

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Biomathématiques et Modélisation

présenté par

SEBIANE Hassiba

Soutenu le : 27-06-2019

Les Systèmes de Filippov Appliqués en Écologie

Soutenu devant le jury composé de :

M. BENTIFOUR RACHID	MCB, Université de Tlemcen	Président
M. MENOUEUR AMINE	MCB, Université de Tlemcen	Examinateur
M. MIRI SOFIANE ELHADI	MCA, Université de Tlemcen	Encadreur

Année Universitaire : 2018-2019

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à
Mes très chers parents pour leurs sacrifices et qui n'ont
jamais cessé
de m'encourager, que ALLAH me les garde.*

*Mes deux chers frères et ma chère sœur.
A tous les membres de ma famille, petits et grands.
A ma deuxième sœur et chère amie Sebbagh Nour El
Houda.*

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **ALLAH** qui m'a donné la volonté, la motivation et le courage de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur **MIRI Sofiane El-Hadi**, qui m'a encadré, il était très généreux à travers son soutien, sa disponibilité, et ses conseils et orientations qui m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens à remercier, également, Monsieur **Bentifour Rachid** pour l'honneur d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à adresser mes remerciements à Monsieur **Menouer Mohammed Amine** pour l'honneur d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je tiens à remercier, chaleureusement les êtres qui me sont les plus chers au monde « *mes parents* », ma sœur, mes deux frères, et ma chère amie Nour El Houda pour leurs sacrifices et leurs conseils, sans eux, je ne serai jamais arrivée à ce niveau. que dieu les garde.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent, également, à tous mes

amis et mes collègues pour les moments et les souvenirs inoubliables qu'on a passé ensemble.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.

Table des matières

1	Le modèle Rosenzweig-MacArthur	4
1.1	Introduction du modèle	4
1.2	Redimensionnement	6
1.3	Positivité et limite des solutions	8
1.3.1	Q positivement invariant	8
1.3.2	La limite des solutions	9
1.4	Les équilibres et leur stabilités	10
1.4.1	Les isoclines nulles	10
1.4.2	Recherche des états d'équilibres	12
1.4.3	Étude de la stabilité des points d'équilibre	12
2	Méthode et système de Filippov	18
2.1	Construction de la solution du système :	26
2.2	Bifurcations dûes à la discontinuité :	28
2.3	Type de bifurcations :	29
3	Application à un modèle proie-prédateur	32
3.1	Modification du modèle Rosenzweig-MacArthur	32
3.2	Bifurcations pour le cas : $b < \frac{a-d}{a+d}$	39
3.2.1	Bifurcations locales	40
3.2.1.1	pseudo-nœud-selle :	40
3.2.1.2	Frontière-foyer	45

3.2.1.3	Frontière-nœud	47
3.3	Bifurcations pour le cas : $b > \frac{a-d}{a+d}$	50
3.3.1	Bifurcation locale	50
3.3.1.1	Frontière-foyer	50
3.3.1.2	Frontière-nœud	51
	Bibliographie	54

Préambule

Beaucoup de phénomènes sont modélisés par des équations différentielles à données discontinues. Il existe dans la littérature, plusieurs approches pour traiter ce types de problèmes, l'une d'entre est la méthode de Filippov, qui consiste à "recoller" la dynamique en incluant des équations supplémentaire dont la donnée est une combinaison convexe permettant de relier la dynamique aux points de discontinuité.

Dans ce mémoire nous mettons en applications, la théorie de Filippov, pour traiter un modèle de proies-prédateurs, soumis à un effort de pêche; la pêche des prédateurs n'étant autorisée que lorsque leur population dépasse un certain seuil, ce qui crée la discontinuité.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres, le premier chapitre est dédié à l'étude mathématique du modèle proies-prédateurs dû à Rosenzweig-MacArthur. Dans le deuxième chapitre on présente quelques notions de la théorie des systèmes de Filippov. Dans le troisième et dernier chapitre, on introduit un effort de pêche au système introduit dans le premier chapitre et on met en application la théorie de Filippov pour l'analyser.

