République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Biomathématiques et modélisation

présentée par

Ouasti Assia

Soutenu le : 17/06/2019

La contrôlabilité approchée d'une classe d'équations différentielles non linéaires avec retard fini

Soutenu devant le jury composé de :

Président	MOUSSAOUI Ali	Prof, Univ. Tlemcen
Examinateur	BENSID Sabri	M.C.A, Univ. Tlemcen
Examinatrice	MOSTEFAOUI Imene Meriem	M.C.A, ESG2E. Oran
Encadrante	MOKKEDEM Fatima Zahra	M.C.B, Univ. Tlemcen

Année Universitaire : 2018-2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles de mes chers parents qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui. Que Dieu vous protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.

Je dédie ce travail aussi :

À mes très chers grands-pères, mes aimables frères, ma merveilleuse soeur et toute la famille OUASTI pour leurs encouragements permanents et leur soutien moral.

À tous mes amis et mes collègues qui m'ont toujours encouragé et étaient présents à mes cotés durant mon chemin d'étude .

OUASTI Assia

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir accordé la force et la santé afin de pouvoir réaliser ce travail .

Je tiens à remercier tout le corps professoral et administratif du département des Mathématiques à l'université de Tlemcen pour la bonne qualité de l'enseignement, les orientations et les encouragements durant toute mes années détude universitaire.

Je tiens aussi à remercier énormément l'encadrante de ce mémoire, Madame **MOKKEDEM Fatima Zahra**, pour sa disponibilité, ses conseils qui ont alimenté ma réflexion et surtout pour ses qualités humaines et scientifiques qui m'ont permis de réaliser ce travail.

Un spécial remerciement à Monsieur **MOUSSAOUI Ali**, d'abord pour la bonne représentation de la spécialité "Biomathématiques et Modélisation", pour le soutien scientifique et humain, pour la gentillesse et aussi pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de ce mémoire.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Monsieur **BENSID Sabri** et Mademoiselle **MOSTEFAOUI Imene Meriem** qui ont accepté d'évaluer ce travail. Je leur exprime toute ma gratitude.

Enfin, je remercie tous mes amis et mes collègues pour les moments et les souvenirs inoubliables qu'on a passé ensemble.

Table des matières

Introduction

La modélisation est une spécialité très importante dans l'application mathématique, elle consiste à utiliser les équations fonctionnelles pour décrire un phénomène physique, chimique et même biologique. En effet, il faut inventer des modèles (des équations) pour développer la science et la technologie. En particulier, on a l'équation de diffusion thermique suivante :

$$c_1 \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + G(t, w(x,t)), \quad x \in [0, x_1], \quad t \in [0,T],$$

où $w(x,t)$ est la température à la position x et à l'instant t, c_1 est la chaleur spécifique volumique, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)$ est la diffusion de la chaleur avec c_2 un coefficient de diffusion thermique et $G(t, w(x,t))$ est une fonction non linéaire qui représente le terme source.

En supposant que la chaleur spécifique volumique a un terme de mémoire (fading memory en anglais), un terme neutre prend part dans l'équation précédente, voir [7, 13, 21, 24], qui devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(w(x,t) + F(t, w(x,t))\Big) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + G(t, w(x,t)), \quad x \in [0, x_1], \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Pour simplifier l'étude de cette équation, les mathématiciens ont supposé que l'opérateur $Aw(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)$ génère un semi-groupe fortement continu défini dans l'espace de Banach $X = L^2([0,x_1];\mathbb{R})$. De cette manière, l'équation aux dérivées partielles (1) se transforme en une équation différentielle ordinaire (voir [6]) de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(W(t) + F(t, W(t))\Big) = AW(t) + G(t, W(t)), \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Cette équation a été largement étudiée dans les dernières années et plusieurs résultats sur l'existence et le comportement asymptotique de solutions ont été démontrés, voir [1, 14, 15, 16, 18] pour l'instant.

Cependant, les mathématiciens ont découvert que parfois les fonctions non linéaires F et G dépendent des dérivées par rapport à l'espace, par exemple, si F et G dépendent de la vitesse de transmission de chaleur $\frac{\partial w}{\partial x}(x,t)$, l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(w(x,t) + F\left(t, w(x,t), \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)\right)\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + G\left(t, w(x,t), \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)\right),$$

et par suite F et G sont définies seulement dans un sous-espace de X dans lequel $w(x,t)$ est de classe C^1 par rapport à x. Par conséquent, les travaux existants sont inapplicables et la théorie existante doit être améliorée. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de définir un autre opérateur $A^{\frac{1}{2}}w(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)$ qui introduit un sous-espace $X_{\frac{1}{2}}$ de X et d'étudier l'équation (2) dans $X_{\frac{1}{2}}$ au lieu de X. Cette technique est basée sur la théorie des semi-groupes analytiques et des puissances fractionnaires de A. Les détails se trouvent dans les chapitres qui suivent.

En effet, dans ce travail, on considère une équation à terme neutre et à retard fini donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(x(t) + F(t, x_t)\Big) = -Ax(t) + G(t, x_t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \end{cases} \tag{3}$$

où u est un contrôle défini dans un autre espace de Banach U. Pour permettre aux fonctions F et G de contenir des dérivées spatiales (même d'ordre fractionnaire), on étudie l'existence et l'unicité de solution dans l'espcae $X_\alpha \subset X$ avec $\alpha \in (0,1)$. Puis, on passe à la question de contrôlabilité.

La théorie de contrôlabilité est très importante en applications. Pouvoir exactement contrôler une équation différentielle c'est pouvoir amener son évolution de n'importe quel état initial vers n'importe quel état final voulu. Ce résultat, qui est très fort et très intéressant, peut rarement être atteint en dimension infinie. Par conséquent, les mathématiciens ont introduit une autre notion de contrôlabilité qui est moins forte mais suffisamment applicable en réalité, cette notion, appelée la contrôlabilité approchée, conduit la solution vers un petit voisinage de l'état final préscrit.

Le but de ce manuscrit est de démontrer que l'équation (3) est approximativement contrôlable en temps T fini. L'hypothèse principale de notre étude est que la partie linéaire de l'équation (3) soit approximativement contrôlable en temps T. Cette approche a été introduite par Bashirov et Mahmudov en 1999 [2] et a été largement utilisée pour démontrer la contrôlabilité approchée des systèmes différentielles déterministiques et stochastiques, à retard fini ou infini, voir [4, 10, 11, 12, 20, 22] et les références y figurant.

Les résultats de ce mémoire sont démontrés et publiés dans [9]. Le reste de ce travail est organisé comme suit : Dans le chapitre 2, on regroupe toutes les définitions et les théorèmes fondamentaux à utiliser dans la suite. Dans le chapitre 3, on vérifie l'existence et l'unicité de solution intégrale de notre système. Ensuite, on démontre le résultat principal de cette étude sur la contrôlabilité approchée du système (3). À la fin, dans le chapitre 4, on donne un exemple pour illustrer l'application de notre étude.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous rappelons quelques notions générales qui seront utilisées dans la suite de ce travail. Nous commençons par la notion des semi-groupes fortement continus. Ensuite, nous l'utilisons pour exprimer les solutions (classiques et intégrales) des systèmes paraboliques. Après, nous donnons les définitions de contrôlabilité exacte et approchée et nous introduisons l'hypothèse de base de ce travail (la condition (H_0)) qui est équivalente à la contrôlabilité approchée de la partie linéaire du système étudié. À la fin, nous regroupons quelques définitions et théorèmes fondamentaux qui seront utilisés dans la suite pour obtenir le résultat voulu sur la contrôlabilité approchée du système semi-linéaire considéré.

1.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur linéaire borné de X dans lui même et $x_0 \in X$. On considère l'équation différentielle abstraite suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

avec $f : X \to X$ une fonction localement continue sur X.

L'équation abstraite (1.1) a une solution unique donnée par la formule de la variation des constantes par (Voir [6], équation (1.3)) :

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

où $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$.

Puisque l'opérateur A est supposé borné, l'application e^{tA} est bien définie au sens des séries normalement convergentes. De plus, elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $e^{0A} = I_X$ (l'opérateur identité sur X). C'est à dire

$$\lim_{t \to 0^+} e^{tA} x_0 = x_0 \quad \text{pour tout } x_0 \in X.$$

2. Pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$, on a : $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$.
3. L'application $e^{tA}x$ est différentiable pour tout $x \in X$. De plus

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}x\right)\Big|_{t=0} = Ax.$$

Dans le cas général où A n'est pas borné ou A n'est pas défini sur X tout entier, on ne peut pas donner un sens à e^{tA}. On doit donc chercher une autre application qui remplace e^{tA} dans la formule (1.2) et qui vérifie les même propriétés précédentes. Ceci nous conduit vers la théorie des semi-groupes.

Définition 1.1 *([6], Définition 2.1.2) Une famille $(S(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ est appelée semi-groupe si elle vérifie :*

1. *$S(0) = I_X$.*
2. *Pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$, on a : $S(t+s) = S(t)S(s)$. Cette propriété est appelée propriété de semi-groupe.*

Notons ici que la propriété 3 n'est pas vérifiée pour tout $x \in X$. Plus précisément

Définition 1.2 *([6], Définition 2.1.8) Soit $(S(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ un semi-groupe défini sur un espace de Banach X. Posons*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{X} : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \textit{existe dans} \quad X \right\}.$$

L'opérateur A de $D(A)$ dans X défini par :

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}$$

est appelé générateur infinitésimal de $S(t)$ et $D(A)$ est le domaine de A.

La convergence de $S(t)x$ vers x peut être considérée de trois façons différentes :

Définition 1.3 *[6] Soit $(S(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ un semi-groupe défini sur X.*

1. *$S(t)$ est un semi-groupe uniformément continu si :*

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

2. *$S(t)$ est un semi-groupe fortement continu si :*

$$\textit{Pour tout } x \in X, \quad \lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0.$$

Un semi-groupe fortement continu est noté C_0 semi-groupe.

3. *$S(t)$ est un semi-groupe faiblement continu si :*

$$\text{Pour tout } x \in X \text{ et tout } x' \in X', \quad \lim_{t \to 0^+} |< S(t)x - x, x' >| = 0.$$

Ici X' est l'espace dual de X et $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire.

On a cependant le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.1 *([8], Corollaire 1.5) Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est borné, c-à-d, $A \in \mathcal{L}(X)$. Dans ce cas $S(t) = e^{tA}$.*

Clairement, cette propriété est très forte en application. Donc on se limite dans notre étude aux semi-groupes fortement continus.

Proposition 1.1 *([8], Proposition 1.4) Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu défini sur X. Donc il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M_\omega \geq 1$ telles que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

En particulier, si $0 \leq t \leq T < \infty$, alors il existe une constante $M \geq 1$ telle que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T]. \tag{1.3}$$

Le théorème suivant présente quelques relations entre le semi-groupe fortement continu $S(t)$ et son générateur infinitésimal $(A, D(A))$:

Théorème 1.2 *([6], Théorème 2.1.10) Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $S(t)$ défini sur X. Alors*

1. *Pour tout $x \in X$, la fonction $t \to S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ vers X.*
2. *Pour tout $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ et*

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

3. *Pour tout $x \in X$, $\int_0^t S(s)xds \in D(A)$ et $A\int_0^t S(s)xds = S(t)x - x$.*
4. *A est un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans X.*

Le théorème précédent donne une idée de la façon de calculer $(A, D(A))$ à partir du semi-groupe $S(t)$. Maintenant le problème inverse se pose : étant donné un opérateur linéaire $(A, D(A))$, comment construire un semi-groupe fortement continu $S(t)$ tel que $(A, D(A))$ soit sont générateur infinitésimal ? Ceci a besoin d'un ingrédient supplémentaire "la résolvante".

