République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :Biomathématiques et Modélisation

présentée par

Si Ali Amel

Dynamique d'un modèle épidémique SIS avec réaction-diffusion

Soutenu le 02-06-2019 devant le jury composé de :

M. T. M. TOUAOULA	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. S. E. MIRI	MCA, Université de Tlemcen	Examinateur
M. A. MENOUER	MCB, Université de Tlemcen	Examinateur
M. A. ATTAR	MCA, Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2018-2019

Dédicace

Du profond de mon coeur, Je dédie ce modeste travail :
A mes très chers parents. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que Dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A mes deux chers frères.
A tous les membres de ma famille, petits et grands.
A tous mes amies et à tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage durant ces années d'études et de mener à bien ce modeste travail .

C'est avec beaucoup de plaisir que j'exprime ici ma profonde gratitude à mon encadreur M. *A. Attar*, pour son encadrement et soutien, sa disponibilité, et aussi pour le temps qu'il a consacré à diriger ce mémoire. Je le remercie aussi pour sa gentillesse, sa modestie et ces précieux conseils.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à :

M.*T.M. Touaoula* pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury. Toute ma reconnaissance également à la lecture de mon travail.
M.*S. E. Miri* et M.*A. Menouer* d'avoir accepté d'être dans le jury et surtout d'en être examinateurs. Je vous remercie pour le temps consacré à la lecteur de ce travail .

Mon respect et mes remerciements vont ensuite, aux deux personnes les plus chers pour moi, ma mère et mon père, pour leur amour, leur conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais faire et par conséquent ce mémoire.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et toutes celles que j'ai connues au département de mathématiques.

Table des matières

Notations

Ω :	Ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$:	La frontière de Ω .
$\bar{\Omega}$:	L'adhérence de Ω
$\lvert\Omega\rvert$:	Mesure de Ω
∇f :	Le gradient de f
$\mathbb{L}(X)$:	Espace des opérateurs linéaires dans X.
$\mathbb{C}(\Omega)$:	Espace des fonctions continues définies sur Ω
$\mathbb{L}^\infty(\Omega)$:	Espace des fonctions bornées presque partout
$\mathbb{C}_0(\Omega)$:	Espace des fonctions continues nulles sur le bord de Ω
$\mathbb{C}^\infty(\Omega)$:	Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω
$\mathbb{C}^{0,\alpha}$:	Espace des fonctions H$\ddot{o}$lderiennes sur Ω
$\mathbb{C}^k(\Omega)$:	Espace des fonctions de classe $\mathbb{C}^k$ sur Ω
$\mathbb{C}^{k,\alpha}(\Omega)$:	Espace des fonctions H$\ddot{o}$lderiennes de classe $\mathbb{C}^k$ sur Ω
$\mathbb{C}_0^k$:	Espace des fonctions de $\mathbb{C}^k(\Omega)$ à support compact
$\mathbb{C}([0,T];X)$:	L'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans X
$\mathbb{C}^1([0,T];X)$:	Les fonctions continument dérivable de $[0,T]$ dans X
A :	Opérateur linéaire
D(A) :	Domaine d'un opérateur A
$\frac{\partial}{\partial\eta}$:	Dérivée normale .
$\mathbb{W}^{k,p}$:	Espace de Sobolev, à dérivée jusqu'à l'ordre k dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$
$\mathbb{W}_0^{k,p}$:	Espace de Sobolev avec trace nulle
$\mathbb{H}^k(\Omega)=$	$\mathbb{W}^{k,2}(\Omega),\ \mathbb{H}^1(\Omega) = \mathbb{W}^{1,2}(\Omega)$.

Introduction

Au cours des dernières années, plusieurs modèles de réaction - diffusion épidémiologique de type (SI) ont été développés pour étudier l'impact de l'hétérogénéité spatiale de l'environnement et des taux de déplacement des individus sur la dynamique des modèles.
Le but de ce mémoire de Master, est de faire une étude d'un système de réaction-diffusion SIS, et de présenter des résultats obtenus ces dernières années par différents auteurs dans [6].

Un modèle de réaction-diffusion susceptible-infecté-susceptible (SIS) avec des conditions aux limites homogènes de Neumann :

$$\begin{cases} S_t = d_S\Delta S - \dfrac{\beta(x)SI}{S+I} - \gamma(x)I, & x\in\Omega, \quad t>0 \\ I_t = d_I\Delta I + \dfrac{\beta(x)SI}{S+I} - \gamma(x)I, & x\in\Omega, \quad t>0 \end{cases} \tag{1}$$

a été considéré sous la condition :

$$\int_\Omega (S(x,0)+I(x,0))\mathrm{d}x = N > 0$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^m$ et N est le nombre total d'individus à $t=0$.
Le taux de reproduction de base R_0 est défini, et les auteurs dans [1] ont démontré que l'équilibre sans maladie (DFE) est globalement

asymptotiquement stable si $R_0 \leqslant 1$, alors qu'un équilibre endémique existe si $R_0 > 1$. Puis, l'attractivité globale de l'équilibre endémique du modèle a été prouvée dans deux cas :

- $d_S = d_I$
- $\gamma(x) = r\beta(x)$

bien que l'attractivité globale de l'équilibre endémique pour les cas généraux reste ouverte. De plus, plusieurs résultats sur les comportement asymptotiques des équilibres ont été établies, ce qui a d'importantes implications pour le contrôle des maladies. [1, 8]
D'autre part, si en supposant que les individus ont récupérés immunité permanente, le modèle de Kermack-Mckendrick est étendu au modèle de réaction-diffusion suivant avec des conditions aux limites homogènes de Neumann :

$$\begin{cases} S_t = d_S \Delta S - \beta S I, & x \in \Omega \quad t > 0 \\ I_t = d_I \Delta I + \beta S I - \gamma I, & x \in \Omega \quad t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

où β et γ sont des constantes positives. En introduisant certaines fonctionnelles de Lyapunov, il est prouvé que la densité des individus susceptibles $S(x,t)$ converge vers une constante positive et la densité des individus infectés $I(x,t)$ converge vers zéro uniformément. Contrairement à (1), ce modèle prédit toujours l'élimination de la maladie à long terme.
Notons que le modèle SIS bien connu, également du à Kermack et Mckenddrick, prend la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} S' = -\beta S I + \gamma I, & t > 0 \\ I' = \beta S I - \gamma I, & t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

avec des conditions initiales :

$$S(0) + I(0) = N > 0$$

où N représente la population totale.
Le taux de reproduction de base peut être défini par $R_0 = \dfrac{\beta N}{\gamma}$. Il est prouvé que si $R_0 < 1$, la solution $(S(x,t), I(x,t))$ de (3) approche l'équilibre sans maladie $(N, 0)$, tandis que si $R_0 > 1$, il existe un unique équilibre endémique :

$$S^* = \frac{\gamma}{\beta} \quad , \quad I^* = N - \frac{\gamma}{\beta}$$

et il est globalement asymptotiquement stable.
L'objectif principal de ce mémoire est de généraliser le modèle (3) à un modèle réaction-diffusion épidémique, il s'agit d'étudier le modèle suivant :

$$\begin{cases} S_t &= d_S \Delta S - \beta(x)SI + \gamma(x)I, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ I_t &= d_I \Delta I + \beta(x)SI - \gamma(x)I, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \eta} &= \dfrac{\partial I}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Avec

$$N = \int_{\Omega} (S(x,t) + I(x,t)) \mathrm{d}x.$$

Puis d'étudier l'existence de DFE et EE et leur attractivité globale. Même si le modèle étudié ressemble au modèle (1), mais il existe une différence majeure.
Le modèle de réaction-diffusion SIS avec interaction dépendante de la fréquence, alors que ce modéle est concentré sur la non linéarité de type action de masse. Par conséquent, les arguments pour prouver

l'existence globale de l'équilibre endémique et l'attractivité globale de l'équilibre endémique sont très différents.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

- **Le premier Chapitre :** Nous rappelons quelques outils de base pour traiter notre modèle, ainsi que des théorèmes et propositions utiles pour la suite.

- **Le deuxième Chapitre :** Nous présentons le modèle et établissons les résultats de l'existence globale, ainsi nous définissons le taux de reproduction de base, puis considérons l'attractivité globale de DFE dans deux cas.

- **Le troisième Chapitre :** Nous prouvons l'existence de l'équilibre endémique $R_0 > 1$, ainsi que la non existence puis considérons ensuite leur attractivité globale dans deux cas.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire, comme les opérateurs compacts, principes du maximum (versions faible et forte), quelques propriétés des espaces de Sobolev ainsi que des définitions des états stationnaires et des théorèmes importants.

1.1 Quelques résultats utiles

Définition 1.1. ***(Opérateurs compacts)***
Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathbb{L}(E, F)$ un opérateur linéaire continu. On dit que T est un opérateur compact si l'image par T de la boule unité de E est relativement compacte dans F ou pour toute partie B bornée de E, l'image $T.B = \{Tx; x \in B\}$ est relativement compacte dans F.
En d'autres termes, T est un opérateur compact si, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \longrightarrow \infty$.

Définition 1.2. ***(La dérivée au sens de Fréchet)***
f est dite différentiable au sens de Fréchet en un point $u \in X$ s'il existe une application linéaire T de X dans X tel que :

$$||f(u+h,x) - f(u,x) - Th|| = o(||h||) \text{ quand } \quad ||h|| \longrightarrow 0$$

T est la dérivée au sens de Fréchet de f en u et on note $T = df_u$.

Proposition 1.1. ***(Formule d'intégration par parties)***
Soient u, v deux fonctions dérivables de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$, la formule d'intégration par parties est donnée par :

$$\int_\Omega u'v\mathrm{d}x = uv|_{\partial\Omega} - \int_\Omega uv'\mathrm{d}x$$

On va énoncer le théorème des fonctions implicites qui sera utile dans notre étude, prenons le cas de la dimension 2.

Théorème 1.1. ***(Théorème des fonctions implicites)***
Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^k$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, à valeur dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$. On suppose que la dérivée partielle de f par rapport à la seconde variable est non nulle en (x_0, y_0) : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors, il existe une fonction réelle g de classe $\mathbb{C}^k$; définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et un voisinage ouvert de (x_0, y_0) dans Ω tels que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$((x,y) \in \Omega \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y = g(x)).$$

La condition $g(x_0) = y_0$ n'est pas explicitée car elle n'est qu'un cas particulier de l'équivalence. La dérivée de g au point x_0 est donnée par la formule :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Démonstration. Pour la démonstration voir [16, 5]

□

On va énoncer maintenant un résultat qui généralise la théorie spectrale des opérateurs compacts c'est l'alternative de Fredholm

Théorème 1.2. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé réel ou complexe, T un opérateur compact de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ et λ un scalaire non nul. Alors $T - \lambda Id_{\mathbb{E}}$ est soit non injectif, soit surjectif.*

Démonstration. La preuve de ce théorème se trouve dans [4] □

1.2 Quelques inégalités utiles

1.2.1 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ et $\eta(x)$ la normale extérieure au point x. Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{H}^2(\Omega)$.
Alors la formule de Green s'écrit :

1. **Première formule de Green :**

$$\int_\Omega \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \mathrm{d}\sigma$$

2. **Seconde formule de Green :**

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} \mathrm{d}\sigma$$

3. **Troisième formule de Green :**

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}) \mathrm{d}\sigma$$

1.2.2 Inégalité de Hölder

Lemme 1.1. *Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^N$ et soient $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, f une fonction de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ et g une fonction de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Alors $fg \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder s'écrit :*

$$||fg||_{\mathbb{L}^1(\Omega)} \leqslant ||f||_{\mathbb{L}^p(\Omega)} ||g||_{\mathbb{L}^q(\Omega)}.$$

1.2.3 Espaces de Sobolev

On définit l'espace de Sobolev comme suit :

Définition 1.3.
Soit Ω un ouvert de $I\!R^N$, et soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \left\{ u \in L^p(\Omega);\ \textit{tel que}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ \textit{pour tout}\ i = 1 ... N \right\}$$

- Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

  ou bien de la norme équivalente :

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

- Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{\Omega} ess\, |u| + \sup_{\Omega} ess\, |\nabla u|.$$

En particulier pour $p = 2$, on note $W^{1,2} = H^1$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad u,v \in H^1(\Omega).$$

Et la norme associée

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(||u||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Propriétés de l'espace de Sobolev

Proposition 1.2. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.$W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*
L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.4.
Soit $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.

