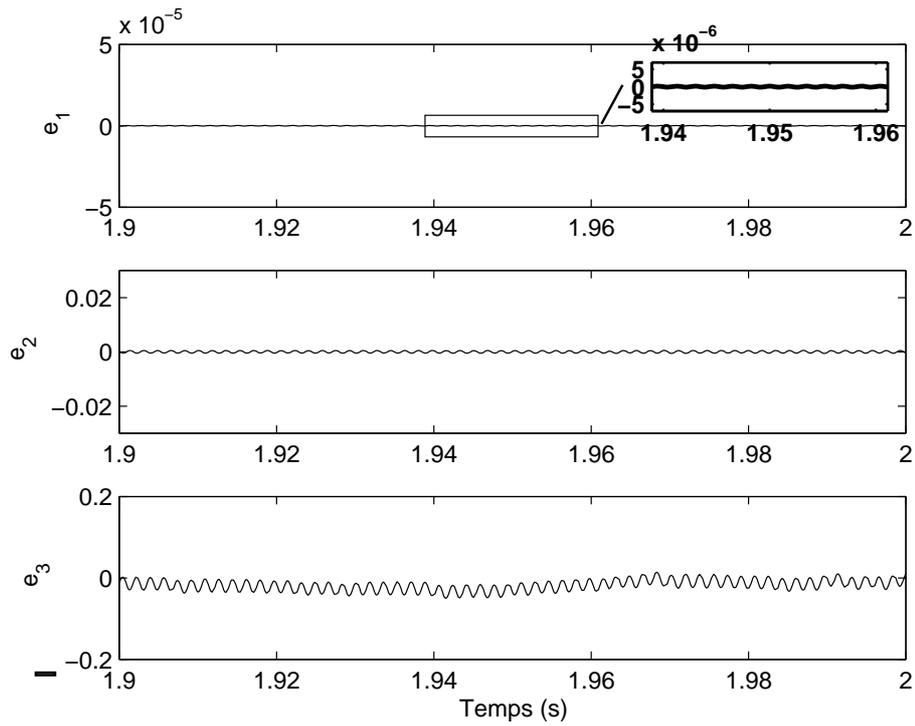


FIGURE 3.3 – Erreur d'estimation d'état (zoom)

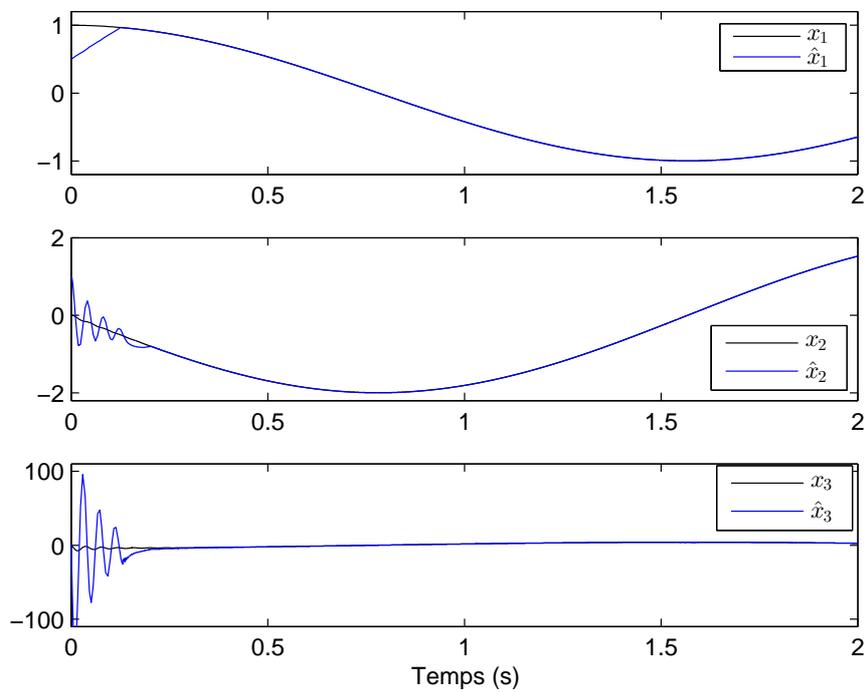


FIGURE 3.4 – L'état x et son estimé

3.3.2 Estimation d'état avec un observateur à modes glissants d'ordre 2

L'observateur à modes glissants d'ordre 2 (3.10) pour le système (3.19) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |\tilde{x}_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \tilde{x}_3 + E_1 \lambda_2 |\tilde{x}_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1 \alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \tilde{\theta} + E_2 \lambda_3 |\tilde{x}_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{\theta}} = E_2 \alpha_3 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \end{cases} \quad (3.21)$$

La convergence de l'erreur d'observation est obtenue en 3 étapes et en temps fini. Les gains de l'observateur sont : $\lambda_1 = 200$, $\alpha_1 = 150$, $\lambda_2 = 500$, $\alpha_2 = 450$, $\lambda_3 = 5000$ et $\alpha_3 = 85000$.

Les résultats de simulation, figures 3.5 et 3.6, illustrent les bonnes performances de l'observateur à modes glissants d'ordre 2. L'état estimé \hat{x} converge en temps fini. On peut observer que le temps de convergence est diminué et le phénomène de réticence est éliminé par rapport au mode glissant d'ordre 1 (voir figure 3.7).

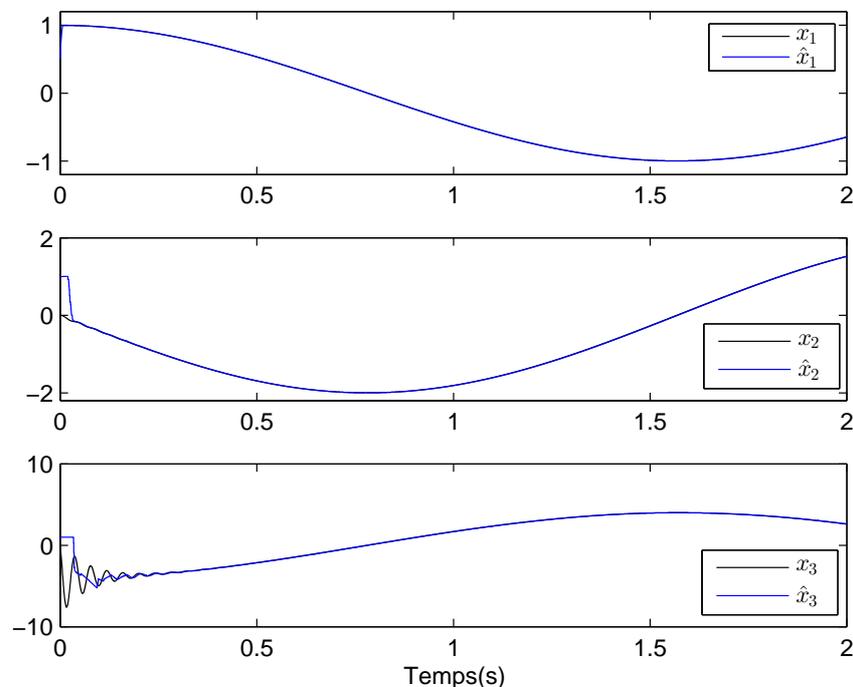


FIGURE 3.5 – x et son estimé

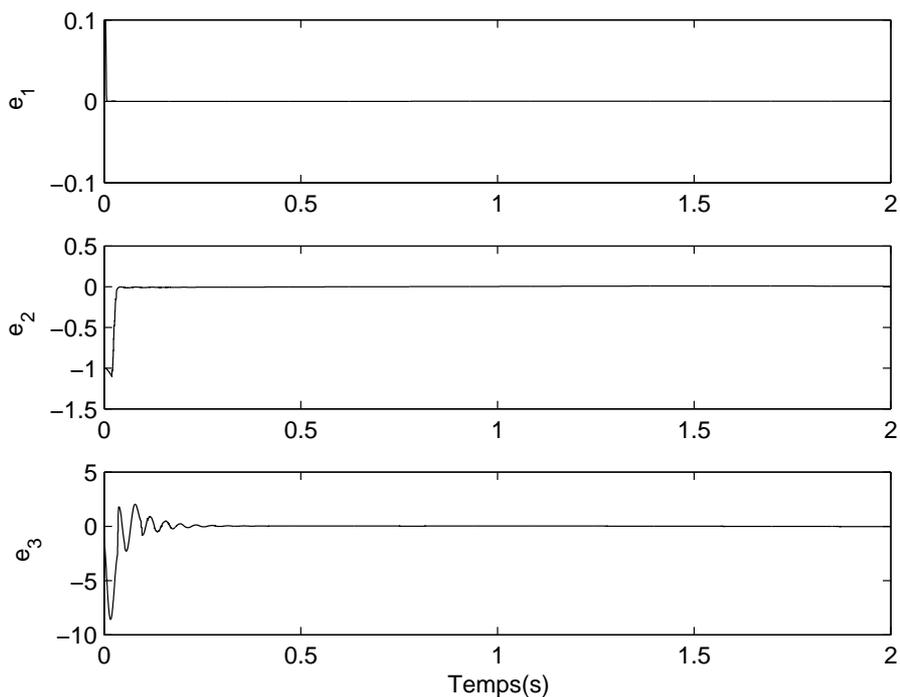


FIGURE 3.6 – Évolution de l’erreur d’estimation

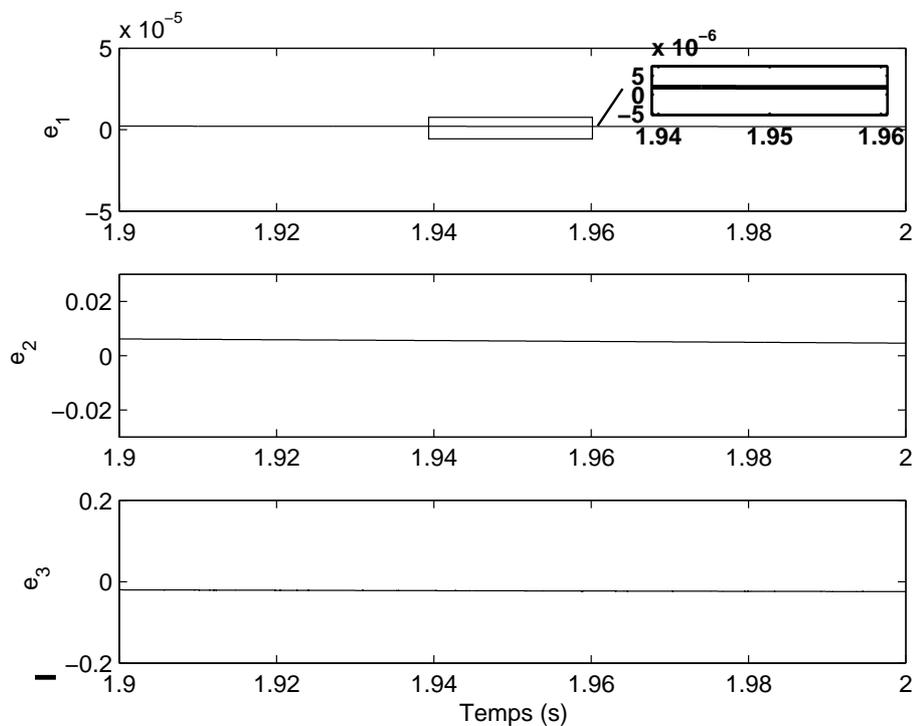


FIGURE 3.7 – Erreur d’estimation d’état (zoom)

3.4 Estimation d'état d'un système TS perturbé

En présence d'entrées inconnues, e.g. perturbations ou incertitudes de modélisation, le modèle TS (1.3) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) + E\zeta(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

où $\zeta(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'entrées inconnues, affectant la dynamique du système, $n \geq p \geq q$. $E \in \mathbb{R}^{n \times q}$ est la matrice de l'influence de $\zeta(t)$ sur la dynamique. Le vecteur $\zeta(t)$ est supposé borné.

En supposant $p = n$, le modèle (3.22) est réécrit en n sous-modèles, selon la forme suivante :

$$\Sigma_k \equiv \begin{cases} \dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j + \sum_{j=1}^q e_{kj} \zeta_j \\ y_k = x_k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.23)$$

Les sous-modèles (3.23) sont mis sous forme triangulaire, selon :

$$\Sigma_k \equiv \begin{cases} x_k = y_k \\ \dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j + \sum_{j=1}^q e_{kj} \zeta_j = h_k(x, u, \zeta) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.24)$$

Un banc de n observateurs à modes glissants d'ordre 2 est élaboré, de la forme suivante :

$$\Sigma_{obs_k} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_k = \tilde{\theta}_k + \lambda_k |e_k|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_k) \\ \dot{\tilde{\theta}}_k = \alpha_k \text{sign}(e_k) \\ x_k = y_k \end{cases} \quad (3.25)$$

où : $e_k = x_k - \hat{x}_k$.

La dynamique de l'erreur d'observation e_k , $k = 1, 2, \dots, n$, est donnée par :

$$\dot{e}_k = h_k(x, u, \zeta) - \tilde{\theta}_k - \lambda_k |e_k|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_k) \quad (3.26)$$

La convergence de l'erreur d'observation, de l'observateur Σ_{obs_k} , est obtenue en une étape, selon l'analyse donnée en §3.2.3.3. Les gains de l'observation, λ_k et α_k , sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_k &> K_k \\ \lambda_k &> \sqrt{2} \frac{K_k + \alpha_k}{\sqrt{\alpha_k - K_k}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

où : $|\dot{h}_k| < K_k$.

Après un temps fini, t_k , l'état de l'observateur, \hat{x}_k , converge en temps fini vers x_k , et l'estimation $\tilde{\theta}_k$ est obtenue :

$$\tilde{\theta}_k = \tilde{h}_k(x, u, \tilde{\zeta}) \quad (3.28)$$

Ainsi, après un temps fini $T_1 = \sum_{k=1}^n t_k$, on obtient :

$$\tilde{\theta}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j + \sum_{j=1}^q e_{kj} \tilde{\zeta}_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.29)$$

(3.29) peut être mise sous forme matricielle, comme suit :

$$\tilde{\theta} = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + E\tilde{\zeta}(t) \quad (3.30)$$

où :

$$\bar{A} = (a_{ij})_{j=1,n}^{i=1,n}, \bar{B} = (b_{ij})_{j=1,m}^{i=1,n}, \tilde{\theta}(t) = \left(\tilde{\theta}_k \right)_{k=1,n}^T.$$

Si $\text{rang}(E) = q$, alors $E^T E$ est inversible car E est de plein rang colonne. Ainsi, l'estimation du vecteur de perturbations est obtenu par :

$$\tilde{\zeta}(t) = (E^T E)^{-1} E^T [\tilde{\theta}(t) - \bar{A}x(t) - \bar{B}u(t)] \quad (3.31)$$

3.4.1 Exemple 2 : Application à un bras manipulateur actionné par un moteur DC

On considère le système composé d'un bras actionné par un moteur DC (voir figure 3.8), présenté dans [43], dont le modèle mathématique est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{k}{J_m}(\theta_l(t) - \theta_m(t)) - \frac{B}{J_m}\omega_m(t) + \frac{K_T}{J_m}u(t) \\ \dot{\theta}_l(t) = \omega_l(t) \\ \dot{\omega}_l(t) = -\frac{k}{J_l}(\theta_l(t) - \theta_m(t)) - \frac{mgh}{J_l}\sin(\theta_l(t)) \end{cases} \quad (3.32)$$

où $\theta_m(t)$ représente la position angulaire du moteur, $\omega_m(t)$ sa vitesse angulaire, $\theta_l(t)$ est la position angulaire du bras et $\omega_l(t)$ est la vitesse angulaire du bras. L'entrée du système est donnée par $u(t) = \sin(t)$. Le système (3.32) est supposé affecté par une perturbation externe

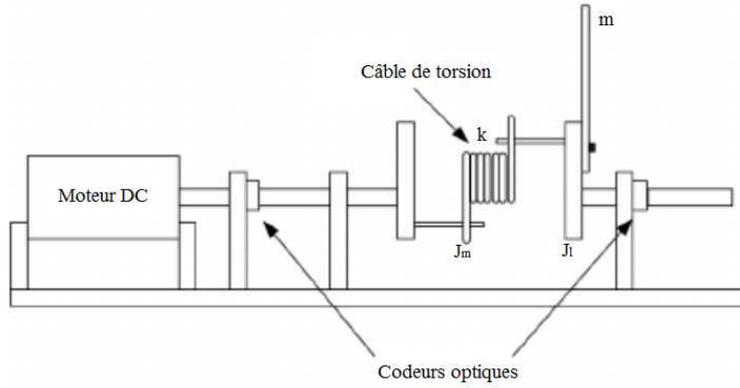


FIGURE 3.8 – Bras manipulateur actionné par un moteur DC

$\omega(t)$. Le modèle peut être réécrit sous forme de représentation d'état comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t) + E\omega(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.33)$$

où le bruit centré $\omega(t)$ est borné par 0.6,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.33\sin(x_3) \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant l'approche de transformation par secteurs non linéaires, un modèle flou TS représentant exactement le comportement du modèle (3.33) est obtenu sous la forme [43] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x + B_i u + E_i \omega(t)) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.34)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -22.83 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -18.77 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = B, E_1 = E_2 = E.$$

Les fonctions d'activation du modèle sont définies par :

$$\begin{cases} \mu_1(z(t)) = \frac{z(t)+0.2172}{1.2172} \\ \mu_2(z(t)) = 1 - \mu_1(z(t)) = \frac{1-z(t)}{1.2172} \end{cases} \quad (3.35)$$

où la variable de prémisse, $z(t) = \frac{\sin(x_3)}{x_3}$, dépend de la variable d'état $x_3(t)$, qui n'est pas mesurable.

La condition d'observabilité suivante est vérifiée : $\forall i \in \{1, 2\}, \text{rank}(\mathcal{O}_i) = 4$. Le modèle flou TS (3.34) est réécrit sous une forme triangulaire observable comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 0.5\omega = f_1(x_2, \omega) \\ \dot{x}_2 = -48.6x_1 - 1.25x_2 + 48.6x_3 + 21.6u + \omega = f_2(x_1, x_2, x_3, u, \omega) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = 19.5x_1 - (4.06\mu_1(z(t)) + 18.77)x_3 = f_3(x_1, x_3) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (3.36)$$

Un banc d'observateurs à modes glissants d'ordre 2 est conçu pour l'estimation d'état du système (3.34) :

$$\begin{cases} \Sigma_{obs_1} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{f}_1 + \lambda_1 |\tilde{x}_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{f}}_1 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \\ \Sigma_{obs_2} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = \tilde{f}_2 + \lambda_2 |\tilde{x}_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{f}}_2 = \alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2) \end{cases} \\ \Sigma_{obs_3} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_3 = \tilde{x}_4 + \lambda_3 |\tilde{x}_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{x}}_4 = \alpha_4 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{x}}_4 = E_3 [\tilde{f}_3 + \lambda_4 |\tilde{x}_4 - \hat{x}_4|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4)] \\ \dot{\hat{f}}_3 = E_3 \alpha_4 \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4) \end{cases} \end{cases} \quad (3.37)$$

avec : $\tilde{x}_1 = x_1$ et $\tilde{x}_2 = x_2$. Les gains d'observation sont : $\lambda_1 = 50$, $\alpha_1 = 40$, $\lambda_2 = 70$, $\alpha_2 = 50$, $\lambda_3 = 50$, $\alpha_3 = 45$, $\lambda_4 = 150$ et $\alpha_4 = 135$, assurant une convergence de l'erreur d'observation en temps fini.

La convergence de l'observateur Σ_{obs_1} permet de fournir une estimation de la fonction $\tilde{f}_1(x_2, \tilde{\omega})$, ainsi une estimation de la perturbation $\tilde{\omega}(t)$ est obtenue par :

$$\tilde{\omega}(t) = 2(\tilde{f}_1(x_2, \tilde{\omega}) - x_2) \quad (3.38)$$

La convergence de l'observateur Σ_{obs_2} fournit l'estimation $\tilde{f}_2(x_1, x_2, \tilde{x}_3, u, \tilde{\omega})$, par conséquent, l'état estimé \tilde{x}_3 est obtenu par :

$$\tilde{x}_3 = \frac{1}{48.6}(\tilde{f}_2 - 48.6x_1 + 12.5x_2 - 21.6u - \tilde{\omega}) \quad (3.39)$$

Cependant, une estimation de la fonction d'activation $\tilde{\mu}_1(t)$ peut être obtenue, suite à la convergence de l'observateur Σ_{obs_3} , par :

$$\tilde{\mu}_1(t) = \frac{19.5x_1 - 18.77\tilde{x}_3 - \tilde{f}_3}{4.06\tilde{x}_3} \quad (3.40)$$

Afin d'éviter la singularité de \tilde{x}_3 , on pose [21] :

$$\tilde{\mu}_1(t) = E_s \tilde{\mu}_1(t-1) + (1 - E_s) \left(\frac{19.5x_1(t) - 18.77\tilde{x}_3(t) - \tilde{f}_3(t)}{4.06\tilde{x}_3(t)} \right) \quad (3.41)$$

avec :

$$E_s = \begin{cases} 1 & \text{si } |\tilde{x}_3| < \epsilon \\ 0 & \text{si } |\tilde{x}_3| \geq \epsilon \end{cases}$$

où ϵ est choisi égal à 0.2.

La figure 3.9 présente les variables d'état du système et leurs estimées. L'estimation de la perturbation $\omega(t)$ est donnée dans la figure 3.10 (a). L'estimation de la fonction d'activation $\mu_1(t)$ est présentée à la figure 3.10 (b).

Dans [43], un observateur flou lipschitzien est proposé pour le système TS (3.34), donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.42)$$

Les conditions de convergence de l'observateur se basent sur la théorie de Lyapunov et des hy-

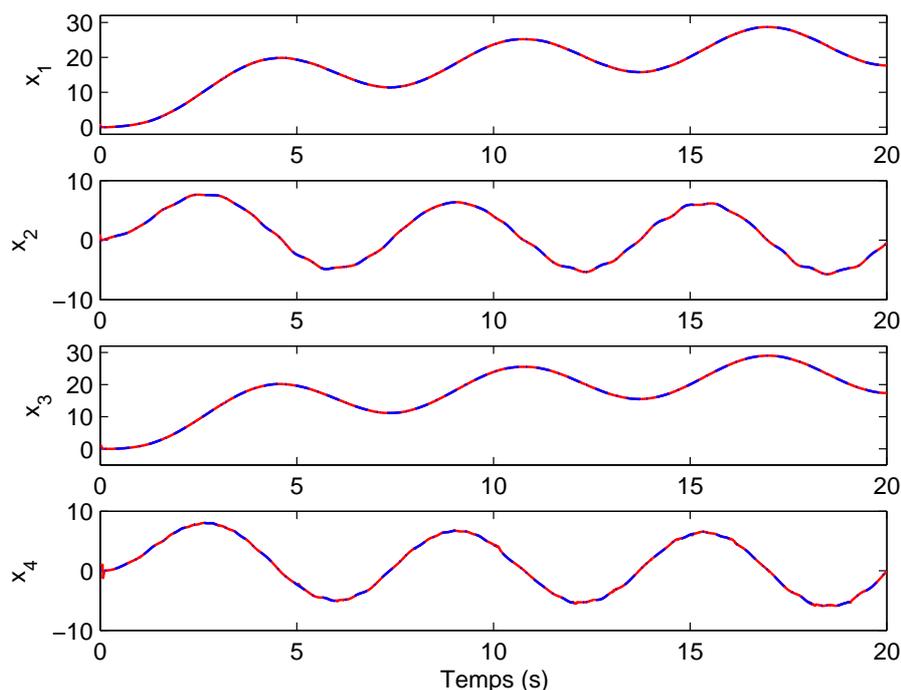


FIGURE 3.9 – États du système (pointillé bleu) et leurs estimés (trait continu rouge) par observateurs à modes glissants

pothèses de Lipschitz. Les conditions de stabilité sont formulées sous forme d'inégalités linéaires matricielles. Le gain L de l'observateur est déterminé, par la résolution de ces LMIs, de manière à garantir la convergence de l'erreur d'estimation d'état en assurant un taux d'atténuation minimal du transfert de l'influence de la perturbation $\omega(t)$ vers l'erreur d'estimation d'état $e(t)$. Le gain de l'observateur L est donné par [43] :

$$L = \begin{bmatrix} 10.0762 & 1.2823 \\ -72.4926 & 21.3171 \\ -8.1831 & 4.1334 \\ -3.7979 & 7.9510 \end{bmatrix}$$

Les états du système et leurs estimés sont donnés sur la figure 3.11. Une comparaison des erreurs d'estimation d'état obtenues par le banc d'observateurs à modes glissants d'ordre 2 développé (3.37) et l'observateur flou (3.42) est présentée à la figure 3.12. On observe une bonne convergence de l'erreur d'estimation d'état des deux observateurs. Cependant, les observateurs à modes glissants d'ordre 2 élaborés permettent une convergence rapide en plus d'une simplicité de mise en œuvre.

