

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

En vue de l'obtention du

Diplôme de master en mathématiques

Option : Biomathématiques et Modélisation

**Bifurcation de Hopf pour un modèle proie-prédateur avec
structure d'âge**

Présenté par : MEDJAHDI Ikram

Mémoire soutenu le 16/06/2019 devant le jury composé de :

A. Moussaoui	Professeur, Université de Tlemcen	Président
A. Chekroun	M.C.B, Université de Tlemcen	Examineur
A. Menouar	M.C.B, Université de Tlemcen	Examineur
Y.O. Boukarabila	M.C.B, Université de Tlemcen	Encadrant

Année Universitaire 2018-2019



Dédicace

*Je dédie ce mémoire à mes très chers parents
Tayeb et Nadja qui m'ont toujours soutenus , et
qui ont tout sacrifié pour mes études, tout le
mérite leurs revient. Qu'ils trouvent ici ma
sincère reconnaissance et mon amour.*

*A mes deux chères soeurs Fatima Zahra et
Imane et mon frère Mohamed-Amine.*

A Sidi-Mohamed Bentout, et sa familles.

A mes oncles, tantes, cousins, cousines .

A ma grand-mère paternelle, et mon grand-père.

*A mes chers amis et à tous ceux qui me sont
chers.*

*"Les bienfaits que nous avons reçus
de nos parents sont les plus grands de
tous."*

Socrate ; Le monde grec-Ve s.av.-C

Remerciements

- Avant tout, je remercie ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.
- J'adresse mes vifs remerciements à mon encadrant Monsieur **Youcef Oussama BOUKARABILA** maitre de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen, pour m'avoir permis d'effectuer ce travail sous sa direction et m'a offert la possibilité de travailler sur un sujet passionnant, mais aussi pour sa gentillesse et ces précieux conseils.
- Je prie monsieur **Ali Moussaoui** professeur en mathématique à l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen et responsable du master, pour son encouragement durant nos deux ans du master et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.
- Je prie monsieur **Abdennasser CHEKROUN** maitre de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait d'examiner ce travail .
- J'exprime ma profonde reconnaissance à monsieur **Amine Mohammed ME-NOUAR** maitre de conférences à l'Université Abou Bekr Belkaid -Tlemcen, pour la littérature qu'il m'a procuré, son soutien et aussi pour avoir accepté de faire partie du jury.

Table des matières

1	Introduction	9
2	Préliminaires	13
2.1	Espaces de Lebesgue et de Sobolev	13
2.2	Opérateurs bornés et opérateurs compacts	14
2.3	Théorie spectrale	15
2.4	Semi-groupe continu de contraction	16
2.5	Semi-groupe intégré	17
2.6	Théorème de Hille-Yoshida	19
2.7	Théorème du point fixe de Banach-Picard	20
2.8	Bifurcation de Hopf	21
2.8.1	Les types de bifurcation de Hopf	23
2.8.2	Exemple	25
3	Bifurcation de Hopf pour un modèle proie-prédateur structuré en âge	29
3.1	Présentation du modèle	29
3.1.1	Remise en échelle (Normalisation)	30
3.2	Problème de Cauchy associé	34
3.3	Existence, unicité et globalité de la solution positive	35
3.3.1	Existence et unicité de la solution positive	35
3.3.2	La globalité de la solution	38
3.4	Les états stationnaires et la linéarisation	39
3.4.1	Existence des états stationnaires	39
3.4.2	La linéarisation(système linéarisé)	43
3.5	L'équation caractéristique	44
3.6	La formule de l'équation caractéristique $det(\Delta(\lambda)) = 0$ autour de chaque état stationnaire et l'étude qualitative	54
3.6.1	Hypothèse	54
3.6.2	Stabilité de l'état stationnaire \bar{x}_1	55

3.6.3	Stabilité de l'état stationnaire \bar{x}_2	56
3.6.4	Stabilité d'état stationnaire \bar{x}_3	58
3.7	L'analyse de la bifurcation de Hopf autour de l'état stationnaire positive	59
3.7.1	Simulations numériques	65
4	Conclusion	69

Chapitre 1

Introduction

Dans la nature, deux populations peuvent être influencées l'une sur l'autre, ainsi lorsque l'effectif d'une population varie, ceci peut avoir des répercussions sur l'effectif de l'autre. Parmi ces interactions, il y a la prédation qui est comptée positivement pour l'une des deux espèces. La prédation est une relation trophique, une relation biologique dans laquelle un individu (le prédateur) se nourrit d'autre individus les (proies). D'après les statistiques, les poissons se sont les plus pratiquant de la prédation, surtout les poissons brochets qui vivent dans les rivières d'eaux douces. Ils capturent des grandes quantités des petits poissons.

En Mathématique, les premiers modèles de la dynamique de plusieurs espèces en interaction sont de type prédation. Dans ces modèles, l'interaction des individus d'une même espèce n'est pas la seule qui modifie la stratégie de la dynamique des populations des proies et des prédateurs, mais aussi l'interaction entre les individus des espèces différentes. On représente cette interaction par des fonctions appelées fonctions réponses ou réponses fonctionnelles. Parmi ces modèles, le modèle de **Lotka-Volterra** avec réponse fonctionnelle de type **Holling II** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \phi(x)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \alpha\phi(x)y(t) - \mu y(t), \\ x(0) \geq 0, \quad y(0) \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Où x, y désignent respectivement les densités des proies et des prédateurs, r, k sont des constantes positives qui indiquent respectivement le taux moyen de croissance intrinsèque des proies et la capacité de charge des proies de l'environnement qui est souvent déterminée par les ressources de maintien disponible, $\alpha > 0$ sont des coefficients d'interaction entre les deux populations, μ est le taux de mortalités naturelle des prédateurs, les dérivées $\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}$ représentent la variation des populations au cours du temps et $\phi(x)$ est la réponse fonctionnelle de type **Holling II**.

Holling a proposé sa réponse fonctionnelle en 1959 en mettant en évidence la saturation du prédateur car les capacités physiologiques du prédateur sont limitées.

Un prédateur ne peut capturer qu'un nombre fini de proie même si la quantité des proies est très élevée, ce qui exprime la réponse fonctionnelle de **Holling II** (ou **Michaelis-Menten**) :

$$\phi(x) = \frac{ax}{x + h},$$

où h est un constant strictement positive qui désigne le taux de saturation, c'est à dire le taux maximum de consommation de proie. D'un point de vue biologique, le terme $\phi(x)$ qui désigne la réponse fonctionnelle des prédateurs à la modification de la densité des proies démontre généralement un certain effet de saturation de capture, c'est pourquoi, la fonction $\phi(x)$ dépend uniquement de la densité des proies x . Ainsi, cette fonction est souvent appelée fonction de réponse dépendante des proies.

Sur la base de la fonction de **Holling II** (ou de **Michaelis-Menten** de type II),

Arditri et ses collaborateurs proposent la fonction suivante :

$$\phi_1\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\frac{ax}{y}}{h + \frac{x}{y}} = \frac{ax}{hy + x}. \quad (1.2)$$

Une telle réponse fonctionnelle est généralement appelée fonction de réponse dépendante du ratio $(\frac{x}{y})$. Ce type de réponse correspond notamment au partage de la ressource entre les prédateurs .Donc le modèle (1.1) avec la nouvelle fonction réponse (1.2) s'appelle modèle ratio dépendant **d'Arditri Ginzburg** [2].

La variations de population ne dépend pas seulement du temps mais dépend aussi des structures d'individu aux propriétés varie comme l'*âge*,la taille ...etc. L'*âge* est l'un des paramètres les plus importants et les plus significatifs structurant une population. De nombreuses variables internes, au niveau de l'individu isolé dépendent évidemment de l'*âge*, parce que un'*âge* différent implique différentes capacités de reproduction et de survie, et aussi différents comportements.

Pour cela **Lotka-McKendrick** ont proposé un modèle linéaire qui prend en considération la variation d'*âge* pour modéliser les population structuré par l'*âge*.

D'abord, on définit la fonction $u(t, a)$ comme étant la densité de la populations qui ont l'*âge* a à l'instant t . par rapport l' *âge* (on note $a > 0$ l'*âge* de l'individu à l'instant t), on appelle aussi la distribution d' *âge* d'une population. Il est modélisé par l'équation suivante :

$$\frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} = -\mu(a)u(t, a), \quad a \geq 0.$$

avec la condition initial :

$$u(0, a) = u_0(a),$$

et la condition au bord :

$$u(t, 0) = B(t).$$

Dans ce mémoire, nous allons développer les résultats obtenus dans l'article de **Hui Tang, Zhihua Liu** [12], nous étudions un modèle mathématique qui prend en considération la prédation et la structure d'*âge* en même temps, et nous analysons

la bifurcation de Hopf pour le modèle proie- prédateur avec la structure d'*âge* des prédateurs. Combinés à une analyse de stabilité locale et à des simulations, ils ont démontré que ces modèles ont la capacité de produire une dynamique plus complexe et plus raisonnable.

Au cours de ce mémoire, nous allons formuler le modèle en tant que problème de Cauchy abstrait dont sa partie linéaire est un opérateur à domaine non dense, et nous essayons d'étudier le modèle à l'aide de la théorie du semi-groupe intégrée et de la bifurcation de Hopf. En outre, l'existence de la bifurcation de Hopf fait l'objet d'une enquête et les simulations numériques sont également présentées pour appuyer nos conclusions.

A noter que notre paramètre de bifurcation τ représente l'*âge* de maturation de la population des prédateurs.

Les résultats montrent que lorsque le paramètre de bifurcation passe par une valeur critique, des bifurcations de Hopf se produisent.

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notations et résultats (théorie spectrale, semi-groupes, bifurcation de Hopf, ...) qui nous seront utiles dans les chapitres intérieures.

2.1 Espaces de Lebesgue et de Sobolev

Définition 2.1 [11] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue, l'espace de Lebesgue L^1 est l'espace des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} dont la valeur absolue (ou l'espace des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} dont le module) est intégrable au sens de Lebesgue. Sa norme est :

$$\|f\|_{L^1} = \left(\int_{\Omega} |f(x)| dx \right).$$

Définition 2.2 [11] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1\}.$$

On note :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

la norme de l'espace L^p .

Définition 2.3 [11] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace de Sobolev, noté $W^{1,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont chacune de ses dérivées partielles au sens des distributions s'identifie à une fonction de $L^p(\Omega)$. Plus précisément,

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} u\varphi' dx = - \int_{\Omega} g\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1\}.$$

Définition 2.4 (Espace des fonctions continues à support compact)[11]

Une fonction continue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est à support compact s'il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que f vaut zéro sur $\Omega \setminus K$. Nous définissons l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω par :

$$C_0(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ est continue et à support compact}\}.$$

Le support de f dans Ω est

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega.$$

2.2 Opérateurs bornés et opérateurs compacts

Définition 2.5 (Opérateur borné)[11]

Une application linéaire L entre les espaces vectoriels normés X et Y est appelée opérateur borné s'il existe un réel $M > 0$ pour lequel, pour tout $u \in X$, l'inégalité suivante est réalisée :

$$\|Lu\|_Y \leq M\|u\|_X.$$

Le plus petit des majorants M est appelé norme de l'opérateur de L , et noté $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. De plus, on dit que l'opérateur L est borné s'il est continu en 0, ou s'il est continu sur X .

Définition 2.6 (Opérateur compact)[11]

Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire borné A de E dans F est dit compact si $\overline{A(B_E(0,1))}$ est compact dans F .

L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $\mathcal{K}(E; F)$. Si $E = F$ alors, on note $\mathcal{K}(F)$.

2.3 Théorie spectrale

Cette section est consacrée de la théorie spectrale : valeur propre, vecteur propre, ensemble résolvant et spectre.

Définition 2.7 (Valeurs propres et vecteurs propres[20]) on considère un espace vectoriel E sur un corps commutatif \mathbb{K} de dimension finie. Les éléments de E sont les vecteurs et ceux de \mathbb{K} sont les scalaires.

On notera $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

Un scalaire λ est dit valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

Les valeurs propres de u sont donc les scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $(u - \lambda Id)$ n'est pas injectif (autrement dit son noyau n'est pas réduit au vecteur nul).

Le vecteur x est dit vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Définition 2.8 (L'ensemble résolvant et spectre[20])

Soient F un espace de Banach, $A : F \rightarrow F$ une application linéaire continue.

1. On appelle spectre de A , l'ensemble

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{dF} - A) \text{ non inversible}\}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.

Le rayon spectral de A noté $r(A)$ est défini par

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Et on a toujours $r(A) \leq \|A\|_F$.

Si $\sigma(A) = \emptyset$, alors, par convention, on pose $r(A) = 0$.