Remarque 1.1. *Une fonction $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ alors $v \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, si pour tout $K \subset\subset \Omega$ (compact), $v \in W^{1,p}(K)$.*

Lemme 1.2. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, avec **Supp u** compact inclus dans Ω, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Inégalités de Sobolev

Théorème 1.3. *Soit* $1 \leqslant p < \infty$, *alors*
$\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *où* p^* *est donnée par* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
et il existe une constante $C = C(p, N)$ *telle que :*

$$||u||_{\mathbb{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||\nabla u||_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall u \in \mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Théorème 1.4. ***(Inégalité de Poincaré)***
On suppose que Ω *est un ouvert borné. Alors il existe une constante* C *(dépendant de* Ω *et* p*) telle que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \qquad (1 \leq p < \infty).$$

L'expression $||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *qui est équivalente à la norme* $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$ *; sur* $H_0^1(\Omega)$ *l'expression* $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v$ *est un produit scalaire qui induit la norme* $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ *équivalente à la norme* $||u||_{H^1(\Omega)}$.

Remarque 1.2. *L'inégalité de Poincaré reste valable si* Ω *est de mesure finie, ou bien si* Ω *est borné dans une direction.*

1.3 Principe du maximum

Lemme 1.3. ***(Lemme de Hopf)***
Soit B *une boule de* $\mathbb{R}^n, x_0 \in \partial B$. *Soit* u *une fonction de classe* $\mathbb{C}^2(B)$, *sur-harmonique :* $\Delta u \geqslant 0$ *dans* B. *On suppose de plus* $u \in \mathbb{C}^1(\bar{B})$ *et* $u(x) > u(x_0)$ *pour tout* $x \in B$. *Alors* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0$.

Théorème 1.5. ***(Principe du maximum fort)***
Soit Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$, *le principe du maximum fort dit que si la*

fonction atteint son maximum à l'intérieur du domaine, alors elle est constante.

Démonstration. Pour plus de détails sur le principe du maximum il suffit de voir [11] □

1.4 Principe de comparaison parabolique

Théorème 1.6. *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$*, considérons la fonction* $f = f(t,x,u)$ *telle que* f *et* $\frac{\partial f}{\partial u} \in \mathbb{C}([0,T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$
$u \in \mathbb{C}(0,T;\mathbb{C}^2(\Omega))$ *est une solution de :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= d\Delta u + f(t,x,u) & x \in \Omega, t \in [0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x) & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0,T] \end{cases}$$

Soient $\overline{u}$ *et* $\underline{u}$ *deux sous et sur solutions respectivement, vérifiant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} &\geqslant d\Delta \overline{u} + f(t,x,\bar{u}), & x \in \Omega, t \in [0,T] \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} &\leqslant d\Delta \underline{u} + f(t,x,\underline{u}), & x \in \Omega, t \in [0,T] \\ \underline{u}(x,0) &= \overline{u}(x,0) & x \in \Omega \end{cases}$$

On suppose également que $\frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}$ *pour* $x \in \partial\Omega$*. Alors :*

$$\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u} \quad dans \quad [0,T] \times \Omega$$

De plus, si $\exists (x_0,t_0) \in \Omega \times [0,T]$ *tel que* $\overline{u}(x_0,t_0) = \underline{u}(x_0,t_0)$*, alors*

$$\overline{u} = \underline{u} \quad dans \quad [0,t_0] \times \overline{\Omega}.$$

Démonstration. Voir [13, 14]. □

1.5 Théorème de Krein-Rutman

Soit l'opérateur linéaire suivant :

$$\mathbb{L} : \phi \longmapsto -d\Delta\phi - r(x)\phi$$

Théorème 1.7. *Soit r une fonction lipschitzienne sur $\bar{\Omega}$, alors il existe un unique couple (λ^*, ϕ) tel que : $\lambda^* \in \mathbb{R}$ (valeur propre principale de $\mathbb{L}$), et $\phi \in \mathbb{C}^2(\Omega)$ (fonction propre principale de $\mathbb{L}$) vérifiant :*

$$\begin{cases} -d\Delta\phi &= r(x)\phi + \lambda^*\phi & \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} &= 0, & \partial\Omega \\ \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} \phi(x) &= 1 \end{cases}$$

λ^* est la plus petite valeur propre de $\mathbb{L}$.
De plus, on a la formule de Rayleigh :

$$\lambda^* = \inf_{\phi\in\mathbb{H}^1(\Omega)/\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega [d|\nabla\phi|^2 - r(x)\phi^2(x)]\,dx}{\displaystyle\int_\Omega \phi^2(x)\,dx}.$$

Démonstration. Voir [12] □

1.6 Notions de stabilité et point d'équilibre

On considère le système autonome suivant :

$$x'(t) = f(x(t))$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne sur Ω, pour assurer l'existence et l'unicité locale.

Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibres satisfaisant $f(\bar{x}) = 0$.

Définition 1.5. *$\bar{x} \in \Omega$ est dit un point d'équilibre de système autonome si $f(\bar{x}) = 0$. Un point d'équilibre $\bar{x}$ est :*

- ***Stable*** *: si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x(0) \in \Omega$*

$$||x(0) - \bar{x}|| < \delta \Rightarrow ||x(t) - \bar{x}|| < \epsilon, \forall t \geqslant 0.$$

- ***Instable*** *: le point d'équilibre est dit instable s'il n'est pas stable.*
- ***Attractif*** *: s'il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$||x(0) - \bar{x}|| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}.$$

- ***Globalement attractif*** *: si pour tout $x(0) \in \Omega$, $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$.*
- ***Asymptotiquement stable*** *: s'il est stable et attractif.*

Définition 1.6. *Un point d'équilibre $\bar{x}$ d'un système autonome est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.*

Définition 1.7. ***(Fonction de Lyapunov)***
Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre pour le système autonome. On appelle fonction de Lyapunov pour $\bar{x}$, une fonction V telle que :

1. $V(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in D$
2. $V(x) = 0$ *si et seulement si* $x = \bar{x}$

3. *$\dot{V}(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in D$, où $\dot{V}(x) =< \nabla V(x), f(x) >$*

   V est une fonction de Lyapunov au sens strict pour $\bar{x}$ si V est une fonction de Lyapunov, de plus : pour tout

$$x \in D/\{\bar{x}\} : \dot{V} < 0$$

Théorème 1.8. ***(Théorème de Lyapunov)***

- *Si la fonction V est définie positive et $\dot{V}$ semi-définie négative sur Ω, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est stable pour le système .*
- *Si la fonction V est définie positive et $\dot{V}$ définie négative sur Ω, alors $\bar{x}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système*

Ce théorème affirme que pour montrer qu'un point d'équilibre $\overline{x}$ est stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov en ce point. Par ailleurs, pour utiliser le théorème original de Lyapunov pour montrer la stabilité asymptotique d'un système donné, nous devons déterminer une fonction V définie positive dont la dérivée $\dot{V}$ est définie négative. Dans le cas général, ceci n'est pas évident. La condition sur la dérivée $\dot{V}$ peut être allégée en utilisant le principe de LaSalle qui sera énoncé dans la section suivante :

1.7 Le principe d'invariance de LaSalle

Définition 1.8. ***(Ensemble positivement invariant)***
Un ensemble Ω est positivement invariant si toute solution $x(t)$ telle que $x(0) \in \Omega$ reste dans Ω pour $t \geqslant 0$.

Théorème 1.9. *Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système autonome en $\bar{x}$ .Soit*

$V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de Lyapunov définie positive de classe* $\mathbb{C}^1$ *telle que* $\dot{V}(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in \Omega$. *Soit* $L = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ *et* M *le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans* L. *Alors toutes les solutions tendent vers* M *quand* $t \longrightarrow \infty$. *En particulier, si* M *est réduit à* $\{\bar{x}\}$, *alors* $\bar{x}$ *est asymptotiquement stable.*

Chapitre 2

L'équilibre sans maladie

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter le modèle SIS et de faire une analyse sur l'état d'équilibre sans maladie, l'importance du taux de reproduction de base R_0 avec sa formulation variationnelle est présentée.

2.2 Le modèle

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^m$, $(m \geq 1)$ avec un bord $\partial\Omega$ régulier.

Le modèle de réaction diffusion épidémiologique (Susceptibles-Infecté-Susceptibles) "SIS" peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} S_t &= d_S \Delta S - \beta(x)SI + \gamma(x)I, \qquad x \in \Omega \quad t > 0 \\ I_t &= d_I \Delta I + \beta(x)SI - \gamma(x)I, \qquad x \in \Omega \quad t > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $S(x,t)$ et $I(x,t)$ représentent la densité des individus susceptibles et infectés à la position x et à l'instant t, respectivement.

Nous supposons que les individus se déplacent aléatoirement dans le domaine Ω avec des taux de diffusion d_S et d_I pour les individus susceptibles et infectés respectivement.
La fonction de taux de transmission de la maladie β décrit l'interaction effective entre les individus susceptibles et les individus infectés à la position x, et la fonction γ représente le taux de guérison des individus infectés à la position x.
β et γ sont des fonctions Holdérienne positives dans Ω.
De plus, nous supposons qu'il n'y a pas de flux sur le bord, i.e

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \tag{2.2}$$

Sommons les deux premières équations de (2.1), puis intégrons le résultat sur Ω, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (S+I)dx = \int_\Omega \Delta(d_S S + d_I I) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \eta}(d_S S + d_I I) = 0, \quad t > 0$$

Ce qui implique que la taille de la population est une constante donnée par :

$$\int_\Omega (S(x,t) + I(x,t))\mathrm{d}x = N. \tag{2.3}$$

Pour cela nous supposons également que les données initiales vérifient les hypothèses suivantes :

(H1) : $S(x,0)$ et $I(x,0)$ sont des fonctions continues positives en $\overline{\Omega}$, et le nombre de personnes infectées est positif c.à .d :

$$\int_\Omega I(x,0)dx > 0 \text{ et soit } \int_\Omega (S(x,0)+I(x,0))\mathrm{d}x \equiv N.$$

soit le nombre total des individus à l'instant $t=0$.

Nous définissons respectivement la région à haut risque et la région à faible risque par :

Définition 2.1. *Soient*

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : \frac{N}{|\Omega|}\beta(x) - \gamma(x) > 0\} \quad et \quad \Omega^- = \{x \in \Omega : \frac{N}{|\Omega|}\beta(x) - \gamma(x) < 0\}.$$

1. *Un domaine à haut risque $x \in \Omega^+$ si :* $\int_\Omega (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\, dx > 0.$
2. *Un domaine à faible risque $x \in \Omega^-$ si :* $\int_\Omega (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\, dx < 0.$

2.2.1 Existence globale de solution

Dans cette sous section nous établissons les résultats globaux d'existence.