Chapitre 1

Le modèle

Rosenzweig-MacArthur

1.1 Introduction du modèle

Le modèle de Rosenzweig-MacArthur est un système de deux équations différentielles qui décrit les interactions de deux populations proie-prédateur. Les résultats présentés et développés dans ce chapitre sont extraits d'un article de H.L. Smith ⁴. La densité de la population de proie est donnée par x et la densité de la population de prédateur est donnée par y . En général, les modèles proie-prédateur sont de la forme :

\dot{x} = taux de natalité - taux de mortalité naturelle des proies - taux
de mortalité.

\dot{y} = taux de reproduction - taux de mortalité naturelle des
prédateurs.

La question suivante est maintenant de savoir comment trouver des termes spécifiques décrivant par exemple, le taux de natalité de la proie ou le taux de reproduction des prédateurs. Ces descriptions

mathématiques doivent modéliser suffisamment le comportement de la vie réelle, tout en ayant des formes simples. Idéalement, ces modèles sont si simples qu'une analyse purement analytique permet d'obtenir de précieuses informations sur le comportement des solutions.

Les choix suivants sont couramment faits :

1. La proie a une croissance logistique et un taux de mortalité en l'absence des prédateurs.
2. Les prédateurs ont un taux de mortalité linéaire.
3. Les prédateurs n'interfèrent pas les uns avec les autres lors de la chasse. Par conséquent, le taux auquel les prédateurs tuent leurs proies est linéaire par rapport à la densité des prédateurs.
4. Le taux de reproduction des prédateurs est proportionnel au taux auquel les prédateurs tuent leurs proies.

Traduire ces hypothèses dans les systèmes d'équations donne les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - yh(x) \\ \dot{y} = y[dh(x) - c] \end{cases} \quad (1.1)$$

Tous les paramètres r , K , c et d sont supposés strictement positifs, où :

r : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur,

k : la capacité limite du milieu en proie,

$h(x)$: le taux prédation par prédateur

c : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie,

d : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs,

Dans ce cas, on suppose que h est donné par :

$$h(x) = \frac{sx}{1 + s\tau x}$$

qui est également connue sous le nom de **réponse fonctionnelle de Holling de type II**. Le paramètre s représente le taux auquel un prédateur recherche une proie en unité de surface par unité de temps, τ représente le temps qu'il faut à un prédateur pour manipuler une proie, c'est-à-dire tuer, dévorer et se reposer. Les deux paramètres s et τ sont positifs.

1.2 Redimensionnement

Le système est à 6 paramètres. Dans ce qui suit, les variables et les paramètres seront redimensionnés pour arriver à un système équivalent à 3 paramètres seulement. Cela simplifiera grandement les analyses ultérieures.

Considérons le système (1.1) et faisons le changement suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{x}{X} \\ v = \frac{y}{Y} \end{array} \right.$$

où $X, Y > 0$ doivent être choisis ultérieurement. Les équations différentielles pour u et v sont alors les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = \frac{\dot{x}}{X} = ru\left(1 - \frac{uX}{K}\right) - \frac{sYuv}{1+s\tau Xu} \\ \dot{v} = \frac{\dot{y}}{Y} = \frac{sdXuv}{1+s\tau Xu} - cv \end{array} \right.$$

Maintenant, choisissons $X = K$ et $Y = dX = dK$. Ce choix est pratique et deviendra bientôt évident. En remplaçant X et Y et en réarrangeant, le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = ru(1-u) - \frac{\frac{d}{r}uv}{\frac{1}{s\tau K} + u} \\ \dot{v} = \frac{\frac{d}{r}uv}{\frac{1}{s\tau K} + u} - cv \end{array} \right.$$

Il est aussi utile de changer l'échelle de temps en posant :

$$t = \frac{t^*}{r}.$$

Nous avons les relations suivantes entre les dérivées par rapport aux deux échelles de temps :

$$\frac{du}{dt^*} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{du}{dt} \frac{1}{r},$$

$$\frac{dv}{dt^*} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{dv}{dt} \frac{1}{r}.$$