2. On appelle spectre continu de A , l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{dF} - A) \text{ est injectif,}$$

$$Im(\lambda I_{dF} - A) \text{ est dense mais distinct de } F\}.$$

3. On appelle spectre résiduel de A , l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{dF} - A) \text{ est injectif, } Im(\lambda I_{dF} - A) \text{ est non dense dans } F\}.$$

4. On appelle spectre essentiel d'un opérateur linéaire fermé, l'ensemble

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}; (\lambda I_{dF} - A) \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0\}.$$

l'opérateur de Fredholm est un opérateur borné L entre deux espaces de Banach X et Y ayant un noyau de dimension finie et une image de codimension finie.

On peut alors définir l'indice de l'opérateur comme

$$\text{ind}(L) = \dim(\ker L) - \text{codim}(\text{Im}L).$$

5 On appelle spectre ponctuel de A , l'ensemble

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Une valeur propre de A est une valeur spectrale et on a toujours $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

On appelle espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\lambda I_{dF} - A) \neq \{0\}$.

On appelle multiplicité géométrique d'une valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$ la dimension de $\text{Ker}(\lambda I_{dF} - A)$ et multiplicité algébrique, la limite de $\dim \text{Ker}(\lambda I_{dF} - A)^k$ quand $k \rightarrow +\infty$.

6. On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I_{dF} - A) \text{ est inversible}\}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \rho(A)$ est dit valeur résolvante et l'application :

$$R_\lambda(A) = (\lambda I_{dF} - A)^{-1} \in L(F), \quad \forall \lambda \in \rho(A)$$

est appelée la résolvante de A .

2.4 Semi-groupe continu de contraction

Soit E un espace de Banach.

Définition 2.9 [7] On appelle semi-groupe fortement continue de contraction toute famille d'opérateurs linéaires bornées $\{T(t)\}_{t \geq 0} : E \rightarrow E$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $T(0) = I_E$.
- $T(t_1 + t_2) = T(t_1) \circ T(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$.
- $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.
- $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in E$. Un semi groupe fortement continue est appelle aussi un C_0 semi-groupe.

Définition 2.10 (Générateur infinitésimal[7])

On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, l'opérateur linéaire A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } E \right\},$$

par :

$$(\forall x \in D(A)) \quad Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Exemple : [7]

L'opérateur linéaire $T(t) = e^{-\alpha t}$ est un semi-groupe continu de contraction sur \mathbb{R}_+ .

- ✓ $T(0) = I_E$.
- ✓ $T(t_1 + t_2) = e^{-\alpha(t_1+t_2)} = e^{-\alpha t_1} e^{-\alpha t_2} = T(t_1 + t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$.
- ✓ $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)} \leq 1$.
- ✓ $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\alpha t} x = x, \quad \forall x \in \mathbb{E}$.

Définition 2.11 (Semi-groupe exponentiellement borné[7])

Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe dans E , soit A son générateur infinitésimal.

On dit que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe exponentiellement borné si $\exists w \geq 0$ et $\exists M \geq 1$ tels que :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M \exp(wt), \forall t \geq 0$$

et on note $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{Sg}(\omega, M)$.

2.5 Semi-groupe intégré

Définition 2.12 [18] On appelle semi-groupe intégré toute famille d'opérateurs linéaires continues $\{S(t)\}_{t \geq 0} : E \rightarrow E$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $S(0) = 0$.
- l'application $t \mapsto S(t)u$ est continue sur $[0, +\infty[\quad \forall u \in E$.
- $S(t)$ vérifie :

$$S(s) \circ S(t) = \int_0^s (S(r+t) - S(r))dr = S(t) \circ S(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est non-dégénéré si

$$S(t)x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

A partir de Thieme [21], un opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow E$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si seulement si :

$$\left(\forall x \in D(A) \right) y = Ax \Leftrightarrow S(t)x - tx = \int_0^t S(s)y \, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemple :[18] Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe continu sur un Banach E , alors la famille $S(t) = \int_0^t T(s)ds$ est un semi-groupe intégré sur E .

$$\checkmark S(0) = \int_0^0 T(s)ds = 0.$$

$$\checkmark \lim_{s \rightarrow t} S(s)u = \lim_{s \rightarrow t} \left(\int_0^s T(l)dl \right) u = \left(\int_0^t T(l)dl \right) u = S(t)u, \quad \forall u \in E.$$

$$\checkmark \int_0^s (S(r+t) - S(r))dr = \int_0^s \left(\int_0^{r+t} T(l)dl - \int_0^r T(l)dl \right) dr,$$

On utilise la relation de Chasles, on trouve

$$\int_0^s (S(r+t) - S(r))dr = \int_0^s \left(\int_r^{r+t} T(l)dl \right) dr$$

Lorsque on fait le changement de variable $\varphi = -r + l$, on trouve :

$$\int_0^s (S(r+t) - S(r))dr = \int_0^s \left(\int_0^t T(\varphi + r)d\varphi \right) dr.$$

Puisque $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe continu sur un Banach E , alors :

$$T(\varphi + r) = T(\varphi) \circ T(r),$$

ceci implique que,

$$\int_0^s (S(r+t) - S(r)) dr = \int_0^s \int_0^t T(\varphi) \circ T(r) d\varphi dr = S(t) \circ S(s).$$

Définition 2.13 (Le semi-groupe localement lipschitzien[18])

Un semi-groupe intégré est dit continu localement lipschitzien si : pour tout $t > 0$, il existe une constante positive K telle que :

$$\|S(r) - S(s)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K |r - s|; \quad \forall s, r \in (0, t).$$

2.6 Théorème de Hille-Yoshida

La théorie de Hille-Yoshida est un outil fondamentale reliant les propriétés de dissipation de l'énergie d'un opérateur non borné $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ (E espace de Banach) à l'existence et l'unicité et la régularité des solutions d'une équation différentielle,

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \\ x(x) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce résultat permet notamment de donner l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles d'une manière plus efficace que le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard, plus adapté aux équations différentielles ordinaires.

Définition 2.14 (Les opérateurs dissipatifs, m -dissipatifs[18])

Soit E un espace de Banach. Un opérateur $(A, D(A))$ est **dissipatif** si :

$$\forall x \in D(A), \quad \forall \lambda > 0, \|x - \lambda Ax\|_E \geq \|x\|_E.$$

Si de plus $\forall \lambda > 0, (I_{dE} - \lambda A)$ est surjectif on dit que $(A, D(A))$ est **maximal-dissipatif (ou m -dissipatif)**.

On peut montrer que $\forall \lambda > 0, \text{Id} - \lambda A$ est surjectif si et seulement si $\exists \lambda_0$ tel que $(\text{Id}_E - \lambda_0 A)$ est surjectif.

En pratique pour montrer qu'un opérateur est m -dissipatif, on montre d'abord qu'il est dissipatif et on résout ensuite un problème variationnel pour une valeur λ_0 bien choisie (par exemple avec le théorème de Lax-Milgram).

Définition 2.15 (Opérateur de Hille-Yoshida [18])

Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \text{Sg}(\omega, M)$, A son générateur infinitésimal et il existe $M \geq 1, w \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\lambda \in \rho(A)$ on a :

$$\|R_\lambda(A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall \lambda > w.$$

Théorème 1 (Premier Théorème du Hille-Yoshida[13])

Soit \mathbb{E} un espace de Banach et $A : D(A) \rightarrow E$ un opérateur non borné. On a l'équivalence :

- 1) $(A, D(A))$ est m -dissipatif à domaine dense.
- 2) $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continue de contraction.

Théorème 2 (Deuxième Théorème du Hille-Yoshida[13])

Soit \mathbb{E} un espace de Banach et $A : D(A) \rightarrow E$ un opérateur non borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A satisfait la condition de Hille-Yosida.
2. A est le générateur d'un semi-groupe intégré localement lipschitzien.

2.7 Théorème du point fixe de Banach-Picard

Définition 2.16 (Applications contractantes[8]) Soient E, F deux espaces de Banach, et soit $T : E \rightarrow F$ une application.

On dit que T est une application contractante si $\exists \lambda \in (0, 1)$ tel que :

$$\|Tx - Ty\|_F \leq \lambda \|x - y\|_E; \quad \forall x, y \in E.$$

Théorème 3 (Point fixe du Banach-Picard[8])

Soient X un espace de Banach et F une partie fermée de X ; $T : F \rightarrow F$ une application qui vérifie :

$$\|Tx - Ty\|_F \leq \lambda \|x - y\|_F; \quad \forall x, y \in F, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Alors, il existe un point fixe unique $\bar{u} \in F$ solution de $T(\bar{u}) = \bar{u}$.

Lemme 2.1 (Lemme de Gronwall[5])

Soient f, g et y trois fonctions continues sur un segment $[0, T]$ à valeurs positives, et vérifiant l'inégalité :

$$y(t) \leq f(t) + \int_0^t g(s)y(s)ds$$

Alors, pour tout t dans $[0, T]$

$$y(t) \leq f(t) + \int_0^t f(s)g(s)e^{\left(\int_s^t g(u)du\right)} ds.$$

2.8 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe d'un système dynamique perd sa stabilité tandis qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour du point fixe franchissent l'axe imaginaire du plan complexe. (voir [9])

Définition 2.17 *Un cycle limite est une trajectoire périodique fermée isolée.*

Une trajectoire fermée est une orbite non réduite à un point et qui revient à la condition initiale après un certain temps.

Isolée : signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spiralent autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant. Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle est dit stable ou attractif, sinon, il est dit instable.

Remarque :

Les cycles limites sont des phénomènes non linéaires, ils ne peuvent pas apparaître dans les systèmes linéaires (un système linéaire $\frac{dx}{dt} = Ax$ peut avoir une orbite fermée mais ne sera pas isolée. En effet, si $x(t)$ est une solution périodique non constante,

$\alpha x(t)$ aussi, donc $x(t)$ est entourée d'orbites fermées non réduites à un point).

Pour montrer l'existence d'un cycle limite le théorème le plus utilisé est le théorème suivant :

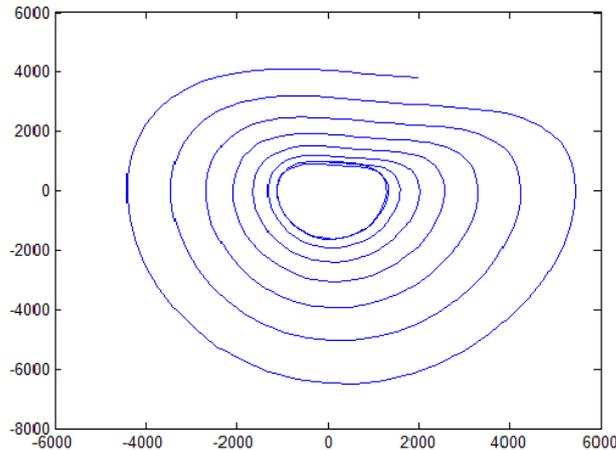


FIGURE 2.1 – Cycle limite

Théorème 4 (Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H)[9])

Soit le champ de vecteurs $:\frac{dx}{dt} = f(x, c)$, avec c est un paramètre de bifurcation ($c \in \mathbb{R}$) et $x \in \mathbb{R}^n$ et soit x_e un point d'équilibre du système.

On considère la linéarisation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = Df(x - e, c)x.$$

Où $Df(x - e, c)$ est la matrice jacobienne du système calculée au point d'équilibre x_e . Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle négative à l'exception d'un pair de valeurs propres complexes conjuguées $\gamma(c) \pm i\omega(c)$ qui vérifient les conditions :

(H1) Si c_0 le point de bifurcation alors ces deux valeurs propres doivent traverser l'axe imaginaire à $c = c_0$: $\gamma(c_0) = 0$, $\omega(c_0) > 0$ et $\gamma'(c_0) \neq 0$ (appelé condition de transversalité) .

(H1) Quand $c = c_0$ il n'y a pas d'autre valeur propre avec une partie réelle nulle.

Alors sous ces conditions, il y a une naissance en $c = c_0$ d'un cycle limite de période $T = \frac{2\pi}{\omega(c_0)}$.

Comment trouver la valeur de bifurcation et conclure l'existence d'une bifurcation de Hopf

Considérons le système différentielle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x, y, c), \\ \frac{dy(t)}{dt} = g(x, y, c). \end{cases} \quad (2.2)$$

Il admet deux valeurs propres conjugués $\lambda(c) = \text{Re}(c) \pm i\text{Im}(c)$.

Valeur de bifurcation

La valeur de bifurcation c_0 est la valeur qui annule la partie réelle de ces valeurs propres, c'est à dire, $\text{Re}(c_0) = 0$.

Condition de transversalité

Si $\frac{d\text{Re}(c)}{dc}|_{c=c_0} \neq 0$ alors on a l'existence d'une bifurcation de Hopf.

