République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Equations aux dérivées partielles

présenté par :

Mohammed Tewfik GHOMARI

Soutenu le : 30 / 06 / 2019

Puissances Fractionnaires d'Opérateurs et l'Intégrale de Riemann-Liouville

Devant le jury composé de :

M. Sidi-Mohammed BOUGUIMA	Professeur, Université de Tlemcen	Président
Mme. Leïla KHITRI-KAZI-TANI	M.A.A, Université de Tlemcen	Examinatrice
M. Hacen DIB	Professeur, Université de Tlemcen	Encadreur
M. Yacine CHITOUR	Professeur, Université Paris-Sud 11, Orsay, France.	Co-Encadreur

Année Universitaire : 2018-2019

Remerciements

En préambule à ce mémoire, nous remercions ALLAH qui nous a prodigué aide, inspiration, patience et courage durant toutes ces années d'études. Je souhaite adresser mes remerciements à mes chers parents pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et matériel. Ce qui m'a permis de faire les études que je voulais.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude et mes remerciements les plus sincères au directeur de ce mémoire M.Dib Hacen pour sa patience, sa disponibilité, sa gentillesse et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à approfondir ma réflexion, et aussi pour les connaissances qu'il a su me transmettre. Il m'a guidé dans mon travail et m'a aidé à trouver des solutions pour avancer. Mes remerciements vont également à M.CHITOUR Yacine. Sans sa contribution, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je voudrais adresser mes sincères remerciements et toute ma gratitude à M.BOUGUIMA Sidi-Mohammed et à Mme.KHITRI-KAZI-TANI Leïla, non seulement pour avoir accepter d'examiner ce mémoire mais également pour leur soutien, conseils, et aussi leur confiance en moi pendant mes années d'études.

Comme je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes proches, mes oncles, mes tantes et mes collègues qui m'ont apporté leur soutien indéfectible tout au long de ces années.

"Les bienfaits que nous avons reçus de nos parents sont les plus grands de tous."
Socrate ; Le monde grec -Ve s. av.J.-C

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'intégrale de Riemann-Liouville

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

qui a été généralisée par M.Riesz ([7]) aux dimensions supérieures dans les cas euclidien et lorentzien et ce de manière purement formelle. Dans ce travail, nous allons essayer de retrouver la définition donnée par M.Riesz dans les cas de dimension 2 et 3. Il s'agit de montrer que l'intégrale de Riemann-Liouville introduite par M.Riesz dans le cas du cône de lumière n'est rien d'autre que la puissance fractionnaire d'un opérateur intégral généralisant la "primitive". Pour la puissance fractionnaire, on utilise l'approche de Balakrishnan ([6]).

Table des Matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 La fonction Gamma d'Euler

Dans cette section on utilise ([5]) comme référence.

Définition 1.1.1 *Posons*

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$$

La fonction gamma d'Euler est définie par :

$$\begin{aligned}\Gamma : \quad & E \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \longrightarrow \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt\end{aligned}$$

On peut montrer que l'intégrale qui définit la fonction gamma est convergente. En effet, on divise l'intégrale en deux parties en écrivant

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Considérons

$$A = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$

et

$$B = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Alors

$$|A| = |\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt| \leq \int_0^1 |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_0^1 e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt \leq \int_0^1 t^{\Re(z)-1} dt < +\infty$$

pour $\Re(z) > 0$ et

$$|B| = |\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt| \leq \int_1^{+\infty} |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^m t^{\Re(z)-m-1} dt$$

On sait que pour tout $m \in \mathbb{N}$ la fonction définie par $h(t) = t^m e^{-t}$ est bornée, donc pour que l'intégrale converge il suffit de choisir $m > \Re(z)$. Ainsi la fonction gamma est bien définie pour tout z tel que $0 < \Re(z) < m$ et puisque m peut être choisi arbitrairement, on déduit que l'intégrale définissant gamma est convergente si $\Re(z) > 0$.

Proposition 1.1.1 *La fonction gamma est analytique pour tout z tel que $\Re(z) > 0$.*

Démonstration 1.1.1 *On sait que la fonction définie par $z \to e^{-t}t^{z-1}$ est analytique en z. Pour montrer que gamma est analytique il suffit de justifier l'application du théorème de dérivation sous le signe de l'intégrale, c'est-à-dire qu'il faut montrer que :*

$$\sup_{z\in D_{z_0,r}} |e^{-t}t^{z-1}| < \varphi_1(t) \quad et \quad \sup_{z\in D_{z_0,r}} |e^{-t}t^{z-1}\ln t| < \varphi_2(t)$$

avec φ_1 et φ_2 deux fonctions intégrables. Ici $D_{z_0,r} \subset E$ avec $r < \Re(z_0)$ désigne un disque de centre z_0 et de rayon r. On a

$$z \in D_{z_0,r} \Longrightarrow \Re(z_0) - r < \Re(z) < \Re(z_0) + r$$

Si $0 < t < 1$ on a :

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq e^{-t}t^{\Re(z)-1} \leq e^{-t}t^{\Re(z_0)-r-1}$$

qui est intégrable car $\Re(z_0) > r$ et si $t > 1$ on a :

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq e^{-t}t^{\Re(z)-1} \leq e^{-t}t^{\Re(z_0)+r-1}$$

qui est intégrable aussi.
Pour la deuxième condition on a si $0 < t < 1$

$$|e^{-t}t^{z-1}\ln t| \leq e^{-t}|\ln(t)|t^{\Re(z)-1} \leq t^{\varepsilon}|\ln(t)|t^{\Re(z_0)-r-\varepsilon-1}$$

qui est intégrable car on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\Re(z_0) > r + \varepsilon$ et on sait que la fonction définie par $t^{\varepsilon}|\ln(t)|$ est bornée au voisinage de zéro.
Maintenant si $t > 1$

$$|e^{-t}t^{z-1}\ln t| \leq e^{-t}|\ln(t)|t^{\Re(z)-1} \leq e^{-t}|\ln(t)|t^{\Re(z_0)+r-1}$$

qui est intégrable aussi. Ainsi il suffit de poser

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} t^{\Re(z_0)-r-1} & si\ t<1 \\ e^{-t}t^{\Re(z_0)+r-1} & si\ t>1 \end{cases} \qquad \varphi_2(t) = \begin{cases} t^{\varepsilon}|\ln(t)|t^{\Re(z_0)-r-\varepsilon-1} & si\ t<1 \\ e^{-t}|\ln(t)|t^{\Re(z_0)+r-1} & si\ t>1 \end{cases}$$

1.1.1 Relations remarquables

Nous prouvons maintenant trois relations de base satisfaites par la fonction gamma.

Proposition 1.1.2 *La fonction gamma vérifie les identités suivantes :*
Équation fonctionnelle :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.1}$$

Formule des compléments :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{1.2}$$

Formule de duplication :

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \tag{1.3}$$

Démonstration 1.1.2 *Nous allons prouver la première et la deuxième formule.*

1. *En intégrant par partie on trouve*

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)$$

2. *On suppose que* $0 < \Re(z) < 1$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = (\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt)(\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{-z}ds) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(s+t)}s^{-z}t^{z-1}dsdt$$

Soit le changement de variable

$$\begin{aligned} &u = s+t \qquad\qquad , \quad v = \frac{t}{s} \\ &dsdt = \frac{u}{(1+v)^2}dudv \end{aligned}$$

L'intégrale précédente devient

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(s+t)}s^{-z}t^{z-1}dsdt = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-u}v^{z-1}\frac{dudv}{1+v} = \int_0^{+\infty}\frac{v^{z-1}}{1+v}dv$$

Il faut montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{v^{z-1}}{1+v}dv = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$$

Posons

$$\Delta = \int_0^{+\infty}\frac{v^{z-1}}{1+v}dv$$

Soit la fonction complexe définie par :

$$f(\zeta) = \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} \qquad et \qquad D = \int_C \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}d\zeta$$

où C est le contour suivant :

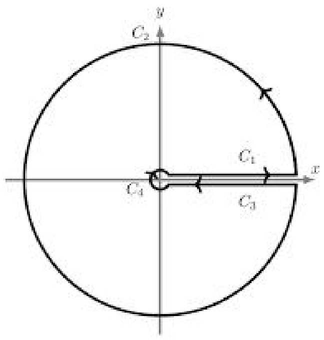

FIGURE 1.1 –

Par le théorème des résidus on a :

$$D = 2i\pi\ res(f,-1) = 2i\pi \lim_{\zeta\longrightarrow -1}(\zeta+1)f(\zeta) = 2i\pi e^{i\pi(z-1)}.$$

D'autre part on a :

$$\int_C f(\zeta)d\zeta = \underbrace{i\int_\mu^{2\pi-\mu}\frac{R^z e^{i\theta z}}{Re^{i\theta}+1}d\theta}_{A_1} + \underbrace{\int_R^r \frac{(t-i\varepsilon)^{z-1}}{t-i\varepsilon+1}dt}_{B_2} + \underbrace{i\int_{2\pi-\nu}^{\nu}\frac{r^z e^{i\theta z}}{re^{i\theta}+1}d\theta}_{A_2} + \underbrace{\int_r^R \frac{(t+i\varepsilon)^{z-1}}{t+i\varepsilon+1}dt}_{B_1}$$

