

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

---

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



Faculté des sciences

Département de Mathématiques

**MÉMOIRE DE MASTER**

Option : Biomathématiques et modélisation

présenté par

BOUKARABILA Siham

**Soutenu le : 17 Juin 2019**

---

# **Systemes de réaction-diffusion fractionnaires et applications**

---

Soutenu devant le jury composé de :

M. A. MOUSSAOUI	Professeur , Université de Tlemccen	President
M. T.M.TOUAOULA	Professeur , Université de Tlemccen	Examineur
M. S.E.MIRI	MCA , Université de Tlemccen	Examineur
M. B. ABDELLAOUI	Professeur , Université de Tlemccen	Encadreur
M. E.H. LAAMRI	Professeur , Université de Nancy	Encadreur 2

**Année Universitaire :2018-2019**

*"Il vaut mieux viser la perfection et la  
manquer que viser l'imperfection et  
l'atteindre." Bertrand Russell.*

# Remerciement

En premier lieu, je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma plus grande reconnaissance à mon directeur de mémoire, Monsieur le Professeur B.Abdellaoui. Je lui remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. Je suis éternellement reconnaissante pour tout ce que vous m'avez appris durant les deux dernière années.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur El Haj Laamri, d'avoir accepté de m'encadrer. Je lui remercie pour ses conseils et pour le cours qui a donné à Tlemcen pendant l'évènement TAMTAM 2019, ça m'a beaucoup aidé pour comprendre les systèmes paraboliques et elliptiques.

Je remercie énormément Messieurs le Professeur A.Moussaoui et le Professeur T.M.Touaoula, d'avoir accepté de faire partie des jurys, et pour tous leurs conseils et leurs efforts durant les deux années de master. je suis reconnaissante pour l'enseignant en vous.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur E.S.Miri, d'avoir accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie des jurys.

Je remercie spécialement mon frère Y.O.Boukarabila, pour le temps qui a pris pour m'aider et m'encourager durant la réalisation de ce mémoire. Chanceuse je suis de t'avoir comme frère.

Je profite de l'occasion et je remercie l'équipe de la formation de master avec qui

j'ai énormément appris.

Un grand merci à ma mère et mon père, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel qui m'a permis de réaliser mes études. Je remercie aussi mes sœurs pour tout ce qu'elles ont fait.

Je remercie mes amis et mes collègues pour les bons moments qu'on a passé ensemble ...

# Dédicace

*Je dédie ce mémoire à :*

*Mes chers parents*

*Mes chères sœurs : Sarah et Rihab.*

*Mon cher frère.*

*Mes amis sans exception.*

*Mes collègues.*

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE</b>	<b>7</b>
1.1 Espace de Schwartz et transformée de Fourier . . . . .	7
1.2 Espaces de Sobolev fractionnaires et le laplacien fractionnaire . . . . .	9
1.2.1 Théorème de Trace . . . . .	9
1.2.2 L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ . . . . .	10
1.2.3 L'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ . . . . .	11
1.2.4 Le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ . . . . .	11
1.2.5 Extension de Caffareli-Silvestre . . . . .	14
1.2.6 Laplacien fractionnaire spectral : . . . . .	15
1.3 Les injections continues et compactes des espaces de Sobolev . . . . .	15
1.4 Problème Parabolique (Existence et Régularité) . . . . .	17
1.4.1 Espaces Paraboliques . . . . .	17
1.4.2 Solution d'énergie . . . . .	18
1.4.3 Méthode de Monotonie . . . . .	22
<b>2 SYSTÈME PARABOLIQUE</b>	<b>28</b>
2.1 Méthode de monotonie . . . . .	28
2.1.1 Fonction quasi-monotone . . . . .	28
2.1.2 Construction de la suite des sous-solutions et l'autre des sur-solutions : . . . . .	30

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
2.1.3 Existence de solution : . . . . .	32
2.1.4 Application . . . . .	32
2.2 Conservation de la masse . . . . .	35
2.2.1 Conditions (P) et (M) . . . . .	35
2.2.2 Exemple . . . . .	36
<b>3 INSTABILITÉ DE TURING ET LA DIFFUSION FRACTIONNAIRE</b>	<b>45</b>
3.1 Récifs coralliens . . . . .	45
3.2 Le modèle mathématique . . . . .	47
3.3 Instabilité de Turing: . . . . .	49
3.3.1 Les états stationnaires: . . . . .	50
3.3.2 Les conditions d'instabilité: . . . . .	52
<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>



## Notations

$L^p(\Omega)$	: L'espace de Lebesgue.
$L^\infty(\Omega)$	: L'espace des fonctions essentiellement bornée .
$ x $	: Le module de $x$ .
$ \Omega $	: La mesure de $\Omega$ .
$\partial\Omega$	: La frontière de $\Omega$ .
$\mathcal{C}\Omega$	: Le complémentaire de $\Omega$ .
$B_r(x_0)$	: La boule de centre $x_0$ et de rayon $r$ de $\mathbb{R}^N$ .
$\ u\ _{L^p(\Omega)}$	: La norme de $u$ dans $L^p(\Omega)$ .
$\ u\ _{L^\infty(\Omega)}$	: La norme de $u$ dans $L^\infty(\Omega)$ .
$W^{1,p}(\Omega)$	: L'espace de Sobolev.
$W^{s,p}(\Omega)$	: Espaces de Sobolev fractionnaires pour $0 < s < 1$
$C_0^\infty(\Omega)$	: Les fonctions infiniment dérivables et continues à support compact sur $\Omega$ .
$C^{0,\alpha}$	: L'espace des fonctions Hölderiennes sur $\Omega$ .
$C^k(\Omega)$	: Les fonctions de classe $k$ sur $\Omega$ .
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	: L'espace des fonctions Hölderiennes de classe $k$ .
$S(\mathbb{R}^N)$	: L'espace de Schwartz dans $\mathbb{R}^N$ .
$\mathcal{F}(u)$	: La transformée de Fourier de $u$ .
$\mathcal{F}^{-1}(u)$	: La transformée de Fourier inverse de $u$ .
$E'$	: Dual topologique de $E$ .
$\nabla u$	: Gradient de $u$ .
$\Delta u$	: laplacien de $u$ .
$(-\Delta)^s$	: Laplacien fractionnaire .
$\ker f$	: Noyau de $f$ . (Kernel)
$\hookrightarrow$	: Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: Injection compacte .
$\Gamma(\cdot)$	: La fonction Gamma qui généralise le factorielle.
$PV$	: La valeur principale de Cauchy.
$p.p$	: Presque partout.

# Introduction

Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution (au cours du temps) de très nombreux phénomènes en chimie, physique et en biologie ...

Mathématiquement, ces systèmes sont représentés par des équations aux dérivées partielles paraboliques de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t - D\Delta U = F(U) \\ \text{+Conditions} \end{array} \right.$$

où  $U$  désigne la concentration des substances ou bien les individus selon le phénomène modélisé. Les conditions décrivent l'état initial des substances étudiées ou bien les vitesses initiales de ces substances.

$\Delta U$  modélise la diffusion locale des individus dans l'espace,  $D$  représente les taux de diffusions et  $F$  décrit l'interaction et le processus de réaction entre ces derniers.

En biologie, prenons le cas d'un système de proie-prédateur de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u = ru(1 - \frac{u}{K}) - a uv \\ v_t - \Delta v = -mv + e a uv \\ \text{Conditions} \end{array} \right. \quad (1)$$

où :  $u$  : densité des proies ,  $v$  : densité des prédateurs. les proies suivent une croissance logistique.

$m$  : le taux de mortalité des prédateurs à l'absence des proies.

$a$  : le taux de prédation.

$e$  : le taux de conversion de la biomasse des proies en biomasse de prédateurs.

Dans les systèmes de réaction-diffusion, il est intéressant d'étudier la globalité des solutions et leurs comportements asymptotiques pour pouvoir détecter des conditions auxquelles on a la stabilité des états stationnaires qui sont des solutions des problèmes elliptiques associés à ces systèmes (des solutions qui ne dépendent pas de  $t$ ).

La diffusion dans le cas standard est modélisée par le laplacien. Dans ce mémoire, elle est modélisée par le laplacien fractionnaire qui semble plus réaliste car elle dépend de la position de la donnée dans le domaine tout entier à un instant  $t > 0$ .

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, on va présenter quelques définitions du laplacien fractionnaire  $(-\Delta)^s$ , et les espaces de Sobolev associés plus quelques outils d'analyse fonctionnelle, puis on va traiter le cas d'un problème parabolique en cherchant l'existence et l'unicité et la régularité  $L^p$  de sa solution comme on va présenter la méthode de monotonie pour établir des résultats d'existence pour les équations de réaction-diffusion fractionnaires.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse aux systèmes paraboliques, on va présenter d'abord la méthode de monotonie afin de montrer l'existence et l'unicité de solution, puis on va étudier la globalité d'une classe des systèmes où la masse et la positivité sont conservées.

Enfin, le chapitre 3 est dédié à l'étude d'un modèle de croissance des récifs coralliens avec une diffusion fractionnaire dans l'espace, tout d'abord on va donner le modèle mathématique qui décrit la croissance des récifs. Puis, on va chercher les conditions auxquelles l'instabilité de Turing apparaît et on les compare avec le cas de la diffusion normale (i.e. donnée par le laplacien).

# Chapitre 1

## OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

### 1.1 Espace de Schwartz et transformée de Fourier

**Notations :** Un multi-indice  $\alpha$  est un N-uplet d'entiers,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ ,  
Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ , on pose :

$$[\alpha] = \alpha_1 + \dots + \alpha_N \quad (\text{longueur du multi-indice})$$

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}^N$  on note  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$ .

#### Définition 1.1. Espace de Schwartz

L'espace de Schwartz  $S(\mathbb{R}^N)$  est l'espace des fonctions  $\varphi$  indéfiniment différentiables sur  $\mathbb{R}^N$  et qui vérifient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$$

Comme conséquence de cette définition, la fonction  $\varphi$  et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini plus rapidement que n'importe quelle fraction de type  $\frac{1}{x^\alpha}$ .

La topologie de  $S(\mathbb{R}^N)$  est engendrée par la famille de semi-normes

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|.$$

**Définition 1.2. Espace des distributions tempérées**

L'espace des distributions tempérées est le dual topologique de  $S(\mathbb{R}^N)$  et il est noté  $S'(\mathbb{R}^N)$ .

**Définition 1.3. Produit de convolution**

Soient  $f, g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^N$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou bien dans  $\mathbb{C}$ ), on définit le produit de convolution de  $f$  et  $g$  par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy.$$

**Définition 1.4. Transformée de Fourier**

On définit la transformée de Fourier sur  $S(\mathbb{R}^N)$  par :

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx.$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi x} \varphi(x) dx.$$

**Propriété 1.1.** : Soit  $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$ , alors

1.  $\mathcal{F}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^N)$ .
2.  $\mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ .
3. Soit  $f, g \in S(\mathbb{R}^N)$  :  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$ .

Comme conséquence de la deuxième propriété, on a

$$\mathcal{F}(-\Delta u) = |\xi|^2 \mathcal{F}(u)$$

cette relation se généralise pour  $s \in \mathbb{R}$  pour donner

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s u) = |\xi|^{2s} \mathcal{F}(u).$$

Ceci a permis de donner une première définition du laplacien fractionnaire comme

la transformée de Fourier inverse de  $|\xi|^{2s} \mathcal{F}(u)$ , ceci combiné avec la troisième propriété donne

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}) * \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}) * u. \quad (1.1)$$

(pour plus de détail voir 1.2.4)

## 1.2 Espaces de Sobolev fractionnaires et le laplacien fractionnaire

### 1.2.1 Théorème de Trace

Commençons d'abord par une motivation des espaces de Sobolev fractionnaires, cette motivation est donnée par le théorème de Trace des espaces de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  ( $\Omega$  régulier).

Si une fonction  $u$  est régulière sur  $\bar{\Omega}$ , alors sa trace sur  $\partial\Omega$  est sa restriction sur le bord. Mais, la restriction sur le bord d'une fonction  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  n'a aucun sens, puisque  $\partial\Omega$  est de mesure de Lebesgue nulle. Le Théorème suivant, permet de donner un sens à la "restriction au bord", cette restriction est donnée par un opérateur  $Tr$ . L'opérateur  $Tr$  est défini par prolongement par densité de la trace au bord.