Résultat général :

On énonce le résultat d'existence pour un système de Réaction-Diffusion

$$\begin{cases} u_t - d\Delta u = F(x,t,u) & \Omega, \;\; t > 0. \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0. & \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Où $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ et $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$, et soit F une fonction Lipschitzienne

Théorème 2.1. *Pour $u_0 \in L^\infty(\Omega, I\!R^m)$, et soit F une fonction Lipschitzienne, alors le problème* (2.4) *admet une unique solution globale.*

Démonstration. Pour la démonstration de ce Théorème, il suffit de voir [15, 9]. □

Résultat principal :

Soit $(\tilde{S}(x,t), \tilde{I}(x,t))$ la solution locale du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{S}_t = d_S \Delta \tilde{S} + \gamma(x)\tilde{I} & x \in \Omega, \ t > 0 \\ \tilde{I}_t = d_I \Delta \tilde{I} + \beta(x)\tilde{S}\tilde{I} - \gamma(x)\tilde{I} & x \in \Omega, \ t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ \tilde{S}(x,0) = S(x,0), \tilde{I}(x,0) = I(x,0), & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Pour avoir l'existence et l'unicité de la solution pour le modèle (2.5), on va énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Pour toutes conditions initiales $S(x,0), I(x,0) \geq 0$ avec $S(x,0) \leq c$, alors le système* (2.5) *admet une solution positive régulière (classique), de plus cette solution est globale.*

Démonstration. Le système (2.5) peut être écrit sous la forme :

$$\tilde{S}_t - d_S \Delta \tilde{S} = f(\tilde{S}, \tilde{I}), \qquad \tilde{I}_t - d_I \Delta \tilde{I} = g(\tilde{S}, \tilde{I})$$

Les fonctions f et g sont continument différentiables et localement lipschitziennes. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.1. $\square$

Théorème 2.3. *Supposons que la condition (H1)satisfaite, alors il existe une unique solution globale* $(S(x,t), I(x,t))$ *du problème* (2.1), (2.2). *De plus, il existe une constante positive* $M \equiv M(S_0, I_0, \max_{x\in\overline{\Omega}}\{\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\})$ *telle que :*

$$0 < S(x,t), I(x,t) \leq M \quad \textit{pour} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \in (0,\infty)$$

Démonstration.

Existence d'une solution locale : Il est clair que $(0,0)$ est un couple de sous solution pour problème (2.1), et de plus la solution de (2.5) est une sur solution de problème (2.1), et il en résulte qu'il existe une unique solution $(S(x,t), I(x;t))$ pour $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T_{max}[$ où T_{max} est le temps d'existence maximal, de plus les conditions initiales sont positives nous déduisons que la solution est positive dans $\bar{\Omega} \times (0, T_{max})$.

Globalité et bornitude :

Nous considérons maintenant le problème de $S(x,t)$ dans $\Omega \times (0, T_{max})$

$$\begin{cases} S_t = d_S \Delta S + (\gamma(x) - \beta(x)S)I, & x \in \Omega, \quad t \in (0, T_{max}) \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T_{max}) \\ S(x,0) = S_0(x) \leqslant \max_{x\in\bar{\Omega}} S_0(x) \end{cases} \tag{2.6}$$

Supposons qu'il existe une solution $S(x,t)$ définie sur un sous intervalle Ω de $\mathbb{R}$. Soit L l'ensemble des fonctions sur Ω telles qu'il existe une constante positive qui peut généralement dépendre des paramètres du système tel que, soit $\bar{S} \in L$:

$$\bar{S}_t - d_{\bar{S}}\Delta\bar{S} + \beta\bar{S}I \geq \gamma I$$

Puisque la solution est positive, on suppose que

$$\gamma - \beta\bar{S} > 0$$

ce qui donne
$$\bar{S} < \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} \leqslant \max\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$$

et ainsi d'après la condition initiale $S(x,0) \leqslant \max_{x\in\bar{\Omega}} S_0(x)$
Nous pouvons choisir $M_1 = \max\{\max_{x\in\bar{\Omega}} S(x,0), \max_{x\in\bar{\Omega}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\}$, alors pour toute fonction positive $I(x,t)$, M_1 et 0 sont des sur et sous solutions du problème (2.6).
Par le principe de comparaison on peut voir que $S(x,t) \leq M_1$ dans $\overline{\Omega} \times [0, T_{max}[$.
De plus $\int_\Omega I(x,t)dx \leqslant N$, il existe une constante positive M_2 dépendant de $I(x,0)$: $I(x,t) \leqslant M_2$ dans $\Omega\times[0, T_{max}[$. Par conséquent, il découle de la théorie standard des systèmes paraboliques semi-linéaires que $T_{max} = \infty$, voir par exemple([13]). $\square$

Pour faire une étude globale de notre modèle, la section suivante est dédiée à l'étude de l'équilibre de notre modèle.

2.3 L'équilibre sans maladie :

Nous considérons maintenant les équilibres de problèmes (2.1), (2.2), c'est à dire les solutions du système elliptique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -d_S\Delta\bar{S} &= -\beta(x)\bar{S}\bar{I}+\gamma(x)\bar{I} & \text{dans } \Omega \\ -d_I\Delta\bar{I} &= \beta(x)\bar{S}\bar{I}-\gamma(x)\bar{I} & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial\bar{S}}{\partial\eta} &= \dfrac{\partial\bar{I}}{\partial\eta}=0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

Ici $\bar{S}(x,t)$ et $\bar{I}(x,t)$ sont des densités d'individus susceptibles et infectés respectivement à la position x. De plus d'après (2.3), nous imposons une condition supplémentaire :

$$\int_\Omega (\bar{S}+\bar{I})\mathrm{d}x = N \tag{2.8}$$

2.3.1 Existence

Définition 2.2. *On désigne par équilibre sans maladie (disease-free equilibrium) une solution dans laquelle $\bar{I}(x)=0$ pour tout $x\in\Omega$. On la note par DFE. Pour distinguer ce type d'équilibre, on désignera un DFE par $(\tilde{S},0)$.*

Nous montrons d'abord que l'existence et l'unicité de DFE.

Proposition 2.1. *le problème* (2.7) *admet un DFE unique donné par :*

$$(\tilde{S},0)=(\frac{N}{|\Omega|},0).$$

Démonstration. Par définition des points d'équilibres, il est clair que le problème stationnaire (2.7), a comme solution $I^*=0$, par substitution dans la première équation de problème (2.7), on obtient que $d_S\Delta\tilde{S}=0$, de plus la condition aux limite $\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\eta}=0$, affirme que $\tilde{S}$ doit être une constante dans $\bar{\Omega}$

$$\int_\Omega \tilde{S}dx = N \Longrightarrow \tilde{S}=\frac{N}{|\Omega|}.$$

□

2.3.2 Stabilité locale

Pour étudier la stabilité du DFE on linéarise le problème (2.7) autour de DFE, et pour cela on pose :

$$\eta(x,t) = S(x,t) - \frac{N}{|\Omega|} \quad \text{et} \quad \xi(x,t) = I(x,t).$$

En remplaçant dans (2.1) , on obtient :

$$\begin{cases} \eta_t &= d_S\Delta\eta - \beta(\eta + \frac{N}{|\Omega|})\xi + \gamma\xi, & \text{dans } \Omega, t > 0 \\ \xi_t &= d_I\Delta\xi + \beta(\eta + \frac{N}{|\Omega|})\xi - \gamma\xi, & \text{dans } \Omega, t > 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \eta_t &= d_S\Delta\eta - (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\xi, & \text{dans } \Omega, t > 0 \\ \xi_t &= d_I\Delta\xi + (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\xi, & \text{dans } \Omega, t > 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

soit $(\eta(x,t), \xi(x,t)) = (e^{-\lambda t}\phi(x), e^{-\lambda t}\psi(x))$. On déduit alors le problème de valeur propre :

$$\begin{cases} -d_S\Delta\phi &+ & (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\psi = \lambda\phi & \text{dans } \Omega \\ -d_I\Delta\psi &- & (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\psi = \lambda\psi & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} &= & \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

A partir de (2.3)

$$e^{-\lambda t}\int_\Omega (\phi + \psi)\mathrm{d}x = \int_\Omega (\eta + \xi)\mathrm{d}x = 0$$

Donc :

$$\int_{\Omega}(\phi+\psi)\mathrm{d}x=0 \tag{2.12}$$

On remarque du système (2.10) que la seconde équation est découplée de la première ce qui nous ramène à étudier l'équation suivante :

$$\begin{cases} \xi_t &= d_I\Delta\xi+(\frac{N}{|\Omega|}\beta-\gamma)\xi, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\xi}{\partial\eta} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour cela on définit l'opérateur $\mathbb{L}$ par :

$$\mathbb{L}:\psi\longrightarrow d_I\Delta\psi+(\frac{N}{|\Omega|}\beta-\gamma)\psi$$

En appliquant le théorème de Krein-Ruthman sur cet opérateur, alors on peut écrire $\xi(x,t)$ dans la base formée par les fonctions propres de $\mathbb{L}$:

$$\xi(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k(t)\psi_k(x)$$

Pour chaque k fixé on a :

$$a_k'(t)\psi_k(x)=a_k(t)[d_I\Delta\psi_k+(\frac{N}{|\Omega|}\beta-\gamma)\psi_k]$$

Or :

$$-d_I\Delta\psi_k-(\frac{N}{|\Omega|}\beta-\gamma)\psi_k=\lambda_k\psi_k$$

Ce qui implique que :

$$a'_k(t)\psi_k(x) = -\lambda_k a_k(t)\psi_k(x) \qquad \text{tel que} \qquad a_k(t) = a_k(0)e^{-\lambda_k t}$$

Donc $\xi(x,t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\xi(x,t) = a_1(0)e^{-\lambda_1 t}\psi_1(x) + \sum_{k\geqslant 2} a_k(0)e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)$$

Remarque 2.1.

- *La persistance de la maladie : si $\lambda^* < 0$ alors on aura la croissance exponentielle des individus infectés.*
- *La disparition de la maladie : si $\lambda^* > 0$ alors on obtient une décroissance exponentielle des individus infectés.*

D'après le Théorème de Krein-Rutman1.7 on définit la valeur propre principale λ^* par :

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \lambda_1 = \inf_{\varphi\in\mathbb{H}^1(\Omega)/\{0\}} \Phi(\varphi) \\ &= \inf\left\{d_I\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega (\frac{N}{|\Omega|}\beta(x)-\gamma(x))\varphi^2\,dx \quad et \quad \int_\Omega \varphi^2\,dx = 1\right\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3.3 Proprietés de λ^*

Théorème 2.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et λ^* est la valeur propre principale de l'opérateur $\mathbb{L}$ définie dans (2.13). Alors :*

1. *λ^* est une fonction monotone strictement croissante en $d_I > 0$.*
2. *$\lambda^* \longrightarrow \min\{\gamma(x) - \dfrac{N}{|\Omega|}\beta(x) : \quad x \in \bar{\Omega}\} < 0$, quand $d_I \longrightarrow 0$.*

3. $\lambda^* \longrightarrow \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (\gamma - \frac{N}{|\Omega|}\beta)$ *; quand* $d_I \longrightarrow \infty$.

Démonstration. Pour plus de détail. Voir [8]. □

2.3.4 Le taux de reproduction de base R_0

Définition 2.3. *Le taux de reproduction de base est défini comme étant le nombre moyen de nouveau cas d'infections engendré par un individu infecté (au cours de sa période infectieuse) ; on le note par* R_0*.*

Notons par R_0 le taux de reproduction de base,la formule variationnelle suggère que nous pouvons définir R_0 comme suit :

$$R_0 = \sup\left\{\frac{\frac{N}{|\Omega|}\int_\Omega \beta(x)\varphi^2 \mathrm{d}x}{d_I\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \int_\Omega \gamma(x)\varphi^2\,dx} : \varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad et \quad \varphi \neq 0\right\}$$

Remarque 2.2. *Le taux de reproduction de base* R_0 *depend du coefficient de diffusion* d_I *et il ne dépend pas de* d_S*.*

2.4 Relation entre R_0 et λ^*

Dans le but de démontrer la relation directe entre la valeur propre principale et R_0, on présente le résultat suivant :

Proposition 2.2.

a) *Si* $\lambda^* < 0$ *alors* $R_0 > 1$*, et si* $\lambda^* = 0$ *alors* $R_0 = 1$ *et lorsque* $\lambda^* > 0$ *alors* $R_0 < 1$.

b) *Si* $\int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta\, dx \geqslant \int_\Omega \gamma\, dx$*, alors* $\lambda^* \leqslant 0$ *pour tout* $d_I > 0$.

c) *Si* $\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma$ *change de signe sur* Ω *et si* $\int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta dx < \int_\Omega \gamma \mathrm{d}x$*, alors il existe* $d_I^* > 0$ *tel que* $\lambda^* = 0$ *lorsque* $d_I = d_I^*$, $\lambda^* < 0$ *lorsque* $d_I < d_I^*$*, et* $\lambda^* > 0$ *lorsque* $d_I > d_I^*$.