1. *Pour A_1 :*

$$|A_1| = |\int_\mu^{\mu+2\pi}\frac{R^z e^{i\theta z}}{Re^{i\theta}+1}d\theta| \le \int_\mu^{\mu+2\pi}\frac{|R^z e^{i\theta z}|}{|Re^{i\theta}+1|}d\theta$$

de plus on a :

$$|Re^{i\theta}+1| \geq ||Re^{i\theta}|-|1|| = R-1$$

ce qui donne que :

$$\frac{R^{\Re(z)}e^{-\theta Im(z)}}{R-1} \underset{R\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car on a $0<\Re(z)<1$, *donc*

$$A_1 \underset{z\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. *Pour* A_2 *:*

$$|A_2| \leq \int_{2\pi-\nu}^{\nu} \frac{r^{\Re(z)}e^{-\theta Im(z)}}{1-r} d\theta$$

et

$$\frac{r^{\Re(z)}e^{-\theta Im(z)}}{1-r} \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$A_2 \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

3. *Pour* B_1 *on a :*

$$(t+i\varepsilon)^{z-1} = e^{(\frac{1}{2}\ln(t^2+\varepsilon^2)+i\sigma(\varepsilon))(z-1)}$$

avec

$$\sigma(\varepsilon) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

donc on a :

$$(t+i\varepsilon)^{z-1} \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} t^{z-1}$$

Quand on fait tendre r, R *vers* $0, +\infty$ *respectivement et* ε *vers* 0 *on obtient :*

$$B_1 \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

4. *Pour* B_2 *on a :*

$$(t-i\varepsilon)^{z-1} = e^{(\frac{1}{2}ln(t^2+\varepsilon^2)+i(2\pi-\rho(\varepsilon)))(z-1)}$$

avec

$$\rho(\varepsilon) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

donc on a :

$$(t-i\varepsilon)^{z-1} \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} e^{2i\pi(z-1)}t^{z-1}$$

On fait tendre r, R *vers* $0, +\infty$ *respectivement et* ε *vers* 0. *On obtient*

$$B_2 \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} -e^{2i\pi(z-1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

Finalement on a :

$$(1-e^{2i\pi(z-1)})\Delta = 2i\pi e^{i\pi(z-1)}$$

ce qui implique que

$$\Delta = \frac{2i\pi e^{i\pi(z-1)}}{(1-e^{2i\pi(z-1)})} = \frac{2i\pi}{e^{-i\pi(z-1)}-e^{i\pi(z-1)}} = \frac{\pi}{-sin(\pi(z-1))}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Remarque 1.1.1 *En utilisant la formule (1.1) on remarque que :*

1. $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z} = \dfrac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = ... = \dfrac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)(z+2)(z+k-1)}$. *La fonction* $\Gamma(z+k)$ *est définie pour tout* z *avec* $\Re(z) > -k$*, donc la quantité* $\dfrac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)(z+2)(z+k-1)}$ *est définie sur tout* $\mathbb{C}\diagdown\{-k, -k+1, ..., 0\}$*. Donc en utilisant le théorème du prolongement analytique on peut prolonger la fonction gamma sur tout* $\mathbb{C}\diagdown\mathbb{Z}^-$
2. *D'après la remarque précédente on peut dire que la formule (1.2) est vérifiée sur tout* $\mathbb{C}\diagdown\mathbb{Z}$.
3. *On remarque aussi que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*
$$\Gamma(n+1) = n!$$
de plus :
$$\lim_{\alpha\to 0\pm} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0\pm} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \pm\infty$$

1.1.2 Intégrales liées à la fonction gamma

Il existe plusieurs intégrales qu'on peut exprimer à l'aide de la fonction gamma mais on ne va considérer ici que quelques unes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^{z-1}dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z}$,$\Re(z) > 0$,$\Re(p) > 0$
2. Soit l'intégrale suivante (appelée intégrale bêta d'Euler) : $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt$, $\Re(x) > 0$,$\Re(y) > 0$. Par le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$ on a $t = \dfrac{u}{1+u}$ et $dt = \dfrac{du}{(1+u)^2}$, et on trouve que :
$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \tag{1.4}$$
Or d'après ce qui précède on a :
$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} e^{(1-u)t}t^{x+y-1}dt.$$
On remplace dans (1.4) :
$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x+y-1} \int_0^{+\infty} e^{-ut}u^{x-1}dudt \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$
et donc
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

1.2 Intégrale de Riemann-Liouville

Dans cette section on utilise ([7]) comme référence.

Définition 1.2.1 *L'intégrale de Riemann-Liouville est définie par :*

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \tag{1.5}$$

avec $\Re(\alpha) > 0$ et $x \in [0, b]$ où b est un réel positif.

Pour fixer les idées, nous supposons que f est une fonction continue. Cela posé, l'intégrale existe pour tout complexe α avec $\Re(\alpha) > 0$. En effet on a :

$$|I^{\alpha} f(x)| \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_0^x |f(t)||(x-t)^{\alpha-1}| dt \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{|\Gamma(\alpha)|} \int_0^x (x-t)^{\Re(\alpha)-1} dt \leq \frac{b^{\Re(\alpha)}}{|\Gamma(\alpha)|\Re(\alpha)} \|f\|_{\infty}$$

Proposition 1.2.1 *L'application définie par :*

$$\begin{aligned} I^{\alpha} : \quad C([0,b], \mathbb{R}) &\longrightarrow C([0,b], \mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow I^{\alpha} f \end{aligned}$$

est linéaire continue.

Démonstration 1.2.1 *D'après l'inégalité précédente, il est clair que*

$$\|I^{\alpha} f\|_{\infty} \leq \frac{b^{\Re(\alpha)}}{|\Gamma(\alpha)|\Re(\alpha)} \|f\|_{\infty}$$

Proposition 1.2.2 *Soient α et β avec $\Re(\alpha) > 0$ et $\Re(\beta) > 0$ alors on a la formule de composition :*

$$I^{\alpha}(I^{\beta} f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x)$$

(voir [7] p.10)

Démonstration 1.2.2 *On a :*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^t f(s)(x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} ds dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \left(\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt \right) ds \end{aligned}$$

On pose $v = \dfrac{t-s}{x-s}$. Alors $0 \leq v \leq 1$ et $dt = (x-s)dv$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt &= \int_0^1 ((x-s)(1-v))^{\alpha-1} v^{\beta-1} (x-s)^{\beta-1} dt \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} v^{\beta-1} dt \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

donc enfin on a :

$$I^{\alpha}(I^{\beta} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} ds = I^{\alpha+\beta} f(x)$$

Proposition 1.2.3 *Pour f et x fixés, l'intégrale de Riemann-Liouville est analytique en α .(voir [7] p.11)*

Démonstration 1.2.3 *Soit $M = \|f\|_\infty$ et N un majorant de $(x-t)^\epsilon |\ln(x-t)|$. Pour montrer que I^α est analytique il suffit de montrer que :*

$$\sup_{\alpha \in D_{\alpha_0,r}} |f(t)(x-t)^{\alpha-1}| < \delta(t) \qquad et \qquad \sup_{\alpha \in D_{\alpha_0,r}} |f(t)(x-t)^{\alpha-1}\ln(x-t)| < \vartheta(t)$$

avec δ , ϑ deux fonctions intégrables et $D_{\alpha_0,r} \subset E$ où $\Re(\alpha_0) > r$. Il est facile de voir que

$$\alpha \in D_{\alpha_0,r} \Longrightarrow \Re(\alpha_0) - r < \Re(\alpha) < \Re(\alpha_0) + r$$

1. *On traite d'abord* $\sup_{z \in D_{\alpha_0,r}} |f(t)(x-t)^{\alpha-1}|$
   (a) *pour* $(x-t) < 1$:
   $$|f(t)(x-t)^{\alpha-1}| \le M(x-t)^{\Re(\alpha)-1} \le M(x-t)^{\Re(\alpha_0)-r-1}$$
   (b) *pour* $(x-t) \ge 1$:
   $$|f(t)(x-t)^{\alpha-1}| \le M(x-t)^{\Re(\alpha)-1} \le M(x-t)^{\Re(\alpha_0)+r-1}$$
2. *pour le cas de* $\sup_{\alpha \in D_{\alpha_0,r}} |f(t)(x-t)^{\alpha-1}\ln(x-t)| < \vartheta(t)$ *on a :*
   (a) *pour* $(x-t) < 1$:
   $$|f(t)(x-t)^{\alpha-1}\ln(x-t)| \le M(x-t)^\epsilon (x-t)^{\Re(\alpha)-\epsilon-1}|\ln(x-t)| \le MN(x-t)^{\Re(\alpha_0)-r-\epsilon-1}$$
   (b) *pour* $(x-t) > 1$:
   $$|f(t)(x-t)^{\alpha-1}\ln(x-t)| \le M(x-t)^\epsilon (x-t)^{\Re(\alpha)-\epsilon-1}|\ln(x-t)| \le M\ln(b)(x-t)^{\Re(\alpha_0)+r-1}$$

En résumé on a :

$$\sup_{\alpha \in D_{\alpha_0,r}} |f(t)(x-t)^{\alpha-1}| \le \delta(t) = \begin{cases} M(x-t)^{\Re(\alpha_0)-r-1} & si\ x-t<1 \\ M(x-t)^{\Re(\alpha_0)+r-1} & si\ x-t>1 \end{cases}$$

avec δ intégrable car $\Re(\alpha_0) > r$ et $\Re(\alpha_0) + r > 0$. On a aussi que :

$$\sup_{\alpha \in D_{\alpha_0,r}} |f(t)(x-t)^{\alpha-1}\ln(x-t)| < \vartheta(t) = \begin{cases} MN(x-t)^{\Re(\alpha_0)-r-\epsilon-1} & si\ x-t<1 \\ M\ln(b)(x-t)^{\Re(\alpha_0)+r-1} & si\ x-t>1 \end{cases}$$

On a $\Re(\alpha_0) - r > 0$ donc pour que ϑ soit intégrable il suffit de prendre ϵ tel que $\Re(\alpha_0) - r - \epsilon > 0$ et ceci est possible car $\Re(\alpha_0) - r$ est strictement positif, ce qui termine la preuve.