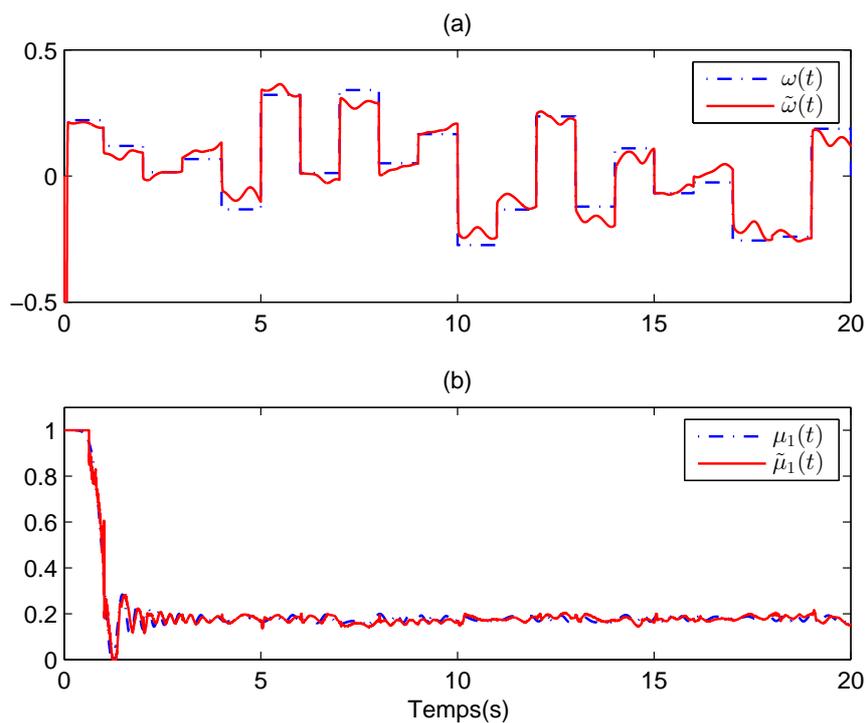


FIGURE 3.10 – (a) Estimation de la perturbation $\omega(t)$, (b) Fonction d'activation $\mu_1(t)$ et son estimée

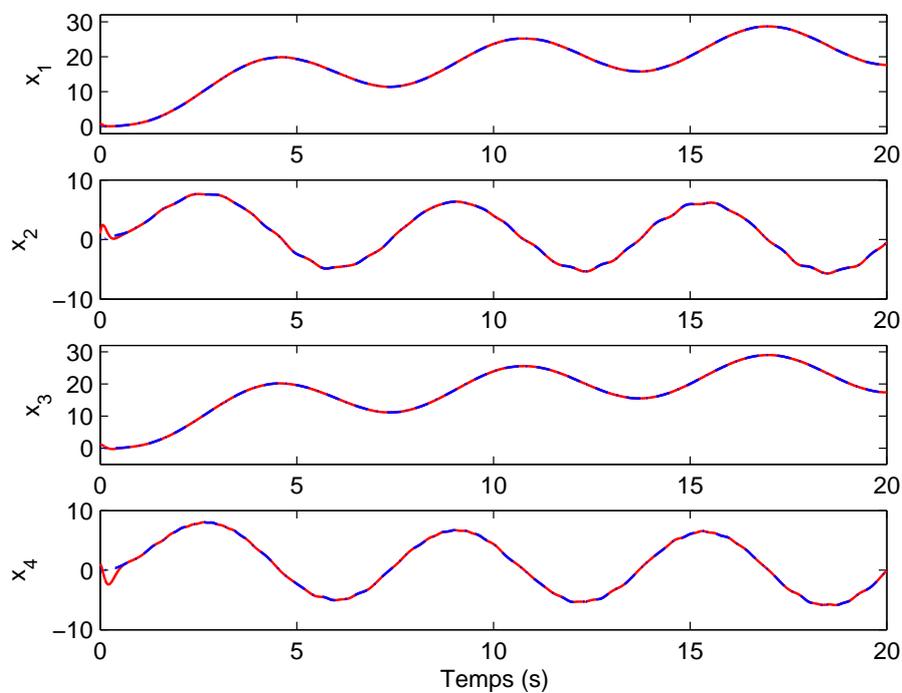


FIGURE 3.11 – États du système (pointillé bleu) et leurs estimés (trait continu rouge) par observateur flou

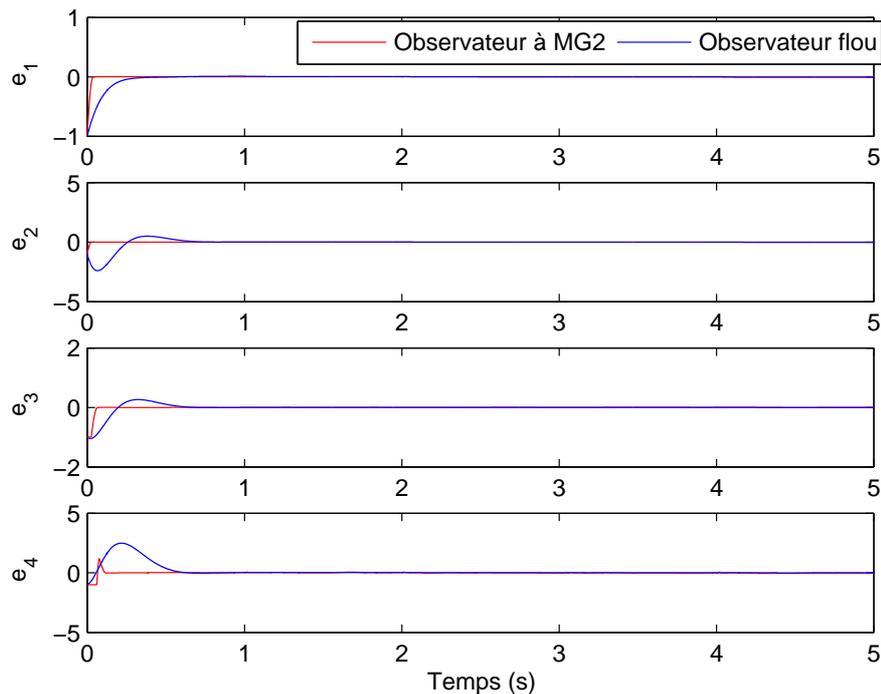


FIGURE 3.12 – Erreurs d'estimation d'état obtenues par le banc d'observateurs à modes glissants (MG) et l'observateur flou

3.5 Conclusion

Dans ce troisième chapitre, nous avons présenté la structure des observateurs triangulaires à modes glissants d'ordre un et deux ainsi qu'une analyse de convergence de l'erreur d'estimation. Ces observateurs ont été développés pour des systèmes flous TS. Deux exemples sont considérés de modèles TS à variables de prémisses mesurable et non mesurable. Des résultats de simulation ont permis de montrer que les observateurs à modes glissants d'ordre 2 réalisent une meilleure observation, avec une élimination du phénomène de réticence. Ce type d'observateurs sont utilisés, dans le chapitre suivant, pour estimer les variables d'état d'un pendule inversé rotatif réel.

Chapitre 4

Application à un procédé réel : le pendule inversé rotatif

4.1 Introduction

Ce chapitre traite le problème d'estimation d'état pour un système réel : le pendule inversé rotatif (RIP : Rotary Inverted Pendulum) ou le pendule de *Furuta*. Ce système mécanique est sous-actionné, instable et fortement non linéaire [19]. Il constitue un excellent support expérimental pour tester des lois de commande linéaire et non linéaire. Deux observateurs à modes glissants d'ordre 2 sont élaborés pour estimer les variables d'état du pendule. Le modèle dynamique du pendule est représenté par un modèle flou descripteur (TSD). Une stratégie de convergence étape par étape est réalisée sur différentes surfaces de glissement, assurant la convergence de l'erreur d'estimation en temps fini vers zéro.

4.2 Description du pendule inversé rotatif

Le pendule inversé rotatif est composé d'un bras actionné en rotation dans le plan horizontal, disposant à son extrémité un pendule inversé (tige) libre en rotation dans le plan vertical orthogonal au bras, lié l'un à l'autre par une liaison pivot au point O_1 [44].

Un moteur à courant continu entraîne la rotation autour de l'axe z du bras, de rayon r , et donc du pendule, de longueur l et de masse m , autour de l'axe x_1 (voir figure 4.1.(a) [20]). Ce système possède deux degrés de liberté : l'angle de rotation du bras du pendule par rapport à l'axe z , noté θ , et l'angle de rotation de la tige autour de l'axe x_1 , noté ϕ . Ces deux positions angulaires

sont mesurées avec des encodeurs.

Le bras du pendule doit être déplacé de manière à assurer la stabilisation et le maintien du

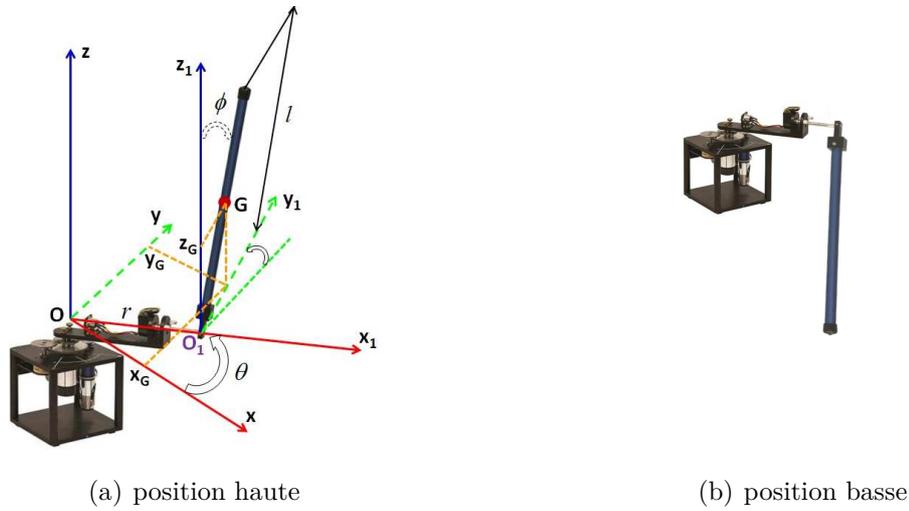


FIGURE 4.1 – Le pendule inversé rotatif de l'entreprise QUANSER.

pendule en position haute, autour de la verticale au point d'équilibre instable.

4.3 Modélisation du système

4.3.1 Modèle non linéaire

Pour déterminer un modèle du système, le formalisme de Lagrange est utilisé. L'énergie cinétique totale du pendule a pour expression :

$$E_c = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2 + \frac{ml^2}{4}\sin^2\phi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mlr\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi \quad (4.1)$$

En prenant Oxy comme plan de référence, l'énergie potentielle totale du pendule est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}mgl\cos\phi \quad (4.2)$$

Le Lagrangien est donné par $L = E_c - E_p$ et les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = -B_r\dot{\phi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_{out} - B_a\dot{\theta} \end{cases} \quad (4.3)$$

en conséquence les équations du mouvement du système non linéaire sont [20] :

$$\begin{cases} \frac{ml^2}{3}\ddot{\phi} + \frac{mlr}{2}\ddot{\theta}\cos\phi - \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi + B_r\dot{\phi} - \frac{mgl}{2}\sin\phi & = 0 \\ \frac{mlr}{2}\ddot{\phi}\cos\phi + (J_{eq} + mr^2 + \frac{ml^2}{4}\sin^2\phi)\ddot{\theta} - \frac{mlr}{2}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{ml^2}{2}\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi + B_a\dot{\theta} & = \tau_{out} \end{cases} \quad (4.4)$$

Le couple de sortie τ_{out} sur l'arbre de charge est :

$$\tau_{out} = \frac{\eta_m\eta_g K_t K_g}{R} V_m - \frac{\eta_m\eta_g K_t K_v K_g^2}{R} \dot{\theta} - \eta_g K_g^2 J_m \ddot{\theta} \quad (4.5)$$

où V_m est la tension de commande appliquée au moteur.

Les caractéristiques et les valeurs numériques des constantes du pendule inversé rotatif sont résumées dans la table 4.1.

TABLE 4.1 – Liste des paramètres du système [20].

| <i>Symbole</i> | <i>Description</i> | <i>Valeur</i> |
|----------------|--|--|
| m | Masse de la tige du pendule | 0.125 kg |
| l | Longueur de la tige du pendule | 0.335 m |
| r | Longueur du bras du pendule | 0.215 m |
| J_{eq} | Moment d'inertie équivalent du bras du pendule et du réducteur | $3.5842 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ |
| J_m | Moment d'inertie du rotor du moteur | $3.87 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$ |
| B_a | Coefficient de frottement du bras | $0.004 \text{ Nmsrad}^{-1}$ |
| B_r | Coefficient de frottement de la tige | $0.0095 \text{ Nmsrad}^{-1}$ |
| g | Pesanteur | 9.81 ms^{-2} |
| K_t | Constante du couple | $7.67 \times 10^{-3} \text{ NmA}^{-1}$ |
| K_v | Constante de la FCEM | $7.67 \times 10^{-3} \text{ Vsrad}^{-1}$ |
| R | Résistance du moteur | 2.6 Ω |
| K_g | Rapport de réduction | 70 |
| η_g | Rendement du réducteur | 0.9 |
| η_m | Rendement du moteur | 0.69 |

Ainsi, le modèle dynamique non linéaire du système RIP est le suivant [20] :

$$\begin{cases} \frac{4}{3}c_1\ddot{\phi} + c_2\ddot{\theta}\cos\phi - c_1\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi + c_3\dot{\phi} - c_4\sin\phi = 0 \\ c_2\ddot{\phi}\cos\phi + (c_5 + c_1\sin^2\phi)\ddot{\theta} - c_2\dot{\phi}^2\sin\phi + c_6\dot{\theta} + 2c_1\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi = c_7V_m \end{cases} \quad (4.6)$$

avec :

$$c_1 = \frac{ml^2}{4}, c_2 = \frac{mlr}{2}, c_3 = B_r, c_4 = \frac{mgl}{2}, c_5 = J_{eq} + mr^2 + \eta_g K_g^2 J_m$$

$$c_6 = B_a + \frac{\eta_m\eta_g K_t K_v K_g^2}{R}, c_7 = \frac{\eta_m\eta_g K_t K_g}{R}$$

4.3.2 Modèle flou descripteur TSD

Le modèle non linéaire (4.6) est écrit sous forme de descripteur régulier d'état comme suit :

$$\begin{cases} E(x)\dot{x}(t) = A(x)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

avec $x = [\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$ est le vecteur d'état, $u = V_m$ est l'entrée, $y = [\phi, \theta]^T$ est le vecteur de sorties mesurables du système et les matrices suivantes :

$$E(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c_1 & c_2 \cos \phi \\ 0 & 0 & c_2 \cos \phi & c_5 + c_1 \sin^2 \phi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_7 \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_4 \frac{\sin \phi}{\phi} & 0 & -c_3 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -c_6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $\alpha = c_1 \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi$ et $\beta = c_2 \dot{\phi} \sin \phi - 2c_1 \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi$.

Le modèle descripteur du système RIP (4.7) présente des termes non linéaires fonctions :

- de variables d'état mesurables, ϕ et θ : $\cos \phi$, $\sin^2 \phi$ et $\frac{\sin \phi}{\phi}$;
- de variables d'état non mesurables, $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}$: $\dot{\theta} \sin \phi \cos \phi$ et $\dot{\phi} \sin \phi$.

Considérons n_e et n_a le nombre de termes non linéaires contenus, respectivement, dans les matrices $E(x)$ et $A(x)$. Le modèle flou sera alors composé de $r_e \times r_a = 2^{n_e} \times 2^{n_a} = 32$ règles, avec $n_e = 2$ et $n_a = 3$.

Une manière de réduire ce nombre est déduite de l'utilisation du principe de séparation entre le calcul des gains de l'observateur et de la loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation) [69], où il est nécessaire que les variables de prémisses n'utilisent que des variables mesurables. Ce dernier a permis la mise en œuvre d'un modèle flou TSD composé de 8 règles. Ainsi, 3 termes non linéaires sont pris en compte et reportés dans la partie prémisses des règles du modèle flou.

Le vecteur de prémisses est alors : $z(t) = [z_1(t) z_2(t) z_3(t)]$, avec les variables de prémisses suivantes :

$$z_1(t) = c_2 \cos(\phi(t)), \quad z_2(t) = c_5 + c_1 \sin^2 \phi(t), \quad z_3(t) = c_4 \frac{\sin(\phi(t))}{\phi(t)} \quad (4.8)$$

Les non-linéarités α et β sont considérées comme des incertitudes bornées du modèle, avec : $|\phi| \leq \phi_0$, $|\dot{\theta}| \leq \dot{\theta}_0$ et $|\dot{\phi}| \leq \dot{\phi}_0$.

Remarque 4.1. En supposant la matrice $E(x)$ inversible, un modèle sous forme d'état standard du modèle (4.6) peut être obtenu comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}(x)x(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

avec : $\bar{A} = E^{-1}A$, $\bar{B} = E^{-1}B$

$$\bar{A}(x) = \frac{1}{4c_1c_5 - 3c_2^2\cos^2\phi + 4c_1^2\sin^2\phi} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3c_4\frac{\sin\phi}{\phi}(c_1\sin^2\phi + c_5) & 0 & (*)_1 & (*)_2 \\ -3c_2c_4\frac{\sin\phi}{\phi}\cos\phi & 0 & (*)_3 & (*)_4 \end{bmatrix}$$

où les $(*)_i$ représentent les termes suivants :

$$(*)_1 = -(3c_3(c_1\sin^2\phi + c_5)) - 3c_2\cos\phi(c_2\dot{\phi}\sin\phi - 2c_1\dot{\theta}\cos\phi\sin\phi)$$

$$(*)_2 = 3c_2c_6\cos\phi + 3c_1\dot{\theta}\cos\phi\sin\phi(c_1\sin^2\phi + c_5)$$

$$(*)_3 = 4c_1(c_2\dot{\phi}\sin\phi - 2c_1\dot{\theta}\cos\phi\sin\phi) + 3c_2c_3\cos\phi$$

$$(*)_4 = -4c_1c_6 - 3c_1c_2\dot{\theta}\cos^2\phi\sin\phi$$

$$\bar{B} = \frac{1}{4c_1c_5 - 3c_2^2\cos^2\phi + 4c_1^2\sin^2\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3c_2c_7\cos\phi \\ 4c_1c_7 \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état standard (4.9) contient 7 non-linéarités d'où un nombre de règles du modèle flou TS de $2^7 = 128$ règles. De plus, contrairement à la matrice B , la matrice \bar{B} est dépendante de l'état $x(t)$ ce qui peut conduire à un contrôleur plus complexe pour ce système. Pour ces raisons, il est bien noté que la représentation TS descripteur du pendule inversé rotatif a permis de réduire le nombre de règles du modèle flou ainsi que le conservatisme des contraintes LMIs [20].

En utilisant l'approche par transformation par secteurs non linéaires, le modèle descripteur TSD représentant exactement le modèle non linéaire simplifié du RIP s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_a} w_i(z(t)) (A_i x(t) + B u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

où $r_e = 4$, $r_a = 2$, et les fonctions de pondération non linéaires, $v_k(z(t))$ et $w_i(z(t))$, satisfont la propriété de somme convexe :

$$\begin{aligned} v_k(z(t)) &\geq 0, & \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t)) &= 1 \\ w_i(z(t)) &\geq 0, & \sum_{i=1}^{r_a} w_i(z(t)) &= 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Considérons \bar{z}_j (resp. \underline{z}_j) le maximum (resp. minimum) de z_j , sur un intervalle de l'angle $\phi \in [-\phi_0, \phi_0]$. Les variables de prémisses peuvent alors s'écrire de la manière suivante :

$$z_j(t) = M_{j1}(z_j(t)) \bar{z}_j + M_{j2}(z_j(t)) \underline{z}_j, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (4.12)$$

où les fonctions d'appartenance (voir figure 4.2) sont :

$$\begin{aligned} M_{j1}(z_j(t)) &= (z_j - \underline{z}_j) / (\bar{z}_j - \underline{z}_j) \\ M_{j2}(z_j(t)) &= (\bar{z}_j - z_j) / (\bar{z}_j - \underline{z}_j) \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec :

$$M_{j1}(z_j(t)) + M_{j2}(z_j(t)) = 1 \quad (4.14)$$

Ainsi, les matrices des sous-modèles sont données par :

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c_1 & \bar{z}_1 \\ 0 & 0 & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{bmatrix}, & E_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c_1 & \bar{z}_1 \\ 0 & 0 & \bar{z}_1 & \underline{z}_2 \end{bmatrix} \\ E_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c_1 & \underline{z}_1 \\ 0 & 0 & \underline{z}_1 & \bar{z}_2 \end{bmatrix}, & E_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c_1 & \underline{z}_1 \\ 0 & 0 & \underline{z}_1 & \underline{z}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

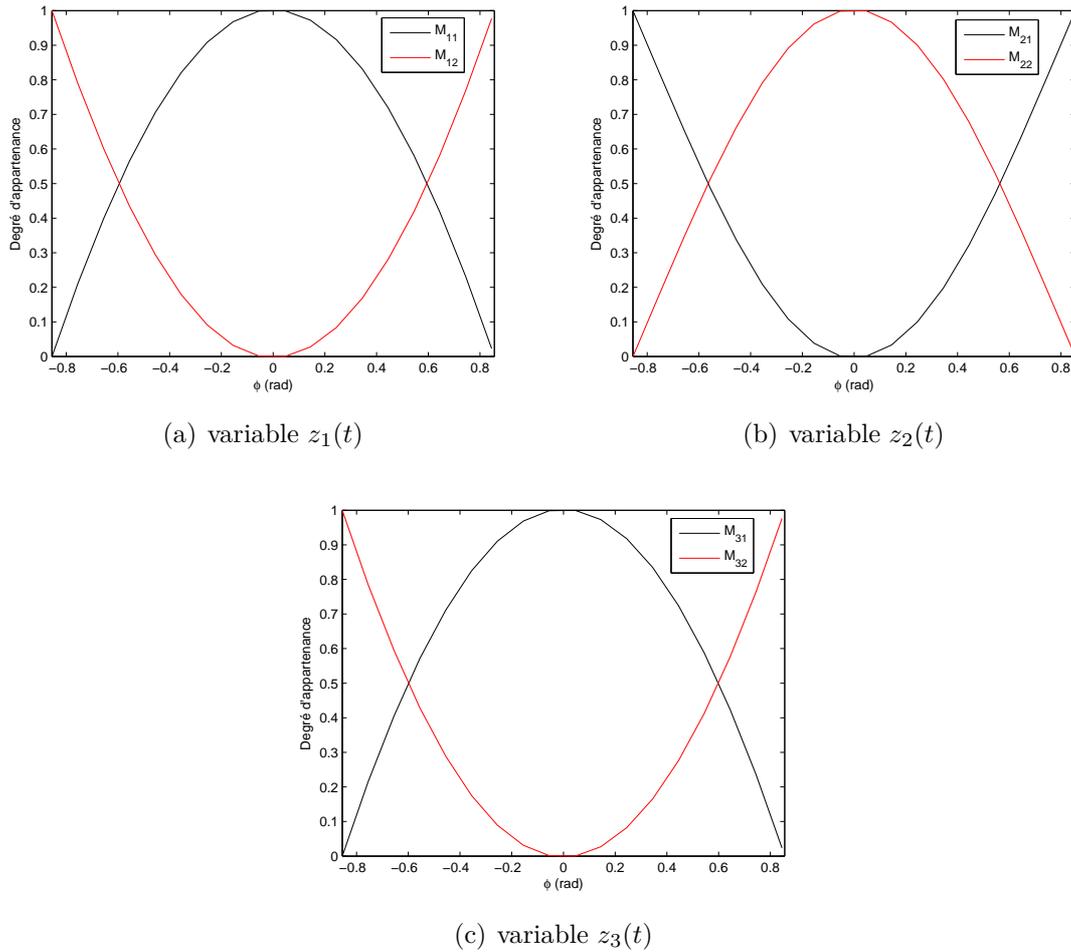


FIGURE 4.2 – Les fonctions d'appartenance du modèle flou TSD.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \overline{z_3} & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \underline{z_3} & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_6 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de pondération $v_k(z(t))$, $k \in \{1, \dots, 4\}$, et $w_i(z(t))$, $i \in \{1, 2\}$, sont choisies comme suit :

$$\begin{aligned} w_1(z) &= M_{31}(z_3), & w_2(z) &= M_{32}(z_3) \\ v_1(z) &= M_{11}(z_1)M_{21}(z_2), & v_2(z) &= M_{11}(z_1)M_{22}(z_2) \\ v_3(z) &= M_{12}(z_1)M_{21}(z_2), & v_4(z) &= M_{12}(z_1)M_{22}(z_2) \end{aligned}$$

Le modèle flou TSD obtenu est alors composé de 8 règles floues, données dans la table 4.2.

À titre d'exemple, une règle est de la forme :

Règle 1 :

Si $z_1(t)$ est M_{11} et $z_2(t)$ est M_{21} et $z_3(t)$ est M_{31}

$$\text{Alors } \begin{cases} E_1 \dot{x}(t) = A_1 x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

TABLE 4.2 – Règles du modèle flou TSD du système RIP.

| | <i>Fonctions d'appartenance</i> | | | <i>Matrices</i> |
|---------------|---------------------------------|---------------|---------------|-----------------|
| <i>Règles</i> | $M_{1j}(z_1)$ | $M_{2j}(z_2)$ | $M_{3j}(z_3)$ | E_k, A_i |
| 1 | M_{11} | M_{21} | M_{31} | E_1, A_1 |
| 2 | M_{11} | M_{21} | M_{32} | E_1, A_2 |
| 3 | M_{11} | M_{22} | M_{31} | E_2, A_1 |
| 4 | M_{11} | M_{22} | M_{32} | E_2, A_2 |
| 5 | M_{12} | M_{21} | M_{31} | E_3, A_1 |
| 6 | M_{12} | M_{21} | M_{32} | E_3, A_2 |
| 7 | M_{12} | M_{22} | M_{31} | E_4, A_1 |
| 8 | M_{12} | M_{22} | M_{32} | E_4, A_2 |

En choisissant $\phi_0 = \frac{49\pi}{180}$ (rad), les bornes des variables de prémisse (4.8) sont :

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 = 0.003, \quad \underline{z}_2 = 0.0111, \quad \underline{z}_3 = 0.1813 \\ \bar{z}_1 = 0.0045, \quad \bar{z}_2 = 0.0131, \quad \bar{z}_3 = 0.2054 \end{aligned} \quad (4.16)$$

et les valeurs des matrices du modèle flou TSD sont :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0047 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0.0045 & 0.0131 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0047 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0.0045 & 0.0111 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0047 & 0.003 \\ 0 & 0 & 0.003 & 0.0131 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0047 & 0.003 \\ 0 & 0 & 0.003 & 0.0111 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2054 & 0 & -0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0729 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1813 & 0 & -0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0729 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1282 \end{bmatrix}$$

4.4 Stabilisation du RIP

Dans la pratique, la commande du pendule inversé rotatif nécessite deux contrôleurs : un contrôleur pour la phase de balancement (*Swing up*, en anglais), et un second contrôleur pour la phase de stabilisation dans sa position d'équilibre instable. Le contrôle de balancement [7] permet d'amener le pendule de sa position d'équilibre stable vers une position haute dans la zone de validité du second contrôleur.