2.8.1 Les types de bifurcation de Hopf

Il existe trois cas de bifurcations de Hopf possibles[9] :

Si $\gamma'(c_0) > 0$:

— **Bifurcation de Hopf dégénérée** : lorsque $c = c_0$, il existe des trajectoires concentriques autour du point d'équilibre.

Le point d'équilibre correspond alors à un centre.

— **Bifurcation de Hopf super-critique** : lorsque $c = c_0$ le point d'équilibre est asymptotiquement stable, et il existe $c^* > c_0$, tel que $\forall c$ vérifiant $c_0 < c < c^*$ le point d'équilibre devient instable est entourée par un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{c - c_0}$.

- **Bifurcation de Hopf sous-critique** : lorsque $c = c_0$, le point d'équilibre est instable et il existe $c^* < c_0$, tel que $\forall c$ vérifiant $c^* < c < c_0$ le point d'équilibre devient asymptotiquement stable est entourée par un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{|c - c_0|}$.

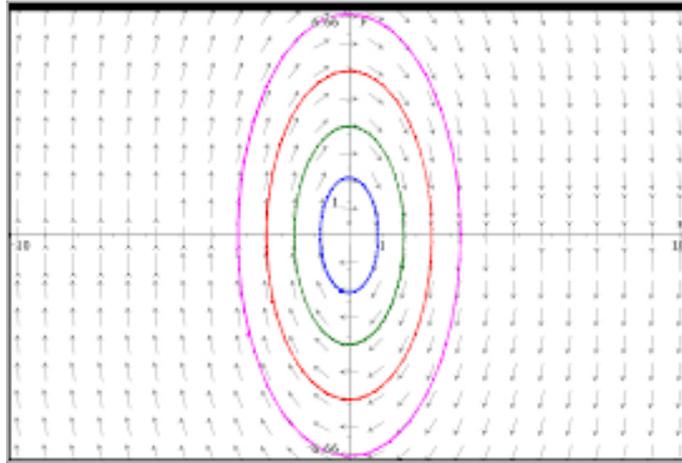


FIGURE 2.2 – Bifurcation de Hopf dégénérée

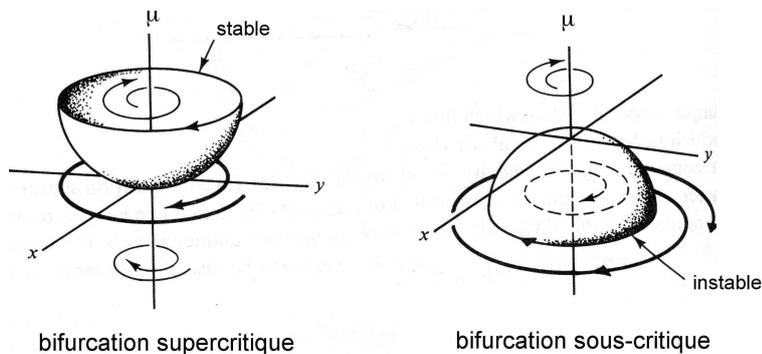


FIGURE 2.3 – Bifurcation de Hopf super-critique et sous-critique

Si $\gamma'(c_0) < 0$: il suffit d'inverser les conclusions c-à-d que le cycle limite asymptotiquement stable (resp. instable) apparaît pour des valeurs du paramètre inférieures (resp. supérieures) à c_0 .

2.8.2 Exemple

Un exemple du dernier type de bifurcation de Hopf.

*Bifurcation de Hopf sous-critique

La bifurcation de Hopf sous-critique est la stabilisation de la partie foyer instable quand les valeurs propres complexes conjuguées associées à cette partie traversent l'axe imaginaire pur pour la transformer en une partie foyer stable.

Cette stabilisation donne de la naissance d'un cycle limite instable.

Soit le système différentielle suivant :

$$\begin{cases} x' = \mu x - y + xy^2, \\ y' = x + \mu y + y^3. \end{cases} \quad (2.3)$$

$(0, 0)$ est un point d'équilibre.

La linéarisation :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \mu + y^2 & -1 + 2xy \\ 1 & \mu + 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Calculons les valeurs propres :

$$|J - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} \mu - \lambda & -1 \\ 1 & \mu - \lambda \end{pmatrix} = (\mu - \lambda)^2 + 1 = 0.$$

$$\Rightarrow \mu - \lambda = \pm i.$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu \pm i.$$

Trouvons la valeur de bifurcation

$Re(\lambda) = \mu = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0$ la valeur de bifurcation .

Condition de transversalité

$$\frac{dRe(\lambda)}{d\mu} = 1|_{\mu_0} = 1 \neq 0.$$

D'ou l'existence d'une bifurcation de Hopf.

Quel est le type de bifurcation de Hopf?

On va voir la naissance de cycle limite et sa nature.

On fait les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases} \quad \text{avec} \quad x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.4)$$

Ceci implique que :

$$2rr' = 2xx' + 2yy',$$

$$rr' = r \cos(\theta)(r\mu \cos(\theta) - r \sin(\theta) + r^3 \cos(\theta) \sin(\theta)),$$

$$+ r \sin(\theta)(r \cos(\theta) + \mu r \sin(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)),$$

$$= r\mu \cos^2(\theta) - r \cos(\theta) \sin(\theta) + r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta),$$

$$- r \cos(\theta) - \theta + \mu r \sin^2(\theta) + r^3 \sin^4(\theta),$$

$$\Rightarrow r' = \mu r + r^3 \sin^2(\theta),$$

$$r' = \mu r + ry^2.$$

Si $\mu = 0$, on trouve

$$r' = ry^2 > 0 \quad \text{ce qui donne } r \nearrow.$$

D'où la naissance d'un cycle limite instable.

Donc il existe une bifurcation de Hopf sous-critique.

Chapitre 3

Bifurcation de Hopf pour un modèle proie-prédateur structuré en âge

3.1 Présentation du modèle

Le modèle que nous allons étudier dans ce chapitre prend en compte la structure d'âge et la compétition entre les prédateurs.

Sa forme mathématique est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = r v(t) \left(1 - \frac{v(t)}{k}\right) - \frac{v(t) \int_0^\infty u(t, a) da}{h + v(t)}, \\ \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} = -\mu u(t, a), \quad a \geq 0 \\ u(t, 0) = \frac{\eta v(t) \int_0^\infty \beta(a) u(t, a) da}{h + v(t)}, \\ u(0, \cdot) = u_0 \in L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}) \\ v(0) = v_0 \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Interprétation :

- ★ $v(t)$ représente la densité des proies à l'instant t . On voit qu'ils croissent de manière logistique avec un taux moyen de croissance " $r = b - d$ " (ou b est le taux de natalité, d est celui de mortalité) et une capacité limite du milieu " k ".
- ★ $u(t, a)$ représente densité des prédateurs à l'instant t qui ont l'âge a . La densité totale des prédateurs est donnée par $\int_0^\infty u(t, a) da$.

$\mu(a)$ est le coefficient ou le taux de mortalité à l'âge a c'est à dire le nombre moyen de décès à l'âge a par unité de population de même âge. Il est supposé indépendant de l'âge a dans ce modèle.

$B(t) = \frac{\eta v(t) \int_0^\infty \beta(a) u(t, a) da}{h + v(t)}$: est le taux de natalité des prédateurs, la quantité $\phi(v) = \frac{v}{h + v}$ est la réponse fonctionnelle de Holling II (ou Michaelis-Menten) voir 3.2, η est le taux de naissance du prédateur.

La fonction $\beta(a)$ est le coefficient ou le taux de fertilité d'âge qui représente le nombre moyen de naissances provenant d'un individu d'âge a .

Hypothèse 1 *Supposons que la fonction $\beta(a)$ est définie par :*

$$\beta(a) := \begin{cases} \beta^* & \text{si } a \geq \tau, \\ 0 & \text{si } a \in (0, \tau). \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $\tau > 0$ et $\beta^* > 0$.

Avec

$$\int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} da = M < \infty. \quad (3.3)$$

Dans ce modèle tous les paramètres sont supposés strictement positifs.

3.1.1 Remise en échelle (Normalisation)

L'objectif de cette sous-section est d'introduire un paramètre de bifurcation τ qui peut être considéré comme une mesure d'une période de maturation biologique.

D'abord, on va normaliser le système (3.1) par la mise à l'échelle temporelle et l'échelle d'âge : $a^* = \frac{a}{\tau}$, $t^* = \frac{t}{\tau}$.

On considère les changements suivantes :

$$1) v^*(t^*) = v(\tau t^*),$$

donc,

$$\frac{dv^*}{dt^*} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \tau \frac{dv}{dt}.$$

$$2) u^*(t^*, a^*) = \tau u(\tau t^*, \tau a^*),$$

ce qui donne,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial u^*}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} + \frac{\partial u^*}{\partial a^*} \frac{\partial a^*}{\partial t} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial u^*}{\partial t^*}.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial u^*}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial a} + \frac{\partial u^*}{\partial a^*} \frac{\partial a^*}{\partial a} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial u^*}{\partial a^*}.$$

Donc,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu u(t, a) = \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*}{\partial a^*} \right].$$

Puisque $u(t, a) = \frac{1}{\tau} u^*(t^*, a^*)$, alors on trouve :

$$-\frac{1}{\tau} \mu u^*(t^*, a^*) = \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*}{\partial a^*} \right].$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*}{\partial a^*} = \tau \mu u^*(t^*, a^*).$$

On note simplement v^*, u^* par v, u et le nouveau système obtenu est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \tau \left(rv(t) \left(1 - \frac{v(t)}{k} \right) - \frac{v(t) \int_0^\infty u(t, a) da}{h + v(t)} \right), \\ \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} = -\tau \mu u(t, a), \\ u(t, 0) = \frac{\tau \eta v(t) \int_0^\infty \beta(a) u(t, a) da}{h + v(t)}, \\ u(0, \cdot) = u_0 \in L_+^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \\ v(0) = v_0 \geq 0. \end{array} \right. \quad a \geq 0 \quad (3.4)$$

Avec la nouvelle fonction de fécondité :

$$\beta(a) = \beta^* |_{[1, +\infty[}(a) = \begin{cases} \beta^* & \text{si } a \geq 1 \\ 0 & \text{si } a \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.5)$$

De plus,

$$\int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} da = M \Leftrightarrow \int_\tau^\infty \beta^* e^{-\mu a} da = M \Leftrightarrow \beta^* \frac{e^{-\mu \tau}}{\mu} = M.$$

Donc,

$$\beta^* = M \mu e^{\mu \tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Ensuite, considérons la structure d'âge des proies, l'équation d'évolution de la densité des proies est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} = -\tau d \rho(t, a). \quad (3.6)$$

La population totale des proies à l'instant t est donnée par

$$v(t) := \int_0^\infty \rho(t, a) da.$$

Ainsi, en intégrant de 0 à $+\infty$ l'équation (3.6) on obtient :

$$v'(t) = \rho(t, 0) - \tau d v(t).$$

En identifiant l'équation précédente avec l'équation de v dans le système (3.4), on remarque qu'on doit prendre $\rho(t, 0)$ de telle sorte qu'il vérifie

$$\rho(t, 0) = G(u(t, \cdot), \rho(t, \cdot)),$$

où

$$G(u(t, \cdot), \rho(t, \cdot)) := \tau \left(\begin{array}{c} b \int_0^\infty \rho(t, a) da \left(1 - \frac{\int_0^\infty \rho(t, a) da}{k}\right) \\ + d \frac{(\int_0^\infty \rho(t, a) da)^2}{k} - \frac{\int_0^\infty \rho(t, a) da \int_0^\infty u(t, a) da}{h + \int_0^\infty \rho(t, a) da} \end{array} \right).$$

Ainsi, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} = -\tau d \rho(t, a), \\ \rho(t, 0) = G(u(t, \cdot), \rho(t, \cdot)), \\ \rho(0, a) = \rho_0 \in L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Enfin, on pose

$$w(t, a) = \begin{pmatrix} u(t, a) \\ \rho(t, a) \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial a} = - \begin{pmatrix} \tau \mu & 0 \\ 0 & \tau d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t, a) \\ \rho(t, a) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tau \mu & 0 \\ 0 & \tau d \end{pmatrix} w(t, a)$$

et,

$$w(t, 0) = \begin{pmatrix} u(t, 0) \\ \rho(t, 0) \end{pmatrix} = B(w(t, \cdot)).$$

Donc on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial a} = -Dw(a, t). \\ w(t, 0) = B(w(t, \cdot)). \\ w(0, \cdot) = w_0 \in L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}^2), \end{array} \right. \quad (3.8)$$

avec

$$D(a) = \begin{pmatrix} \tau\mu & 0 \\ 0 & \tau d \end{pmatrix}, \quad B(w(\cdot, t)) = \begin{pmatrix} \frac{\tau\eta \int_0^\infty \rho(t, a) da \int_0^\infty \beta(a) u(t, a) da}{h + \int_0^\infty \rho(t, a) da} \\ G(u(t, \cdot), \rho(t, \cdot)) \end{pmatrix}.$$

3.2 Problème de Cauchy associé

On note par X , l'espace de Banach,

$$X = \mathbb{R}^2 \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}^2),$$

muni de la norme,

$$\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \right\| = \|\alpha\|_{\mathbb{R}^2} + \|\varphi\|_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R}^2)}.$$

Notons par

$$D(A) = \{(0, 0)\} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}^2).$$

On définit l'opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow X$ par,

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ -\varphi' - D\varphi \end{pmatrix}$$

et l'opérateur non linéaire $F := \overline{D(A)} \rightarrow X$ est défini par :

$$F \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} B(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix};$$

avec

$$X_0 := \overline{D(A)} = \{(0, 0)\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}^2).$$

L'opérateur linéaire A est défini de manière non dense car :

$$X_0 := \overline{D(A)} = \{(0, 0)\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}^2) \neq X.$$

Posons $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ w(t, \cdot) \end{pmatrix}$,

le système (3.8) peut être réécrit sous la forme d'un problème linéaire de Cauchy dont la partie linéaire de ce problème est un opérateur A à domaine non dense,

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) + F(x(t)) & t \geq 0 \\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} = x_0 \in \overline{D(A)}. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.3 Existence, unicité et globalité de la solution positive

3.3.1 Existence et unicité de la solution positive

Pour étudier l'existence et l'unicité de solution des problèmes de type(3.9), supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1) A satisfait la condition de Hille-Yosida.