Définition 1.4 *[6] Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ défini sur X.*

1. *L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, est donné par :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \textit{tel que} \quad (\lambda I - A) : D(A) \to X \quad \textit{est bijective}\}.$$

2. *Pour tout $\lambda \in \rho(A)$, la résolvante de A, notée $R(\lambda, A)$, est définie par :*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

D'après le théorème du graphe fermé (voir Théorème 1.10), pour tout $\lambda \in \rho(A)$, on a $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$.

Le théorème suivant montre que la résolvante $R(\lambda, A)$ est exactement la transformation de Laplace du semi-groupe $S(t)$.

Théorème 1.3 *([8], Théorème 1.10) Soit $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ un semi-groupe fortement continu défini sur X et soit*

$$\omega_0 = \inf\left\{\omega \textit{ tel qu'il existe } M_\omega \textit{ tel que } \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega e^{\omega t} \textit{ pour tout } \ t \geq 0\right\}.$$

Soit $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal, alors

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > \omega_0$, $\lambda \in \rho(A)$. C'est à dire*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \textit{ tel que } Re(\lambda) > \omega_0\} \subset \rho(A).$$

2. *Si $Re(\lambda) > \omega > \omega_0$, alors*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \quad \textit{pour tout} \ \ x \in X$$

et

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{Re(\lambda) - \omega}.$$

Maintenant, on utilise la notion de la résolvante pour répondre à la question précédente : Étant donné un opérateur linéaire $(A, D(A))$, peut-on construire un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ tel que $(A, D(A))$ soit son générateur infinitésimal ? La résponse est donnée par le théorème de Hille-Yosida suivant :

Théorème 1.4 ***(Hille-Yosida)*** *([8], Théorème 3.8) Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire défini sur un espace de Banach X et soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $M_\omega \geq 1$ deux constantes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur linéaire $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui satisfait*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \textit{pour tout} \ \ t \geq 0.$$

2. *A est fermé, $D(A)$ est dense dans X et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\|[(\lambda - \omega)R(\lambda, A)]^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega \quad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

3. *A est fermé, $D(A)$ est dense dans X et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\omega}{(Re(\lambda) - \omega)^n} \quad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

Le théorème de Hille -Yosida assure, sous certaines conditions, l'existence d'un semi-groupe fortement continu qui est, d'après le théorème 1.3, l'inverse de la transformation de Laplace de la résolvante $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Cependant, cet inverse n'existe pas toujours. Il existe seulement dans le cas des semi-groupes analytiques.

Définition 1.5 *([8], Définition 4.5) Soit $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ un semi-groupe fortement continu défini sur X. Soit $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors on définit*

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} \textit{ tel que } |arg\ \lambda| < \delta\} \setminus \ \{0\}.$$

On dit que $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un semi-groupe analytique s'il admet un prolongement à une application $(S(z))$ définie de $\Sigma_\delta \cup \{0\}$ vers $\mathcal{L}(X)$ et satisfait

1. *$S(0) = I_X$ et pour tout $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$, on a $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$.*
2. *L'application $z \longmapsto S(z)$ est analytique de Σ_δ vers X.*
3. *$\lim\limits_{\Sigma_{\delta'} \ni z \longrightarrow 0} S(z)x = x$ pour tout $x \in X$ et $0 < \delta' < \delta$.*

Si de plus $\|S(z)\|$ est bornée dans $\Sigma_{\delta'}$ pour tout $0 < \delta' < \delta$, alors on dit que $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ (oubien $(S(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$) est un semi-groupe analytique borné.

Les semi-groupes analytiques bornés sont caractérisés par leurs générateurs infinitésimals sectoriels $(A, D(A))$.

Définition 1.6 *([8], Définition 4.1) Un opérateur linéaire fermé $(A, D(A))$ défini sur X est dit sectoriel (d'angle δ) si :*

1. *Il existe $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ tel que le secteur :*

$$\Sigma_{\delta+\frac{\pi}{2}} := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \textit{ tel que } |arg\ \lambda| < \delta + \frac{\pi}{2}\right\} \setminus \{0\}.$$

   est contenu dans $\rho(A)$ et

2. *Pour tout $\varepsilon \in (0, \delta)$, il existe $M_\varepsilon \geq 1$ tel que :*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \quad \forall 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\delta+\frac{\pi}{2}-\varepsilon}.$$

La proposition suivante montre la relation entre les semi-groupes analytiques bornés et les opérateurs sectoriels.

Proposition 1.2 *([8], Théorème 4.6) Pour un opérateur $(A, D(A))$ défini sur X, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est sectoriel d'angle δ et de domaine $D(A)$ est dense dans X.*
2. *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné $(S(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$.*

Dans le chapitre suivant, pour simplifier les notations, nous allons supposer que $(-A, D(-A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$. Donc, nous pouvons définir les puissances fractionnaires $A^{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in [0,1]$ comme suit :

Définition 1.7 *[25] Soit $(-A, D(-A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ d'angle $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ et soit $0 \in \rho(A)$. Alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, la puissance fractionnaire $A^{-\alpha}$ de A est définie par :*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} S(t)dt. \tag{1.4}$$

Pour $\alpha = 0$, on pose $A^0 = I_X$.

Nous aurons besoin d'un coté des propriétés suivantes :

Lemme 1.1 *[6]*

1. *Pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'opérateur $A^{-\alpha}$ est uniformément borné, c'est à dire, il existe une constante C indépendante de α telle que :*

$$\|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C.$$

2. *Pour tout $\alpha \in [0,1]$, l'opérateur $A^{-\alpha}$ est fortement continu, c'est à dire :*

$$\lim_{\alpha\to 0} A^{-\alpha}x = x \quad \text{pour tout } x \in X.$$

De l'autre coté, nous aurons besoin de définir la puissance fractionnaire A^α pour tout $\alpha \in [0,1]$ comme suit :

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$$

où $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$ (l'ensemble image de $A^{-\alpha}$). Clairement $A^1 = A$.

L'espace $D(A^\alpha)$ muni de la norme

$$\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|_X \quad \text{pour tout } \; x \in D(A^\alpha)$$

est un espace de Banach. Nous allons noter $(D(A^\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ par X_α et nous allons utiliser les propriétés suivantes :

Théorème 1.5 *([25], Lemme 37.4) Soit $(-A, D(-A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ d'angle $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ et soit $0 \in \rho(A)$. Alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a :*

1. *A^α est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A^\alpha)$ dense dans X.*

2. *Pour tout* $x \in D(A^\alpha)$ *et tout* $t \geq 0$ *on a*

$$A^\alpha S(t)x = S(t)A^\alpha x.$$

De plus, $S(t)$ *est un semi-groupe analytique sur* $D(A^\alpha)$*.*

3. *Il existe une constante* M_α *telle que :*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X;D(A^\alpha))} = \|A^\alpha S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\alpha e^{-Bt}}{t^\alpha} \quad \text{pour tout} \;\; t > 0.$$

En particulier, si $0 < t \leq T < \infty$*, alors il existe une constante* M_α *telle que :*

$$\|A^\alpha S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\alpha}{t^\alpha}. \tag{1.5}$$

Et pour tout $\alpha \in [0,1]$ *et* $\beta \in [0,1]$ *tels que* $\alpha + \beta \in [0,1]$*, on a :*

4. $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ *sur* $D(A^\gamma)$ *où* $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha+\beta)$*.*

De plus si $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$*, alors*

5. $D(A^\alpha)$ *est dense dans* $D(A^\beta)$ *et l'injection* $D(A^\alpha) \mapsto D(A^\beta)$ *est continue. C'est à dire, il existe une constante c telle que*

$$\|x\|_\beta \leq c\,\|x\|_\alpha \quad \text{pour tout } x \in D(A^\alpha).$$

6. *Si de plus la résolvante de* A*,* $R(\lambda, A)$*, est compacte, alors l'injection* $D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta)$ *est compacte. C'est à dire, tout sous espace borné de* $D(A^\alpha)$ *est relativement compact dans* $D(A^\beta)$*.*

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [6, 8, 25].

1.2 Solutions classiques et intégrales

Supposons maintenant que $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, $(A, D(A))$ est un opérateur linéaire de domaine dense dans X et $x_0 \in X$ est fixé. Rappelons l'équation différentielle abstraite (1.1) :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $f: \; X \to X$ une fonction localement continue sur X.

Supposons dans la suite que $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$. Notre objectif est d'exprimer les solutions de l'équation (1.1) à l'aide du semi-groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$. Pour se faire, on doit d'abord définir ce qu'on veut dire par une solution de (1.1). On commence par la notion des *solutions classiques*.

Définition 1.8 *([6], Définition 3.1.1) Une fonction $x: \ [0;T] \to X$ est une solution classique de (1.1) définie sur $[0,T]$ avec $0 < T < \infty$ si x est continue sur $[0,T]$; continument différentiable sur $[0,T]$; $x(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$ et (1.1) est satisfaite sur tout l'intervalle $[0,T]$.*

$x(t)$ est une solution classique sur $[0,+\infty[$, si elle est classique sur $[0,T]$ pour tout $T \geq 0$.

Le résultat suivant exprime à l'aide du semi-groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ les solutions classiques de (1.1).

Lemme 1.2 *([6], Lemme 3.1.2) Supposons que $f \in C([0,T];X)$ et que $x(\cdot)$ est une solution classique de (1.1) définie sur $[0,T]$. Alors $Ax(\cdot)$ est un élément de $C([0,T];X)$ et la solution classique $x(\cdot)$ vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

Il est naturel de penser qu'une fonction qui vérifie (1.6) est toujours une solution classique. Cependant, ceci n'est pas toujours vrai.

Théorème 1.6 *([6], Théorème 3.1.3) Supposons que $f \in C^1([0,T];X)$ et que $x_0 \in D(A)$, alors une fonction $x(\cdot)$ qui vérifie (1.6) est continument différentiable sur $[0,T]$ et elle est la solution classique unique de (1.1).*

Les conditions du Théorème 1.6 sont très fortes en applications. En fait, en général, on ne peut pas toujours supposer que $f \in C^1([0,T];X)$ ou que $x_0 \in D(A)$. C'est pour ça, on introduit une autre notion de solutions qui est moins forte que la notion des solutions classiques. On parle des *solutions intégrales.*

Définition 1.9 *([6], Définition 3.1.4) Supposons que $f \in L^p([0,T];X)$, $p \geq 1$, et que $x_0 \in X$, alors une fonction $x(\cdot)$ qui vérifie (1.6) est dite une solution intégrale de l'équation (1.1).*

Notons qu'une fonction qui vérifie (1.6) n'est pas nécessairement de classe C^1. Elle est cependant continue :

Lemme 1.3 *([6], Lemme 3.1.5) Supposons que $f \in L^p([0,T];X)$, $p \geq 1$, et que $x_0 \in X$, alors la solution intégrale $x(\cdot)$ définie par (1.6) est continue sur $[0,T]$.*

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la notion des solutions intégrales. Notons que ce type de solutions est largement suffisant en applications. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à ([6], chapter 3).

1.3 Contrôlabilité exacte et approchée

Dans cette section, nous introduirons de manière générale les notions de contrôlabilité exacte et approchée pour les systèmes paraboliques.