#### **Théorème 1.1. Théorème de Trace de $W^{1,p}(\Omega)$ vers $L^p(\partial\Omega)$**

Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega$  un ouvert borné lipschitzienne de  $\mathbb{R}^N$ , alors il existe un opérateur linéaire continu  $Tr$  de  $W^{1,p}(\Omega)$  vers  $L^p(\partial\Omega)$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \|Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ \bullet \text{Si } u \text{ est régulière alors } Tr(u) = u|_{\partial\Omega}. \\ \bullet Ker Tr = W_0^{1,p}(\Omega). \end{array} \right.$$

Le "défaut" de cette version de trace est que la compacité de l'opérateur  $Tr$  n'est pas claire, ce qui limite l'utilisation pratique de cette version de Trace. Par contre, le Théorème suivant donne une version plus fine de la trace au bord.

#### **Théorème 1.2. Théorème de Trace**

Soient  $\Omega$  un domaine de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$  avec  $(N \geq 2), 1 < p < \infty$ . Alors de plus l'opérateur  $Tr$  vérifie :

$$Tr(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

(notons que  $Tr : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  est continu )

Pour la démonstration voir [10]

### 1.2.2 L'espace $W^{s,p}(\Omega)$

**Définition 1.5.** L'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  et  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$

Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  ouvert,  $0 < s < 1$  et  $p \in [1, \infty[$ , on pose

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy < \infty \right\}$$

$W^{s,p}(\Omega)$  est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

ou la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

le terme

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

est dit la semi-norme de Gagliardo.

Si  $p = 2$ , on note  $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$  c'est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy.$$

### 1.2.3 L'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$

**Définition 1.6.** Soit  $0 < s < 1$ , on définit

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \text{ avec } u = 0 \text{ p.p dans } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\}$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \left( \int \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{1/p},$$

où  $Q = \mathbb{R}^{2N} \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$ .

Si  $p = 2$ , on le note par  $H_0^s(\Omega)$  c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} = \frac{a_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \quad \forall u, v \in H_0^s(\Omega)$$

**Remarque 1.1.** :

1.  $C_0^\infty(\Omega)$  est inclus dans  $W^{s,p}(\Omega)$ .
2. L'espace  $C_0^\infty(\Omega)$  est dense dans  $W_0^{s,p}(\Omega)$  i.e.  $W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}$
3. Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  alors les deux espaces  $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ ,  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  coïncident.
4. On note par  $H^{-s}(\Omega)$  le dual topologique de  $H_0^s(\Omega)$ .

#### **Proposition 1.1. Inégalité de Poincaré fractionnaire**

Soit  $\Omega$  un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ , alors il existe  $C := C(\Omega, N, s) > 0$  telle que :

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq C \int \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \quad \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

pour la démonstration voir [2], [3].

### 1.2.4 Le laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$

**Définition 1.7. Le laplacien fractionnaire**

On note par  $(-\Delta)^s$  Le Laplacien fractionnaire d'ordre  $2s$ , qui est défini par

$$(-\Delta)^s u(x) := a_{N,s} \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+2s}} dy, \quad s \in (0, 1), \quad (1.2)$$

où

$$a_{N,s} = 2^{2s-1} \pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{|\Gamma(-s)|}$$

est la constante qui vérifie l'identité suivante

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F} u) \quad \xi \in \mathbb{R}^N, s \in (0, 1),$$

pour tout  $u \in S(\mathbb{R}^N)$ .

Ici P.V désigne la valeur principale de Cauchy qui représente la limite de l'intégrale sur  $\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Proposition 1.2.** Dans (1.2), si  $0 < s < \frac{1}{2}$  alors la valeur principale n'est pas nécessaire.

*Démonstration.* En effet, soit  $u \in S(\mathbb{R}^N)$  par application du Théorème des accroissements finis, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{N+2s}} dy &= \int_{B_R(x)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{N+2s}} dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(x)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{N+2s}} dy \\ &\leq c \int_{B_R(x)} \frac{|x - y|}{|x - y|^{N+2s}} dy + 2\|u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(x)} \frac{1}{|x - y|^{N+2s}} dy \\ &\leq c \left( \int_{B_R(x)} \frac{1}{|x - y|^{N+2s-1}} dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(x)} \frac{1}{|x - y|^{N+2s}} dy \right) \\ &\leq C \left( \int_0^R \frac{1}{r^{2s}} dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^{2s+1}} dr \right) < \infty. \end{aligned}$$

Où C est une constante positive et  $r = |x - y|$ .

□

La proposition suivante n'est rien d'autre que le Théorème de Riesz dans l'espace de Hilbert  $H_0^s(\Omega)$ .

**Proposition 1.3.** *L'opérateur*

$$(-\Delta)^s : H_0^s(\Omega) \rightarrow H^{-s}(\Omega)$$

est linéaire, continu, bijectif et auto-adjoint, pour

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \frac{a_{N,s}}{2} \int \int_Q \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

et on a la relation suivante entre  $H_0^s$  et  $L^2$

$$\|u\|_{H_0^s(\mathbb{R}^N)}^2 = 2a_{N,s}^{-1} \|(-\Delta)^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \quad (1.3)$$

(Pour la preuve de la dernière formule voir [11, Proposition 3.6])

*Démonstration.* On veut montrer qu'il existe  $c > 0$  telle que :

$$\|(-\Delta)^s u\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq c \|u\|_{H_0^s(\Omega)}$$

(la linéarité de  $(-\Delta)^s$  est évidente.)

Soit  $u \in H_0^s(\Omega)$ , est ce qu'on a  $(-\Delta)^s u \in H^{-s}(\Omega)$  ?

Notons

$$\begin{aligned} T_u : H_0^s(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow T_u(v) = \langle (-\Delta)^s u, v \rangle \end{aligned}$$

$T_u$  est linéaire, traitons sa continuité

$$\begin{aligned} T_u(v) &= \frac{a_{N,s}}{2} \int \int_Q \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy, \\ &\leq \frac{a_{N,s}}{2} \left( \int \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \int_Q \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (" \leq " \text{ Hölder}) \\ &\leq \frac{a_{N,s}}{2} \|u\|_{H_0^s} \|v\|_{H_0^s}, \end{aligned}$$

ceci implique que  $T_u$  est continu, et de plus

$$\|(-\Delta)^s u\|_{H^{-s}(\Omega)} := \|T_u\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \frac{a_{N,s}}{2} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}.$$

On conclut que  $(-\Delta)^s$  est un opérateur linéaire continue de  $H_0^s(\Omega)$  dans  $H^{-s}(\Omega)$ .

*Auto-adjoint* : soit  $u, v \in H_0^s(\Omega)$ , on a que

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \langle u, (-\Delta)^s v \rangle.$$

Puisque, par définition

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^s u, v \rangle &= \frac{a_{N,s}}{2} \iint_Q \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \\ &= \langle u, (-\Delta)^s v \rangle. \end{aligned}$$

□

### 1.2.5 Extension de Caffareli-Silvestre

Une manière équivalente de définir le laplacien fractionnaire d'une fonction donnée  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est celle illustrée par Caffarelli et Silvestre dans [9]. Cette méthode consiste à définir le laplacien fractionnaire comme l'opérateur qui associe à la condition de Dirichlet; la condition de Neumann (avec un certain poids) du problème d'extension suivant :

$$\begin{cases} \Delta_x u + \frac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^{N+1} \\ u(x, 0) = g(x) & \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\mathbb{R}_+^{N+1} = \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$  et  $a = 1 - 2s$ .

La première équation est équivalente à  $div(y^{1-2s} \nabla u) = 0$ .

Ainsi, le laplacien fractionnaire de  $g$  est donné par :

$$(-\Delta)^s g = C \lim_{y \rightarrow 0} -y^a u_y \quad (1.5)$$

avec  $C$  une constante de normalisation.

### 1.2.6 Laplacien fractionnaire spectral :

Soient  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\{\lambda_i\}$  et  $\{\varphi_i\}$  les valeurs propres et vecteurs propres (resp) du  $(-\Delta)$  avec condition de Dirichlet homogène. Si  $u \in H_0^1(\Omega)$  alors il existe une suite de nombres réelles  $\{\alpha_i\}$  tel que  $u = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \varphi_i$ . Le laplacien fractionnaire spectral est défini par :

$$(-\Delta)_{spect}^s u = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \lambda_i^s \varphi_i. \quad (1.6)$$

Lorsque  $\Omega$  est borné, alors le laplacien fractionnaire spectral et le laplacien fractionnaire défini par l'extension de Caffarelli-Silvestre coïncident. Autrement dit, si

$$\begin{cases} \operatorname{div}(y^{1-2s} \nabla v) = 0 & \Omega \times (0, \infty) \\ v(x, y) = 0 & \partial\Omega \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = g(x) & \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

alors

$$\lim_{y \rightarrow 0} -y^{1-2s} v_y = C(-\Delta)_{spect}^s g.$$

**Remarque 1.2.** Dans  $\mathbb{R}^N$ , le laplacien fractionnaire défini dans (1.2) coïncide avec sa définition par l'extension de Caffarelli-Silvestre. Quand  $\Omega$  est borné, ces deux définitions sont distinctes.

## 1.3 Les injections continues et compactes des espaces de Sobolev

### Théorème 1.1. Injections des espaces de Sobolev fractionnaires

**Cas 1 :**  $N > p s$  *Inégalité de Sobolev*

soit  $s \in (0, 1)$ . Il existe  $S = S(N, s) > 0$  tel que pour tous  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ , on a :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy$$

avec  $p_s^* = \frac{pN}{N-ps}$  l'exposant critique de Sobolev.

Ceci est équivalent à dire que :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p_s^*].$$

**Cas 2 :**  $N = ps$

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, \infty[$$

**Cas 3 :**  $N < ps$

Soit  $\Omega$  un domaine Lipschitzienne de  $\mathbb{R}^N$ , alors

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$$

Où  $\alpha := \frac{ps-N}{p}$ .

**Remarque 1.3.** Les injections précédentes sont conservées si on remplace  $\mathbb{R}^N$  par un domaine borné de classe  $C^1$ .

**Théorème 1.2.** *Les inclusions compactes de Rellich-Kondrachov fractionnaire*

**Cas 1 :**  $N > ps$

Soient  $s \in (0, 1)$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  borné, alors

$$W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p_s^*[$$

**Cas 2 :**  $N = ps$

$$W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \geq 1$$

**Cas 3 :**  $N < ps$

$$W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega) \quad \forall \beta < \alpha$$

Où  $\alpha := \frac{ps-N}{p}$ .

Pour plus de détails voir [1],[2][6] et [14].

**Théorème 1.3.** *Inégalité de Gagliardo-Nirenberg*

Soit  $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$  telle que  $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \in L^r(\mathbb{R}^N)$  avec  $r \geq 1$  et  $p \geq 1$ .

Alors  $\exists C > 0 : C = C(N, s, r, p)$  telle que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^\theta \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{1-\theta}$$

$\forall q, \theta \in \mathbb{R}$  satisfaisant :

(i)  $0 \leq \theta \leq 1$

(ii)  $1 \leq q < \infty$

(iii)  $\frac{1}{q} = \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{s}{N}\right) + \frac{1-\theta}{p}$ .

(Voir [1]).

## 1.4 Problème Parabolique (Existence et Régularité)

L'objectif de cette section est l'étude de l'existence et l'unicité de quelques problèmes paraboliques.

Commençons par l'étude du problème linéaire, considérons donc :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = f(x, t) & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

avec  $f$  donnée,  $\Omega$  domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$  et  $T > 0$ .

### 1.4.1 Espaces Paraboliques

**Définition 1.8. Espaces Paraboliques**

L'espace de Lebesgue parabolique est :

$$L^{p,q}(\Omega_T) = \left\{ \phi : \left( \int_0^T \|\phi(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Si  $p = q$  :  $L^{p,q}(\Omega_T) = L^p(\Omega_T)$ .

L'espace de Sobolev parabolique :

$$L^p(0, T; W_0^{s,p}(\Omega)) = \left\{ \Phi \in L^p(\Omega_T) : \|\Phi\|_{L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))} < \infty \right\}$$

ou bien, c'est l'ensemble

$$L^p(0, T; W_0^{s,p}(\Omega)) = \left\{ \Phi : (0, T) \rightarrow W_0^{s,p}(\Omega) : \int_0^T \|\Phi(\cdot, t)\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p dt < \infty \right\}.$$

Soit  $u \in L^p(0, T; W_0^{s,p}(\Omega))$  alors sa norme est exprimée par :

$$\|u\|_{L^p(0,T;W_0^{s,p}(\Omega))}^p = \int_0^T \int \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy dt,$$

où  $Q = \mathbb{R}^{2N} \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$

**1.4.2 Solution d'énergie****Définition 1.9. Solution d'énergie**

Soient  $f \in L^2(0, T; H^{-s}\Omega)$  et  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $u$  est dite solution d'énergie de (1.8) si elle vérifie :

$$u \in L^2(0, T; H_0^s(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)), \quad u_t \in L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$$

et  $\forall w \in L^2(0, T; H_0^s(\Omega))$  on a

$$\int_{\Omega_T} u_t w dx dt + \int_0^T \langle (-\Delta)^s u, w \rangle dt = \int_0^T \langle f, w \rangle dt,$$

où  $H^{-s}(\Omega)$  représente le dual de  $H_0^s(\Omega)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité entre  $H^{-s}$  et

$H_0^s$ .