Réécrire le système en fonction de cette modification

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = u(1-u) - \frac{\frac{d}{r\tau}uv}{\frac{1}{s\tau K} + u} \\ \dot{v} = \frac{\frac{d}{r\tau}uv}{\frac{1}{s\tau K} + u} - \frac{c}{r}v \end{array} \right.$$

où maintenant le point au-dessus de u et v indique la dérivée temporelle par rapport à t^* . Enfin, définissons $a = \frac{d}{r\tau}$, $b = \frac{1}{s\tau k}$ et $E = \frac{c}{r}$, le

système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = u(1 - u) - \frac{auv}{b+u} \\ \dot{v} = \frac{auv}{b+u} - Ev \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Notons que ce système ne contient plus que trois paramètres, mais qu'il est équivalent au système initial ; étant donné que tous les paramètres du système d'origine étaient supposés être strictement positifs, il s'ensuit que les nouveaux paramètres a , b et E sont également strictement positifs aussi.

1.3 Positivité et limite des solutions

Le système (1.4) est continuellement différentiable au voisinage du premier quadrant $Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u, v \geq 0\}$ ensuite, les solutions de problèmes à valeur initiale avec des conditions initiales non négatives existent et sont uniques. Nous montrerons que Q est positivement invariante, c'est-à-dire les solutions satisfaisant $u(0), v(0) \geq 0$ satisfaire $u(t), v(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. De plus, nous montrons que les solutions sont liées à qui vient et sont donc définies pour tout $t \geq 0$.

1.3.1 Q positivement invariant

notons le système (1.4) sous la forme :

$$\dot{u} = uP(u, v)$$

$$\dot{v} = vR(u, v).$$

Si $(u(t), v(t))$ est une solution du système, alors $\dot{u}(t) = u(t)p(t)$ où $p(t) = P(u(t), v(t))$ et par la méthode du facteur intégrant

$$\frac{d}{dt} \left(\exp\left(-\int_0^t p(s) ds\right) u(t) \right) = 0$$

et donc

$$u(t) = u(0) \exp\left(\int_0^t p(s) ds\right).$$

On voit que si $u(0) = 0$ alors $u(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et si $u(0) > 0$, alors $u(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ car la fonction exponentielle est positive. De même pour v . Donc le quadrant Q est positivement invariant.

1.3.2 La limite des solutions

En ce qui concerne la limite des solutions, nous prouvons ce qui suit :

Lemme 1.1. *Il existe $S_0 > 0$ tel que pour tout $S \geq S_0$, le triangle $T(S)$ de côtés $u = 0$, $v = 0$ et $u + v = S$ est positivement invariant pour le système (1.4).*

Puisque chaque point initial $(u(0), v(0)) \in Q$ satisfait $(u(0), v(0)) \in T(S)$ pour un certain $S \geq S_0$, cela montre que toutes les solutions commençant par Q sont bornées pour $t \geq 0$ puisque $(u(t), v(t)) \in T(S)$, $t \geq 0$.

Preuve. *Il suffit de montrer que les solutions ne peuvent pas sortir de $T(S)$ par l'hypothèse $u + v = S$ de notre triangle. Nous montrons que $\dot{u} + \dot{v} < 0$ si $u + v = S$. Pour $u + v = S$, on a*

$$\dot{u} + \dot{v} = u(1 - u) - Ev = u(1 - u) - E(S - u) = K(u), 0 \leq u \leq S.$$

Le maximum de la fonction parabolique $K(u)$ sur $0 \leq u$, obtenu en mettons sa dérivée égale à zéro, est à $u^* = \frac{1+E}{2}$ donc

$$K(u) \leq K(u^*) = -ES + \frac{(1+E)^2}{2} - \left(\frac{(1+E)}{2} \right)^2 < 0$$

si E est choisi assez grand.