Soient $(X, \|\cdot\|)$ et $(U, \|\cdot\|_U)$ deux espaces de Banach. Soient $(A, D(A))$ un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $B : U \to X$ un opérateur linéaire borné. Considérons le système linéaire contrôlé :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

où $x_0 \in X$ est la condition initiale et $u \in U$ est le contrôle grâce à lui on veut agir sur l'état $x(\cdot)$ du système pour l'envoyer de l'état initial x_0 vers un certain état final x^T prédéfini dans un temps fini $T > 0$.

Définition 1.10 *[6] Le système (1.7) est dit exactement contrôlable sur $[0, T]$, pour un temps fini $T > 0$, si pour tout état initial $x_0 \in X$ et tout état final $x^T \in X$, il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ tel que :*

$$x(T; x_0, u) = x^T.$$

Ici $x(T, x_0, u)$ est la solution intégrale du système (1.7) correspondante à la condition initiale x_0 et au contrôle u.

On peut aussi définir la contrôlabilité exacte en utilisant l'ensemble accessible $R(T, x_0)$.

Définition 1.11 *([27], Définition 2.1) L'ensemble accessible $R(T, x_0)$ est l'ensemble de toutes les extrémités des solutions du système (1.7) atteintes au temps final donné $T > 0$ l'orsqu'on fait varier le contrôle $u(\cdot)$ dans U. C'est à dire*

$$R(T, x_0) := \left\{ x(T, x_0, u) \ \mid u \in L^2(0, T; U) \right\}.$$

En utilisant la notion de l'ensemble accessible, la contrôlabilité exacte est définie comme suit :

Définition 1.12 *([27], Définition 2.2) Le système (1.7) est dit exactement contrôlable sur $[0, T]$, pour un temps fini $T > 0$, si pour tout état initial $x_0 \in X$, l'ensemble accessible $R(T, x_0)$ est exactement égale à X. C'est à dire,*

$$R(T, x_0) = X.$$

Cette définition correspond à la définition de la contrôlabilité en dimension finie. Cependant, cette condition est rarement vérifiée quand l'espace d'état X est de dimension infinie. Par exemple, le système linéaire (1.7) n'est pas exactement contrôlable quelque soit le temps $T < \infty$ si

1. l'espace de contrôle $U = \mathbb{C}^m$ pour certain $m \in \mathbb{N}$ et l'opérateur B est linéaire borné de $\mathbb{C}^m$ vers X (Voir [6], Théorème 4.1.5).
2. l'opérateur B ou le semi-groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est compact (Voir [28], Théorème 2.2 oubien [29], Théorème 2.2).

3. l'opérateur A est indépendant du temps et auto-adjoint sur X, l'espace de contrôle est $U = X$ et l'opérateur de contrôle B est l'identité sur X (Voir [30]).

Notons qu'on peut trouver d'autres résultats dans les livres et les articles scientifiques existants sur la théorie de contrôlabilité en dimension infinie. Pour cette raison, les mathématiciens ont introduit une autre notion de contrôlabilité qui est moins forte que la contrôlabilité exacte mais largement suffisante en applications.

Définition 1.13 *[6] Le système (1.7) est dit approximativement contrôlable sur $[0, T]$, pour un temps fini $T > 0$, si pour tout état initial $x_0 \in X$ et tout état final $x^T \in X$, il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\left\|x(T, \phi, u) - x^T\right\| \leq \epsilon.$$

Autrement dit,

Définition 1.14 *([6], Définition 4.1.17) Le système (1.7) est approximativement contrôlable sur $[0, T]$, pour un temps fini $T > 0$, si pour tout état initial $x_0 \in X$, l'ensemble accessible $R(T, x_0)$ est dense dans X. C'est à dire,*

$$\overline{R(T, x_0)} = X.$$

En 1999, Bashirov et Mahmudov [2] ont donné quelques conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité approchée du système linéaire (1.7). Ils ont commencé par introduire l'opérateur (dit de contrôlabilité) suivant :

$$\Gamma_T = \int_0^T S(T-s)BB^*S^*(T-s)ds$$

où B^* et S^* sont les opérateurs adjoints de B et de $S(\cdot)$ respectivement. Puisque Γ_T est un opérateur positif, alors la résolvante de $-\Gamma_T$ est un opérateur linéaire borné bien défini pour tout $\lambda > 0$ comme suit :

$$R(\lambda, -\Gamma_T) = (\lambda I + \Gamma_T)^{-1}.$$

Bashirov et Mahmudov ont montré que sous l'hypothèse

(H_0) Pour tout $x \in X$, $\lambda R(\lambda, -\Gamma_T)x \to 0 \quad$ quand $\quad \lambda \to 0^+$,

le système linéaire (1.7) est approximativement contrôlable sur $[0, T]$:

Théorème 1.7 *([2], Théorème 2) Pour tout $0 < T < \infty$, les asserssions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le système linéaire (1.7) est approximativement contrôlable sur $[0, T]$.*
2. *Si $B^*S^*(t)y = 0$ pour tout $t \in [0, T]$, alors $y = 0$.*
3. *La condition (H_0) est vérifiée.*

Depuis lors, les mathématiciens ont utilisé la condition (H_0), c'est à dire la contrôlabilité approchée des systèmes linéaires, pour démontrer celle des systèmes non linéaires. Le Théorème 1.7 a été adapté aux systèmes linéaires avec retard fini ou infini, systèmes d'équations intégro-différentielles, systèmes fractionnaires, etc. Dans notre manuscrit, on utilise la condition (H_0) pour démontrer la contrôlabilité approchée d'un système semi-linéaire de type neutre avec retard fini. Les détails se trouvent dans le chapitre suivant.

1.4 Outils d'analyse

Dans cette section, nous regroupons toutes les définitions de base et les théorèmes fondamantaux de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans le chapitre suivant.

Soit T un opérateur linéaire d'un espace de Banach X dans un autre espace de Banach Y.

Définition 1.15 (Ensemble relativement compact) *Une partie C d'un espace de Banach séparé est relativement compact si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de C par des parties de diamètre inférieur ou égal à ϵ.*

Définition 1.16 (Opérateur compact) *T est compact s'il transforme tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact de Y.*

Remarque 1.1 *Tout opérateur linéaire compact est borné.*

Définition 1.17 (Opérateur complètement continu) *Un opérateur est dit complètement continu si et seulement s'il est compact et continu.*

Définition 1.18 (Opérateur contractant) *T est contractant s'il existe une constante $c < 1$ telle que :*

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Les définitions précédentes nous aident à comprendre le théorème du point fixe de Krasnoselskii qui sera utilisé dans le chapitre suivant pour montrer l'existence d'une solution intégrale du système (3).

Théorème 1.8 (Krasnoselskii [31]) *Soit X un espace de Banach et B un sous-ensemble non vide de X fermé borné et convexe. Soient P_1 et P_2 deux applications de B dans X telles que :*

1. *Pour tout $(x, y) \in B$, on a $P_1x + P_2y \in B$.*
2. *P_1 est une contraction de X vers X.*
3. *P_2 est complètement continue.*

Alors il existe au moins un $x \in B$ tel que $P_1x + P_2x = x$.

D'après les définitions précédentes, pour démontrer que l'opérateur P_2 est complètement continue, il suffit de montrer que l'ensemble $\{P_2x, \quad x \in B\}$ (avec B un borné de X) est relativement compact. Pour ceci, on va utiliser le théorème de Ascoli-Arzela en dimension infinie. Avant de citer le théorème de Ascoli-Arzela, on rappelle les définitions suivantes :

Définition 1.19 (Fonctions uniformément bornées) *On dit qu'un ensemble de fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a,b];X)$ est uniformément borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $x(\cdot)$ de M et pour tout $t \in [a,b]$ l'on ait $\|x(t)\| \leq c$.*

Définition 1.20 (Fonctions équicontinues) *On dit qu'un ensemble de fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a,b];X)$ est équicontinu si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ dépendant uniquement de ϵ tel que pour tous $t_1, t_2 \in [a,b]$ satisfaisant l'inégalité $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour toute fonction $x(\cdot)$ de M l'on ait $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \epsilon$.*

Maintenant, on énnonce le théorème de Ascoli-Arzela.

Théorème 1.9 (Ascoli-Arzela) *Soit P_2 l'opérateur cité dans le Théorème 1.8. Si*

1. *l'ensemble $\{P_2x, \quad x \in B\}$ est uniformément borné et équicontinu et*
2. *l'ensemble $\{(P_2x)(t), \quad x \in B, \quad t \in [a,b]\}$ est relativement compact,*

alors : $\{P_2x, \quad x \in B\}$ est relativement compact.

L'unicité de la solution sera démontrée à l'aide du Lemme de Grönwall.

Lemme 1.4 (Lemme de Grönwall) *Soient φ, ψ et x trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité :*

$$x(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)x(s)ds \quad \text{pour tout} \;\; t \in [a,b].$$

Alors, pour tout $t \in [a,b]$,

$$x(t) \leq \varphi(t) \exp\left(\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

La discussion de ces résultats nécessite aussi les théorèmes suivants :

Théorème 1.10 (Théorème du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach et soit f une application linéaire de E dans F. Si le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.*

Théorème 1.11 (Théorème de convergence dominé de Lebesgue) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré (E, A, μ), à valeurs réelles ou complexes, telle que :*

- *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* E *vers une fonction* f.
- *Il existe une fonction intégrable* g *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors f *est intégrable et :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Les démonstrations de tout les résultats précédents se trouvent dans les livres de l'analyse fonctionnelle comme [3] par exemple.

Chapitre 2

Contrôlabilité approchée d'une équation non linéaire à retard fini

Dans ce chapitre, nous considérons un système semi-linéaire à terme neutre et à retard fini. D'abord, en utilisant la théorie de semi-groupes, nous définissons les solutions intégrales du système considéré. Ensuite, en utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii, nous vérifions l'existence d'au moins une solution intégrale. Après, en appliquant le lemme de Grönwall, nous vérifions que cette solution est unique. Enfin, nous démontrons le résultat principal de ce chapitre sur la contrôlabilité approchée du système semi-linéaire considéré. L'hypothèse principale dans cet étude est la contrôlabilité approchée de la partie linéaire associé (voir (H_0)).

2.1 Existence et unicité de solution intégrale

Nous rappelons que le système considéré dans notre étude est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(x(t) + F(t, x_t)\Big) = -Ax(t) + G(t, x_t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

où la fonction d'état $x(\cdot) \in X$ et le contrôle $u(\cdot) \in U$ avec $(X; \|\cdot\|)$ et $(U; \|\cdot\|_U)$ sont deux espaces de Hilbert. Ici

(H_1) $(-A, D(-A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ défini sur X avec $0 \in \rho(A)$.

Soit $C = C([0, T]; X)$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans X muni de la norme :

$$\|x\|_C = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t)\|, \quad x \in C.$$

De même, soit $C_\alpha = C([-r, 0]; X_\alpha)$ l'ensemble des fonctions continues de $[-r, 0]$ à valeurs dans X_α muni de la norme :

$$\|x\|_{C_\alpha} = \sup_{\theta\in[-r,0]} \|x(\theta)\|_\alpha, \quad x \in C_\alpha.$$

Pour plus de détails sur l'espace X_α et la norme $\|\cdot\|_\alpha$ voir le chapitre précédent.