1.2.1 Prolongement analytique

Admettons maintenant en outre que les dérivé $f^{(k)}(t)$ existent pour $k \le n$ et qu'elles remplissent des conditions analogues à celles posées pour $f(t)$. En intégrant par partie on a :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \text{ et si } \begin{cases} u(t) = f(t) \Longrightarrow u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \dfrac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Longrightarrow v(t) = -\dfrac{(x-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= -\frac{f(t)(x-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\Big|_0^x + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x f'(t)(x-t)^\alpha dt \\ &= \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha + I^{\alpha+1} f'(x) \end{aligned}$$

Si on fait une autre intégration partie on trouve :

$$I^\alpha f(x) = \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha + \frac{f'(0)}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1} + I^{\alpha+2}f''(x)$$

Donc après n intégrations par partie(voir [7] p.11) on a :

$$I^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(\alpha+k+1)}x^{\alpha+k} + I^{\alpha+n}f^{(n)}(x) \tag{1.6}$$

Sachant que $1/\Gamma(.)$ est analytique entière, que $I^{\alpha+n}$ est analytique pour $\alpha > -n$ et I^α est analytique pour $\alpha > 0$ donc d'après le théorème du prolongement analytique on peut prolonger I^α à $\mathbb{C}$ (pour $f \in C^\infty$ par exemple).

1.2.2 L'intégral I^α pour $\alpha = 0$ et pour α entier négatif

Dans le cas $\alpha = 0$, on peut utiliser la formule (1.6) avec $n = 1$; ce qui donne

$$I^0 f(x) = f(0) + I^1 f'(x) = f(x)$$

c'est-à-dire

$$I^0 f(x) = f(x) \tag{1.7}$$

Nous allons montrer que sous la seule condition de continuité de f, on a

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} I^\alpha f(x) = f(x) \tag{1.8}$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(x)(x-t)^{\alpha-1}dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(x)(x-t)^{\alpha-1}dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (f(t)-f(x))(x-t)^{\alpha-1}dt}_{i_1} + \underbrace{\frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt}_{i_2} \end{aligned}$$

D'abord

$$i_2 = \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt = -\frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-t)^\alpha \Big|_0^x = \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} f(x)$$

On doit montrer que $i_1 \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$. Rappelons à ce propos la définition de la continuité au point x

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall t \in I \quad (|x-t| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon)\,. \tag{1.9}$$

on divise l'intervalle $[0, x]$ en deux intervalles $[0, x-\eta]$ et $[x-\eta, x]$ avec η très petit

$$i_1 = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-\eta} (f(t)-f(x))(x-t)^{\alpha-1}dt}_{i_{1_a}} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\eta}^{x} (f(t)-f(x))(x-t)^{\alpha-1}dt}_{i_{1_b}}$$

$$i_{1_a} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-\eta} (f(t)-f(x))(x-t)^{\alpha-1}dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $\Gamma(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et l'expression $\displaystyle\int_0^{x-\eta} (f(t)-f(x))(x-t)^{\alpha-1}dt$ est bornée quand $\alpha \to 0$
Pour i_{1_b}, grâce à (1.9)

$$|i_{1_b}| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\eta}^{x} (x-t)^{\alpha-1}dt = -\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\Big|_{x-\eta}^{x} = \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}\eta^\alpha \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \varepsilon$$

ε étant choisi arbitrairement petit, on aura $i_{1_b} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$ (voir [7] p.12).
Maintenant nous allons définir I^α pour α entier négatif comme une limite. Nous allons utiliser (1.6) et (1.8)

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\longrightarrow -n} I^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha\longrightarrow -n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(\alpha+k+1)}x^{\alpha+k}+I^{\alpha+n}f^{(n)}(x)\Big)\\
&= \lim_{\alpha\longrightarrow -n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(\alpha+k+1)}x^{\alpha+k}+\lim_{\alpha\longrightarrow -n} I^{\alpha+n}f^{(n)}(x)\\
&= f^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Donc on conclut que :

$$I^{-n}f(x) = \lim_{\alpha\to -n} I^\alpha f(x) = f^{(n)}(x) \tag{1.10}$$

1.2.3 Quelques formules vérifiées par l'intégrale I^α

Nous avons déjà vu que si $\alpha = -n$ est un entier négatif $I^\alpha f(x)$ est une dérivée $n^{\text{ième}}$ (en respectant les hypothèses sur f). Maintenant prenons α un entier positif. Par la formule de composition on peut écrire

$$I^n f(x) = I^1\left(I^1\left(\dots I^1 f(x)\right)\right)$$

$$I^n(f(x)) = \int_0^x\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_{n-1}} f(t)\,dt\,dx_{n-1}\dots dx_1$$

Ainsi $I^n f(x)$ est une primitive $n^{\text{ième}}$. De plus

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}I^{\alpha+1}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)(x-t)^\alpha dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x f(t)\frac{d}{dx}(x-t)^\alpha dt\\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x f(t)(x-t)^\alpha dt = I^\alpha f(x)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}I^{\alpha+1}f(x) = I^\alpha f(x) \tag{1.11}$$

On peut même généraliser à un ordre k quelconque :

$$\frac{d^k}{dx^k}I^{\alpha+k}f(x) = I^\alpha f(x) \tag{1.12}$$

1.3 Puissances fractionnaires d'opérateurs

Dans cette section on utilise ([6]) comme référence. Soient $\mathbb{X}$ un espace de Banach et $A : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un opérateur linéaire fermé.

Définition 1.3.1 *On appelle ensemble résolvant :*

$$\rho(A)=\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \lambda I - A \text{ est inversible et d'inverse borné }\}$$

Définition 1.3.2 *On appelle spectre de A le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$ et on le note par $\sigma(A)$*

Remarque 1.3.1
- *L'ensemble résolvant est toujours un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$.*
- *Si A est borné alors le spectre est un compact de $\mathbb{C}$.*

Définition 1.3.3 *Ont dit que A est non-négatif si $]-\infty,0[\subset \rho(A)$ l'ensemble résolvant de A et :*

$$M = \sup_{\lambda>0}\{\|\lambda(A+\lambda I)^{-1}\|\} < +\infty \tag{1.13}$$

Remarque 1.3.2 *Puisque* $A(A+\lambda I)^{-1} = I - \lambda(A+\lambda I)^{-1}$*, et si* $\lambda > 0$ *on a clairement que* $A(A+\lambda I)^{-1}$ *est uniformément borné par rapport à* λ*, de plus :*

$$\left|\sup_{\lambda>0}\|A(A+\lambda I)^{-1}\| - \sup_{\lambda>0}\|\lambda(A+\lambda I)^{-1}\|\right| < 1 \tag{1.14}$$

Définition 1.3.4 *Ont dit qu'un opérateur linéaire fermé* $A : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *est sectoriel de type* ω *avec* $\omega \in]0,\pi[$ *si :*

(i) $\sigma(A)$ *est inclu dans la fermeture du secteur*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |arg(z)| < \omega\}$$

(ii) de plus, pour tout $\omega' \in]\omega,\pi[$ *la résolvante vérifie :*

$$\sup\{\|z(zI-A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} < +\infty$$

Remarque 1.3.3 *Tout opérateur non-négatif est sectoriel, et tout opérateur sectoriel est non-négatif. (voir [6] p.7)*

Dans tout ce mémoire on ne va utiliser que des opérateurs bornés. La formule qui va suivre, appelée formule de Balakrishnan, définit la puissance fractionnaire de A pour $0 < \Re(\alpha) < 1$.

Définition 1.3.5 *Soient* A *un opérateur linéaire borné,* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \Re(\alpha) < 1$*. La puissance fractionnaire* A^α *de* A *est définie par* $D(A^\alpha) = D(A) = \mathbb{X}$ *et*

$$A^\alpha\phi = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}A\phi\, d\lambda \quad (\phi \in \mathbb{X}) \tag{1.15}$$

Si A et non-négatif, l'intégrale définissant A^α est convergente en norme. En effet :

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha\phi\| &= |\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}|\|\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}A\phi\, d\lambda\| \\
&\leq |\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}|\Big(\|\int_0^{1} \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}A\phi\, d\lambda\| + \|\int_1^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}A\phi\, d\lambda\|\Big) \\
&\leq |\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}|\Big(\int_0^{1} \lambda^{\Re(\alpha)-1}\|(\lambda I + A)^{-1}A\phi\|\, d\lambda + \int_1^{+\infty} \lambda^{\Re(\alpha)-1}\|(\lambda I + A)^{-1}A\phi\|\, d\lambda\Big) \\
&\leq |\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}|\Big((M+1)\|\phi\|\int_0^{1} \lambda^{\Re(\alpha)-1}\, d\lambda + M\|A\phi\|\int_1^{+\infty} \lambda^{\Re(\alpha)-2}\, d\lambda\Big) < +\infty
\end{aligned}$$

car on a :

$$\|\lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}A\phi\| = \|\lambda^{\alpha-1}(I - \lambda(A+\lambda I)^{-1}\phi)\| \leq (M+1)\|\phi\|\lambda^{\Re(\alpha)-1}$$

$$\|\lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}A\phi\| = \|\lambda^{\alpha-2}\lambda(\lambda I + A)^{-1}A\phi\| \leq M\lambda^{\Re(\alpha)-2}\|A\phi\|.$$