**Théorème 1.3.** *Soit  $f \in L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$ . Alors pour toute condition initiale  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , le problème (1.8) admet une solution unique d'énergie .*

Pour la preuve on se réfère à [2] et [14].

*Démonstration.* : Soit l'espace

$$C_*^\infty(\Omega_T) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\Omega \times [0, T]) : \varphi(x, t) = 0 \text{ (} x, t \text{)} \in (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times [0, T] \text{ et } \varphi(x, T) = 0 \text{ } x \in \Omega \right\}$$

et soient  $\varphi \in C_*^\infty(\Omega_T)$  et  $u \in L^2(0, T; H_0^s(\Omega))$ .

On définit l'opérateur

$$L_\varphi(u) := \int_0^T \int_Q -u\varphi_t dx dt + \int_0^T \langle (-\Delta)^s u, \varphi \rangle dt.$$

Notre objectif est de montrer que  $u$  est une solution d'énergie du problème (1.8) c'est à dire

$$L_\varphi(u) = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle dt + \int_\Omega u_0(x)\varphi(x, 0) dx.$$

On considère le produit scalaire sur  $C_*^\infty(\Omega_T)$

$$\langle \varphi, \psi \rangle_* = \frac{1}{2} \int_\Omega \varphi(x, 0)\psi(x, 0) dx + \int_0^T \langle \varphi(\cdot, t), \psi(\cdot, t) \rangle_{H_0^s(\Omega)} dt.$$

Notons  $H^*(\Omega_T) := \overline{C_*^\infty(\Omega_T)}^{\|\cdot\|_*}$  (espace de Hilbert).

Montrons que  $L_\varphi$  est un opérateur linéaire continu. En effet, la linéarité de  $L_\varphi$  est une conséquence de la linéarité de l'intégrale et le produit de dualité. Pour la continuité, en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$|L_\varphi(u)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega_T)} \|\varphi_t\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^s(\Omega))} \frac{a_{N,s}}{2} \int_0^T \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy dt.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 |L_\varphi(u)| &\leq c(\varphi) \left( \|u\|_{L^2(\Omega_T)} + \frac{a_{N,s}}{2} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^s(\Omega))} \right), \\
 &\leq C(\varphi) \left( \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} + \frac{a_{N,s}}{2} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^s(\Omega))} \right), \quad (\text{Inégalité de Hölder}) \\
 &\leq C(\varphi) \left( S \|u\|_{H_0^s(\Omega_T)} + \frac{a_{N,s}}{2} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^s(\Omega_T))} \right), \quad (\text{Inégalité de Sobolev}) \\
 &\leq C_1(\varphi) \|u\|_{H^*}.
 \end{aligned}$$

D'où  $L_\varphi : H^* \rightarrow \mathbb{R}$  est un opérateur linéaire continu. Il est important de noter que  $C_1(\varphi) = C(\Omega_T, s, N) \cdot \|\varphi\|_{H^*}$ , de la dernière inégalité on déduit,

$$(\forall \varphi \in H^*) \quad \|L_\varphi\| \leq C(\Omega_T, s, N) \|\varphi\|_{H^*} \quad (1.9)$$

Ce qui montre la continuité de l'opérateur linéaire  $L : H^* \rightarrow H^*$ .

Puisque,  $H^*$  est un espace de Hilbert alors par le Théorème de Riesz  $\exists! T(\varphi) \in H^*$  tel que :

$$L_\varphi(\psi) = \langle \psi, T(\varphi) \rangle \quad \forall \psi \in H^*.$$

Par conséquent  $T(\varphi) := L_\varphi$ , ce qui entraîne en particulier la linéarité de  $T : H^* \rightarrow H^*$ . Maintenant, montrons  $T$  est injectif. En effet,

$$T(\varphi) = 0 \quad \iff \quad \langle T(\varphi), \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in H^*$$

en particulier pour  $\psi = \varphi$ , donc  $\langle T(\varphi), \varphi \rangle = 0$ . Ensuite,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_T} -\varphi \varphi_t dx dt + \int_0^T \langle (-\Delta)\varphi, \varphi \rangle dt &= 0 \\
 -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \varphi^2 dx dt + \int_0^T \langle (-\Delta)\varphi, \varphi \rangle dt &= 0 \\
 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \frac{a_{N,s}}{2} \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^s(\Omega))} &= 0.
 \end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\|\varphi\|_*^2 = 0,$$

ce qui montre que  $T$  est injectif.

On remarque que  $\langle T(\varphi), \varphi \rangle = \|\varphi\|_*^2$ , ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne :

$$|\langle T(\varphi), \varphi \rangle| \leq \|T(\varphi)\|_{H^*} \|\varphi\|_{H^*} \implies \|\varphi\|_{H^*}^2 \leq \|T(\varphi)\|_{H^*} \|\varphi\|_{H^*},$$

d'où,

$$\|\varphi\|_{H^*} \leq \|T(\varphi)\|_{H^*} \tag{1.10}$$

par suite,  $T : H^* \longrightarrow T(H^*)$  est bijectif. De (1.10),  $T^{-1}$  est une application linéaire continue, et qui vérifie  $\|T^{-1}(\varphi)\|_{H^*} \leq 1$ .

On définit la forme linéaire

$$B(\Phi) := \int_{\Omega} u_0(x)\Phi(x,0)dx + \int_{\Omega_T} f(x,t)\Phi(x,t) dxdt \quad \text{pour } \Phi \in H^*.$$

Par les inégalités de Hölder et Sobolev, on a

$$\begin{aligned} |B(\Phi)| &\leq \left(\int_{\Omega} u_0^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \Phi^2(x,0)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega_T} f^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_T} \Phi^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} u_0^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \Phi^2(x,0)dx\right)^{\frac{1}{2}} + c_f \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} \Phi^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} u_0^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \Phi^2(x,0)dx\right)^{\frac{1}{2}} + c_{f,S} \|\Phi\|_{L^2(0,T;H_0^s(\Omega))} \\ &\leq C_{u_0,f} \|\Phi\|_*. \end{aligned}$$

De plus d'après (1.10)

$$|B(T^{-1}\varphi)| \leq C_{u_0,f} \|T^{-1}\varphi\|_* \leq C_{u_0,f} \|\varphi\|_*.$$

Donc,  $B$  est une forme linéaire continue dans  $H^*$ , d'après le Théorème de Riesz  $\exists! u \in H^*$  tels que

$$B(T^{-1}\varphi) = \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall \varphi \in H^*.$$

Posons  $\Phi = T^{-1}\varphi$ , il en résulte :

$$B(\Phi) = \langle T(\Phi), u \rangle = L_{\Phi}(u)$$

d'où l'existence et l'unicité de solution d'énergie  $u$ .  $\square$

En ce qui concerne la régularité des solutions des problèmes paraboliques (1.8), un résultat très important basé sur [21], [14] et par interpolation, est celui ci :

**Lemme 1.1. Régularité**

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} w_t + (-\Delta)^s w = F & \text{dans } \Omega_T, \\ w(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T), \\ w(0, x) = w_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.11)$$

On suppose que  $F \in L^q(\Omega_T)$ ,  $w_0 \in L^q(\Omega)$ , alors on a

$$\|w\|_{L^r(\Omega_T)} \leq C[\|F\|_{L^q(\Omega_T)} + \|w_0\|_{L^q(\Omega)}],$$

avec  $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{2s}{N+2s}$ , si  $q \leq \frac{N+2s}{2s}$ .

et  $r = \infty$  si  $q \geq \frac{N+2s}{2s}$ .

### 1.4.3 Méthode de Monotonie

soit le problème

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = f(u) & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

avec  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ .

**Définition 1.10. sous et sur-solution**

On dit que  $\bar{u}$  est une sur-solution du problème (1.12) si et seulement si

$$\begin{cases} \bar{u}_t + (-\Delta)^s \bar{u} \geq f(\bar{u}) & \text{dans } \Omega_T \\ \bar{u}(x, t) \geq 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ \bar{u}(x, 0) \geq u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

respectivement " $\leq$ " pour les sous-solutions.

**Proposition 1.4. Principe du maximum**

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $u \in L^2(0, T; H^s(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  telle que

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u \geq 0 & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, t) \geq 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ u(x, 0) \geq u_0(x) \geq 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

alors  $u \geq 0$  dans  $\Omega_T$

**Définition 1.11. l'intervalle fonctionnel**

Soient  $\bar{u}, \underline{u}$  une sur, sous-solution (respectivement) du problème (1.12) telles que  $\underline{u} \leq \bar{u}$ .

On définit le secteur  $[\underline{u}, \bar{u}]$  par :

$$[\underline{u}, \bar{u}] = \left\{ u \in L^2(0, T; H_0^s(\Omega)) : \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad \text{dans } \Omega_T \right\}$$

On note par  $\partial\Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup ((\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T))$ .

Maintenant considérons le problème suivant (qui n'est autre que 1.12) :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s u = f(u) & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, t) = h(x, t) & \text{dans } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (1.15)$$

Avec  $h(x, 0) = u_0(x)$ , et  $h(x, t) = 0$  si  $x \in (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T)$ .

On suppose que  $f \in C(\mathbb{R})$ , Lipschitzienne unilatéralement

i.e.

$$f(u) - f(v) \geq -c(u - v) \quad \text{si } \underline{u} \leq v \leq u \leq \bar{u} \quad (1.16)$$

où  $c$  est la constante de Lipschitz et  $\underline{u}, \bar{u}$  désignent une sous; sur-solution (respectivement) du problème (1.15) .

On définit  $F(u) = cu + f(u)$ ,  $F$  est croissante car

si  $v \leq u$  alors d'après 1.16

$$f(u) + cu \geq f(v) + cv \Rightarrow F(u) \geq F(v)$$

On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} (u_n)_t + (-\Delta)^s u_n + c u_n = F(u_{n-1}) & \text{dans } \Omega_T \\ u_n(x, t) = h(x, t) & \text{dans } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (1.17)$$

pour  $n \geq 1$ . Si pour  $n = 0$  on choisit  $u_0 = \underline{u}$ , alors on montrera dans le Lemme 1.1, que  $\{u_n\}$  est une suite de sous-solution croissante, qu'on note par  $\{\underline{u}_n\}_{n \geq 0}$ .

Et si  $u_0 = \bar{u}$ , on montrera que cette suite est une suite de sur-solution décroissante, qu'on note par :  $\{\bar{u}_n\}_{n \geq 0}$ .

**Lemme 1.1.** *Soient  $\bar{u}, \underline{u}$  une sur, sous-solution ordonnées dans  $L^2(0, T; H_0^s(\Omega))$  du problème (1.12). Si  $f$  vérifie la condition (1.16), alors les suites  $\{\underline{u}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\bar{u}_n\}_{n \geq 0}$  vérifient :*

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, à chaque itération le second terme du problème 1.17 est fixé, donc d'après le Théorème 1.3 on a l'existence et l'unicité de solution  $u_n$ , ce qui justifie l'existence des suites  $\{\underline{u}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\bar{u}_n\}_{n \geq 0}$ .

Maintenant, on pose  $w(x, t) = \bar{u} - \bar{u}_1$ , où  $w$  vérifie :

$$\begin{cases} w_t + (-\Delta)^s w + c w \geq F(\bar{u}) - F(\bar{u}) (= 0) & \text{dans } \Omega_T \\ w(x, t) \geq 0 & \text{dans } \partial\Omega_T \end{cases}$$

d'après le principe du maximum  $w \geq 0$  dans  $\Omega_T$ , d'où  $\bar{u} \geq \bar{u}_1$  dans  $\Omega_T$ .

REMARQUE : le principe de max est applicable sur  $w$  car le terme  $cw$  est absorbable par  $w_t$  ie : on peut considérer  $v(x, t) = e^{ct} w(x, t)$  avec  $v$  vérifie le problème

$$v_t + (-\Delta)^s v \geq 0 \quad \text{dans } \Omega_T$$

$$v(x, t) \geq 0 \quad \text{dans } \partial\Omega_T$$

le principe du maximum donne  $v \geq 0$  dans  $\Omega_T$  et par conséquence  $w(x, t) = e^{-ct} v(x, t) \geq 0$  dans  $\Omega_T$ .

