RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID-TLEMCEN

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE DE MASTER

Option :Biomathématiques et Modélisation

présenté par :

SADAOUI Nour El Houda

Existence globale des solutions d'une classe des systèmes de réaction-diffusion

Devant le jury composé de :

M. A.MOUSSAOUI	Professeur.Université de Tlemcen	Président
M. B.ABDELLAOUI	Professeur.Université de Tlemcen	Examinateur
M. R.BENTIFOUR	M.C.B.Université de Tlemcen	Examinateur
M. K.BIROUD	M.C.B.Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire :2019-2020

Dédicace

Je dédie ce mémoire :
À mes très chers parents.
À ma sœur :Marwa.
À mes frères :Mohammed,Youcef.
À toute ma famille et spécialement à mes cousines.
À tous mes amis sans exception.
À mes collègues :Rafika,Amel ,Fatima,khadija,Siham,
Fadila,Ahlam ,Asma,Imane
et les autres collègues de ma promotion et du département.
À tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.
À tous mes enseignants.

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie chaleureusement Mr.k.Biroud qu'il m'a fait l'honneur d'accepter l'encadrement de ce mémoire .Il était très généreux à travers sont soutient,sa disponibilité , et ses conseilles et orientations qui m'ont permet de mener ce travail à son terme.

Je remercie ma famille en particulier mes parents pour leur soutien et leurs conseils.Ils ont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur.

Je remercie également mes camarades de Master II et mes amis du département pour leurs conseils et leurs idées.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Les systèmes de réaction-diffusion apparaissent naturellement dans la modélisation mathématique d'une grande variété de phénomènes, dans les sciences naturelles, l'ingénierie et l'économie, des processus de fusion, certains modèles biologiques, les processus cellulaires, l'écologie, la propagation de maladies, les processus industriels, le transport catalytique de contaminants dans l'environnement, la dynamique des populations, la propagation des flammes et des réactions chimiques et autres.

La plûpart de ceux-ci, en première vue, sont des phénomènes qui ont un dénominateur commun, la présence de diffusion (permettant à la propagation d'une épidémie où d'une substance chimique), et de réaction (qui est la manière spécifique dont les différentes phases où les composantes chimiques réagissent), ils sont génériquement appelés systèmes réaction-diffusion.

Ce travail est une contribution à l'étude de l'existence globale des solutions des systèmes de réaction-diffusion du type suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = F(u) \quad \text{sur} \quad (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$,
$u(t, .)$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, D est une matrice carrée d'ordre m définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion et F est une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ appelée terme de réaction qui est le résultat de toutes les interactions entre les composantes de u. Par exemple, en chimie u est un vecteur de concentrations chimiques, F représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations et le terme $D\ \Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction. On ajoutera une condition aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ de manière à ce que le problème (1) soit bien posé.

Ce travail est organisé de la façon suivante :
Dans le premier chapitre, nous commençons par présenter certains résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

Ensuite ,dans le deuxième chapitre,nous allons montrer l'existence globales des solutions classiques du modèle réaction-diffusion suivant :[18]

$$
(S)\begin{cases}
u_t - d_1\Delta u = w^\gamma - u^\alpha v^\beta & (0,+\infty)\times\Omega, \qquad (E_1)\\
v_t - d_2\Delta v = w^\gamma - u^\alpha v^\beta & (0,+\infty)\times\Omega, \qquad (E_2)\\
w_t - d_3\Delta w = -w^\gamma + u^\alpha v^\beta & (0,+\infty)\times\Omega, \qquad (E_3)\\
\dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial w}{\partial n}(t,x) = 0 & (0,+\infty)\times\partial\Omega,\\
u(0,x) = u_0(x) \geq 0 & x\in\Omega,\\
v(0,x) = v_0(x) \geq 0 & x\in\Omega,\\
w(0,x) = w_0(x) \geq 0 & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

Dans le deuxième chapitre ,nous allons montrer la bornitude uniforme des solutions globales d'un modèle de type Fujita.[33]

Le modèle correspondant à ce travail est :

$$
\begin{cases}
u_t - d_1\Delta u = b_1 u^{p_1} v^{q_1}, \\
 & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+ \\
v_t - d_2\Delta v = b_2 u^{p_2} v^{q_2},
\end{cases}
\tag{2}
$$

avec les conditions initiales et les conditions au bord

$$
u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{3}
$$

$$
u = v = 0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+. \tag{4}
$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on va rappeler quelques notions générales qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

1.1 Espaces Fonctionnels :

• $C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme $\|u\|_{C(\Omega)} = \max\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$.

• $C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω et on écrit :

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega).$$

• $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions de $C(\bar{\Omega})$.

• $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions u mesurables sur Ω, $1 \leq p \leq \infty$, tel que :

$$\int_\Omega |u|^p dx < \infty,$$

muni de la norme :

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u|^p dx.$$

• $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions u mesurables et vérifient $|u| \leq C$ pp (presque partout) sur Ω où C est une constante positive,muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess_{x\in\Omega}|u(x)| = inf\{C, |u| < C \ \ p.p \ \ sur \ \ \Omega\}.$$

• On définit les espaces $L^p(0,T,\mathbb{X}), 1 \leq p \leq \infty$ et $L^\infty(0,T,\mathbb{X})$ comme suit :

$$L^p(0,T,\mathbb{X}) = \{u : [0,T] \to \mathbb{X},\ \ mesurable, \int_0^T \|u\|_{\mathbb{X}}^p\ dt < \infty\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|^p_{L^p(0,T,\mathbb{X})} = \int_0^T \|u\|^p_{\mathbb{X}}\ dt.$$

$$L^\infty(0,T,\mathbb{X}) = \{u : [0,T] \to \mathbb{X},\ \ mesurable, \sup ess_{x\in\Omega}\|u(x)\|_{\mathbb{X}} < \infty\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,\mathbb{X})} = \sup ess_{x\in\Omega}\|u\|_{\mathbb{X}}.$$

• $D(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de C^∞ qui a support compact sur Ω.

1.2 Formule de Green

Théorème 1.2.1 [17]

Soit Ω un ouvert borné du frontière régulière $\partial\Omega$ et $n(x)$ la normale extérieure au point x. Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$. Alors la formule de Green s'écrit :

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma - \int_\Omega \nabla u . \nabla v\ \ dx.$$

1.3 Inégalité de Hölder

Soient $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soient u une fonction de $L^p(\Omega)$ et v une fonction de $L^q(\Omega)$. Alors l'inégalité de Hölder s'écrit :

$$\int_\Omega |uv| dx \leq (\int_\Omega |u^p| dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |v^q| dx)^{\frac{1}{q}}.$$

1.4 Inégalité de Gronwall

Théorème 1.4.1 [17]

Soient u, v et w des fonctions continues sur un intervalle $[t_0, t_1]$.
Soit $\varphi \in L^\infty(0,T); \varphi > 0$ et $\lambda \in L^1[0,T], \lambda > 0$.
Si $\exists C_1, C_2 \geq 0$ tel que $\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$ pp sur $[0,T]$.
Alors :

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds) \qquad pp \;\; sur[0,T].$$

1.5 Inégalité de Young

Soient a et b deux réels positifs où nuls et p,q des réels strictement positifs tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

1.6 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soit $1 \leq p \leq \infty$ .L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

• $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);$ tel que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1...N\}$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)},$$

pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$,

• $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$,

muni de la norme :

$$\|u\|^p_{W^{m,p}} = \sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

où, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}...\partial^{\alpha_n}_{x_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est la dérivé au sens des distributions.

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est donné par :

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_\Omega |u| + \sup_\Omega |\nabla u|.$$

En particulier pour $p = 2$,on note $W^{1,p} = H^1$.

• $H^1(\Omega)$ c'est l'espace de Sobolev défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx$$

$$= \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$,

l' espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini comme suit :

• $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$vérifiant $|\alpha| \leq m\}$,

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx,$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.6.1

L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$. $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.6.2

Soit $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$,muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable,il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.

Définition 1.6.3

Une fonction $v \in L^p_{loc}(\Omega)$, alors $v \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, si pour tout $K \subset\subset \Omega$ (compact), $v \in W^{1,p}(K)$.

Lemme 1.6.4

Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, avec *Supp* u compact inclus dans Ω,alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.7 Principe de maximum parabolique.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(x,t,u) & G_T = \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné.

• Principe de maximum faible :

Théorème 1.7.1

Soit $u \in C^2(G_T) \cap C(G_T)$ et $D\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$ dans G_T.

Supposons que $u \leq 0$ sur $\Omega \times \{0\}$ et sur $\partial\Omega \times (0,T)$.

alors $\quad u(x,t) \leq 0 \quad \forall (x,t) \in G_T$.

• Principe de maximum fort :

Théorème 1.7.2

Soit $u \in C^2(G_T)$ et $D\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$ dans G_T.

Supposons que $u \leq M$ dans G_T avec $(M \geq 0)$ et $u(x_0,t_0) = M$ pour $(x_0,t_0) \in G_T$.

alors $\quad u(x,t) = M \quad \forall (x,t) \in G_{t_0}$.

Ces résultats sont cités dans [23].

1.8 Principe de comparaison parabolique

Ces résultats sont cités dans [23].

Théorème 1.8.1

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$,

$u \in C(0, T; C^2(\Omega))$ est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x,t,u) & \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \times [0,T], \end{cases}$$

avec f est lipschitzienne en u,et quasi monotone,

et soient v_1, v_2 deux sous-sur solutions respectivement ,vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial t} \geq D\Delta v_2 + f(x,t,v_2) & \Omega \times [0,T] \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} \leq D\Delta v_1 + f(x,t,v_1) & \Omega \times [0,T] \\ v_1(0,x) \leq v_2(0,x) & \Omega \end{cases}$$

On suppose également que $\frac{\partial v_1}{\partial n} \leq 0 \leq \frac{\partial v_2}{\partial n}$ pour $x \in \partial\Omega$ et $\forall t > 0$.