(H2) La fonction $F : X_0 \rightarrow X$ est localement lipschitzienne i.e : pour chaque compact C de X_0 il existe $K(C) > 0$, telle que :

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq K(C)\|x - y\|_{X_0}, \forall x, y \in X_0.$$

(H3) Le semi-groupe continue $T(t) = \frac{d}{dt}S(t)$ est exponentiellement bornée i.e $\exists w \geq 0$ et $\exists M \geq 1$ deux constante telle que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0.$$

L'existence globale et l'unicité de la solution de problème de Cauchy (3.9) découlent des résultats de **Magal**[17], de **Magal et Ruan**[19] et de **Hille-Yoshida 2** (voir chapitre 1).

Pour prendre en compte la solution positive, revenons au système (3.1), qui est un cas particulier du système (3.9), sous ces valeurs initiales non négatives $v(0) = v_0 \geq$

0, $u(0, a) = u_0 \in L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R})$, la solution du système (3.9) est positive ce qui énonce le théorème suivant :

Théorème 5 : *Le problème de Cauchy (3.9) admet au moins une solution intégrale positive dans*

$$X_{0+} := \{(0, 0)\} \times L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}^2).$$

En plus, elle est donnée par :

$$x(t) = S'(t)x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)F(x(s))ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.10)$$

ou $S(t)$ le semi-groupe intégré engendré par l'opérateur A .

Preuve de Théorème 5 :

Tout d'abord, transformons le problème en un problème de point fixe considérons l'opérateur suivant :

$$\phi : C([0, T], X_{0+}) \longrightarrow C([0, T], X_{0+}),$$

tel que $\forall x \in C([0, T], X_{0+})$,

$$\phi(x)(t) = S'(t)x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)F(x(s))ds; \quad \forall t \geq 0.$$

Le problème de trouver une solution du système (3.9) revient à montrer que ϕ admet un point fixe unique dans l'espace

$$E = \{x \in C([0, T], X_{0+}) : \sup_t \|x(t)\| = L_T < \infty, \forall t \in [0, T]\}$$

telle que

$$\phi(x)(t) = x(t).$$

Premièrement, on doit montrer que ϕ satisfait les conditions du théorème de Banach La preuve sera donnée en deux étapes :

Etape 1 : Montrons que $\phi(x)(t) \in E$, i.e il faut montrer que :

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\phi(x)(t)\| < \infty.$$

Nos avons

$$\|\phi(x)(t)\| = \|S'(t)x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)F(x(s))ds\|,$$

d'après de (H3) on trouve.

$$\|\phi(x)(t)\| \leq Me^{wt}\|x_0\| + Me^{wt} \int_0^t e^{-ws} \|F(x(s)) - F(0)\| ds + \|F(0)\|,$$

ainsi

$$\|\phi(x)(t)\| \leq Me^{wt}\|x_0\| + Me^{wt} \int_0^t e^{-ws} K(C) \|x(s) - 0\| ds + \|F(0)\|,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, T)} \|\phi(x)(t)\| &\leq Me^{wT}\|x_0\| + Me^{wT} K(C) \int_0^T e^{-ws} \|x(s)\| ds + \|F(0)\| \\ &= L_T < +\infty, \quad (\forall T < \infty). \end{aligned}$$

Donc

$$\phi(x)(t) \in E.$$

Etape 2 : Montrons que ϕ est une application contractante, i.e il faut montrer que

$$\exists \lambda \in (0, 1) \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad \sup_{t \in (0, T)} \|\phi(x)(t) - \phi(y)(t)\|_E \leq \lambda \|x - y\|_E; \quad \forall x, y \in E.$$

En effet supposons que $x, y \in E$ deux solutions du problème (3.9), alors :

$$\phi(x)(t) = S'(t)x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)F(x(s))ds.$$

et

$$\phi(y)(t) = S'(t)x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)F(y(s))ds.$$

On désigne par $\|\cdot\|$ le module. Calculons $\|\phi(x)(t) - \phi(y)(t)\|_E$.

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \left| \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)[F(x(s)) - F(y(s))]ds \right|.$$

A partir d'hypothèse (H2) et (H3) on trouve que :

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq M e^{wt} \int_0^t e^{-ws} K(C) |x(s) - y(s)| ds.$$

d'où :

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_\infty \leq M e^{wT} T K(C) \|x(s) - y(s)\|_\infty$$

(car $e^{-ws} \leq 1$ et $|x - y| \leq \|x(s) - y(s)\|_\infty$).

Ainsi

ϕ est contractante si $M e^{wT} T K(C) \leq 1$, i.e si $T \leq \frac{e^{-wT}}{k(C)M}$.

Donc l'existence et l'unicité d'une solution positive de la forme (3.10) pour problème (3.9) .

□

3.3.2 La globalité de la solution

On suppose aussi que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement borné, et que la fonction F est lipschitzienne.

Montrons la globalité de solution par l'absurde

Supposons que $\exists T < \infty$ tel que $\lim_{t \rightarrow T} |x(t)| = +\infty$.

on a :

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |S'(t)x_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)(F(x(s)) - F(0))ds + F(0)| \\ &\leq M e^{wt} |x_0| + M e^{wt} K(C) \int_0^t e^{-ws} |x(s) - 0| ds + |F(0)| \\ &\leq (M e^{wt} |x_0| + |F(0)|) + M e^{wt} K(C) \int_0^t e^{-ws} |x(s)| ds. \end{aligned}$$

Appliquons le lemme de Gronwall :

$$|x(t)| \leq (M e^{wt} |x_0| + |F(0)|) + \int_0^t (M e^{ws} |x_0| + |F(0)|) (M K(C) e^{w(t-s)}) e^{M K(C) \int_s^t e^{w(t-l)} dl} ds.$$

On fait t tendre vers T :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} |x(t)| &\leq \lim_{t \rightarrow T} ((Me^{wt}|x_0| + |F(0)|) \\ &\quad + \int_0^t (Me^{ws}|x_0| + |F(0)|)(MK(C)e^{w(t-s)})e^{MK(C) \int_s^t e^{w(t-l)} dl} ds). \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} +\infty &\leq (Me^{wT}|x_0| + |F(0)|) + \int_0^T (Me^{ws}|x_0| + |F(0)|)(MK(C)e^{w(T-s)})e^{MK(C) \int_s^T e^{w(T-l)} dl} ds \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui est absurde.

D'où la globalité de la solution.

□

3.4 Les états stationnaires et la linéarisation

3.4.1 Existence des états stationnaires

Soit $\bar{x}(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{w}(a) \end{pmatrix}$ un état stationnaire du problème (3.9) donc :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{w}(a) \end{pmatrix} + F \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{w}(a) \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Puisqu'on a :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial a} = -\tau \mu \bar{u}(a).$$

$$\bar{u}(a) = \bar{u}(0) e^{-\tau \mu a},$$

$$\bar{u}(a) = \frac{\tau \eta \bar{v} \int_0^\infty \beta(a) \bar{u}(a) da}{h + \bar{v}} e^{-\tau \mu a}.$$

Et,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial a} = -\tau d \bar{\rho}(a).$$

$$\bar{\rho}(a) = \bar{\rho}(0) e^{-\tau da}.$$

$$\bar{\rho}(a) = G(\bar{u}(a), \bar{\rho}(a)) e^{-\tau da}.$$

Avec : $\bar{v} = \int_0^\infty \bar{\rho}(a) da.$

Alors

$$\bar{w}(a) = \begin{pmatrix} \bar{u}(a) \\ \bar{\rho}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tau \eta \bar{v} \int_0^\infty \beta(a) \bar{u}(a) da}{h + \bar{v}} e^{-\tau \mu a} \\ \tau (b\bar{v}(1 - \frac{\bar{v}}{k}) + d \frac{\bar{v}^2}{k} - \frac{\bar{v} \int_0^\infty \bar{u}(a) da}{h + \bar{v}}) e^{-\tau da} \end{pmatrix}.$$

Simplification des calculs

D'une part, on a :

$$\bar{u}(a) = \frac{\tau \eta \bar{v}}{h + \bar{v}} \int_0^\infty \beta(a) \bar{u}(a) da e^{-\tau \mu a}.$$

Multiplions avec $\beta(a)$ et intégrons entre $(0, \infty)$:

$$\int_0^\infty \beta(a) \bar{u}(a) da = \frac{\tau \eta \bar{v}}{h + \bar{v}} \int_0^\infty \beta(a) \bar{u}(a) da \int_0^\infty \beta(a) e^{-\tau \mu a} da,$$

ce qui donne :

$$1 = \frac{\tau \eta \bar{v}}{h + \bar{v}} \int_0^\infty \beta(a) e^{-\tau \mu a} da. \quad (3.11)$$

D'autre part, on a :

$$\bar{v} = \int_0^\infty \bar{\rho}(0) e^{-\tau da} da = \tau (b\bar{v}(1 - \frac{\bar{v}}{k}) + d \frac{\bar{v}^2}{k} - \frac{\bar{v} \int_0^\infty \bar{u}(a) da}{h + \bar{v}}) \int_0^\infty e^{-\tau da} da,$$

ce qui donne,

$$\bar{v} = \tau (b\bar{v}(1 - \frac{\bar{v}}{k}) + d \frac{\bar{v}^2}{k} - \frac{\bar{v} \int_0^\infty \bar{u}(a) da}{h + \bar{v}}) \frac{1}{\tau d},$$

ensuite,

$$\bar{v} = \frac{1}{d} \left(b\bar{v} \left(1 - \frac{\bar{v}}{k} \right) + d \frac{\bar{v}^2}{k} - d\bar{v} + d\bar{v} - \frac{\bar{v} \int_0^\infty \bar{u}(a) da}{h + \bar{v}} \right),$$

ainsi,

$$0 = \frac{1}{d} \left((b - d)\bar{v} \left(1 - \frac{\bar{v}}{k} \right) - \frac{\bar{v} \int_0^\infty \bar{u}(a) da}{h + \bar{v}} \right),$$

de même,

$$(b - d)\bar{v} \left(1 - \frac{\bar{v}}{k} \right) \frac{h + \bar{v}}{\bar{v}} = \int_0^\infty \bar{u}(a) da,$$

et,

$$(b - d)\bar{v} \left(1 - \frac{\bar{v}}{k} \right) \frac{h + \bar{v}}{\bar{v}} = \frac{\tau\eta\bar{v}}{h + \bar{v}} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a) da \int_0^\infty e^{-\tau\mu a} da.$$

Donc,

$$\int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a) da = \frac{\tau\mu(h + \bar{v})^2}{\tau\eta\bar{v}^2} \bar{v}(b - d) \left(1 - \frac{\bar{v}}{k} \right),$$

après simplification on obtient :

$$\int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a) da = \frac{r(h + \bar{v})^2 \mu \left(1 - \frac{\bar{v}}{k} \right)}{\bar{v}\eta}. \quad (3.12)$$

Trouvons \bar{v} , \bar{u} et $\bar{\rho}$.