Remarque 1.3.4

- *Dans les chapitres 2 et 3, l'opérateur* A *est défini par des intégrales doubles et triples. Nous avons été alors confronté à de sérieuses difficultés pour montrer que notre opérateur est non-négatif, c'est-à-dire assurer la condition (1.13) pour pouvoir utiliser la formule de Balakrishnan. Pour ce faire, nous proposons dès maintenant une classe d'opérateur, notée* $S_{a,b}$*, qui permet la convergence de l'intégrale dans la formule de Balakrishnan (au moins dans le cas de* $\mathbb{R}^2$*).*
- *En ce qui concerne la notion d'opérateur sectoriel, d'autres auteurs ont été confronté à des problèmes similaires, et ils ont proposé la notion d'opérateur presque sectoriel (voir [8])*

Définition 1.3.6 *Soit A un opérateur linéaire borné sur $\mathbb{X}$, on dit que $A \in S_{a,b}$ si $]-\infty, 0[\in \rho(A)$ et $\exists a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ telle que :*
- $\sup_{0<\lambda<1} \|\lambda^a(A+\lambda I)^{-1}A\| < +\infty$
- $\sup_{1<\lambda<+\infty} \|\lambda^b(A+\lambda I)^{-1}A\| < +\infty$

Remarque 1.3.5 *L'intégrale définissant A^α converge absolument si $a < \Re(\alpha) < b$ en effet :*

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{\Re(\alpha)-1}\|(\lambda I+A)^{-1}A\phi\|\,d\lambda \leq \int_0^1 \lambda^{\Re(\alpha)-1}\|(\lambda I+A)^{-1}A\phi\|\,d\lambda + \int_1^{+\infty} \lambda^{\Re(\alpha)-1}\|(\lambda I+A)^{-1}A\phi\|\,d\lambda$$
$$\leq \int_0^1 \lambda^{\Re(\alpha)-a-1}\|\lambda^a(\lambda I+A)^{-1}A\phi\|\,d\lambda + \int_1^{+\infty} \lambda^{\Re(\alpha)-b-1}\|\lambda^b(\lambda I+A)^{-1}A\phi\|\,d\lambda$$

pour que les intégrales convergent il suffit que $\Re(\alpha) - a > 0$ et $b - \Re(\alpha) > 0$.

1.3.1 Application

Comme première application, nous allons calculer la puissance fractionnaire de l'opérateur de "primitive". Soit $x \in [0,1]$, on définit A de $C([0,1])$ dans $C([0,1])$ par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Pour appliquer la formule de Balakrishnan il faut montrer que A est non-négatif.

1. Calcul de la résolvante :
   Soit $g \in C([0,1])$, on montre qu'il existe un unique $f \in C([0,1])$ tel que $g = Af + \lambda f$, en effet :

$$Af + \lambda f = g \quad \forall x \in [0,1]$$
$$Af + \lambda(Af)' = g \quad \forall x \in [0,1]$$
$$(Af)' + \frac{1}{\lambda}Af = \frac{1}{\lambda}g \quad \forall x \in [0,1] \tag{1.16}$$

   pour résoudre cette équation différentielle, on utilise le facteur intégrant :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{\lambda}\,dx} = e^{\frac{1}{\lambda}x}$$
$$(\mu(x)Af(x))' = \frac{1}{\lambda}\mu(x)g(x)$$
$$(e^{\frac{1}{\lambda}x}Af(x))' = \frac{1}{\lambda}e^{\frac{1}{\lambda}x}g(x)$$
$$(e^{\frac{1}{\lambda}x}Af(x)) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}t}g(t)\,dt$$
$$Af(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(t-x)}g(t)\,dt \tag{1.17}$$

   or on sait que $(Af)' = f$ donc on dérivant (1.17) par rapport à x on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}g(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)}g(t)\,dt \tag{1.18}$$

   La partie intégrale dans (1.18) est une convolution entre g et la fonction définie par $e^{-\frac{1}{\lambda}x}$ donc on peut écrire aussi :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}g(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}t}g(x-t)\,dt \tag{1.19}$$

   d'où l'expression de la résolvante

$$(\lambda I + A)^{-1}f(x) = \frac{1}{\lambda}f(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}t}f(x-t)\,dt \tag{1.20}$$

2. on montre que $M = \sup_{\lambda>0} \|\lambda(A+\lambda I)^{-1}\| < +\infty$:

$$|(A+\lambda I)^{-1}f(x)| = |\frac{1}{\lambda}f(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}t}f(x-t)\,dt|$$

$$|(A+\lambda I)^{-1}f(x)| \leq |\frac{1}{\lambda}f(x)| + |\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}t}f(x-t)\,dt|$$

$$|(A+\lambda I)^{-1}f(x)| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}t}|f(x-t)|\,dt$$

$$|(A+\lambda I)^{-1}f(x)| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\lambda^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}t}\,dt$$

$$|(A+\lambda I)^{-1}f(x)| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\lambda^2}\Big[-\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}t}\Big]_0^x$$

$$|(A+\lambda I)^{-1}f(x)| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}(1-e^{-\frac{1}{\lambda}x})$$

$$\|\lambda(A+\lambda I)^{-1}f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \tag{1.21}$$

donc on conclut que :

$$\sup_{\lambda>0}\{\|\lambda(A+\lambda I)^{-1}\|\} \leq 2 \tag{1.22}$$

3. calcul de la puissance fractionnaire de A :

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + A)^{-1}Af(x)\,d\lambda$$

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(I - \lambda(\lambda I + A)^{-1})f(x)\,d\lambda$$

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{-\frac{1}{\lambda}t}f(x-t)\,dt)\,d\lambda$$

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^x \lambda^{\alpha-2}e^{-\frac{1}{\lambda}t}f(x-t)\,dt\,d\lambda$$

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^x f(x-t)\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-2}e^{-\frac{1}{\lambda}t}\,d\lambda\,dt$$

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^x f(x-t)\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha-2}e^{-\frac{1}{\lambda}t}\,d\lambda\,dt$$

soit $y = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{y}$, $d\lambda = -\frac{dy}{y^2}$ donc on a :

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^x f(x-t)\int_0^{+\infty} y^{2-\alpha}e^{-yt}\frac{1}{y^2}\,dy\,dt$$

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^x f(x-t)\int_0^{+\infty} y^{-\alpha}e^{-yt}\,dy\,dt$$

$$A^\alpha f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^x f(x-t)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}}\,dt$$

on utilise (1.2) pour obtenir :

$$A^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x f(x-t)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}}\,dt$$

Finalement on trouve que la puissance fractionnaire de A n'est autre que l'intégrale de Riemann-Liouville :

$$A^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(x-t)t^{\alpha-1}\,dt \tag{1.23}$$

1.4 Quelques fonctions spéciales utiles

On commence par les fonctions de Bessel :

1. La fonction de Bessel de première espèce est définie par :

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}, \quad |z| < +\infty, \quad |arg(z)| < \pi. \tag{1.24}$$

(voir [5] p.102)

2. La fonction de Bessel modifiée est définie par :

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad |z| < +\infty, \quad |arg(z)| < \pi. \tag{1.25}$$

3. Il existe plusieurs formes intégrales de la fonction de Bessel. On va citer ce qui est utile pour la suite :

$$\Gamma(\nu+\frac{1}{2})J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{z}{2})^\nu \int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt \tag{1.26}$$

$$\Gamma(\nu+\frac{1}{2})J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{z}{2})^\nu \int_{0}^{\pi} e^{iz\cos(\phi)}(\sin(\phi))^{2\nu}\,d\phi \tag{1.27}$$

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\pm z\cos(\phi)}\,d\phi \tag{1.28}$$

les formules (1.26) à (1.28) sont valables pour $\Re\,(\nu) > -\frac{1}{2}$ (voir [1], volume II p.81)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} J_\gamma(\beta x) x^{\gamma+1} dx = \frac{2\alpha(2\beta)^\gamma \Gamma(\gamma+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}(\alpha^2+\beta^2)^{\gamma+\frac{3}{2}}} \qquad \Re(\gamma) > -1,\ \Re(\alpha) > |\Im(\beta)| \tag{1.29}$$

(voir [3] p.712 WA 422(6))

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_\nu(t)}{t^\mu} dt = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1-\mu}{2})}{2^\mu \Gamma(\frac{\nu+1+\mu}{2})} \qquad \Re(\mu) > -\frac{1}{2},\ \Re(\nu-\mu) > -1. \tag{1.30}$$

(voir [3] p.684 EH II 49(19))

4. La fonction de Bessel de première espèce, pour $z > 0$ et $\nu \geq 0$, est réelle, bornée et a un caractère oscillatoire. Son comportement pour les petites et les grandes valeurs est décrit par les formules asymptotiques suivantes (voir [5] p.134 (5.16.1)) :

$$J_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \qquad z \longrightarrow 0 \tag{1.31}$$

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi), \qquad z \longrightarrow +\infty \tag{1.32}$$