Alors

$$v_1 \leq u \leq v_2 \quad dans \ \ [0,T] \times \Omega$$

De plus ,si $\exists (x_0, t_0) \in \Omega \times [0,T]$ tel que $v_2(x_0,t_0) = v_1(x_0,t_0)$,

alors

$$v_2 = v_1 \ \ dans \ \ [0, t_0] \times \bar{\Omega}.$$

1.9 Semi-groupes de contractions

Définition 1.9.1

On appelle Semi groupe continue de contraction une famille à un paramètre $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires continues sur $\mathbb{E}$ un espace de Banach tel que :

- ⋆ $\|S(t)\|_{L(\mathbb{E})} \leq 1, \forall t \geq 0.$
- ⋆ $S(0) = I.$
- ⋆ $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2) \forall t_1, t_2 \geq 0.$
- ⋆ $\forall u_0 \in \mathbb{E}, S(t)u_0 \in C([0, +\infty[, \mathbb{E}).$

Définition 1.9.2

On dit que $A : D(A) \subset \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est un générateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)_{t\geq 0}$,si

$$D(A) = \{u \in \mathbb{X} : \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} existe\},$$

$$Au = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, pour\ \ tout\ \ u \in D(A).$$

1.10 Théorème de Hille-Yoshida (homogènes)

Théorème 1.10.1

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty); \mathbb{H}) \cap C([0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & sur\ \ [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus on a : $|u(t)| \leq |u_0|$ et $|\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$

1.11 Théorème de Hille-Yoshida(non homogènes)

Théorème 1.11.1

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) & sur\ [0,T] \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach et A un opérateur de $D(A) \subset \mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$.

Supposons que A est m-accrétif dans $\mathbb{X}$, alors pour tout $u_0 \in D(A)$ et tout $f \in C^1([0,T];\mathbb{X})$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0,T];\mathbb{X}) \cap C([0,T];D(A))$$

unique solution de (1.1).De plus u est donnée par la formule

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Où $T(t)$ désigne le semi-groupe engendré par $-A$.

Ces deux théorèmes sont cités dans [17].

Lemme de régularisation

Soit w une solution classique de

$$\begin{cases} w_t - d\Delta w = F & \text{sur} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ w = 0 & \text{sur} \quad (0,T) \times \partial\Omega, \\ w(0) = w_0 & \text{sur} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $d > 0$ alors on a :

$$\|w(t)\|_{L^r(Q_T)} \leq C[\|F\|_{L^q(Q_T)} + \|w_0\|_{L^q(Q_T)}], \tag{1.3}$$

avec $\frac{1}{r} > \frac{1}{q} - \frac{2}{N+2}$ si $q < \frac{N+2}{2}$ et avec $r = \infty$ si $q > \frac{N+2}{2}$.

Cette proposition est cité dans [28].

Chapitre 2

Existence globale des solutions classiques d'un modèle réaction-diffusion

2.1 Introduction

Dans ce chapitre,on s'intéresse à l'étude de l'existence globale des solutions classiques du système réaction-diffusion suivant :

$$(S)\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = w^\gamma - u^\alpha v^\beta & (0,+\infty)\times\Omega, & (E_1)\\ v_t - d_2\Delta v = w^\gamma - u^\alpha v^\beta & (0,+\infty)\times\Omega, & (E_2)\\ w_t - d_3\Delta w = -w^\gamma + u^\alpha v^\beta & (0,+\infty)\times\Omega, & (E_3)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial n}(t,x) = \dfrac{\partial w}{\partial n}(t,x) = 0 & (0,+\infty)\times\partial\Omega, & \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0 & x\in\Omega, & \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0 & x\in\Omega, & \\ w(0,x) = w_0(x) \geq 0 & x\in\Omega. & \end{cases}$$

Avec Ω un ensemble ouvert régulière borné de $\mathbb{R}^N$,et $(d_1, d_2, d_3, \alpha, \beta, \gamma) \in (0,+\infty)^3 \times [1,+\infty)^3$.

Si α, β et γ sont des constantes positives alors le système (S) décrit un exemple d'une réaction chimique de type :

$$\alpha U + \beta V \rightleftharpoons \gamma W$$

tels que u,v et w représentent la densité de U,V et W respectivement.

Notons que le système (S) vérifie deux propriétés principales, à savoir :

- **(P)** La positivité des solutions de (S) est préservée pour toujours :

  Notons : $f(u,v,w) = w^\gamma - u^\alpha v^\beta$, $g(u,v,w) = w^\gamma - u^\alpha v^\beta$, $h(u,v,w) = -w^\gamma + u^\alpha v^\beta$.

  Nous avons ,$\forall u \geq 0,\ f(0,v,w) \geq 0,\quad \forall v \geq 0,\ g(u,0,w) \geq 0,$ $\forall w \geq 0,\ h(u,v,0) \geq 0.$

- **(M)** La masse totale des composantes u, v et w est a priori borné sur tous les intervalles finis $(0,t)$:

$$f + g + 2h \leq 0.$$

Définition 2.1 *La solution classique de (S) dans $Q_T = (0,T) \times \Omega$ signifie :*

- $(u,v,w) \in C([0,T]; L^1(\Omega)^3) \cap L^\infty([0,\tau] \times \Omega)^3, \forall \tau \in (0,T)$ *;*

- $\forall k, l = 1, ..., N, \forall p \in (1,+\infty)$
  $\partial_t u, \partial_t v, \partial_t w, \partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v, \partial_{x_k} w, \partial_{x_k x_l} u, \partial_{x_k x_l} v, \partial_{x_k x_l} w, u, v, w \in L^p((0,T)\times \Omega)$;

- *les équations dans (S) sont satisfaites presque partout.*

Définition 2.2 *la solution faible de (S) dans $Q_T = (0,T) \times \Omega$: nous entendons essentiellement solution au sens de distributions où de manière équivalente ici, solution au sens de la formule des variations des constantes avec les semi groupes correspondants. Plus précisément :*

$$u(t) = S_{d_1}(t)u_0 + \int_0 S_{d_1}(t-s)(w^\gamma(s) - u^\alpha(s)v^\beta(s))ds,$$
$$v(t) = S_{d_2}(t)v_0 + \int_0 S_{d_2}(t-s)(w^\gamma(s) - u^\alpha(s)v^\beta(s))ds,$$
$$w(t) = S_{d_3}(t)w_0 + \int_0 S_{d_3}(t-s)(-w^\gamma(s) + u^\alpha(s)v^\beta(s))ds,$$

tel que $S_{d_i}(.)$ c'est le semi groupe généralisé dans $L^1(\Omega)$ par $-d_i\Delta$ avec des conditions de Neumann homogènes au bord ,$1 \leq i \leq 3$.

Pour obtenir des solutions u,v **et** w **du système** (S) **uniformément bornés dans** $L^1(\Omega)$ on va intégrer simplement la somme $(E_1)+(E_2)+2(E_3)$ dans l'espace et le temps, et prenons en compte les conditions aux limites $(\int_\Omega \Delta(d_1u+d_2v+2d_3w)=0)$, alors on obtient que :

$$\int_\Omega u(t)+v(t)+2w(t)=\int_\Omega u_0+v_0+2w_0 \quad t\geq 0, \tag{2.1}$$

grâce à la positivité de u, v et w nous déduisons de l'équation (2.1) que :

$$\forall t\geq 0,\ \ \|u(t)\|_{L^1(\Omega)}, \|v(t)\|_{L^1(\Omega)}, \|w(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0+v_0+2w_0\|_{L^1(\Omega)}, \tag{2.2}$$

autrement dit, la masse totale des trois composantes u, v et w n'explose pas, alors $u(t), v(t)$ et $w(t)$ restent uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$.

Si $u_0, v_0, w_0 \in L^\infty(\Omega)$, l'existence locale et l'unicité et la bornitude uniforme des solutions positives de (S) sont obtenus dans [28] .

Plus précisément, il existe $T>0$ et une solution classique unique (u, v, w) de (S) sur $[0, T)$. Si T_{max} dénote le plus grand de T, alors nous avons :

$$\text{Si} \quad (T_{max}<+\infty) \Longrightarrow$$

$$\lim_{t\longrightarrow T_{max}} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|w(t)\|_{L^\infty(\Omega)})=+\infty. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1 *Pour étudier l'existence globale des solutions du système (S), c'est-à-dire déterminer si* $T_{max}=+\infty$*, nous utilisons la contra-posée de la caractérisation (2.3) du temps maximal d'existence :*

S'il existe une fonction : $H:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ *continue tel que :*

$$\forall t\in[0, T_{max}), \qquad \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|w(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq H(t). \tag{2.4}$$

Alors : $\qquad T_{max}=+\infty.$

• **Si les coefficients du diffusion sont égaux** ($d_1=d_2=d_3=d$) **alors :**

posons $Z=u+v+2w$ vérifie le système suivant :

$$(E)\begin{cases} Z_t-d\Delta Z=0 & (0,+\infty)\times\Omega,\\ \frac{\partial Z}{\partial n}=0 & (0,+\infty)\times\partial\Omega,\\ Z(0,x)=Z_0(x) & x\in\Omega,\end{cases}$$

avec $\quad Z_0(x) = u_0(x) + v_0(x) + 2w_0(x),$

par le principe de maximum on déduit que :

$$\|u(t) + v(t) + 2w(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 + v_0 + 2w_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad t \geq 0,$$

grâce à la positivité des solutions u, v et w on obtient alors que :

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|2w(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 + v_0 + 2w_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \ t \geq 0,$$

autrement dit :

$u(t), v(t)$ et $w(t)$ sont uniformément bornés dans $L^\infty(\Omega)$,

alors : $\quad T_{max} = +\infty.$

- **Dans le cas où les coefficients du diffusion sont différents :**

L'existence globale est considérablement plus compliqué. Il a été étudié par plusieurs auteurs dans les cas suivants :
1) $\underline{\alpha = \beta = \gamma = 1}$:

L'existence globale de la solution classique a été obtenu par :
$*$ Rothe[28] pour la dimension $N \leq 5$.

$*$ Pierre[25] et Morgan[22] pour tout dimension N .

2) $\underline{\gamma = 1 \text{ pour tout } \alpha \text{ et } \beta}$:

$*$ L'existence globale du solution classique a été prouvé par Feng[10] pour tout dimension N .

3) $\underline{\alpha + \beta \leq 2 \text{ où } \gamma \leq 2 \text{ :}}$

$*$ L'existence globale du solution faible a été prouvé par Pierre [24] pour u_0, v_0, w_0 dans $L^2(\Omega)$.