On pose  $w_1(x, t) = \bar{u}_1 - \underline{u}$ , donc  $w_1$  vérifie :

$$\begin{cases} (w_1)_t + (-\Delta)^s w_1 + c w_1 \geq F(\bar{u}) - F(\underline{u}) (\geq 0) & \text{dans } \Omega_T \\ w_1(x, t) \geq 0 & \text{dans } \partial\Omega_T. \end{cases}$$

D'après le principe du maximum  $w_1 \geq 0$  dans  $\Omega_T$ , d'où  $\bar{u}_1 \geq \underline{u}$  dans  $\Omega_T$ . Jusque là, on a montré :  $\underline{u} \leq \underline{u}_1 \leq \bar{u}$ . En particulier, on a  $\underline{u}_0 \leq \underline{u}_1$ .

Supposons (par récurrence) qu'on a  $\underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n$  et montrons qu'on a  $\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1}$ .

Si on pose  $w_{n+1} = \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n$ , alors  $w_{n+1}$  vérifie

$$\begin{cases} (w_{n+1})_t + (-\Delta)^s w_{n+1} + c w_{n+1} \geq F(\underline{u}_n) - F(\underline{u}_{n-1}) (\geq 0) & \text{dans } \Omega_T \\ w_{n+1}(x, t) \geq 0 & \text{dans } \partial\Omega_T. \end{cases}$$

Ce qui implique (principe du maximum) que  $w_{n+1} \geq 0$ , c'est à dire  $\underline{u}_{n+1} \geq \underline{u}_n$ . Par un raisonnement par récurrence, si on considère  $w_n = \bar{u} - \underline{u}_n$  alors d'une manière analogue on montre que  $\underline{u}_n \leq \bar{u}$  ( $\forall n$ ). On arrive ainsi à la conclusion :

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \bar{u} \quad (\forall n). \quad (1.18)$$

Par un raisonnement analogue, on montre

$$\underline{u} \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n \leq \bar{u} \quad (\forall n) \quad (1.19)$$

Soit  $v_1 = \bar{u}_1 - \underline{u}_1$ , où  $v_1$  vérifie :

$$\begin{cases} (v_1)_t + (-\Delta)^s v_1 + c v_1 = F(\bar{u}) - F(\underline{u}) (\geq 0) & \text{dans } \Omega_T \\ v_1(x, t) \geq 0 & \text{dans } \partial\Omega_T \end{cases}$$

le principe du maximum implique  $v_1 \geq 0$  dans  $\Omega_T$ , d'où  $\bar{u}_1 \geq \underline{u}_1$  dans  $\Omega_T$ .

Plus généralement, on a :  $\underline{u}_n \leq \bar{u}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

En effet,

Pour  $n = 0, 1$  la propriété est déjà vérifiée.

Par récurrence si on suppose  $\underline{u}_{n-1} \leq \bar{u}_{n-1}$ , alors  $v_n = \bar{u}_n - \underline{u}_n$  vérifie

$$\begin{cases} (v_n)_t + (-\Delta)^s v_n + c v_n = F(\bar{u}_{n-1}) - F(\underline{u}_{n-1}) (\geq 0) & \text{dans } \Omega_T \\ v_n(x, t) \geq 0 & \text{dans } \partial\Omega_T \end{cases}$$

par le principe de max,  $v_n \geq 0$ , c'est à dire  $\bar{u}_n \geq \underline{u}_n$ .

CONCLUSION :

$$\underline{u} \leq \underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}$$

□

**Théorème 1.4.** On définit  $\bar{v} := \lim \bar{u}_n$  p.p et  $\underline{v} := \lim \underline{u}_n$  p.p.  
alors

$$\underline{v} \leq \bar{v} \quad \text{dans } \Omega_T$$

et  $\underline{v}, \bar{v}$  sont des solutions faibles du problème (1.12).

*Démonstration.* :

On a  $\underline{u}_n \leq \bar{u}_k \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

faisons tendre  $n \rightarrow \infty$   $\underline{v} \leq \bar{u}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

et  $k \rightarrow \infty$   $\underline{v} \leq \bar{v}$

Pour simplifier, on remplace  $\{\bar{u}_n\}_{n \geq 0}$  par  $\{u_n\}_{n \geq 0}$ , et  $\bar{v}$  par  $u$ .

*Estimations à priori :*

Prenons  $u_n$  comme fonction test :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} (u_n)_t u_n dx dt + \int_0^T \langle (-\Delta)^s u_n, u_n \rangle dt &= \int_0^T \int_{\Omega} F(u_{n-1}) u_n dx dt \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_n^2 \Big|_0^T + \int_0^T \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2 dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega} F(\bar{u}) \bar{u} dx dt \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_n^2(x, T) + \int_0^T \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2 dt &\leq C(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u_0^2(x) dx \\ \implies &\begin{cases} \{u_n\} \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^s(\Omega)) \\ \{u_n\} \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque  $\{u_n\}$  est bornée dans l'espace réflexif  $L^2(0, T; H_0^s(\Omega))$ , alors (à une sous suite)

$u_n \rightharpoonup \tilde{u}$  dans  $L^2(0, T; H_0^s(\Omega))$ , et d'après l'injection compacte (à une sous suite)  
 $u_n \rightarrow \tilde{u}$  dans  $L^2(\Omega_T)$  et  $u_n \rightarrow \tilde{u}$  p.p. Grâce à la monotonie de  $\{u_n\}$  on déduit que  $u = \tilde{u}$ .

Soit  $\varphi \in H^*$ . En utilisant  $\varphi$  comme fonction test dans la formulation faible :

$$\int_{\Omega_T} (u_n)_t \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \langle (-\Delta)^s u_n, \varphi \rangle \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} F(u_{n-1}), \varphi \, dx \, dt$$

par intégration par parties,

$$- \int_{\Omega_T} (u_n) \varphi_t \, dx \, dt + \int_0^T \langle (-\Delta)^s u_n, \varphi \rangle \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} F(u_{n-1}) \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx.$$

En appliquant le Théorème de convergence monotone sur  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$ , on déduit

$$\int_0^T \int_{\Omega} F(u_{n-1}) \varphi \, dx \, dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} F(u) \varphi \, dx \, dt.$$

Par dualité,

$$\int_0^T \langle (-\Delta)^s u_n, \varphi \rangle \, dt \rightarrow \int_0^T \langle (-\Delta)^s u, \varphi \rangle \, dt.$$

De même,

$$\Rightarrow \int_{\Omega_T} (u_n) \varphi_t \, dx \, dt \rightarrow \int_{\Omega_T} u \varphi_t \, dx \, dt.$$

Conclusion :  $\bar{v}$  est une solution faible de (1.12).

Enfinement, si on applique le même raisonnement précédent à  $u_n := \underline{u}_n$ ,  $u := \underline{v}$ , on déduit que  $\underline{v}$  est une solution faible du problème (1.12).  $\square$

# Chapitre 2

## SYSTÈME PARABOLIQUE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un système parabolique à deux équations couplées avec une diffusion non-locale .

On considère donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + (-\Delta)^s u = f(u, v) \quad (x, t) \in \Omega_T \\ v_t + (-\Delta)^s v = g(u, v) \quad (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, t) = h_1(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega_T \\ v(x, t) = h_2(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega_T \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $\partial\Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup ((\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T))$ ,  $\Omega$  est un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $f, g \in C(\mathbb{R}^2)$ .

Un outil fondamental pour avoir l'existence des solutions est la méthode de **monotonie**, pour cela on va préciser le concept de sur et sous-solutions pour les systèmes et ce que veut dire  $H = (f, g)$  monotone .

## 2.1 Méthode de monotonie

### 2.1.1 Fonction quasi-monotone

**Définition 2.1.** On dit que la fonction  $f : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D_i \subset \mathbb{R}$  est quasi-monotone croissante (resp. décroissante) dans  $D_1 \times D_2$  si pour tout  $u \in D_1$ ,  $f(u, v)$  est croissante

(resp. décroissante) par rapport à  $v \in D_2$ .

**Définition 2.2.** Cas de fonction vectorielle

Soit

$$\begin{aligned} H : D_1 \times D_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\rightarrow H(u, v) = (f(u, v), g(u, v)) \end{aligned}$$

La fonction  $H$  est dite :

- Quasi-monotone croissante dans  $D_1 \times D_2$ , si  $f, g$  sont quasi-monotone croissante.
- Quasi-monotone décroissante, si  $f, g$  sont quasi-monotone décroissante.
- Quasi-monotone mixte, si l'une des composantes est quasi-monotone croissante et l'autre quasi-monotone décroissante.

Si  $H$  est de classe  $C^1$ , alors les définitions ci-dessus se traduisent (respectivement) en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} \geq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} \geq 0; & \quad (u, v) \in D_1 \times D_2 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \leq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} \leq 0; & \quad (u, v) \in D_1 \times D_2 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \leq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} \geq 0; & \quad (u, v) \in D_1 \times D_2 \end{aligned}$$

En ce qui suit, on pose  $h(x, t) = (h_1(x, t), h_2(x, t))$  et on note comme relation d'ordre dans  $\mathbb{R}^2$  par ' $\leq$ ' qui est définie par :

pour  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$   $\left( X \leq Y \text{ ssi } x_1 \leq y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2 \right)$ .

**Définition 2.3. sous et sur-solution**

$\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$  et  $\underline{U} = (\underline{u}, \underline{v})$  sont dites (respectivement) sur-solution et sous-solution ordonnée du problème (2.1) si elles vérifient

$$1) \underline{U}(x, t) \leq \bar{U}(x, t) \quad (x, t) \in \Omega_T$$

$$2) \underline{U}(x, t) \leq h(x, t) \leq \bar{U}(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega_T$$

3) Selon les données, l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

3.1) Si  $H = (f, g)$  est quasi-monotone croissante :

$$\begin{cases} \bar{u}_t + (-\Delta)^s \bar{u} - f(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq \underline{u}_t + (-\Delta)^s \underline{u} - f(\underline{u}, \underline{v}) & (x, t) \in \Omega_T \\ \bar{v}_t + (-\Delta)^s \bar{v} - g(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq \underline{v}_t + (-\Delta)^s \underline{v} - g(\underline{u}, \underline{v}) & (x, t) \in \Omega_T \end{cases} \quad (2.2)$$

3.2) Si  $H$  est quasi-monotone décroissante :

$$\begin{cases} \bar{u}_t + (-\Delta)^s \bar{u} - f(\bar{u}, \underline{v}) \geq 0 \geq \underline{u}_t + (-\Delta)^s \underline{u} - f(\underline{u}, \bar{v}) & (x, t) \in \Omega_T \\ \bar{v}_t + (-\Delta)^s \bar{v} - g(\underline{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq \underline{v}_t + (-\Delta)^s \underline{v} - g(\bar{u}, \underline{v}) & (x, t) \in \Omega_T \end{cases} \quad (2.3)$$

3.3) Si  $H$  est quasi-monotone mixte :

$$\begin{cases} \bar{u}_t + (-\Delta)^s \bar{u} - f(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq \underline{u}_t + (-\Delta)^s \underline{u} - f(\underline{u}, \underline{v}) & (x, t) \in \Omega_T \\ \bar{v}_t + (-\Delta)^s \bar{v} - g(\underline{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq \underline{v}_t + (-\Delta)^s \underline{v} - g(\bar{u}, \underline{v}) & (x, t) \in \Omega_T \end{cases} \quad (2.4)$$

#### Définition 2.4. **intervalle fonctionnel**

Soit  $\underline{U} = (\underline{u}, \underline{v})$  et  $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$ , on définit le secteur

$$[\underline{U}, \bar{U}] = \left\{ U \in E \quad \underline{U} \leq U \leq \bar{U} \right\}$$

On prend  $E = L^2(0, T; H_0^s(\Omega))$ .