Dans notre cas, la stabilisation du RIP, en temps réel, dans sa position haute est assurée par un contrôleur robuste de type TS proposé dans [20], garantissant la stabilité du pendule malgré les incertitudes de modélisation et les perturbations externes du système. La zone de validité de ce contrôleur est considérée par : $|\phi| \leq \frac{49\pi}{180}$ (*rad*). La loi de commande floue est de type PDC (Parallel Distributed Compensation), et s'écrit [20] :

$$u(t) = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^2 w_i(z(t)) v_k(z(t)) K_{ik} x(t) \quad (4.17)$$

où $u(t)$ est le signal de commande et K_{ik} sont les gains de retour d'état.

Les matrices des gains de retour d'état K_{ik} , $i = 1, \dots, 2$ et $k = 1, \dots, 4$, sont issues de la synthèse

du contrôleur flou robuste, garantissant la stabilité de la boucle fermée [20] :

$$\begin{aligned}
K_{11} &= [26.8550 \quad 1.4142 \quad 3.8231 \quad 2.0844] \\
K_{12} &= [25.1416 \quad 1.4142 \quad 3.5734 \quad 2.0638] \\
K_{13} &= [41.6885 \quad 1.4142 \quad 6.0852 \quad 2.0945] \\
K_{14} &= [39.0849 \quad 1.4142 \quad 5.7014 \quad 2.0741] \\
K_{21} &= [24.9747 \quad 1.4142 \quad 3.7940 \quad 2.1137] \\
K_{22} &= [23.4523 \quad 1.4142 \quad 3.5580 \quad 2.0932] \\
K_{23} &= [38.7119 \quad 1.4142 \quad 6.0174 \quad 2.1233] \\
K_{24} &= [36.3931 \quad 1.4142 \quad 5.6539 \quad 2.1029]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.5 Simulation

Afin de tester la validité du modèle flou élaboré, on réalise une simulation en boucle fermée des deux modèles du RIP : modèle non linéaire et modèle flou TSD. Les modèles sont implémentés sous Matlab/Simulink. Les figures 4.3 et 4.4 montrent l'évolution des états du modèle non linéaire et ceux du modèle TSD, avec les conditions initiales suivantes sur l'état $x(0) = [30^\circ, 0^\circ, 0^\circ/s, 0^\circ/s]^T$. On remarque que le modèle flou descripteur élaboré représente exactement le modèle non linéaire.

4.6 Observateurs à modes glissants d'ordre 2 pour le système RIP

Le vecteur d'état du système RIP est : $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$. Les seules sorties mesurables ici sont les positions angulaires ϕ et θ alors que les vitesses angulaires $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}$ seront obtenues à l'aide des observateurs par modes glissants étape par étape d'ordre 2, permettant d'estimer l'état complet du système.

La conception d'un observateur pour le système RIP, représenté par (4.10), exige la propriété d'observabilité. Cette propriété se traduit par la capacité de reconstruire l'état $x = [\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$ à partir de l'entrée u et des sorties du système ϕ et θ . L'observabilité du modèle global (4.10) est garantie si tous les sous-systèmes sont observables. Les conditions suivantes sont vérifiées :

$$rang \begin{bmatrix} sE_k - A_i \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C} \tag{4.19}$$

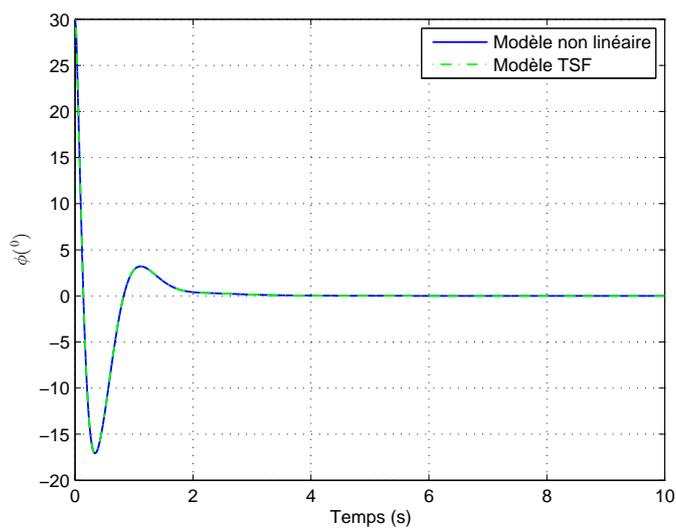
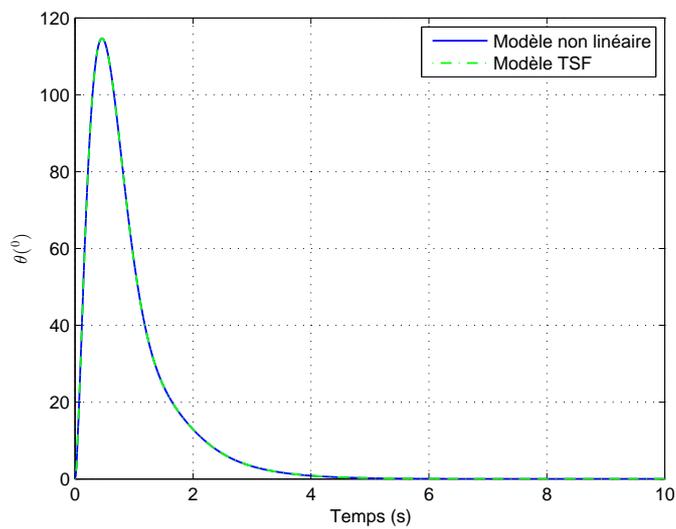
(a) ϕ (de la tige)(b) θ (du bras)

FIGURE 4.3 – Les angles du RIP.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E_k & A_i \\ 0 & E_k \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rang}(E_k) \quad (4.20)$$

pour $k = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, 2$ et $n = 4$.

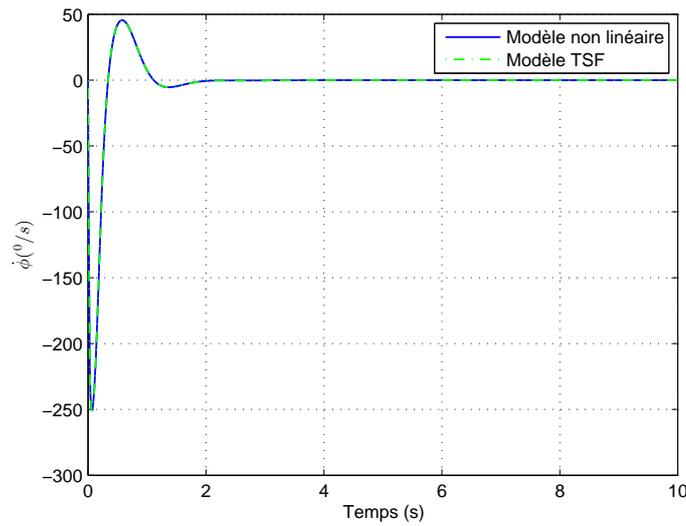
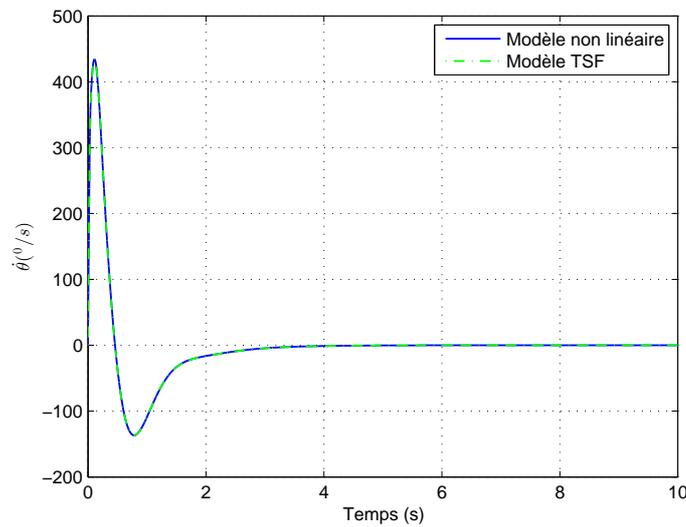
(a) $\dot{\phi}$ (de la tige)(b) $\dot{\theta}$ (du bras)

FIGURE 4.4 – Les vitesses angulaires du RIP.

4.6.1 Synthèse d'observateurs étape par étape d'ordre 2

Pour construire un observateur à modes glissants étape par étape, le modèle du système RIP (4.10) est réécrit en deux sous-systèmes de forme triangulaire d'observation comme suit :

$$\Sigma_1 \equiv \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{3}{4c_1}(cx_1 - a\dot{x}_4 - c_3x_3) = f_1(t, x) \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\Sigma_2 \equiv \begin{cases} \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{b}(c_7 u - c_6 x_4 - a \dot{x}_3) = f_2(t, x, u) \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (4.22)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= (v_1(z) + v_2(z))\overline{z_1} + (v_3(z) + v_4(z))\underline{z_1} \\ b &= (v_1(z) + v_3(z))\overline{z_2} + (v_2(z) + v_4(z))\underline{z_2} \\ c &= w_1(z)\overline{z_3} + w_2(z)\underline{z_3} \end{aligned}$$

Supposons que le système est à entrée bornée et état borné (EBEB), alors il existe des constantes K_1, \dots, K_4 telle que, $\forall t > 0$,

$$|f_1| < K_1, \quad |\dot{f}_1| < K_2 \quad |f_2| < K_3, \quad |\dot{f}_2| < K_4 \quad (4.23)$$

En appliquant l'algorithme du super-twisting (3.9), l'observateur sous forme triangulaire associé à chaque sous-système (4.21)-(4.22) s'écrit :

$$\Sigma_{obs1} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_3 + \lambda_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \tilde{\theta}_1 + F_1 \lambda_2 |\tilde{x}_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{\theta}}_1 = F_1 \alpha_2 \text{sign}(\tilde{x}_3 - \hat{x}_3) \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\Sigma_{obs2} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = \tilde{x}_4 + \lambda_3 |x_2 - \hat{x}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_4 = \alpha_3 \text{sign}(x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_4 = \tilde{\theta}_2 + F_2 \lambda_4 |\tilde{x}_4 - \hat{x}_4|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = F_2 \alpha_4 \text{sign}(\tilde{x}_4 - \hat{x}_4) \end{cases} \quad (4.25)$$

où \hat{x} est l'état estimé, les λ_i et α_i sont les gains d'observation et les fonctions F_i sont données par :

$$F_i = 1 \text{ si } |e_j| = |\tilde{x}_j - \hat{x}_j| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } j \leq i \text{ sinon } F_i = 0$$

avec ε est une constante positive petite.

4.6.2 Analyse de convergence

Soit l'erreur d'observation intermédiaire définie par $e_i = \tilde{x}_i - \hat{x}_i$ pour $i = 1, \dots, 4$, avec $\tilde{x}_1 = x_1$ et $\tilde{x}_2 = x_2$.

Lemme 4.6.1. *Considérons le système (4.21) et l'observateur associé (4.24). Pour toutes*

conditions $(x_1(0), x_3(0))$, $(\hat{x}_1(0), \hat{x}_3(0))$, il existe un choix de λ_i et α_i tel que l'état de l'observateur (\hat{x}_1, \hat{x}_3) converge en un temps fini vers l'état (x_1, x_3) du système et $\tilde{\theta}_1$ converge aussi en temps fini vers $f_1(t, x)$.

Preuve. La stratégie de convergence de l'observateur est réalisée étape par étape sur différentes surfaces de glissement. La convergence de l'erreur d'observation vers zéro est obtenue en temps fini.

- **Etape 1** : Supposons que $e_1(0) \neq 0$, la dynamique de l'erreur d'observation, obtenue en soustrayant Σ_{obs1} à Σ_1 , est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = x_3 - \tilde{x}_3 - \lambda_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_3 = f_1 - \tilde{\theta}_1 - F_1 \lambda_2 |e_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_3) \end{cases} \quad (4.26)$$

La dérivée seconde de e_1 par rapport au temps est donnée par :

$$\ddot{e}_1 = f_1 - \alpha_1 \text{sign}(e_1) - \frac{1}{2} \lambda_1 \dot{e}_1 |e_1|^{-\frac{1}{2}} \quad (4.27)$$

Les conditions suffisantes garantissant la convergence de l'état en temps fini sur l'ensemble de glissement d'ordre deux $\{e_1 = \dot{e}_1 = 0\}$, sont [29] :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> K_1 \\ \lambda_1 &> \sqrt{2} \frac{K_1 + \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1 - K_1}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ainsi, la surface de glissement $e_1 = 0$ est atteinte après un temps fini t_1 ce qui fait que $\dot{e}_1 = 0$ impliquant $\tilde{x}_3 = x_3$.

Alors, après cet instant, on obtient :

$$\hat{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_3 = x_3$$

- **Etape 2** : Pour $t > t_1$, $F_1 = 1$ et la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_3 = f_1 - \tilde{\theta}_1 - \lambda_2 |e_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_3) \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 = \alpha_2 \text{sign}(e_3) \end{cases} \quad (4.29)$$

La dérivée seconde de e_3 par rapport au temps est :

$$\ddot{e}_3 = \dot{f}_1 - \alpha_2 \text{sign}(e_3) - \frac{1}{2} \lambda_2 \dot{e}_3 |e_3|^{-\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

En choisissant les conditions suffisantes de convergence suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &> K_2 \\ \lambda_2 &> \sqrt{2} \frac{K_2 + \alpha_2}{\sqrt{\alpha_2 - K_2}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

on obtient alors la convergence en un temps fini $t_2 > t_1$ sur la surface de glissement $e_3 = \dot{e}_3 = 0$.

Ainsi, $\forall t > t_2$:

$$\hat{x}_3 = \tilde{x}_3, \quad \hat{f}_1(\tilde{x}) = \tilde{\theta}_1$$

où $\tilde{\theta}_1$ est l'estimation de $f_1(x)$. □

Lemme 4.6.2. *Considérons le système (4.22) et l'observateur associé (4.25). Pour toutes conditions $(x_2(0), x_4(0))$, $(\hat{x}_2(0), \hat{x}_4(0))$, il existe un choix de λ_i et α_i tel que l'état de l'observateur (\hat{x}_2, \hat{x}_4) converge en un temps fini vers l'état (x_2, x_4) du système.*

Preuve. En suivant la même procédure d'analyse de convergence de l'observateur (4.24), on montre la convergence de l'erreur d'observation, e_2 et e_4 , en temps fini vers zéro. Les conditions suffisantes de convergence sont choisies :

$$\begin{aligned} \alpha_3 &> K_3 \\ \lambda_3 &> \sqrt{2} \frac{K_3 + \alpha_3}{\sqrt{\alpha_3 - K_3}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &> K_4 \\ \lambda_4 &> \sqrt{2} \frac{K_4 + \alpha_4}{\sqrt{\alpha_4 - K_4}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ainsi, après un temps fini t_4 , l'état atteint les surfaces de glissement et sur ces surfaces, nous avons : $e_2 = \dot{e}_2 = 0$ d'où : $\hat{x}_2 = x_2$, $\tilde{x}_4 = x_4$, et $e_4 = \dot{e}_4 = 0$ d'où : $\hat{x}_4 = \tilde{x}_4$, $\hat{f}_2(\tilde{x}) = \tilde{\theta}_2$. □

4.7 Résultats de simulation

On considère les conditions initiales suivantes : $x(0) = [-180^\circ, 0^\circ, 0^\circ/s, 0^\circ/s]^T$ pour le système et $\hat{x}(0) = [0^\circ, 0^\circ, 0^\circ/s, 0^\circ/s]^T$ pour les observateurs. La figure 4.5 donne les erreurs d'observation $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ et $e_3 = \tilde{x}_3 - \hat{x}_3$ de l'observateur (4.24) et $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$ et $e_4 = \tilde{x}_4 - \hat{x}_4$ de l'observateur (4.25).

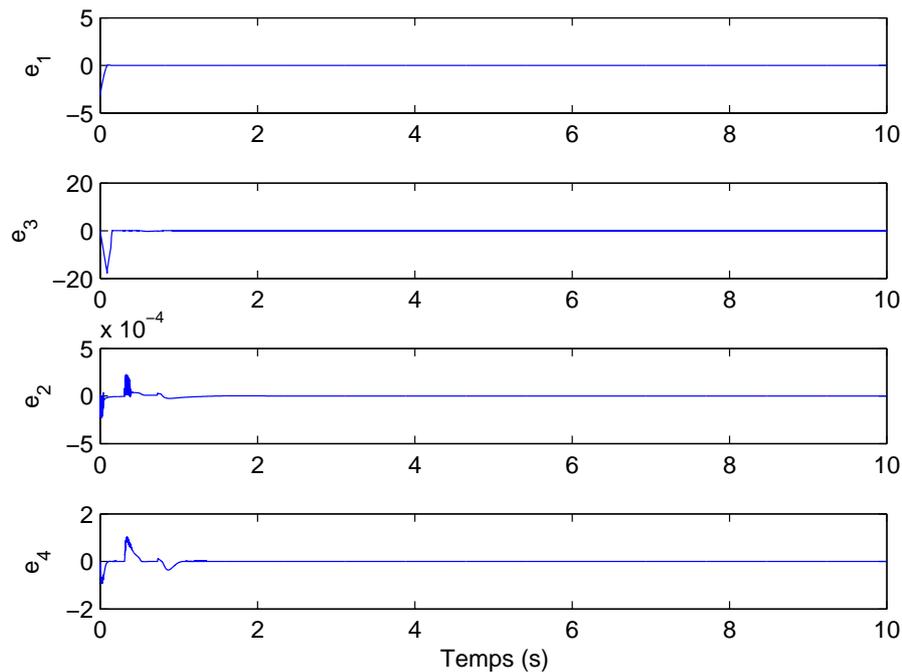


FIGURE 4.5 – Évolution de l'erreur d'estimation d'état

Les figures 4.6 et 4.7 illustrent les résultats de l'estimation d'état. Les performances des observateurs proposés peuvent être analysées à travers ces résultats. Une convergence rapide des états des observateurs vers ceux du système est obtenue.

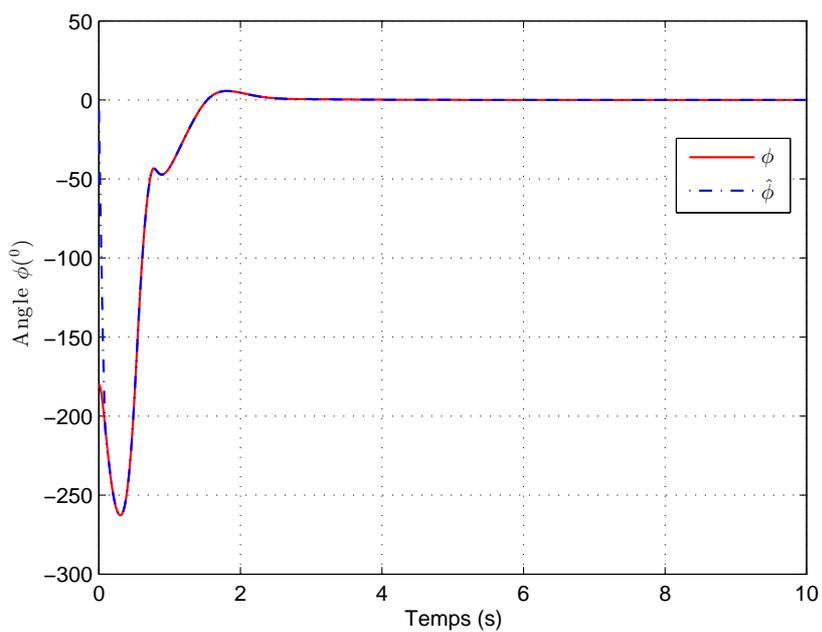
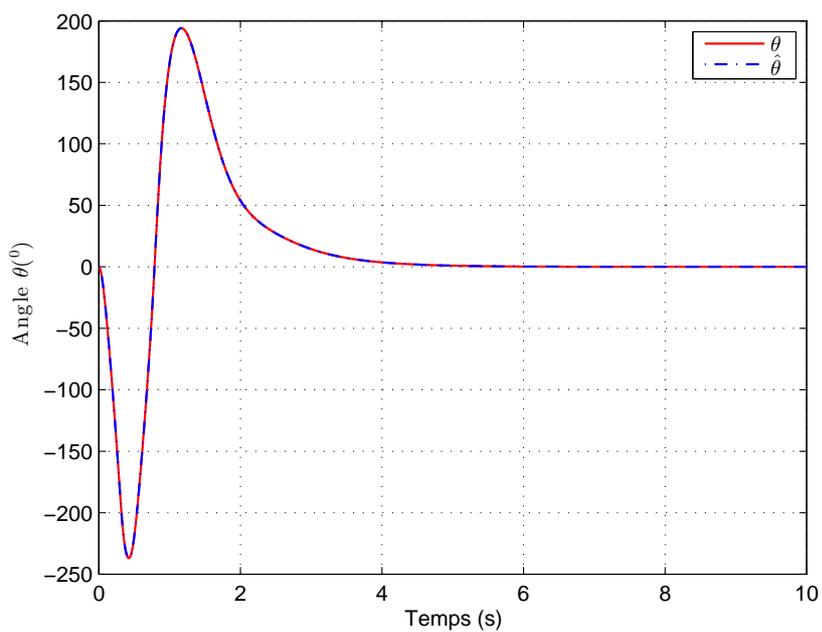
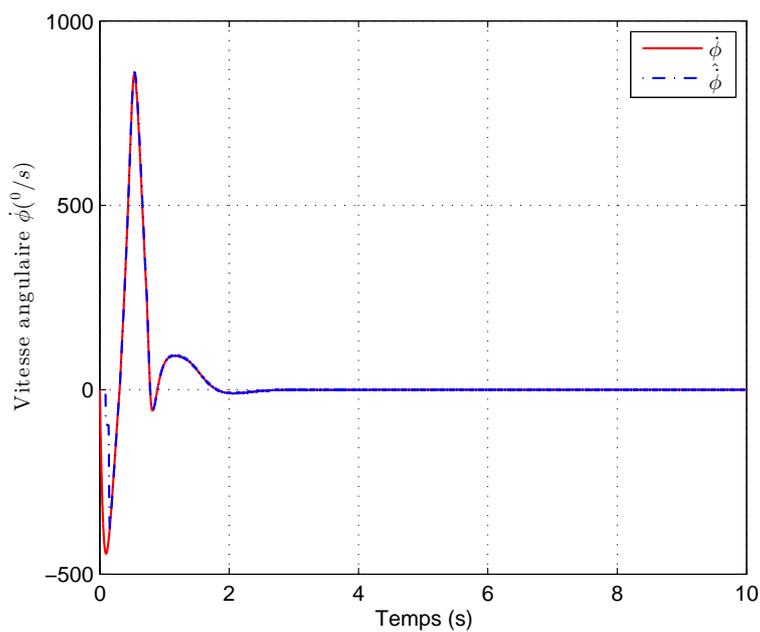
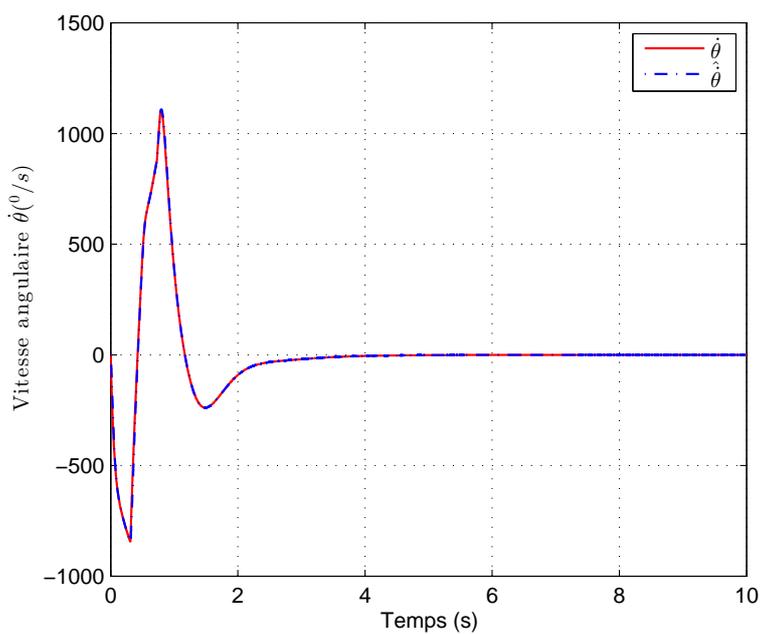
(a) ϕ et $\hat{\phi}$ (b) θ et $\hat{\theta}$

FIGURE 4.6 – Estimation des positions angulaires du RIP.



(a) $\dot{\phi}$ et $\hat{\dot{\phi}}$



(b) $\dot{\theta}$ et $\hat{\dot{\theta}}$

FIGURE 4.7 – Estimation des vitesses angulaires du RIP.

4.8 Résultats expérimentaux

Le dispositif expérimental du pendule inversé rotatif, présenté dans la figure 4.8, comporte le pendule inversé rotatif de l'entreprise QUANSER, un amplificateur de tension VoltPAQ-X2 et un PC avec deux cartes d'acquisition Measurement Computing : la carte PCI-QUAD04 à quatre canaux pour l'acquisition des données fournies par l'encodeur et la carte PCI-DAS6025.

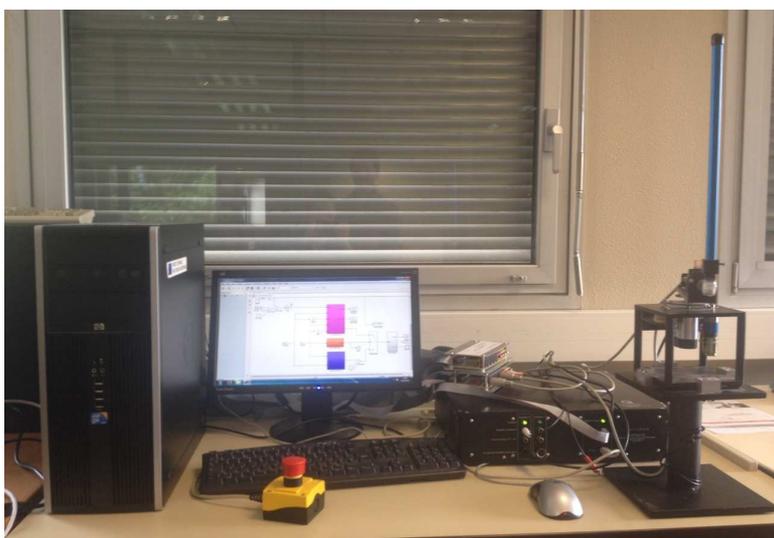


FIGURE 4.8 – Photo du banc d'essai de l'expérimentation.