5. La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètre est définie par (voir [2] p.56) :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}) \tag{1.33}$$

la fonction de Mittag-Leffler à trois paramètres est définie par (voir [2] p.97) :

$$E^\gamma_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{z^k}{k!}, \qquad (\Re(\alpha) > 0,\ \Re(\beta) > 0,\ \gamma > 0) \tag{1.34}$$

on a la formule suivante (voir [2] p.85 formule (4.10.3)) :

$$\int_0^{+\infty} E_{\alpha,\beta}(-t) t^{p-1}\,dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(\beta-\alpha p)}, \qquad (0 < \Re(p) < 1) \tag{1.35}$$

6. Comportement asymptotique pour la fonction de Mittag-Leffler (voir [1] volume III p.210 formule 22)
   soit $t_n = z^{\frac{1}{\alpha}} e^{2\pi i n/\alpha}$
   on a la fonction $E_{\alpha,\beta}$ pour $|arg(z)| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$ est égale à :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{|arg(z)+2n\pi|<\frac{\alpha\pi}{2}} t_n^{1-\beta} e^{t_n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + O(|z|^{-N}), \qquad z \to \infty, \qquad |\arg(z)| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{1.36}$$

Chapitre 2

L'intégrale de Riemann-Liouville en dimension 2

L'intégrale de Riemann-Liouville a été généralisée par M.Riesz ([7]) aux dimensions supérieures dans le cas euclidien et lorentzien et ce de manière purement formelle. Dans ce qui suit, nous allons retrouver la définition de M.Riesz dans le cas lorentzien à l'aide des puissances fractionnaires d'opérateurs convenablement choisis. Soit

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0 \text{ et } x_1^2 > x_2^2\}$$

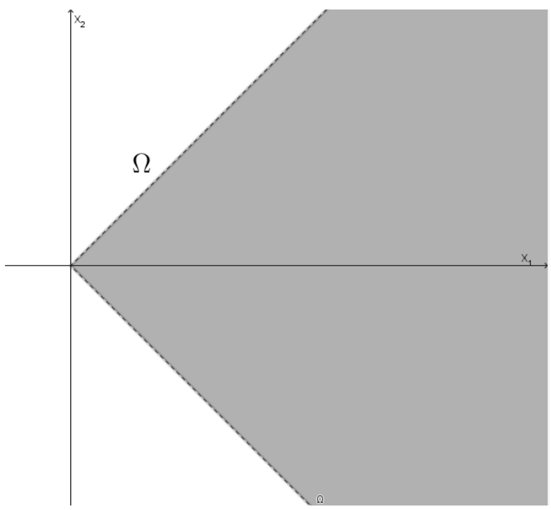

FIGURE 2.1 – Le cône Ω

C'est un cône convexe qui définit un ordre partiel sur $\mathbb{R}^2$ par : $X < Y \iff Y - X \in \Omega$. Les intervalles de $\mathbb{R}^2$ par rapport à cette relation d'ordre sont définis par :

$$[a, b] = \{X \in \mathbb{R}^2 \ /X - a \in \overline{\Omega} \ et \ b - X \in \overline{\Omega}\}$$

et sont bornés. Introduisons la forme quadratique $Q(X) = x_1^2 - x_2^2$ utile pour la suite.
Soit $\mathbb{X} = C([0, e_1])$ avec $e_1 = (1, 0)$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$

$$\mathcal{A}f(X) = \frac{1}{2} \iint_0^X f(t)dt \tag{2.1}$$

où $X \in [0, e_1]$, $t = (t_1, t_2)$ et $dt = dt_1 dt_2$. L'intervalle $[0, e_1]$ est représenté par la figure suivante :

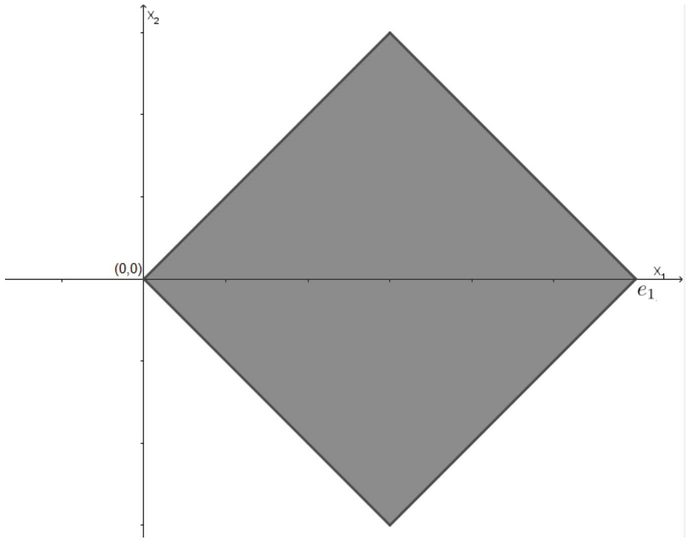

FIGURE 2.2 – "L'intervalle" $[0, e_1]$

Théorème 2.1.1 *La puissance fractionnaire de $\mathcal{A}$ pour $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ s'exprime par :*

$$\mathcal{A}^{\alpha} f(X) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)^2} \iint_0^X f(X-u)Q(u)^{\alpha-1}\,du$$

Démonstration 2.1.1 *On définit la transformation de Laplace dans $\mathbb{R}^2$ par :*

$$\mathcal{L}(f(X))(Z) = \iint\limits_{\Omega} e^{-\langle Z,X\rangle} f(X)dX \tag{2.2}$$

avec $Z = (z_1, z_2)$, $Z \in \Omega$ et $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$.

1. *On montre d'abord que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné, en effet :*
$$\Big|\mathcal{A}f(X)\Big| = \frac{1}{2}\Big|\iint_0^X f(t)dt\Big| \leq \frac{1}{2}\iint_0^X |f(t)|dt \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty \iint_0^{e_1} dt \leq \frac{1}{4}\|f\|_\infty$$

2. *Calculons la transformée de Laplace de $\mathcal{A}f(X)$:*
$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}(\mathcal{A}f(X))(Z) &= \iint\limits_{\Omega} e^{-\langle Z,X\rangle}\mathcal{A}f(X)dX = \iint\limits_{\Omega} e^{-\langle Z,X\rangle}\iint_0^X f(t)dtdX \\ &= \iint\limits_{\Omega} \underbrace{\Big(\iint\limits_{t+\Omega} e^{-\langle Z,X\rangle}dX\Big)}_{L(Z)} f(t)dt \end{aligned}$$
Calculons $L(Z)$. Posons $X = t + u \;\; u \in \Omega$ ce qui implique que :
$$L(Z) = \iint\limits_{t+\Omega} e^{-\langle Z,X\rangle}dX = e^{-\langle Z,t\rangle}\underbrace{\iint\limits_{\Omega} e^{-\langle Z,u\rangle}\,du}_{\phi(Z)}$$
$$\phi(Z) = \int_0^{+\infty}\int_{-u_1}^{u_1} e^{-z_1u_1 - z_2u_2}du_2du_1 = \int_0^{+\infty} e^{-z_1u_1}\frac{e^{-z_2u_2}}{-z_2}\Bigg|_{-u_1}^{u_1} du_1$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-z_1u_1}\left(\frac{e^{u_1z_2} - e^{-u_1z_2}}{z_2}\right)du_1 = \frac{1}{z_2}\left(\frac{1}{z_1-z_2} - \frac{1}{z_1+z_2}\right)$$
$$\phi(Z) = \frac{2}{z_1^2 - z_2^2} = \frac{2}{Q(Z)}$$
Finalement on trouve :
$$\mathcal{L}(\mathcal{A}f(X))(Z) = \frac{1}{Q(Z)}\mathcal{L}(f(X)) \tag{2.3}$$

3. *Calcul de la résolvante* $(\lambda I + \mathcal{A})^{-1}$

(a) *On pose* $g = (\lambda I + A)^{-1} f$, *ce qui est équivalent à* $(\lambda I + A)g = f$

$$(\lambda I + A)g = f \iff \lambda\mathcal{L}(g)(Z) + \frac{1}{Q(Z)}\mathcal{L}(g)(Z) = \mathcal{L}(f)(Z) \iff \mathcal{L}(g)(Z) = \frac{Q(Z)}{\lambda Q(Z)+1}\mathcal{L}(f)(Z)$$

$$\frac{Q(Z)}{\lambda Q(Z)+1} = \frac{Q(Z)+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}}{\lambda(Q(Z)+\frac{1}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{Q(Z)+\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{\lambda})^k}{Q(Z)^{k+1}}$$

finalement on a trouvé que :

$$\frac{Q(Z)}{\lambda Q(Z)+1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{\lambda})^k}{Q(Z)^{k+1}} \tag{2.4}$$