Remarque 2.3. *Si* $\int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta < \int_\Omega \gamma$

$$d_I^* = \sup\left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\varphi^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\varphi|^2} : \varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad et \quad \int_\Omega (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\varphi^2 > 0 \right\}$$

Démonstration. 1. On sait que :

$$R_0 = \sup\left\{ \frac{\frac{N}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \beta\varphi^2 \mathrm{d}x}{\displaystyle\int (d_I|\nabla\varphi|^2 + \gamma\varphi^2)\, dx} : \varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad et \quad \varphi \neq 0 \right\} \tag{2.14}$$

Soit ϕ une fonction non nulle dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ pour laquelle sup est obtenue dans (2.14), ainsi :

$$R_0 = \frac{\frac{N}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \beta\phi^2\, dx}{\displaystyle\int_\Omega d_I|\nabla\phi|^2\, dx + \int_\Omega \gamma\phi^2\, dx}$$

Nous supposons que ϕ est une fonction positive, car sinon ϕ peut être remplacée par $|\phi|$. Soit v une fonction non nulle dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et considérons la fonction suivant :

$$f(\epsilon) = \frac{\frac{N}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \beta(\phi+\epsilon v)^2}{\displaystyle\int_\Omega d_I|\nabla(\phi+\epsilon v)|^2\,dx + \int_\Omega \gamma(\phi+\epsilon v)^2\,dx} \tag{2.15}$$

Puisque ϕ est un élément pour lequel sup est atteint, on a $f'(0)=0$.

En développant le carré dans (2.15), on obtient :

$f(\epsilon) =$

$$\frac{\frac{N}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \beta(\phi^2+2\epsilon v\phi+\epsilon^2v^2)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega d_I(|\nabla\phi|^2+2\epsilon\nabla\phi\nabla v+\epsilon^2|\nabla v|^2)\,dx + \int_\Omega \gamma(\phi^2+2\epsilon\phi v+\epsilon^2v^2)\,dx}$$

En prenant la dérivée par rapport à ϵ et pour $\epsilon=0$, on obtient :

$$\frac{\frac{N}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega 2\beta\phi v(\int_\Omega d_I|\nabla\phi|^2+\gamma\phi^2)\mathrm{d}x - \frac{N}{|\Omega|}\int_\Omega \beta\phi^2(2\int_\Omega d_I\nabla\phi\nabla v+2\gamma\phi v)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega d_I|\nabla\phi|^2+\int_\Omega\gamma\phi^2}$$

$= f'(0) = 0$

Donc, nous avons :

$$\frac{N}{|\Omega|}\int_\Omega \beta\phi v\,dx = \frac{\frac{N}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \beta\phi^2}{\displaystyle\int_\Omega d_I|\nabla\phi|^2+\int_\Omega\gamma\phi^2}\int_\Omega (d_I\nabla\phi\nabla v+\gamma\phi v)\,dx$$

$$\frac{N}{|\Omega|}\int_\Omega \beta\phi v\,dx = R_0(\int_\Omega d_I\nabla\phi\nabla v+\gamma\phi v)\,dx$$

$$\int_\Omega d_I \nabla\phi\nabla v + (\gamma - \frac{1}{R_0}\frac{N}{|\Omega|}\beta)\phi v\, dx = 0$$

et ceci pour toute fonction test v. Ensuite par l'identité de Green 1.2.1, nous obtenons :

$$-d_I\Delta\phi + (\gamma - \frac{1}{R_0}\frac{N}{|\Omega|}\beta)\phi = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0$$

Et considérons les deux équations suivante :

$$-d_I\Delta\phi + (\gamma - \frac{N}{|\Omega|}\frac{\beta}{R_0})\phi = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0 \tag{2.16}$$

$$d_I\Delta\psi^* + (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\psi^* + \lambda^*\psi^* = 0, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} = 0 \tag{2.17}$$

Rappelons que ϕ et ψ^* sont positives sur Ω. Utilisons ψ^* comme fonction test dans (2.16) et ϕ comme fonction test dans (2.17), et intégrons les deux équations sur le domaine Ω, on obtient :

$$d_I\int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi^*\, dx = \frac{N}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\beta}{R_0}\phi\psi^*\, dx - \int_\Omega \gamma\phi\psi^*\, dx \tag{2.18}$$

$$d_I\int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi^*\, dx = \frac{N}{|\Omega|}\int_\Omega \beta\phi\psi^*\, dx - \int_\Omega \gamma\phi\psi^*\, dx + \lambda^*\int_\Omega \phi\psi^*\, dx \tag{2.19}$$

On combine les deux équations (2.18) et (2.19), on obtient alors :

$$(1 - \frac{1}{R_0})\frac{N}{|\Omega|}\int_\Omega \beta\phi\psi^*\, dx + \lambda^*\int_\Omega \phi\psi^*\, dx = 0$$

Puisque $\int_\Omega \beta\psi^*\phi\, dx$ et $\int_\Omega \phi\psi^*\, dx$ sont positives, on conclut que λ^* et $(1 - \frac{1}{R_0})$ ont des signes opposés.

2. On sait d'après le théorème précédent que λ^* est strictement croissante en $d_I > 0$, de plus

$$\lim_{d_I \to 0} \lambda^* = \min\{(\gamma - \frac{N}{|\Omega|}\beta) : x \in \Omega\} < 0$$

Et

$$\lim_{d_I \to \infty} \lambda^* = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (\gamma - \frac{N}{|\Omega|}\beta) \leqslant 0$$

Car par hypothèse : $\int_\Omega \gamma \leqslant \int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta$, ce qui implique $\lambda^* \leq 0$ pour tout $d_I > 0$

3. On sait que λ^* est strictement croissante en $d_I > 0$, de plus

$$\lim_{d_I \to 0} \lambda^* = \min\{(\gamma - \frac{N}{|\Omega|}\beta) : x \in \Omega\} < 0$$

et par hypothèse on a :

$$\int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta \mathrm{d}x < \int_\Omega \gamma \mathrm{d}x$$

alors :

$$\lim_{d_I \to \infty} \lambda^* = \int_\Omega (\gamma - \frac{N}{|\Omega|}\beta) \geqslant 0$$

Alors l'équation $\lambda^*(d_I) = 0$ a une unique racine notée par d_I^*, de plus $\lambda^*(d_I) = 0$ change de signe en traversant la valeur d_I^*.

$\square$

Remarque 2.4.
Clairement, par la formule variationnelle si $\int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta(x)\, dx > \int_\Omega \gamma(x)\, dx$

alors $\lambda^* < 0$.

La proposition suivante montre que la stabilité de DFE dépend de la valeur de R_0 .

Proposition 2.3. *Le DFE est stable si* $R_0 < 1$ *et instable si* $R_0 > 1$.

Démonstration.
Supposons tout d'abord que $R_0 < 1$.
Nous montrons que le DFE est linéairement stable, c.à.d si (λ, ϕ, ψ) est une solution de (2.11) -(2.12) avec au moins un de ϕ ou ψ non identiquement nulle sur Ω, alors $Re(\lambda)$ doit être strictement positif.
Nous raisonnons par contradiction.
Supposons que (λ, ϕ, ψ) soit une solution de (2.11), avec au moins un de ϕ ou ψ pas identiquement nulle, et que $Re(\lambda) \leqslant 0$.
Nous montrons d'abord que $\psi \neq 0$ sur Ω. Pour cela on considère $\psi \equiv 0$ et $\phi \neq 0$, la première équation de (2.11) avec $\psi \equiv 0$ implique que :

$$d_S \Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad pour \quad x \in \Omega \quad et \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad pour \quad x \in \partial\Omega.$$

Cette équation implique que λ soit un réel positif, ce qui donne que $\lambda = 0$. Par le principe du maximum, $\phi = \phi_0 \in I\!R$ sur $\bar{\Omega}$. Il est en résulte de (2.12) avec $\psi = 0$ et que $\phi_0 = 0$.
Ce qui implique que $\phi \equiv 0$ dans Ω c'est qui est une contradiction. Nous concluons alors que ψ non identiquement nulle sur Ω.
Donc λ doit être un réel négatif dans la deuxième équation de (2.11) car $[d_I \Delta + (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)]$, est un opérateur auto-adjoint, il

en résulte de cela et de la minimalité de λ^* que $\lambda^* \leqslant \lambda \leqslant 0$.
La proposition 2.2 (a) implique que $R_0 \geqslant 1$ est une contradiction. Nous concluons que si (λ, ϕ, ψ) est une solution de (2.11) avec au moins un de ϕ ou ψ non identiquement nulle sur Ω, alors $Re(\lambda) > 0$. Cela prouve la stabilité linéaire de DFE.

- Supposons maintenant que $R_0 > 1$.
Nous allons démontrer que le DFE est linéairement instable. En effet, nous établissons qu'il existe une solution (λ, ϕ, ψ) de (2.11) avec $Re(\lambda) < 0$ et $\psi > 0$ sur Ω. Rappelons que (λ^*, ψ^*) vérifie

$$d_I \Delta\psi^* + (\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma)\psi^* + \lambda^*\psi^* = 0, \quad x \in \Omega \quad et \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{2.20}$$

et que nous pouvons prendre $\psi^* > 0$ sur Ω. D'aprés la proposition 2.2 $\lambda^* < 0$. De la première équation linéaire de (2.11) avec $(\lambda, \psi) = (\lambda^*, \psi^*)$ i.e

$$d_S \Delta\phi + \lambda^*\phi = (\frac{N}{|\Omega|} - \gamma)\psi^*; \qquad x \in \Omega \tag{2.21}$$

Possède une unique solution ϕ^* satisfaisant $\frac{\partial \phi^*}{\partial \eta} = 0$ pour $x \in \partial\Omega$.
Enfin, sommons les deux équations (2.21) avec $\phi = \phi^*$ et (2.20) puis intégrons par parties sur Ω pour obtenir $\lambda^* \int_\Omega (\phi^* + \psi^*) = 0$.
Puisque λ^* est négatif, nous concluons que $\int_\Omega (\phi^* + \psi^*) = 0$. Le probleme (2.11), a une solution $(\lambda^*, \phi^*, \psi^*)$ satisfaisant $\lambda^* < 0$ et $\psi^* > 0$ sur Ω. Par conséquent, le DFE est linéairement instable.

□

2.5 Attractivité globale de DFE

Dans cette section, nous considérons l'attractivité globale de DFE. Comme pour la plupart des modèles SI, On peut s'attendre à ce que le DFE soit globalement attractif lorsque $R_0 \leqslant 1$.
Cependant, il est généralement difficile d'obtenir de tels résultats pour les modèles de réaction-diffusion à coefficients variables (β, γ).
Ici pour notre modèle (2.1) - (2.3), nous pouvons établir de tels résultats pour deux cas.