Les développements du contrôleur en temps réel et des observateurs du système RIP sont réalisés à l'aide du logiciel Matlab/Simulink. Pour le contrôleur implémenté, les vitesses angulaires $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}$ n'étant pas mesurables, un dérivateur passe-bas $\frac{200s}{s+200}$ est utilisé pour reconstruire la vitesse à partir de la position mesurée.

Pour les essais effectués en temps réel sur le pendule inversé rotatif, les observateurs proposés (4.24) et (4.25) sont utilisés, avec les gains d'observation suivants : $\lambda_1 = 40$, $\alpha_1 = 1500$, $\lambda_2 = 200$, $\alpha_2 = 3000$, $\lambda_3 = 40$, $\alpha_3 = 1500$, $\lambda_4 = 200$ et $\alpha_4 = 3000$. Ces paramètres ont été choisis afin de vérifier les conditions de convergence des deux observateurs (4.28), (4.31), (4.32) et (4.33). L'état initial du RIP est sa position d'équilibre stable et celui des observateurs est $\hat{x}(0) = [-180^\circ, 0^\circ, 0^\circ/s, 0^\circ/s]^T$.

Les résultats expérimentaux obtenus d'un premier essai sur le système RIP montrent les bonnes performances d'estimation d'état des deux observateurs élaborés. Une convergence rapide en temps fini des états des observateurs vers ceux du système est constatée.

La figure 4.9 montre la convergence des positions estimées θ_{est} , ϕ_{est} vers les positions mesurées réelles θ_{mes} , ϕ_{mes} , respectivement. Les vitesses estimées $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ sont présentées sur la figure 4.10.

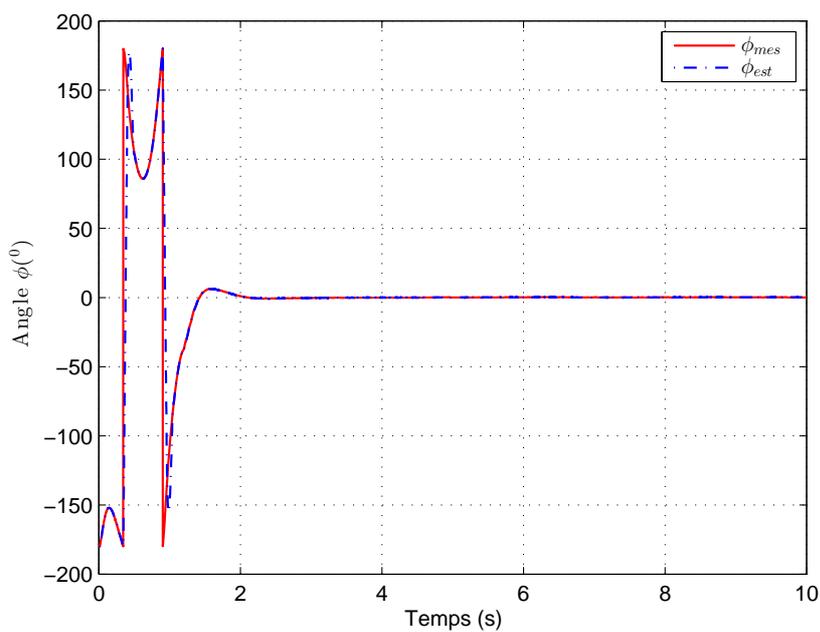
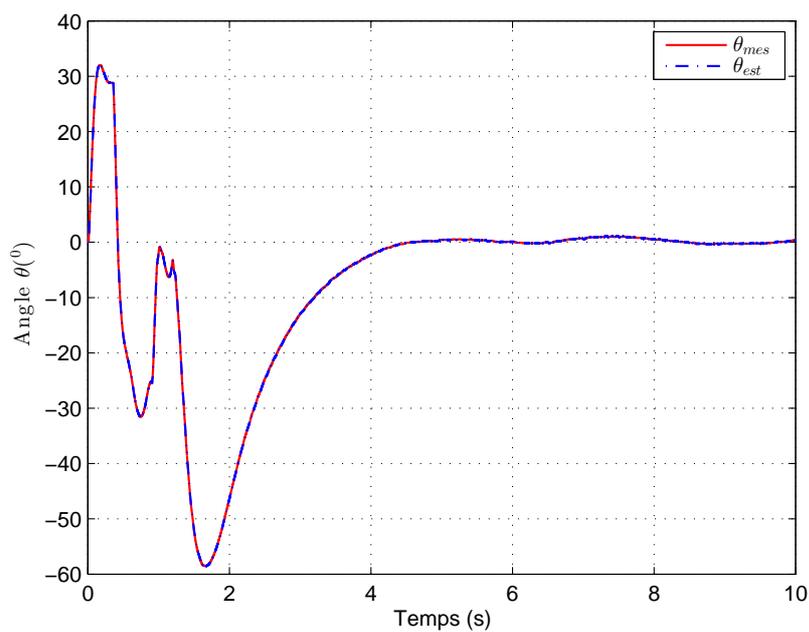
(a) ϕ et son estimé $\hat{\phi}$ (b) θ et son estimé $\hat{\theta}$

FIGURE 4.9 – Les angles du RIP et leurs estimés.

Un deuxième essai est effectué sur le système réel. Les résultats d'estimation de l'état du système sont présentés sur les figures 4.11 et 4.12. L'efficacité et la robustesse de la loi de commande peuvent être analysées à travers ces résultats qui montrent une bonne stabilisation

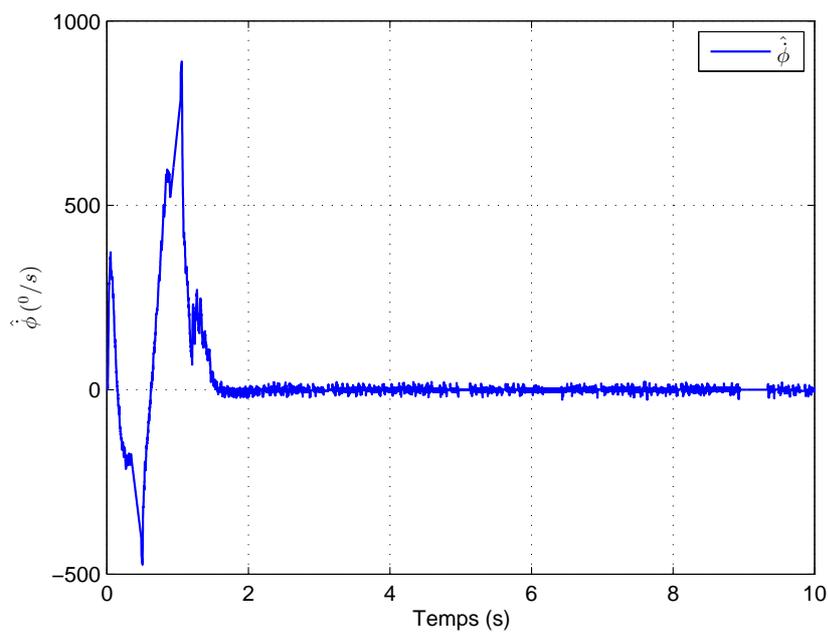
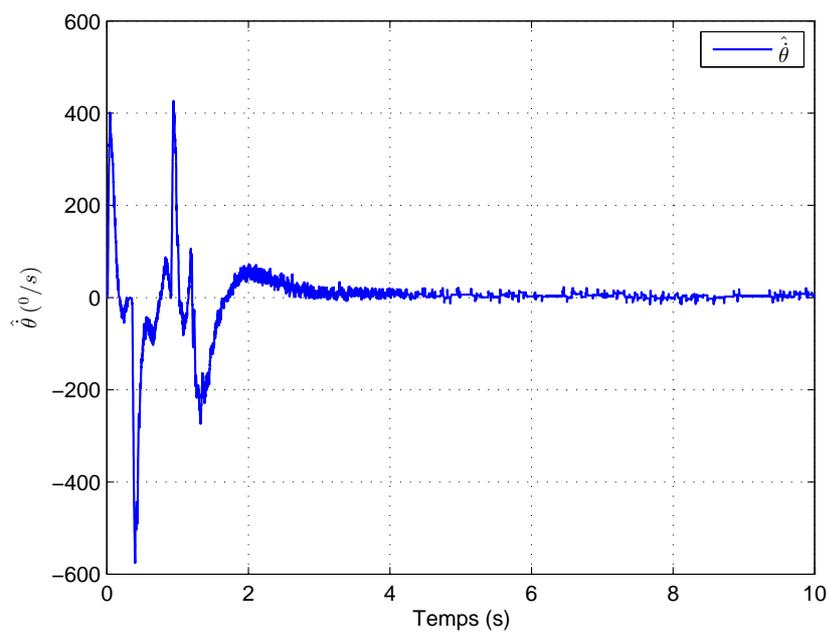
(a) $\hat{\dot{\phi}}$ estimé(b) $\hat{\dot{\theta}}$ estimé

FIGURE 4.10 – Les estimés des vitesses angulaires du RIP.

du système RIP réel dans sa position d'équilibre instable en dépit des perturbations extérieures appliquées au pendule aux instants 14.4s, 23s, 34.6s et 42.5s.

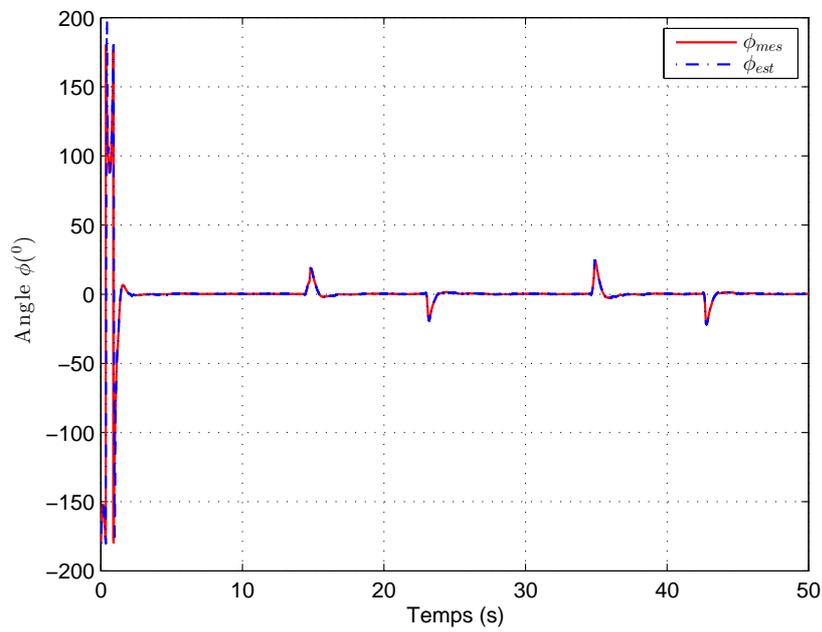
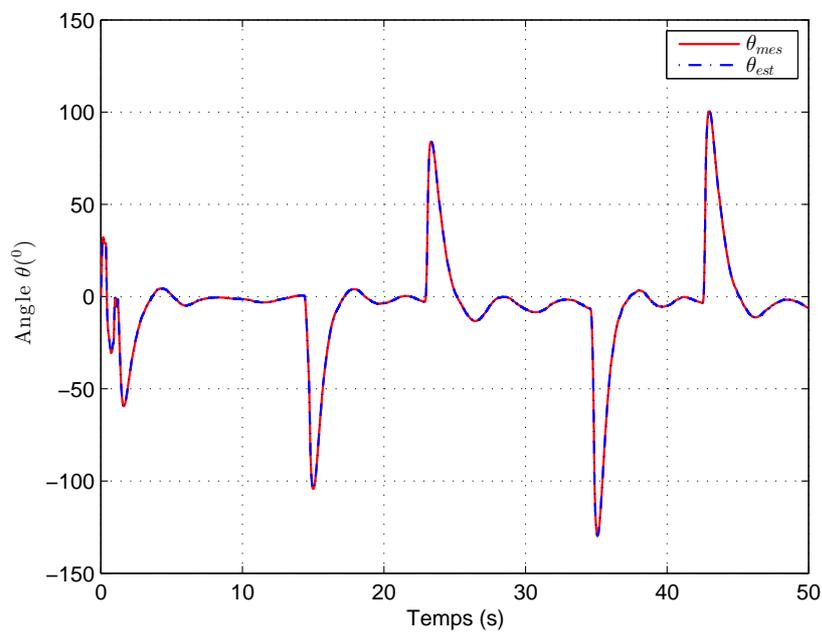
(a) ϕ et son estimé $\hat{\phi}$ (b) θ et son estimé $\hat{\theta}$

FIGURE 4.11 – Les angles du RIP et leurs estimés.

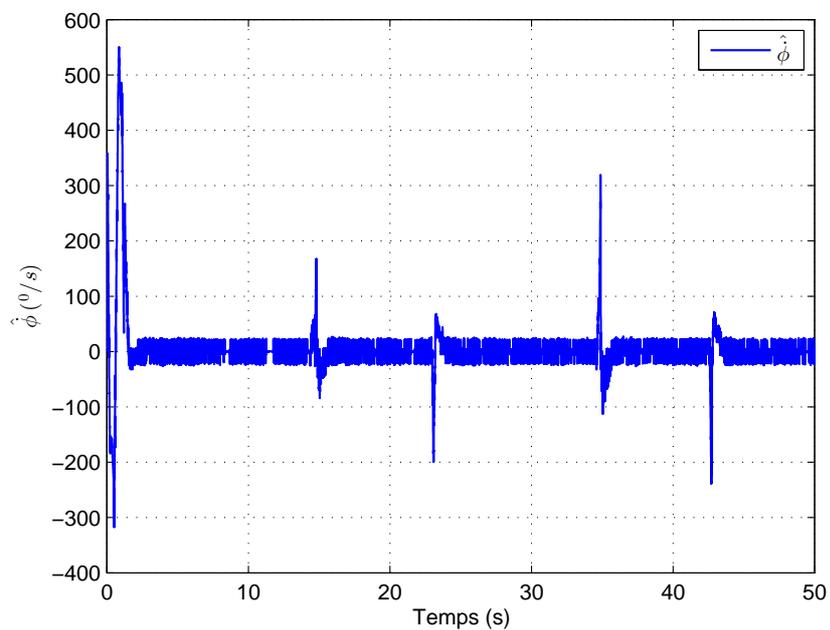
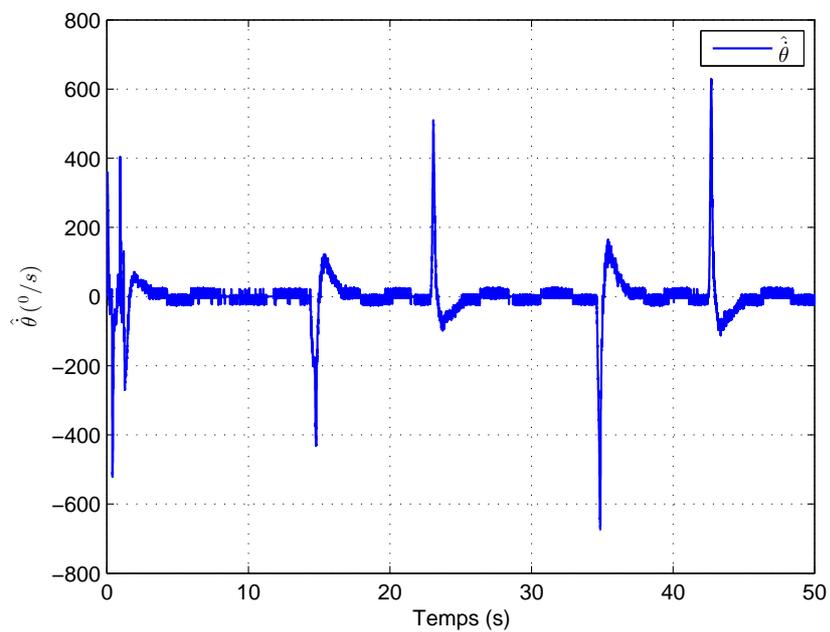
(a) $\hat{\dot{\phi}}$ estimé(b) $\hat{\dot{\theta}}$ estimé

FIGURE 4.12 – Les estimés des vitesses angulaires du RIP.

4.9 Conclusion

Ce quatrième chapitre a permis de présenter une application de la technique d'estimation proposée sur un pendule inversé rotatif réel. Après une modélisation basée sur les équations dynamiques, un modèle flou descripteur a été obtenu, permettant de réduire le nombre de règles à 8 règles. Ce dernier est utilisé pour la conception de deux observateurs à modes glissants d'ordre 2, pour l'estimation des variables d'état du pendule. Les essais menés sur le système réel sont concluants et les résultats obtenus permettent de valider les bonnes propriétés de ces observateurs : convergence en temps fini et précision de convergence.

Chapitre 5

Application à l'estimation de défauts des systèmes TS

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est le diagnostic de défauts des systèmes TS, par des observateurs étape par étape à modes glissants d'ordre deux. L'extension des résultats obtenus au chapitre 3 au problème d'estimation des défauts de capteurs et d'actionneurs est considérée. L'approche d'estimation proposée se base sur deux bancs d'observateurs à modes glissants d'ordre deux. Chacun de ces bancs est élaboré séparément, en supposant qu'un seul type de défauts pouvant affecter le système. Le schéma d'estimation proposé permet la détection, la localisation des défauts ainsi la reconstruction de leurs évolutions au cours du temps. L'avantage de cette approche réside dans sa simplicité de mise en œuvre permettant une reconstruction rapide et précise des défauts.

La reconstruction des entrées inconnues, e.g perturbation et incertitudes paramétriques, est aussi abordée dans ce chapitre. Deux exemples de simulation sont considérés afin d'en présenter les performances, le premier est un système hydraulique à 2 cuves, représenté par un modèle TS obtenu par linéarisation autour de deux points de fonctionnement, dans le deuxième, un modèle TS exact est proposé pour représenter un système à 3 cuves, utilisant l'approche par transformation par secteurs non linéaires.

5.2 Différents types de défauts

Un défaut est une déviation non acceptable d'au moins une caractéristique d'un système par rapport à sa valeur nominale. Les défauts sont des événements qui peuvent apparaître au niveau des capteurs, des actionneurs et au niveau du système [43][62]. Ils peuvent être classés en défauts additifs et défauts multiplicatifs.

- **Défauts d'actionneurs** : Les défauts d'actionneurs représentent une perte totale (défaillance) ou partielle d'un actionneur agissant sur le système conduisant à la perte d'une action de commande sur le système. Un exemple de perte totale d'un actionneur est un actionneur qui est resté "collé" sur une position entraînant une incapacité à commander le système par le biais de cet actionneur. Les défauts actionneurs partiels sont des actionneurs réagissant de manière similaire au régime nominal mais en partie seulement, c'est-à-dire avec une certaine dégradation (baisse d'efficacité) dans leur action sur le système (perte de puissance d'un moteur, fuite dans un vérin, ...). De tels défauts entraînent un fonctionnement dégradé du système et peuvent même conduire à l'instabilité de ce dernier.
- **Défauts de capteurs** : Ce type de défaut est la cause d'une erreur dans la mesure d'une grandeur physique, qui peut être partiel ou total. Un défaut partiel apparaît sous forme d'un biais, d'une dérive, d'une baisse d'efficacité, d'un défaut de calibrage... La perte totale d'un capteur (blocage) est due, par exemple, à une perte de connexion physique (électrique par exemple) entre la source d'information et le capteur ou un dysfonctionnement du capteur (usure mécanique, problème logiciel, etc.).
- **Défauts systèmes** : les défauts de système sont tous ceux qui affectent les composants du système hors actionneurs et capteurs. Ils reflètent un changement dans les paramètres du système, par exemple, la masse, les coefficients aérodynamiques, etc. Ce type de défaut est difficile à diagnostiquer à cause de la diversité des situations de défaillances.

5.3 Principe de l'approche d'estimation de défauts

Rappelons que les observateurs triangulaires à modes glissants d'ordre 2, présentés dans le chapitre 3, permettent une estimation des variables d'état en temps fini, en garantissant une convergence rapide avec une meilleure précision par rapport au mode glissant d'ordre un. La convergence de l'erreur d'observation est obtenue en $(n - 1)$ étapes et en temps fini. Les $(n - 1)$ premières étapes permettent de reconstruire le vecteur d'état et la $n^{\text{ième}}$ étape fournit

une estimation d'une fonction $\tilde{\theta}$, qui peut être fonction des défauts et des entrées inconnues (§3.2.3.3).

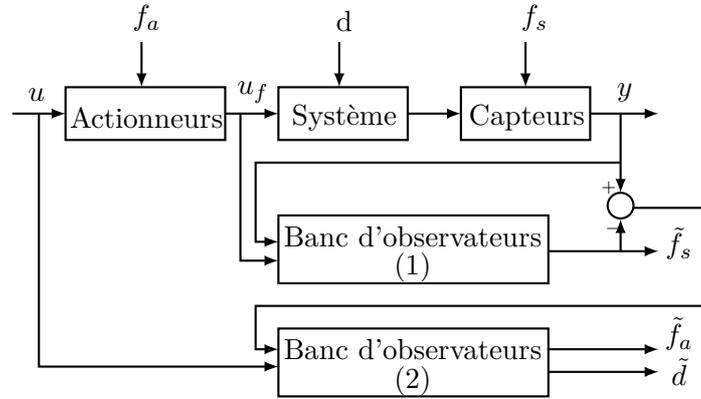


FIGURE 5.1 – Schéma d'estimation de défauts

L'idée proposée, dans ce chapitre, consiste à exploiter cette caractéristique pour estimer les défauts de capteurs f_s , les défauts d'actionneurs f_a et les entrées inconnues d , affectant un système TS. L'approche de l'estimation est illustrée par le schéma de la figure 5.1. Elle utilise deux bancs d'observateurs à modes glissants d'ordre 2 pour l'estimation des défauts. Le banc d'observateurs (1) fournit une estimation des défauts de capteurs \tilde{f}_s à partir du vecteur de mesure y et de la commande u_f appliquée au système. L'estimation \tilde{f}_s ainsi réalisée peut servir ensuite à l'estimation des défauts d'actionneurs. Le banc d'observateurs (2) utilise les entrées $(y - \tilde{f}_s)$ et la commande nominale conçue pour le système sans défaut u , afin d'estimer les défauts affectant les actionneurs du système \tilde{f}_a et les entrées inconnues \tilde{d} . La synthèse de chaque banc d'observateurs est effectuée séparément, en considérant que les défauts d'actionneurs et de capteurs ne surviennent pas simultanément.

Soit le modèle d'un système TS, donné par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état, sortie mesurée et d'entrée connue, respectivement. Les fonctions d'activation $w_i(\xi(t))$ vérifient la propriété de somme convexe (2.5).

Hypothèse 1. Tout au long de ce chapitre, on considère que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Le système (5.1) est stable EBSB (pour des entrées bornées, les sorties du système sont

bornées).

- Les paires (A_i, C) , $i = 1 \dots, r$, sont observables.
- Les défauts de capteurs sont bornés et constants.
- Les défauts d'actionneurs sont bornés.
- Les entrées inconnues (perturbations, incertitudes) sont bornées.

5.4 Estimation de défauts de capteurs

On considère un système TS (5.1) affecté par des défauts de capteurs, de types additifs, de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + f_s(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

où $f_s(t) \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur de défauts de capteurs, affectant la sortie du système et supposé constant, i.e. $\dot{f}_s(t) = 0$.

5.4.1 Synthèse du banc d'observateurs (1)

En supposant que toutes les variables d'état sont mesurables ($C = I_n$), le système (5.2) peut être écrit en n sous-systèmes, comme suit :

$$\Sigma_k \equiv \begin{cases} \dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j \\ y_k = x_k + f_{sk} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

avec f_{sk} est le défaut de capteur affectant la sortie y_k , et

$$\sum_{i=1}^r w_i(\xi) A_i = (a_{ij})_{j=1, n}^{i=1, n}, \quad \sum_{i=1}^r w_i(\xi) B_i = (b_{ij})_{j=1, m}^{i=1, n}$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$v_k = y_k = x_k + f_{sk}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

les sous-systèmes (5.3) sont mis sous une forme triangulaire observable, comme suit :

$$\Sigma_k \equiv \begin{cases} v_k = y_k \\ \dot{v}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j - \sum_{j=1}^n a_{kj} f_{sj} + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j \\ = h_k(v, u, f_s), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5.5)$$

En appliquant le différentiateur robuste (3.9) à chaque sous-système (5.5), un banc de n observateurs à modes glissants d'ordre 2, (Σ_{obs_k}) , $k = 1, 2, \dots, n$, est élaboré :

$$\Sigma_{obs_k} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{v}}_k = \tilde{\theta}_k + \lambda_k |e_k|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_k) \\ \dot{\tilde{\theta}}_k = \alpha_k \text{sign}(e_k) \\ v_k = y_k \end{cases} \quad (5.6)$$

avec $e_k = \tilde{v}_k - \hat{v}_k$ et $\tilde{v}_k = v_k$. L'analyse de convergence de chaque observateur Σ_{obs_k} est obtenue en temps fini, selon l'analyse donnée en §3.2.3.3. Pour tout état initial $v(0)$, $\hat{v}(0)$, il existe un choix de λ_k et α_k tel que l'état initial de l'observateur \hat{v}_k converge en temps fini vers l'état v_k du système. La convergence de l'erreur d'observation se fait en une étape et les gains d'observation, assurant la convergence de l'erreur vers zéro en temps fini, sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_k &> K_k \\ \lambda_k &> \sqrt{2} \frac{K_k + \alpha_k}{\sqrt{\alpha_k - K_k}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec $|\dot{h}_k| < K_k$.