(b) *Pour calculer la résolvante il faut trouver l'originale de* $\frac{1}{Q(Z)+\frac{1}{\lambda}}$. *Pour cela on va calculer la transformée de Laplace de* $Q(Z)^\beta$. *Soit*

$$\mathcal{B} = \iint_\Omega e^{-\langle Z,u\rangle}Q(u)^\beta du = \int_0^{+\infty}\int_{-u_1}^{u_1} e^{-z_1u_1-z_2u_2}(u_1^2-u_2^2)^\beta du_2du_1$$

on pose $u_2 = u_1\tau$, $\tau \in]-1,1[$ *l'intégrale devient*

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \int_0^{+\infty}\int_{-1}^{1} e^{-z_1u_1-z_2u_1\tau}u_1^{2\beta+1}(1-\tau^2)^\beta d\tau du_1 \\ &= \Gamma(2\beta+2)\int_{-1}^{1}\Big(z_1+\tau z_2\Big)^{-2\beta-2}(1-\tau^2)^\beta d\tau \\ &= \Gamma(2\beta+2)z_1^{-2\beta-2}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j(2\beta+2)_j}{j!}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^j\underbrace{\int_{-1}^{1}\tau^j(1-\tau^2)^\beta d\tau}_{\varpi}\end{aligned}$$

où $(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1) = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}$ *désigne le symbole de Pochhammer. L'intégrale* $\varpi = 0$ *si* j *est impaire donc on a :*

$$\varpi = \int_{-1}^{1}\tau^{2l}(1-\tau^2)^\beta = 2\int_0^1\tau^{2l}(1-\tau^2)^\beta = \int_0^1(\tau^2)^{l-\frac{1}{2}}(1-\tau^2)^\beta d(\tau^2) = \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+l+\frac{3}{2})}$$

d'où

$$\mathcal{B} = \Gamma(2\beta+2)z_1^{-2\beta-2}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(2\beta+2)_{2l}}{(2l)!}\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+l+\frac{3}{2})}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2l}$$

On a :

$$\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\Gamma(2l+1)} = \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\Gamma(2(l+\frac{1}{2}))} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(l+\frac{1}{2})}{2^{2l}\Gamma(l+\frac{1}{2})\Gamma(l+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2l}l!}$$

$$\frac{\Gamma(2\beta+2)(2\beta+2)_{2l}}{\Gamma(\beta+l+\frac{3}{2})} = \frac{\Gamma(2\beta+2l+2)}{\Gamma(\beta+l+\frac{3}{2})} = \frac{2^{2\beta+2l+1}\Gamma(\beta+l+1)\Gamma(\beta+l+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta+l+\frac{3}{2})} = \frac{2^{2\beta+2l+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\beta+l+1)$$

On remplace dans $\mathcal{B}$ *on aura :*

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= z_1^{-2\beta-2}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+l+1)\Gamma(\beta+1)}{l!}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2l} = 2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+1)^2z_1^{-2\beta-2}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(\beta+1)_l}{l!}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2l} \\ &= 2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+1)^2z_1^{-2\beta-2}\big(1-(\frac{z_2}{z_1})^2\big)^{-\beta-1} = 2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+1)^2(z_1^2-z_2^2)^{-\beta-1}\end{aligned}$$

En définitive on obtient :

$$\iint_{\Omega} e^{-\langle Z,u\rangle} Q(u)^{\beta} du = \frac{2^{2\beta+1}\Gamma(\beta+1)^2}{Q(Z)^{\beta+1}} \tag{2.5}$$

(c) *Détermination de* $(A+\lambda I)^{-1}$. *Dans notre cas,* $\beta = k$ *donc*

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{Q(Z)^{k+1}}\Big)(u) = \frac{Q(u)^k}{2^{2k+1}\Gamma(k+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{Q(Z)+\frac{1}{\lambda}}\Big)(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k+1}\lambda^k} Q(u)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\Big(\frac{Q(u)}{4\lambda}\Big)^k = \frac{1}{2}J_0\Big(\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}}\Big)$$

où J_0 *est la fonction de Bessel de première espèce d'indice* 0 *d'une variable. Et finalement :*

$$(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}f(X) = \frac{1}{\lambda}f(X) - \frac{1}{2\lambda^2}\iint_0^X J_0\Big(\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}}\Big) f(X-u)du \tag{2.6}$$

4. *Pour pouvoir appliquer la formule de Balakrishnan à notre opérateur il faut montrer que soit* $\mathcal{A}$ *est non-négatif (condition 1.13), ou bien qu'il est dans une classe* $\mathcal{S}_{a,b}$ *(définition 1.3.6). On a*

$$(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}f(X) = \frac{1}{2\lambda}\iint_0^X J_0\Big(\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}}\Big) f(X-u)du \tag{2.7}$$

<u>*pour* $\lambda \in]0,1]$</u> : *ont sait que* $\sqrt{x}J_0(x)$ *est bornée pour tout* $x \geq 0$ *d'où* $\exists M_0 > 0$ *tel que* $|\sqrt{x}J_0(x)| \leq M_0$ *et donc*

$$\begin{aligned}\Big|(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}f(X)\Big| &\leq \frac{1}{2\lambda^{\frac{3}{4}}}\iint_0^X \frac{1}{Q(u)^{\frac{1}{4}}}\Big|\Big(\frac{Q(u)}{\lambda}\Big)^{\frac{1}{4}} J_0\Big(\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}}\Big)\Big||f(X-u)|du \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty M_0}{2\lambda^{\frac{3}{4}}}\underbrace{\iint_0^X \frac{du}{Q(u)^{\frac{1}{4}}}}_{<+\infty}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sup_{0<\lambda\leq 1}\|\lambda^{\frac{3}{4}}(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}\| < +\infty \tag{2.8}$$

<u>*pour* $\lambda \in]1,+\infty[$</u>: *dans ce cas on utilise le fait que* J_0 *est bornée par* 1, *donc l'intégrale sera bornée par* $c\|f\|_\infty$. *Ainsi*

$$\Longrightarrow \sup_{1<\lambda<+\infty}\|\lambda(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}\| < +\infty \tag{2.9}$$

Nous avons réussi à trouver $a = \dfrac{3}{4}$, $b = 1$ *tels que* $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_{a,b}$.

5. *Application de la formule Balakrishnan. Soit* $\dfrac{3}{4} < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\alpha f(X) &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha-1}(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}f(X)d\lambda \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha-1}\Big(\frac{1}{2\lambda}\iint_0^X J_0\Big(\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}}\Big)f(X-u)d\lambda\Big)du \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}\int_0^{+\infty}\iint_0^X \lambda^{\alpha-2}J_0\Big(\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}}\Big)f(X-u)d\lambda du \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}\iint_0^X f(X-u)du\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha-2}J_0\Big(\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}}\Big)d\lambda \\ \substack{t=\sqrt{\frac{Q(u)}{\lambda}} \\ \lambda=\frac{Q(u)}{t^2} \\ d\lambda=-\frac{2Q(u)}{t^3}dt} \quad &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi}\iint_0^X f(X-u)du\int_0^{+\infty}\Big(\frac{Q(u)}{t^2}\Big)^{\alpha-2}J_0(t)\frac{2Q(u)}{t^3}dt \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\iint_0^X f(X-u)Q(u)^{\alpha-1}du\int_0^{+\infty}\frac{J_0(t)}{t^{2\alpha-1}}dt\end{aligned}$$

donc on a :

$$\mathcal{A}^{\alpha} f(X) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \iint_0^X f(X-u)Q(u)^{\alpha-1}du \int_0^{+\infty} \frac{J_0(t)}{t^{2\alpha-1}}dt \tag{2.10}$$

On utilise la formule (1.30). Dans notre cas on a $\nu = 0$, $\mu = 2\alpha - 1$. *Alors*

— $2\alpha - 1 > -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2\alpha > \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \alpha > \dfrac{1}{4}$

— $-2\alpha + 1 > -1 \Longrightarrow -2\alpha + 1 > -1 \Longrightarrow \alpha < 1$

donc on peut utiliser cette formule pour l'intégrale en t

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(t)}{t^{2\alpha-1}}dt = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)}$$

et on remplace dans(2.10) :

$$\mathcal{A}^{\alpha} f(X) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \frac{sin(\alpha\pi)}{\pi} \iint_0^X f(X-u)Q(u)^{\alpha-1}du$$

on utilise (1.2) on trouve :

$$\mathcal{A}^{\alpha} f(X) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)^2} \iint_0^X f(X-u)Q(u)^{\alpha-1}du \tag{2.11}$$

Cette formule est reliée à l'intégrale de Riemann-Liouville I^{α}, introduite par Marcel Riesz, par l'expression :

$$\mathcal{A}^{\alpha} = I^{2\alpha} \tag{2.12}$$

pour $\alpha \in \left]\dfrac{3}{4}, 1\right[$.

Chapitre 3

L'intégrale de Riemann-Liouville en dimension 3

Dans ce chapitre nous allons appliquer le même procédé que le chapitre précédent mais en dimension 3. Le cône convexe

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^3, x_1 > 0 \ et \ x_1^2 > x_2^2 + x_3^2\}$$

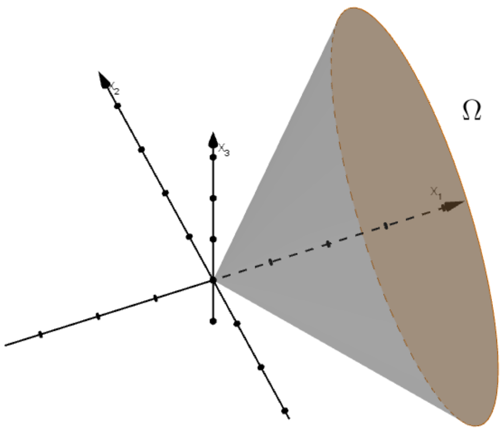

FIGURE 3.1 – Le Cône Ω

définit un ordre partiel sur $\mathbb{R}^3$ par $X < Y \Longleftrightarrow Y - X \in \Omega$. Comme le cas précédent, les intervalles de $\mathbb{R}^3$ par rapport à cette relation d'ordre sont définis par :

$$[a, b] = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / X - a \in \overline{\Omega} \ et \ b - X \in \overline{\Omega}\}$$

et sont bornés. Introduisons la forme quadratique $Q(X) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Soit $\mathbb{X} = C([0, e_1])$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$ On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ avec :

$$\mathcal{A}f(X) = \frac{1}{2\pi} \iiint_0^X f(t)dt \qquad (3.1)$$

où $X \in [0, e_1]$, $t = (t_1, t_2, t_3)$ et $dt = dt_1 dt_2 dt_3$. L'intervalle $[0, e_1]$ est représenté par la figure suivante :