A partir de (3.11) on trouve :

$$\int_0^\infty \beta(a)e^{-\tau\mu a} da \quad \tau\eta\bar{v} - \bar{v} = h.$$

$$\bar{v}(\tau\eta \int_0^\infty \beta(a)e^{-\tau\mu a} da - 1) = h.$$

Donc,

$$\bar{v} = \frac{h}{\tau\eta \int_0^\infty \beta(a)e^{-\tau\mu a} da - 1}.$$

On a :

$$\bar{u}(a) = \frac{\tau\eta\bar{v}}{h + \bar{v}} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a) da e^{-\tau\mu a}.$$

Lorsqu' on remplace \bar{v} par son expression, on trouve :

$$\bar{u}(a) = \frac{\tau\eta\bar{v}}{h + \bar{v}} \frac{r\mu}{\bar{v}\eta} \left(1 - \frac{\bar{v}}{k}\right) (h + \bar{v})^2 e^{-\tau\mu a}.$$

Donc,

$$\bar{u}(a) = \tau r \mu \left(1 - \frac{\bar{v}}{k}\right) (h + \bar{v}) e^{-\tau\mu a},$$

et,

$$\bar{\rho}(a) = \tau d \bar{v} e^{-\tau d a},$$

avec,

$$\int_0^\infty \bar{\rho}(a) da = \tau d \bar{v} \frac{1}{\tau d} = \bar{v} \quad \text{ceci vrai.}$$

D'après l'équation (3.12) on voit que si $\int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a) da = 0$ alors,

$$\bar{u}(a) = 0,$$

Et

1) $\bar{v} = 0$, ce qui donne $\bar{\rho} = 0$.

Ou

2) $\bar{v} = -h$ exclut car \bar{v} est positive.

Ou

3) $\bar{v} = k$. ce qui donne $\bar{\rho} = \tau d k e^{-\tau d a}$.

Lemme 3.1 *Le système (3.9) admet toujours deux états stationnaires :*

$$\bar{x}_1(a) = \begin{pmatrix} 0_{R^2} \\ 0_{L^1} \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{x}_2(a) = \begin{pmatrix} 0_{R^2} \\ 0_{L^1} \\ \tau d k e^{-\tau d a} \end{pmatrix}.$$

En outre, il existe un unique état stationnaire positif du système pour

$$\bar{v}(a) = \frac{h}{\eta M - 1} :$$

$$\bar{x}_3(a) = \begin{pmatrix} 0_{R^2} \\ \tau r \mu \left(1 - \frac{\bar{v}}{k}\right) (h + \bar{v}) e^{-\tau \mu a} \\ \tau d \bar{v} e^{-\tau d a} \end{pmatrix}$$

si et seulement si :

$$\eta > \frac{h + k}{kM}.$$

Où M est défini dans (3.3).

3.4.2 La linéarisation (système linéarisé)

Maintenant on va linéariser le système (3.9) autour des états stationnaires pour étudier la stabilité locale. Tout d'abord on commence par appliquer le changement de variable suivant :

$$y(t) := x(t) - \bar{x}(a).$$

Ce qui donne :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = A(y(t) + \bar{x}(a)) + F(y(t) + \bar{x}(a)),$$

puisque A est un opérateur linéaire, on trouve :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = A(y(t)) + A(\bar{x}(a)) + F(y(t) + \bar{x}(a)) = Ay(t) + F(y(t) + \bar{x}(a)) - F(\bar{x}(a)).$$

Donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay(t) + F(y(t) + \bar{x}(a)) - F(\bar{x}(a)), & t \geq 0, \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 - \bar{w}(a) \end{pmatrix} = y_0 \in \overline{D(A)}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ce système peut être réécrit comme :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ly(t) + H(y(t)), & t \geq 0, \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 - \bar{w}(a) \end{pmatrix} = y_0 \in \overline{D(A)}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Avec :

$$L := A + DF(\bar{x})$$

est un opérateur linéaire,

et

$$H(y(t)) = F(y(t) + \bar{x}) - F(\bar{x}) - DF(\bar{x})(y(t))$$

avec :

$$H(0) = 0 \quad \text{et} \quad DH(0) = 0.$$

3.5 L'équation caractéristique

Avant de faire l'étude qualitative, nous allons chercher l'équation caractéristique autour des états stationnaires.

Notons par :

$$\nu := \min\{\tau d, \tau \mu\} > 0, \quad \Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > -\nu\}.$$

On obtient les résultats suivants par **P.Magal**[17].

Lemme 3.2 *L'opérateur A est un opérateur de Hille-Yoshida tel que $\forall \lambda \in \Omega$, $\lambda \in \rho(A)$, on a :*

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}(\lambda) + \nu)^n}, \quad \forall \operatorname{Re}(\lambda) > -\nu, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus pour tout $\begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} \in X$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(A)$,

$$(\lambda I - A)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \varphi(a) = e^{-(\lambda I + D)a} \alpha + \int_0^a e^{(\lambda I + D)(s-a)} \psi(s) ds.$$

Preuve du lemme 3.2

Trouvons l'expression de $\varphi(a)$:

On a

$$(\lambda I - A)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi' + D\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} \varphi' + (D + \lambda I)\varphi = \psi, \\ \varphi(0) = \alpha. \end{cases} \quad (3.15)$$

Calculons le facteur intégrant θ .

$$\theta(a) = e^{\int (\lambda I + D) da} = e^{(D + \lambda I)a}.$$

Ainsi,

$$\int_0^a (\theta(s)\varphi(s))' ds = \int_0^a e^{(\lambda I + D)s} \psi(s) ds,$$

$$\theta(a)\varphi(a) = \varphi(0) + \int_0^a e^{(\lambda I + D)s} \psi(s) ds.$$

Donc,

$$\varphi(a) = \alpha e^{-(D + \lambda I)a} + \int_0^a e^{(\lambda I + D)(s-a)} \psi(s) ds.$$

□

Soit A_0 la partie de A dans $\overline{D(A)}$, telle que :

$$A_0 : D(A_0) \rightarrow X.$$

Définie par

$$A_0 x = Ax, \forall x \in D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)}\}.$$

Et pour tout $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(A_0)$, $(\varphi \in W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}^2))$.

On a :

$$A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{A}_0 \varphi \end{pmatrix}.$$

Avec : $\hat{A}_0 \varphi = -\varphi' - D\varphi$,

et

$$D(\hat{A}_0) = \{\varphi \in W^{1,1}((0, \infty), \mathbb{R}^2) : \varphi(0) = 0\}.$$

L'opérateur linéaire A_0 est un générateur infinitésimale du semi-groupe continue $\{T_{A_0}(t)\}_{t \geq 0}$ sur $D(A_0)$,

tel que pour chaque $t \geq 0$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(A_0)$, ($\varphi \in W^{1,1}((0, \infty), \mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2$).

Lemme 3.3 *L'opérateur $\{T_{A_0}(t)\}_{t \geq 0}$ est défini par :*

$$T_{A_0}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{T}_{A_0}(t)\varphi \end{pmatrix}.$$

avec :

$$\hat{T}_{A_0}(t)\varphi(a) = \begin{cases} e^{-\int_{a-t}^a D(l)dl} \varphi(a-t) & \text{si } a \geq t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Et :

$$\|T_{A_0}(t)\| \leq e^{-\nu t}, t \geq 0.$$

Maintenant, nous estimons la limite de croissance essentielle du semi-groupe fortement continu généré par A_0 qui est la partie de A dans $\overline{D(A)}$.

Tout d'abord, on introduit les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2 *Supposons que l'ensemble résolvant de A est non vide et que la partie A_0 de A dans X_0 est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{T_{A_0}(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X_0 .*

D'après l'hypothèse (2), il s'en suit que $\rho(A) = \rho(A_0)$, car l'ensemble résolvant de A et l'ensemble résolvant de A_0 ne sont pas vides et il s'en suit également que A génère un semi-groupe intégré $\{S_A(t)\}_{t \geq 0}$ sur X .

L'opérateur $DF(\bar{x}) : D(A) \in X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire borné compact, tel que pour tout : $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(A)$, ($\varphi \in W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}^2)$).

$$DF(\bar{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DB(\bar{w})(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$DB(\bar{w})(\varphi) = DB(\bar{w})(\varphi) = \begin{pmatrix} DJ(\bar{u}(a), \bar{v}) \\ DG(\bar{u}(a), \bar{v}) \end{pmatrix} (\varphi)$$

avec

$$J(\bar{u}(a), \bar{v}) = \frac{\tau\eta\bar{v}(a) \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da}{h + \bar{v}}, \quad \text{et} \quad G(\bar{u}(a), \bar{v}) = \tau \left(b\bar{v}\left(1 - \frac{\bar{v}}{k}\right) + d\frac{(\bar{v})^2}{k} - \frac{\bar{v} \int_0^\infty \bar{u}(a)da}{h + \bar{v}} \right).$$

Calculons la différentielle de $DJ(\bar{u}(a), \bar{v})$ et $DG(\bar{u}(a), \bar{v})$.

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{v}} = \frac{\tau\eta \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da(h + \bar{v}) - \tau\eta\bar{v} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da}{(h + \bar{v})^2},$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{v}} = \frac{\tau\eta \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da}{(h + \bar{v})} - \frac{\tau\eta\bar{v} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da}{(h + \bar{v})^2}.$$

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{u}} = \frac{\tau\eta\bar{v}}{h\bar{v}} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da.$$

Et,

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{v}} = \tau \left(b\left(1 - \frac{\bar{v}}{k}\right) - \frac{b\bar{v}}{k} + \frac{2\bar{v}}{k} - \frac{\int_0^\infty \bar{u}(a)da(h + \bar{v}) - \bar{v} \int_0^\infty \bar{u}(a)da}{(h + \bar{v})^2} \right).$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{u}} = \frac{\tau\bar{v}}{h + \bar{v}} \int_0^\infty \bar{u}(a)da.$$

Donc pour tout $\varphi \in W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}^2)$ la valeur de $DB(\bar{w})(\varphi)$ vaut :

$$\begin{aligned}
DB(\bar{w})(\varphi) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau\eta h}{(h+\bar{v})^2} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da \\ -\frac{\tau\bar{v}}{h+\bar{v}} & \tau\left(\frac{2\bar{v}(d-b)}{k} + b - \frac{h \int_0^\infty \bar{u}(a)da}{(h+\bar{v})^2}\right) \end{pmatrix} \int_0^\infty \varphi(a)da \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{\tau\eta\bar{v}}{h+\bar{v}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty \beta(a)\varphi(a)da.
\end{aligned}$$

Puisque l'opérateur $DF(w)$ est compact, et d'après **Ducrot**[6] nous obtenons :

$$\omega_{0,ess}(A_0) \leq \omega_0(A_0) \leq -\nu < 0$$

et nous pouvons appliquer les résultats de perturbation de **Thieme**[21], **Liu**[15] et **Magal**[17] pour déduire que :

$$\omega_{0,ess}((A + DF(\bar{x}))_0) \leq -\nu < 0.$$

Considérons la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Le taux de croissance essentiel du semi-groupe fortement continu généré par A_0 est strictement négatif, $\omega_{0,ess}(A_0) < 0$.*

l'équation caractéristique

Tout d'abord, nous définissons $C := DF(\bar{x})$. Soit $\lambda \in \Omega$. Puisque $(\lambda I - A)$ est inversible, il s'en suit que $\lambda I - (A + DF(\bar{x})) = \lambda I - (A + C)$ est inversible si seulement si $I - C(\lambda I - A)^{-1}$ est inversible.