### 2.1.2 Construction de la suite des sous-solutions et l'autre des sur-solutions :

#### Conditions sur la fonction de réaction

Supposons que les fonctions  $f, g$  satisfassent la condition de Lipschitz unilatéral,

i.e :

$$\begin{cases} f(u_1, v) - f(u_2, v) \geq -c_1(u_1 - u_2) & u_2 \leq u_1 \\ g(u, v_1) - g(u, v_2) \geq -c_2(v_1 - v_2) & v_2 \leq v_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

et comme dans le cas d'une seule équation on construit une fonction monotone (croissante ici) à partir de  $f$  et  $g$ , on la définit comme suit :

$$\begin{aligned} F(u, v) &:= c_1 u + f(u, v) \\ G(u, v) &:= c_2 v + g(u, v). \end{aligned}$$

À partir d'une 1<sup>er</sup> itération bien choisit, on construira une suite des sous et sur- solutions, données par le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_n)_t + (-\Delta)^s u_n + c_1 u_n = F(u_{n-1}, v_{n-1}) & \text{dans } \Omega_T \\ (v_n)_t + (-\Delta)^s v_n + c_2 v_n = G(u_{n-1}, v_{n-1}) & \text{dans } \Omega_T \\ u_n(x, t) = h_1(x, t) & \text{dans } \partial\Omega_T \\ v_n(x, t) = h_2(x, t) & \text{dans } \partial\Omega_T \end{array} \right. \quad (2.6)$$

L'existence et l'unicité de solution est assuré à chaque itération pour ce système, vu qu'à chaque  $n \in \mathbb{N}$  les équations sont découplées et avec un second membre constant par rapport à  $u_n$  et  $v_n$ .

**Lemme 2.1.** *On suppose que  $H = (f, g)$  est quasi-monotone et vérifie (2.5). Alors  $\{\overline{U}_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\underline{U}_n\}_{n \geq 0}$  sont monotones (avec  $\underline{U}_n = (\underline{u}_n, \underline{v}_n)$  et  $\overline{U}_n = (\overline{u}_n, \overline{v}_n)$ ).  
De plus :*

$$\underline{U} \leq \underline{U}_n \leq \underline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_{n+1} \leq \overline{U}_n \leq \overline{U} \quad \forall n \geq 0$$

*Démonstration.* L'idée de la démonstration est la même qu'on a utilisé pour une seule équation, vu que les équations du système sont découplées, la seule différence est de pouvoir contrôler  $F$  par rapport à sa première composante et  $G$  par rapport à sa deuxième composante. Ceci est possible lorsque  $H$  est quasi-monotone croissante, décroissante ou mixte, on doit juste bien choisit les première itérations.

- si  $H$  est quasi-monotone croissante alors on prend  $(\underline{u}_0, \underline{v}_0) = (\underline{u}, \underline{v})$  et  $(\overline{u}_0, \overline{v}_0) = (\overline{u}, \overline{v})$ .
- Si  $H$  est quasi-monotone décroissante alors on prend  $(\underline{u}_0, \underline{v}_0) = (\underline{u}, \overline{v})$  et  $(\overline{u}_0, \overline{v}_0) =$

$(\bar{u}, \underline{v})$ .

- Si  $H$  est quasi-monotone mixte alors on prend  $(\underline{u}_0, \underline{v}_0) = (\underline{u}, \underline{v})$  et  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = (\bar{u}, \bar{v})$ .

□

### 2.1.3 Existence de solution :

Maintenant, on prend :  $\underline{V} := \lim \underline{U}_n$  et  $\bar{V} = \lim \bar{U}_n$ , qui existent à partir de la monotonie et la bornitude (dans  $E$ ) des suites.

**Théorème 2.1.** Soient  $(\underline{u}, \underline{v})$  et  $(\bar{u}, \bar{v})$  une sous et une sur-solution (resp) ordonnée du problème (2.1). Supposons  $H$  est quasi-monotone dans  $[\underline{U}, \bar{U}]$  et elle vérifie ((2.5)), alors le problème (2.1) admet  $\underline{V}, \bar{V}$  comme solutions faibles dans  $E$ . De plus, on a :  $\underline{V} \leq \bar{V}$

**Remarque 2.1.** Si  $f, g$  sont Lipschitziennes alors on a l'unicité de la solution.

### 2.1.4 Application

Maintenant dans cette partie, on va appliquer la méthode de monotonie pour montrer l'existence et l'unicité et même la positivité de l'exemple suivant qui décrit l'interaction entre deux populations (proie prédateur, compétition, coopération).

Soit le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + d_1(-\Delta)^s u = f_1(u) + g_1(u, v) & \text{dans } \Omega_T \\ v_t + d_2(-\Delta)^s v = f_2(v) + g_2(u, v) & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ v(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$u, v$  représentent la concentration des deux populations,  $d_1, d_2$  les taux de diffusion.  $f_1, f_2$  sont les fonctions de croissance des deux populations  $u, v$  respectivement.

Finalement,  $g_1, g_2$  désignent l'interaction entre les deux populations et  $u_0, v_0$  représentent la concentration des deux populations à l'instant initial.

Le laplacien fractionnaire montre que la diffusion dépend de tout le domaine et non pas juste le voisinage de l'emplacement de l'élément.

### Existence et unicité

Soit le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + d_1(-\Delta)^s u = u(a_1 - b_1 u + \alpha v) & \text{dans } \Omega_T \\ v_t + d_2(-\Delta)^s v = v(a_2 - b_2 v + \beta u) & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ v(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Les populations ci-dessus suivent une loi de croissance logistique où  $a_i$  désigne leur taux de croissance et  $\frac{b_i}{a_i}$  la capacité limite, pour  $i = 1, 2$ .

Selon le signe de  $\alpha, \beta$  on distingue 3 cas :

1. si  $sign(\alpha, \beta) = (-, +)$  ou  $(+, -)$  il s'agit d'un modèle proie-prédateur dont  $\alpha$  est le taux de prédation et  $\beta = e\alpha$  avec  $e$  c'est le taux de conversion.
2. si  $sign(\alpha, \beta) = (-, -)$  il s'agit d'un modèle de compétition et chaque paramètre caractérise la force de compétition exercée sur l'autre population.
3. si  $sign(\alpha, \beta) = (+, +)$  il s'agit d'un modèle de coopération.

#### Méthode de monotonie

Tout d'abord vérifions que  $F = (f, g)$  est quasi-monotone, avec

$$f(u, v) = u(a_1 - b_1 u + \alpha v)$$

$$\text{et } g(u, v) = v(a_2 - b_2 v + \beta u).$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial v} = \alpha u \text{ pour tout } u \geq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} = \beta v \text{ pour tout } v \geq 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{sign}(\alpha, \beta) = (+, +) \implies F \text{ quasi-monotone croissante .} \\ \text{sign}(\alpha, \beta) = (-, -) \implies F \text{ quasi-monotone décroissante.} \\ \text{sign}(\alpha, \beta) = (-, +) \implies F \text{ quasi-monotone mixte .} \end{array} \right.$$

On remarque que :  $f(0, 0) = 0$  et  $g(0, 0) = 0$  donc on prend  $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$ . Pour la sur-solution, on opte pour une constante  $(\bar{u}, \bar{v}) = (c_1, c_2)$  avec  $c_i > 0$  pour  $i = 1, 2$ .

On remarque que  $c_i > 0$  implique que la sous et sur-solution sont comparables.

D'après les définitions de sous et sur-solution (voir la 3ème condition) et selon la monotonie de F, on fixe les conditions sur  $c_i$  pour avoir notre sur-solution. Plus précisément,

1. Si F est quasi-monotone croissante ( $\alpha > 0$  et  $\beta < 0$ ) :

D'après la condition 3)

$$\left\{ \begin{array}{l} -f(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq -f(\underline{u}, \underline{v}) \\ -g(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq -g(\underline{u}, \underline{v}) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 - b_1 c_1 + \alpha c_2 \leq 0 \\ a_2 - b_2 c_2 + \beta c_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

vu que  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , il suffit de résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 - b_1 c_1 + \alpha c_2 = 0 \\ a_2 - b_2 c_2 + \beta c_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\implies (c_1, c_2) = \left( \frac{1}{b_1} (a_1 + \alpha \frac{\beta a_1 + b_1 a_2}{b_1 b_2 - \beta \alpha}), \frac{\beta a_1 + b_1 a_2}{b_1 b_2 - \beta \alpha} \right) \text{ si } \beta \alpha \neq b_1 b_2 \text{ et } b_1 b_2 > \beta \alpha.$$

Si de plus  $0 \leq u_0 \leq c_1$  et  $0 \leq v_0 \leq c_2$ , alors d'après le Théorème 2.1 il existe une unique solution dans  $[(\underline{u}, \underline{v}), (\bar{u}, \bar{v})]$ .

2. Si F est quasi-monotone décroissante ( $\alpha < 0$  et  $\beta < 0$ ) :

D'après la condition 3)

$$\left\{ \begin{array}{l} -f(\bar{u}, \underline{v}) \geq 0 \geq -f(\underline{u}, \bar{v}) \\ -g(\underline{u}, \bar{v}) \geq 0 \geq -g(\bar{u}, \underline{v}) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} -c_1 (a_1 - b_1 c_1) \geq 0 \\ -c_2 (a_2 - b_2 c_2) \geq 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} c_1 \geq \frac{a_1}{b_1} \\ c_2 \geq \frac{a_2}{b_2} \end{array} \right.,$$

on prend  $(c_1, c_2) = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right)$ .

On remarque que  $c_i > 0$ , ce qui entraîne que la sous et la sur solution sont comparables, si de plus on a  $0 \leq u_0 \leq c_1$  et  $0 \leq v_0 \leq c_2$ . Alors, d'après le Théorème 2.1 il existe une unique solution dans  $[(\underline{u}, \underline{v}), (\overline{u}, \overline{v})]$ .

3. Si F est quasi-monotone mixte,  $(\alpha < 0, \beta > 0)$  :

$$\begin{cases} -f(\overline{u}, \underline{v}) \geq 0 \geq -f(\underline{u}, \overline{v}) \\ -g(\overline{u}, \overline{v}) \geq 0 \geq -g(\underline{u}, \underline{v}) \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} a_1 - b_1 c_1 \leq 0 \\ a_2 - b_2 c_2 + \beta c_1 \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 \geq \frac{a_1}{b_1} \\ c_2 \geq \frac{1}{b_2} \left(a_2 + \beta \frac{a_1}{b_1}\right). \end{cases}$$

On prend  $(c_1, c_2) = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{1}{b_2} \left(a_2 + \beta \frac{a_1}{b_1}\right)\right)$ . On a bien une sous et sur-solution comparable, si de plus  $(u_0, v_0) \in [(0, 0), (c_1, c_2)]$  alors d'après le Théorème 2.1 il existe une unique solution dans  $[\underline{U}, \overline{V}]$ .

**Remarque 2.2.** *Pour montrer la positivité des solutions, il suffit de choisir une sous-solution strictement positive et une sur-solution de telles sorte qu'ils seront comparables.*

## 2.2 Conservation de la masse

### 2.2.1 Conditions (P) et (M)

Soit le système :

$$\begin{cases} u_t + d_1(-\Delta)^s u = f(u, v) \\ v_t + d_2(-\Delta)^s v = g(u, v). \end{cases} \quad (2.9)$$

Le système conserve la positivité si et seulement si le système sans diffusion conserve la positivité. Pour cela on suppose que :

$$(P) \quad \begin{cases} f(0, v) \geq 0, \forall v \geq 0 \\ g(u, 0) \geq 0, \forall u \geq 0 \end{cases}$$

En ce qui concerne la conservation de la masse totale , on suppose que :

$$(M) \quad f + g \leq 0$$

### 2.2.2 Exemple

Sans perte de généralité , on prend

$$\begin{aligned} f(u, v) &= -uv^\beta \\ g(u, v) &= uv^\beta \end{aligned}$$

avec  $\beta \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + d_1(-\Delta)^s u = -uv^\beta & \text{dans } \Omega_T \\ v_t + d_2(-\Delta)^s v = uv^\beta & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ v(x, t) = 0 & \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.10)$$

tels que  $u_0, v_0 \in L^\infty$ , positives.

**Remarque 2.3.** les fonctions  $f$  et  $g$  vérifient les conditions (P) et (M) donc la positivité et la conservation de la masse des solutions du problème (2.10) sont assurées.

i.e.  $u \geq 0$  et  $v \geq 0 \dots(P)$

et  $\int_{\Omega} u(t, x) + v(t, x) dx \leq \int_{\Omega} u_0(x) + v_0(x) dx \dots(M)$

*Démonstration.* Le système conserve la masse.

Soit  $\psi_n = f(\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

où :  $\varphi$  est la première fonction propre associée à  $\lambda_1$  et  $f(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma + \frac{1}{n}}$ .

$f$  : est concave, croissante à valeur dans  $[0, 1]$ .