Un régime glissant existe sur la surface $\{e_k = \dot{e}_k = 0\}$ après un temps fini t_k , et par conséquent, l'estimation $\tilde{\theta}_k$, de la fonction $h_k(v, u, f_s)$, est obtenue :

$$\tilde{\theta}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j - \sum_{j=1}^n a_{kj} \tilde{f}_{sj} + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j \quad (5.8)$$

Chaque observateur, Σ_{obs_k} , fournit une estimation $\tilde{\theta}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ainsi, après un temps fini de convergence, $T_1 = \sum_{k=1}^n t_k$, on obtient :

$$\tilde{\theta}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j - \sum_{j=1}^n a_{kj} \tilde{f}_{sj} + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

L'équation (5.9) peut être écrite sous forme matricielle, comme suit :

$$\tilde{\theta}(t) = \bar{A}v(t) - \bar{A}\tilde{f}_s(t) + \bar{B}u(t) \quad (5.10)$$

où :

$$\bar{A} = (a_{ij})_{j=1,n}^{i=1,n}, \bar{B} = (b_{ij})_{j=1,m}^{i=1,n}, \tilde{\theta}(t) = \left(\tilde{\theta}_k \right)_{k=1,n}^T, v(t) = (v_j)_{j=1,n}^T$$

Cependant, si la matrice \bar{A} est non singulière alors l'estimé du vecteur d'état est obtenu par :

$$\tilde{f}_s(t) = \bar{A}^{-1}(\bar{A}v(t) + \bar{B}u(t) - \tilde{\theta}(t)) \quad (5.11)$$

Ainsi, l'estimation des composantes du vecteur $f_s(t)$ permet :

- la détection et la localisation du défaut : $\tilde{f}_{sk} \neq 0$ correspond à la présence d'un défaut sur le $k^{\text{ième}}$ capteur ; dans le cas d'absence de défaut, \tilde{f}_{sk} est nul ;
- l'estimation de l'amplitude du défaut à chaque instant.

5.5 Estimation de défauts d'actionneurs

En présence de défauts affectant les actionneurs, le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i(u(t) + f_a(t))) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.12)$$

où $f_a(t) \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de défauts d'actionneurs, supposé borné et $C = I_n$. Une analyse similaire, à celle présentée dans le cas d'estimation de défauts de capteurs, permet l'estimation de défauts d'actionneurs. Un banc d'observateurs à modes glissants d'ordre 2 est élaboré pour l'estimation des défauts.

5.5.1 Synthèse du banc d'observateurs (2)

Le système (5.12) peut être écrit sous forme de sous-systèmes suivants :

$$\Sigma_k \equiv \begin{cases} \dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + \sum_{j=1}^m b_{kj}u_j + \sum_{j=1}^m b_{kj}f_{a_j} \\ \quad = h_k(x, u, f_a) \\ y_k = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5.13)$$

Pour chaque sous-système Σ_k , un observateur à modes glissants d'ordre 2 est élaboré, de la forme suivante :

$$\Sigma_{obs_k} \equiv \begin{cases} \dot{\hat{x}}_k = \tilde{\theta}_k + \lambda_k |x_k - \hat{x}_k|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_k - \hat{x}_k) \\ \dot{\tilde{\theta}}_k = \alpha_k \text{sign}(x_k - \hat{x}_k) \\ x_k = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5.14)$$

La convergence des observateurs $\tilde{\Sigma}_k$, $k = 1, \dots, n$, est analysée selon la procédure présentée en §3.2.3.3. Pour chaque observateur, la convergence de l'erreur d'observation, vers zéro, est obtenue

en une étape et en temps fini. Les gains de l'observation, λ_k et α_k , sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_k &> K_k \\ \lambda_k &> \sqrt{2} \frac{K_k + \alpha_k}{\sqrt{\alpha_k - K_k}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

où : $|\dot{h}_k| < K_k$.

Après un temps fini t_k , l'état de l'observateur converge vers celui du système, d'où :

$$\hat{x}_k = x_k, \quad \tilde{\theta}_k = \tilde{h}_k(x, u, \tilde{f}_a) \quad (5.16)$$

Ainsi, après un temps fini, $T_2 = \sum_{k=1}^n t_k$, on obtient :

$$\tilde{\theta}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{j=1}^m b_{kj} u_j + \sum_{j=1}^m b_{kj} \tilde{f}_{a_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.17)$$

Sous forme matricielle, (5.17) devient :

$$\tilde{\theta}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{B}\tilde{f}_a(t) \quad (5.18)$$

Si $\text{rang}(\bar{B}) = m$, alors $\bar{B}^T \bar{B}$ est inversible car \bar{B} est de plein rang colonne. Ainsi, l'estimation du vecteur de défauts d'actionneurs est obtenue par :

$$\tilde{f}_a(t) = (\bar{B}^T \bar{B})^{-1} \bar{B}^T [\tilde{\theta}(t) - \bar{A}x(t) - \bar{B}u(t)] \quad (5.19)$$

Un défaut sur le $k^{\text{ième}}$ actionneur est détecté si la composante du vecteur $\tilde{f}_{a_k}(t)$ est non nulle ; une valeur nulle correspond à l'absence d'un défaut. L'estimation fournie de l'amplitude du défaut détecté pourra être utilisée pour le corriger.

5.5.2 Présence d'entrées inconnues

En présence d'entrées inconnues, $d(t)$, perturbations ou incertitudes paramétriques, le modèle TS (5.12) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f_a(t)) + E d(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (5.20)$$

où $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'entrées inconnues supposé borné, affectant la dynamique du système, $n \geq p \geq m + q$. $E \in \mathbb{R}^{n \times q}$ est la matrice de l'influence de $d(t)$ sur la dynamique.

Le banc de n observateurs (5.14) conçus, est utilisé pour estimer le vecteur de défauts d'actionneurs $f_a(t)$ et le vecteur de perturbations $d(t)$. Après un temps fini de convergence, les estimés $\tilde{\theta}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, sont obtenus et permettent de fournir $\tilde{f}_a(t)$ et $\tilde{d}(t)$.

Si la matrice $D = [\bar{B} \ E]$ est de plein rang et $\text{rang}(D) = m + q$ alors $D^T D$ est inversible. Ainsi, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_a(t) \\ \tilde{d}(t) \end{bmatrix} = (D^T D)^{-1} D^T [\tilde{\theta}(t) - \bar{A}x(t) - \bar{B}u(t)] \quad (5.21)$$

Remarque 5.1. L'approche proposée a été développée lorsque les variables de décision sont mesurables. Dans le cas de variables non mesurables, les fonctions d'activation des observateurs élaborés dépendent alors de l'état estimé et une estimation de ces fonctions peut être obtenue.

5.6 Exemple 1 : Application à un système hydraulique à 2 cuves

L'exemple suivant traite le diagnostic de défauts de capteurs d'un système hydraulique [16]. Une représentation schématique du système est donnée sur la figure 5.2. Le procédé se compose de deux réservoirs en série de section identique A_t , deux capteurs ultrasons de niveau, deux électrovannes situées à la base des réservoirs et une pompe alimentant le réservoir 1 par un débit constant ϕ_e . Les entrées du système sont u_1 et u_2 correspondant aux tensions appliquées sur les électrovannes. Les sorties mesurées sont les hauteurs de liquide dans les réservoirs, h_1 et h_2 .

Les équations dynamiques du système sont [16] :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_t}(\phi_e - \omega_1 \sqrt{h_1}) \\ \dot{\omega}_1 = \frac{1}{\tau}(k_{e1}u_1 - \omega_1) \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_t}(\omega_1 \sqrt{h_1} - \omega_2 \sqrt{h_2}) \\ \dot{\omega}_2 = \frac{1}{\tau}(k_{e2}u_2 - \omega_2) \end{cases} \quad (5.22)$$

Les équations de sortie sont :

$$\begin{cases} y_1 = h_1 + f_{s1} \\ y_2 = h_2 + f_{s2} \end{cases} \quad (5.23)$$

avec ω_i et k_{ei} sont, respectivement, le taux d'ouverture et le gain statique du $i^{\text{ième}}$ électrovanne, τ est la constante de temps et f_{si} est le défaut du $i^{\text{ième}}$ capteur de niveau.

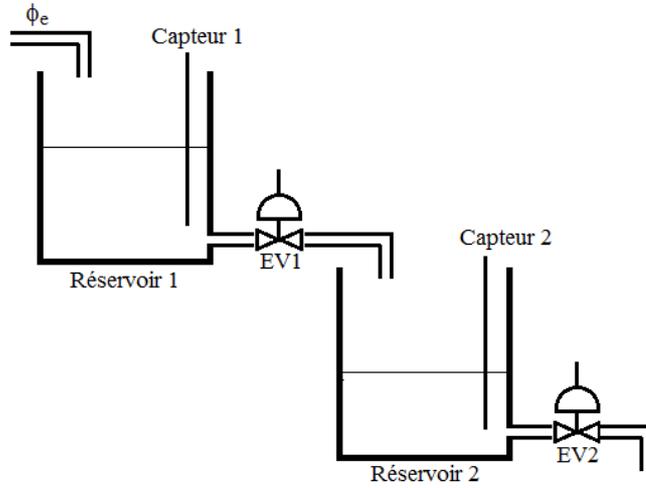


FIGURE 5.2 – Système hydraulique à 2 réservoirs

Le vecteur d'état est défini par $X=[h_1 w_1 h_2 w_2]^T$. La technique utilisée pour l'obtention du modèle flou TS du système est la linéarisation du modèle non linéaire (5.22) autour de points de fonctionnement ($OP_i = (h_{01}, w_{01}, h_{02}, w_{02})$). Chaque sous-modèle local est un système dynamique linéaire valide autour de chaque point de fonctionnement, et défini par les matrices suivantes :

$$A_i = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_{01}}{2A_t\sqrt{h_{01}}} & -\frac{\sqrt{h_{01}}}{A_t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ \frac{\omega_{01}}{2A_t\sqrt{h_{01}}} & \frac{\sqrt{h_{01}}}{A_t} & -\frac{\omega_{02}}{2A_t\sqrt{h_{02}}} & -\frac{\sqrt{h_{02}}}{A_t} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{e1}}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{e2}}{\tau} \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\tau = 2.6525s$, $A_t = 0.16m^2$ et les deux points de fonctionnement (OP_1, OP_2) suivants :

$$OP_1 = \begin{pmatrix} h_{01} = 0.25m & \omega_{01} = 0.20795 \times 10^{-3} \\ h_{02} = 0.35m & \omega_{02} = 0.20795 \times 10^{-3} \\ k_{e1} = 0.03528 \times 10^{-3} & k_{e2} = 0.03923 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$OP_2 = \begin{pmatrix} h_{01} = 0.35m & \omega_{01} = 0.17574 \times 10^{-3} \\ h_{02} = 0.25m & \omega_{02} = 0.20795 \times 10^{-3} \\ k_{e1} = 0.03083 \times 10^{-3} & k_{e2} = 0.02860 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

on obtient un modèle TS avec les deux sous-modèles suivants [16] :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.0013 & -3.1250 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3770 & 0 & 0 \\ 0.0013 & 3.1250 & -0.0011 & -3.6975 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3770 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.00001330 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.00001479 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.0009 & -3.6975 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3770 & 0 & 0 \\ 0.0009 & 3.6975 & -0.0013 & -3.1250 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3770 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.00001162 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.00001078 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le modèle flou TS est représenté par un ensemble de 2 règles représentant chacune le comportement dynamique du système autour d'un point de fonctionnement :

Règle 1 associée à $h_{01} = 0.25m, h_{02} = 0.35m$ et *Règle 2* associée à $h_{01} = 0.35m, h_{02} = 0.25m$.

Les fonctions d'activation dépendent de la variable de prémisse $\xi(t)$, qui est constituée de variables d'état mesurables $\xi_1 = h_1$ et $\xi_2 = h_2$. Elles sont données sur la figure 5.3, avec les ensembles flous : Low (L) et High (H).

Chaque sous-modèle décrit le comportement du système dans une zone de fonctionnement : S_1 (sous-modèle associé à la règle 1) et S_2 (sous-modèle associé à la règle 2). En fonction de la zone où le système évolue, chaque sous-modèle contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système. La contribution de chaque sous-modèle au modèle global est définie par une fonction de pondération, donnée par :

$$\begin{cases} \sigma_1(\xi) = \min(\mu_L(\xi_1), \mu_H(\xi_2)) \\ \sigma_2(\xi) = \min(\mu_H(\xi_1), \mu_L(\xi_2)) \end{cases} \quad (5.24)$$

où $\sigma_i(\xi) \in [0, 1]$ est le degré de validité du sous-modèle local i^{th} pour la variable de prémisse ξ , $\mu_L(\xi_j)$ et $\mu_H(\xi_j)$ sont les degrés d'appartenance de ξ_j aux ensembles flous L et H , respectivement. Le modèle TS global est une combinaison convexe des deux sous-modèles ; le système (5.22)-

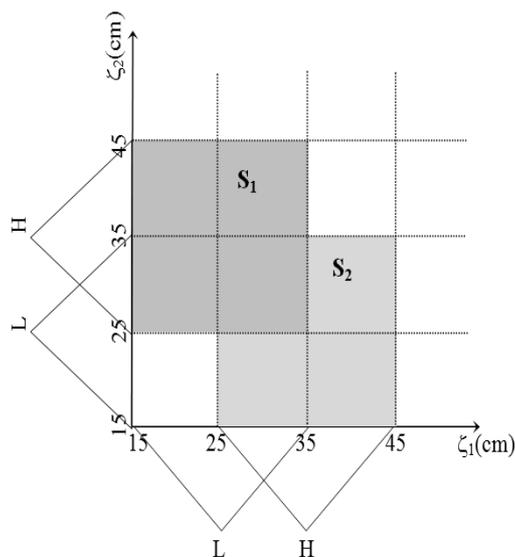


FIGURE 5.3 – Ensembles flous et zone de validité de chaque sous-modèle

(5.23) est alors représenté par le modèle TS suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Ff_s(t) \end{cases} \quad (5.25)$$

avec $x = X - X_0$, $u = U - U_0$, $y = Y - Y_0$ et $f_s(t) = [f_{s1} f_{s2}]^T$ est le vecteur de défauts de capteurs.

Les matrices A, B, C et F sont données par :

$$A = \sum_{i=1}^2 w_i(\xi(t))A_i, \quad B = \sum_{i=1}^2 w_i(\xi(t))B_i,$$

$$C = \sum_{i=1}^2 w_i(\xi(t))C_i, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

où le poids $w_i(\xi(t))$ attribué à chaque règle est défini par :

$$w_i(\xi(t)) = \frac{\sigma_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^2 \sigma_i(\xi(t))}$$

La conception d'un banc de deux observateurs à mode glissant d'ordre 2 (5.6) permet d'estimer le vecteur de défauts $f_s(t)$ en un temps fini. Les conditions initiales sont $x(0) = [0.05 \ 0.0 \ 0.05 \ 0.0]^T$ pour le système considéré autour du point de fonctionnement OP_1 et $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ pour l'observateur. Les gains d'observation $\lambda_1, \alpha_1, \lambda_2, \alpha_2, \lambda_3, \alpha_3, \lambda_4$ et α_4 sont, respectivement, choisis $4, 10^{-6}, 4, 10^{-4}, 4, 10^{-5}, 4$, et 10^{-4} .

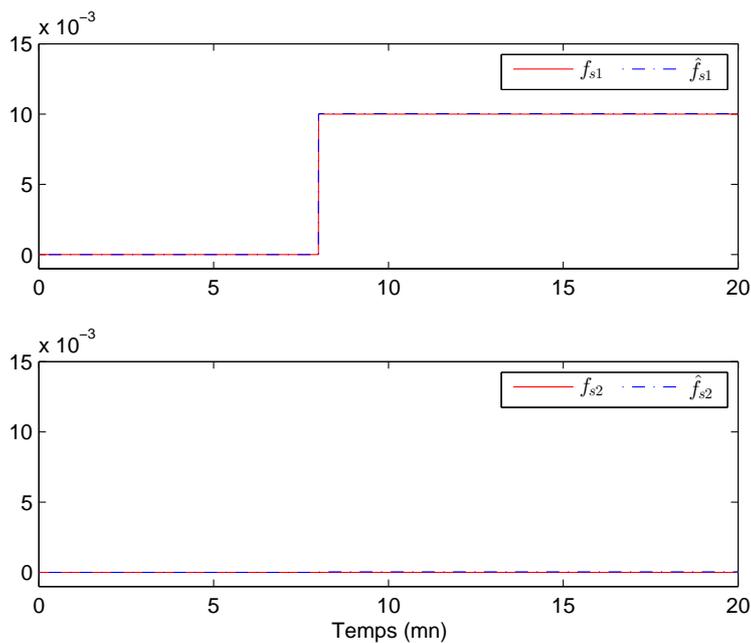


FIGURE 5.4 – Estimation des défauts de capteurs

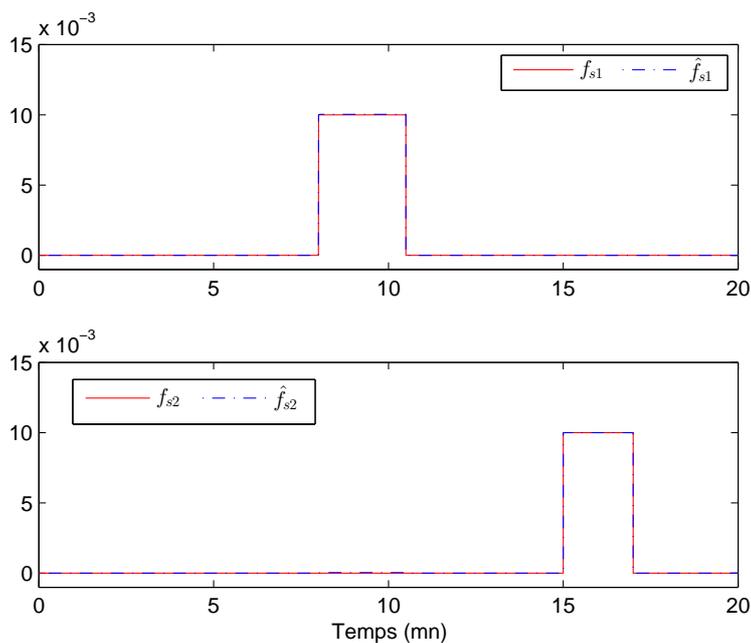


FIGURE 5.5 – Estimation de défauts affectant les deux capteurs

La figure 5.4 montre l'estimation des défauts de capteurs où seulement le 1^{er} capteur est affecté par un défaut de type biais apparaissant à l'instant 8 mn. La figure 5.5 présente l'estimation de défauts de type intermittent : un défaut sur le capteur 1 (respectivement le capteur 2) se déclenche à l'instant 8 mn (respectivement 15 mn) et disparaît à l'instant 10.5 mn (respec-

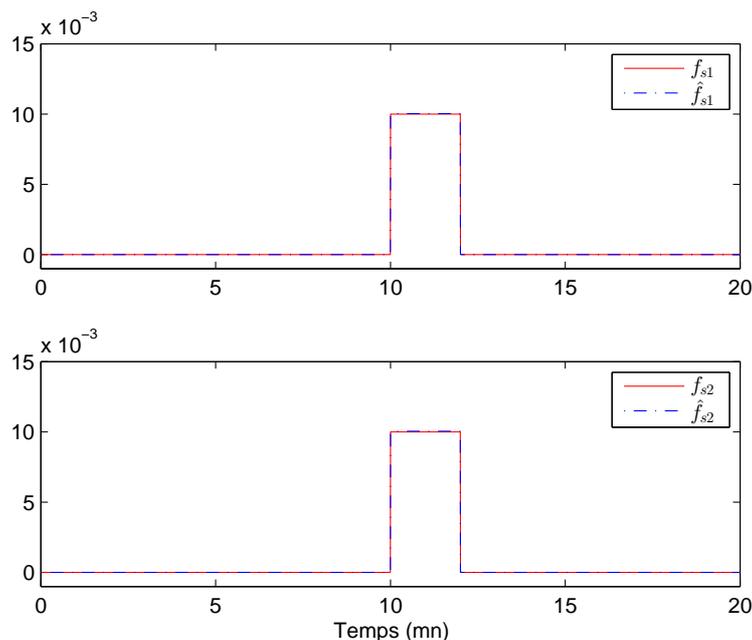


FIGURE 5.6 – Estimation de défauts simultanés

tivement 17 mn). Dans la figure 5.6, on simule des défauts de type intermittent et d'occurrence simultanée. Les performances du banc d'observateurs peuvent être analysées à partir des figures qui montrent une bonne estimation des défauts avec une convergence rapide.

5.7 Exemple 2 : Application à un système hydraulique à 3 cuves

Le principal inconvénient de la technique de linéarisation, utilisée pour la construction des modèles TS, est la perte d'information par rapport au modèle non linéaire, la difficulté du choix du nombre et de la position des différents points de fonctionnement utilisés pour la linéarisation. Seule l'approche par secteurs non linéaires [69] permet d'obtenir un modèle TS représentant exactement le modèle non linéaire, évitant ainsi une perte d'information.

Dans les travaux [3], [59] et [63], un modèle TS est construit pour le système hydraulique de 3 cuves en utilisant la technique de linéarisation autour de points de fonctionnement. Dans cette section, on utilise la technique par secteurs non linéaires pour construire un modèle TS exact pour ce système hydraulique.

5.7.1 Description et Modèle Mathématique du procédé

Le système hydraulique, présenté à la figure 5.7 [63], comporte trois cuves cylindriques de section identique S , liées entre elles par des tuyaux de section S_n avec un coefficient d'écoulement $\mu_{13} = \mu_{32}$. Deux pompes, commandées par des moteurs à courant continu, alimentent les cuves 1 et 2.

Le débit d'évacuation de l'installation est situé à la base de la cuve 2 avec un coefficient

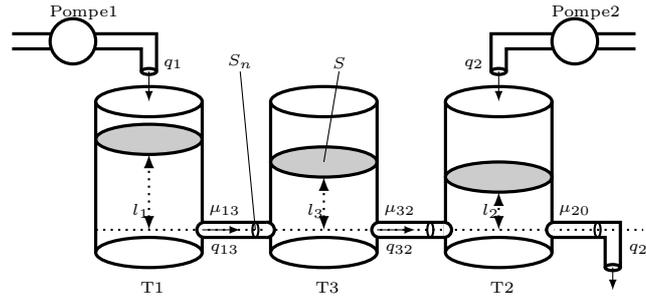


FIGURE 5.7 – Système à trois cuves

d'écoulement μ_{20} . Les entrées du système sont les débits $q_1(t)$ et $q_2(t)$ fournis par les pompes. Les sorties mesurées sont les niveaux du liquide dans les cuves $l_1(t)$, $l_2(t)$ et $l_3(t)$.

Ce système est représenté par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} S \frac{dl_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{13}(t) \\ S \frac{dl_2(t)}{dt} = q_2(t) + q_{32}(t) - q_{20}(t) \\ S \frac{dl_3(t)}{dt} = q_{13}(t) - q_{32}(t) \end{cases} \quad (5.26)$$

où q_{mn} représente le débit de liquide de la cuve m vers la cuve n ($\forall m \neq n, m, n = 1, 2, 3$), s'exprimant selon la loi de Torricelli par :

$$q_{mn}(t) = \mu_{mn} S_n \text{sign}(l_m(t) - l_n(t)) \sqrt{2g |l_m(t) - l_n(t)|} \quad (5.27)$$

Le débit en sortie d'installation, q_{20} , est fonction de la hauteur du liquide selon l'équation suivante :

$$q_{20}(t) = \mu_{20} S_n \sqrt{2gl_2(t)} \quad (5.28)$$

Les valeurs numériques des paramètres du système sont données dans la table 5.1. Dans [62], le système hydraulique est représenté par un multimodèle obtenu par la méthode de linéarisation du modèle non linéaire (5.26) autour de 3 points de fonctionnement, sous l'hypothèse que $l_1 > l_3 > l_2$.

Autour de chacun de ces points de fonctionnement, le modèle du système est linéarisé, définissant 3 modèles linéaires associés. Cette approche fournit une approximation du modèle non linéaire (5.26) (voir Annexe B).

Dans notre cas, on représente ce système par un modèle flou TS obtenu par la méthode des secteurs non linéaires ; représentant de manière exacte le modèle non linéaire (5.26), sous l'hypothèse que $l_1 \neq l_2 \neq l_3$.

TABLE 5.1 – Les valeurs des paramètres du système hydraulique.

| Paramètre | Valeur |
|---------------------------|---------------------------------|
| S | $0.0154 m^2$ |
| S_n | $5 \times 10^{-5} m^2$ |
| $\mu_{13} = \mu_{32}$ | 0.5 |
| μ_{20} | 0.6 |
| $q_{i \max}(i \in [12])$ | $1.5 \times 10^{-4} m^3 s^{-1}$ |
| $l_{j \max}(i \in [123])$ | $0.62 m$ |
| g | $9.81 m/s^2$ |

5.7.2 Modèle flou TS du système hydraulique

En supposant que $l_1 \neq l_2 \neq l_3$, le modèle (5.26) peut être réécrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dl_1}{dt} = b_1 q_1(t) - a_1 \text{sign}(l_1 - l_3) \frac{\sqrt{|l_1 - l_3|}}{|l_1 - l_3|} |l_1 - l_3| \\ \frac{dl_2}{dt} = b_2 q_2(t) + a_2 \text{sign}(l_3 - l_2) \frac{\sqrt{|l_3 - l_2|}}{|l_3 - l_2|} |l_3 - l_2| \\ \quad - a_3 \frac{\sqrt{l_2}}{l_2} l_2 \\ \frac{dl_3}{dt} = a_4 \text{sign}(l_1 - l_3) \frac{\sqrt{|l_1 - l_3|}}{|l_1 - l_3|} |l_1 - l_3| \\ \quad - a_5 \text{sign}(l_3 - l_2) \frac{\sqrt{|l_3 - l_2|}}{|l_3 - l_2|} |l_3 - l_2| \end{array} \right. \quad (5.29)$$

où : $b_1 = b_2 = \frac{1}{S}$, $a_1 = a_4 = \mu_{13} \frac{S_n}{S} \sqrt{2g}$, $a_2 = a_5 = \mu_{32} \frac{S_n}{S} \sqrt{2g}$ et $a_3 = \mu_{20} \frac{S_n}{S} \sqrt{2g}$.