De plus, quand $I - C(\lambda I - A)^{-1}$ est inversible on a,

$$(\lambda I - (A + C))^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(I - C(\lambda I - A)^{-1})^{-1}.$$

Considérer

$$(I - C(\lambda I - A)^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \psi \end{pmatrix}.$$

On trouve,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-(\lambda I+D)a}\alpha + \int_0^a e^{-(\lambda I+D)(s-a)}\psi(s)ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \psi \end{pmatrix},$$

qui est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} DB(\bar{w})(e^{-(\lambda I+D)a}\alpha + \int_0^a e^{-(\lambda I+D)(s-a)}\psi(s)ds) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \psi \end{pmatrix},$$

i.e :

$$\begin{cases} \alpha - DB(\bar{w})(e^{-(\lambda I+D)a}\alpha) & = \gamma + DB(\bar{w})(\int_0^a e^{-(\lambda I+D)(s-a)}\psi(s)ds) \\ \varphi & = \psi \end{cases} \quad (3.17)$$

A partir de formule de $DB(\bar{w})$, nous savons que

$$\alpha - DB(\bar{w})(e^{-(\lambda I+D)a}\alpha) = \left[\begin{array}{c} I - \begin{pmatrix} 0 & \frac{h\tau\eta}{(h+\bar{v})^2} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da \\ \frac{-\tau\bar{v}}{h+\bar{v}} & \tau\left(\frac{2\bar{v}(d-b)}{k} + b - \frac{h \int_0^\infty \bar{u}(a)da}{(h+\bar{v})^2}\right) \end{pmatrix} \int_0^\infty e^{-(\lambda I+D)a}da \\ - \begin{pmatrix} \frac{\tau\eta\bar{v}}{h+\bar{v}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda I+D)a}da \end{array} \right] \alpha.$$

On note :

$$\Delta(\lambda) = I - \begin{pmatrix} 0 & \frac{h\tau\eta}{(h+\bar{v})^2} \int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da \\ \frac{-\tau\bar{v}}{h+\bar{v}} & \tau\left(\frac{2\bar{v}(d-b)}{k} + b - \frac{h \int_0^\infty \bar{u}(a)da}{(h+\bar{v})^2}\right) \end{pmatrix} \int_0^\infty e^{-(\lambda I+D)a} da$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{\tau\eta\bar{v}}{h+\bar{v}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty \beta(a)e^{-(\lambda I+D)a} da.$$

Et,

$$K(\lambda, \psi) = DB(\bar{w}) \left(\int_0^a e^{-(\lambda I+D)(s-a)} \psi(s) ds \right). \quad (3.18)$$

Alors :

$$\Delta(\lambda)\alpha = \gamma + K(\lambda, \psi). \quad (3.19)$$

Et on obtient l'équation caractéristique

$$\det \Delta(\lambda) = 0.$$

Quand $\Delta(\lambda)$ est inversible on trouve

$$\alpha = (\Delta(\lambda))^{-1}(\gamma + K(\lambda, \psi)).$$

De la discussion ci-dessus et d'après le lemme (3.5) dans [22], nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 3.4 *Les résultats suivants sont valables :*

(i) $\sigma(A+C) \cap \Omega = \sigma_p(A+C) \cap \Omega = \{\lambda \in \Omega : \det \Delta(\lambda) = 0\}$.

(ii) si $\lambda \in \rho(A+C) \cap \Omega$, nous avons la formule suivante pour la résolvante,

$$(\lambda I - (A+C))^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Où

$$\psi(a) = e^{-(\lambda I + D)a} (\Delta(\lambda))^{-1} (\alpha + K(\lambda, \varphi)) + \int_0^a e^{(\lambda I + D)(s-a)} \varphi(s),$$

avec $\Delta(\lambda)$ et $K(\lambda, \varphi)$ sont définies dans (3.18), (3.19).

Preuve du lemme 3.4

1. Supposons que $\lambda \in \Omega$ et que $\det(\Delta(\lambda)) \neq 0$.

Nous avons

$$(\lambda I - (A + C))^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = (\lambda I - A)^{-1} (I - C(\lambda I - A)^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$$

soit

$$(I - C(\lambda I - A)^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \psi \end{pmatrix}.$$

De la discussion ci-dessus et à partir du lemme (3.5) dans [22] nous obtenons :

$$\begin{cases} \alpha = (\Delta(\lambda))^{-1} (\gamma + K(\lambda, \varphi)), \\ \varphi = \psi. \end{cases} \quad (3.20)$$

Par lemme (3.2), nous obtenons (3.22).

Donc Nous avons

$$\{\lambda \in \Omega : \det \Delta(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(A + C).$$

et

$$\sigma(A + C) \cap \Omega \subset \{\lambda \in \Omega : \det \Delta(\lambda) = 0\}.$$

2. Inversement, supposons que $\lambda \in \Omega$ et $\det(\Delta(\lambda)) = 0$.

Nous prétendons que nous pouvons trouver $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \in D(A) \setminus \{0\}$ tels que ;

$$(A + C) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

En fait, définissez

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} &:= (\lambda I - A)\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = (\lambda I - A)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons trouver une solution de (3.21) si et seulement si nous pouvons trouver $a \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \in X \setminus \{0\}$ satisfaisant

$$[I - C(\lambda I - A)^{-1}] \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = 0.$$

De l'argument ci-dessus, cela équivaut à trouver $\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \neq 0$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta(\lambda)\alpha = 0, \\ \varphi = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

ce qui signifie que nous pouvons trouver une solution de(3.21) si et seulement si nous pouvons trouver $\alpha \neq 0$ tels que $\Delta(\lambda)\alpha = 0$.

Mais puisque nous supposons que $\det \Delta((\lambda)) = 0$, nous pouvons trouver $\alpha \neq 0$, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre λ telle que $\Delta(\lambda)\alpha = 0$.

Donc nous pouvons trouver $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \in D(A) \setminus \{0\}$ satisfaisant (3.21) , donc $\lambda \in \sigma_p(A + C)$ et $\{\lambda \in \Omega : \det \Delta((\lambda)) = 0\} \subset \sigma_p(A + C)$.

□

Maintenant, on va déduire la formule de l'équation caractéristique $\det \Delta((\lambda)) = 0$.

3.6 La formule de l'équation caractéristique $\det(\Delta(\lambda)) = 0$ autour de chaque état stationnaire et l'étude qualitative

3.6.1 Hypothèse

A partir d'hypothèse (1) on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda I + D)a} da = \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{\lambda + \tau\mu} e^{-(\tau\mu + \lambda)a} \right]_0^{+\infty} & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{\lambda + \tau d} e^{-(\tau d + \lambda)a} \right]_0^{+\infty} \end{pmatrix},$$

donc,

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda I + D)a} da = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda + \tau\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda + \tau d} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-(\lambda I + D)a} da = \int_1^{+\infty} \beta^* e^{-(\lambda I + D)a} da = \begin{pmatrix} \left[\frac{\beta^*}{\lambda + \tau\mu} e^{-(\tau\mu + \lambda)a} \right]_1^{+\infty} & 0 \\ 0 & \left[\frac{\beta^*}{\lambda + \tau d} e^{-(\tau d + \lambda)a} \right]_1^{+\infty} \end{pmatrix},$$

donc,

$$\int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-(\lambda I + D)a} da = \begin{pmatrix} \frac{\beta^* e^{-(\lambda + \tau\mu)}}{\lambda + \tau\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^* e^{-(\lambda + \tau d)}}{\lambda + \tau d} \end{pmatrix}.$$

3.6.2 Stabilité de l'état stationnaire \bar{x}_1

L'équation caractéristique au état stationnaire $\bar{x}_1 = (0, 0, 0)$ est

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) |_{\bar{x}_1} &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda + \tau\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda + \tau d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta^* e^{-(\lambda + \tau\mu)}}{\lambda + \mu\tau} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^* e^{-(\lambda + \tau\mu)}}{\lambda + d\tau} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau b}{\lambda + \tau d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\tau b}{\lambda + \tau d} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\det(\Delta(\lambda) |_{\bar{x}_2}) = 1 - \frac{\tau b}{\lambda + \tau d} = \frac{\lambda + \tau d - \tau b}{\lambda + \tau d} = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda + \tau d - \tau b = 0,$$

$$\lambda = -\tau d + \tau b = (b - d)\tau = r\tau > 0.$$

D'où l'état stationnaire \bar{x}_1 est instable.

3.6.3 Stabilité de l'état stationnaire \bar{x}_2

L'équation caractéristique au état stationnaire $\bar{x}_2 = (0, 0, \tau d k e^{\tau d a})$ est

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) |_{\bar{x}_2} &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\tau k}{h+k} & \tau(2(d-b)+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+\tau\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+\tau d} \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} \frac{\tau\eta k}{h+k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta^* e^{-(\lambda+\tau\mu)}}{\lambda+\mu\tau} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^* e^{-(\lambda+\tau d)}}{\lambda+d\tau} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\tau k}{(h+k)(\lambda+\mu\tau)} & \frac{\tau(2d-b)}{\lambda+\tau d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tau\eta k \beta^* e^{-(\lambda+\mu\tau)}}{(h+k)(h+\mu\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{(h+k)(h+\mu\tau)} & 0 \\ \frac{\tau k}{(h+k)(h+\mu\tau)} & 1 - \frac{\tau(2d-b)}{\lambda+\tau d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tau\eta k \beta^* e^{-(\lambda+\mu\tau)}}{(h+k)(h+\mu\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau\eta k \beta^* e^{-(\lambda+\mu\tau)}}{(h+k)(h+\mu\tau)} & 0 \\ \frac{\tau k}{(h+k)(h+d\tau)} & 1 - \frac{\tau(2d-b)}{\lambda+\tau d} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(h+k)(h+\mu\tau) - \tau\eta k \beta^* e^{-(\lambda+\mu\tau)}}{(h+k)(h+\mu\tau)} & 0 \\ \frac{\tau k}{(h+k)(h+d\tau)} & 1 - \frac{\tau(2d-b)}{\lambda+\tau d} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\det(\Delta(\lambda) |_{\bar{x}_2}) = \frac{[(h+k)(\lambda+\mu\tau) - \tau\eta k \beta^* e^{-(\lambda+\mu\tau)}][(\lambda+\tau d) - \tau(2d-b)]}{(\lambda+\tau\mu)(\lambda+\tau d)(h+k)} = 0.$$

On voit que les solutions de $\det(\Delta(\lambda) |_{\bar{x}_2}) = 0$ sont les solutions de l'équations

Ceci implique que :

$$(\alpha + \mu\tau - \frac{\tau\eta\beta^*}{h+k} e^{-(\mu\tau+\alpha)} \cos \beta) = 0 \quad \text{ou} \quad (\beta + \frac{\tau\eta\beta^*}{h+k} e^{-(\mu\tau+\alpha)} \sin \beta) = 0.$$

Pour assurer la stabilité de \bar{x}_2 il faut $\alpha < 0$ avec $\alpha + \mu\tau = \frac{\tau\eta\beta^*}{h+k} e^{-(\mu\tau+\alpha)} \cos \beta$.

Ce qui donne $-\mu\tau \leq \alpha < \frac{\tau\eta\beta^*}{h+k} - \mu\tau$.

Donc, $\alpha < 0$ si $\frac{\tau\eta\beta^*}{h+k} - \mu\tau < 0$. i.e $\eta < \frac{(h+k)\mu}{\beta^*}$.

D'ou \bar{x}_2 est localement asymptotiquement stable si $\eta < \frac{(h+k)\mu}{\beta^*}$.

3.6.4 Stabilité d'état stationnaire \bar{x}_3

L'équation caractéristique au état stationnaire strictement positive

$$\bar{x}_3 = \left(0, \bar{u}, \bar{\rho} \right) = \left(0, \tau\mu\left(1 - \frac{\bar{v}}{k}\right)(h + \bar{v})e^{-\tau\mu a}, \tau\bar{v}de^{-\tau\mu a} \right)$$

avec $\bar{v} = \frac{h}{\eta M - 1}$ est

$$\begin{aligned} \det(\Delta(\lambda) |_{\bar{x}_3}) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\tau h \eta}{(h + \bar{v})^2 (\lambda + \mu d)} \int_0^\infty \beta(a) \bar{u}(a) da \\ \tau \bar{v} & 1 - \frac{\tau}{(\lambda + \mu d)} \left(\frac{2\bar{v}(d-b)}{k} + b - \frac{h}{(h + \bar{v})^2} \right) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \frac{\tau \eta \bar{v}}{(h + \bar{v})(\lambda + \mu \tau)} \beta^* e^{-(\lambda + \mu \tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau \eta \bar{v}}{(h + \bar{v})(\lambda + \mu \tau)} \beta^* e^{-(\lambda + \mu \tau)} & \frac{-\tau h \eta}{(h + \bar{v})^2 (\lambda + \mu d)} \int_0^\infty \beta(a) \bar{u}(a) da \\ \frac{\tau \bar{v}}{(h + \bar{v})(\lambda + \mu \tau)} & 1 - \frac{\tau}{(\lambda + \mu d)} \left(\frac{2\bar{v}(d-b)}{k} + b - \frac{h}{(h + \bar{v})^2} \right) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Lorsque on remplace \bar{u} et \bar{v} par leur valeurs dans l'équation caractéristique on trouve :

$$\det(\Delta(\lambda) |_{\bar{x}_3}) = \frac{\lambda^2 + \tau A\lambda + \tau^2 B + (\tau^2 C + \tau D\lambda)e^{-\lambda}}{(\lambda + \tau d)(\lambda + \tau\mu)} := \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} = 0. \quad (3.25)$$

Avec :

$$* A = \mu - r \left(\frac{-h\eta M - k + k\eta M - h}{(\eta M - 1)kM\eta} \right).$$

$$* B = -\mu r \left(\frac{-2k + 3k\eta M - 2h - k\eta^2 M^2}{(\eta M - 1)kM\eta} \right).$$

$$* C = \mu r \left(\frac{-hM\eta - k + kM\eta - h}{(\eta M - 1)kM\eta} \right).$$

$$* D = -\mu.$$

Et

$$\{\lambda \in \Omega : \det(\Delta(\lambda) |_{\bar{x}_3}) = 0\} \Leftrightarrow \{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = 0\}.$$

Puisque les solutions complexes de l'équation $f(\lambda) = 0$ sont difficile a trouver, on va étudier l'analyse de la bifurcation de Hopf autour d'état stationnaire positive \bar{x}_3 .