Comme nous l'avons précisé précédemment, montrer que le système (2.1) est approximativement contrôlable en temps T revient à montrer que pour toute condition initiale $\phi \in C_\alpha$ et tout état final $x^T \in X$, il existe un contrôle u tel que la solution intégrale du système (2.1) associée à ϕ et u converge vers x^T dans X quand t tend vers T.

Définition 2.1 *Soit $\phi \in C_\alpha$ une condition initiale et $u \in U$ une fonction contrôle données. Une fonction $x(\cdot;\phi,u)$, simplement notée $x(\cdot)$, est dite une solution intégrale du Système (1) si $x(\cdot) \in C([-r,T];X_\alpha)$ et*

$$x(t) = \begin{cases} S(t)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) - F(t,x_t) + \int_0^t AS(t-s)F(s,x_s)ds \\ + \int_0^t S(t-s)\Big(G(s,x_s) + Bu(s)\Big)ds, \qquad t \in [0,T], \\ \phi(t), \qquad t \in [-r,0]. \end{cases}$$

Pour montrer la contrôlabilité approchée du système semi-linéaire (2.1), on suppose que les hypothèses suivantes, ainsi que (H_0) et (H_1), sont toutes vérifiées :

(H_2) L'opérateur B est linéaire borné de U vers X, c'est à dire, $B \in \mathcal{L}(U;X)$ avec $\|B\| = N$.

(H_3) Pour tout $\alpha \in (0,1)$, il existe un $\beta \in (0,1)$ tel que $0 < \alpha + \beta \leq 1$. Ainsi, la fonction $F : [0,T] \times C_\alpha \to X_{\alpha+\beta}$ est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est à dire, il existe une constante $L_1 > 0$ telle que :

$$\|F(t_1,\phi_1) - F(t_2,\phi_2)\|_{\alpha+\beta} \leq L_1 \|\phi_1 - \phi_2\|_{C_\alpha}$$

pour tout $\phi_1, \phi_2 \in C_\alpha$. De plus, il existe une fonction positive $f(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\sup_{\|\phi\|_{C_\alpha} \leq \rho} \|F(t,\phi)\|_{\alpha+\beta} \leq f(\rho).$$

(H_4) La fonction $G : [0,T] \times C_\alpha \to X$ est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est à dire, il existe une constante $L_2 > 0$ telle que :

$$\|G(t,\phi_1) - G(t,\phi_2)\| \leq L_2 \|\phi_1 - \phi_2\|_{C_\alpha}$$

pour tout $\phi_1, \phi_2 \in C_\alpha$. De plus, il existe une fonction positive $g(\cdot) \in Ł^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\sup_{\|\phi\|_{C_\alpha} \leq \rho} \|G(t,\phi)\| \leq g(\rho).$$

Maintenant pour toute condition initiale $\phi \in C_\alpha$ et tout état final $x^T \in X$, on définit le contrôle $u^\lambda(\cdot)$ pour $\lambda \in (0,1]$ comme suit :

$$\begin{aligned} u^\lambda(t) :=& B^*S^*(T-s)R(\lambda,-\Gamma_T)\Bigg[x^T - S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) + F(T,x_T) \\ & - \int_0^T AS(T-\tau)F(\tau,x_\tau)d\tau - \int_0^T S(T-\tau)G(\tau,x_\tau)d\tau\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En utilisant ce contrôle, on définit un opérateur P^λ sur $C([-r,T];X_\alpha)$ par :

$$\left(P^\lambda x\right)(t) = \begin{cases} S(t)\Big(\phi(0)+F(0,\phi)\Big) - F(t,x_t) + \int_0^t AS(t-s)F(s,x_s)ds \\ +\int_0^t S(t-s)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)ds, \quad t\in[0,T], \\ \phi(t), \quad t\in[-r,0]. \end{cases} \tag{2.3}$$

En remplaçant (2.2) dans (2.3) on obtient, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} \left(P^\lambda x\right)(t) =& S(t)\Big(\phi(0)+F(0,\phi)\Big) - F(t,x_t) + \int_0^t AS(t-s)F(s,x_s)ds \\ &+ \int_0^t S(t-s)\Bigg\{BB^*S^*(T-s)R(\lambda,-\Gamma_T)\Bigg[x^T - S(T)\Big(\phi(0)+F(0,\phi)\Big) \\ &+ F(T,x_T) - \int_0^T AS(T-\tau)F(\tau,x_\tau)d\tau - \int_0^T S(T-\tau)G(\tau,x_\tau)d\tau\Bigg] \\ &+ G(s,x_s)\Bigg\}ds. \end{aligned}$$

D'après la définition 2.1, si l'opérateur P^λ admet un point fixe dans $C([-r,T];X_\alpha)$, alors ce point fixe est une solution intégrale du système (2.1). Pour démontrer ce résultat, on utilise le théorème du point fixe de Krasnoselskii (voir Théorème 1.8). Soit alors

$$D(\rho) := \Big\{x\in C([-r,T];X_\alpha) \;\Big|\; x_0=\phi \;\text{ et }\; \|x_t\|_{C_\alpha}\le\rho \;\text{ pour tout }\; t\in[0,T]\Big\}.$$

L'ensemble $D(\rho)$ est un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de l'espace de Banach $C([-r,T];X_\alpha)$.

On commence par montrer que P^λ est continu de $[-r,T]$ à X_α et que l'image par P^λ de tout ensemble borné est aussi bornée :

Lemme 2.1 *Soient $\phi\in C_\alpha$ et $x^T\in X$ fixés. Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_4)$ sont toutes vérifiées. Donc $P^\lambda\in C([-r,T];X_\alpha)$. Supposons de plus que pour tout $\lambda\in(0,1]$*

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{\rho\to+\infty}}\Bigg\{\rho - \Bigg[\Bigg(&\left\|A^{-\beta}\right\| + \frac{M_{1-\beta}T^\beta}{\beta} + \frac{MM_\alpha N^2T^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha)}\left\|A^{-(\alpha+\beta)}\right\| \\ &+ \frac{MM_\alpha M_{1-(\alpha+\beta)}N^2T^{1+\beta}}{\lambda(1-\alpha)(\alpha+\beta)}\Bigg)f(\rho) \\ &+ \frac{M^2M_\alpha N^2T^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha)}Tg(\rho) + \frac{M_\alpha T^{1-\alpha}}{1-\alpha}g(\rho)\Bigg]\Bigg\} = +\infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Donc, il existe une constante positive $\rho_0=\rho_0(\lambda)$ telle que :

$$P^\lambda\left(D(\rho_0)\right)\subset D(\rho_0).$$

Preuve du Lemme 2.1

On commence par remarquer que $\left(P^\lambda x\right)_0 = \phi$ et on vérifie que pour certain $\rho_0 > 0$ et pour tout $x \in (D(\rho_0))$

$$\left\|\left(P^\lambda x\right)_t\right\|_{C_\alpha} \leq \rho_0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T].$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\left\|\left(P^\lambda x\right)_t\right\|_{C_\alpha} &= \sup_{\theta \in [-r,0]} \left\|\left(P^\lambda x\right)_t(\theta)\right\|_\alpha \\
&= \sup_{\theta \in [-r,0]} \left\|\left(P^\lambda x\right)(t+\theta)\right\|_\alpha \\
&\leq \sup_{s \in [-r,T]} \left\|\left(P^\lambda x\right)(s)\right\|_\alpha,
\end{aligned}$$

et que pour $t = 0$, on a :

$$\left\|\left(P^\lambda x\right)_0\right\|_{C_\alpha} = \|\phi\|_{C_\alpha} = \|x_0\|_{C_\alpha} \leq \rho_0$$

par hypothèse. Soit alors $t \in (0, T]$. Supposons par l'absurde qu'il existe un certain $t_\rho \in (0, T]$ tel que $\left\|\left(P^\lambda x\right)(t_\rho)\right\|_\alpha > \rho$ pour tout $\rho > 0$. Donc par définition de l'opérateur P^λ on a :

$$\begin{aligned}
\rho <& \left\|\left(P^\lambda x\right)(t_\rho)\right\|_\alpha \\
=& \left\| S(t)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) - F(t_\rho, x_{t_\rho}) + \int_0^{t_\rho} AS(t_\rho - s)F(s, x_s)ds \right. \\
&\left. + \int_0^{t_\rho} S(t_\rho - s)\Big(Bu^\lambda(s) + G(s, x_s)\Big)ds \right\|_\alpha \\
\leq& \|S(t)\| \, \|\phi(0) + F(0,\phi)\|_\alpha + \left\|F(t_\rho, x_{t_\rho})\right\|_\alpha + \int_0^{t_\rho} \|AS(t_\rho - s)\| \, \|F(s, x_s)\|_\alpha \, ds \\
&+ \int_0^{t_\rho} \|S(t_\rho - s)\|_\alpha \Big(\|B\| \left\|u^\lambda\right\| + \|G(s, x_s)\| \Big) ds \\
\leq& \|S(t)\| \, \|\phi(0) + F(0,\phi)\|_\alpha + \left\|A^{-\beta}\right\| \left\|F(t_\rho, x_{t_\rho})\right\|_{\alpha+\beta} \\
&+ \int_0^{t_\rho} \left\|A^{1-\beta}S(t_\rho - s)\right\| \, \|F(s, x_s)\|_{\alpha+\beta} \, ds \\
&+ \int_0^{t_\rho} \|S(t_\rho - s)\|_\alpha \Big(\|B\| \left\|u^\lambda\right\| + g(\rho) \Big) ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses $(H_2)-(H_4)$ et les propriétés (1.3) et (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho \leq& M \|\phi(0) + F(0,\phi)\|_\alpha + \left(\left\|A^{-\beta}\right\| + \frac{M_{1-\beta}T^\beta}{\beta} \right) f(\rho) \\
&+ \frac{M_\alpha T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big(N \left\|u^\lambda\right\| + g(\rho) \Big),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

où u^λ est le contrôle correspondant à $x(\cdot)$ donné par (2.2) et majoré (par les même arguments) par :

$$\begin{aligned}\left\|u^\lambda(t)\right\| =& \Bigg\| B^*S^*(T-s)R(\lambda,-\Gamma_T)\Bigg[x^T - S(T)\Big(\phi(0)+F(0,\phi)\Big) + F(T,x_T) \\ & - \int_0^T AS(T-\tau)F(\tau,x_\tau)d\tau - \int_0^T S(T-\tau)G(\tau,x_\tau)d\tau\Bigg]\Bigg\| \\ \leq & \frac{1}{\lambda}MN\Bigg[\left\|x^T\right\| + M\left\|\phi(0)+F(0,\phi)\right\| + \Bigg(\left\|A^{-(\alpha+\beta)}\right\| \\ & + \frac{M_{1-(\alpha+\beta)}T^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\Bigg)f(\rho) + MTg(\rho)\Bigg].\end{aligned} \tag{2.6}$$