L'inégalité de Kato nous donne :

$$(-\Delta)^s \psi \geq \frac{1}{n(\varphi + \frac{1}{n})} \lambda_1 \varphi \geq 0 \quad (2.11)$$

Par sommation des deux premières équations du système (2.10) et on utilise  $\psi_n$  comme fonction test et par intégration sur  $\Omega_T$ , on aura :

$$\int_{\Omega} (u + v) \psi_n dx + d_1 \int_{\Omega_T} (-\Delta)^s u \psi_n dx dt + d_2 \int_{\Omega_T} (-\Delta)^s v \psi_n dx dt \leq \int_{\Omega} (u_0 + v_0)$$

à partir de (2.10) et vu que l'opérateur est auto-adjoint alors :

$$\int_{\Omega} (u + v) \psi_n \leq \int_{\Omega} (u_0 + v_0) dx$$

faisons tendre  $n \rightarrow +\infty$  et le théorème de convergence monotone donnent :

$$\int_{\Omega} (u + v) \leq \int_{\Omega} (u_0 + v_0). \quad \square$$

### Existence locale :

**Théorème 2.2.** Soient  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ . Si le système (2.10) vérifie la condition (P) et (M) alors il admet une solution locale.

Pour montrer l'existence, on applique le Théorème du point fixe de Schauder.

### Théorème 2.3. Théorème de Schauder

Soit  $T : K \rightarrow K$ , où  $K$  est un convexe fermé inclus dans un Banach  $E$ , et  $T$  une application continue compact. Alors, il existe un point fixe dans  $K$ .

Une conséquence du Lemme de Vitali est le lemme suivant

**Lemme 2.2.** Soient  $\Omega$  un domaine tel que  $\mu(\Omega) < \infty$  et  $1 \leq p < r < \infty$ , on suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f_n\|_{L^r(\Omega)} \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ f_n \rightarrow f \quad \mu.p.p. \end{array} \right. \quad \text{alors,} \quad \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. (Théorème 2.2)

On définit tout d'abord l'espace et l'opérateur  $T$  :

$$\begin{aligned} T &: E \longrightarrow E \\ \varphi &\longrightarrow v \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec  $v$  est la solution du :

$$\begin{cases} u_t + d_1(-\Delta)^s u &= -u\varphi_+^\beta \\ v_t + d_2(-\Delta)^s v &= u\varphi_+^\beta \end{cases} \quad (2.13)$$

et,

$$E = \left\{ \varphi \in E_\sigma : \|\varphi\|_{E_\sigma} \leq l \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_{L^{q\beta+a}} \leq l^{\frac{1}{\beta}} \right\}$$

notons que

$$E_\sigma = L^\sigma(0, T; W_0^{s,\sigma}(\Omega)).$$

Étape 1 : Cherchons les bons paramètres pour avoir  $T(E) \subset E$ .

Tout d'abord, pour  $\varphi \in E$  on montre que  $v \in E$  (pour un bon choix de paramètres) :

D'après le Lemme 1.1 on a l'estimation à priori suivante :

$$\|v\|_{L^r(\Omega_T)} \leq c \left[ \|u\varphi_+^\beta\|_{L^q(\Omega_T)} + \|v_0\|_{L^q(\Omega)} \right], \quad (2.14)$$

pour tout  $r$  tel que  $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{2s}{N+2s}$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^r(\Omega_T)} &\leq c[\|u_0\|_{L^\infty} \|\varphi_+\|_{L^{\beta q}(\Omega_T)} + \|v_0\|_{L^q(\Omega_T)}], \\ &\leq c(|\Omega_T|^{\frac{1}{q(q\beta+a)}} \|\varphi\|_{L^{q\beta+a}(\Omega_T)}^\beta) + c\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega_T|^{\frac{1}{q}}, \quad (\text{Par " } \leq \text{" Hölder}) \\ &\leq c_T \|\varphi\|_{L^{q\beta+a}(\Omega_T)}^\beta + c_T^* \\ &\leq c_T l + c_T^*. \end{aligned}$$

Fixons  $r > q\beta + a$  de sorte qu'on arrive à contrôler

$$\|v\|_{L^{q\beta+a}} \leq a_T \|v\|_{L^r(\Omega_T)}.$$

où,  $a_T = |\Omega_T|$ , notez que pour  $T$  assez petit, il existe  $l > 0$  tel qu'on a  $a_T(c_T l + c_T^*) \leq l^{\frac{1}{\beta}}$  ceci entraîne  $\|v\|_{L^{q\beta+a}(\Omega_T)} \leq l^{\frac{1}{\beta}}$ .

Par régularité du problème linéaire on a aussi  $\|v\|_{E^\sigma} \leq l$ .

Étape 2 : Dès présent on considère  $E$  muni de la topologie issue de la norme  $L^{q\beta}(\Omega_T)$  : Il est clair que  $E$  est convexe, montrons que  $E$  est fermé.

(Remarque : Notons que n'importe quelle suite de  $E$  est bornée dans  $E_\sigma$  et dans  $L^{q\beta+a}$ .)

Soit  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  tel que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  fortement dans  $E$ . Par les injections compactes de  $E_\sigma$  on déduit que (à une sous suite)  $\varphi_n \rightarrow \varphi_1$  p.p, et à une sous sous suite on déduit que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ . Par unicité de la limite p.p, on déduit  $\varphi = \varphi_1$ .

Par le Lemme de Fatou, et la semi continuité inférieure de la norme  $\|\cdot\|_{E_\sigma}$  on déduit que  $\varphi \in E$ .

Étape 3 :  $T$  est compact?

Soit  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  tel que  $\{\varphi_n\}_n$  est bornée dans  $(E, \|\cdot\|_{L^{q\beta}})$ , alors  $\{v_n\}$  admet elle une sous suite qui converge dans  $L^{q\beta}$ ? ( $v_n = T(\varphi_n)$ ).

On sait que  $v_n \in E$  pour tout  $n$  et par définition de  $E$ ,  $\{v_n\}_n$  est bornée dans  $E_\sigma$  i.e.  $\|v_n\|_{E_\sigma} \leq l$ ,  $E_\sigma$  étant réflexif ceci implique qu'il existe  $v \in E_\sigma$  tel que (à une sous suite de)  $\{v_n\}$  convergence faible vers  $v$  dans  $E_\sigma$ .

Par les injections compactes, on obtient  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^\sigma(0, T; L^\alpha(\Omega))$  avec  $\alpha < 2_s^*$ . Ceci implique qu'à une sous sous suite  $v_n \rightarrow v$  p.p.

Noter qu'on a  $\|v_n\|_{L^{q\beta+a}} \leq c$ , par conséquent, en utilisant le Lemme 2.2, on déduit :

$$\|v_n - v\|_{L^{q\beta+a-\epsilon}} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

en particulier pour  $\epsilon = a$  ce qui donne (à une sous suite)  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^{q\beta}$ .

Étape 4 :  $T$  est continu?

Soit  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  dans  $E$ , est ce que  $v_n \rightarrow v$  dans  $E$ ?

Tout d'abord noter que la suite  $\{v_n\}_n$  est une suite de  $E$  (voir Étape 1).

En calculant la différence entre l'équation de  $v_n$  et celle de  $v$ , on déduit que ( $v_n -$

$v$ ) vérifie l'équation

$$(v_n - v)_t + d_2(-\Delta)^s(v_n - v) = u((\varphi_n)_+^\beta - (\varphi)_+^\beta)$$

De plus, les conditions aux bords et la condition de Cauchy en  $t = 0$  sont nulles.

D'après le lemme de régularité 1.1 on a

$$\|v_n - v\|_{L^r(\Omega_T)} \leq c \|\varphi_n^\beta - \varphi^\beta\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ceci implique que  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement dans  $E$  vers  $v$ . Ce qui montre que  $T$  est continu.

Finalement, Par application du Théorème du point fixe de Schauder, on déduit l'existence locale d'une solution du problème ((2.10)).  $\square$

## Globalité

### Proposition 2.1. :

Si  $T_{max} < \infty$ , alors la solution explose dans  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  à l'instant  $t = T_{max}$ .

Par contraposée : si la solution est bornée alors,  $T_{max} = +\infty$ .

**Théorème 2.4.** On suppose que  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  et que les conditions (P) et (M) sont vérifiées alors le systèmes (2.10) admet une solution globale.

*Démonstration.* En ce qui suit, on essaye d'avoir une estimation dans  $L^\infty$  :

Si  $d_1 = d_2$  : (le cas le plus simple )

On a la globalité des solutions .

en effet : par addition des deux équations  $(u + v)_t + d_1(-\Delta)^s(u + v) = 0$

Principe de max  $\implies u(t, x) + v(t, x) \leq \|u_0\|_{L^\infty} + \|v_0\|_{L^\infty}$ .

(P)  $\implies \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} \leq C$ .

$$\implies T_{max} = +\infty.$$

Si  $d_1 \neq d_2$  :

Rappelons la 1<sup>er</sup> équation dans (2.10) :

$$u_t + d_1(-\Delta)^s u = -uv^\beta \leq 0$$

Par le principe de max, on a :

$$u(t, x) \leq u_0(x)$$

$$(P) \implies \|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$\implies u \in L^\infty(\Omega_T)$ ,  $u$  est la "bonne" composante.

Maintenant, on va essayer d'obtenir une estimation  $L^\infty$  pour  $v$ .

À l'aide du lemme 1.1, on va prouver qu'on a une estimation  $L^\infty(\Omega_T)$ .

Tout d'abord on a besoin d'une information sur le terme non-linéaire, d'après la 1<sup>ere</sup> équation de (2.10) : (prenons en considération que  $\int_\Omega (-\Delta)^s u dx \geq 0$ )

$$\begin{aligned} & u_t + d_1(-\Delta)^s u + uv^\beta = 0 \\ \text{(En intégrant sur } \Omega_T) \implies & 0 \leq \int_\Omega u + \int_{\Omega_T} uv^\beta \leq \int_\Omega u_0 \\ \implies & \int_{\Omega_T} uv^\beta \leq C \\ \implies & uv^\beta \in L^1(\Omega_T). \end{aligned}$$

Du lemme 1.1 on obtient :

$$\|v\|_{L^r(\Omega_T)} \leq c \left[ \|uv^\beta\|_{L^1(\Omega_T)} + \|v_0\|_{L^1(\Omega)} \right], \quad \forall r < \frac{N+2s}{N} \quad (2.15)$$

on a  $v \in L^r(\Omega_T) \implies v^\beta \in L^{q_1}$  avec  $q_1 = \frac{r}{\beta}$ .

**Si  $\beta < \frac{N+2s}{N}$  :**

On fixe  $r$  tels que  $\beta < r < \frac{N+2s}{N}$  et on réapplique le lemme et on obtient :

$$\|v\|_{L^{r_1}(\Omega_T)} \leq c \left[ \|uv^\beta\|_{L^{q_1}(\Omega_T)} + \|v_0\|_{L^{q_1}(\Omega)} \right] \quad \forall \frac{1}{r_1} > \frac{N+2s-2s q_1}{(N+2s) q_1}.$$

ceci donne :  $v^\beta \in L^{q_2}(\Omega_T)$  où  $q_2 = \frac{r_1}{\beta}$ .

On peut toujours fixer  $r_1$  tel que  $r_1 > r > \beta$  car  $\frac{N+2s}{N} < \frac{(N+2s) q_1}{N+2s(1-q_1)}$  et ceci nous mène à

réutiliser le lemme 1.1 du fait qu'on a  $q_2 > 0$ .

Après un nombre fini d'itérations, on se ramène à :  $q_M > \frac{N+2s}{2s}$ ,

ensuite,

$$r_M = \infty \implies v \in L^\infty(\Omega_T).$$

$\implies$  Existence globale de solution du système 2.10. ( $T_{max} = +\infty$ )

Maintenant que se passe t'il lorsque  $\beta$  est assez grand ?

Si  $\beta > \frac{N+2s}{N}$  :

Dans ce cas, on va utiliser une technique basée sur la régularité  $L^p$  des équations paraboliques. Une hypothèse de plus à ajouter est celle de la croissance polynomiale de  $g$ ,

$$(H_1) \quad g(u, v) \leq c_1(u + v)^a + c_2.$$

On utilise le Lemme suivant de la régularité  $L^p$  des équations paraboliques (pour plus de détails voir [[20], lemme 3.4])

**Lemme 2.3.** Soit  $w, \varphi$  des fonctions satisfaisant :

$$w_t + d_1(-\Delta)^s w = \varphi_t + d_2(-\Delta)^s \varphi \quad \text{dans } \Omega_T$$

et qu'elles vérifient la conditions de Dirichlet au bord avec des conditions initiales bornées.