Le premier quadrant sera supposé être l'espace de phase tout au long de mémoire puisque les densités de population négatives n'ont aucun sens dans ce contexte écologique. Les équations du système ont été simplifiées par une nouvelle mise à l'échelle et nous savons que les solutions avec des conditions initiales dans le premier quadrant sont bien définies et restent dans le premier cadrant Q .

Maintenant on fait une étude sur les équilibres et leur stabilité et on leur attribue des interprétations significatives.

1.4 Les équilibres et leur stabilités

Étude de système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f_1(x, y) = x(1-x) - \frac{axy}{b+x} \\ \dot{y} = f_2(x, y) = \frac{axy}{b+x} - dy \end{array} \right. \quad (1.3)$$

1.4.1 Les isoclines nulles

Les isoclines verticales

$$\dot{x} = 0 \implies x \left[(1-x) - \frac{ay}{b+x} \right] = 0$$

et donc

$$N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}.$$

$$N_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{1}{a}(1-x)(b+x)\}.$$

Les isoclines horizontales

$$\dot{y} = 0 \implies y \left[\frac{axy}{b+x} - d \right] = 0$$

et donc

$$N_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}.$$

$$N_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \frac{bd}{a-d}\}.$$

La figure 1.1 illustre une représentation géométrique de l'emplacement et du comportement des isoclines nulles pour deux paramètres différents.

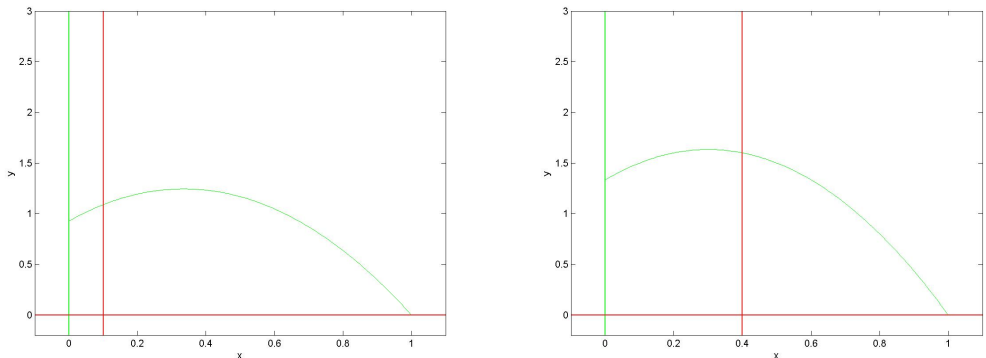


FIGURE 1.1 – Isoclines nulles pour les valeurs des paramètres $a = 0.3556$, $b = 0.33$ et $d = 0.0444$ (à gauche), et $a = 0.3$, $b = 0.4$ et $d = 0.15$ (à droite).

1.4.2 Recherche des états d'équilibres

Les points d'équilibres sont les intersections des isoclines nulles, par conséquence, il y a trois points d'équilibre $(0, 0)$, $(1, 0)$ et (x^*, y^*) qui se situent dans le premier quadrant positif. Les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ sont toujours des équilibres du système, indépendamment de la configuration des paramètres. Le troisième et le plus intéressant des équilibres, c'est l'intersection des isoclines non triviales, à savoir l'intersection de la parabole $y = \frac{1}{a}(1-x)(b+x)$ et la droite horizontale $x = \frac{bd}{a-d}$. Cet équilibre (x^*, y^*) sera appelé *équilibre de coexistence*. Puisque tous les paramètres sont supposés être positifs, une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation de l'équilibre de coexistence à l'intérieur du premier quadrant positif est donné par

$$0 < \frac{bd}{a-d} < 1 \quad (1.4)$$

Le cas où l'équilibre de coexistence coïncide avec $(1, 0)$ est exclu. Dans ce qui suit, nous supposons que l'inégalité (1.4) est vérifiée. De manière explicite, l'équilibre de coexistence est donné par

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{bd}{a-d}, \frac{b(a-bd-d)}{(a-d)^2} \right).$$

1.4.3 Étude de la stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des équilibres situés à $(0, 0)$ et $(1, 0)$, il suffit de considérer le système linéarisé autour de ces points. La matrice jacobienne associée au modèle (1.3) est donnée par

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x - \frac{aby}{(b+x)^2} & -\frac{ax}{b+x} \\ \frac{aby}{(b+x)^2} & \frac{ax}{b+x} - d \end{bmatrix}$$

A l'origine, nous avons :

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

qui est une matrice diagonale et admet deux valeurs propres réelles distinctes

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -d, \quad d > 0 \end{cases}$$

de signe opposée, cela implique que l'origine est un point selle.