Ce travail a pour but de généraliser les travaux des recherches des [[10], [22], [25], [28] et [[18], [24]]. **Nous avons décidé de concentrer dans ce chapitre sur la question de l' existence globales des solutions classiques dans $L^\infty(\Omega)$ et dans le cas des conditions aux limites homogènes de Neumann,** et dans les cas suivants :

- $\alpha + \beta < \gamma$;
- ($d_1 = d_3$ où $d_2 = d_3$) $\forall(\alpha, \beta, \gamma)$;
- $d_1 = d_2$ $\forall(\alpha, \beta, \gamma)$ tel que $\alpha + \beta \neq \gamma$;
- $1 \leq \gamma < \frac{N+6}{N+2}$ $\forall$ α et β.

2.2 Existence globale des solutions classiques

D'abord on va énoncer un des ingrédients principaux pour la preuve des nos résultats, c'est le lemme suivant qui est basé sur les effets de régularisation d'équation de la chaleur. Ce lemme a été introduit par Hollis-Martin-Pierre dans [16] .

Lemme 1 :

Soit $T > 0$ et (Φ, Ψ) la solution classique de :

$$\begin{cases} \Phi_t - d_1\Delta\Phi = f(\Phi, \Psi) & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ \Psi_t - d_2\Delta\Psi = g(\Phi, \Psi) & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial n}(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ \Phi(0, x) = \Phi_0(x) & x \in \Omega, \\ \Psi(0, x) = \Psi_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

Supposons que $f + g = 0$,alors pour tout $p \in (1, +\infty)$,il existe C tel que pour tout $t \in (0, T)$ on a :

$$\|\Psi\|_{L^p(Q_T)} \leq C[\ \|\Phi\|_{L^p(Q_T)} + 1]. \tag{2.5}$$

La version générale de ce lemme a été cité dans [24].

• **Premier cas : $\alpha + \beta < \gamma$**

Théorème 1 :

Supposons que $0 \leq u_0, v_0, w_0 \leq M$ avec M est un réel positif.
Si $\alpha + \beta < \gamma$, alors le système (S) admet une solution classique globale.

Preuve :

Soit $T \in (0, T_{max})$ et $t \in (0, T]$, grâce à la positivité de u,v et w, nous déduisons d'après l'équation (E_1) que u est borné par U la solution du problème suivant :

$$(P_1) \begin{cases} U_t - d_1 \Delta U = w^\gamma & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n}(t,x) = 0 & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ U(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

et en déduisant aussi d'après l'équation (E_2) que v est borné par V la solution du problème suivant :

$$(P_2) \begin{cases} V_t - d_2 \Delta V = w^\gamma & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \frac{\partial V}{\partial n}(t,x) = 0 & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ V(0,x) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

Par conséquent, il suffit de montrer que $w \in L^p(Q_T)$ pour p assez grand.

• soit $q > 1$, multiplions (E_3) par w^q et l'intégrons sur Q_T,on obtient que :

$$\frac{1}{q+1} \int_\Omega w^{q+1}(T) + q d_3 \iint_{Q_T} |\nabla w|^2 w^{q-1} + \iint_{Q_T} w^{q+\gamma} = \iint_{Q_T} u^\alpha v^\beta w^q + K_0 \tag{2.6}$$

avec

$$K_0 = \frac{1}{q+1} \int_\Omega w_0^{q+1}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder,on obtient alors que :

$$\iint_{Q_T} u^\alpha v^\beta w^q \leq \|u\|^\alpha_{L^{\alpha r}(Q_T)} \|v\|^\beta_{L^{\beta S}(Q_T)} \|w\|^q_{L^{\gamma+q}(Q_T)} \tag{2.7}$$

avec

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{q}{q+\gamma} = 1$$

Or, $\alpha + \beta < \gamma$, alors on peut choisir r tel que $r\alpha \leq q+\gamma$ et s tel que $s\beta \leq q+\gamma$. Alors, $L^{q+\gamma}(Q_T) \subset L^{\alpha r}(Q_T)$ et $L^{q+\gamma}(Q_T) \subset L^{\beta s}(Q_T)$.
Par conséquent il existe C_1 tel que :

$$\iint_{Q_T} u^\alpha v^\beta w^q \leq C_1 \|u\|^\alpha_{L^{\gamma+q}(Q_T)} \|v\|^\beta_{L^{\gamma+q}(Q_T)} \|w\|^q_{L^{\gamma+q}(Q_T)}, \tag{2.8}$$

d'après le lemme 1,il existe C_2 tel que :

$$\|u\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)} \leq C_2(1 + \|w\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)}), \tag{2.9}$$

et il existe une autre constante C_3 tel que :

$$\|v\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)} \leq C_3(1 + \|w\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)}). \tag{2.10}$$

D'après (2.9) et (2.10) on va estimer (2.8), on obtient alors que :

$$\iint_{Q_T} u^\alpha v^\beta w^q \leq C_4(1 + \|w\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)})^\alpha (1 + \|w\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)})^\beta (1 + \|w\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)})^q. \tag{2.11}$$

Si $\|w\|_{L^{\gamma+q}(Q_T)} \leq 1$ **alors la preuve c'est terminée.**

Sinon , il existe C_5 tel que :

$$\iint_{Q_T} u^\alpha v^\beta w^q \leq C_5 \|w\|^{\alpha+\beta+q}_{L^{\gamma+q}(Q_T)}, \tag{2.12}$$

alors on va déduire d'après l'égalité (2.6) que :

$$\iint_{Q_T} w^{q+\gamma} \leq C_5 \|w\|^{\alpha+\beta+q}_{L^{\gamma+q}(Q_T)} + K_0. \tag{2.13}$$

Notons $R := \iint_{Q_T} w^{q+\gamma}$,et estimons l'inégalité (2.13), on obtient que :

$$R \leq C_5 R^{\frac{q+\alpha+\beta}{q+\gamma}} + K_0. \tag{2.14}$$

Or $q + \alpha + \beta < q + \gamma$, on va appliquer l'inégalité de Young à (2.14), on obtient alors que :

$$(1 - \varepsilon)R \leq K_0 + C_6. \tag{2.15}$$

Ainsi, nous allons choisir un $\varepsilon \in (0, 1)$, alors, on va trouver que :

$$\|w\|_{L^{q+\gamma}(Q_T)} \leq C_7. \tag{2.16}$$

Revenons à (P_1) et (P_2) ,et choisissons q tel que $\frac{q+\gamma}{\gamma} > \frac{N+2}{2}$,[19], on obtient alors que :

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_8, \tag{2.17}$$

$$\|v\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_9. \tag{2.18}$$

Revenons à (E_3), alors on va déduire d'après (2.17) et (2.18) qu'il existe C_{10} tel que :

$$\|w\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_{10}, \tag{2.19}$$

cela implique que $T_{max} = +\infty$.

■

• **Deuxième cas : $d_1 = d_3$ où $d_2 = d_3$ où $d_1 = d_2$:**

Théorème 2 :

Supposons que $0 \leq u_0, v_0, w_0 \leq M$ avec M est un réel positif.

(i) Si $d_1 = d_3$ où $d_2 = d_3$ alors, le système (S) admet une solution globale $\forall(\alpha, \beta, \gamma)$.

(ii) Si $d_1 = d_2$ alors ,le système (S) admet une solution globale $\forall(\alpha, \beta, \gamma)$ tel que $\alpha + \beta \neq \gamma$.

Preuve :

(i) $d_1 = d_3 = d$:

nous avons que :

$(u+w)_t - d\Delta(u+w) = 0\,;\ \ \dfrac{\partial(u+w)}{\partial n} = 0\,;\ (u+w)(0,x) = u_0(x)+w_0(x) \geq 0.$

Par le principe de maximum on déduit que :

$$\|u(t)+w(t)\|_\infty \leq \|u_0+w_0\|_\infty, \tag{2.20}$$

grâce à la positivité des solutions u et w on déduit que $u(t), w(t)$ sont uniformément bornés dans $L^\infty(\Omega)$.

Revenons à (E_2),[19], donc on peut conclure que v est uniformément borné dans $L^\infty(\Omega)$.
Cela implique que : $\quad T_{max} = +\infty$.

(ii) $d_1 = d_2 = d$:

Le cas de $\alpha+\beta < \gamma$ est dêja était traité dans le théorème1,il ne reste donc qu'à démontrer le cas $\gamma < \alpha+\beta$ si $u_0 \neq v_0$.

Si $u_0 = v_0$ le résultat est évident.

Revenons au cas de $d_1 = d_2 = d$ si $(u_0 \neq v_0)$ alors on a :

$(u-v)_t - d\Delta(u-v) = 0\,;\qquad \dfrac{\partial(u-v)}{\partial n} = 0\,;\qquad (u-v)(0,x) = u_0(x)-v_0(x).$

par le principe de maximum on a : $\|u(t)-v(t)\|_\infty \leq \|u_0-v_0\|_\infty = C$,

et nous avons aussi que :

$$\begin{aligned} u^{\alpha+\beta} &= u^\alpha v^\beta + u^\alpha(u^\beta - v^\beta) \\ &= u^\alpha v^\beta + u^\alpha \beta(\theta u + (1-\theta)v)^{\beta-1}(u-v) \qquad \theta \in (0,1) \\ &\leq u^\alpha v^\beta + u^\alpha \beta 2^{\beta-1} C(u^{\beta-1} + v^{\beta-1}). \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young , alors on trouve qu'il existe $C_{11} > 0$ et $C_{12} > 0$ tel que :

$$C_{11} u^{\alpha+\beta} \leq u^\alpha v^\beta + C_{12}. \tag{2.21}$$

On remplace (2.21) dans (E_1) on obtient que :

$$u_t - d_1\Delta u + C_{11}u^{\alpha+\beta} \leq w^\gamma + C_{12}. \tag{2.22}$$

Soit $q > 1$, on va multiplier (2.22) par u^q et l'intégrer sur Q_T,on obtient que :

$$\frac{1}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}(T) + qd_2\iint_{Q_T}|\nabla u|^2u^{q-1} + C_{11}\iint_{Q_T}u^{\alpha+\beta+q} \leq \iint_{Q_T}w^\gamma u^q + C_{12}\iint_{Q_T}u^q + K_1, \tag{2.23}$$

avec

$$K_1 = \frac{1}{q+1}\int_\Omega u_0^{q+1},$$

d'après l'inégalité de Hölder on obtient que :

$$\iint_{Q_T}w^\gamma u^q \leq (\iint_{Q_T}w^{\gamma r})^{1/r}(\iint_{Q_T}u^{qs})^{1/s} \tag{2.24}$$

avec : $r = \frac{\alpha+\beta+q}{\gamma}$ et $s = \frac{\alpha+\beta+q}{q+\alpha+\beta-\gamma}$.