- Cas des coefficients constants
- Cas où $d_S = d_I$

2.5.1 Le cas des coefficients constants

Nous considérons d'abord le cas où les coefficient β et γ sont des constantes positives. Dans ce cas, on peut voir que le DFE est égal à $(\tilde{S}, 0) = (\frac{N}{|\Omega|}, 0)$.
Pour mener notre discussion, nous allons intéresser principalement sur le principe d'invariance de LaSalle 1.9 pour les systèmes dynamiques non linéaires.
Pour cela on doit fixer le cadre fonctionnel, soit $X = \mathbb{L}^p(\Omega)$ avec $p > m$. Nous définissons un opérateur linéaire fermé A avec un domaine dense D(A) donnée par :

$$Au = -\Delta u, D(A) = \{u \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}$$

Alors $-A$ engendre un semi groupe analytique e^{-tA} sur X.
Soit $X_\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ l'espace de puissance fractionnaire de X par rapport à A . Puisque $X_\alpha \subset \mathbb{C}^{1,\mu}(\bar{\Omega})$ est un compact si $1+\mu < 2\alpha - \frac{m}{p}$;

on choisit α proche de 1 et p grand tel que X_α s'injecte de manière compacte dans $\mathbb{C}^{1,\mu}(\bar{\Omega})$.
Soit $P \subset X_\alpha$ le cône de toute les fonctions positives de X_α à l'intérieur non vide. Nous introduisons

$$D = \{(u,v) \in X_\alpha \times X_\alpha : \int_\Omega (u+v)\mathrm{d}x = N, \text{et } u,v \in P\}$$

Alors D est un sous ensemble fermé de $X_\alpha \times X_\alpha$ et la solution (S, I) du problème induit un système dynamique non linéaire $\{\phi(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ sur D donné par :

$$\phi(t)(S_0, I_0) := (S(x,t), I(x,t)) \in \mathbb{R}^+$$

où (S, I) est la solution de(2.1)-(2.3), avec condition initiale $(S_0, I_0) \in D$.
Pour plus de détail, voir [9].

Théorème 2.5. *Si β et γ sont des constantes positives, alors on a :*

- *Si $R_0 \leqslant 1$; le DFE est globalement attractif.*

Démonstration. Si β et γ sont des constantes, alors $R_0 = \dfrac{\beta N}{\gamma|\Omega|}$. Supposons que $R_0 \leqslant 1$, c.à.d $\dfrac{\gamma}{\beta} - \dfrac{N}{|\Omega|} \geqslant 0$. On définit une fonction à valeur réelle continument différentiable $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$V(S,I) = \frac{1}{2}\int_\Omega (S-\tilde{S})^2 \mathrm{d}x + B\int_\Omega I \mathrm{d}x$$

pour tout $(S, I) \in D$ avec B une constante positive à déterminer.

On peut vérifier que, pour tout $(S, I) \in D \cap (D(A) \times D(A))$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(S, I) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{V(\phi(t))(S, I) - V(S, I)}{t} \\
&= \int_\Omega ((S - \tilde{S})(d_S \Delta S + I(-\beta S + \gamma)))\mathrm{d}x \\
&+ B \int_\Omega (d_I \Delta I + I(\beta S - \gamma))\mathrm{d}x \\
&= -d_S \int_\Omega |\nabla S|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega I(\beta S - \gamma)(S - \tilde{S} - B)\mathrm{d}x \\
&= -d_S \int_\Omega |\nabla S|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega I(\beta S - \gamma)(S - \frac{\gamma}{\beta})\, dx
\end{aligned}$$

Où

$$B = \frac{\gamma}{\beta} - \tilde{S} = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{N}{|\Omega|}.$$

Puisque V est continument différentielle et $D \cap (D(A) \times D(A))$ est dense dans D .

$$\dot{V}(S, I) = -d_S \int_\Omega |\nabla S|^2 \mathrm{d}x - \beta \int_\Omega I(S - \frac{\gamma}{\beta})^2 \mathrm{d}x \leqslant 0, \quad \forall (S, I) \in D$$

Ainsi, V est une fonction de Lyapunov sur D.
Soit $E = \left\{(S, I) \in D, \dot{V}(S, I) = 0\right\}$ et M le plus grand sous-ensemble positivement invariant de E, il en résulte du théorème 2.3 et des arguments standard que l'orbite $\{S(t), I(t), t > 0\}$ est pré-compact dans D, donc par le principe d'invariance de LaSalle Théorème 1.9, nous avons que :

$$\lim_{t \to \infty} dist(\phi(t)(S_0, I_0), M) = 0.$$

Au vu de $\dot{V}$, $\int_\Omega |\nabla S|^2 dx = 0$ implique que S est une constante, et $\int_\Omega I(S - \frac{\gamma}{\beta})^2 \mathrm{d}x = 0$ implique que $I = 0$ où $S = \frac{\gamma}{\beta}$

Si $S = \dfrac{\gamma}{\beta}$, alors $\displaystyle\int_\Omega I \mathrm{d}x = N - \frac{|\Omega|\gamma}{\beta} \leqslant 0$.
Ce qui donne $I = 0$. Il faut donc avoir $I = 0$, et donc $E = \{(\tilde{S}, 0)\}$. Par conséquent $M = \{(\tilde{S}, 0)\}$ et il s'en suit que le DFE est globalement attractif. □

2.5.2 Le cas où $d_S = d_I$

Nous considérons le cas $d_S = d_I = d$. En additionnant les deux équations de (2.1), nous avons que $(S+I)_t = d\Delta(S+I)$, et il en résulte de la condition (2.3) que $(S(x,t)+I(x,t)) \longrightarrow \dfrac{N}{|\Omega|}$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$. D'une manière similaire au cas des coefficients constants, le résultat sur l'attractivité globale des équilibre peut être établie.

Théorème 2.6. *Si $d_S = d_I = d$ et $R_0 \leqslant 1$ alors DFE est globalement attractif.*

Démonstration. Supposons que $R_0 < 1$, soit $\epsilon > 0$.
Puisque $S(x,t) + I(x,t) \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|}$ quand $t \to \infty$, il existe un $T > 0$ tel que $S(x,t) \leqslant \dfrac{N}{|\Omega|} + \epsilon - I(x,t)$ pour tout $t > T$, alors par (2.1),(2.2), I vérifie ce qui suit :

$$\begin{cases} I_t - d\Delta I \leqslant I((\dfrac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta - \gamma - \beta I); & x \in \Omega, \quad t \in]T, \infty[\\ \dfrac{\partial I}{\partial \eta} = 0 & x \in \partial\Omega \quad t \in]T, \infty[\end{cases} \tag{2.22}$$

Soit $\tilde{I}$ la solution de problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{I}_t - d\Delta \tilde{I} = \tilde{I}((\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta) - \gamma - \beta\tilde{I}); & x \in \Omega, \quad t \in]T, \infty[\\ \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial \eta} = 0 & x \in \partial\Omega \quad t \in]T, \infty[\\ \tilde{I}(x,T) = I(x,T) \end{cases} \tag{2.23}$$

Alors par le principe de comparaison donne que $I(x,t) \leqslant \tilde{I}(x,t)$ sur $\bar{\Omega}\times (T,\infty)$.
Soit λ_ϵ la valeur propre principale de

$$d\Delta\varphi + \varphi((\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta - \gamma) + \lambda\varphi = 0,$$

sous réserve de la condition aux limites homogène de Neumann, on peut voir que le problème (2.23) à un unique équilibre positif et globalement attractif si $\lambda_\epsilon < 0$, alors qu'il n'a pas d'équilibre positif et que toutes les solutions passent par 0 si $\lambda_\epsilon \geqslant 0$.
Puisque $R_0 < 1$, nous avons $\lambda_0 = \lambda^* > 0$, ce qui implique que $\lambda_\epsilon > 0$ si ϵ est petit. Par conséquent $I(x,t) \longrightarrow 0$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$.
Il est en résulte alors :

$$S(x,t)+I(x,t) \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|} \text{ que } S(x,t) \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|} \text{ uniformément pour } x \in \bar{\Omega}$$

Si $R_0 = 1$; c-à-d que $\lambda^* = 0$, alors $\lambda_\epsilon < 0$ et $\tilde{I}(x,t)$ converge vers $\tilde{I}^*(x)$, où $\tilde{I}^*$ est l'équilibre positif correspondant.
D'autre part, $\tilde{I}^* \longrightarrow 0$ quand $\epsilon \to 0$ puisque $\lambda^* = 0$. Par conséquent, $I(x,t) \longrightarrow 0$ et $S(x,t) \longrightarrow \dfrac{N}{|\Omega|}$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$.

$\square$

Remarque 2.5.
Puisque DFE est stable et globalement attractif alors, DFE est globalement assymptotiquement stable.

Chapitre 3

État d'équilibre endémique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on démontre l'existence et la non existence de l'état d'équilibre endémique, puis on prouve l'attractivité globale dans de deux cas particuliers.

Définition 3.1. *On désigne par l'état d'équilibre endémique une solution dans laquelle $\bar{I}(x) > 0$ pour certains $x \in \Omega$, on la note par EE.*

Nous étudions d'abord l'existence de l'EE. Nous convertissons d'abord le problème(2.7) en un problème plus accessible.

Lemme 3.1. *Le couple $(\bar{S}, \bar{I})$ est une solution positive du problème* (2.7) -(2.8) *s'il s'agit d'une solution positive de problème suivant :*

$$d_I \Delta \bar{I} + \bar{I}(\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}dx - \frac{d_I}{d_S}\beta\bar{I}) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

$$\bar{S} = \frac{N}{|\Omega|} - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}dx - \frac{d_I}{d_S}\bar{I}, \qquad x \in \Omega \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \Omega \tag{3.3}$$

Démonstration. Par un calcul classique, on peut vérifier que $(\bar{S}, \bar{I})$ est une solution positive du problème (2.7) -(2.8) si et seulement si cela résout le problème suivant :

$$d_S\bar{S} + d_I\bar{I} = k, \quad x \in \Omega \tag{3.4}$$

$$d_I\Delta\bar{I} + \bar{I}(\beta\bar{S} - \gamma) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \eta} = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{3.6}$$

$$\int_\Omega (\bar{S} + \bar{I})dx = N \tag{3.7}$$

où k est une constante positive indépendante de $x \in \Omega$.

- On suppose que $(\bar{S}, \bar{I})$ est une solution de (2.7) -(2.8). On va commencer par sommer les deux premières équations du système (2.7), on obtient :

  $$\Delta(d_S\bar{S}+d_I\bar{I}) = 0, \quad x \in \Omega, \text{ et } \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(d_S\bar{S}+d_I\bar{I}) = 0, \text{ pour } x \in \partial\Omega.$$

  Par le principe du maximum 1.5, $d_S\bar{S} + d_I\bar{I} = k$ dans Ω.
  De plus, $\bar{S}, \bar{I} \geqslant 0$ dans Ω, et $N > 0$, il faut que $d_S\bar{S} + d_I\bar{I} > 0$ pour certains $x \in \Omega$.

- On suppose que $(\bar{S}, \bar{I})$ est une solution de (3.4) - (3.7) pour $k > 0$.

Sachant que les équations (3.4)-(3.7) si $x \in \Omega$ donne,

$$d_S \Delta \bar{S} = -d_I \Delta \bar{I} = \bar{I}(\beta \bar{S} - \gamma) = -\gamma(x)\bar{I} + \bar{I}\beta\bar{S}$$

$$d_S \Delta \bar{S} - \beta \bar{S}\bar{I} + \gamma \bar{I} = 0.$$

Ainsi (2.7) est satisfait.

Il faut démontrer maintenant l'équivalence entre les problèmes (3.1)-(3.3) et (3.4)-(3.7)

- D'une part, supposons que $(\bar{S}, \bar{I})$ soit une solution positive de (3.4)-(3.7), de (3.4), nous obtenons $\bar{S} = \dfrac{k - d_I \bar{I}}{d_S}$. En substituant à(3.7), on trouve :

$$k = \frac{1}{|\Omega|}(d_S N - (d_S - d_I)\int_\Omega \bar{I} dx)$$

.