Pour le point d'exclusion du prédateur, il vient :

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a}{b+1} \\ 0 & \frac{a}{b+1} - d \end{bmatrix}$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = \frac{a}{b+1} - d = \frac{(a-d)-bd}{b+1} > 0 \end{cases}$$

on utilise l'inégalité (1.4), les deux valeurs propres sont de signes contraires, cela implique que $(1, 0)$ est également un point selle.

L'étude de la stabilité de l'équilibre de coexistence est une question plus délicate. Dans ce cas, la stabilité dépend en fait de la configuration des paramètres.

Proposition 1.1. *L'équilibre de coexistence (x^*, y^*) est un foyer instable si $b < \frac{a-d}{a+d}$ et un foyer stable si $b > \frac{a-d}{a+d}$.*

Preuve. *Pour le troisième point d'équilibre (x^*, y^*)*

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2x^* - \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & -\frac{ax^*}{b+x^*} \\ \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & \frac{ax^*}{b+x^*} - d \end{bmatrix}$$

Pour simplifier cette matrice, il est utile de se rappeler des conditions définissant cet équilibre :

$$\begin{cases} 1 - x^* - \frac{ay^*}{b+x^*} = 0 \\ \frac{ax^*}{b+x^*} - d = 0 \end{cases}$$

ce qui permet de simplifier la matrice comme suit :

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2x^* - \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & -\frac{ax^*}{b+x^*} \\ \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

puisque les deux points x^* , y^* appartient au cadran positif, le déterminant de matrice jacobienne au point (x^*, y^*) est toujours positif

$$\det J(x^*, y^*) = \frac{a^2 b x^* y^*}{(b + x^*)^3} > 0.$$

Cela signifie que le produit des deux valeurs propres étant positives, négatives ou des conjugués complexes non nuls.

La trace de la matrice est la somme des valeurs propres. On a l'équation pour des isoclines verticales non triviales

$$y = \frac{1}{a}(1 - x)(b + x)$$

elle relie x^* et y^* de manière pratique. La trace de la matrice est donnée par :

$$\text{tr} J(x^*, y^*) = 1 - 2x^* - \frac{aby^*}{(b + x^*)^2}$$

En injectant y^* dans la trace de la matrice jacobienne, il vient :

$$\begin{aligned} \text{tr}J(x^*, y^*) &= 1 - 2x^* - \frac{ab}{(b+x^*)^2} \left[\frac{1}{a}(1-x^*)(b+x^*) \right] \\ &= \frac{x^*(1-b-2x^*)}{b+x^*}. \end{aligned}$$

Pour connaître la stabilité de l'équilibre (x^*, y^*) il faut étudier le signe de la trace. b et x^* sont positifs et donc le signe de la trace ne dépend que du terme $(1-b-2x^*)$.

les deux valeurs propres conjuguées complexes, c'est-à-dire $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\text{Re}(\lambda_1) = 2\text{Re}(\lambda_2) = 2\alpha = \text{tr}j(x^*, y^*)$$

et donc le signe de $\text{Re}(\lambda_1)$ et $\text{Re}(\lambda_2)$ sont les mêmes et égal au signe de $(1-b-2x^*)$, et donne un foyer.

On obtient deux cas :

- Si $1-b-2x^* > 0$ l'équilibre de coexistence (x^*, y^*) est un foyer instable.
- Si $1-b-2x^* < 0$ l'équilibre de coexistence (x^*, y^*) est un foyer stable.

En remplaçant $x^* = \frac{bd}{a-d}$ et la réécriture donne le résultat souhaité.