Le lemme 1 implique qu'il existe C_{13} tel que :

$$(\iint_{Q_T}w^{\gamma r})^{1/r} = \|w\|^\gamma_{L^{q+\alpha+\beta}(Q_T)} \leq C_{13}^\gamma(1 + \|u\|_{L^{q+\alpha+\beta}(Q_T)})^\gamma.$$

Si $\|u\|_{L^{q+\alpha+\beta}(Q_T)} \leq 1$ **alors la preuve c'est terminée .**

Sinon, il existe C_{14} tel que :

$$(\iint_{Q_T}w^{\gamma r})^{1/r} \leq C_{14}\|u\|^\gamma_{L^{q+\alpha+\beta}(Q_T)}, \tag{2.25}$$

or, $qs < q + \alpha + \beta$, alors on a : $L^{q+\alpha+\beta}(Q_T) \subset L^{qs}(Q_T)$,
ainsi il existe C_{15} tel que :

$$(\iint_{Q_T}u^{qs})^{1/s} \leq C_{15}\|u\|^q_{L^{q+\alpha+\beta}(Q_T)}. \tag{2.26}$$

Notons $S = \iint_{Q_T} u^{q+\alpha+\beta}$.Estimons (2.25) et (2.26),on trouve que :

$$\iint_{Q_T} w^{\gamma} u^{q} \leq C_{16} S^{\frac{q+\gamma}{q+\alpha+\beta}}. \tag{2.27}$$

De plus $L^{q+\alpha+\beta}(Q_T) \subset L^{q}(Q_T)$ alors, il existe C_{17} tel que :

$$C_{12} \iint_{Q_T} u^{q} \leq C_{17} S^{\frac{q}{q+\alpha+\beta}}. \tag{2.28}$$

Or, $\gamma < \alpha+\beta$, on applique l'inégalité de Young ,on obtient alors qu'il existe

C_{18} tel que :

$$C_{16} S^{\frac{q+\gamma}{q+\alpha+\beta}} \leq \frac{\varepsilon}{2} S + C_{18}. \tag{2.29}$$

On applique l'inégalité de Young une autre fois et on obtient alors qu'il existe C_{19} tel que :

$$C_{17} S^{\frac{q}{q+\alpha+\beta}} \leq \frac{\varepsilon}{2} S + C_{19}. \tag{2.30}$$

Par conséquent (2.23) implique que :

$$(C_{11} - \varepsilon) S \leq C_{18} + C_{19} + K_1. \tag{2.31}$$

Choisissons $\varepsilon < C_{11}$ dans (2.31) , alors il existe C_{20} tel que :

$$\|u\|_{L^{q+\alpha+\beta}(Q_T)} \leq C_{20}, \tag{2.32}$$

grâce à l'estimation (2.32) et le lemme 1 , il existe C_{21} tel que :

$$\|w\|_{L^{q+\alpha+\beta}(Q_T)} \leq C_{21}. \tag{2.33}$$

Revenons à (P_1) et (P_2) et choisissons q tel que $\frac{q+\alpha+\beta}{\gamma} > \frac{N+2}{2}$,[19],on obtient alors que :

$$\|u\|_{L^{\infty}(Q_T)} \leq C_{22}. \tag{2.34}$$

$$\|v\|_{L^{\infty}(Q_T)} \leq C_{23}. \tag{2.35}$$

Revenons à (E_3) alors on va déduire d'après (2.34) et (2.35) qu'il existe C_{24} tel que :

$$\|w\|_{L^{\infty}(Q_T)} \leq C_{24}. \tag{2.36}$$

Cela implique que $T_{max} = +\infty$.

$\blacksquare$

• **Troisième cas** : $1 \leq \gamma < \frac{N+6}{N+2}$ $\forall$ α et β

Théorème 3 :

Supposons que $0 \leq u_0, v_0, w_0 \leq M$ avec M est un réel positif.
Si $1 \leq \gamma < \frac{N+6}{N+2}$ alors le système (S) admet une solution globale pour tout $(\alpha, \beta) \in [1, +\infty)^2$.

Preuve :

Soit $T \in (0, T_{max})$ et $t \in (0, T]$, puisque u, v et w sont positives alors on va déduire d'après l'équation (E_1) que u est borné par U la solution du problème :

$$(P_1) \begin{cases} U_t - d_1 \Delta U = w^\gamma & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n}(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \\ U(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

Il suffit de montrer que $w \in L^p(Q_T)$ pour p large. pour cela on distingue le cas de $\gamma = 1$ et le cas de $\gamma > 1$.

$\star$ $\gamma = 1$ et $\alpha, \beta \geq 1$:

Rappelons que l'existence globale des solutions classiques pour (S) lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 1$ a été étudié par plusieurs auteurs.
Il a été obtenu par Rothe [28] pour la dimension $N \leq 5$.
Plus tard, il a été prouvé par Pierre [25] pour toutes les dimensions N, puis par Morgan[22] .
Feng[10] a prouvé l'existence globale dans le cas $\gamma = 1$ indépendamment de α et β et avec des conditions aux limites plus générales.

Dans notre preuve, nous utilisons une idée introduit dans [25] était appliqué dans [20].

Pour tout $p \geq 1$, on déduit d'après (P_1) et la propriété du semi groupe que :

$$\|u(t)\|_p \leq \|u_0\|_p + \int_0^t \|w(s)\|_p \, ds. \tag{2.37}$$

On va appliquer l'inégalité de Hölder pour $p > 1$ et en utilisant (2.5) ,on obtient alors que :

$$\int_0^t \|w(s)\|_p \, ds \leq t^{1/p'} (\int_0^t \int_\Omega w^p \, dx \, ds)^{1/p} \leq t^{1/p'} C_{25} [1 + \int_0^t \int_\Omega u^p \, dx \, ds)^{1/p}]. \tag{2.38}$$

avec $p' = \frac{p}{p-1}$.

pour $t \in (0, T]$, soit $h(t) := \int_\Omega |u(t,x)|^p dx$.

L'inégalité (2.37) peut écrit comme suit :

$$h(t)^{1/p} \leq C_{26} + c_{27} (\int_0^t h(s) \;\, ds)^{1/p}, \tag{2.39}$$

ainsi

$$h(t) \leq 2^{p-1} C_{26}^p + 2^{p-1} C_{27}^p \int_0^t h(s) \, ds, \tag{2.40}$$

puis on utilise l'inégalité de Gronwall, on obtient que :

$$\|u\|_{L^p(Q_T)} \leq C_{28}, \tag{2.41}$$

répétons la même méthode pour v,on obtient alors :

$$\|v\|_{L^p(Q_T)} \leq C_{29}. \tag{2.42}$$

L'estimation de (2.41) et (2.42) pour $q > \frac{N+2}{2}$ donne :

$$\|u^\alpha v^\beta\|_{L^q(Q_T)} \leq C_{30}. \tag{2.43}$$

Revenons à (E_3) et utilisons la théorie du régularité dans $L^p(\Omega)$, on obtient :

$$\|w\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_{31}. \tag{2.44}$$

$\star$ cas $1 < \gamma < \frac{N+6}{N+2}$: la preuve était basée sur le lemme 1 et les deux lemmes suivants :

Lemme 2 :

(Michel Pierre) Soit $T > 0$ et Z la solution de

$$\begin{cases} Z_t - \Delta(A(t,x)Z) \leq 0 & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \frac{\partial Z}{\partial n}(t,x) = 0 & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ Z(0,x) = Z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

Supposons que $0 < d < A(t,x) < D$ avec $(d,D) \in (0,+\infty)^2$, alors il existe $C = C(T,d,D,\Omega)$ tel que :

$$\|Z\|_{L^2(Q_T)} \leq C\|Z_0\|_{L^2(\Omega)}$$

La version générale du ce lemme se trouve dans [[24],Proposition 6.1] , [[6],Théorème 3.1]

Lemme 3 :

Soit (p,q) tel que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$,$d > 0$ et $S_d(t)$ le semi groupe généralisé dans $L^p(\Omega)$ par $-d\Delta$ avec les condition de Neumann homogènes au bord alors :

$$\|S_d(t)Y\|_q \leq (C(\Omega)m(t))^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|Y\|_p \quad pour\ tout\ Y \in L^p(\Omega), t > 0 \quad (2.45)$$

Avec $m(t) = \min(1,t)$.
Ce lemme a été prouvé dans $[[28], lemme 3, p.25]$.