Alors :  $\forall t \in (0, T) \forall 1 < p < \infty, \quad \exists c_1, c_2 :$

$$c_1(\|w\|_{L^p(\Omega_T)}) \leq \|\varphi\|_{L^p(\Omega_T)} + 1 \leq c_2(\|w\|_{L^p(\Omega_T)} + 1)$$

Revenons à notre modèle, par sommation des deux première équations du système (2.10), on obtient :

$$v_t + d_2(-\Delta)^s v = -(u_t + d_1(-\Delta)^s v).$$

On définit les opérateurs suivants  $A_i = \partial_t + d_i(-\Delta)^s$  pour  $i = 1, 2$ .

on sait que  $u \in L^\infty(\Omega_T)$  uniformément d'après le lemme 2.3 il résulte que

$$v \in L^p(\Omega_T) \quad \forall p < \infty.$$

On choisit un  $q$  assez grand de telle sorte  $v^\beta \in L^q(\Omega_T)$  tel que  $q > \frac{N+2s}{2s}$  le lemme 1.1 nous assure que  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ .

CONCLUSION : le système (2.10) admet une solution globale.  $\square$

**Remarque 2.4.** :

*Dans le cas local, pour les systèmes de réaction diffusion avec croissance exponentielle :*

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(u, v) & \text{dans } \Omega_T \\ v_t - b\Delta v = g(u, v) & \text{dans } \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $v_0 \geq 0$ ,  $u_0 \geq 0$ ,  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ .

On suppose que  $f, g \geq 0$  sont de classe  $C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$ , et des conditions au bords sous la forme

$$\begin{cases} \lambda_1 u + (1 - \lambda_1) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, T) \\ \lambda_2 v + (1 - \lambda_2) \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.17)$$

avec  $\lambda_i$  : fonction de classe  $C^1(\partial\Omega)$  tq  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ .

La globalité de la solution de (2.16) est assurée sous les hypothèses suivantes

$$(H1) \quad f(0, \xi) = g(0, \xi) = 0 \quad \text{et} \quad g(\rho, 0) \geq 0.$$

$$(H2) \quad g(\rho, \xi) \leq \psi(\xi) f(\rho, \xi)$$

où  $\psi \geq 0$  de classe  $C^1([0, \infty))$ , tel que il existe  $\beta \geq 1$  :  $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \eta^{\beta-1} \psi(\eta) = 1$ .

$$(H3) \quad g(\rho, \xi) \leq c \varphi(\rho) e^{\alpha \xi^\beta}$$

avec  $c > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 1$  et  $\varphi$  positive de classe  $C^1([0, \infty))$  tel que  $\varphi(0) = 0$ .

Et une hypothèse de restriction sur la condition initiale  $u_0 \leq \frac{8ab}{\alpha\beta N(a-b)^2}$

**Esquisse de la preuve :**

De l'hypothèse (H1) on obtient que  $u \in L^\infty(\Omega_T)$ .

*Maintenant pour  $v$ , on cherche d'abord une estimation  $L^p$  pour  $g$  avec un certain  $p$ , et par régularité parabolique on aura  $v \in L^\infty$  d'où la solution de (2.16) est globale. l'estimation sur  $g$  se résulte de la proposition 2.2 de [5].*

# Chapitre 3

## INSTABILITÉ DE TURING ET LA DIFFUSION FRACTIONNAIRE

Ce chapitre est basé sur l'article [22] dont le but est de connaître l'effet de la diffusion fractionnaire dans la formation des récifs coralliens.

### 3.1 Récifs coralliens

Un récif corallien est une structure naturelle bioconstruite, qui résulte de la construction d'un substrat minéral durable formé de carbonate de calcium.

Les récifs sont construits par des petits animaux nommés polypes ou coraux en déposant les ions de carbonate de calcium dissous sur les surfaces des récifs existants.



FIGURE 3.1: Récifs coralliens

La morphologie des coraux est complexe et c'est ça qui définit la beauté de cette dernière dans le monde marin.

Différents travaux de modélisation sur les récifs ont été proposés, Somathilake et Janak ont considéré le modèle de la croissance des récifs dans un réservoir avec une réaction-diffusion normale. ([24] et [23]).

Les équations de réaction diffusion fractionnaire apparaissent quand on modélise des processus avec une hétérogénéité non-local et spatiale. Plus spécialement, les modèles de réaction diffusion fractionnaire dans l'espace surviennent lors de la modélisation dans les milieux hétérogènes <sup>1</sup>.

La forme générale d'équations de réaction diffusion fractionnaire est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -D_s(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u + f(u, t),$$

où

- $-D_s(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u$  : le processus de la diffusion fractionnaire .
- $D_s$  : taux de diffusion.
- $f(u, t)$  : la réaction .

Maintenant on discute suivant les valeurs de  $s$  :

$\underline{s = 2}$  : la diffusion est normale.

$\underline{s \leq 2}$  : le processus de diffusion est lent par rapport à  $s = 2$ , elle est nommée sous-diffusion.

$\underline{s \geq 2}$  : le processus de diffusion est rapide par rapport à  $s = 2$  et elle est dite sur-diffusion.

La sous-diffusion est considérée lorsqu'on modélise un processus relié à des contraintes spatiales ou temporelle comme dans le cas des milieux poreux.

La sur-diffusion est considérée lors d'un processus comme la transportation d'une particule à travers un milieu chaotique ou turbulent.

Pour notre cas, les récifs coralliens peuvent être pris comme un milieu poreux. Par conséquence, pour rendre le modèle plus réaliste on prend la sous-diffusion.

---

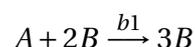
1. Dont les éléments sont de nature différente ou présentent des différences de structure, de fonction, de répartition.

## 3.2 Le modèle mathématique

Dans cette section, on va étudier la croissance des récifs coralliens dans un réservoir plein d'eau avec quelques larves coraux situées au fond, on assume que la croissance des polypes se fait dans le réservoir et que les coraux consomment les nutriments dissous et produisent des matériaux solides qui ne sont rien d'autre que leur squelette en extractant du carbonate de calcium dissous qui les entoure. Ce processus peut être vu comme une réaction entre les nutriments dissous et carbonate de calcium.

Notons par  $A$  et  $B$  (respectivement) les nutriments dissous et les matériaux solides dissous et par  $u, v$  leurs biomasses.

Dans ce cas, la concentration des nutriments et des matériaux solides est contrôlée par deux processus, la réaction et la sous-diffusion. Ainsi les nutriments réagissent avec les matériaux solides et produisent des matériaux solides supplémentaires. On peut résumer ceci comme suit



L'évolution en temps des nutriments est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -D_u(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u + a - bu - b_1 uv^2; \quad 1 \leq s \leq 2$$

où :

$a$  représente les nutriments initiaux déposés dans le système.

$b$  taux de la perte,  $b_1$  taux de réaction,

$D_u$  taux de diffusion des nutriments dissous.

De même, la concentration des carbonate de calcium est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -D_v(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v - b_2 v + b_1 v^2 u,$$

où  $b_2$  est le taux du carbonate de calcium déposé sur les coraux existants.

On note par  $w$  la concentration de carbonate de calcium solide déposée sur le récif corallien afin de former son squelette, l'évolution est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = b_2 v.$$

Maintenant en rassemblant ces équations, on trouvera le système suivant :

$$\begin{cases} u_t + d_u(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u &= b(u_s - u) - b_1 v^2 u, \\ v_t + d_v(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v &= -b_2 v + b_1 v^2 u, \\ w_t &= b_2 v, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $u_s = \frac{a}{b}$ . Afin de réduire le nombre de paramètre dans le système, on effectue le changement de variable ci-dessus :

$t^* = bt$ ,  $x^* = x/L$ ,  $y^* = y/L$  et  $z^* = z/L$ , où  $L = (\frac{d_u}{d})^{\frac{1}{s}}$  On obtient :

$$\begin{cases} u_t^* + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^* &= 1 - u^* - \alpha^2 v^{*2} u^*, \\ v_t^* + d(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v^* &= -\lambda v^* + \alpha^2 v^{*2} u^*, \\ w_t^* &= \lambda v^*, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $u^* = \frac{u}{u_s}$ ,  $v^* = \frac{v}{u_s}$ ,  $w^* = \frac{w}{u_s}$ ,  $\alpha = \frac{b_1 u_s^2}{b}$ ,  $\lambda = \frac{b_2}{b}$ , et  $d = \frac{d_v}{d_u}$ .

**Proposition 3.1.** *Avec le changement de variable ci-dessus, le système (3.1) est équivalent au système (3.2).*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t^*} \frac{dt^*}{dt}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= b \frac{\partial u}{\partial t^*}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour la diffusion, soit } X \in \mathbb{R}^3 : \quad (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(X) &= c \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(X) - u(Y)}{|X - Y|^{3+s}} dY, \\ \text{on pose : } X = LX^*, Y = LY^* : \quad (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(X) &= c \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(LX^*) - u(LY^*)}{L^{3+s} |X^* - Y^*|^{3+s}} L^3 dY^*, \\ &= \frac{c}{L^s} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(LX^*) - u(LY^*)}{|X^* - Y^*|^{3+s}} dY^*, \\ &= \frac{c}{L^s} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(X) - u(LY^*)}{|X^* - Y^*|^{3+s}} dY^* \\ &= \frac{1}{L^s} (-\Delta^*)^{\frac{s}{2}} u(X). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.1) on aura :

$$\begin{aligned} u_t^* + \frac{d_u}{bL^s} (-\Delta^*)^{\frac{s}{2}} u &= (u_s - u) - \frac{b_1}{b} v^2 u. \\ v_t^* + \frac{d_v}{bL^s} (-\Delta^*)^{\frac{s}{2}} v &= -\frac{b_2}{b} v + \frac{b_1}{b} v^2 u. \\ w_t^* &= \frac{b_2}{b} v. \end{aligned}$$

En divisant les équations sur  $u_s$  on obtient :

$$\begin{aligned} u_{t^*}^* + (-\Delta^*)^{\frac{s}{2}} u^* &= 1 - u^* - \frac{b_1 u_s^2}{b} v^{*2} u^*. \\ v_{t^*}^* + \frac{d_v}{d_u} (-\Delta^*)^{\frac{s}{2}} v^* &= -\frac{b_2}{b} v^* + \frac{b_1 u_s^2}{b} v^{*2} u^*. \\ w_{t^*}^* &= \frac{b_2}{b} v^*. \end{aligned}$$

On définit  $u^* = \frac{u}{u_s}$ ,  $v^* = \frac{v}{u_s}$ ,  $w^* = \frac{w}{u_s}$ ,  $\alpha = \frac{b_1 u_s^2}{b}$ ,  $\lambda = \frac{b_2}{b}$ , et  $d = \frac{d_v}{d_u}$ . le système devient :

$$\begin{cases} u_t^* + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u^* &= 1 - u^* - \alpha^2 v^{*2} u^*, \\ v_t^* + d(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v^* &= -\lambda v^* + \alpha^2 v^{*2} u^*, \\ w_t^* &= \lambda v^*. \end{cases}$$

□

Afin de simplifier les notations , on élimine les étoiles et on obtiendra :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u &= 1 - u - \alpha^2 v^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3, \\ v_t + d(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v &= -\lambda v + \alpha^2 v^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3 \\ w_t &= \lambda v, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.3 Instabilité de Turing :

Dans cette section, on va extraire les conditions d'instabilité de Turing pour le modèle de la croissance des récifs pour un point d'équilibre stable sans diffusion.

### 3.3.1 Les états stationnaires :

Maintenant on s'intéresse aux deux premières équations du modèle des récifs coralliens :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u = F(u, v) \\ v_t + d(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v = G(u, v) \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $F(u, v) = 1 - u - \alpha^2 uv^2$  et  $G(u, v) = -\lambda v + \alpha^2 uv^2$ .

Les états d'équilibre constant en espace sont :

$$E_1 = (1, 0), E_2 = \left( \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2\alpha}, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2\alpha\lambda} \right) \text{ et } E_3 = \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2\alpha}, \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2\alpha\lambda} \right).$$

Noter que  $E_2$  et  $E_3$  existent si  $\alpha > 2\lambda$ .

On considère le système (3.4) sans diffusion et on étudie la stabilité des points d'équilibre.

La matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \alpha^2 v^2 & -2\alpha^2 uv \\ \alpha^2 v^2 & -\lambda + 2\alpha^2 u \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Pour  $E_1$  :

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \det(J_1) = \lambda \\ \text{Tr}(J_1) = -(1 + \lambda) \end{cases} \quad (3.6)$$

et par conséquence :  $E_1$  est localement asymptotiquement stable .