Sachant que tout nombre réel est constitué de deux parties : un signe + ou - et une valeur absolue, on peut alors écrire :

$$\text{sign}(z)|z| = z, \forall z \in \mathbb{R} \quad (5.30)$$

En utilisant (5.30), le modèle (5.29) devient :

$$\begin{cases} \frac{dl_1}{dt} = b_1 q_1(t) - a_1 \frac{\sqrt{|l_1 - l_3|}}{|l_1 - l_3|} (l_1 - l_3) \\ \frac{dl_2}{dt} = b_2 q_2(t) + a_2 \frac{\sqrt{|l_3 - l_2|}}{|l_3 - l_2|} (l_3 - l_2) - a_3 \frac{\sqrt{l_2}}{l_2} l_2 \\ \frac{dl_3}{dt} = a_4 \frac{\sqrt{|l_1 - l_3|}}{|l_1 - l_3|} (l_1 - l_3) - a_5 \frac{\sqrt{|l_3 - l_2|}}{|l_3 - l_2|} (l_3 - l_2) \end{cases} \quad (5.31)$$

On définit les variables de prémisse suivantes :

$$z_1(\xi_1) = \frac{\sqrt{|\xi_1|}}{|\xi_1|}, \quad z_2(\xi_2) = \frac{\sqrt{|\xi_2|}}{|\xi_2|}, \quad z_3(\xi_3) = \frac{\sqrt{\xi_3}}{\xi_3} \quad (5.32)$$

où :

$$\xi_1(t) = l_1(t) - l_3(t), \quad \xi_2(t) = l_3(t) - l_2(t), \quad \xi_3(t) = l_2(t) \quad (5.33)$$

Alors, on aboutit à la représentation suivante du système (5.31) :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 z_1 & 0 & a_1 z_1 \\ 0 & -a_2 z_2 - a_3 z_3 & a_2 z_2 \\ a_4 z_1 & a_5 z_2 & -a_4 z_1 - a_5 z_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (5.34)$$

avec $x(t) = [l_1(t) l_2(t) l_3(t)]^T$ est le vecteur d'état. En appliquant l'approche par transformation par secteurs non linéaires [69], on construit un modèle TS représentant exactement le modèle non linéaire du système hydraulique. On utilise les transformations sur les non-linéarités $z_k(\xi_k)$, $k = 1, \dots, 3$, qui peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$z_k(\xi_k) = E_{k1}(z_k) \alpha_k + E_{k2}(z_k) \beta_k, \quad k = 1, \dots, 3 \quad (5.35)$$

avec : $E_{k1}(z_k)$ et $E_{k2}(z_k)$ représentent les fonctions d'appartenance de la variable de prémisse z_k , définies par :

$$E_{k1}(z_k) = \frac{z_k(\xi_k) - \beta_k}{\alpha_k - \beta_k}, \quad E_{k2}(z_k) = 1 - E_{k1}(z_k), \quad (5.36)$$

$\alpha_k = \max(z_k(\xi_k))$ et $\beta_k = \min(z_k(\xi_k))$, avec les valeurs : $\alpha_1 = \alpha_2 = 31.62$, $\beta_1 = \beta_2 = 1.58$, $\alpha_3 = 10$ et $\beta_3 = 1.27$.

On aboutit donc à un modèle TS avec un nombre de règles $r = 2^3 = 8$. Une règle i du modèle est de la forme :

Règle i :

Si $z_1(t)$ est M_1^i et $z_2(t)$ est M_2^i et $z_3(t)$ est M_3^i

$$\text{Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, 8 \quad (5.37)$$

Les ensembles flous M_1^i, M_2^i, M_3^i pour chaque règle sont donnés dans la table 5.2.

Ainsi, un modèle TS représentant exactement le comportement du modèle (5.26) est obtenu

TABLE 5.2 – Fonctions d'appartenance des règles floues

| <i>Règle</i> | <i>Fonctions</i> | | | <i>Matrices</i> |
|--------------|------------------|----------|----------|-----------------|
| <i>i</i> | M_1^i | M_2^i | M_3^i | A_i, B_i |
| 1 | E_{11} | E_{21} | E_{31} | A_1, B_1 |
| 2 | E_{11} | E_{21} | E_{32} | A_2, B_2 |
| 3 | E_{11} | E_{22} | E_{31} | A_3, B_3 |
| 4 | E_{11} | E_{22} | E_{32} | A_4, B_4 |
| 5 | E_{12} | E_{21} | E_{31} | A_5, B_5 |
| 6 | E_{12} | E_{21} | E_{32} | A_6, B_6 |
| 7 | E_{12} | E_{22} | E_{31} | A_7, B_7 |
| 8 | E_{12} | E_{22} | E_{32} | A_8, B_8 |

sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 w_i(z(t))(A_i x(t) + B u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (5.38)$$

Les matrices sont données par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0,227 & 0 & 0,227 \\ 0 & -0,344 & 0,072 \\ 0,227 & 0,072 & -0,299 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0,227 & 0 & 0,227 \\ 0 & -0,085 & 0,072 \\ 0,227 & 0,072 & -0,299 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0,227 & 0 & 0,227 \\ 0 & -0,282 & 0,01 \\ 0,227 & 0,01 & -0,236 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -0,227 & 0 & 0,227 \\ 0 & -0,023 & 0,01 \\ 0,227 & 0,01 & -0,236 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -0,011 & 0 & 0,011 \\ 0 & -0,344 & 0,072 \\ 0,011 & 0,072 & -0,083 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -0,011 & 0 & 0,011 \\ 0 & -0,085 & 0,072 \\ 0,011 & 0,072 & -0,083 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} -0,011 & 0 & 0,011 \\ 0 & -0,282 & 0,01 \\ 0,011 & 0,01 & -0,020 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -0,011 & 0 & 0,011 \\ 0 & -0,023 & 0,01 \\ 0,011 & 0,01 & -0,020 \end{pmatrix},$$

$$B = B_1 = B_2 = B_3 = \begin{pmatrix} 64,935 & 0 \\ 0 & 64,935 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les variables de prémisse $z_k(t)$, $k = 1, \dots, 3$, sont mesurables. Les fonctions de pondération $w_i(\xi)$, $i = 1, \dots, 8$, sont obtenues à partir des fonctions d'appartenance, comme suit :

$$w_i(z) = \frac{\alpha_i(z)}{\sum_{k=1}^8 \alpha_i(z)}, \quad \alpha_i(z) = \prod_{k=1}^3 M_k^i(z_k), \quad i = 1, \dots, 8 \quad (5.39)$$

Les fonctions d'appartenance sont représentées sur la figure 5.8.

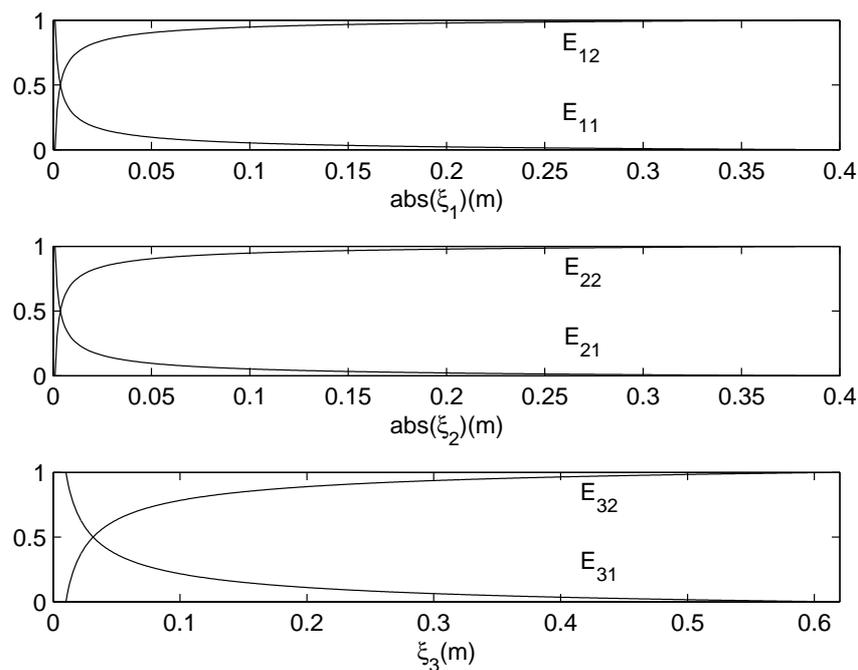


FIGURE 5.8 – Fonctions d'appartenance des variables de prémisse $z_1(\xi_1)$, $z_2(\xi_2)$ et $z_3(\xi_3)$ (haut, milieu et bas, respectivement)

La figure 5.9 présente les états du système (trait continu) et les états du modèle T-S (trait pointillé). On remarque que le modèle TS représente exactement le modèle non linéaire du système (5.26).

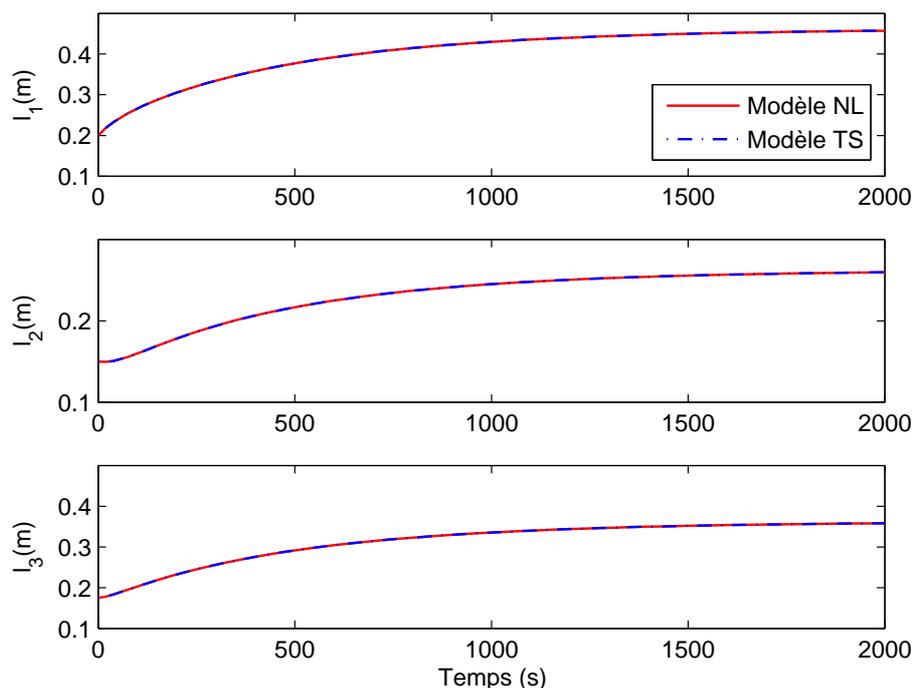


FIGURE 5.9 – États du système et ceux du modèle TS

5.7.3 Stabilisation du modèle flou TS

Pour le modèle TS du système (5.38), les paires (A_i, B) , $i = 1, \dots, 8$, sont commandables, i.e $\text{rang}(C_i) = \text{rang}[B|A_i B| \dots |A_i^{n-1} B] = 3$, $\forall i = 1, \dots, 8$. Un régulateur flou est synthétisé afin de maintenir les niveaux l_1 et l_2 à des valeurs de référence constantes l_{ref1} et l_{ref2} , respectivement, malgré les perturbations qui peuvent subvenir sur le système.

La loi de commande est basée sur un retour d'état appelé PDC (Parallel Distributed Compensation) [69]. L'idée est de créer un compensateur pour chaque règle du modèle flou. Le régulateur partage la même base de règles que le modèle flou (pour sa partie prémisse). Un gain de commande par retour d'état constitue la partie conclusion de chaque sous modèle flou [57]. Afin de réaliser les performances de suivi de consigne, une action intégrale est ajoutée.

Le régulateur flou est alors défini de la façon suivante :

Règle i :

Si $z_1(t)$ est M_1^i et $z_2(t)$ est M_2^i et $z_3(t)$ est M_3^i

$$\text{Alors } u_i(t) = -F_i x_a(t), \quad i = 1, \dots, 8 \quad (5.40)$$

où : $x_a(t) = [x^T(t) x_I^T(t)]^T$ est le vecteur d'état augmenté et $x_I(t)$ est la sortie de l'intégrateur :

$$\dot{x}_I(t) = y_r(t) - r(t) = C_1 x(t) - r(t) \quad (5.41)$$

avec : $y_r(t) = [l_1(t) l_2(t)]^T$, $r(t) = [l_{ref1} l_{ref2}]^T$ est le vecteur de référence, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$F_i = [K_i K_{iI}]$ est le gain local étendu de contre réaction. Chaque règle i du régulateur possède le même poids que celui de la règle i du modèle flou et possède une équation de sortie linéaire. La sortie finale du régulateur est inférée par l'équation suivante :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^8 w_i(z(t)) F_i x_a(t) = - \sum_{i=1}^8 w_i(z(t)) (K_i x(t) + K_{iI} x_I(t)) \quad (5.42)$$

Les gains F_i du régulateur sont déterminés par l'analyse de la stabilité du système TS bouclé.

5.7.3.1 Conditions de stabilité du modèle bouclé

La représentation du modèle en état augmenté est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^8 w_i(z(t)) (A_{ei} x_a(t) + B_{ei} u(t) + Er(t)) \\ y(t) = C_e x_a(t) \end{cases} \quad (5.43)$$

où :

$$A_{ei} = \begin{bmatrix} A_i & 0_{3 \times 2} \\ C_1 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, B_{ei} = \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 2} \\ -I_2 \end{bmatrix}, C_e = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

En substituant (5.42) dans (5.43), le modèle en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x}_a = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 w_i(z) w_j(z) \{ (A_{ei} - B_{ei} F_j) x_a + Er \} \quad (5.44)$$

En posant $G_{ij} = A_{ei} - B_{ei} F_j$, (5.44) peut être réécrite :

$$\dot{x}_a = \sum_{i=1}^8 w_i(z) w_i(z) (G_{ii} x_a + Er) + 2 \sum_{i=1}^8 \sum_{i < j} w_i(z) w_j(z) \left\{ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x_a + \frac{1}{2} Er \right\} \quad (5.45)$$

L'analyse de la stabilité via une fonction de Lyapunov quadratique a permis l'obtention des conditions LMIs suffisantes de stabilité. Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V(x(t)) =$

$x_a(t)^T P x_a(t)$, $P = P^T > 0$, dont la dérivée par rapport au temps est :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^8 w_i^2(z) \{x_a^T (G_{ii}^T P + P G_{ii}) x_a + r^T E^T P x_a + x_a^T P E r\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^8 \sum_{i < j} w_i(z) w_j(z) \{x_a^T \frac{(G_{ij} + G_{ji})^T}{2} P x_a + x_a^T P \frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} x_a + \frac{1}{2} r^T E^T P x_a + \frac{1}{2} x_a^T P E r\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

La mise sous forme matricielle de (5.46) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^8 w_i^2(z) \begin{bmatrix} x_a \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{ii}^T P + P G_{ii} & P E \\ E^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ r \end{bmatrix} \\ & + 2 \sum_{i=1}^8 \sum_{i < j} w_i(z) w_j(z) \begin{bmatrix} x_a \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (G_{ij} + G_{ji})^T P + P \frac{1}{2} (G_{ij} + G_{ji}) & \frac{1}{2} P E \\ \frac{1}{2} E^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Alors, le système (5.44) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que (voir [69]) :

$$\begin{bmatrix} G_{ii}^T P + P G_{ii} & P E \\ E^T P & 0 \end{bmatrix} < 0, \forall i = 1, \dots, 8 \quad (5.48)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} (G_{ij} + G_{ji})^T P + P \frac{1}{2} (G_{ij} + G_{ji}) & \frac{1}{2} P E \\ \frac{1}{2} E^T P & 0 \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, 8, i < j. \quad (5.49)$$

Pour déterminer les gains du régulateur F_i , $i = 1, \dots, 8$, on utilise la méthode par placement des pôles, qui consiste à placer les pôles du système augmenté bouclé en $[-0.0096 - 0.0097 - 0.0097 - 0.99 - 0.99]$. Les matrices de gains obtenus sont :

$$F_1 = [K_1 K_{1I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 7.84 & -1.28 & -8.42 & 0.018 & -0.041 \\ -1.28 & 9.68 & -2.66 & -0.041 & 0.135 \end{array} \right]$$

$$F_2 = [K_2 K_{2I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 7.84 & -1.28 & -8.42 & 0.018 & -0.041 \\ -1.28 & 13.67 & -2.66 & 0.041 & 0.135 \end{array} \right]$$

$$F_3 = [K_3 K_{3I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 8.40 & -0.14 & -7.59 & 6.23e-3 & -5.69e-3 \\ -0.14 & 11.05 & -0.30 & -5.69e-3 & 0.15 \end{array} \right]$$

$$F_4 = [K_4 K_{4I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 8.40 & -0.14 & -7.59 & 6.23e-3 & -5.69e-3 \\ -0.14 & 15.04 & -0.30 & -5.69e-3 & 0.15 \end{array} \right]$$

$$F_5 = [K_5 K_{5I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 15.2 & -0.18 & -1.8 & 0.14 & -2.01e-2 \\ -0.18 & 8.98 & -11.22 & -2.01e-2 & 2.02e-2 \end{array} \right]$$

$$F_6 = [K_6 K_{6I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 15.2 & -0.18 & -1.8 & 0.14 & -2.01e-2 \\ -0.18 & 12.8 & -11.22 & -2.01e-2 & 2.02e-2 \end{array} \right]$$

$$F_7 = [K_7 K_{7I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 15.12 & -8.2e-2 & -4.4 & 0.1 & -3.84e-2 \\ -8.2e-2 & 10.98 & -3.54 & -3.84e-2 & 0.12 \end{array} \right]$$

$$F_8 = [K_8 K_{8I}] =$$

$$1e-3 * \left[\begin{array}{ccc|cc} 15.12 & -8.2e-2 & -4.4 & 0.1 & -3.84e-2 \\ -8.2e-2 & 14.97 & -3.54 & -3.84e-2 & 0.12 \end{array} \right]$$

On vérifie par la suite l'existence d'une matrice P commune, par la résolution des LMIs (5.48) et (5.49). En utilisant la toolbox *LMI control* de Matlab, on obtient :

$$P = 1e-7 * \begin{bmatrix} 3.94 & 0.9 & -1.03 & 1.45e-02 & 3.40e-4 \\ 0.90 & 2.85 & -0.96 & 8.99e-4 & 1.27e-2 \\ -1.03 & -0.96 & 13.69 & -8.50e-3 & -4.83e-3 \\ 1.45e-2 & 8.99e-4 & -8.50e-3 & 7.67e-5 & -1.45e-5 \\ 3.40e-5 & 1.27e-2 & -4.83e-3 & -1.45e-5 & 7.84e-5 \end{bmatrix}$$

5.7.4 Résultats de simulation

La figure 5.10 présente l'évolution des niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en absence de défauts. Des changements de référence sont effectués aux instants 1500s pour l_{ref1} et 2000s pour l_{ref2} .

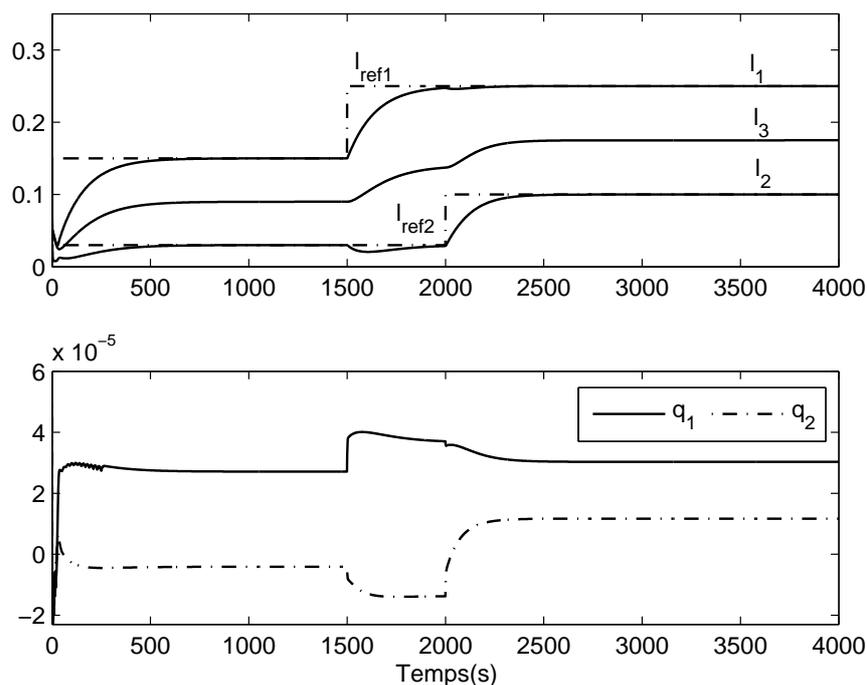


FIGURE 5.10 – Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en absence de défauts

5.7.4.1 Estimation de défauts de capteurs

Les trois capteurs de niveau sont affectés par des défauts f_{s1} , f_{s2} et f_{s3} . Les défauts sont des biais de 10% survenant, respectivement, aux instants 1000s, 3000s et 2500s. Les gains du

banc de 3 observateurs (5.6) sont choisis : $\lambda_1 = 0.1, \alpha_1 = 10^{-4}, \lambda_2 = 0.1, \alpha_2 = 10^{-4}, \lambda_3 = 0.1$ et $\alpha_3 = 10^{-4}$. Les conditions initiales sont $x(0)=[0.15m, 0.03, 0.05]^T$ et $\hat{v}(0)=[0m, 0, 0]^T$. Les erreurs d'observation, $e_i=v_i - \hat{v}_i, i = 1, \dots, 3$, sont données sur la figure 5.11 et les défauts de capteurs ainsi que leurs estimés sont illustrés sur la figure 5.12. Une convergence de l'erreur d'estimation en temps fini est observée. Les évolutions des niveaux ainsi que les débits de commande, en fonction du temps, sont représentés sur la figure 5.13. La présence de l'action intégrale a permis d'annuler, en régime permanent, les erreurs introduites par ces défauts considérés comme des perturbations.

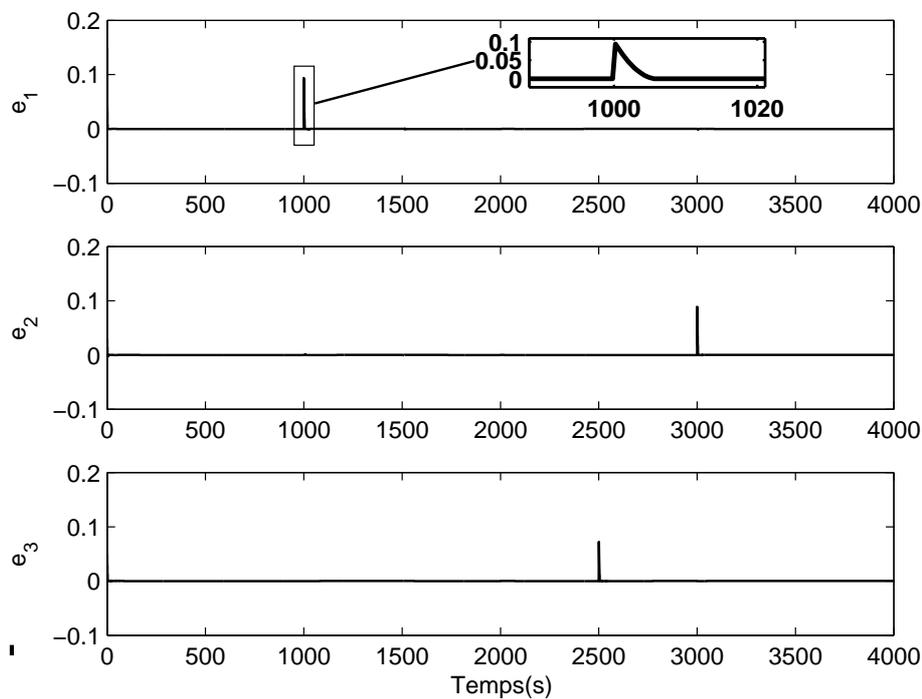


FIGURE 5.11 – Les erreurs d'estimation du banc d'observateurs (1)

5.7.4.2 Estimation de défauts d'actionneurs

On considère deux défauts d'actionneurs $f_{a1}(t)$ et $f_{a2}(t)$ des pompes 1 et 2, respectivement, qui consistent en une réduction d'efficacité. Dans la première simulation, deux défauts simultanés apparaissent sur le système à l'instant 1500s, en considérant une perte d'efficacité de 60% pour la pompe 1 (60% du débit maximal) et de 30% pour la pompe 2 (30% du débit maximal). Une estimation simultanée des défauts est obtenue par le banc d'observateurs (5.14). Les gains d'observation $\lambda_1, \alpha_1, \lambda_2, \alpha_2, \lambda_3$ et α_3 sont choisis, respectivement, 0.1, 10^{-3} , 0.1, 10^{-3} , 0.1 et 10^{-3} . Les conditions initiales pour l'observateur sont $x(0)=[0.15m, 0.03, 0.05]^T$ et $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$. La

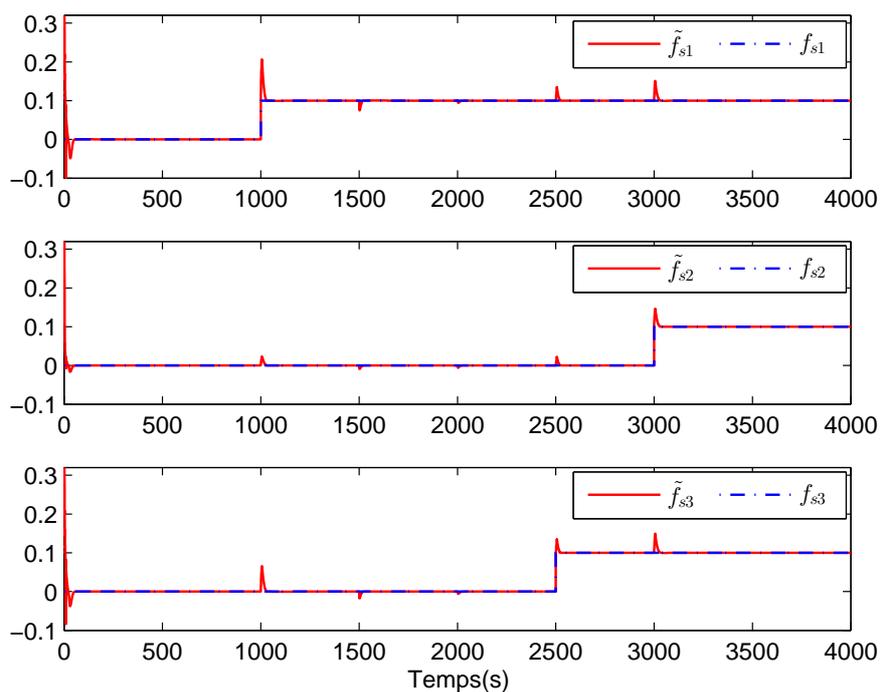


FIGURE 5.12 – Estimation des défauts de capteurs \tilde{f}_{s1} , \tilde{f}_{s2} et \tilde{f}_{s3}

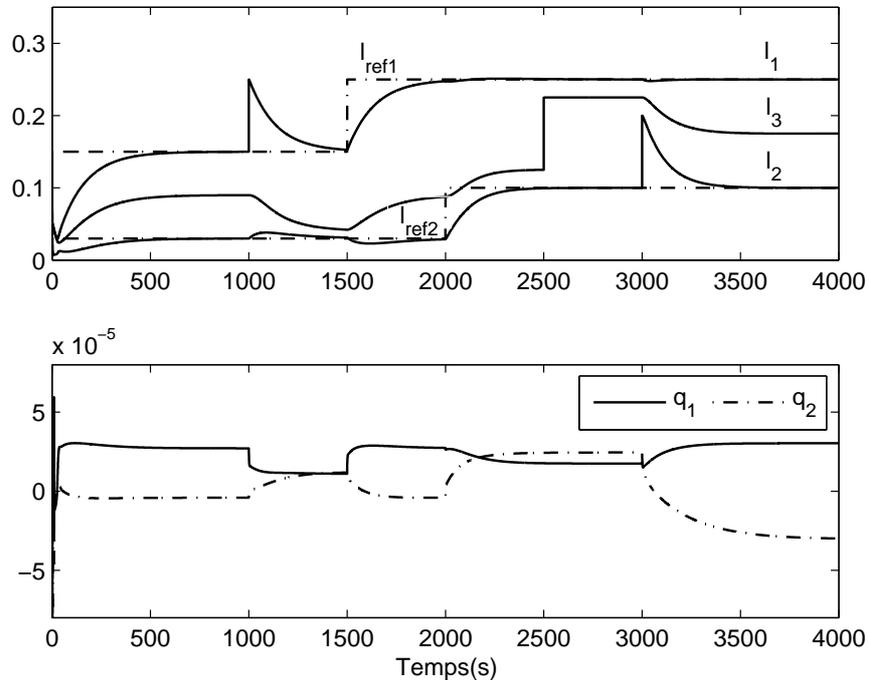


FIGURE 5.13 – Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence de défauts de capteurs

convergence des erreurs d'estimation d'état, $e_i = x_i - \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, 3$, est obtenue en temps fini, comme illustrée à la figure 5.14.