Il découle ensuite de(3.4) que

$$\bar{S} = \frac{k - d_I \bar{I}}{d_S} = \frac{N}{|\Omega|} - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I} dx - \frac{d_I}{d_S}\bar{I},$$

ce qui (3.2). En substituant ce $\bar{S}$ à (3.5), nous aurons

$$d_I \Delta \bar{I} + \bar{I}[\frac{N}{|\Omega|}\beta - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}\mathrm{d}x - \frac{d_I}{d_S}\beta\bar{I}] = 0,$$

ce qui est (3.1).

- D'autre part, supposons que $(\bar{S}, \bar{I})$ soit une solution positive du problème (3.1)-(3.3). En appliquant la dérivée normale des deux cotés de (3.2) et en utilisant (3.3), nous trouvons $\frac{\partial \bar{S}}{\partial \eta} = 0$, ce qui vérifier(3.6). Par (3.2) nous avons que :

$$\frac{d_I}{d_S}\bar{I} = \frac{N}{|\Omega|} - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}dx - \bar{S}$$

et la substitution de ceci dans(3.1) donne :

$$d_I\Delta\bar{I} + \bar{I}[\beta\bar{S} - \gamma] = 0$$

qui est (3.5).

Nous intégrons ensuite les deux cotés de (3.2) sur Ω :

$$\int_\Omega \bar{S}\mathrm{d}x = N - (1 - \frac{d_I}{d_S})\int_\Omega \bar{I}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{d_I}{d_S}\bar{I}\mathrm{d}x$$

$$= N - \int_\Omega \bar{I}\mathrm{d}x$$

donc :

$$\int_\Omega (\bar{S} + \bar{I})\mathrm{d}x = N.$$

Ce qui donne (3.7).

En appliquant l'opérateur de Laplace aux deux cotés de (3.2), nous trouvons que :

$$d_S\Delta\bar{S} + d_I\Delta\bar{I} = \Delta(d_S\bar{S} + d_I\bar{I}) = 0.$$

De plus,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(d_S\bar{S} + d_I\bar{I}) = 0,$$

par le principe du maximum (Théorème 1.5), on obtient que $d_S\bar{S} + d_I\bar{I}$ est une constante. A partir de (3.7), on en déduit que cette constante doit être positive, ce qui donne (3.4).

□

Le problème (3.1)-(3.3) est plus accessible, puisque (3.1)-(3.3) sont indépendants de $\bar{S}$. De plus, le résultat indique que nous pouvons réellement nous concentrer sur un problème elliptique non local qui ne concerne que $\bar{I}$.

Lemme 3.2. *Si $\bar{I} \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$ est une solution positive local de problème elliptique :*

$$d_I \Delta \bar{I} + \bar{I}(\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}dx - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{3.9}$$

alors, nous avons :

$$(1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}dx + \frac{d_I}{d_S}\bar{I} \leqslant \frac{N}{|\Omega|}, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \tag{3.10}$$

Démonstration. Si $\bar{I}$ est *trivial*, l'inégalité est vraie.
Si $\bar{I}$ *n'est pas identiquement nul* dans $\bar{\Omega}$, on argue par absurde que l'affirmation est fausse, plus précisement on suppose que Puisque $\bar{I}$ est continue sur $\bar{\Omega}$, il atteint sa valeur maximale sur $\bar{\Omega}$, disons que $\bar{I}(x_0) = \max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{I}(x) > 0$ pour certains $x_0 \in \bar{\Omega}$.
De l'hypothèse, il faut que :

$$(1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}dx + \frac{d_I}{d_S}\bar{I}(x_0) > \frac{N}{|\Omega|}. \tag{3.11}$$

Si $x_0 \in \Omega$, on peut choisir une boule fermée B centrée en x_0 tel que $B \subset \Omega$. Par(3.8)-(3.11)

$$\begin{aligned} d_I\Delta\bar{I} &= -\bar{I}(\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - (1-\frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}\mathrm{d}x - \frac{d_I}{d_S}\beta\bar{I}) \\ &> \bar{I}(\frac{-N}{|\Omega|}\beta + \gamma + \frac{N}{|\Omega|}\beta) = \gamma\bar{I} > 0 \end{aligned}$$

nous pouvons rendre la boule petite tel que $d_I\Delta\bar{I} > 0$ dans B.
Puisque $\bar{I}$ atteint son maximum en un point intérieur x_0 de B, par le principe du maximum fort (Théorème 1.5), $\bar{I}$ doit être une constante dans B, mais ceci est impossible, puisque $d_I\Delta\bar{I} > 0$ dans B.
Donc $x_0 \in \partial\Omega$, et $I(x_0) > I(x)$ pour tout $x \in \Omega$. On peut alors trouver une boule fermée $\tilde{B} \subset \Omega$ tel que $\tilde{B} \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$. De plus, à partir de (3.8) et (3.11), nous pouvons prendre la boule assez petite de tel sorte que $d_I\Delta\bar{I} > 0$ à l'intérieur de $\tilde{B}$. Il découle ensuite du lemme de Hopf 1.3 que $\frac{\partial\bar{I}}{\partial\eta}(x_0) > 0$, ce qui est également impossible en vertu de(3.9). $\square$

3.2 Existence et unicité de EE

Par ce qui précède, s'il existe une solution positive locale $\bar{I}$ du problème elliptique (3.8)-(3.9), on peut alors définir :

$$\bar{S} = \frac{N}{|\Omega|} - (1-\frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \bar{I}dx - \frac{d_I}{d_S}\bar{I} \quad \text{pour} \quad x \in \Omega.$$

Où la positivité découle à partir (3.10). Il est en résulte que le couple $(\bar{S}, \bar{I})$ résout le problème (3.1)-(3.3).
Soit $Y = \{z \in \mathbb{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : \frac{\partial z}{\partial\eta} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}$. Pour simplifier, nous introduisons :

$$f(\tau, \bar{I}) = \frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - (1-\frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau - \frac{d_I}{d_S}\beta\bar{I}$$

.

et définie une application : $F : \mathbb{R}^+ \times Y \longrightarrow \mathbb{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ par :

$$F(\tau, \bar{I}) = d_I \Delta \bar{I} + \bar{I} f(\tau, \bar{I})$$

.

Nous considérons alors un problème de valeur propre :

$$\begin{cases} d_I \Delta \phi & + & f(\tau, 0)\phi + \lambda \phi = 0, & x \in \Omega. \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

et soit λ_τ la valeur propre principale de (3.12) où est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda_\tau = \inf \Big\{ d_I \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega (\frac{N}{|\Omega|}\beta(x) & - & \gamma(x) - (1 - \frac{d_I}{d_S}\frac{\beta(x)}{|\Omega|}\tau))\varphi^2 \, dx \\ & \text{et} & \int_\Omega \varphi^2 \mathrm{d}x = 1 \Big\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Remarque 3.1. *Notons que $\lambda_0 = \lambda^*$ où λ^* est la valeur propre principale.*

Nous énonçons maintenant un résultat bien connu sur l'existence de solution positives d'un problème elliptique.

Lemme 3.3. *Supposons que $\tau \geqslant 0$, et considérons le problème :*

$$\begin{cases} d_I \Delta \bar{I} & + & \bar{I} f(\tau, \bar{I}) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \eta} & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.14}$$

Alors, les affirmations suivantes sont vérifiées :

1. *Si* $\lambda_\tau \geqslant 0$, *la seule solution positive de* (3.14) *est* $\bar{I} = 0$.

2. *Si* $\lambda_\tau < 0$, *il existe une unique solution positive* $\bar{I} \in Y$ *de* (3.14).

Démonstration. Voir [9] □

En utilisant le théorème de la fonction implicite 1.1, nous prouvons alors le résultat suivant :

Lemme 3.4. *Supposons que* $\lambda^* < 0$ *et* $d_S > d_I$, *alors il existe une courbe* $(\tau, \bar{I}_\tau(x))$ *dans* $\mathbb{R}^+ \times Y$ *tel que* $F(\tau, \bar{I}_\tau) = 0$. *Et aussi il existe un* $T > 0$ *tel que* $\bar{I}_\tau(x) > 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$ *et* $\tau \in [0, T[$ *et* $\bar{I}_T = 0$. *De plus,* $\bar{I}_\tau$ *est décroissante et continuellement différentiable dans* τ *en* $(0, T)$.

Démonstration. Supposons que $(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) \in \mathbb{R}^+ \times Y$ satisfait $F(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) = 0$ et $\bar{I}_{\tau_0} > 0$ sur Ω. En appliquant la dérivé de Fréchet par rapport à la deuxième variable, alors par définition 1.2 on a :

$$||F(\tau, \bar{I} + w) - F(\tau, \bar{I}) - Lw|| = o(||w||) \text{ quand } ||w|| \longrightarrow 0$$

On commence par calculer le terme

$F(\tau, \bar{I} + w) - F(\tau, \bar{I}) =$

$$d_I \Delta(\bar{I} + w) + (\bar{I} + w)[\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - (1 - \frac{d_I}{d_S}\frac{\beta}{|\Omega|}\tau - \frac{d_I}{d_S}\beta(\bar{I} + w))]$$

$$-d_I \Delta \bar{I} - \bar{I}[\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}].$$

Par simplification on trouve : $F(\tau, \bar{I} + w) - F(\tau, \bar{I}) =$

$$d_I \Delta w - \frac{d_I}{d_S}\bar{I}w + w(\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}) - \frac{d_I}{d_S}\beta w^2$$

Nous concluons que la dérivée de Fréchet de F par rapport à la deuxième variable en $(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0})$ est définie comme suit :

$$F_y(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0})w = d_I \Delta w + (f(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}_{\tau_0})w, \quad \forall w \in Y.$$

Pour avoir que $F_y(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0})$ est inversible, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} d_I \Delta w & + & (f(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}_{\tau_0})w = h, & x \in \Omega. \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Soit σ_{τ_0} la valeur propre principale du problème :

$$\begin{cases} d_I \Delta \varphi & + & (f(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}_{\tau_0})\varphi + \sigma\varphi = 0, & x \in \Omega. \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

A partir de l'alternative de Fredholm Théorème 1.2, on démontre l'existence d'une solution unique pour chaque $h \in \mathbb{C}_\alpha(\bar{\Omega})$, si 0 n'est pas une valeur propre de (3.16). Pour montrer cela, notons que, puisque $F(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) = 0$, $\bar{I}_{\tau_0}$ est une vecteur propre du problème des valeurs propres :

$$\begin{cases} d_I \Delta \varphi & + & f(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) + \sigma\varphi = 0, & x \in \Omega. \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Pour la valeur propre $\sigma = 0$. Puis, utilisons le théorème de Krein-Rutmann, la positivité de $\bar{I}_{\tau_0}$ découle ce implique que $\sigma = 0$ est la valeur propre principale de(3.17). Puisque $f(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0}) - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}_{\tau_0} < f(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0})$, il en résulte que $\sigma_{\tau_0} > 0$, donc toutes les valeurs propres du problème sont positives, ce qui donne l'unique solvabilité de (3.15). La continuité de l'inverse de $F_y(\tau_0, \bar{I}_{\tau_0})$ découle des estimations classique de $\mathbb{C}^{2,\alpha}$.

Différentiabilité :

Puisque $\lambda_0 = \lambda_* < 0$, d'après lemme 3.3, il existe un unique positif $\bar{I}_0 \in Y$ tq $F(0, \bar{I}_0) = 0$. Il existe alors un unique $\bar{I}_\tau \in Y$ tq $F(\tau, \bar{I}_\tau) = 0$ pour $\tau \in [0, \tau']$ avec $\tau' > 0$, et que $\bar{I}_\tau$ est continue différentiable par rapport τ.