Preuve :

On applique le lemme 2 au système (S) avec $Z = u + v + 2w$ et $A = \frac{d_1u+d_2v+2d_3w}{u+v+2w}$, alors nous avons que $u, v, w \in L^2(Q_T)$. précisément ,il existe C_{32} tel que :

$$\|u\|_{L^2(Q_T)}, \|v\|_{L^2(Q_T)}, \|w\|_{L^2(Q_T)} \leq C_{32}. \tag{2.46}$$

Maintenant on va estimer (2.45) avec $p > 1$ et $q = +\infty$,on obtient que :

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + C_{33} \int_0^t (t-s)^{\frac{-N}{2p}} \|w^\gamma(s)\|_p \ ds. \tag{2.47}$$

On applique l'inégalité de Hölder ,on obtient alors que :

$$\int_0^t (t-s)^{\frac{-N}{2p}} \|w^\gamma(s)\|_p \ ds \leq (\int_0^t (t-s)^{\frac{-Np'}{2p}} \ ds)^{1/p'} (\int_0^t \|w^\gamma(s)\|_p^p \ ds)^{1/p}. \tag{2.48}$$

On remarque que l'intégrale $\int_0^t (t-s)^{\frac{-N}{2(p-1)}} \ ds$ converge lorsque $p > \frac{N+2}{2}$(Intégrale de Riemann) et nous avons aussi que :

$$\int_0^t (t-s)^{\frac{-Np'}{2p}} \ ds = t^{1-\frac{N}{2(p-1)}} \int_0^1 (1-y)^{\frac{-N}{2(p-1)}} \ dy$$

(En utilisant un changement de variable $(s = ty)$)

$$\leq C(T)^{\frac{p}{(p-1)}} = T^{1-\frac{N}{2(p-1)}} \int_0^1 (1-y)^{\frac{-N}{2(p-1)}} \ dy,$$

dans un autre coté le lemme 1 implique que :

$$(\int_0^t \|w^\gamma(s)\|_p^p \ ds)^{1/p} = \|w\|_{L^{p\gamma}(Q_T)}^\gamma \leq C_{34}^\gamma (1 + \|u\|_{L^{p\gamma}(Q_T)})^\gamma. \tag{2.49}$$

Si $\|u\|_{L^{p\gamma}(Q_T)} \leq 1$ **alors le preuve c'est terminée.**

Sinon, il existe C_{35} tel que :

$$(\int_0^t \|w^\gamma(s)\|_p^p \ ds)^{\frac{1}{p}} \leq C_{35} \|u\|_{L^{p\gamma}(Q_T)}^\gamma. \tag{2.50}$$

Or

$$\|u\|^{\gamma}_{L^{p\gamma}(Q_T)} = (\iint_{Q_T} u^{p\gamma})^{1/p} = (\iint_{Q_T} u^{p\gamma-p+\varepsilon+p-\varepsilon})^{1/p}$$

$$\leq \|u\|^{1-\varepsilon/p}_{L^{\infty}(Q_T)}(\iint_{Q_T} u^{p\gamma-p+\varepsilon})^{1/p}.$$

L'équation (2.47) peut écrit comme suit :

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty} + C_{36}\|u\|^{1-\varepsilon/p}_{L^{\infty}(Q_T)}(\iint_{Q_T} u^{p\gamma-p+\varepsilon})^{1/p}. \tag{2.51}$$

Si $p(\gamma-1) < 2$, et par le choix de $\varepsilon \in (0, min(p, 2-p(\gamma-1))$,on déduit de (2.46) et(2.51) qu'il existe C_{37} tel que :

$$\|u\|_{L^{\infty}(Q_T)} \leq C_{37}, \tag{2.52}$$

à propos de la condition $p(\gamma-1) < 2$ donne si $\gamma < 1 + \frac{2}{p} < 1 + \frac{4}{N+2} = \frac{N+6}{N+2}$. En répétant la même méthode et on va trouver qu'il existe C_{38} tel que :

$$\|v\|_{L^{\infty}(Q_T)} \leq C_{38}. \tag{2.53}$$

Finalement, pour (E_3) on déduit de (2.52) et (2.53) qu'il existe C_{39} tel que :

$$\|w\|_{L^{\infty}(Q_T)} \leq C_{39}. \tag{2.54}$$

■

Remarque :

Tous ces résultats restent vraies si on remplace les conditions au bord de Neumann homogènes par les conditions au bord de Dirichlet homogènes ,il suffit de remplacer le lemme 3 par le lemme suivant :

Lemme 4 :

Soit (p, q) tel que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$,$d > 0$ et $S_d(t)$ le semi groupe généralisé dans $L^p(\Omega)$ par $-d\Delta$ avec les conditions de Dirichlet homogènes au bord alors :

$$\|S_d(t)Y\|_q \leq (4\Pi t)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|Y\|_p \quad \textit{pour tout } Y \in L^p(\Omega), t > 0 \qquad (2.55)$$

Pour la preuve de ce lemme ,voir $[[27], Proposition 48.4, p.441]$

2.3 Les problèmes ouverts :

1. Si $d_1 = d_2$ et $\alpha + \beta = \gamma$,l'existence globale des solutions classiques du système (S) est un problème ouvert.
2. Si les coefficients du diffusions sont différents alors l'existence globale des solutions classiques du système (S) est un problème ouvert quand

$$\frac{N+6}{N+2} \leq \gamma \leq \alpha + \beta$$

Chapitre 3

La bornitude globale des solutions d'un système réaction-diffusion

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la bornitude globale des solutions d'un système de réaction-diffusion de type Fujita.

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = b_1 u^{p_1} v^{q_1}, \\ \\ v_t - d_2 \Delta v = b_2 u^{p_2} v^{q_2}, \end{cases} \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales et les conditions au bord

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$u = v = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné,avec un bord de classe $C^{2+\xi}$,$\xi \in (0,1)$; p_i, q_i sont des constantes positives avec $p_i + q_i \leq 1, i = 1,2$; d_i, b_i sont toutes des constantes positives, $i = 1,2$; $u_0(x), v_0(x) \geq 0$.

L'équation (3.1) fournit une classe de systèmes de réaction-diffusion. Il peut être utilisé comme un modèle pour décrire la propagation de la chaleur dans un environnement à deux composants mélange combustible [7], processus de réaction chimique[15], interaction de deux substances biologiques sans limitation automatique [[21], [32]],etc...

Il est bien connu que les solutions d'équation simple du réaction-diffusion

$$u_t - \Delta u = u^\alpha \tag{3.4}$$

existent globalement si $\alpha \leq 1$ et peuvent exploser dans un temps finie si $\alpha > 1$,voir exemple [12].
Jusqu'à présent, la plupart des travaux sur (3.1) sont limitées aux cas plus particulier avec $d_1 = d_2 = 1, b_1 = b_2 = 1$, ie.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^{p_1} v^{q_1} \\ \\ v_t - \Delta v = u^{p_2} v^{q_2} \end{cases} \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{3.5}$$

Par exemple, Escobedo et Levine ont fournit une analyse complète de l'explosion critique et les nombres d'existence globale pour le problème de Cauchy du (3.5) dans [8].
Ils ont trouvés que quand $p_2q_1 > 0$,$p_2 + q_2 \geq p_1 + q_1 > 0$ et $p_1 \geq 1$, le système se comporte comme l'équation simple $u_t - \Delta u = u^{p_1+q_1}$ par rapport aux théorèmes d'explosion de type-Fujita [13]. Le problème des valeurs limites initiales avec un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ a été étudié par Escobedo et Herrero dans [9].Récemment, la condition d'existence globale pour (3.5),(3.3) et (3.2) était connu comme $0 \leq p_1, q_2 \leq 1$,$p_2q_1 \leq (1 - p_1)(1 - q_2)$ [[2], [33]].

Naturellement,il y'a une autre question est de savoir si ces solutions globales sont globalement bornés où ils tendent à l'infini dans $L^\infty(\Omega)$?. Il est facile de savoir que la condition d'existence globale $0 \leq p_1, q_2 \leq 1$,$p_2q_1 \leq (1 - p_1)(1 - q_2)$ ne suffit pas pour la bornitude globale, même dans le cas simple de $q_1 = p_2 = 0$,$p_1 = q_2 = 1$ (voir section 3 de ce chapitre).

Nous montrerons dans la section 2 que, sans diffusion les solutions du système EDO correspondant tendent vers l'infini quand t tend vers l'infini.

Le but de ce chapitre est de montrer que les solutions d'un systèmes de réaction-diffusion peuvent être globalement bornés sous certaines conditions supplémentaires.

Nous réalisons cet objectif en deux étapes. Premièrement, nous établissons les estimations uniformes L^1 pour les solutions globales par la méthode des 'fonction propre',puis on va utiliser le travail de [1] et de [29] pour obtenir des solutions globales uniformément bornés dans $L^\infty(\Omega)$.

3.1 Le cas sans diffusion

Commençons par le système EDO correspondant sans diffusion :

$$\begin{cases} U'(t) = b_1 U(t)^{p_1} V(t)^{q_1}, \\ & t > 0 \\ V'(t) = b_2 U(t)^{p_2} V(t)^{q_2}, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$U(0) = U_0 \qquad\qquad V(0) = V_0. \tag{3.7}$$

Nous avons de l'équation(3.6) que :

$$b_2\, U(t)^{p_2-p_1} U'(t) = b_1\, V(t)^{q_1-q_2} V'(t)$$

et par conséquent on a :

$$\begin{aligned} &\frac{b_2}{1+p_2-p_1} U(t)^{1+p_2-p_1} - \frac{b_1}{1+q_1-q_2} V(t)^{1+q_1-q_2} \\ &= \frac{b_2}{1+p_2-p_1} U_0^{1+p_2-p_1} - \frac{b_1}{1+q_1-q_2} V_0^{1+q_1-q_2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Supposons que :

$$\frac{b_2}{1+p_2-p_1} U_0^{1+p_2-p_1} \leq \frac{b_1}{1+q_1-q_2} V_0^{1+q_1-q_2}. \tag{3.9}$$

Ensuite, il résulte de (3.8) et (3.9) que :

$$V(t) \geq (\frac{b_2(1+q_1-q_2)}{b_1(1+p_2-p_1)})^{1/(1+q_1-q_2)} U(t)^{(1+p_2-p_1)/(1+q_1-q_2)}. \tag{3.10}$$

On remplace (3.10) dans (3.6) on obtient que :

$$U'(t) \geq k U(t)^{p_1+(1+p_2-p_1)/(1+q_1-q_2) q_1}, \tag{3.11}$$

$$V'(t) \leq k' V(t)^{q_2+(1+q_1-q_2)/(1+p_2-p_1) p_2}, \tag{3.12}$$

avec

$$k = (\frac{b_2(1+q_1-q_2)}{b_1(1+p_2-p_1)})^{1/(1+q_1-q_2)}, \qquad k' = (\frac{b_1(1+p_2-p_1)}{b_2(1+q_1-q_2)})^{1/(1+p_2-p_1)}.$$

Puisque $\quad p_i + q_i \leq 1, i = 1, 2$ on a :

$$\delta := (1 - p_1)(1 - q_2) - p_2 q_1 \geq 0 \tag{3.13}$$

et par conséquent :

$$0 < p_1 + \frac{1 + p_2 - p_1}{1 + q_1 - q_2} q_1 = \frac{1 + q_1 - q_2 - ((1 - p_1)(1 - q_2) - p_2 q_1)}{1 + q_1 - q_2}$$

$$= 1 - \frac{\delta}{1 + q_1 - q_2} =: 1 - \delta_1 \leq 1, \tag{3.14}$$

$$0 < q_2 + \frac{1 + q_1 - q_2}{1 + p_2 - p_1} p_2 = 1 - \frac{\delta}{1 + p_2 - p_1} =: 1 - \delta_2 \leq 1. \tag{3.15}$$

Pour le problème EDO

$$m'(t) = k m(t)^{1-\delta_1},$$

nous avons les solutions explicites :

$$m(t) = m(0) e^{kt}, t \geq 0 \quad pour \quad \delta_1 = 0, \tag{3.16}$$

$$m(t) = (k\delta_1 t + m(0)^{\delta_1})^{1/\delta_1}, \quad pour \ \ \delta_1 \in (0, 1). \tag{3.17}$$

Ainsi, par le principe de comparaison, nous avons que $(U(t), V(t))$ existe globalement grâce à (3.12),(3.10) et tend vers l'infinie quand $t \to \infty$ grâce à (3.11) et (3.10).