Notons qu'ici on a supposé par hypothèse (H_0) que pour tout $x \in X$

$$\|R(\lambda,-\Gamma_T)x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

Donc, en remplaçant (2.6) dans (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\rho \leq & M\left\|\phi(0)+F(0,\phi)\right\|_\alpha + \left(\left\|A^{-\beta}\right\| + \frac{M_{1-\beta}T^\beta}{\beta}\right)f(\rho) \\ & + \frac{M_\alpha T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg\{\frac{1}{\lambda}MN^2\Bigg[\left\|x^T\right\| + M\left\|\phi(0)+F(0;\phi)\right\| \\ & + \Bigg(\left\|A^{-(\alpha+\beta)}\right\| + \frac{M_{1-(\alpha+\beta)}T^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\Bigg)f(\rho) + MTg(\rho)\Bigg] + g(\rho)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\rho - & \Bigg[\Bigg(\left\|A^{-\beta}\right\| + \frac{M_{1-\beta}T^\beta}{\beta} + \frac{MM_\alpha N^2T^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha)}\left\|A^{-(\alpha+\beta)}\right\| \\ & + \frac{MM_\alpha M_{1-(\alpha+\beta)}N^2T^{1+\beta}}{\lambda(1-\alpha)(\alpha+\beta)}\Bigg)f(\rho) + \frac{M^2M_\alpha N^2T^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha)}Tg(\rho) + \frac{M_\alpha T^{1-\alpha}}{1-\alpha}g(\rho)\Bigg] \\ < & M\left\|\phi(0)+F(0;\phi)\right\|_\alpha + \frac{MM_\alpha N^2T^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha)}\Big[\left\|x^T\right\| + M\left\|\phi(0)+F(0,\phi)\right\|\Big].\end{aligned}$$

C'est une contradiction avec l'hypothèse (2.4). Donc il existe un certain $\rho_0 = \rho_0(\lambda) > 0$ (suffisamment grand) tel que

$$\left\|\left(P^\lambda x\right)_t\right\|_{C_\alpha} \leq \rho_0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T].$$

Il nous reste à montrer que P^λ est continue dans $D(\rho_0)$. Pour ceci, il faut vérifier que pour tous x^n et x dans $D(\rho_0)$ tels que $x^n \to x$ quand $n \to +\infty$, on a :

$$\left\| \left(P^\lambda x^n\right)(t) - \left(P^\lambda x\right)(t) \right\|_\alpha \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

pour tout $t \in [-r, T]$. Remarquons que, pour $t \in [-r, 0]$, on a :

$$\left\| \left(P^\lambda x^n\right)(t) - \left(P^\lambda x\right)(t) \right\|_\alpha = \|\phi(t) - \phi(t)\|_\alpha = 0.$$

Soit alors $t \in (0, T]$. Comme $x^n \to x$ dans $D(\rho_0)$ quand $n \to +\infty$, alors

$$\sup_{-r \le \nu \le T} \left\| A^\alpha \Big(x^n(\nu) - x(\nu) \Big) \right\| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc, pour tout $s \in [0, t]$,

$$\begin{aligned}
\|x_s^n - x_s\|_{C_\alpha} &= \sup_{-r \le \theta \le 0} \left\| A^\alpha \Big(x^n(s+\theta) - x(s+\theta) \Big) \right\| \\
&\le \sup_{-r \le \nu \le T} \left\| A^\alpha \Big(x^n(\nu) - x(\nu) \Big) \right\| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, par hypothèses (H_3) et (H_4) ($F(t,\cdot)$ et $G(t,\cdot)$ sont Lipschitziennes), on peut vérifier facilement que pour tout $s \in [0, t]$:

$$\begin{array}{lcl}
F(s, x_s^n) & \to & F(s, x_s) \ \text{ dans } \ X_{\alpha+\beta} \ \text{ quand } \ n \to +\infty \quad \text{et} \\
G(s, x_s^n) & \to & G(s, x_s) \ \text{ dans } \ X \ \text{ quand } \ n \to +\infty.
\end{array}$$

Donc, par définition de u^λ, on a :

$$u_n^\lambda(s) \to u^\lambda(s) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

où u_n^λ et u^λ sont les contrôles correspondants à x_n et x respectivement.

D'autre part, par définition de P^λ et par utilisation de (H_2) et (1.5) on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \left(P^\lambda x^n\right)(t) - \left(P^\lambda x\right)(t) \right\|_\alpha &\le \left\| A^{-\beta} \right\| \ \|F(s, x_s^n) - F(s, x_s)\|_{\alpha+\beta} \\
&\quad + \int_0^t \left\| A^{1-\beta} S(t-s) \right\| \ \|F(s, x_s^n) - F(s, x_s)\|_{\alpha+\beta} \, ds \\
&\quad + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \ \|B\| \ \|u^n(s) - u(s)\| \, ds \\
&\quad + \int_0^t \|A^\alpha S(t-s)\| \ \|G(s, x_s^n) - G(s, x_s)\| \, ds \\
&\le \left\| A^{-\beta} \right\| \ \|F(s, x_s^n) - F(s, x_s)\|_{\alpha+\beta} \\
&\quad + \frac{M_{1-\beta} T^\beta}{\beta} \int_0^t \|F(s, x_s^n) - F(s, x_s)\|_{\alpha+\beta} \, ds \\
&\quad + \frac{M_\alpha T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg(N \int_0^t \|u^n(s) - u(s)\| \, ds \\
&\quad + \int_0^t \|G(s, y_s^n) - G(s, y_s)\| \, ds \Bigg).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Notons que les mêmes arguments que (2.7) nous donne :

$$\begin{aligned}\left\|\left(P^{\lambda}x^{n}\right)(t)-\left(P^{\lambda}x\right)(t)\right\|_{\alpha} \leq & 2\left(\left\|A^{-\beta}\right\|+\frac{M_{1-\beta}T^{\beta}}{\beta}\right)f(\rho)+\frac{2\ M_{\alpha}T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ & \left\{\frac{1}{\lambda}MN^{2}\left[\ \left\|x^{T}\right\|+M\left\|\phi(0)+F(0,\phi)\right\|\right.\right. \\ & +\left(\ \left\|A^{-(\alpha+\beta)}\right\|+\frac{M_{1-(\alpha+\beta)}T^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\right)f(\rho) \\ & \left.\left.+MTg(\rho)\right]+g(\rho)\right\}<\infty.\end{aligned}$$

Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur (2.8) (voir Théorème 1.11). Ceci donne :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left\|\left(P^{\lambda}x^{n}\right)(t)-\left(P^{\lambda}x\right)(t)\right\|_{\alpha} \leq & \left\|A^{-\beta}\right\|\ \lim_{n\to+\infty}\left\|F(s,x_{s}^{n})-F(s,x_{s})\right\|_{\alpha+\beta} \\ & +\frac{M_{1-\beta}T^{\beta}}{\beta}\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{t}\left\|F(s,x_{s}^{n})-F(s,x_{s})\right\|_{\alpha+\beta}ds \\ & +\frac{M_{\alpha}T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(N\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{t}\left\|u^{n}(s)-u(s)\right\|ds\right. \\ & \left.+\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{t}\left\|G(s,x_{s}^{n})-G(s,x_{s})\right\|ds\right) \\ = & \left\|A^{-\beta}\right\|\ \lim_{n\to+\infty}\left\|F(s,x_{s}^{n})-F(s,x_{s})\right\|_{\alpha+\beta} \\ & +\frac{M_{1-\beta}T^{\beta}}{\beta}\int_{0}^{t}\lim_{n\to+\infty}\left\|F(s,x_{s}^{n})-F(s,x_{s})\right\|_{\alpha+\beta}ds \\ & +\frac{M_{\alpha}T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(N\int_{0}^{t}\lim_{n\to+\infty}\left\|u^{n}(s)-u(s)\right\|ds\right. \\ & \left.+\int_{0}^{t}\lim_{n\to+\infty}\left\|G(s,x_{s}^{n})-G(s,x_{s})\right\|ds\right) \\ = & 0.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t\in(0,T]$,

$$\left\|\left(P^{\lambda}x^{n}\right)(t)-\left(P^{\lambda}x\right)(t)\right\|_{\alpha}\to 0 \quad \text{quand} \quad n\to+\infty.$$

La preuve est maintenant complète.

Dans ce qui suit, on divise l'opérateur P^{λ} on deux opérateurs P_1^{λ} et P_2^{λ} tels que :

$$\left(P_1^{\lambda}x\right)(t)=\begin{cases} S(t)F(0,\phi)-F(t,x_t)+\int_0^t AS(t-s)F(s,x_s)ds, & t\in[0,T], \\ 0, \quad t\in[-r,0], & \end{cases}$$

et

$$\left(P_2^\lambda x\right)(t) = \begin{cases} S(t)\phi(0) + \int_0^t S(t-s)\Big(Bu(s) + G(s,x_s)\Big)ds, & t \in [0,T], \\ \phi(t), \quad t \in [-r,0]. \end{cases}$$

Dans le lemme suivant on vérifit que P_1^λ est contractant.

Lemme 2.2 *Soient $\phi \in C_\alpha$ et $x^T \in X$ fixés. Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_3) sont vérifiées. Supposons de plus que*

$$L_0 := L_1 \left(\left\| A^{-\beta} \right\| + \frac{M_{1-\beta} T^\beta}{\beta} \right) < 1. \tag{2.9}$$

Alors l'opérateur P_1^λ est une contraction sur $C([-r,T];X_\alpha)$.

Preuve du Lemme 2.2

Soient $x_1, x_2 \in C([-r,T];X_\alpha)$. Remarquons que pour $t \in [-r,0]$, on a :

$$\left\| \left(P_1^\lambda x_1\right)(t) - \left(P_1^\lambda x_2\right)(t) \right\|_\alpha = 0.$$

Soit alors $t \in [0,T]$ fixé. Par définition de P_1^λ, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \left(P_1^\lambda x_1\right)(t) - \left(P_1^\lambda x_2\right)(t) \right\|_\alpha &\leq \| F(t,x_{1,t}) - F(t,x_{2,t}) \|_\alpha \\ &\quad + \left\| \int_0^t AS(t-s)\Big(F(s,x_{1,s}) - F(s,x_{2,s})\Big)ds \right\|_\alpha \\ &\leq \left\| A^{-\beta} \right\| \| F(t,x_{1,t}) - F(t,x_{2,t}) \|_{\alpha+\beta} \\ &\quad + \int_0^t A^{1-\beta} S(t-s) \| F(s,x_{1,s}) - F(s,x_{2,s}) \|_{\alpha+\beta} \, ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_3) et la propriété (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \left(P_1^\lambda x_1\right)(t) - \left(P_1^\lambda x_2\right)(t) \right\|_\alpha &\leq \left\| A^{-\beta} \right\| L_1 \| x_{1,t} - x_{2,t} \|_{C_\alpha} \\ &\quad + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}\ L_1}{(t-s)^{1-\beta}} \| x_{1,t} - x_{2,t} \|_{C_\alpha} \, ds \\ &\leq L_1 \left(\left\| A^{-\beta} \right\| + \frac{M_{1-\beta} T^\beta}{\beta} \right) \sup_{-r \leq s \leq T} \| x_1(s) - x_2(s) \|_\alpha \\ &= L_0 \sup_{-r \leq s \leq T} \| x_1(s) - x_2(s) \|_\alpha . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sup_{-r \leq s \leq T} \left\| \left(P_1^\lambda x_1\right)(s) - (P_1^\lambda x_2)(s) \right\|_\alpha &= \sup_{0 \leq s \leq T} \left\| \left(P_1^\lambda x_1\right)(s) - (P_1^\lambda x_2)(s) \right\|_\alpha \\ &\leq L_0 \sup_{-r \leq s \leq T} \| x_1(s) - x_2(s) \|_\alpha . \end{aligned}$$

Ceci, d'après (2.9), montre que l'opérateur P_1^λ est une contraction dans l'espace $C([-r,T];X_\alpha)$.