3.7 L'analyse de la bifurcation de Hopf autour de l'état stationnaire positive

Nous considérons le paramètre τ comme un paramètre de bifurcation et étudions l'existence de la bifurcation de Hopf autour d'état stationnaire positive \bar{x}_3 .

Posons $\lambda = \tau\xi$.

Alors nous obtenons

$$f(\lambda) = f(\tau\xi) := \tau^2 g(\xi) = \tau^2(\xi^2 + A\xi + B + (C + D\xi)e^{-\tau\xi}).$$

ce qui implique que :

$$\{\lambda \in \Omega : \det\Delta((\lambda)) = 0\} = \{\tau\xi \in: g(\xi) = 0\}.$$

Soit $\xi = iw (w > 0)$ la valeur propre imaginaire pure de $g(\xi) = 0$,

tel que :

$$-w^2 + iAw + B + Ce^{-iw\tau} + iDwe^{-iw\tau} = 0.$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} -w^2 + B &= -Dw \sin(w\tau) - C \cos(w\tau) \\ Aw &= C \sin(w\tau) - Dw \cos(w\tau). \end{cases} \quad (3.26)$$

Lorsque on élevé au carré les deux équation, on trouve :

$$(B - w^2)^2 + (Aw)^2 = C^2 + D^2w^2. \quad (3.27)$$

i.e

$$w^4 + (A^2 - 2B - D^2)w^2 + B^2 - C^2 = 0. \quad (3.28)$$

Soit $\sigma = w^2$, l'équation (3.28) devient :

$$\sigma^2 + (A^2 - 2B - D^2)\sigma + B^2 - C^2 = 0. \quad (3.29)$$

Et pour tout $\eta > \frac{h+k}{kM}$, on a $B + C > 0$, $B - C < 0$ ceci implique que $(B^2 - C^2) < 0$.

Calculons le discriminant de l'équation (3.29).

$$\Delta = (A^2 - 2B - D^2)^2 - 4(B^2 - C^2) = (-\sigma_0 + \sigma_1)^2 - 4(\sigma_0 \cdot \sigma_1) > 0.$$

Donc l'équation (3.29) admet deux racines distincts σ_0 et σ_1 tels que :

$$\sigma_0 + \sigma_1 = -(A^2 - 2B - D^2), \quad \sigma_0 \cdot \sigma_1 = B^2 - C^2. \quad (3.30)$$

et la racine positive est donnée par :

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \left(-(A^2 - 2B - D^2) + \sqrt{(A^2 - 2B - D^2)^2 - 4(B^2 - C^2)} \right).$$

De plus l'équation (3.28) admet une solution positive $w_0 = \sqrt{\sigma_0}$, et $g(\xi) = 0$ admet deux racines imaginaires pures $\pm iw_0$, avec $w_0^2 = \sigma_0$ et $\tau = \tau_n$ pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$ donne ci dessous

Trouvons la valeur critique de paramètre de bifurcation τ_n

Remplaçons w_0 par sa valeur dans l'équation (3.26)

$$\begin{cases} -\sigma_0 + B = -D\sqrt{\sigma_0} \sin(\sqrt{\sigma_0}\tau) - C \cos(\sqrt{\sigma_0}\tau). \\ A\sqrt{\sigma_0} = C \sin(\sqrt{\sigma_0}\tau) - D\sqrt{\sigma_0} \cos(\sqrt{\sigma_0}\tau). \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow \sigma_0 + B = -D\sqrt{\sigma_0} \left[\frac{A\sqrt{\sigma_0} + D\sqrt{\sigma_0} \cos(\sqrt{\sigma_0}\tau)}{C} \right],$$

$$\Rightarrow -C\sigma_0 + CB + DA\sigma_0 = \cos(\sqrt{\sigma_0}\tau) [-C^2 - D^2\sigma_0],$$

$$\Rightarrow \cos(\sqrt{\sigma_0}\tau) = \frac{C\sigma_0 - CB - DA\sigma_0}{C^2 + D^2\sigma_0^2}, \quad \text{si} \quad -1 \leq \frac{C\sigma_0 - CB - DA\sigma_0}{C^2 + D^2\sigma_0^2} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sigma_0}\tau = \arccos\left[\frac{C\sigma_0 - CB - DA\sigma_0}{C^2 + D^2\sigma_0^2}\right], \quad \text{si} \quad -1 \leq \frac{C\sigma_0 - CB - DA\sigma_0}{C^2 + D^2\sigma_0^2} \leq 1,$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \arccos\left[\frac{C\sigma_0 - CB - DA\sigma_0}{C^2 + D^2\sigma_0^2}\right], \quad \text{si} \quad -1 \leq \frac{C\sigma_0 - CB - DA\sigma_0}{C^2 + D^2\sigma_0^2} \leq 1.$$

Donc la valeur critique de bifurcation est donné par :

$$\tau_n = \begin{cases} \frac{1}{w_0} \left[\arccos \frac{(C - AD)w_0^2 - BC}{C^2 + D^2w_0^2} + 2n\pi \right], & \text{si } \frac{ACw_0 + Dw_0(w_0^2 - B)}{C^2 + D^2w_0^2} \geq 0 \\ \frac{1}{w_0} \left[2\pi \arccos \frac{(C - AD)w_0^2 - BC}{C^2 + D^2w_0^2} + 2n\pi \right], & \text{si } \frac{ACw_0 + Dw_0(w_0^2 - B)}{C^2 + D^2w_0^2} < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$

Lemme 3.5 *Supposons que hypothèse (1) et les conditions suivantes,*

$$\eta > \frac{h+k}{kM}, \quad B-C < 0, \quad AD-2C < 0, \quad A^2-2B > 0, \quad \text{et} \quad 2BC+ABD-A^2C < 0.$$

sont vérifier. Alors :

$$\frac{dg(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=iw_0 \neq 0}.$$

avec $\xi = iw_0$ est une racine simple de l'équation (3.25).

le lemme (3.5) nous donne l'existence d'une bifurcation de Hopf.

Preuve du lemme (3.5)

Premièrement, on a :

$$\frac{dg(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=w_0} = i2w_0 + A + De^{-w_0} - iDw_0\tau_n e^{-iw_0\tau_n}.$$

A partir de l'équation (3.26) on trouve que :

$$\frac{dg(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=w_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A + D \cos(w_0\tau_n) + \tau_n(B - w_0^2) = 0 \\ 2w_0 + Aw_0\tau_n - D \sin(w_0\tau_n) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

D'une part on a :

$$\cos(w_0\tau_n) = \frac{-\tau_n(B - w_0^2) - A}{D}.$$

et,

$$\sin(w_0\tau_n) = \frac{2w_0 + Aw_0\tau_n}{D}.$$

ce qui donne :

$$\tan(w_0\tau_n) = \frac{(2 + A\tau_n)w_0}{-\tau_n(B - w_0^2) - A}.$$

D'autre part, d'après (3.26) et (3.27) on trouve que :

$$\cos(w_0\tau_n) = \frac{-ADw_0^2 + C(w_0^2 - B)}{D^2w_0^2 + C^2}.$$

et,

$$\sin(w_0\tau_n) = \frac{Dw_0(w_0^2 - B) + ACw_0}{D^2w_0^2 + C^2}.$$

Ce qui donne :

$$\tan(w_0\tau_n) = \frac{ACw_0 + Dw_0(w_0^2 - B)}{-ADw_0^2 + C(w_0^2 - B)}.$$

de plus,

$$D\tau_n w_0^2 + (AD - 2C + (A - 2B)D\tau_n) + Bw_0^2 + (2BC + ABD - A^2C + B^2D\tau_n) = 0.$$

D'après l'hypothèse de lemme on a :

$$\tau_n > 0, D < 0 \quad \text{et} \quad AD - 2C < 0, A^2 - 2B > 0 \quad \text{Et} \quad 2BC + ABD - A^2C > 0.$$

$$D\tau_n w_0^4 + (AD - 2C + 5A^2 - 2C + (A^2 - 2B)D\tau_n)w_0^2 + (2BC + ABC - A^2C + B^2D\tau_n) < 0.$$

Donc,

$$\left. \frac{dg(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=iw_0} \neq 0.$$

□

Lemme 3.6 *Supposons que hypothèse (1) et les conditions suivantes,*

$$\eta > \frac{h+k}{kM}, \quad B-C < 0, \quad AD-2C < 0, \quad A^2-2B > 0, \quad \text{et} \quad 2BC+ABD-A^2C < 0.$$

sont vérifier.

Noter que $\xi(\tau) = \alpha(\tau) + iw(\tau)$ la racine de $g(\xi) = 0$ satisfait que $\alpha(\tau_n) = 0$, $w(\tau_n) = w_0$, τ_n est définie dans (3.32).

Alors

$$\alpha'(\tau_n) = \left. \frac{dRe(\xi)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n} > 0.$$

Preuve du lemme 3.6

Nous étudions $\frac{d\tau}{d\xi}$ au lieu de $\frac{d\xi}{d\tau}$, nous obtenons d'abord :

$$\left. \frac{d\tau}{d\xi} \right|_{\xi=iw_0} = \left(-\frac{\tau}{\xi} + \frac{D}{\xi(C+D)\xi} - \frac{2\xi+A}{\xi(\xi^2+A\xi+B)} \right) \Big|_{\xi=iw_0}.$$

en utilisant (3.27) nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\left. \frac{d\tau}{d\xi} \right|_{\xi=iw_0} \right) &= \frac{-D^2}{C^2 + D^2 + w_0^2} + \frac{2w_0^2 + (A^2 + 2B)}{A^2w_0^2 + (B - w_0^2)^2} \\ &= \frac{2w_0^2 + A^2 - 2B - D^2}{C^2 + D^2w_0^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$w_0^2 = \frac{-(A^2 - 2B - D^2) + \sqrt{(D^2 - A^2 + 2B)^2 - 4(B^2 - C^2)}}{2}.$$

On obtient :

$$\operatorname{sign} \left(\left. \frac{dRe(\xi)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n} \right) = \operatorname{sign} \left(\operatorname{Re} \left(\left. \frac{d\tau}{d\xi} \right|_{\xi=iw} \right) \right) = \operatorname{sign} \left(\frac{2w_0^2 + A^2 - 2B - D^2}{C^2 + D^2w_0^2} \right) > 0.$$

□

Résumons les résultats précédents, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 6 [12] *Supposons que l'hypothèse (1) et les conditions suivantes, $\eta > \frac{h+k}{kM}$, $B - C < 0$, $AD - 2C < 0$, $A^2 - 2B > 0$ et $2BC + ABD - A^2C < 0$, sont vérifier.*

Alors il existe $\tau_n > 0$, $n = 0, 2, \dots$ (τ_n est défini dans (3.32)), de sorte que lorsque $\tau = \tau_n$ le modèle proie-prédateur (3.1) subit une bifurcation de Hopf à l'état stationnaire (\bar{u}, \bar{v}) .

3.7.1 Simulations numériques

L'analyse de la bifurcation indique que lorsque le paramètre de bifurcation τ passe par une valeur critique τ_n (où τ_n est défini dans (3.32)), la solution positive subit une bifurcation de Hopf.

Pour déduire le type de cette bifurcation de Hopf, nous allons introduire une simulation numérique. Nous choisissons les paramètres $\eta = 0.6$, $\mu = 0.7$, $r = 0.6$, $b = 0.8$, $d = 0.2$, $k = 120$, $h = 10$, $M = 2$.

Le système (3.1) devient,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = 0.6v(t)\left(1 - \frac{v(t)}{120}\right) - \frac{v(t) \int_0^\infty u(t, a) da}{10 + v(t)}, \\ \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} = -0.7u(t, a), \quad a \geq 0 \\ u(t, 0) = \frac{0.6v(t) \int_0^\infty \beta(a)u(t, a) da}{10 + v(t)}, \\ u(0, \cdot) = u_0 \in L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}) \\ v(0) = v_0 \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

On calcule $A = 0.6583$, $B = 0.01163$, $C = 0.02919$, $D = -0.7$ qui satisfont les conditions du théorème (6).