3.2 La bornitude uniforme dans $L^1(\Omega)$

Nous avons des différents résultats pour le système avec diffusion.En fait, les solutions de (3.1)-(3.3), sont non seulement globales mais aussi sont uniformément bornés pour tout $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$.

Nous devons d'abord établir la bornitude uniforme des solutions dans $L^1(\Omega)$. Notons par $\Phi(x)$ la première fonction propre de

$$\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0 \quad dans \ \ \Omega, \quad \Phi = 0 \ \ dans \ \partial\Omega, \tag{3.18}$$

avec la première valeur propre λ_1.Alors $\Phi(x) > 0$ dans Ω, $\quad \lambda_1 > 0$.

Supposons que $\alpha = 1$ dans (3.4),i.e.le cas de $q_1 = p_2 = 0$,$p_1 = q_2 = 1$ dans (3.1).Clairement ,la condition d'existence globale $0 \leq p_1, q_2 \leq 1$, $p_2q_1 - (1-p_1)(1-q_2) \leq 0$ dans [[2], [33]] est vérifiée. Cependant,

$$\int_\Omega \Phi u_t dx = \int_\Omega \Phi \Delta u dx + \int_\Omega \Phi u dx = (-\lambda_1 + 1) \int_\Omega \Phi u dx,$$

et par conséquent $\|\Phi u\|_{L^1} \longrightarrow \infty$ si $\lambda_1 < 1$. En d'autres termes, certaines conditions supplémentaires peuvent être nécessaires pour garantir la bornitude uniforme des solutions globales.

Théorème 3.1 *Soit (u, v) la solution de(3.1)-(3.3). Supposons que $u_0(x), v_0(x) \in L^1(\Omega)$ et que une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $p_i + q_i < 1, i = 1, 2;$

(ii) $p_i + q_i = 1, i = 1, 2,\ \ b_1p_1 + b_2p_2 < d_1\lambda_1, b_1q_1 + b_2q_2 < d_2\lambda_1;$

(iii) $p_2 + q_2 < p_1 + q_1 = 1,\ \ b_1p_1 < d_1\lambda_1, b_1q_1 < d_2\lambda_1.$

Alors :

$$\sup_{t\geq 0} \|u(.,t)\|_{L^1(\Omega)}, \qquad \sup_{t\geq 0} \|v(.,t)\|_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Preuve :

Il est bien connu que la première valeur propre du problème (3.1) est inversement proportionnelle au diamètre carré de Ω [3].Donc, pour tout nombre positif $\lambda_1 < \tilde{\lambda_1}$ on peut trouver un domaine $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$ tel que $\tilde{\lambda_1}$ est la première valeur propre du problème

$$\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0 \quad dans \ \ \tilde{\Omega}, \quad \Phi = 0 \ \ dans\ \partial\tilde{\Omega}. \tag{3.19}$$

Soit $\tilde{\Phi}(x)$ la première fonction propre de (3.19), alors $\tilde{\Phi}(x) > 0$ dans $\tilde{\Omega}$,et par conséquent $\tilde{\Phi}(x) \geq \delta_0 > 0$ dans $\bar{\Omega}$ est valable pour une constante positive δ_0.

Définissons :

$$E(t) := \int_\Omega \tilde{\Phi}(x) u(x,t) dx, \tag{3.20}$$

$$F(t) := \int_\Omega \tilde{\Phi}(x) v(x,t) dx \tag{3.21}$$

La positivité des solutions de (3.1)-(3.3) est évidente.

(Notons :$f(u,v) = u^{p_1}v^{q_1}, \quad g(u,v) = u^{p_2}v^{q_2}$,

$\forall u \geq 0, \quad f(0,v) \geq 0$,$\forall v \geq 0, \quad g(u,0) \geq 0$.)

Il découle de l'homogène condition au bord de Dirichlet (3.1) et la positivité des solutions que

$$\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} \leq 0 \quad pour (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{3.22}$$

En utilisant (3.1),(3.3),(3.19)-(3.22), on obtient que :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega \tilde{\Phi} u_t dx = d_1 \int_\Omega \tilde{\Phi} \Delta u dx + b_1 \int_\Omega \tilde{\Phi} u^{p_1} v^{q_1} dx \\ &= d_1 \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} ds - d_1 \tilde{\lambda}_1 \int_\Omega \tilde{\Phi} u \, dx + b_1 \int_\Omega \tilde{\Phi} u^{p_1} v^{q_1} dx \\ &\leq -d_1 \tilde{\lambda}_1 \int_\Omega \tilde{\Phi} u \;\, dx + b_1 \int_\Omega \tilde{\Phi} u^{p_1} v^{q_1} \;\, dx \\ &= -d_1 \tilde{\lambda}_1 E(t) + b_1 \int_\Omega \tilde{\Phi} u^{p_1} v^{q_1} dx, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$F'(t) \leq -d_2 \tilde{\lambda}_1 F(t) + b_2 \int_\Omega \tilde{\Phi} u^{p_2} v^{q_2} dx. \tag{3.24}$$

(**i**) pour $p_i + q_i < 1, \; i = 1,2,$ on utilise l'inégalité de Young, on obtient que :

$$0 \leq u^{p_1} v^{q_1} \leq q_1 \varepsilon^{1/q_1} v + (1-q_1) \varepsilon^{-1/(1-q_1)} u^{p_1/(1-q_1)}, \quad 0 < q_1 < 1,$$
$$0 \leq u^{p_2} v^{q_2} \leq p_2 \varepsilon^{1/p_2} u + (1-p_2) \varepsilon^{-1/(1-p_2)} v^{q_2/(1-p_2)}, \quad 0 < p_2 < 1.$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ petit tel que :

$$\max(b_1 q_1 \varepsilon^{1/q_1}, b_2 p_2 \varepsilon^{1/p_2}) \leq \frac{d\tilde{\lambda}_1}{2}$$

Avec $d := \min(d_1, d_2)$ on obtient de (3.23) et (3.24) que :

$$E'(t) + F'(t) \leq -\frac{d\tilde{\lambda}_1}{2}(E(t) + F(t)) + b_1 \int_\Omega \tilde{\Phi}(1 - q_1)\varepsilon^{-1/(1-q_1)} u^{p_1/(1-q_1)} dx$$

$$+ b_2 \int_\Omega \tilde{\Phi}(1 - p_2)\varepsilon^{-1/(1-p_2)} v^{q_2/(1-p_2)} dx. \qquad (3.25)$$

On utilise encore une fois l'inégalité de Young, on obtient encore pour, $0 < p_i + q_i < 1$,$i = 1, 2$ que :

$$0 \leq (1 - q_1)\varepsilon^{-1/(1-q_1)} u^{p_1/(1-q_1)}$$

$$\leq (1-q_1)\{\frac{p_1}{1 - q_1}\eta^{(1-q_1)/p_1} u + \frac{1 - p_1 - q_1}{1 - q_1}\eta^{-(1-q_1)/(1-p_1-q_1)}(\varepsilon^{-1/(1-q_1)})^{(1-q_1)/(1-p_1-q_1)}\}$$

$$= p_1\eta^{(1-q_1)/p_1} u + (1 - p_1 - q_1)\eta^{-(1-q_1)/(1-p_1-q_1)}\varepsilon^{-1/(1-p_1-q_1)},$$

et

$$0 \leq (1-p_2)\varepsilon^{-1/(1-p_2)} v^{q_2/(1-p_2)} \leq q_2\eta^{(1-p_2)/q_2} v + (1-p_2-q_2)\eta^{-(1-p_2)/(1-p_2-q_2)}\varepsilon^{-1/(1-p_2-q_2)}.$$

Choisissons $\eta > 0$ petit tel que :

$$\max(b_1 p_1 \eta^{(1-q_1)/p_1}, b_2 q_2 \eta^{(1-p_2)/q_2}) \leq \frac{d\tilde{\lambda}_1}{4}$$

et notons

$$C_1 := \int_\Omega \tilde{\Phi}\{b_1(1 - p_1 - q_1)\varepsilon^{-1/(1-p_1-q_1)}\eta^{-(1-q_1)/(1-p_1-q_1)} + b_2(1 - p_2 - q_2)$$

$$\times \varepsilon^{-1/(1-p_2-q_2)}\eta^{-(1-p_2)/(1-p_2-q_2)}\} dx.$$

Ensuite, il résulte de (3.25) que :

$$E'(t) + F'(t) \leq -\frac{d\tilde{\lambda}_1}{4}(E(t) + F(t)) + C_1. \qquad (3.26)$$

L'inégalité (3.26) signifie que :

$$E(t) + F(t) \leq (E(0) + F(0))e^{-d\tilde{\lambda}_1 t/4} + \frac{4C_1}{d\tilde{\lambda}_1}. \qquad (3.27)$$

■

Remarque :

Le cas de $p_2 q_1 = 0$ est plus facile à traiter. En fait si $p_2 = q_1 = 0$ alors (3.1) devient le cas trivial non couplé ; si par exemple $p_2 = 0, q_1 > 0$ alors nous pouvons obtenir l'estimation uniforme L^1 par l' application de l'inégalité de Young juste dans la première équation (3.1).