Décroissance :

Pour montrer que $\bar{I}_\tau$ est décroissant par rapport à τ, nous pouvons considérer $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau'$, puisque $d_S > d_I$, nous avons que :

$$(1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau_2 > (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau_1$$

Ce qui implique :

$$d_I \Delta \bar{I}_{\tau_2} - \frac{N}{|\Omega|}\beta \bar{I}_{\tau_2} - \gamma \bar{I}_{\tau_2} - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}_{\tau_2} - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau_2 \bar{I}_{\tau_2} + (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau_2 \bar{I}_{\tau_2}$$

$$> (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau_1 \bar{I}_{\tau_2}$$

Ce qui donne :

$$d_I \Delta \bar{I}_{\tau_2} + [\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - \frac{d_I}{d_S}\beta \bar{I}_{\tau_2} - (1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{\beta}{|\Omega|}\tau_1 \bar{I}_{\tau_2}]\bar{I}_{\tau_2} > 0$$

Alors $F(\tau_1, \bar{I}_{\tau_2}) > 0$, et donc $\bar{I}_{\tau_2}$ est une sous solution de l'équation $F(\tau_1, \bar{I}) = 0$. D'autre part, nous pouvons choisir une valeur suffisamment grande comme sur solution.

Ensuite, la méthode de sous et sur solution et l'unicité de la solution positive de $F(\tau_2, \tilde{I}) = 0$ implique $\bar{I}_{\tau_1} > \bar{I}_{\tau_2}$.

La courbe $(\tau, \bar{I}_\tau)$, avec $\bar{I}_\tau > 0$ continue aussi pour $\lambda_\tau < 0$. Par la forme de λ_τ dans (3.13) qui augmente par rapport à τ et aussi $\lambda_\tau > 0$ pour

un τ assez grand. Ainsi, selon le lemme3.3, il n'y a pas de solution positive de $F(\tau, \bar{I}) = 0$ si τ est assez grand.
Soit $[0, T[$ l'intervalle maximal d'existence de τ tel que $\bar{I}_\tau > 0$. Alors $\bar{I}_T = 0$. □

Le résultat analogue dans le cas où $d_S < d_I$ peut être également être prouvé de la même façon que par avant.

Lemme 3.5. *Supposons que $\lambda^* < 0$ et $d_S < d_I$. Il existe alors une courbe $(\tau, \bar{I}_\tau(x))$ dans $\mathbb{R}^+ \times Y$ tel que $F(\tau, \bar{I}_\tau) = 0$ avec $\bar{I}_\tau > 0$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $\tau \in (0, \infty)$. De plus, $\bar{I}_\tau$ croit et continument différentielle en τ sur $(0, \infty)$, et il vérifie l'estimation suivante :*

$$\int_\Omega \bar{I}_\tau dx \leqslant \frac{d_S}{d_I} N + (1 - \frac{d_S}{d_I})\tau.$$

Démonstration. L'existence et la continuité de la courbe $(\tau, \bar{I}_\tau)$ découlent d'un argument similaire à celui de la preuve du lemme 3.4. puisque $d_S < d_I$, on peut voir que $\bar{I}_\tau(x) > 0$ croit par rapport à τ et que la courbe continue quand $\tau \longrightarrow \infty$. Il reste à montrer l'estimation.
Pour tout $\tau > 0$, on faut vérifier que :

$$\hat{I} = \frac{d_S N}{d_I |\Omega|} + (1 - \frac{d_S}{d_I}) \frac{\tau}{|\Omega|}$$

est une sur solution de $F(\tau, \bar{I}) = 0$. D'autre part, $\check{I} = \bar{I}_{\check{\tau}}$ avec $\check{\tau} < \tau$ est une sous solution de $F(\tau, \bar{I}) = 0$. Alors à partir de la méthode de sou-sur solution on trouve que :

$$\bar{I}_\tau \leqslant \frac{d_S N}{d_I |\Omega|} + (1 - \frac{d_S}{d_I}) \frac{\tau}{|\Omega|}.$$

par intégration sur Ω donne l'estimation. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence de l'équilibre endémique

Théorème 3.1. *Si $R_0 > 1$, alors il existe un unique équilibre endémique.*

Démonstration. Par les Lemmes 3.1 et 3.2, il suffit de montrer que le problème (3.8), (3.9) possède une solution positive.

- **Le cas :** $d_S = d_I$
  Il découle directement du lemme 3.3.

- **le cas :** $d_S > d_I$
  Selon le lemme 3.4 il existe une courbe $(\tau, \bar{I}_\tau)$ pour tout $\tau \in [0; T[$ avec $F(\tau, \bar{I}_\tau) = 0$. Par définition de F, $\bar{I}_\tau$ est une solution du problème (3.8) -(3.9) si $\tau = \displaystyle\int_\Omega \bar{I}_\tau \mathrm{d}x$. Puisque

  $$0 < \int_\Omega \bar{I}_0 \, dx \quad et \quad T > \int_\Omega \bar{I}_T \, dx = 0.$$

  La continuité et la monotonie de $\bar{I}_\tau$ par rapport a τ implique qu'il existe un unique $\tau_0 \in [0, \tau[$ tel que $\tau_0 = \displaystyle\int_\Omega \bar{I}_{\tau_0} \, dx$.
  Par conséquent le problème (3.8) -(3.9)a une unique solution positive.

- **le cas :** $d_S < d_I$ **:**
  D'après le lemme3.5, il existe une courbe $(\tau, \bar{I}_\tau)$ avec $F(\tau, \bar{I}_\tau) = 0$.
  De plus $0 < \displaystyle\int_\Omega \bar{I}_0 \mathrm{d}x$, par la continuité et la monotonie de $\bar{I}_\tau$, et en utilisant l'estimation de $\displaystyle\int_\Omega \bar{I}_\tau \, dx$ dans le lemme 3.5, on peut démontrer qu'il existe un $\tau_0 > 0$ unique tel que $\tau_0 = \displaystyle\int_\Omega \bar{I}_{\tau_0} \, dx$

□

3.3 Non existence :

Nous discutons ensuite la non existence de l'équilibre endémique.

Théorème 3.2.

- *Si* $d_S \geqslant d_I$ *et* $R_0 \leqslant 1$ *alors EE n'existe pas.*
- *Si* $d_S < d_I$ *et* $R_0 \leqslant \frac{d_S}{d_I}$ *alors EE n'existe pas.*
- *Si* $d_S < d_I$ *et* $R_0 \leqslant 1$ *avec* $\gamma(x) = r\beta(x)$ *où* r *est une constante positive, alors EE n'existe pas.*

Démonstration.

- **1$^{\text{ére}}$ cas :** $d_S = d_I$

  Découle directement du lemme 3.3.

- **2$^{\text{ème}}$cas :** $d_S > d_I$ avec $R_0 \leqslant 1$

  On raisonne par absurde : on suppose qu'un EE (S^*, I^*) existe, Alors il y a un $\tau^* > 0$ tel que $\tau^* = \displaystyle\int_\Omega I^* \mathrm{d}x$ et $F(\tau^*, I^*) = 0$, et il en résulte du lemme 3.3 que $\lambda_{\tau^*} < 0$, puisque $f(\tau, 0)$ diminue en τ lorsque $d_S > d_I$, par la forme variationnelle de λ_τ (3.13), on trouve que $\lambda^* = \lambda_0 \leqslant \lambda_{\tau^*} < 0$, cela implique que d'après la proposition 2.2 alors $R_0 > 1$ ce qui est une contradiction.

- **3$^{\text{ème}}$cas :** $d_S < d_I$ avec $R_0 \leqslant \frac{d_S}{d_I}$

  Raisonnons par absurde : on suppose qu'un EE (S^*, I^*) existe, soit $\tau^* = \displaystyle\int_\Omega I^* \mathrm{d}x$, alors $F(\tau^*, I^*) = 0$ et cela implique que $\lambda_{\tau^*} < 0$ d'apres le lemme 3.3.

  D'autre part, du lemme 3.2, on peut voir que, pour tout $x \in \Omega$.

$$(1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega I^* \mathrm{d}x + \frac{d_I}{d_S} I^*(x) \leqslant \frac{N}{|\Omega|}.$$

On intègre sur Ω, on trouve que :

$$\tau^* = \int_\Omega I^* \mathrm{d}x \leqslant N.$$

Puisque $f(\tau, 0)$ croit en τ lorsque $d_S < d_I$ et $\lambda_N \leqslant \lambda_{\tau^*} < 0$. Notons que λ_N est la valeur propre principale du problème suivant :

$$\begin{cases} d_I \Delta\varphi & + & (\dfrac{d_I N}{d_S|\Omega|}\beta - \gamma)\varphi + \lambda\varphi = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

De la même manière que R_0, on peut définir R_0' comme suit :

$$R_0' = \sup\Big\{\frac{\dfrac{d_I N}{d_S|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \beta\varphi^2 \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega d_I|\nabla\varphi|^2 + \gamma\varphi^2 \mathrm{d}x} : \varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ et } \varphi \neq 0\Big\}$$

alors $\lambda_N < 0$ si et seulement si $R_0' > 1$, de plus $R_0' = \frac{d_I}{d_S} R_0$, $\lambda_N < 0 \Longrightarrow R_0 > \frac{d_S}{d_I}$ ce qui est une contradiction.

- **4$^{\text{ème}}$cas :** $d_S < d_I$ avec $R_0 \leqslant 1$ pour $\gamma(x) = r\beta(x)$

  Supposons que EE (S^*, I^*) existe. En procédant comme dans la preuve du lemme 3.2, on peut avoir que : pour tout x dans Ω :

$$(1 - \frac{d_I}{d_S})\frac{1}{|\Omega|}\int I^* \mathrm{d}x + \frac{d_I}{d_S} I^*(x) \leqslant \frac{N}{|\Omega|} - r$$

On intègre l'inégalité ci-dessus sur Ω, on obtient alors :

$$\int_\Omega I^* \mathrm{d}x \leqslant N - r|\Omega|,$$

et il en résulte que I^* est une sous solution du problème :

$$\begin{cases} d_I\Delta\tilde{I} & + \quad \tilde{I}(\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - \beta\tilde{I}) = 0, \qquad x \in \Omega \\ \frac{\partial\tilde{I}}{\partial\eta} & = \quad 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

Par contre, il est facile de voir que $M = \frac{N}{|\Omega|}$ est une sur solution de problème. Ensuite, par l'argument de sous-sur solution, il existe une unique solution positive du problème (3.18). Cependant puisque $R_0 \leqslant 1$, $\lambda^* \geqslant 0$ de la proposition 2.2. Il découle ensuite de la formule de λ^* et $\gamma(x) = r\beta(x)$ que $\gamma \geqslant \dfrac{N\beta}{|\Omega|}$. Ainsi, le problème n'a pas de solution positive, cela conduit à une contradiction.

□

3.4 Attractivité globale de EE

Dans cette section, nous considérons l'attractivité globale de EE. On peut s'attendre à ce que le EE soit globalement attractif lorsque $R_0 > 1$, l'analyse de l'attractivité globale est réalisée dans le cas $d_S = d_I$ et dans le cas où les coefficients sont constantes.
Le système (2.7))(2.8) a un unique équilibre endémique qui est donnée par :

$$(S^*, I^*) = (\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}, \frac{N}{|\Omega|} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\gamma(x)}{\beta(x)})$$

3.4.1 Le cas des coefficients constants

Dans ce cas supposons que $R_0 > 1$. Nous avons donc que $\dfrac{N\beta}{|\Omega|} - \gamma > 0$ et que l'équilibre endémique est $(S^*, I^*) = (\frac{\gamma}{\beta}, \frac{N}{|\Omega|} - \frac{\gamma}{\beta})$ existe.

Théorème 3.3. *Si $R_0 > 1$ et β et γ sont des constantes positives, alors EE est globalement attractif .*

Démonstration. On va définir une fonction à valeur réelle continument différentielle

$$W : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{par} \ :$$

$$W(S,I) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((S-S^*)+(I-I^*))^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}B\int_\Omega (S-S^*)^2 \mathrm{d}x,$$

pour tout $(S,I) \in D$ avec B une constante positive définie comme suit :

$$B = \frac{B_1^2}{d_S} \text{ avec } B_1 = \frac{d_S + d_I}{2\sqrt{d_I}}.$$

On peut vérifier que, pour tout $(S,I) \in D \cap (D(A) \times D(A))$.