En outre on obtient $\tau_0 = 0.7880$ et $\tau_1 = 21.9541$. On choisit $\tau = 0.7 < \tau_0$ et les valeurs initiales $v(0) = 49$, $u(0, a) = 14.5e^{-0.7a}$. Les graphiques de $v(t)$, $u(t, a)$ sont respectivement dans les figures (3.2), (3.3) et l'orbite (portrait de phase) est représenté dans la figure (3.4). Sous les mêmes valeurs initiales, nous choisissons $\tau_0 < \tau = 0.8 < \tau_1$ et dessinons les graphiques de $v(t)$ et la norme \mathbb{L}^1 de $u(t, a)$ dans les figures (3.6), (2.5). D'après les figures, nous pouvons observer que ce système (3.34) subit une bifurcation de Hopf sous-critique lorsque $\tau = \tau_0$, et une orbite périodique non triviale bifurque de l'état stationnaire (\bar{u}, \bar{v}) lorsque $\tau < \tau_0$. On observe que la période de maturation τ tend à stabiliser l'équilibre positif, c'est-à-dire que l'état stationnaire positif dépendant de l'âge devient stable et que les solutions périodiques disparaissent lorsque τ aug-

mente de 0.7 à 0.8, ceci montre bien que cette bifurcation est une **bifurcation de Hopf sous-critique**.

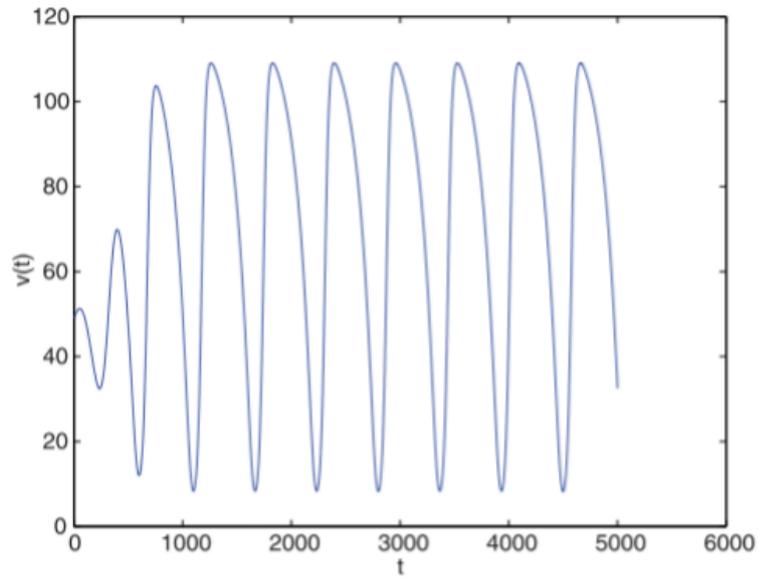
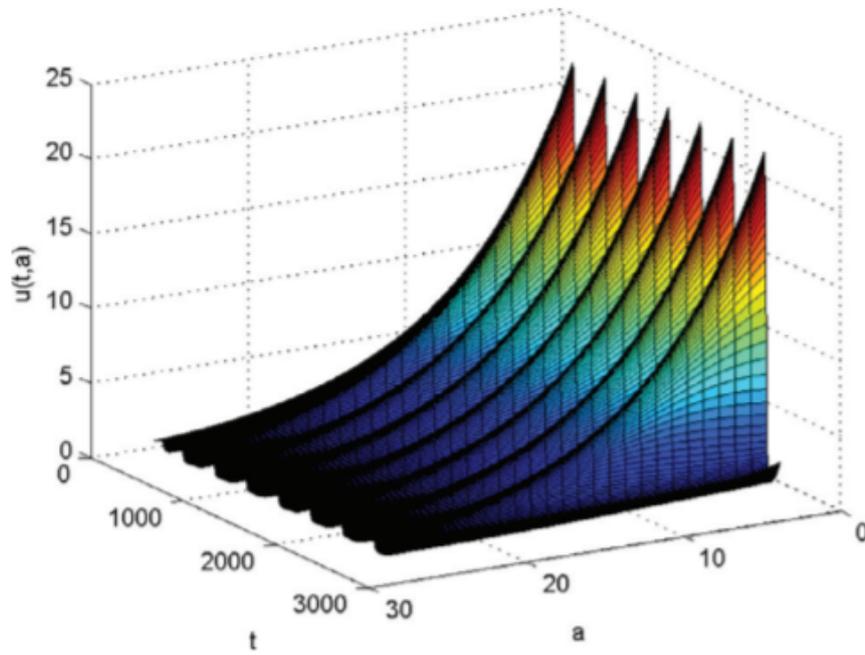
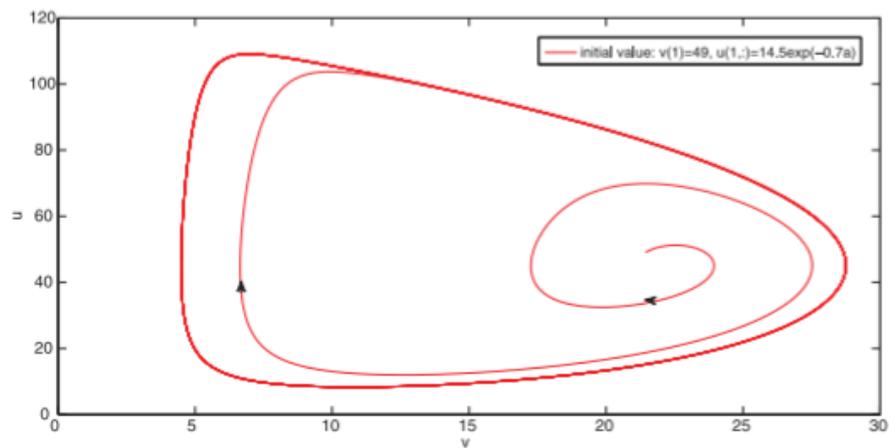


FIGURE 3.1 – L'évolution de $v(t)$ pour $\tau = 0.7$

FIGURE 3.2 – L'évolution de $u(t,a)$ pour $\tau = 0.7$ FIGURE 3.3 – L'orbite de v et u pour $\tau = 0.7$.

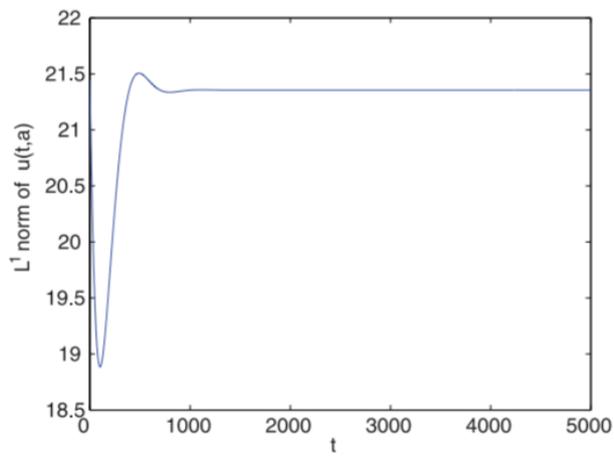


FIGURE 3.4 – L'évolution de la norme L^1 de $u(t,a)$ pour $\tau = 0.8$

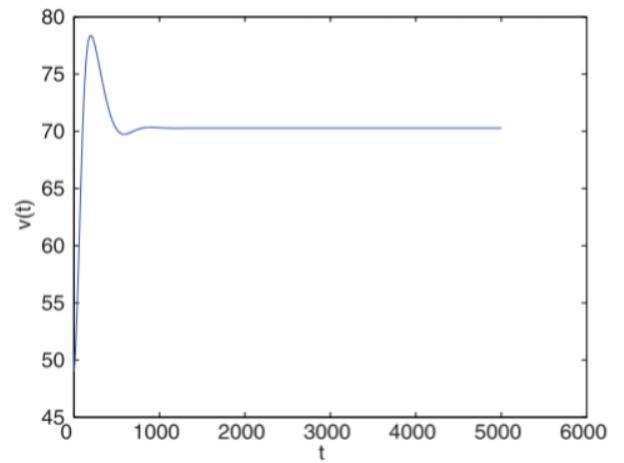


FIGURE 3.5 – L'évolution de $v(t)$ pour $\tau = 0.8$

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce mémoire , nous avons analysé la bifurcation de Hopf pour un modèle proie-prédateur structuré en âge pour les prédateurs. nous savons que l'état stationnaire positive perd sa stabilité initiale et qu'une bifurcation de Hopf se produit.

Donc si nous intéressons aux effets combinés de la structure d'âge pour les prédateurs et les proies, quel sera le comportement dynamique du système ?

Bibliographie

- [1] Alam, S. Prey-predator Dynamics under Herd Behavior of Prey, Universal Journal of Applied Mathematics **1(4) : 251-257, 2013.41, 95.**
- [2] R. Arditi and L. R. Ginzburg, Coupling in predator-prey dynamics : Ratio-dependence, J.Theoret. Biol. **139 (1989) 311-326.**
- [3] J.M. Cushing, Existence and stability of equilibria in age-structured population dynamics, J. Math. Biol. **20 (1984) 259-27.**
- [4] J.M. Cushing, M. Saleem, A predator prey model with age structure, J. Math. Biol. **14 (1982) 231-250.**
- [5] J-P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles ; collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (**1996**),
- [6] A. Ducrot, Z. Liu, P. Magal, Essential growth rate for bounded linear perturbation of non densely defined Cauchy problems, J. Math. Anal. Appl. **341 (2008) 501-518.**
- [7] K.J. Engel and R. Nagel, A Short Course on Operators Semigroups. Universitex. New York, N.Y :Springer, **2006.**
- [8] L. Gorniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Mathematics and its Applications, 495, Kluwer Academi publishers,Dordrecht, **1999.**
- [9] J. Guckenheimer, M. Myers et B. Sturmfels, « Computing Hopf Bifurcations I », SIAM Journal on Numerical Analysis,**1997.**
- [10] M.E. Gurtin, D.S. Levine, On predator-prey interactions with predation dependent on age of prey, Math. Biosci. **47 (1979) 207-219.**
- [11] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Masson, **1983.**

- [12] Hui Tang, Zhihua Liu, Hopf bifurcation for a predator-prey model with age structure. *Applied Mathematical Modelling* **40** (2016) **726-737**.
- [13] H. Kellermann and M. Hieber, Integrated Semigroup, *J. Funct. Anal.*, **84**, (1989), **160-180**.
- [14] Y. Kuang and E. Beretta, Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system, *J. Math. Biol.* **36** (1998) **389-406**.
- [15] D.S. Levine, Bifurcating periodic solutions for a class of age-structured predator-prey systems, *Bull. Math. Biol.* **45** (1983) **901-915**.
- [16] Z. Liu, P. Magal, S. Ruan, Hopf bifurcation for non-densely defined Cauchy problems, *Z. Angew. Math. Phys.* **62** (2011) **191-222**.
- [17] P. Magal, Compact attractors for time-periodic age structured population models, *Electron. J. Differ. Equ.* **65** (2001) **1-35**.
- [18] D. L. Ludovici, A Comparative Study Concerning the Well Known Theory of C_0 -Semigroups and the Theory of One - Integrated Semi-groups. *Leturas matemáticas. Volumen* **26**(2005), **35-96**.
- [19] P. Magal, S. Ruan, On semilinear Cauchy problems with non-dense domain, *Adv. Differ. Equ.* **14** (2009) **1041-1084**.
- [20] Pierre Lévy-Bruhl : Introduction à la théorie spectrale. Dunod, Paris, **2003**.
- [21] H.R. Thieme, Quasi-compact semigroups via bounded perturbation, in : O.Arino, D. Axelrod, M. Kimmel (Eds.), *Advances in Mathematical Population Dynamics : Molecules, Cells and Man*, World Scientific Publishing, River Edge, NJ ; **1997**, pp. **691-713**.
- [22] Z.Wang, Z. Liu, Hopf bifurcation of an age-structured compartmental pest-pathogen model, *J. Math. Anal. Appl.* **385** (2012) **1134-1150**.
- [23] G.F.Webb, *Theory of Nonlinear Age-dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, New York, **1985**.

ملخص:

في هذه الأطروحة قمنا بتحليل نظام المفترس حسب العمر حيث درسنا المعادلة المميزة وقمنا بتطبيق نظرية تشعب هوبف على المعادلات شبه الخطية للنظام. يشير التحليل الى انه في ظل بعض الظروف يظهر حل دوري بواسطة تشعب هوبف، ويحدث هذا عندما تمر قيمة التشعب بقيمة حرج .

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons analysé un système proie-prédateur structuré en âge, en étudiant l'équation caractéristique et en appliquant la théorie de la bifurcation de Hopf pour les équations semi-linéaires.

L'analyse indique que dans certaines conditions, la solution périodique non triviale se produit par une bifurcation de Hopf, et ceci lorsque le paramètre de bifurcation passe par des valeurs critiques .

Abstract

In this memory, we have analyzed an age-structured prey-predator system, we have studied the characteristic equation and we have applied the Hopf bifurcation theory for semi-linear equations.

The analysis indicates that under some conditions, a non-trivial periodic solution appears by a Hopf bifurcation, and this occurs when the bifurcation parameter passes through critical values .