Dans la suite, on vérifie que l'opérateur P_2^λ est complètement continu. On voit clairement, d'après le Lemme 2.1, que P_2^λ est une application continue de $[-r,T]$ à valeurs dans X_α. Donc, il nous reste à démontrer que P_2^λ est compact, c'est à dire, démontrer que l'ensemble $\left\{P_2^\lambda x,\ \ x \in D(\rho_0)\right\}$ est relativement compact. Pour ceci, on utilise le théorème de Ascoli-Arzela (voir Théorème 1.9). La preuve est très longue donc elle sera divisée en deux lemmes :

Lemme 2.3 *Soient $\phi \in C_\alpha$ et $x^T \in X$ fixés. Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_4)$ sont toutes vérifiées. Alors l'ensemble $\left\{P_2^\lambda x,\ \ x \in D(\rho_0)\right\}$ est uniformément borné et équicontinu sur $[-r,T]$.*

Preuve du Lemme 2.3

Notons que, d'après (2.7), l'ensemble $\left\{P_2^\lambda x,\ \ x \in D(\rho_0)\right\}$ est uniformément borné. Dans la suite, on démontre que $\left\{P_2^\lambda x,\ \ x \in D(\rho_0)\right\}$ est équicontinu sur $[-r,T]$, c'est à dire, on démontre que pour tout $-r \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

$$\left\|\left(P_2^\lambda x\right)(t_2) - \left(P_2^\lambda x\right)(t_1)\right\|_\alpha \to 0 \quad \text{quand} \quad t_2 \to t_1 \tag{2.10}$$

indépendamment de $x \in D(\rho_0)$.

Puisque $\left(P_2^\lambda x\right)(t) = \phi(t)$ quand $t \in [-r,0]$ et puisque ϕ est une fonction continue de $[-r,0]$ à valeurs dans X_α, il suffit de vérifier (2.10) dans $(0,T]$.

Soit alors $x \in D(\rho_0)$ arbitrairement choisi et soit $0 < t_1 \leq t_2 \leq T$. Par définition de l'opérateur P_2^λ, on a :

$$\begin{aligned}
I =& \left\|\left(P_2^\lambda x\right)(t_2) - \left(P_2^\lambda x\right)(t_1)\right\|_\alpha \\
=& \Bigg\| \phi(0)\Big(S(t_2)-S(t_1)\Big) + \int_0^{t_2} S(t_2-s)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)ds \\
& - \int_0^{t_1} S(t_1-s)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)ds \Bigg\|_\alpha \\
=& \Bigg\| \phi(0)\Big(S(t_2)-S(t_1)\Big) + \int_0^{t_1} S(t_2-s)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} S(t_2-s)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)ds - \int_0^{t_1} S(t_1-s)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)ds \Bigg\|_\alpha \\
\leq& \left\|S(t_2)-S(t_1)\right\| \left\|\phi(0)\right\|_\alpha + \int_0^{t_1} \left\|\Big(S(t_2-s)-S(t_1-s)\Big)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)\right\|_\alpha ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left\|S(t_2-s)\Big(Bu^\lambda(s)+G(s,x_s)\Big)\right\|_\alpha ds \\
=& I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Comme le semi-groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est fortement continu et compact (pour tout $t>0$), alors il est uniformément continu sur $(0,T]$. Ceci implique que

$$I_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad t_2 \to t_1$$

indépendamment de $x \in D(\rho_0)$. Soit maintenant $\epsilon > 0$ assez petit tel que :

$$I_2 = \int_0^{t_1-\epsilon} \left\| \Big(S(t_2-s) - S(t_1-s)\Big)\Big(Bu^\lambda(s) + G(s,x_s)\Big)ds \right\|_\alpha$$
$$+ \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} \left\| \Big(S(t_2-s) - S(t_1-s)\Big)\Big(Bu^\lambda(s) + G(s,x_s)\Big)ds \right\|_\alpha .$$

En appliquant la propriété de semi-groupe (voir Définition 1.1) on obtient :

$$I_2 = \|S(t_2-t_1+\epsilon) - S(\epsilon)\| \int_0^{t_1-\epsilon} \|A^\alpha S(t_1-s-\epsilon)\| \left\|Bu^\lambda(s) + G(s,x_s)\right\| ds$$
$$+ \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} \left\| A^\alpha \Big(S(t_2-s) - S(t_1-s)\Big)\Big(Bu^\lambda(s) + G(s,x_s)\Big) \right\| ds.$$

En utilisant les hypothèses (H_2) et (H_4), la propriété 1.5 et la majoration du contrôle (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 \leq & \left\| S(t_2-t_1+\epsilon) - S(\epsilon) \right\| \frac{M_\alpha}{1-\alpha}\Big(N\left\|u^\lambda\right\| + g(\rho_0)\Big)\Big(t_1-\epsilon\Big)^{1-\alpha} \\ & + \frac{M_\alpha}{1-\alpha}\Big(N\left\|u^\lambda\right\| + g(\rho_0)\Big)\Big((t_2-t_1)^{1-\alpha} - (t_2-t_1+\epsilon)^{1-\alpha} + \epsilon^{1-\alpha}\Big) \\ = & I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Il est claire que $I_{22} \to 0$ quand $t_2 \to t_1$ et puisque le semi-groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est uniformément continu sur $(0,T]$, I_{21} aussi converge vers zero quand $t_2 \to t_1$, tout indépendamment de $x \in D(\rho_0)$. De même, on a :

$$I_3 \leq \frac{M_\alpha}{1-\alpha}\Big(N\left\|u^\lambda\right\| + g(\rho_0)\Big)\Big(t_2-t_1\Big)^{1-\alpha}$$

qui clairement converge vers zero indépendamment de $x \in D(\rho_0)$ quand t_2 tend vers t_1. Ceci démontre (2.10) et termine la preuve du lemme.

Lemme 2.4 *Soient $\phi \in C_\alpha$ et $x^T \in X$ fixés. Supposons que les hypothèses $(H_0) - (H_4)$ sont toutes vérifiées. Supposons de plus que la résolvante de A, $R(\lambda, A)$, est compacte. Alors l'ensemble $\left\{\left(P_2^\lambda x\right)(t),\quad x \in D(\rho_0),\quad t \in [-r,T]\right\}$ est relativement compact dans X_α.*

Preuve du Lemme 2.4

D'une part, pour $t \in [-r,0]$, on a :

$$\left\{\left(P_2^\lambda x\right)(t),\quad x \in D(\rho_0),\quad t \in [-r,0]\right\} = \{\phi(t),\quad t \in [-r,0]\}.$$

Remarquons que cet ensemble (contenant un seul élément) est (relativement) compact.

D'autre part, pour $t \in [0,T]$, on a :

$$\left(P_2^\lambda x\right)(t) = S(t)\phi(0) + \int_0^t S(t-s)\Big(Bu^\lambda + G(s,x_s)\Big)ds$$

Comme précédement, nous remarquons que $\{S(t)\phi(0),\ \ t\in[0,T]\}$ est relativement compact. Donc, il nous reste à vérifier que

$$\left\{w(t):=\int_0^t S(t-s)\Big(Bu^\lambda+G(s,x_s)\Big)ds,\ \ x\in D(\rho_0),\ \ t\in[0,T]\right\}$$

est aussi relativement compact. Soit $\alpha'\in(0,1)$ tel que $\alpha'>\alpha$. Donc :

$$\|w(t)\|_{\alpha'}=\left\|\int_0^t S(t-s)\Big(Bu(s)+G(s,x_s)\Big)ds\right\|_{\alpha'}.$$

En appliquant les hypothèses (H_2) et (H_4) et en utilisant la propriété (1.5) et la majoration du contrôle (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_{\alpha'}\leq&\int_0^t\left\|A^{\alpha'}S(t-s)\right\|\Big(N\left\|u^\lambda\right\|+g(\rho_0)\Big)ds\\ \leq&\frac{M_{\alpha'}T^{1-\alpha'}}{1-\alpha'}\left[\frac{1}{\lambda}N^2M\Big(\left\|x^T\right\|+M\left\|\phi(0)\right\|+MTg(\rho_0)\Big)+g(\rho_0)\right]\\ <&\infty,\end{aligned}$$

ce qui implique que l'ensemble $\{w(t),\ \ x\in D(\rho_0),\ \ t\in[0,T]\}$ est borné dans l'espace $X_{\alpha'}$. Puisque $\alpha'>\alpha$ et puisque l'injection $X_{\alpha'}\hookrightarrow X_\alpha$ est compacte quand $R(\lambda,A)$ est compacte (voir Théorème 1.5), alors cet ensemble est relativement compact dans X_α. La preuve est maintenant complète.

On conclut, d'après le théorème de Ascoli-Arzela (voir Théorème 1.9) que l'ensemble $\left\{P_2^\lambda x,\ \ x\in D(\rho_0)\right\}$ est relativement compact dans $C([-r,T];X_\alpha)$. Ceci avec la définition 1.17 démontre que l'opérateur P_2^λ est complètement continu dans $D(\rho_0)$. En combinant ce résultat avec les lemmes 2.1 et 2.2, on voit clairement que l'opérateur P^λ admet un point fixe dans $D(\rho_0)\subset C([-r,T];X_\alpha)$ qui est bien une solution intégrale du système (2.1).

Théorème 2.1 *Soient $\phi\in C_\alpha$ et $x^T\in X$ fixés. Supposons que les hypothèses $(H_0)-(H_4)$ sont toutes vérifiées. Supposons de plus que le semi-groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et la résolvante $R(\lambda,A)$ sont compacts. Donc si les conditions (2.4) et (2.9) sont vérifiées, alors le système (2.1) admet une solution intégrale unique définie de $[-r,T]$ vers X_α.*

Preuve du Théorème 2.1

L'existence de solution est déjà démontrée auparavant. Il nous reste qu'à démontrer l'unicité de solution en utilisant le lemme de Grönwall (voir Lemme 1.4). Soit $\phi\in C_\alpha$ une condition initiale fixée et soient $x_1(\cdot,\phi,u)$ et $x_2(\cdot,\phi,u)$ deux solutions intégrales de (2.1) associées à la même condition initiale ϕ. Donc

$$x_1(\cdot,\phi,u^\lambda)=x_2(\cdot,\phi,u^\lambda)=\phi(\cdot)\quad\text{sur}\quad[-r,0].$$