La figure 5.15 présente les défauts d'actionneurs et leurs estimés. Ces défauts affectent les débits $q_1(t)$ et $q_2(t)$ en créant une baisse des débits (voir figure 5.16). Par conséquent, l'évolution dynamique des niveaux est affectée par ces défauts. Cependant, la présence de l'action intégrale dans la loi de commande permet de compenser rapidement ces effets et ainsi annuler l'erreur statique des niveaux. Dans la seconde simulation, on considère des défauts d'actionneurs de

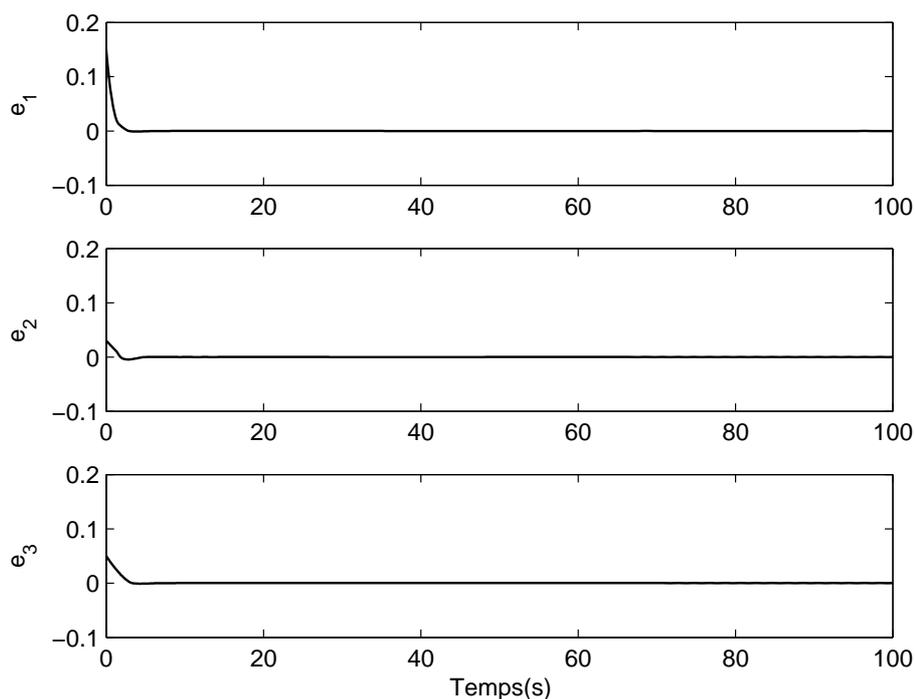


FIGURE 5.14 – Les erreurs d'estimation du banc d'observateurs (2)

type multiplicatif. Le défaut f_{a_i} est représenté par :

$$f_{a_i} = u_i^f - u_i = (k_i - 1)u_i$$

avec u_i^f est la sortie du $i^{\text{ème}}$ actionneur, u_i est la commande appliquée sur le $i^{\text{ème}}$ actionneur, k_i est le gain d'efficacité de la pompe, $0 \leq k_i \leq 1$: $k_i = 0$ correspond à la perte de la pompe (défaillance) et $k_i = 1$ correspond à un fonctionnement normal (pas de défaut). Un défaut actionneur est considéré sur la pompe 1 avec une perte d'efficacité de 60% ($k_1 = 0.4$) est supposé apparaître à l'instant 1000s. Les erreurs d'observation sont données par la figure 5.17(a). L'estimation des défauts d'actionneurs est présentée à la figure 5.17(b)-(c). Les gains d'efficacité des deux

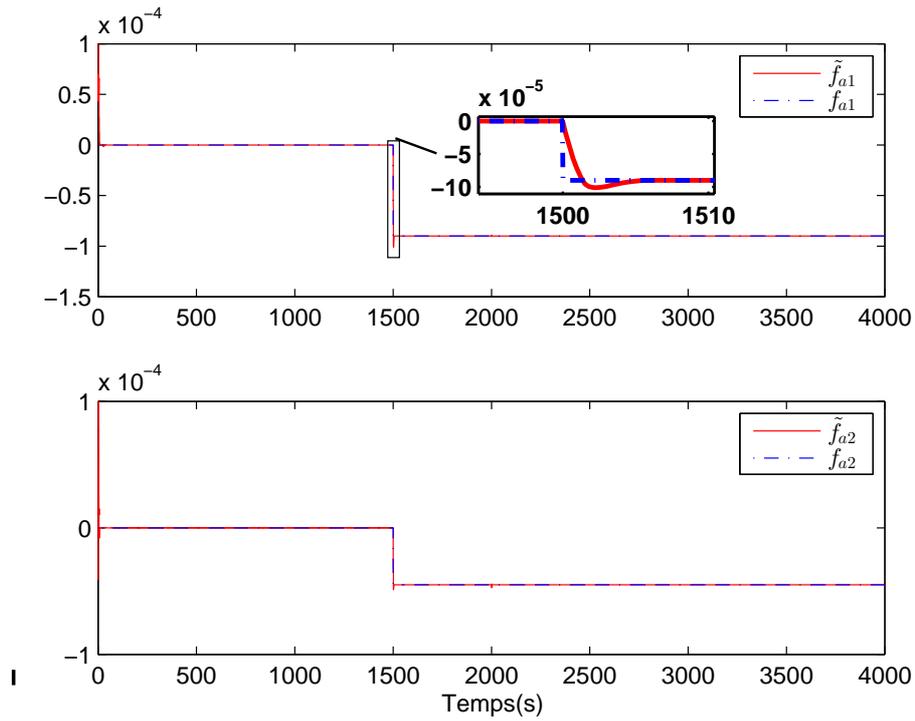


FIGURE 5.15 – Estimation des défauts d'actionneurs \tilde{f}_{a1} et \tilde{f}_{a2}

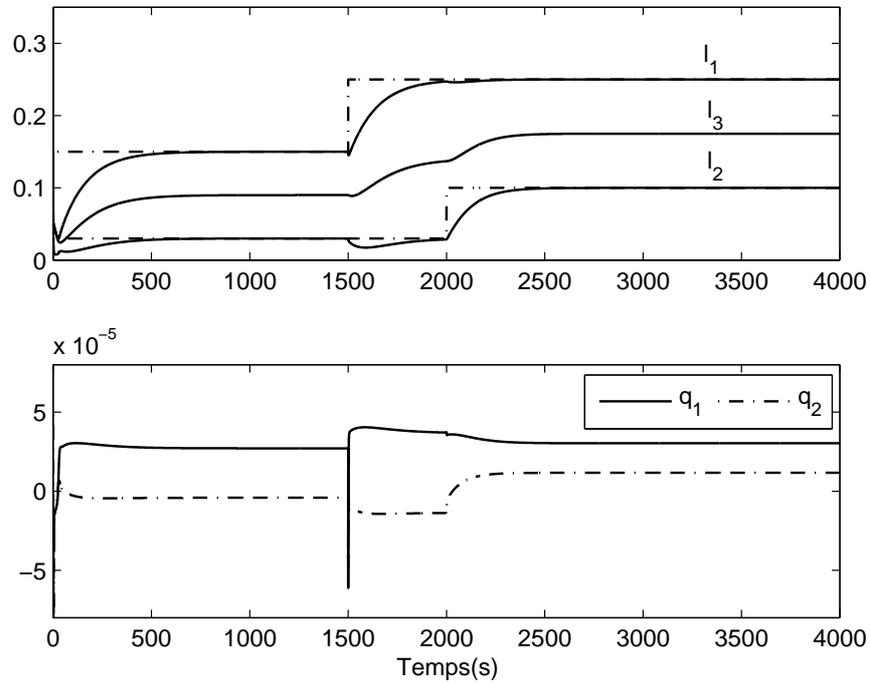


FIGURE 5.16 – Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence de défauts d'actionneurs

actionneurs sont donnés par la figure 5.18.

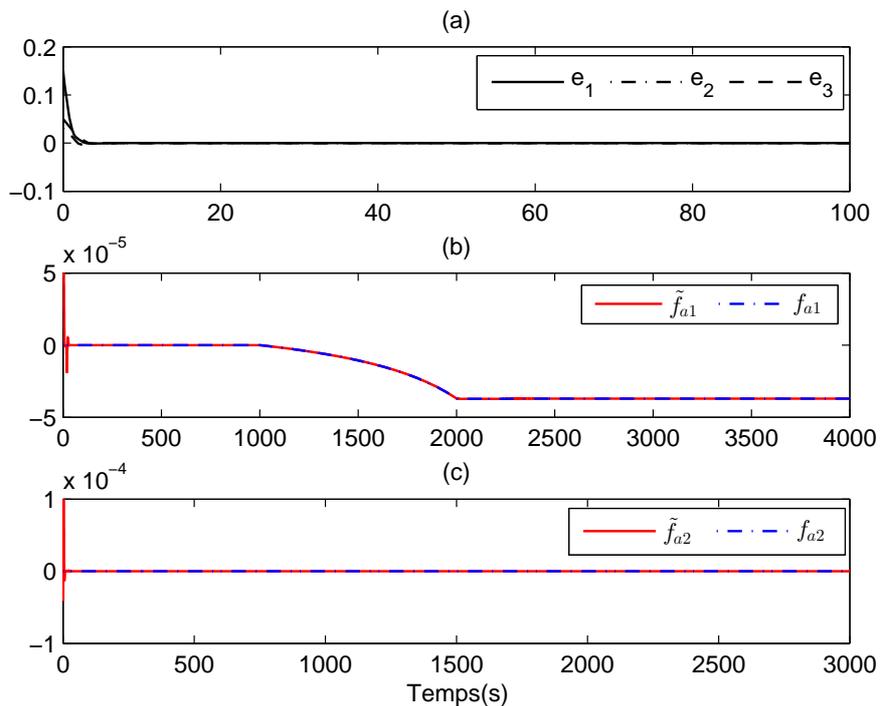


FIGURE 5.17 – Estimation des défauts d'actionneurs \tilde{f}_{a1} et \tilde{f}_{a2}

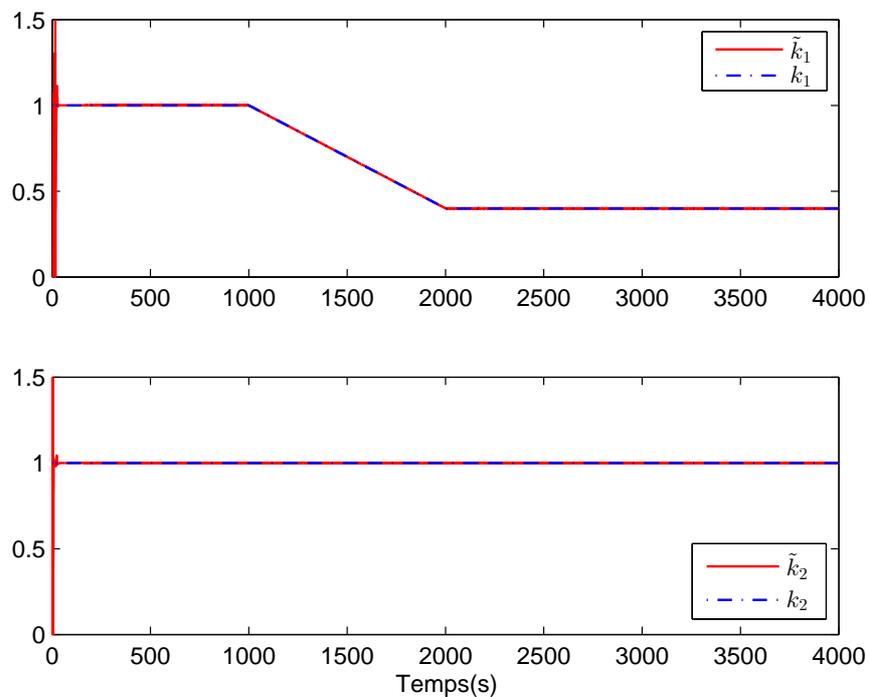


FIGURE 5.18 – Les gains d'efficacité des deux actionneurs

5.7.4.3 Cas de défauts simultanés

Une estimation simultanée des défauts affectant le capteur 1 et l'actionneur 2 est présentée à la figure 5.19, en utilisant la structure d'estimation de défauts proposée. Les évolutions des niveaux ainsi que les débits de commande sont données par la figure 5.20.

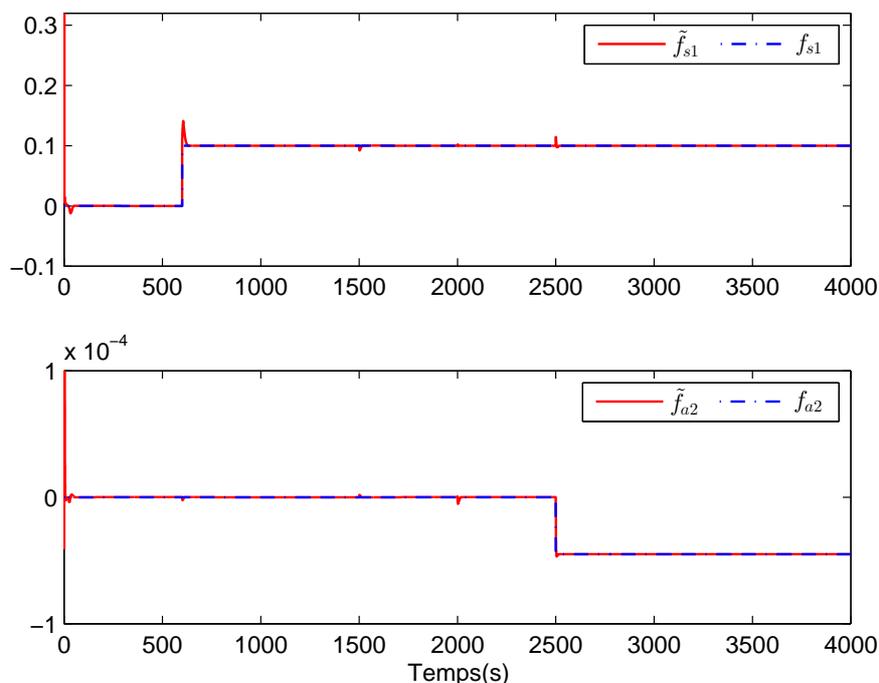


FIGURE 5.19 – Estimation des défauts simultanés \tilde{f}_{s1} et \tilde{f}_{a2}

5.7.4.4 Présence d'une perturbation

On considère les débits q_{f1} , q_{f2} et q_{f3} représentant des débits de fuite éventuelle au niveau des cuves :

$$d = \begin{pmatrix} q_{f1} \\ q_{f2} \\ q_{f3} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1/S & 0 & 0 \\ 0 & -1/S & 0 \\ 0 & 0 & -1/S \end{pmatrix}$$

En l'absence de défaut d'actionneurs, le banc de 3 observateurs à modes glissants d'ordre 2 (5.13) fournit une estimation de $d(t)$, qui est déterminée par (5.21). La figure 5.21 présente l'évolution des niveaux dans les cuves suite à une fuite q_{f3} dans la troisième cuve (T3), en l'absence de défauts d'actionneurs. L'estimation de la perturbation q_{f3} et les erreurs d'observation sont illustrées sur la figure 5.22.

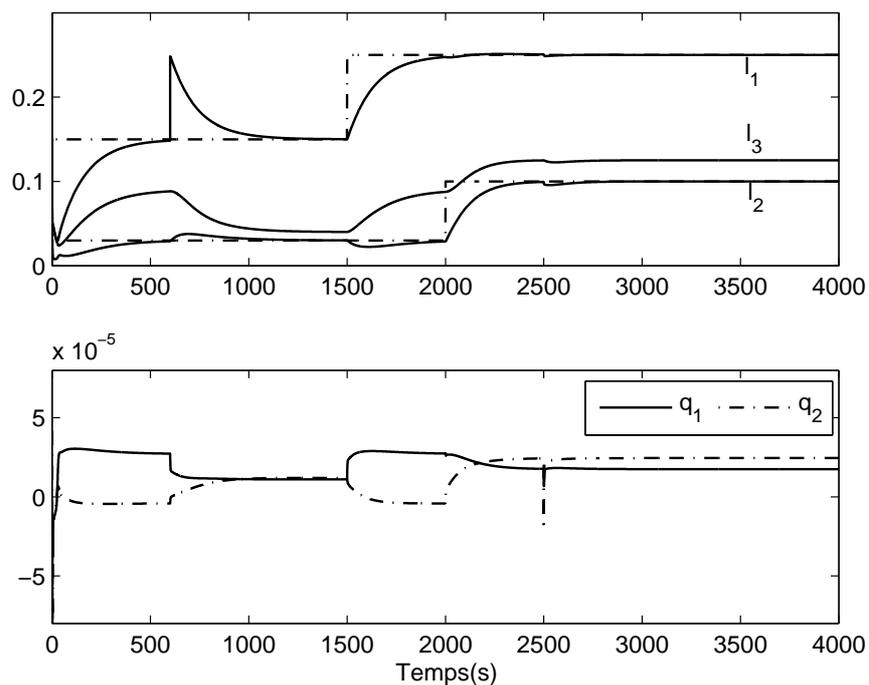


FIGURE 5.20 – Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence de défauts

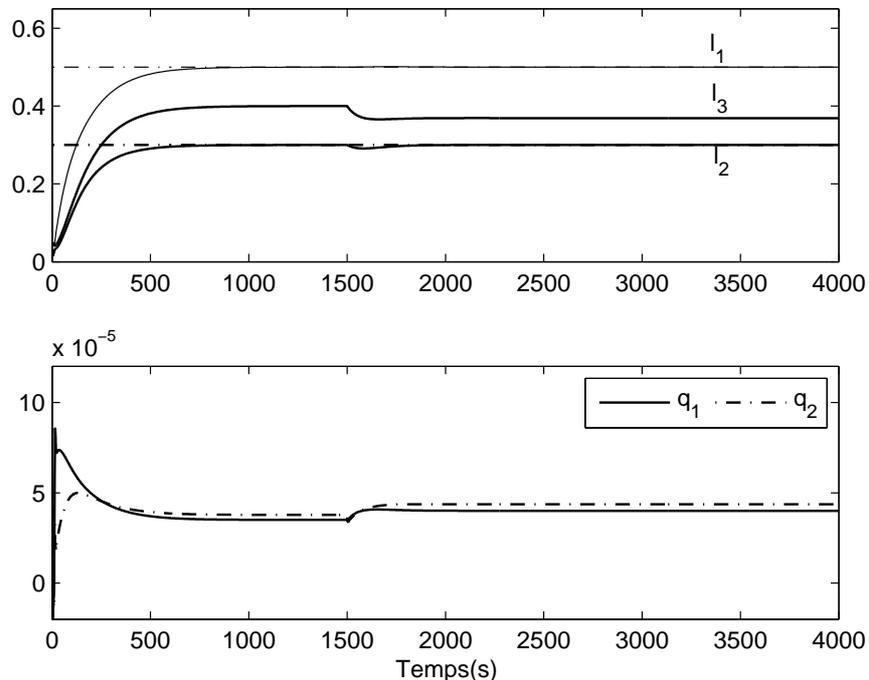


FIGURE 5.21 – Les niveaux $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$ et les débits $q_1(t)$, $q_2(t)$ en présence d'une perturbation

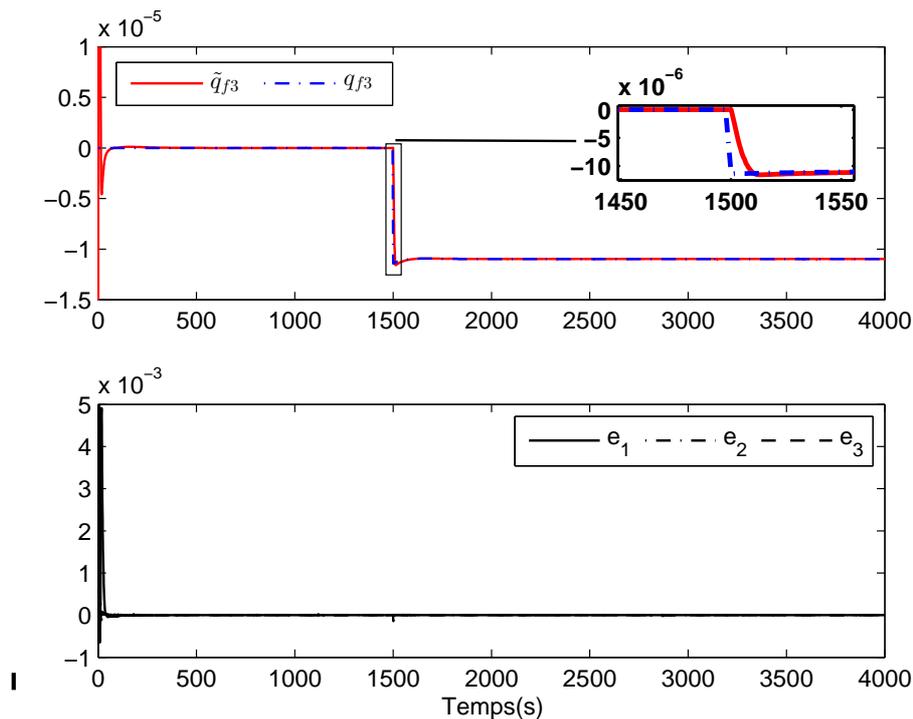
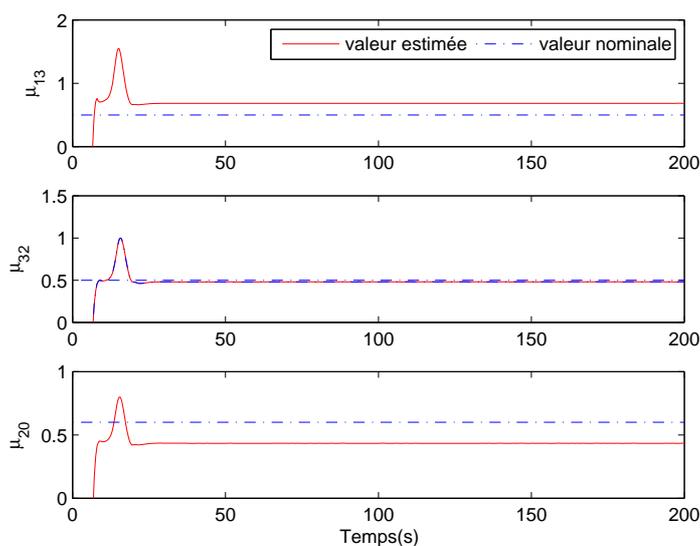


FIGURE 5.22 – Estimation de la perturbation (fuite) dans T3 et erreurs d'observation

5.7.4.5 Estimation des paramètres du système

Dans le cas des incertitudes paramétriques dues à la méconnaissance des valeurs numériques des paramètres du modèle, μ_{13} , μ_{32} et μ_{20} , une estimation de ces paramètres peut être réalisée, en-ligne, au début du fonctionnement du système durant un intervalle de temps petit $[0, t_1]$.


 FIGURE 5.23 – Estimation des paramètres μ_{13} , μ_{32} et μ_{20}

On suppose que durant cet intervalle aucun défaut n'est présent et aucune variation de référence n'est effectuée. Le modèle TS incertain est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 w_i(\xi(t))((A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.50)$$

avec ΔA_i représentent les incertitudes paramétriques qui sont supposées bornées.