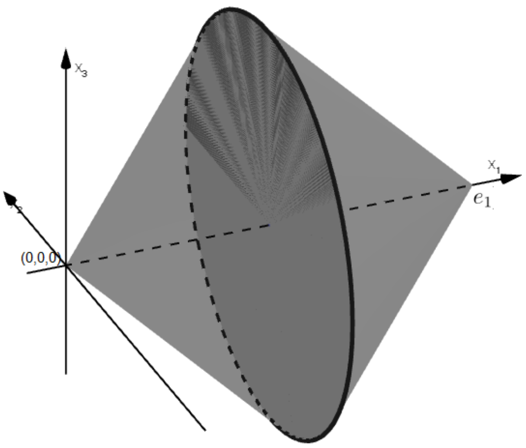

FIGURE 3.2 – "L'intervalle" $[0, e_1]$

Théorème 3.1.1 *La puissance fractionnaire de $\mathcal{A}$ pour $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ s'exprime par :*

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{3\alpha-1}\Gamma(\frac{3\alpha}{2})\Gamma(\frac{3\alpha-1}{2})} \iiint_0^X f(X-u)Q(u)^{\frac{3\alpha}{2}-\frac{3}{2}}\, du$$

où α_0 , $\alpha_1 \in]0, 1[$ restent à déterminer.

Démonstration 3.1.1 *On définit la transformation de Laplace dans $\mathbb{R}^3$ par :*

$$\mathcal{L}(f(X))(Z) = \iiint_\Omega e^{-\langle Z,X\rangle} f(X)dX \tag{3.2}$$

avec $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega$.

1. *On montre d'abord que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné, en effet :*

$$\Big|\mathcal{A}f(X)\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\iiint_0^X f(t)dt\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\iiint_0^X |f(t)|dt \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty \iiint_0^{e_1} dt \leq \frac{mes([0,e_1])}{2\pi}\|f\|_\infty$$

2. *Calculons la transformée de Laplace de $\mathcal{A}f(X)$:*

$$\begin{aligned} 2\pi\mathcal{L}\left(\mathcal{A}f(X)\right)(Z) &= 2\pi\iiint_\Omega e^{-\langle Z,X\rangle}\mathcal{A}f(X)dX &= \iiint_\Omega e^{-\langle Z,X\rangle}\iiint_0^X f(t)dtdX \\ &= \iiint_\Omega \underbrace{\Big(\iiint_{t+\Omega} e^{-\langle Z,X\rangle}dX\Big)}_{L(Z)} f(t)dt. \end{aligned}$$

Calculons $L(Z)$. Posons $X = t + u,\ \ u \in \Omega$ ce qui implique que :

$$L(Z) = \iiint_{t+\Omega} e^{-\langle Z,X\rangle}dX = e^{-\langle Z,t\rangle}\underbrace{\iiint_\Omega e^{-\langle Z,u\rangle}\, du}_{\phi(Z)}$$

Pour calculer $\phi(Z)$ on doit paramétrer le cône en coordonnées polaires

$$u_1 = u_1,\ u_2 = \rho\cos(\theta),\ u_3 = \rho\sin(\theta)$$

On fait de même pour Z :
$z_1 = z_1$, $z_2 = r\cos(\varphi)$, $z_3 = r\sin(\varphi)$ $\quad 0 < u_1 < +\infty$, $0 < \rho < u_1$, $0 < \theta < 2\pi$

$$z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3 = z_1u_1 + r\rho(\cos(\theta-\varphi))$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\phi(Z) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{u_1}\int_0^{2\pi} e^{-z_1u_1 - r\rho(\cos(\theta-\varphi))}\rho\, d\theta\, d\rho\, du_1 \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{u_1}\int_0^{2\pi} e^{-z_1u_1 - r\rho(\cos(\theta))}\rho\, d\theta\, d\rho\, du_1 \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty}\int_0^{u_1} e^{-z_1u_1} I_0(r\rho)\rho\, d\rho\, du_1 \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty}\int_\rho^{+\infty} e^{-z_1u_1} I_0(r\rho)\rho\, du_1\, d\rho \\
&= \frac{2\pi}{z_1}\int_0^{+\infty} e^{-z_1\rho} I_0(r\rho)\rho\, d\rho \\
&= \frac{2\pi}{z_1}\int_0^{+\infty} e^{-z_1\rho} J_0(ir\rho)\rho\, d\rho
\end{aligned}$$

On utilise la formule (1.29). Dans notre cas on a :

$$\gamma = 0 > -1\ ,\ \alpha = z_1 > |\Im(\beta)| = r = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

ce qui donne

$$\phi(Z) = \frac{2\pi}{z_1}\left(\frac{2z_1\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}(z_1^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{2\pi}{Q(Z)^{\frac{3}{2}}}$$

puis enfin

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}f(X))(Z) = \frac{1}{Q(Z)^{\frac{3}{2}}}\mathcal{L}(f(X))(Z) \tag{3.3}$$

3. *Calcul de la résolvante* $(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}$

   (a) *On pose* $g = (\lambda I+\mathcal{A})^{-1}f$ *ce qui équivaut à* $(\lambda I+\mathcal{A})g = f$

$$(\lambda I+\mathcal{A})g = f \iff \lambda\mathcal{L}(g)(Z) + \frac{1}{Q(Z)^{\frac{3}{2}}}\mathcal{L}(g)(Z) = \mathcal{L}(f)(Z)$$

$$\iff \mathcal{L}(g)(Z) = \frac{Q(Z)^{\frac{3}{2}}}{\lambda Q(Z)^{\frac{3}{2}}+1}\mathcal{L}(f)(Z)$$

$$\frac{Q(Z)^{\frac{3}{2}}}{\lambda Q(Z)^{\frac{3}{2}}+1} = \frac{Q(Z)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}}{\lambda(Q(Z)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{Q(Z)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{\lambda})^k}{Q(Z)^{\frac{3}{2}(k+1)}}$$

   c'est-à-dire

$$\frac{Q(Z)^{\frac{3}{2}}}{\lambda Q(Z)^{\frac{3}{2}}+1} = \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{\lambda})^k}{Q(Z)^{\frac{3}{2}(k+1)}} \tag{3.4}$$

   (b) *Pour calculer la résolvante il faut trouver l'originale de* $\dfrac{Q(Z)^{\frac{3}{2}}}{\lambda Q(Z)^{\frac{3}{2}}+1}$, *pour cela on va calculer la transformée de Laplace de* $Q(Z)^\beta$. *On note cette transformée par* $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \iiint_\Omega e^{-\langle Z,u\rangle}Q(u)^\beta du$$

   On utilise le changement de variable précédent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \int_0^{+\infty}\int_0^{u_1}\int_0^{2\pi} e^{-z_1u_1-r\rho\cos(\theta)}(u_1^2-\rho^2)^\beta\rho\,d\theta\,d\rho\,du_1 \qquad \rho=u_1\tau, d\rho=u_1d\tau\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{1}\int_0^{2\pi} e^{-u_1(z_1+r\tau\cos(\theta))}u_1^{2\beta+2}(1-\tau^2)^\beta\tau\,d\theta\,d\tau\,du_1\\
&= \Gamma(2\beta+3)\int_0^1\int_0^{2\pi}(z_1+r\tau\cos(\theta))^{-2\beta-3}(1-\tau^2)^\beta\tau\,d\theta\,d\tau\\
&= \Gamma(2\beta+3)z_1^{-2\beta-3}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1+\frac{r}{z_1}\tau\cos(\theta))^{-2\beta-3}(1-\tau^2)^\beta\tau\,d\theta\,d\tau\\
&= \Gamma(2\beta+3)z_1^{-2\beta-3}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j(2\beta+3)_j}{j!}(\frac{r}{z_1})^j\int_0^1\int_0^{2\pi}\cos(\theta)^j\tau^{j+1}(1-\tau^2)^\beta\,d\theta\,d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(\cos(\theta))^j\,d\theta &= \int_0^{\pi}(\cos(\theta))^j\,d\theta+\int_\pi^{2\pi}(\cos(\theta))^j\,d\theta \qquad \theta=\theta'+\pi\\
&= \int_0^{\pi}(\cos(\theta))^j\,d\theta+\int_0^{\pi}(-\cos(\theta'))^j\,d\theta'\\
&= (1+(-1)^j)\textstyle\int_0^{\pi}(\cos(\theta))^j\,d\theta \qquad \left\{\begin{array}{l}\cos(\theta)=t \quad \theta=\arccos(t)\\ d\theta=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\end{array}\right.\\
&= (1+(-1)^j)\int_{-1}^1 t^j(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt
\end{aligned}$$

pour $j=2m$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(\cos(\theta))^j\,d\theta &= 4\int_0^1 t^{2m}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt\\
&= 2\int_0^1 (t^2)^{m-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(t^2)=2\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\tau^{2m+1}(1-\tau^2)^\beta\,d\tau &= \frac{1}{2}\int_0^1\tau^m(1-\tau^2)^\beta\,d(\tau^2)\\
&= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+\beta+2)}
\end{aligned}$$