(ii) $p_i + q_i = 1, i = 1, 2$,nous avons par l'application de l'inégalité de Young que :

$$u^{p_1} v^{q_1} \leq p_1 u + q_1 v, \qquad u^{p_2} v^{q_2} \leq p_2 u + q_2 v,$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -d_1 \tilde{\lambda}_1 E(t) + b_1 p_1 E(t) + b_1 q_1 F(t), \\ F'(t) &\leq -d_2 \tilde{\lambda}_1 F(t) + b_2 p_2 E(t) + b_2 q_2 F(t), \end{aligned}$$

puisque $b_1 p_1 + b_2 p_2 < d_1 \lambda_1$, $b_1 q_1 + b_2 q_2 < d_2 \lambda_1$, on va choisir $\tilde{\lambda}_1$ satisfait $\max((b_1 p_1 + b_2 p_2)/d_1, (b_1 q_1 + b_2 q_2)/d_2) < \tilde{\lambda}_1 < \lambda_1$,alors :

$$\begin{aligned} E'(t) + F'(t) \leq -d_1 \tilde{\lambda}_1 E(t) - d_2 \tilde{\lambda}_1 F(t) + (b_1 p_1 + b_2 p_2) E(t) \\ + (b_1 q_1 + b_2 q_2) F(t) < 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

Cela signifie que :

$$E(t) + F(t) < E(0) + F(0). \tag{3.29}$$

■

(iii) Pour $p_1 + q_1 = 1, p_2 + q_2 < 1$, on choisit $\tilde{\lambda}_1$ tel que $\max(b_1 p_1/d_1, b_1 q_1/d_1) < \tilde{\lambda}_1 < \lambda_1$, alors nous avons par la même manière dans (i) et (ii) respectivement que :

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -d_1 \tilde{\lambda}_1 E(t) + b_1 p_1 E(t) + b_1 q_1 F(t), \\ F'(t) &\leq -d_2 \tilde{\lambda}_1 F(t) + b_2 p_2 \varepsilon^{1/p_2} E(t) + b_2 q_2 \eta^{(1-p_2)/q_2} F(t) \\ &+ \int_\Omega b_2 (1 - p_2 - q_2) \varepsilon^{-1/(1-p_2-q_2)} \eta^{-(1-p_2)/(1-p_2-q_2)} dx. \end{aligned}$$

Choisissons $\varepsilon, \eta > 0$ petit tel que :

$$b_2 p_2 \varepsilon^{1/p_2} \leq \frac{d_1 \tilde{\lambda}_1 - b_1 p_1}{2}, \quad b_2 q_2 \eta^{(1-p_2)/q_2} \leq \frac{d_2 \tilde{\lambda}_1 - b_1 q_1}{2},$$

On trouve que :

$$E'(t) + F'(t) \leq -\min(\frac{d_1\tilde{\lambda}_1 - b_1p_1}{2}, \frac{d_2\tilde{\lambda}_1 - b_1q_1}{2})(E(t) + F(t)) + C_2,$$

avec $C_2 = \int_\Omega \tilde{\phi}\, b_2(1 - p_2 - q_2)\varepsilon^{-1/(1-p_2-q_2)}\eta^{-(1-p_2)/(1-p_2-q_2)}dx$. et alors :

$$E(t) + F(t) \leq (E(0) + F(0))e^{-\lambda_0 t} + \frac{C_2}{\lambda_0}. \tag{3.30}$$

avec $\lambda_0 := \min((d_1\tilde{\lambda}_1 - b_1p_1)/2, (d_2\tilde{\lambda}_1 - b_1q_1)/2)$,
grâce à $u_0(x), v_0(x) \in L^1(\Omega)$ et $\tilde{\Phi}(x) > \delta_0 > 0$ dans $\bar{\Omega}$ dans (3.21) et (3.22),il se résulte de (3.27) , (3.29) et (3.30) que :

$$\sup_{t\geq 0}\|u(.,t)\|_{L^1(\Omega)}, \qquad \sup_{t\geq 0}\|v(.,t)\|_{L^1(\Omega)} < \infty. \tag{3.31}$$

■

Remarque :

Si on utilise la première valeur propre λ_1 et la première fonction propre $\Phi(x)$ de (3.18) considéré dans le domaine originale Ω, comme d'habitude, au lieu d'introduit $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\Phi}(x)$(dans $\tilde{\Omega}$,$\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$) dans la preuve ci-dessous, nous obtenons simplement la bornitude uniforme de $\|u(.,t)\|_{L^1_{loc(\Omega)}}$ et $\|v(.t)\|_{L^1_{loc(\Omega)}}$ puisque $\Phi = 0$ dans $\partial\Omega$. Dans ce cas ,pour obtenir la bornitude uniforme de u et v dans $L^1(\Omega)$,nous devons montrer que u et v sont les deux bornés uniformément dans une partie de $\partial\Omega$ pour $t \geq 0$ .Ce serait beaucoup plus difficile et compliqué [[11], [14]].

3.3 La bornitude uniforme dans $L^\infty(\Omega)$

Appliquons le cadre d'Alikakos [1] et Rothe [29] pour établir la bornitude uniforme des solutions dans $L^\infty(\Omega)$.

Considérons une seule équation parabolique

$$u_t - \Delta u = f \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{3.32}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega, \tag{3.33}$$

avec soit un Dirichlet

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{3.34}$$

où condition au bord de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{3.35}$$

Supposons que :

$$f \leq C(1+u)^\gamma \qquad pour \quad u \geq 0. \tag{3.36}$$

Et notons que :

$$U_0 := \|u(.,0)\|_{L^\infty(\Omega)},$$
$$C := \max(1, \sup_{0\leq t\leq T} \|c(.,t)\|)_{L^q(\Omega)}),$$
$$U_r := \max(1, \sup_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\|)_{L^r(\Omega)}),.$$

Dans [29], Rothe a prouvé la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 :

Soit u une solution moyenne où forte de (3.32)-(3.34) ou(3.35).Si les constantes γ, q, r décrits ci-dessus, satisfont :

$$1 \leq \gamma < 1 + r(2/n - 1/q) \quad q \geq 1, r > 1/2, \tag{3.37}$$

alors il existe des constantes positives K, σ et ρ indépendantes de T telles que :

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq kC^\sigma U_r^\rho. \tag{3.38}$$

Maintenant, on va énoncer notre théorème sur la bornitude uniforme des solutions dans $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 3.3.2 :

Soit (u, v) la solution de (3.1)-(3.3). Supposons que $u_0(x), v_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\min(q_1, p_2) < 2/n$ et une des trois conditions $(i) - (iii)$ dans le théorème 3.1 est vérifiée :
Alors :

$$\sup_{t\geq 0}\|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \sup_{t\geq 0}\|v(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Preuve :

Nous savons d'après le théorème 3.1 que les solutions u et v sont uniformément bornées dans $L^1(\Omega)$.Vérifions la condition de la proposition 3.3.1, donc on a :

$$0 \leq f_1 = b_1 u^{p_1} v^{q_1} \leq b_1 v^{q_1}(1 + u),$$

En effet :

on a : $0 \leq p_1 \leq 1$, alors $\quad u^{p_1} \leq (1 + u)^{p_1} \leq (1 + u)$.
et

$$0 \leq f_2 = b_2 u^{p_2} v^{q_2} \leq b_2 u^{p_2}(1 + v).$$

en effet :

on a : $0 \leq q_2 \leq 1$, alors $\quad v^{q_2} \leq (1 + v)^{q_2} \leq (1 + v)$.
Ici $\gamma = r = 1$; (r=1, car $u \in L^1$) ,$q = 1/q_1$ pour f_1, $q = 1/p_2$ pour f_2. Sans perte de généralité, supposons que $q_1 < 2/n$. Ainsi, les conditions de la proposition 3.3.1 sont satisfaites par la première équation (3.1). Ceci donne la bornitude uniforme dans $L^\infty(\Omega)$ pour le composant u. Ainsi nous avons pour la deuxième équation :

$$0 \leq f_2 \leq c(1 + v) \tag{3.39}$$

Avec $q = \infty, \gamma = r = 1$,($q = \infty$ car $u \in L^\infty$,r=1,car $v \in L^1$) on utilise la proposition 3.3.1, on obtient à nouveau la bornitude uniforme dans $L^\infty(\Omega)$ de v aussi.

■

Pour un cas spécial de $d_1 = d_1 = d$ **,la condition** $\min(q_1, p_2) < 2/n$ **n'est pas nécessaire.**

Théorème 3.3.3 :

Soit (u, v) la solution de (3.1),(3.2) et (3.3) avec $d_1 = d_2 = d$. Supposons que $u_0(x), v_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, avec une des conditions $(i)-(iii)$ dans le théorème 3.1 est vérifiée,
alors

$$\sup_{t\geq 0}\|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \sup_{t\geq 0}\|v(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Preuve :

Puisque $p_i + q_i \leq 1, i = 1, 2$,et par l'utilisation de l'inégalité de Young on obtient que :

$$0 \leq u^{p_1}v^{q_1} < p_1 u + q_1 v + (1 - p_1 - q_1), \tag{3.40}$$

$$0 \leq u^{p_2}v^{q_2} < p_2 u + q_2 v + (1 - p_2 - q_2). \tag{3.41}$$

Notons $w := u + v$. Remplaçons (3.40) et (3.41) dans (3.1),on obtient que :

$$\begin{aligned} w_t - d\Delta w &= f_1(u, v) + f_2(u, v) \\ &\leq (b_1p_1+b_2p_2)u+(b_1q_1+b_2q_2)v+b_1(1-p_1-q_1) \\ &\quad +b_2(1 - p_2 - q_2) \leq C(1 + w), \end{aligned}$$

tel que :
$C := \max(b_1p_1 + b_2p_2, b_1q_1 + b_2q_2, b_1(1 - p_1 - q_1) + b_2(1 - p_2 - q_2))$.