Soit alors $t \in [0,T]$ fixé. D'après la Définition 2.1 on a :

$$\begin{aligned}
\left\|x_1(t,\phi,u^\lambda) - x_2(t,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha \leq & \left\|F(t,x_{1_t}) - F(t,x_{2_t})\right\|_\alpha \\
& + \int_0^t \left\|AS(t-s)\Big(F(s,x_{1_s}) - F(s,x_{2_s})\Big)\right\|_\alpha ds \\
& + \int_0^t \left\|S(t-s)\Big(G(s,x_{1_s}) - G(s,x_{2_s})\Big)\right\|_\alpha ds \\
\leq & \left\|A^{-\beta}\right\| \left\|F(t,x_{1_t}) - F(t,x_{2_t})\right\|_{\alpha+\beta} \\
& + \int_0^t \left\|A^{1-\beta}S(t-s)\right\| \left\|F(s,x_{1_s}) - F(s,x_{2_s})\right\|_{\alpha+\beta} ds \\
& + \int_0^t \left\|S(t-s)\right\|_\alpha \left\|G(s,x_{1_s}) - G(s,x_{2_s})\right\| ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (H_3) et (H_4) et la propriété (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|x_1(t,\phi,u^\lambda) - x_2(t,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha \leq & L_1 \left\|A^{-\beta}\right\| \left\|x_{1_t}(\cdot,\phi,u^\lambda) - x_{2_t}(\cdot,\phi,u^\lambda)\right\|_{C_\alpha} \\
& + \int_0^t \frac{M_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} L_1 \left\|x_{1_s}(\cdot,\phi,u^\lambda) - x_{2_s}(\cdot,\phi,u^\lambda)\right\|_{C_\alpha} ds \\
& + \int_0^t \frac{M_\alpha}{(t-s)^\alpha} L_2 \left\|x_{1_s}(\cdot,\phi,u^\lambda) - x_{2_s}(\cdot,\phi,u^\lambda)\right\|_{C_\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Par définition de la norme dans C_α et par unicité de solution sur $[-r,0]$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left\|x_1(t,\phi,u^\lambda) - x_2(t,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha \leq L_1 \left\|A^{-\beta}\right\| \sup_{\nu\in[0,t]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha \\
&+ \int_0^t \Big(L_1 M_{1-\beta}(t-s)^{\beta-1} + M_\alpha L_2 (t-s)^{-\alpha}\Big) \sup_{\nu\in[0,s]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha ds.
\end{aligned}$$

Puisque l'inégalité précédente est vraie pour tout $t \in [0,T]$, alors on a :

$$\begin{aligned}
&\sup_{\nu\in[0,t]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha \leq L_1 \left\|A^{-\beta}\right\| \sup_{\nu\in[0,t]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha \\
&+ \int_0^t \Big(L_1 M_{1-\beta}(t-s)^{\beta-1} + M_\alpha L_2 (t-s)^{-\alpha}\Big) \sup_{\nu\in[0,s]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha ds.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\sup_{\nu\in[0,t]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha \leq \\
&\int_0^t \left(\frac{L_1 M_{1-\beta}(t-s)^{\beta-1} + M_\alpha L_2 (t-s)^{-\alpha}}{1 - L_1 \left\|A^{-\beta}\right\|}\right) \sup_{\nu\in[0,s]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha ds.
\end{aligned}$$

Ceci, d'aprés le Lemme de Grönwall, donne :

$$\sup_{\nu\in[0,t]} \left\|x_1(\nu,\phi,u^\lambda) - x_2(\nu,\phi,u^\lambda)\right\|_\alpha = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T].$$

Comme t est arbitrairement fixé dans $[0,T]$ et comme la solution est unique sur $[-r,0]$, on conclut l'unicité de solution sur tout l'intervalle $[-r,T]$.

2.2 Contrôlabilité approchée

Dans cette section, nous démontrons le résultat principal de ce chapitre sur la contrôlabilité aprochée du système considéré, c'est à dire, nous démontrons que pour toute condition initiale $\phi \in C_\alpha$ et tout état final $x^T \in X$, il existe un contrôle u tel que la solution intégrale du système (2.1) associée à ϕ et u converge vers x^T dans X quand t tend vers T.

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses du Théorème 1.8 sont toutes vérifiées. Supposons de plus que les fonctions F et G sont uniformément bornées dans les espaces $X_{\alpha+\beta}$ et X_α respectivement. Donc le système (2.1) est approximativement contrôlable sur $[0,T]$.*

Preuve du Théorème 2.2

Soient $\phi \in C_\alpha$ une condition initiale et $x^T \in X$ un état final donnés. D'après le Théorème 1.8, il existe $x^\lambda(\cdot) = x(\cdot, \phi, u^\lambda)$ un point fixe de P^λ dans $D(\rho_0)$ qui est une solution intégrale du système (2.1) définie sur $[-r, T]$ sous le contrôle :

$$\begin{aligned} u^\lambda(t) =& B^* S^*(T-s) R(\lambda, -\Gamma_T) \Big\{ x^T - S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) + F(T, x_T^\lambda) \\ &- \int_0^T AS(T-\tau) F(\tau, x_\tau^\lambda) d\tau - \int_0^T S(T-\tau) G(\tau, x_\tau^\lambda) d\tau \Big\}. \end{aligned}$$

Donc, pour $T < \infty$ donné, on a :

$$\begin{aligned} x^\lambda(T) =& S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) - F(T, x_T^\lambda) + \int_0^T AS(T-s) F(s, x_s^\lambda) ds \\ &+ \int_0^T S(T-s)\Big(Bu^\lambda(s) + G(s, x_s^\lambda)\Big) ds \\ =& S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) - F(T, x_T^\lambda) + \int_0^T AS(T-s) F(s, x_s^\lambda) ds \\ &+ \int_0^T S(T-s) \Big\{ BB^* S^*(T-s) R(\lambda, -\Gamma_T) \Big[x^T - S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) \\ &+ F(T, x_T^\lambda) - \int_0^T AS(T-\tau) F(\tau, x_\tau^\lambda) d\tau \\ &- \int_0^T S(T-\tau) G(\tau, x_\tau^\lambda) d\tau \Big] + G(s, x_s^\lambda) \Big\} ds. \end{aligned}$$

Par définition des opérateurs Γ_T et $R(\lambda, -\Gamma_T)$, on a :

$$
\begin{aligned}
x^\lambda(T) =& x^T + \Big(\Gamma_T R(\lambda, -\Gamma_T) - I\Big)\Big[x^T - S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) + F(T, x_T^\lambda) \\
&- \int_0^T AS(T-s)F(s, x_s^\lambda)ds - \int_0^T S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds\Big] \\
=& x^T - \lambda R(\lambda, -\Gamma_T)\Big[x^T - S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) + F(T, x_T^\lambda) \\
&- \int_0^T AS(T-s)F(s, x_s^\lambda)ds - \int_0^T S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds\Big].
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
\left\|x^\lambda(T) - x^T\right\| =& \Big\|\lambda R(\lambda, -\Gamma_T)\Big[x^T - S(T)\Big(\phi(0) + F(0,\phi)\Big) + F(T, x_T^\lambda) \\
&- \int_0^T AS(T-s)F(s, x_s^\lambda)ds - \int_0^T S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds\Big]\Big\|.
\end{aligned}
$$

Remarquons que pour un $\epsilon > 0$ très petit, on a $\alpha + \epsilon < 1$ et

$$
\begin{aligned}
\left\|A^{\alpha+\epsilon}\int_0^T S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds\right\| \leq& \left\|\int_0^T A^{\alpha+\epsilon}S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds\right\| \\
\leq& \int_0^T \frac{M_{\alpha+\epsilon}}{(T-s)^{\alpha+\epsilon}}ds \left\|G(\cdot, x_\cdot^\lambda)\right\| \\
=& \frac{M_{\alpha+\epsilon}}{1-\alpha-\epsilon}\left\|G(\cdot, x_\cdot^\lambda)\right\|.
\end{aligned}
$$

Comme la fonction G est uniformément bornée dans X, l'ensemble

$$
\left\{\int_0^T S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds, \quad \lambda \in (0,1]\right\}
$$

est borné dans $X_{\alpha+\epsilon}$. Par l'injection compacte $X_{\alpha+\epsilon} \hookrightarrow X_\alpha \hookrightarrow X$ (voir Théorème 1.5), cet ensemble est relativement compact dans X_α et ensuite dans X. Donc la suite $\left\{\int_0^T S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds\right\}_\lambda$ admet une sous-suite convergente dans X vers, disons, G_T c'est à dire :

$$
\left\|\int_0^T S(T-s)G(s, x_s^\lambda)ds - G_T\right\| \to 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0^+.
$$

De même, puisque la fonction F est uniformément bornée dans $X_{\alpha+\beta}$, alors les deux ensembles

$$
\left\{F(T, x_T^\lambda), \quad \lambda \in (0,1]\right\}
$$

et

$$\left\{\int_0^T AS(T-s)F(s,x_s^\lambda)ds, \quad \lambda \in (0,1]\right\}$$

sont bornés dans $X_{\alpha+\beta}$ et $X_{\alpha+\epsilon}$ respectivement. Donc ils sont relativement compacts dans X. D'où, il existe, disons, F_T^1 et F_T^2 tels que :

$$\left\|F(T,x_T^\lambda) - F_T^1\right\| \to 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0^+$$

et

$$\left\|\int_0^T AS(T-s)F(s,x_s^\lambda)ds - F_T^2\right\| \to 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0^+.$$

Or par hypothèse (H_0) on a :

$$\left\|\lambda R(\lambda,\Gamma_T)\left[x^T - S(T)\Big(\phi(0)+F(0,\phi)\Big) + F_T^1 - F_T^2 - G_T\right]\right\| \to 0$$

quand $\lambda \to 0^+$. En utilisant toute ces convergences, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|x^\lambda(T) - x^T\right\| =& \left\|\lambda R(\lambda,\Gamma_T)\left[x^T - S(T)\Big(\phi(0)+F(0,\phi)\Big) + F(T,x_T^\lambda)\right.\right.\\
&\left.\left. - \int_0^T AS(T-s)F(s,x_s^\lambda)ds - \int_0^T S(T-s)G(s,x_s^\lambda)ds\right]\right\|\\
\le& \left\|\lambda R(\lambda,\Gamma_T)\left[x^T - S(T)\Big(\phi(0)+F(0,\phi)\Big) + F_T^1 - F_T^2 - G_T\right]\right\|\\
&+ \left\|\lambda R(\lambda,\Gamma_T)\Big(F(T,x_T^\lambda) - F_T^1\Big)\right\|\\
&+ \left\|\lambda R(\lambda,\Gamma_T)\left(\int_0^T AS(T-s)F(s,x_s^\lambda)ds - F_T^2\right)\right\|\\
&+ \left\|\lambda R(\lambda,\Gamma_T)\left(\int_0^T S(T-s)G(s,\bar{x}_s^\lambda)ds - G_T\right)\right\|\\
\to& 0 \qquad \text{quand} \qquad \lambda \to 0^+.
\end{aligned}$$

D'où $x^\lambda(T) \to x^T$ dans X. Ceci termine la preuve.

Chapitre 3

Application sur l'équation de la chaleur de type retardé

Dans cette section nous présentons un exemple pour montrer l'utilité de notre étude. Soit l'équation aux dérivées partielles à retard fini suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(w(x,t) + f\big(t, w(x,t-r), \frac{\partial w}{\partial x}(x,t-r)\big)\Big) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \\ \quad +g\big(t, w(x,t-r), \frac{\partial w}{\partial x}(x,t-r\big) + Bu(t), \quad x \in [0,\pi], \quad t \in [0,T], \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ w(x,t) = \phi(x,t), \quad x \in [0,\pi], \quad t \in [-r,0]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le système (3.1) se pose dans l'étude du flux de chaleur dans les matériaux du type dit retardé, voir [19, 24]. Ici $w(x,t)$ représente la température de la position x à l'instant t.