Pour  $E_i$  avec  $i = 2, 3$

On remarque, le fait que  $E_i$  sont des points d'équilibre :

$-2\alpha^2 u_i v_i = \lambda$  et  $2\alpha^2 u_i = 2\lambda$ , en remplaçant dans la Jacobienne on obtiendra le résultat suivant :

$$J_i = \begin{pmatrix} -1 - \alpha^2 v_i^2 & -2\lambda \\ \alpha^2 v_i^2 & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La trace et le déterminant valent :

$$\text{Tr}(J_i) = \lambda - 1 - \alpha^2 v_i^2, \det(J_i) = \lambda(\alpha^2 v_i^2 - 1).$$

Stabilité des  $E_i$  :

Pour  $E_3$  :

$$\begin{aligned} \det(E_3) &= \lambda \left( \frac{(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})^2}{4\lambda^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{4\lambda} (\alpha - 2\lambda - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})(\alpha + 2\lambda - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}). \end{aligned}$$

On pose  $I_1 = \alpha - 2\lambda - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}$  et  $I_2 = \alpha + 2\lambda - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}$ .

Rappelons l'hypothèse d'existence de  $E_2$  et  $E_3$  :

$$\text{(hyp)} \quad \alpha > 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - 4\lambda^2 > 0$$

$$\text{on sait que } \alpha^2 - 4\lambda^2 < \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2} < \alpha$$

$$\Rightarrow 0 < 2\lambda < \alpha + 2\lambda - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2} = I_2$$

Le signe de  $I_1$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha - 2\lambda - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2} \\ &= \frac{\alpha - 2\lambda - (\alpha^2 - 4\lambda^2)}{\alpha - 2\lambda + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}} \\ &= \frac{4\lambda(2\lambda - \alpha)}{\alpha - 2\lambda + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}} \\ &\Rightarrow I_1 < 0. \end{aligned}$$

D'où :  $\det(E_3) < 0 \quad \Rightarrow \quad E_3$  est un point selle.

Pour  $E_2$  :

$$\det(E_2) = \lambda \left[ \alpha^2 \left( \alpha + \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2\alpha\lambda} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.8)$$

$$= \lambda \left[ \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})^2}{4\lambda^2} - 1 \right] > 0 \quad \text{car } \alpha^2 > 4\lambda^2 \quad (3.9)$$

$$\text{Tr}(E_2) = \lambda - 1 - \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})^2}{4\lambda^2} \quad (3.10)$$

si  $\lambda < 1$  alors  $Tr(E_2) < 0$  d'où la stabilité de  $E_2$ .

### 3.3.2 Les conditions d'instabilité :

Maintenant on s'intéresse à l'étude de l'instabilité de Turing du point  $E_2$ .

On utilisera la même stratégie de Turing pour les système de réaction diffusion avec la sous-diffusion qui consiste à déstabiliser un point d'équilibre lors de l'apparition de la diffusion et on cherche les conditions d'instabilité.

Les conditions d'instabilité pour les systèmes suivant avec des conditions au bord de Neumann homogène ont été obtenu. (voir [18]).

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u, v) & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - \Delta v = g(u, v) & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $f, g$  sont des fonctions qui décrivent le processus de réaction.

Donc, les conditions d'instabilité de Turing sont :

$$C_1 = \det(J) > 0,$$

$$C_2 = Tr(J) < 0,$$

$$C_3 = da_{11} + a_{22} > 0,$$

$$C_4 = C_3^2 - 4dC_1 > 0;$$

où :  $J$  est la matrice Jacobienne.

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Big|_E \quad (3.12)$$

avec  $E$  est le point d'équilibre stable.

Maintenant, on essaye d'extraire les conditions d'instabilité de Turing pour le système (3.4).

Tout d'abord, on linéarise (3.4) au voisinage de l'état d'équilibre  $\tilde{E} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ , pour cela on pose :  $u = \tilde{u} + u_1$  et  $v = \tilde{v} + v_1$ . Ainsi,

$$\begin{cases} (u_1)_t + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_1 = F_u(\tilde{u}, \tilde{v})u_1 + F_v(\tilde{u}, \tilde{v})v_1, \\ (v_1)_t + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v_1 = G_u(\tilde{u}, \tilde{v})u_1 + G_v(\tilde{u}, \tilde{v})v_1. \end{cases} \quad (3.13)$$

On considère les solutions de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\sigma t + iK \cdot X}, \quad \text{avec } X \in \mathbb{R}^3 \text{ et } K \in \mathbb{R}^3.$$

En l'injectant dans (3.13) on aura :

$$\begin{pmatrix} \sigma u_1 \\ \sigma v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - k^s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - dk^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } k = \|K\|.$$

Ceci est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} \sigma - a_{11} + k^s & -a_{12} \\ -a_{21} & \sigma - a_{22} + dk^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Vu qu'on cherche des solutions non triviales alors :

$$\begin{vmatrix} \sigma - a_{11} + k^s & -a_{12} \\ -a_{21} & \sigma - a_{22} + dk^s \end{vmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

On pose :

$$\mu = k^s, \quad g(\mu) = a_{11} + a_{22} - \mu - d\mu \quad \text{et} \quad h(\mu) = d\mu^2 - (da_{11} + a_{22})\mu + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En remplaçant dans (3.14) :

$$\sigma^2 - g(\mu)\sigma + h(\mu) = 0. \quad (3.15)$$

Prenons en considération le fait que  $E_2$  est stable, ceci donne  $g(\mu) < 0$  car :

$$a_{11} + a_{22} < 0.$$

Ainsi, (3.15) admet des solutions positives si et seulement si  $h(\mu) < 0$ . On cherche une des valeurs critiques  $\mu_*$  pour laquelle on a  $h(\mu_*) < 0$ .

On remarque que  $h$  est convexe, dans ce cas on cherche le minimum de  $h$ ;

$$\begin{aligned} \frac{dh(\mu)}{d\mu} &= 2d\mu - (da_{11} + a_{22}). \\ \frac{dh(\mu)}{d\mu} = 0 &\iff \mu_* = \frac{da_{11} + a_{22}}{2d}. \\ h(\mu_*) &= \frac{4d(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (da_{11} + a_{22})^2}{4d}. \end{aligned}$$

d'après ce qui précède  $\mu > 0$  donc forcément  $\mu_* > 0$  d'où la condition :

$$da_{11} + a_{22} > 0 \tag{3.16}$$

et comme on cherche à trouver des solutions positives de (3.15) alors on impose la condition :

$$h_{min}(\mu_*) < 0 \quad \text{c.à.d.} \quad 4d(\det(J) - (da_{11} + a_{22})^2) < 0. \tag{3.17}$$

LES CONDITIONS D'INSTABILITÉ DE TURING :

on rassemblons les hypothèses à partir de (3.8),(3.10),(3.16) et (3.17), alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1 = \det(J) > 0 \\ C'_2 = \text{Tr}(J) < 0 \\ C'_3 = da_{11} + a_{22} > 0 \\ C'_4 = 4d(\det(J) - (da_{11} + a_{22})^2) < 0. \end{array} \right. \tag{3.18}$$

On remarque que :  $C_i = C'_i, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

CONCLUSION : les conditions d'instabilité pour les systèmes de réaction diffusion fractionnaire sont les mêmes que celles de réaction-diffusion normale, la seule différence apparait au niveau du taux de croissance  $\sigma$  et le  $K$  qui dépendent de  $s$ .

# Bibliographie

- [1] B.Abdellaoui, A.Attar, R.Bentifour, I.Peral, *On Fractional Quasilinear Parabolic Problem With Hardy Potential*, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* (2018) 25 : 30.  
<https://doi.org/10.1007/s00030-018-0521-y>.
- [2] B.Abdellaoui, M.Medina, I.Peral, A.Primo. *Optimal Results For The Fractional Heat Equation*, arXiv :1412.8159v3 [math.AP] 13 Oct 2015.
- [3] B.Abdellaoui, M.Medina, I.Peral, A.Primo, *The effect of the Hardy potential in some Calderon-Zygmund properties for the fractional Laplacian*. *J.Differential Equations* 260 (2016) 8160-8206.
- [4] B.Abdellaoui, Y.O.Boukarabila, S.E.Miri. *Introduction aux méthodes variationnelles et application à la résolution des EDP elliptiques*. doi :10.13140/RG.2.2.10826.82883, Juin 2018. 109.
- [5] R.Belgacem, S.Benachour. *Global classical solutions for reaction-diffusion systems with nonlinearities of exponential growth*. *Journal of evolution equations*. August 2010.
- [6] G.M.Bisci, V.D.Radulescu and R.Servadei. *Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems*. *Encyclopedia of mathematics and its applications*, 2016.
- [7] N.Boudiba. *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec controle de masse*, thèse de doctorat, université de Rennes 1, France, 1999.
- [8] H.Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Dunod,2005.
- [9] L.Caffarelli, L.Silvestre. *An extension problem related to the fractional laplacian*, arXiv :math/0608640 [math.AP] 13 feb 2007.

- [10] F.Demengel, G.Demengel. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*, EDP sciences, Springer 2012.
- [11] E. Di Nezza, G.Palatucci, E.Valdinoci. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques Volume 136, Issue 5, July–August 2012, Pages 521-573.
- [12] C.Evans, *Partial Differential Equation*. American Math, Society, 2010 .
- [13] E.H.Laamri. *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions*. Dunod 2007.
- [14] T.Leonori, I.Peral, A.Primo and F.Soria, *Basic Estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Volume 35, Number 12, December 2015.
- [15] Anthony.W.Leung. *Partial differential equations application to life and physical sciences*. World scientific, 2009.
- [16] M.Medina, *Nonlinear elliptic and parabolic equations related to reaction diffusion and growth problems*, Universidad Autónoma de Madrid 2014-2015.
- [17] A.Y.Menacer, *Systèmes Paraboliques Non-linéaire Issu D'un Modèle Biologique : Existence et Comportement Asymptotique*, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, mémoire de master, 2015-2016.
- [18] J.D.Murray. *Mathematical Biology : Spatial models and biomedical applications (vol II)*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2003.
- [19] Ricardo.H.Nochetto. *Numerical methods for fractional differential diffusion.Lecture 2 : Spectral fractional laplacian*. Nonlocal school on fractional equations , NSFE 2017.
- [20] M.Pierre, *Global Existence in Reaction-Diffusion Systems with Control of Mass : a Survey*, M. Milan J. Math. (2010) 78 : 417, <https://doi.org/10.1007/s00032-010-0133-4>.
- [21] M.Pierre, *Systèmes De Réaction-Diffusion*, École de printemps, équations aux dérivées partielles non-linéaires Marrakech, 31 mars-5 avril 2008.
- [22] L.W.Somathilake and K.Burrage, *A space-fractional-reaction-diffusion model for pattern formation in coral reefs*, Cogent Mathematics & Statistics, 2018.

- [23] L.W.Somathilake & J.R.Wedagedera. *A reaction diffusion type mathematical model for formation of coral patterns*. Journal of National Science Foundation, 2014.
- [24] L.W.Somathilake & J.R.Wedagedera. *On the stability of a mathematical model for coral growth in a tank*. British Journal of Mathematics and Computer Science, 2012.
- [25] M.A.Y.Sosa, *Fractional reaction-diffusion problems*, Thèse de doctorat, université de Chile, 2014.
- [26] Kailai.Xu. *The fractional laplacian for the fractional pdes*. Stanford university. 2018.

## Résumé

Dans ce mémoire, on étudie les systèmes de réaction-diffusion fractionnaire, dont on montrera l'existence et la globalité des solutions à l'aide de la méthode de monotonie et par d'autres techniques pour les systèmes avec conservation de la masse, enfin, on étudiera un modèle des récifs coralliens dans lequel l'instabilité de Turing apparaîtra sous certaines conditions.

**Mots clés :** opérateurs non-locaux, système de réaction-diffusion, laplacien fractionnaire, méthode de monotonie, instabilité de Turing.

## Abstract

In this work, we study fractional reaction-diffusion systems, where we will show the existence and the globality of solutions using the method of upper-lower solution and other techniques for systems with control of mass, at last we will study a model of coral reefs where under some conditions the Turing instability will appear.

**Keywords:** nonlocal operators, fractional reaction diffusion systems, fractional laplacian, upper-lower method, Turing instability.

## ملخص

في هذه المذكرة، ندرس أنظمة الانتشار والتفاعل الكسري، حيث سنبين وجود وعمومية الحلول باستخدام طريقة الحل العلوي والسفلي وتقنيات أخرى للأنظمة التي تحفظ الكتلة، وأخيراً سنقوم بدراسة نموذج من الشعاب المرجانية حيث في ظل بعض الظروف نلاحظ ظهور عدم استقرارية تورينغ.

**كلمات مفتاحية:** عوامل غير محلية، أنظمة الانتشار والتفاعل الكسري، طريقة الحل العلوي والسفلي، عدم استقرارية تورينغ.