Nous avons d'après le théorème 3.1 que :

$$\sup_{t\geq 0}\|w(.,t)\|_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Alors $\gamma = r = 1$,$q = \infty$ et la condition (3.37) est satisfait, appliquons la proposition 3.3.1,on obtient alors que :

$$\sup_{t\geq 0}\|w(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \tag{3.42}$$

par conséquent,et grâce à la positivité de u et v on a :

$$\sup_{t\geq 0}\|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0}\|v(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \tag{3.43}$$

■

Les théorèmes 3.1 , 3.3.2 et 3.3.3 peuvent être étendus aux m-système.

$$\begin{cases} u_{1t} - d_1\Delta u_1 = b_1 u_1^{p_{11}} u_2^{p_{12}} ....u_m^{p_{1m}}, \\ u_{2t} - d_2\Delta u_2 = b_2 u_1^{p_{21}} u_2^{p_{22}} ....u_m^{p_{2m}}, \\ ... \qquad\qquad\qquad\qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_{mt} - d_m\Delta u_m = b_m u_1^{p_{m1}} u_2^{p_{m2}} ....u_m^{p_{mm}} \end{cases} \tag{3.44}$$

avec les constantes $d_i, b_i > 0, i = 1, ..., m$, et

$$u_i(x,0) = u_{i0}(x), \qquad i = 1, ..., m, \quad x \in \Omega, \tag{3.45}$$

$$u_i = 0, \qquad ,i = 1, 2..., m, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{3.46}$$

Théorème 3.3.4 :

Soit $(u_1, ..., u_m)$ solution de (3.44)-(3.46) .Supposons que $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$, $i = 1, ..., m_0$; $\sum_{j=1}^m p_{ij} < 1, i = m_0 + 1, ..., m$; et une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

(i) $m_0 = 0$; où

(ii) $1 \leq m_0 \leq m$, $\sum_{i=1}^{m_0} b_i p_{ij} < d_i \lambda_1, j = 1, ..., m_0$.

Si $u_{i0}(x) \in L^1(\Omega), i = 1, .., m$,alors $\sup_{t \geq 0} \|u_i(.,t)\|_{L^1(\Omega)} < \infty, \quad i = 1, ..., m.$

Preuve :

Clairement, les deux cas (ii) et (iii) dans les théorèmes 3.1 et 3.3.2 sont inclus dans le cas (ii) du théorème. Nous pouvons utiliser les mêmes procédures que celles de la preuve du théorème 3.1 par induction pour obtenir la conclusion globale du théorème sur la bornitude $L^1(\Omega)$.

■

Pour obtenir la bornitude uniforme L^∞ pour les solutions globales, nous avons besoin d'un autre condition est :

$$\sum_{j \neq 1} p_{1j}, \quad \sum_{j \neq 1,2} p_{2j}, ..., \quad \sum_{j \neq 1,2,...m-1} p_{m-1,j} < \frac{2}{n}. \tag{3.47}$$

Théorème 3.3.5 :

Supposons que la condition du théorème 3.3.4 et la condition (3.47) sont vérifiés .Si $u_{i0} \in L^{\infty}(\Omega), i = 1, ..., m$, alors

$$\sup_{t \geq 0} \|u_i(.,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} < \infty, i = 1, ..., m.$$

Preuve :

Nous avons pour l'équation (3.44)

$$0 \leq f_1 = b_1 u_1^{p_{11}} u_2^{p_{12}} ... u_m^{p_{1m}} \leq b_1 u_2^{p_{12}} ... u_m^{p_{1m}} (1 + u_1).$$

Il découle du théorème 3.3.4 que $\|u_j(.,t)\|_{L^1(\Omega)} < \infty, j = 1, ..., m$. Ainsi $u_2^{p_{12}} ... u_m^{p_{1m}} \in L^q$ avec $1/q = \sum_{j \neq 1} p_{1j} < 2/n.$, nous avons par l'utilisation de la proposition 3.3.1 avec $\gamma = r = 1$, que $\|u_1(.,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} < \infty$.

Après, considérons le terme de réaction dans le seconde équation :

$$0 \leq f_2 = b_2 u_1^{p_{21}} u_2^{p_{22}} ... u_m^{p_{2m}} \leq c_1 u_3^{p_{23}} ... u_m^{p_{2m}} (1 + u_2),$$

avec $c_1 = \sup_{t \geq 0} b_1 \|u_1(.,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}$,on utilise la proposition 3.3.1 avec $u_3^{p_{23}} ... u_m^{p_{2m}} \in L^q, 1/q = \sum_{j \neq 1,2} p_{2j} < 2/n$, et $\gamma = r = 1$,,alors on obtient la bornitude uniforme de u_2 dans $L^{\infty}(\Omega)$.

■

Théorème 3.3.6 :

Si $d_1 = ... = d_m$, alors le théorème 3.3.5 est vraie sans la condition (3.47).

Conclusion

Nous avons établi dans ce travail quelques résultats concernant l'existence globale des solutions pour des systèmes de réaction-diffusion.Ces résultats vont dans deux directions distinctes :

Dans la première partie de notre travail nous avons réussi à obtenir, sous des hypothèses un résultat d'existence globale des solutions classiques pour un système de réaction-diffusion dans $L^\infty(Q_T)$.

Dans la seconde partie de ce travail, nous avons réussi sous des théorèmes et des propositions à répondre à la question de savoir si ces solutions globales sont globalement bornés où ils explosent à l'infinie,et ces résultats a été démontré dans $L^1(\Omega)$ et dans $L^\infty(\Omega)$.

Bibliographie

[1] Alikakos,N.D.*An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations,J. Differential Equations,* 33, $201-225$ (1979).

[2] Chen,H.M.*Global existence and blow-up for a nonlinear reaction-diffusion system,J Math. Anal.Appl.*212, $481-492$ (1997).

[3] Courant,R.and Hilbert,D.*Methods of Mathematical Physics,Vol.1, Interscience, New York, 1962.*

[4] Davies,E.B.*Heat Kernels and Spectral Theory.Cambridge University Press, Cambridge (1989).*

[5] Desvillettes, L., Fellner, K.*Exponential decay toward equilibrium via entropy methods for reactiondiffusion equations.J.Math. Anal. Appl. 319(1), 157-176 contenu...(2006).*

[6] Desvillettes, L., Fellner, K., Pierre, M., Vovelle, J.*About global existence of quadratic systems of reaction-diffusion. Adv. Nonlinear Stud.7, 491-511 (2007).*

[7] Escobedo, E. and Herrero, M. A., 'Boundedness and blow-up for a semilinear reaction-diffusion system,J.Differential Equations, 89, $176-202$ (1991).

[8] Escobedo, E. and Levine, H. A.,*Critical blow up and global existence numbers for weakly coupled system of reaction-diffusion equations,Arch. Rational Mech. Anal., 129,* $47-100$ *(1995).*

[9] Escobedo, E. and Herrero, M. A.*A semilinear reaction-diffusion system in a bounded domain, Annali de Matema≪ tica Pura ed Applicata, 165, 315-336 (1993).*

[10] Feng,W.*Coupled system of reaction-diffusion equations and applications in carrier facilitated diffusion Nonlinear Anal.Theory Methods Appl. 17(3), 285-311 (1991).*

[11] Figueiredo, D. G. de, Lions, P. L. and Nussbaum, R.D.*A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations,J. Math. Pure Appl.61,* $41-63$ *(1982).*

[12] Friedman, A.*Blow-up of solutions of nonlinear parabolic equations', Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium State I (W. M. Ni, P. L. Peletier and J. Serrin, eds.), Springer, New York, 1988.*

[13] Fujita, H., :*'On the blow up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u^{1+\alpha}$*', J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Set. IA Math., 16,* $105 - 133$ *(1966).*

[14] Gidas, B., Ni, W. M. and Nirenberg, L.,*Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68,* $209 - 243$ *(1979).*

[15] Glansdorff, P. and Prigogine, I.,*Thermodynamic Theorey of Structure, Stability and Fluctuation, Wiley-Interscience, London, 1971..*

[16] HOLLIS, S.L., MARTIN, R.H., PIERRE, M.*Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems.SIAM J. Math. Anal. 18, 744-761 (1987).*

[17] H.Brézis *Analyse Fonctionnelle :Théorie et Application.Dunod 1983*

[18] LAAMRI, E.-H.*Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion dans L1. Thèse. Univ. de Nancy 1 (1988).*

[19] LADYZENSKAYA, O.A., SOLONNIKOV, V.A., URALCEVA, N.N.*Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Transl. Math. Monographs, vol. 23. AMS, Providence (1968).*

[20] MARTIN, R.H., PIERRE, M. :*Nonlinear reaction-diffusion systems. In : Ames, W.F., Rogers, C. (eds.) Nonlinear Equations in the Applied Sciences. Math. Sci. Ehg., vol. 185. Academic Press, San Diego (1991).*

[21] Meinhardt, H.,*Models of Biological Pattern Formation, Academic Press, London-New York, 1982..*

[22] MORGAN, J.*Global existence for semilinear parabolic systems. SIAM J. Math. Anal. 20(5), 1128-1144 (1989).*

[23] N. Britton. *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology. Academic Press, 1986*

[24] PIERRE, M.*Global existence in reaction-diffusion systems with control of mass : a survey. Milan J. Math.78, 417-455 (2010).*

[25] PIERRE, M.*Notes non publiées.*

[26] PIERRE, M.SCHMITT, D.*Blow-up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass. SIAM Rev. 42, 93-106 (2000) (electronic).*

[27] QUITTNER, P., SOUPLET, PH.*Superlinear Parabolic Problems : Blow-up, Global Existence and Steady States. Advanced Texts. Birkhäuser, Basel (2007).*

[28] ROTHE, F.*Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems. Lecture Notes in Math.vol. 1072. Springer, Berlin (1984).*

[29] Rothe, F.*Uniform bound from bounded L_p-functions in reaction-diffusion,J.Differential Equations, 45,* $202-233$ *(1982).*

[30] SCHMITT, D.*Existence globale ou explosion pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse. Thèse. Univ. de Nancy 1 (1995).*

[31] SOUPLET, PH.*Personal communication.*

[32] Wu, Z. Q. and Yuan, H. J.,*Uniqueness of generalized solutions for a degenerate parabolic system, J. Partial Differential Equations, 8,* $89-96$ *(1995).*

[33] Zheng, S. N.,*Global existence and global non-existence of solutions to a reaction-diffusion system, Nonlinear Anal. in press.*