Pour réécrire l'équation aux dérivées partielles (3.1) sous forme de l'équation différentielle ordinaire (2.1), on pose $X = L^2([0,\pi];\mathbb{R})$, $W(t)(x) = w(x,t)$ et $\varphi(t)(x) = \phi(x,t)$ et on définit l'opérateur $(A, D(A))$ par :

$$Ax = -x''$$

avec

$$D(A) = \Big\{x \in X \ \mid x(0) = x(\pi) = 0 \text{ avec } x \text{ et } x' \text{absolument continus sur } [0,\pi] \\ \text{et } x'' \in X\Big\}.$$

L'opérateur $(-A, D(-A))$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est compact et analytique et la résolvante $R(\lambda, -A) = (\lambda I + A)^{-1}$ est compacte quand elle existe. Aussi, $(-A, D(-A))$ a un spectre discret, les valeurs propres sont $-n^2, n \in \mathbb{N}^+$ et les vecteurs propres normalisés correspondants sont :

$$\xi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx), \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

De plus, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $x \in D(A)$
$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle x, \xi_n \rangle \xi_n.$$
2. Pour tout $x \in X$
$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \langle x, \xi_n \rangle \xi_n.$$
En particulier $\|S(t)\| \leq e^{-t}$.
3. Pour tout $x \in X$
$$A^{-1/2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, \xi_n \rangle \xi_n.$$
En particulier $\left\|A^{-1/2}\right\| \leq 1$.
4. L'opérateur $A^{1/2}$ est donné par :
$$A^{1/2}x = \sum_{n=1}^{\infty} n \langle x, \xi_n \rangle \xi_n$$
avec
$$\begin{aligned} D(A^{1/2}) &= \Big\{x \in X \ \mid \ \sum_{n=1}^{\infty} n \langle x, \xi_n \rangle \xi_n \in X\Big\} \\ &= \Big\{x \in X \ \mid x(0) = x(\pi) = 0 \text{ avec } x \text{ et } x' \text{dans } X\Big\}. \end{aligned}$$

Clairement l'hypothèse (H_1) est satisfaite.

Dans la suite on prend $\alpha = \beta = 1/2$ et on définit les applications $F : [0,T] \times X_{1/2} \to D(A)$ et $G : [0,T] \times X_{1/2} \to X$ comme suit :
$$\begin{aligned} F(t,\chi)(x) &= f(t, \chi(x)(-r), \chi'(x)(-r)), \\ G(t,\chi)(x) &= g(t, \chi(x)(-r), \chi'(x)(-r)), \quad \chi \in X_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sous ces notations, l'équation (3.1) peut être réécrite sous la forme de l'équation différentielle ordinaire (2.1). En effet, pour tout $x \in [0,\pi]$, on a :
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(W(t) + F\big(t, W_t\big)\Big) = -AW(t) + G\big(t, W_t\big) + Bu(t), \quad t \in [0,T], \\ W(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Pour s'assurer que les hypothèses (H_3) et (H_4) sont satisfaites, on suppose que :

(i) La fonction $f : [0,T] \times X \times X \to X$ est uniformément bornée et de classe C^2 avec $f(0,\cdot,\cdot) = f(\pi,\cdot,\cdot) = 0$ et pour tout $u_i, v_i \in X (i = 1,2)$,
$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, u_2(x), v_2(x)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, u_1(x), v_1(x))\right| \leq \|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|.$$

(ii) La fonction $g : [0,T] \times X \times X \to X$ est uniformément bornée et pour tout $u_i, v_i \in X (i = 1, 2)$,

$$|g(t, u_2(x), v_2(x)) - g(t, u_1(x), v_1(x))| \leq \|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\| .$$

Sous les conditions (i) et (ii), les fonctions F et G satisfaient les hypothèses (H_3) et (H_4). En effet, on a $\alpha+\beta = 1$, $X_{\frac{1}{2}} = (D(A^{\frac{1}{2}}), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$ et $X_1 = (D(A), \|\cdot\|_1)$. Donc pour tout $\chi_1, \chi_2 \in X_{\frac{1}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|F(t,\chi_2) - F(t,\chi_1)\|_1 &= \|f(t,\chi_2(x)(-r),\chi_2'(x)(-r)) - f(t,\chi_1(x)(-r),\chi_1'(x)(-r))\|_1 \\
&= \Big| \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,\chi_2(x)(-r),\chi_2'(x)(-r)) \\
&\qquad - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,\chi_1(x)(-r),\chi_1'(x)(-r)) \Big| \\
&\leq \|\chi_2 - \chi_1\| + \|\chi_2' - \chi_1'\| \\
&\leq c \|\chi_2 - \chi_1\|_{\frac{1}{2}} + \|\chi_2' - \chi_1'\| \\
&\leq c \|\chi_2 - \chi_1\|_{C_{\frac{1}{2}}} + \|\chi_2 - \chi_1\|_{C_{\frac{1}{2}}} \\
&= (c+1) \|\chi_2 - \chi_1\|_{C_{\frac{1}{2}}} .
\end{aligned}$$

Ce qui vérifie l'hypothèse (H_3). L'hypothèse (H_4) est similaire alors nous l'omettons ici.

Pour la fonction contrôle, on définit l'espace :

$$U = \Big\{ u = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \xi_n(x) \ \Big| \ \sum_{n=2}^{+\infty} u_n < \infty \Big\};$$

avec la norme

$$\|u\| = \left(\sum_{n=2}^{+\infty} u_n^2 \right)^{1/2}, \quad u \in U.$$

Donc $(U, \|\cdot\|_U)$ est un espace de Hilbert. En prenant

$$Bu = 2u_2\xi_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \xi_n(x),$$

l'hypothèse (H_2) est aussi vérifiée (voir [17, 23]).

Enfin, en raison de [6], le système linéaire correspondant à (3.1) est approximativement contrôlable (mais pas exactement contrôlable) sur $[0,T]$. Ceci est équivalent à dire que l'hypothèse (H_0) est aussi vérifiée. Donc, d'après le Théorème 2.2, le système semi-linéaire (3.1) est approximativement contrôlable sur $[0,T]$.

Bibliographie

[1] M. Adimy, H. Bouzahir and K. Ezzinbi, Local existence for a class of partial neutral functional differential equations with infinite delay, *Diff. Equ. Dyn. Syst.*, 12(2004), 353-370.

[2] A.E. Bashirov, N.I. Mahmudov, On concepts of controllability for linear deterministic and stochastic systems, *SIAM J. Control Optim.*, 37(1999), 1808-1821.

[3] H. Brezis, P.G. Ciarlet, J.L. Lions, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Paris : Dunod, 1999.

[4] Y. Chang and W. Li, Controllability of functional integro-Differential inclusions with an unbounded delay, *J. Optimiz. Theory Appl.*, 132(2007), 125-142.

[5] Ph. Clément, G. Da Prato, Some results on nonlinear heat equations for materials of fading memory type, *J. Integral Equ. Appl.*, (1990), 375-391.

[6] R.F. Curtain, H. Zwart, *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Springer Science and Business Media, 2012.

[7] W. Desch, R. Grimmer and W. Schappacher, Wellposedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space, *J. Diff. Equ.*, 74(1988), 391-411.

[8] K.J. Engel, R. Nagel, *A short course on operator semigroups*, Springer Science and Business Media, 2006.

[9] X. Fu, K. Mei, Approximate controllability of Semilinear partial functional differential systems, *J. Dyn. Control Syst.*, 15(2009), 425-443.

[10] X. Fu, Approximate controllability of semilinear neutral retarded systems, *IMA J. Math. Control Info.*, (2013) doi : 10.1093/imamci/dnt019.

[11] X. Fu, J. Lu and Y. You, Approximate controllability of semilinear neutral evolution systems with delay, *Inter. J. Control*, 86(2013), 1-17.

[12] R. Ganesh, R. Sakthivel, Y. Ren, S. M. Anthoni and N. I. Mahmudov, Controllability of neutral fractional functional equations with impulses and infinite delay, *Abstr. Appl. Anal.*, 2013(2013), 1-12.

[13] M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, A general theory of heat conduction with finite wave speed, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 31(1968), 113-126.

[14] H. R. Henriquez, Periodic solutions of abstract neutral functional differential equations with infinite delay, *Acta Math. Hungari.*, 121(2008), 203-227.

[15] E. Hernández and H. R. Henríquez, Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay, *J. Math. Anal. Appl.*, 221(1998), 452-475.

[16] E. M. Hernández and D. O'Regan, Existence of solutions for abstract neutral integro-differential equations with unbounded delay, *Czechoslovak Math. J.*, 61(2011), 691-706.

[17] J. Jeong, Y. Kwun and J. Park, Approximate controllability for semilinear retarded functional differential equations, *J. Dyn. Control Syst.*, 5(1999), 329-346.

[18] V. Keyantuo and C. Lizama, Hölder continuous solutions for integro-differential equations and maximal regularity, *J. Diff. Equ.*, 230(2006), 634-660.

[19] A. Lunardi, On the linear heat equation with fading memory, *SIAM J. Math. Anal.*, 21(1990), 1213-1224.

[20] N. I. Mahmudov, Approximate controllability of fractional neutral evolution equations in Banach spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, vol. 2013, Article ID 531894, 11 pages, 2013. doi :10.1155/2013/531894.

[21] R. K. Miller, An integrodifferential equation for rigid heat conductions with memory, *J. Math. Anal. Appl.*, 66(1978), 313-332.

[22] P. Muthukumar and C. Rajivganthi, Approximate controllability of fractional order neutral stochastic integro-differential system with nonlocal conditions and infinite delay, *Taiw. J. Math.*, 17(2013), 1693-1713.

[23] K. Naito, Controllability of semilinear control systems dominated by the linear part, *SIAM J. Control Optim.*, 25(1987), 715-722.

[24] J. W. Nunziato, On heat conduction in materials with memory, *Quart. Appl. Math.*, 29(1971), 187-304.

[25] G.R. Sell, Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Springer, New York, 2002.

[26] D. Thiéry, Validation des calculs de transport d'énergie dans le logiciel MARTHE. Note Technique EAU 2011/02, Avril 2012.

[27] E. Trélat, *Contrôle Optimal : Théorie et Applications*, 2 éd, Vuibert, 2005.

[28] R. Triggiani, On the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 50(1975), 438-446.

[29] R. Triggiani. A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces. *SIAM J. Control Optim.*, 15(1977), 407-411.

[30] J. Zabczyk. *Mathematical control theory : an introduction*, Springer Science and Business Media, 2009.

[31] B. N. Sadovskii, On a fixed point principle, *Funct. Anal. Appl.*, 1(1967), 74-76.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à une équation différentielle ordinaire semi-linéaire avec un terme neutre et un retard fini. Le but de ce travail est de montrer que cette équation est approximativement contrôlable en temps fini. Le résultat est obtenu en supposant que la partie linéaire de l'équation est approximativement contrôlable. Un exemple est donné à la fin de cette étude pour illustrer son application.

Mots clés: Théorie des semi-groupes, théorème du point fixe de Krasnoselskii, contrôlabilité approchée.

Abstract

In this thesis, we are interested in a semi-linear ordinary differential equation with a neutral term and finite delay. The purpose of this work is to show that this equation is approximately controllable in finite time. The result is obtained by assuming that the linear part of the equation is approximately controllable. An example is given at the end of this study to illustrate its application.

Keywords: Semi-group theory, Krasnoselskii fixed-point theorem, approximate controllability.

ملخص

في هذه المذكرة، نهتم بمعادلة تفاضلية شبه خطية ذات مصطلح محايد وتأخر محدود. الغرض من هذا العمل هو إظهار امكانية التحكم في هذه المعادلة تقريبًا في وقت محدد. يتم الحصول على هذه النتيجة بافتراض امكانية التحكم في الجزء الخطي من المعادلة. يتم إعطاء مثال في نهاية هذه الدراسة لتوضيح تطبيقها.

كلمات مفتاحية: نظرية شبه المجموعات، نظرية النقطة الثابتة (Krasnoselskii)، السيطرة التقريبية.