Une estimation des paramètres du système, μ_{13} , μ_{32} et μ_{20} , peut être obtenue par le banc d'observateurs (5.14). Un exemple de simulation de variation de ces paramètres est présenté sur la figure 5.23. Les valeurs estimées de ces paramètres ainsi que leurs valeurs nominales sont présentées.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche est proposée pour l'estimation des défauts de capteurs et d'actionneurs, pour les systèmes non linéaires représentés par un modèle T-S. Cette approche utilise deux bancs d'observateurs étape par étape à modes glissants d'ordre 2. Chaque banc d'observateurs est construit séparément pour l'estimation d'un seul type de défauts. Deux exemples de systèmes non linéaires sont considérés afin de présenter les performances de l'approche d'estimation proposée. Les résultats de simulation obtenus permettent de conclure sur la bonne estimation des défauts et des entrées inconnues.

Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse représentent une contribution aux problèmes d'estimation d'état et du diagnostic des systèmes non linéaires décrits par un modèle TS. Le premier chapitre a été consacré à la présentation des modèles flous TS standard et descripteur, ainsi que les méthodes d'obtention. Deux méthodes ont été utilisées pour représenter les systèmes non linéaires étudiés. La première méthode repose sur la linéarisation du modèle non linéaire autour de points de fonctionnement. La seconde méthode utilise l'approche par secteurs non linéaires permettant d'obtenir un modèle TS représentant de manière exacte le modèle non linéaire, contrairement à l'approche précédente qui donne une approximation du modèle non linéaire.

Avant d'aborder le problème d'estimation d'état et de conception d'observateurs pour les systèmes TS, une analyse d'observabilité d'un système TS a été faite en chapitre 2, se basant sur la contrainte d'observabilité des modèles locaux. Dans cette thèse, la technique d'estimation utilise des observateurs triangulaires par modes glissants dont la conception requiert une transformation du système sous une forme triangulaire d'observation. Deux modèles TS mis sous forme triangulaire d'observation sont alors présentés.

Notre intérêt est porté aux observateurs étape par étape à modes glissants d'ordre deux, du fait de leurs propriétés de précision de convergence, de robustesse et de simplicité de mise en œuvre. Le troisième chapitre a été consacré à la synthèse des observateurs étape par étape à modes glissants d'ordre un et deux, pour les systèmes TS mis sous forme triangulaire d'observation. Les résultats de simulation, présentés dans ce chapitre, permettent de valider les performances du mode glissant d'ordre 2 : élimination du phénomène de réticence et convergence en temps fini de l'erreur d'observation. Ces observateurs ont été utilisés, par la suite, pour l'estimation d'état d'un bras manipulateur actionné par un moteur DC. Pour l'estimation d'état d'un système TS perturbé, les résultats obtenus par le banc d'observateurs construit sont comparés à ceux de l'observateur flou proposé dans [43]. Ces résultats permettent de conclure sur l'estimation précise et rapide des observateurs élaborés.

Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté la synthèse de deux observateurs étape par étape à modes glissants d'ordre 2 pour un pendule inversé rotatif décrit par un modèle TS descripteur. Ces observateurs ont été validés expérimentalement sur un pendule inversé rotatif réel. Les résultats obtenus montrent une convergence en temps fini de l'erreur d'observation.

Dans le chapitre 5, les observateurs élaborés ont été utilisés pour le diagnostic de défauts du système TS. Une approche d'estimation des défauts de capteurs et d'actionneurs a été proposée, basée sur deux bancs d'observateurs élaborés séparément. Cette approche permet la détection, la localisation et la reconstruction de l'évolution temporelle des défauts. Deux exemples de simulation ont été considérés afin d'en présenter les performances : une reconstruction rapide et précise des défauts avec une simplicité de mise en œuvre. Dans le premier exemple, un système hydraulique à 2 cuves est représenté par un modèle TS obtenu par linéarisation autour de deux points de fonctionnement. Pour un système hydraulique à 3 cuves, un modèle TS exact est proposé, utilisant l'approche par transformation par secteurs non linéaires.

Les travaux réalisés dans cette thèse ouvrent un certain nombre de perspectives :

- La validation des résultats de diagnostic des défauts du système hydraulique à 3 cuves sur un banc d'essai réel.
- L'analyse des performances de l'approche d'estimation proposée en considérant d'autres exemples de systèmes TS incertains, traitant le problème de la robustesse de l'estimation vis-à-vis des perturbations et des incertitudes.
- La synthèse d'une loi de commande tolérante aux défauts pour le système hydraulique à 3 cuves décrit par le modèle TS proposé, utilisant les informations issues du module d'estimation de défauts.

Bibliographie

- [1] A. Aguilera-González, J. Bosche, and A. El Hajjaji. Unknown input estimation for diesel engine based on Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems. In *American Control Conference (ACC)*, pages 3159–3164, Portland, Oregon, USA, June 4-6 2014.
- [2] A. Akhenak. *Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2004.
- [3] A. Akhenak, Chadli M., D. Maquin, and Ragot J. State estimation via multiple observer. the three tank system. In *5th IFAC SAFEPROCESS*, Washington.
- [4] B. Allouche, L. Vermeiren, A. Dequidt, and M. Dambrine. Modélisation TS sous forme descripteur et commande d'un pendule inversé à deux roues. In *22èmes rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2013)*, Reims, France, Octobre 10-11 2013.
- [5] B. Allouche, L. Vermeiren, A. Dequidt, and Dambrine M. Step-crossing control of two-wheeled transporter based on Takagi-Sugeno approach : Comparison between state and descriptor form. In *IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 1324–1329, October 8-10 2014.
- [6] G.Z. Angelis. *System analysis, modelling and control with polytopic linear models*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Netherland, 2001.
- [7] K.J. Åström and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36 :287–295, 2000.
- [8] J.-P. Barbot, T. Boukhobza, and M. Djemai. Sliding mode observer for triangular input form. In *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pages 1489–1490, Kobe, Japan, 1996.
- [9] J.-P. Barbot, M. Djemai, and T. Boukhobza. *Sliding Mode Observers*, chapter 4, pages 103–130. Control Engineering. Marcel Dekker, 2002.

-
- [10] J.-P. Barbot and T. Floquet. Iterative higher order sliding mode observer for nonlinear systems with unknown inputs. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 17(6) :1019–1033, 2010.
- [11] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2) :241–246, 1998.
- [12] P. Bergsten and R. Palm. Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems. In *9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*,, pages 671–676, San Antonio, TX, USA, 2000.
- [13] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov. Fuzzy observers. In *Proc. of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 2, pages 700–703, Melbourne, Australia, 2001.
- [14] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov. Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 32(1) :114–121, 2002.
- [15] V. Bregeault. *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, France, 2010.
- [16] B. Castillo-Toledo, S. Di Gennaro, and J. Anzurez-Marin. On the fault diagnosis problem for non-linear systems : A fuzzy sliding-mode observer approach. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 20 :187–199, 2009.
- [17] M. Chadli, D. Maquin, and J. Ragot. Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and cybernetics*, volume 5, pages 3514–3519, 2000.
- [18] H. Cherrid. *Commande et observateur par modes glissants d'ordre un et deux : application aux systèmes robotisés*. Thèse de doctorat, Université Versailles Saint Quentin, France, 2001.
- [19] A. Choukchou-Braham, B. Cherki, M. Djemai, and K. Busawon. *Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer, Verlag, 2013.
- [20] Q-V. Dang, B. Allouche, L. Vermeiren, A. Dequidt, and M. Dambrine. Design and implementation of a robust fuzzy controller for a rotary inverted pendulum using the Takagi-Sugeno descriptor representation. In *International IEEE Symposium Series on Computational Intelligence*, Orlando, Florida, U.S.A, 2014.

- [21] M. Djemai. Synthèse d'observateur à modes glissants pour une classe de systèmes hybrides. <http://www-ljk.imag.fr/membres/Antoine.Girard/gdrmacs/JDMACS/Djemai.pdf>, 2011.
- [22] M. Djemai, J.P. Barbot, and T. Boukhobza. Some comments on higher order sliding modes. In *Proc. of European Control Conference (ECC)*, Karlsruhe, Allemagne, 1999.
- [23] S.V. Drakunov. Sliding-mode observers based on equivalent control method. In *Proc. of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992.
- [24] S.V. Drakunov and V. Utkin. Sliding mode observers. Tutorial. In *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, pages 3376–3378, New Orleans, USA, 1995.
- [25] G.-R. Duan. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. Springer, New York, 2010.
- [26] A.G. Filippov. Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to non-linear problems in automatic control. In *IFAC Proceedings Volumes*, volume 1, pages 933–937, 1960.
- [27] M. Fliess. Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(9) :994–1001, 1990.
- [28] T. Floquet. *Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 2000.
- [29] T. Floquet and J.-P. Barbot. Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 38(10) :803–815, 2007.
- [30] A. J. Fossard and D. Normand-Cyrot. *Système non linéaire, tome 1 : modélisation - estimation*. Masson, Paris, 1993.
- [31] L. Fridman and A. Levant. Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory. In L. Glielmo F. Garofalo, editor, *Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume 217, pages 107–133. Springer-Verlag, 1996.
- [32] Z. Gao, X. Shi, and S. X. Ding. Fuzzy state/disturbance observer design for T-S fuzzy systems with application to sensor fault estimation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 38(3), 2008.
- [33] K. Gasso, G. Mourot, and J. Ragot. Identification of an output error Takagi-Sugeno model. In *Proc. of IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 1, pages 14–19, Nashville, USA, 2000.

- [34] K. Guelton. *Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en oeuvre d'observateurs flous sous forme descripteur*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, France, 2003.
- [35] T. M. Guerra, V. Estrada-Manzo, and Zs. Lendek. Observer design for Takagi-Sugeno descriptor models : an LMI approach. *Automatica*, 52(2) :154–159, 2015.
- [36] T. M. Guerra and L. Vermeiren. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 40(5) :823–829, 2004.
- [37] J. Guldner and V.I. Utkin. The chattering problem in sliding mode systems. In *14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Perpignan, France, 2000.
- [38] H. Hamdi. *Approche Multi-Modèle pour l'observation d'état et le diagnostic des systèmes singuliers non linéaires*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Tunis, Tunis, 2012.
- [39] H. Hamdi, M. Rodrigues, C. Mechmeche, and N. Benhadj Braiek. Observer based fault tolerant control for Takagi-Sugeno nonlinear descriptor systems. In *International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT'13)*, volume 1, pages 52–57, 2013.
- [40] F.A. Haouari, B. Cherki, and M. Djemai. Sliding mode observers for Takagi-Sugeno fuzzy models. In *3rd International Conference on Systems and Control, ICSC13*, Alger, Algérie, 2013.
- [41] F.A. Haouari, B. Cherki, and M. Djemai. Sliding mode observers for T-S fuzzy systems with application to sensor fault estimation. In *3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT)*, Tlemcen, Algérie, 2015.
- [42] F.A. Haouari, Q-V. Dang, J.-Y. Jun, M. Djemai, and B. Cherki. State estimation of rotary inverted pendulum using HOSM observers : Experimental results. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 19(3) :405–415, 2019.
- [43] D. Ichalal. *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2009.
- [44] Quanser Consulting Inc. Self-erecting, rotary motion inverted pendulum. <http://www.quanser.com> edition, 1996.

- [45] Tor A. Johansen, R. Shorten, and R. Murray-Smith. On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3) :297–312, 2000.
- [46] F. Khaber and A. Hamzaoui. Commande et stabilité des systèmes linéaires flous de Takagi-Sugeno. *Courrier du Savoir-N°02*, pages 23–28, 2002.
- [47] D. Koenig. *Analyse et observation des systèmes singuliers*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [48] B. Kosko. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*, 43(11), 1994.
- [49] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6) :1247–1263, 1993.
- [50] A. Levant. Higher order sliding : collection of design tools. In *Proc. of European Control Conference (ECC)*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [51] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3) :379–384, 1998.
- [52] D. G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC -16(6) :596–602, 1971.
- [53] D. G. Luenberger. Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC -22(3) :312–321, 1977.
- [54] X.-J. Ma, Z.-Q. Sun, and Y.-Y. He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(1) :41–51, 1998.
- [55] B. Marx and J. Ragot. Controller and observer designs for a class of TS descriptor systems with pole placement constraint. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*, pages 6355–6360, San Diego, CA, USA, December 13-15.
- [56] S. Methnani. *Diagnostic, reconstruction et identification des défauts capteurs et actionneurs : application aux station d'épurations des eaux usées*. Thèse de doctorat, Université de Toulon, France, 2012.
- [57] Y. Morère. *Mise en oeuvre de lois de commandes pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Haut Cambrésis, Lille, 2000.
- [58] A.M. Nagy Kiss. *Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2010.

- [59] H. Noura, D. Theilliol, and D. Sauter. Actuator fault-tolerant control design : demonstration on a three-tank-system. *International Journal of Systems Science*, 31(9) :1143–1155, 2000.
- [60] R. Palm and P. Bergsten. Sliding mode observer for a Takagi-Sugeno fuzzy system. In *The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 2, pages 665–670, Melbourne, Australia, 2000.
- [61] R. J. Patton, J. Chen, and C. J. Lopez-Toribio. Fuzzy observer for nonlinear dynamic systems fault diagnosis. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 84–89, 1998.
- [62] M. Rodrigues. *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, France, 2005.
- [63] M. Rodrigues, D. Theilliol, M. Adam-Medina, and D. Sauter. A fault detection and isolation scheme for industrial systems based on multiple operating models. *Control Engineering Practice*, pages 225–239, 2008.
- [64] D. Rotondo, V. Puig, F. Nejjari, and M. Witczak. Automated generation and comparison of Takagi-Sugeno and polytopic quasi-LPV models. *Fuzzy Sets and Systems*, (277) :44–64, 2015.
- [65] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, J.P. Barbot, and T. Floquet. Exact differentiation and sliding mode observers for switched Lagrangian systems. *Nonlinear Analysis*, 65 :1050–1069, 2006.
- [66] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, New York, 2014.
- [67] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 :116–132, 1985.
- [68] K. Tanaka, T. Ikeda, and H.O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :250–265, 1998.
- [69] K. Tanaka and H.O. Wang. *Fuzzy Control Systems and Design Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, Inc, 2001.
- [70] T. Taniguchi, K. Tanaka, and H.O. Wang. Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000.

-
- [71] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji, and H.O. Wang. Fuzzy descriptor systems : Stability analysis and design via LMIs. In *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California, June 1999.
- [72] V. Utkin. Chattering problem. In *International Federation of Automatic Control, 18th IFAC World Congress*, pages 13374–13379, Milano, Italy, 2011.
- [73] V.I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2(22) :212–222, 1977.
- [74] H. Ying. General SISO takagi-sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(4), 1998.

Annexe A

Rappels sur les modes glissants

Cette partie est consacrée aux rappels théoriques nécessaires à la compréhension du fonctionnement des observateurs à modes glissants.

A.1 Principe des modes glissants

La génération d'un régime glissant est associée à une certaine classe de systèmes régis par des équations différentielles discontinues, dans le sens où le second membre est une fonction non linéaire, discontinue à travers une hypersurface S définie par :

$$S = \{x \in X : s(x, t) = 0\} \quad (\text{A.1})$$

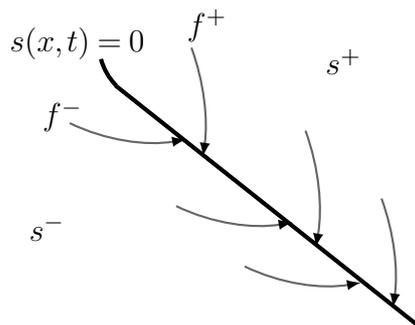
où $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ appartient à l'espace des états X et $s : X \times R^+ \rightarrow R$ est une fonction suffisamment différentiable. La variable $s(x, t)$ définit la fonction de glissement à imposer. La surface de glissement S divise l'espace en deux parties disjointes $s(x) > 0$ et $s(x) < 0$, noté respectivement s^+ et s^- , dans lesquelles la dynamique est différente.

On considère le modèle d'un système de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x) = \begin{cases} f^+(x(t)) & \text{si } x \in s^+ \\ f^-(x(t)) & \text{si } x \in s^- \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

f^+ et f^- étant des fonctions continues.

Définition A.1.1. [28] On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur S s'il existe un temps fini t_s tel que la solution de (A.2) satisfasse $s(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_s$.

FIGURE A.1 – Attractivité de la surface S

Suivant que l'état du système est dans s^+ ou dans s^- , il rejoint la surface S respectivement avec les vitesses f^+ et f^- . Ces vecteurs vitesses des trajectoires du système doivent toujours pointer vers cette surface. On dit que la surface est *attractive* (voir figure A.1). Ayant rejoint la surface, l'état va y rester puisque chacun des deux champs f^+ ou f^- l'y ramène. Il glissera donc le long de cette surface. C'est ce mouvement le long de la surface de discontinuité $s(x, t) = 0$ qu'on nomme *régime* ou *mode de glissement* [18] (voir figure A.2).

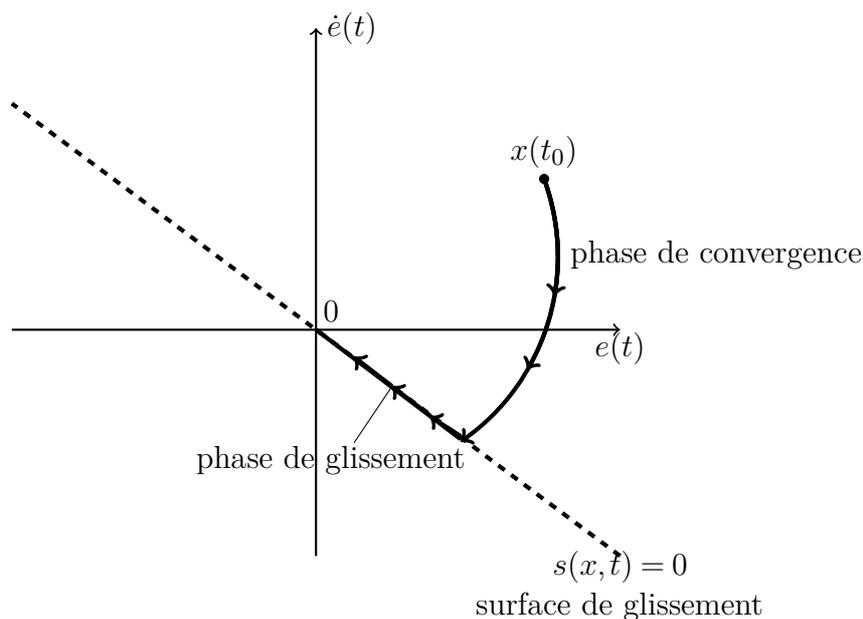


FIGURE A.2 – Phase de convergence et mode de glissement idéal

A.2 Condition d'existence du mode de glissant

Des conditions suffisantes permettent de garantir l'existence d'un régime glissant. Toutefois, avant d'atteindre le mode glissant, il existe une phase de convergence durant laquelle la ou les variables d'état se déplacent vers la surface de glissement. La surface de glissement doit être attractive pour tout point de l'espace d'état [28]. En prenant comme fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}s^2$, il suffit que la dérivée par rapport au temps de V soit négative pour que la surface $s(x,t) = 0$ soit attractive soit :

$$s\dot{s} < 0 \quad \forall x \in X \quad (\text{A.3})$$

Cette condition (A.3) est appelée *condition d'attractivité*. Pour que les trajectoires convergent vers la surface S , il faut que les vecteurs s et \dot{s} soient de signes opposés.

A.3 Convergence en temps fini

Si la condition (A.3) est vérifiée alors toutes les trajectoires vont converger vers la surface, mais la convergence vers $s = 0$ n'est qu'asymptotique. C'est pourquoi on remplace souvent (A.3) par la condition dite de η -attractivité [28]

$$s\dot{s} \leq -\eta|s| \quad (\text{A.4})$$

qui assure une convergence en temps fini vers $s = 0$. En effet, par intégration de cette inéquation

$$|s(t)| - |s(0)| \leq -\eta t,$$

ce qui montre que le temps t_e requis pour atteindre la surface, partant d'une condition initiale $s(0)$, est borné par :

$$t_e \leq \frac{|s(0)|}{\eta}.$$

Ainsi, une convergence en temps fini d'un état initial quelconque vers la surface de glissement est garantie.

A.4 Comportement du système en régime glissant

Quand le système est en régime glissant, la surface de glissement vérifie la condition $\dot{s}(x) = 0$. Cette surface une fois atteinte, le système est dit en régime glissant et sa dynamique est forcée

à suivre celle fixée par l'équation de la surface. Cette dynamique est largement indépendante de celle du système initial et surtout de ses variations éventuelles. Le principal intérêt de cette technique vient du fait qu'une fois en régime glissant, le système est insensible aux incertitudes paramétriques et aux perturbations extérieures, mais qu'il reste affecté pendant le régime transitoire, i.e. avant que la surface de glissement ne soit atteinte [28].

Il existe principalement deux méthodes pour la détermination du mode de glissement :

- la méthode de Filippov [18][26],
- la méthode de la commande équivalente [18][28].

Annexe B

Linéarisation du modèle non linéaire du système de 3 cuves

B.1 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Linéarisons (5.26) au voisinage du point d'équilibre $(U_0, Y_0) = (q_{10}, q_{20}, l_{10}, l_{20}, l_{30})$; on obtient, en négligeant les termes du second ordre, les équations du système hydraulique linéarisé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $y = Y - Y_0$, $x = X - X_0 = [h_1 \ h_2 \ h_3]^T$, $u = U - U_0 = [\delta q_1 \ \delta q_2]^T$.

$$A_i = \begin{pmatrix} b_1^i & 0 & c_1^i \\ 0 & b_2^i & c_2^i \\ a_3^i & a_4^i & a_5^i \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} a_1^i & 0 \\ 0 & a_2^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1^i &= a_2^i = \frac{1}{S}; \quad b_1^i = -\mu_{13} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{10}-l_{30}|}}; \quad c_1^i = \mu_{13} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{10}-l_{30}|}}; \\ b_2^i &= -\mu_{32} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{30}-l_{20}|}} - \mu_{20} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{l_{20}}}; \quad c_2^i = \mu_{32} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{30}-l_{20}|}}; \quad a_3^i = \mu_{13} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{10}-l_{30}|}}; \\ a_4^i &= \mu_{32} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{20}-l_{30}|}}; \quad a_5^i = -\mu_{32} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{20}-l_{30}|}} - \mu_{13} \frac{S_n}{2S} \sqrt{\frac{2g}{|l_{10}-l_{30}|}}. \end{aligned}$$

Trois modèles linéarisés du système (B.1) sont obtenus pour les trois points de fonctionnement du système hydraulique donnés dans la Table 2. Pour chaque point de fonctionnement (OP_1, OP_2, OP_3) un sous-modèle linéarisé (B.1) est obtenu.

TABLE B.1 – Points de fonctionnement

| $Point OP_j$ | 1 | 2 | 3 |
|-------------------------------|--|---|--|
| $Y_0^j = [l_1 l_2 l_3]^T (m)$ | 0.2 0.15 0.175 | 0.5 0.15 0.32 | 0.5 0.405 0.45 |
| $U_0^j = [q_1 q_2]^T (m^3/s)$ | 2.19×10^{-5} 5.05×10^{-5} | 5.8×10^{-5} 1.44×10^{-5} | 3.1×10^{-5} 8.7×10^{-5} |

Les paramètres des modèles locaux sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.0227 & 0 & 0.0227 \\ 0 & -0.0338 & 0.0227 \\ 0.0227 & 0.0227 & -0.0454 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 64.9351 & 0 \\ 0 & 64.9351 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.0086 & 0 & 0.0086 \\ 0 & -0.0197 & 0.0086 \\ 0.0086 & 0.0086 & -0.0172 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 64.9351 & 0 \\ 0 & 64.9351 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.0161 & 0 & 0.0161 \\ 0 & -0.0237 & 0.0169 \\ 0.0161 & 0.0169 & -0.0330 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 64.9351 & 0 \\ 0 & 64.9351 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le modèle TS flou du système (B.1) est composé donc de trois règles correspondant aux trois modes de fonctionnement du système OP_1, OP_2 et OP_3 :

Règle i : Si $h_1(t)$ est M_1^i et $h_2(t)$ est M_2^i et $h_3(t)$ est M_3^i

$$\text{Alors} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où $\xi(t) = [h_1(t) h_2(t) h_3(t)]$ est le vecteur des prémisses. $M_1^i \dots M_3^i$ sont les ensembles flous, illustrés dans la figure (B.1). Un degré de validité, w_i , est associé à chaque sous-modèle i , caractérisant le poids de chaque règle pour les variables de prémisse $\xi(t)$.

Le modèle global flou TS du système hydraulique (5.26) est obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^3 w_i(\xi(t))} \right) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

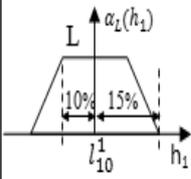
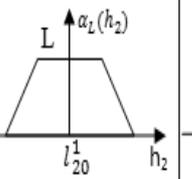
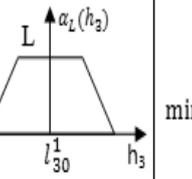
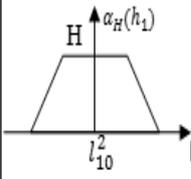
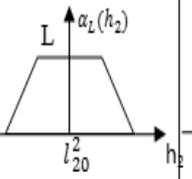
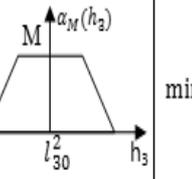
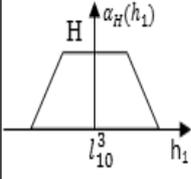
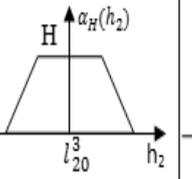
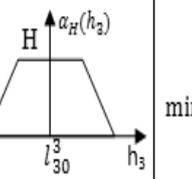
| Règle (Modèle) | Fonctions d'appartenance | | | Degré de validité (w_i) |
|--------------------------|---|---|---|---|
| M_1 (OP ₁) |  |  |  | $\min(\alpha_L(h_1), \alpha_L(h_2), \alpha_L(h_3))$ |
| M_2 (OP ₂) |  |  |  | $\min(\alpha_H(h_1), \alpha_L(h_2), \alpha_M(h_3))$ |
| M_3 (OP ₃) |  |  |  | $\min(\alpha_H(h_1), \alpha_H(h_2), \alpha_H(h_3))$ |

FIGURE B.1 – Ensembles flous et degrés de validité des règles.