donc on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Gamma(2\beta+3)z_1^{-2\beta-3}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(2\beta+3)_{2m}}{(2m)!}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+\beta+2)}(\frac{r}{z_1})^{2m}\\
&= \Gamma(2\beta+3)z_1^{-2\beta-3}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(2\beta+3)_{2m}}{(2m)!}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+\beta+2)}(\frac{r}{z_1})^{2m}\\
&= \Gamma(\beta+1)z_1^{-2\beta-3}\pi\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(2m+2\beta+3)}{m!\Gamma(m+\beta+2)}(\frac{r}{2z_1})^{2m}\\
&= \Gamma(\beta+1)z_1^{-2\beta-3}\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{2^{2m+2\beta+2}\Gamma(m+\beta+\frac{3}{2})\Gamma(m+\beta+2)}{m!\Gamma(m+\beta+2)}(\frac{r}{2z_1})^{2m}\\
&= \Gamma(\beta+1)z_1^{-2\beta-3}2^{2\beta+2}\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(m+\beta+\frac{3}{2})}{m!}(\frac{r}{z_1})^{2m}\\
&= \Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+\tfrac{3}{2})z_1^{-2\beta-3}2^{2\beta+2}\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\beta+\frac{3}{2})_m}{m!}(\frac{r^2}{z_1^2})^m\\
&= \Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+\tfrac{3}{2})z_1^{-2\beta-3}2^{2\beta+2}\sqrt{\pi}\left(1-\tfrac{r^2}{z_1^2}\right)^{-\beta-\frac{3}{2}}\\
&= \Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+\tfrac{3}{2})2^{2\beta+2}\sqrt{\pi}Q(Z)^{-\beta-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

d'ou la transformée de Laplace de $Q(u)^\beta$

$$\mathcal{L}(Q(u)^\beta)(Z)=\frac{2\pi\Gamma(2\beta+2)}{Q(Z)^{\beta+\frac{3}{2}}} \tag{3.5}$$

(c) *Détermination de* $(\mathcal{A}+\lambda I)^{-1}$

dans notre cas, $\beta = \dfrac{3}{2}k$ *donc on a :*

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{Q(Z)^{\frac{3}{2}k+\frac{3}{2}}}\Big)(u) = \frac{Q(u)^{\frac{3}{2}k}}{2\pi\Gamma(3k+2)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{Q(Z)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\lambda}}\right)(u) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2\pi\lambda^k\Gamma(3k+2)}(Q(u)^{\frac{3}{2}})^k \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(3k+2)}(\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda})^k \\ &= \frac{1}{2\pi}E_{3,2}(-\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda})\end{aligned}$$

donc finalement on a :

$$(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}f(X) = \frac{1}{\lambda}f(X) - \frac{1}{2\pi\lambda^2}\iiint_0^X E_{3,2}(-\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda})f(X-u)du \tag{3.6}$$

(d) *La formule précédente montre que* $]-\infty,0[\subset\rho(\mathcal{A})$*, donc il reste à montrer que :* $M=\sup\limits_{\lambda>0}\{\|\lambda(\mathcal{A}+\lambda I)^{-1}\|\}<+\infty$ *ou bien que* $\mathcal{A}$ *est dans une classe* $S_{a,b}$*. Malheureusement nous n'avons pas réussi à montrer ceci. Ce que nous conjecturons pour achever ce travail.*

4. *Calcul de la puissance fractionnaire :*

$$(\lambda I+\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}f(X) = \frac{1}{2\pi\lambda}\iiint_0^X E_{3,2}(-\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda})f(X-u)du$$

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha-2}\iiint_0^X E_{3,2}(-\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda})f(X-u)\,du\,d\lambda$$

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty}\iiint_0^X \lambda^{\alpha-2}E_{3,2}(-\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda})f(X-u)\,du\,d\lambda$$

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\iiint_0^X f(X-u)\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha-2}E_{3,2}(-\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda})\,d\lambda\,du$$

Soit les variable : $s=\dfrac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{\lambda}$, $\lambda=\dfrac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{s}$, $d\lambda=-\dfrac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{s^2}ds$

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\iiint_0^X f(X-u)\int_0^{+\infty}\Big(\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{s}\Big)^{\alpha-2}E_{3,2}(-s)\frac{Q(u)^{\frac{3}{2}}}{s^2}ds\,du$$

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\iiint_0^X f(X-u)Q(u)^{\frac{3}{2}(\alpha-1)}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{s}\Big)^{\alpha}E_{3,2}(-s)\,ds\,du$$

or on a d'après la formule (1.35)

$$\int_0^{+\infty}s^{-\alpha}E_{3,2}(-s)\,ds = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3-3(1-\alpha))} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\alpha-1)}$$

donc :

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\iiint_0^X f(X-u)Q(u)^{\frac{3}{2}(\alpha-1)}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\alpha-1)}du$$

et on conclut que :

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\Gamma(3\alpha-1)}\iiint_0^X f(X-u)Q(u)^{\frac{3}{2}(\alpha-1)}\,du \tag{3.7}$$

En utilisant la formule de duplication (1.3), on a :

$$\Gamma(3\alpha - 1) = \Gamma(2(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2})) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{3\alpha-2}\Gamma(\frac{3}{2}\alpha)\Gamma(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2})$$

L'expression (3.7) s'écrira alors :

$$\mathcal{A}^\alpha f(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{3\alpha-1}\Gamma(\frac{3\alpha}{2})\Gamma(\frac{3\alpha-1}{2})} \iiint_0^X f(X-u)Q(u)^{\frac{3\alpha}{2}-\frac{3}{2}}\, du \tag{3.8}$$

Cette formule est reliée à l'intégrale de Riemann-Liouville, introduite par Marcel Riesz, par l'expression :

$$\mathcal{A}^\alpha = I^{3\alpha} \tag{3.9}$$

3.2 Application à l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$

On a d'abord deux propriétés analogues à celles citées en dimension 1. En effet, si on note par $\Box$ l'opérateur des ondes (le d'Alembertien) ie ;

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

on a :

Propriété 3.2.1 *Soient α et β avec $\Re(\alpha) > 1$ et $\Re(\beta) > 1$ alors :*

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta} \tag{3.10}$$

$$\Box I^{\alpha+2} = I^\alpha \tag{3.11}$$

voir([7] p.04 et p.32)

Remarque 3.2.1 *On peut aussi prouver que $I^0 f(x) = f(x)$ voir([7] p.05)*

• La formule[3.11] est importante, car en prenant $\alpha = 0$ on aura :

$$\Box I^2 f(x) = I^0 f(x) = f(x)$$

Or on a :

$$I^2 f(x) = \frac{1}{2\pi} \iiint_0^x f(x-u)Q(u)^{-1/2}\, du$$

voir([7] p.04). Il est clair que :

$$I^2 f(x) = (f * g)(x)$$

avec

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{Q(x)}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}} & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc on a :

$$\Box(f * g) = f = (f * \delta)$$

ce qui implique que :

$$(f * \Box g) = (f * \delta)$$

f étant quelconque on aura :

$$\Box g = \delta$$

ce qui implique que g est une solution élémentaire du d'Alembertien.

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, l'objectif de retrouver les définitions données par M.Riesz de l'intégrale de Riemann-Liouville en dimension 2 et 3 dans le cas Lorentzien a été atteint dans une large mesure. Il manque cependant la démonstration que l'intégrale dans la formule de Balakrishnan converge dans un sous-intervalle de $]0,1[$. Nous comptons remédier à cela dans un travail prolongeant ce mémoire. Comme perspectives nous pouvons d'abord projeter d'étendre cette approche, à savoir la théorie des puissances fractionnaires d'opérateurs, au cas d'une dimension quelconque toujours en relation avec le cas Lorentzien et l'équation des ondes. La difficulté qu'il faudra surmonter est celle de la convergence de l'intégrale dans la formule de Balakrishnan. Ensuite, on pourrait essayer d'entreprendre de faire la même chose dans le cas discret, c'est-à-dire démarrer avec une formule discrète approchant l'opérateur $\mathcal{A}$ et lui appliquer la théorie des puissances fractionnaires pour récupérer une approximation de $\mathcal{A}^{\alpha}$. Cela pourrait avoir des conséquences intéressantes sur la résolution numérique de problèmes liés à l'équation des ondes.

Bibliographie

[1] A.Erdélyi, *Higher Transcendental Functions*, California Institute of Technologie, Bateman Manuscript Project, McGraw Hill, 1953.

[2] R.Gorenflo, Anatoly A.Kilbas, F.Mainardi and Sergei V.Rogosin, *Mittag-leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, 2014.

[3] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik (Auth.), *Table of Integrals, Series, and Products*, Elsevier Inc, Academic Press Inc (1980).

[4] H. J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena, *Mittag-Leffler functions and their applications*, Hindawi Publishing Corporation. Journal of Applied Mathematics, 2011, pp 1-51.

[5] N.N.Lebedev, *Spetial Function and Their Applications*,Physico-Technical Institute Academy of Sciences, U.S.S.R, 1965.

[6] C.Martinez Carracedo and M.Sans Alix, *The Theory of Fractional Powers of Operators*, North-Holland, Mathematics Studies 187, 2001.

[7] M.Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Mathematica (1948) 81, pp. 1-222.

[8] Xiao-Li Ding and Bashir Ahmad, *Analytical solutions to fractional evolution equations with almost sectorial operators*, Ding and Ahmad advances in difference equations, 2016, pp.2-25.