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{W(\phi(t)(S,I)) - W(S,I)}{t} \\
&= \int_\Omega ((S-S^*)+(I-I^*))(d_S\Delta S + d_I\Delta I)\mathrm{d}x \\
&+ B\int_\Omega (S-S^*)(d_S\Delta S + I(-\beta S+\gamma))\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega (d_S|\nabla S|^2 + (d_S+d_I)\nabla S.\nabla I + d_I||\nabla I|^2)\mathrm{d}x \\
&- Bd_S\int_\Omega |\nabla S|^2\mathrm{d}x - B\beta\int_\Omega I(S-S^*)^2\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega (|B_1\nabla S + \sqrt{d_I}\nabla I|^2)\mathrm{d}x - d_S\int_\Omega |\nabla S|^2\mathrm{d}x \\
&- B\beta\int_\Omega I(S-S^*)^2\mathrm{d}x \leqslant 0,
\end{aligned}$$

Puisque W est continument différentielle et que $D \cap (D(A) \times D(A))$ est dense dans D, on trouve que $\dot{W}(S,I) \leqslant 0$ pour tout $(S,I) \in D$. Alors W est une fonction de Lyapunov sur D.

Soit

$$E' := \Big\{(S,I) \in D : \dot{W}(S,I) = 0\Big\},$$

et M' le plus grand sous-ensemble positivement invariant de E(Définition

1.8). De plus, par le principe de LaSalle (Théorème 1.9), nous avons que :

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\phi(t)(S_0, I_0), M') = 0.$$

On peut avoir que $E' = \{(S^*, I^*)\} \cup \{(\tilde{S}, 0)\}$.
Il en résulte que soit

$$(S(x,t), I(x,t)) \longrightarrow (S^*, I^*) \text{ où } (S(x,t), I(x,t)) \longrightarrow (\tilde{S}, 0), \text{ quand } t \to \infty.$$

Supposons $(S(x,t), I(x,t)) \longrightarrow (\tilde{S}, 0)$, puisque $\beta\tilde{S} - \gamma > 0$, on peut choisir $\epsilon > 0$ petit tel que $\beta\tilde{S} - \epsilon\beta - \gamma > 0$, pour que ϵ, il existe un $T > 0$ tel que $S(x,t) > \tilde{S} - \epsilon$ pour tout $(x,t) \in \bar{\Omega} \times [T, \infty[$, par (2.1), l'inégalité suivante est vraie :

$$I_t - d_I \Delta I \geqslant \beta(\tilde{S} - \epsilon)I - \gamma I \quad \text{pour} \quad (x,t) \in \Omega \times [T, \infty[.$$

Nous considérons maintenant un problème connexe :

$$\left\{\begin{array}{rcll} J_t & = & d_I \Delta J + \beta(\tilde{S} - \epsilon)J - \gamma J, & x \in \Omega, \quad t \in (T, \infty) \\ \frac{\partial J}{\partial \eta} & = & 0 & x \in \partial\Omega, \quad t \in (T, \infty) \\ J(x,T) & = & \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} I(x,T) = I_m(T), & x \in \bar{\Omega} \end{array}\right. \tag{3.19}$$

Le principe de comparaison affirme que $I \geqslant J$ sur $\bar{\Omega} \times [T, \infty[$, et on peut vérifier que

$$J = I_m(T)\exp((\beta\tilde{S} - \epsilon\beta - \gamma)t).$$

Puisque $J \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$, ce qui contredit le fait que I est bornée. Par conséquent, nous devons avoir :

$$(S(x,t), I(x,t)) \longrightarrow (S^*, I^*) \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty.$$

□

3.4.2 Le cas où $d_S = d_I$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Nous considérons le cas $d_S = d_I = d$. Dans ce cas l'équilibre endémique existe si et seulement si $R_0 > 1$.

Théorème 3.4. *Si $R_0 > 1$ et $d_S = d_I = d$, alors EE est globalement attractif.*

Démonstration. Supposons que $R_0 > 1$ c.à.d $\lambda^* < 0$. Puisque

$$S(x,t) + I(x,t) \to \frac{N}{|\Omega|},$$

il existe un $T > 0$ tel que :

$$\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon - I(x,t) \leqslant S(x,t) \leqslant \frac{N}{|\Omega|} + \epsilon - I(x,t) \quad \forall t > T$$

Ensuite, par (2.1), I satisfait l'inégalité suivant :

$$I((\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon)\beta - \gamma - \beta I) \leqslant I_t - d\Delta I \leqslant I((\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta - \gamma - \beta I).$$

Pour $(x,t) \in \Omega \times (T, \infty)$. Soient I_1 et I_2 résoudre les deux problèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcll} I_{1t} - d\Delta I_1 &=& I_1((\frac{N}{|\Omega|} - \epsilon)\beta - \gamma - \beta I_1), & x \in \Omega, t \in (T, \infty) \\ \frac{\partial I_1}{\partial \eta} &=& 0, & x \in \partial\Omega, t \in (T, \infty) \\ I_1(x,T) &=& I(x,T) & \end{array}\right. \tag{3.20}$$

Et

$$\begin{cases} I_{2t} - d\Delta I_2 &= I_2((\frac{N}{|\Omega|} + \epsilon)\beta - \gamma - \beta I_2), \qquad x \in \Omega, t \in (T, \infty) \\ \frac{\partial I_2}{\partial \eta} &= 0, \qquad x \in \partial\Omega, t \in (T, \infty) \\ I_2(x, T) &= I(x, T) \end{cases} \tag{3.21}$$

Par le principe de comparaison 1.6, nous savons que $I_1(x,t) \leqslant I(x,t) \leqslant I_2(x,t)$ sur $\bar{\Omega} \times (T, \infty)$.
Si de plus ϵ est assez petit, on a $\lambda_{+\epsilon} < 0$ et $\lambda_{-\epsilon} < 0$, et il en résulte que $I_1(x,t) \longrightarrow I_1^*(x)$ et $I_2(x,t) \longrightarrow I_2^*(x)$, où I_1^* et I_2^* sont les équilibres positives correspondants respectivement.
Quand $\epsilon \longrightarrow 0$; on obtient que $I(x,t) \longrightarrow \bar{I}(x)$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$; où $\bar{I}$ est la solution positive du problème :

$$\begin{cases} d\Delta \bar{I} + \bar{I}(\frac{N}{|\Omega|}\beta - \gamma - \beta \bar{I}) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

Encore une fois par $S(x,t) + I(x,t) \longrightarrow \frac{N}{|\Omega|}$, nous avons que $\lim\limits_{t\to\infty} S(x,t) = \frac{N}{|\Omega|} - \bar{I}(x)$ uniformément pour $x \in \bar{\Omega}$. Soit $\bar{S} = \frac{N}{|\Omega|} - \bar{I}$.
Puisque $S(x,t)$ est positive, il en est de même $\bar{S}$.
Et il est facile de voir que $(\bar{S}, \bar{I})$ satisfait à (2.7). L'unicité de EE implique que $(S^*, I^*) = (\bar{S}, \bar{I})$.

□

Remarque 3.2.

L'équilibre endémique est globalement assymptotiquement stable.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons proposé un modèle de réaction diffusion SIS et établi les résultats globaux d'existence. Nous avons ensuite examiné l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique du modèle. Pour cela, nous avons défini le taux de reproduction de base R_0 et on a démontré qu'un équilibre endémique existe uniquement si $R_0 > 1$. Nous avons ensuite mené une analyse de l'attractivité globale de DFE et EE du modèle dans deux cas.

Cependant dans notre modèle, une fois que les individus infectés se sont rétablis, ils deviennent immédiatement vulnérables et par conséquent, la maladie ne peut pas s'éteindre. Pour être plus spécifique, nous appelons le domaine Ω est :

- Un domaine à haut risque Ω^+ si : $\displaystyle\int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta\, dx > \int_\Omega \gamma\, dx.$

- Un domaine à faible risque Ω^- si : $\displaystyle\int_\Omega \frac{N}{|\Omega|}\beta\, dx < \int_\Omega \gamma\, dx.$

Par la remarque 2.4, le nombre de reproduction de base R_0 est supérieur à 1 si Ω est un domaine à haut risque, et il existe toujours un équilibre épidémique selon le théorème 3.1. Ensuite, la maladie devrait persister à long terme. Cela a été démontré pour deux cas :

- Si le taux de transmission et de récupération de la maladie sont constants

- si le taux de diffusion des individus susceptibles est égal au taux de diffusion des individus infectés.

Dans un domaine a faible risque, il existe une valeur d_I^* pour le taux de diffusion des individus infectés. Si $d_I > d_I^*$, le nombre de reproduction de base R_0 est inférieur à 1 et on s'attend à ce que la maladie s'éteigne, alors que si $d_I < d_I^*$, R_0 est supérieur à 1 et la maladie persisterait.
De plus, pour le contrôle des maladies, la formule variationnelle suggère de réduire le taux de transmission de la maladie β où d'augmenter le taux de guérison γ qui réduirait la probabilité de persistance de la maladie, ce qui est conforme aux attentes.
Pour le modèle (1), il a été démontré que lorsque l'équilibre endémique existe, sa composante I est proche de zéro alors que la mobilité des individus susceptibles approche de zéro, un tel résultat a des implication importantes pour le contrôle des maladies.

Bibliographie

[1] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, and A.L. Nevai, *Asymptotic Profiles of the Steady States for an SIS Epidemic Reaction-Diffusion Model. Discrete Contin. Dyn. Syst.* A21 (1) (2008) 1-20.

[2] P. Auger, C. Lett, J. Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie. Dunod, Paris.* 2010.

[3] F. Brauer,C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer.* 2012.

[4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle.Masson, Paris*, 1983.

[5] R.C. Cantrell, C. Cosner, *Spacial ecology via reaction diffusion equations. John Wily & Sons. Ltd.* 2003. ISBN :0-471-49301-5.

[6] K. Deng, Y. Wu, *Dynamics of a susceptible-infected-susceptible epidemic reaction-diffusion model. Proceding of Royal Society of Edinburgh*, 146A, (2016), 929-946.

[7] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, and J.A.J. Metz, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio* R_0 *in models for infectious diseases in heterogenious population . Journal of Math.Biol.* 1990.

[8] N. M. El-Bahi, *L'étude d'un modèle SIS avec diffusion. Memoir de Master*. Université de Tlemcen- 2018.

[9] D. Henry, *Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer-Verlag, Berlin-New York*. Vol.840. 1993.

[10] P. Hess , *Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity. Pitam Res, Notes in Mathematics, Vol. 247, Longman Sci. Tech, Harlaw*. 1991.

[11] F. John, *Parial differential equation, fourth ed. Vol. 1 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York*. 1982.

[12] R. Nussbaum, *Eigenvectors of nonlinear positive operators and the linear Krein-rutman theorem*, *Fixed Point Theory*, (1981), 309-330 .

[13] C.V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations Spacial. New York : Plenum Press*, 1992.

[14] L. Roques,*Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale .Quae*. 2013.

[15] F. Rothe, *Global solutions of reaction diffusion systems. Springer Verlag. Berlin Heidelberg. New York-Tokyo*. 1984.

[16] R. Roussarie et J. Roux, *Des équations différentielles aux systèmes dynamiques, dans le cas d'espaces de dimension finie. EDP Sciences* . Vol.1, 2012, P.15.

[17] H.L. Smith, H.R. Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistance.Graduate Studies in mathematics.* AMS, Providance. 2011.

[18] P. van den Driessche and J. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. . Math. Biosci.* Vol. 180, (2002) 29-48.

[19] Y. Wu, X.Zou, *Asymptotic profiles of steady states for a diffusive SISepidemic model with mass action infection mechanism. J. Differential Equations*, 261, (2016), 4424-4447.