En calcule le sommet de la parabole verticale

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 0 \\ -(b+x) + 1 - x &= 0 \\ \bar{x} &= \frac{1-b}{2} \end{aligned}$$

Géométriquement, l'équilibre de coexistence est *un foyer instable* si x^* se trouve à gauche du sommet de la parabole, c'est-à-dire $x^* < \bar{x}$,

et un *foyer stable* si x^* se trouve à droite du sommet de la parabole, c'est-à-dire $x^* > \bar{x}$.

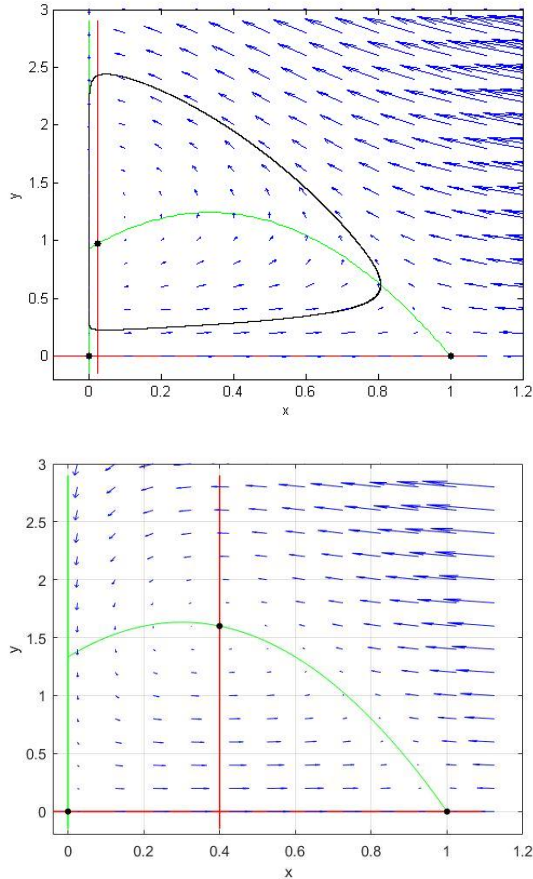


FIGURE 1.2 – Portraits de phase pour $a = 0.4$, $b = 0,3$ et $d = 0.1$ et $a = 0.3$, $b = 0.4$ et $d = 0.15$

Les deux portraits de phase sont illustrés les isoclines nulles, les équilibres qui sont l'intersections des isoclines verticales et horizontales et une orbite fermé entourant l'équilibre instable qui se trouve avant le sommet de parabole pour deux paramètres différents sont indiquées à la figure 1.2. Le champ de vecteur est indiqué par les flèches bleu, les isoclines sont vert et rouge comme avant. Équilibres sont illustrés

par les points noir et l'orbite fermé sous forme de lignes noir fermé. Ce système présente, une bifurcation de Hopf pour $b = \frac{a-d}{a+d}$, puisque pour le point d'équilibre (x^*, y^*) nous avons le déterminant qui est positif, $\frac{a^2 b x^* y^*}{(b+x^*)^3} > 0$, alors que la trace change de signe lorsque la droite verticale $x = \frac{bd}{a-d}$ qui est isocline horizontale traverse le sommet de la parabole $y = \frac{1}{a}(1-x)(b+x)$ qui est isocline verticale.

Proposition 1.2. *Si $b < \frac{a-d}{a+d}$ possède un cycle limite unique et stable, et un bifurcation de Hopf pour valeur $b = \frac{a-d}{a+d}$.*

Une preuve de cette proposition peut être trouvée dans l'article de Smith 4

Chapitre 2

Méthode et système de Filippov

les systèmes continus par morceaux sont décrits par les systèmes d'équations différentielles du type :

$$\dot{x} = f_i(x) \quad x \in S_i \subset \mathbb{R}^N \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

où les S_i , sont des ouverts (ne s'intersectant pas) séparés par des sous-variétés Σ_{ij} de dimensions $(N-1)$ (frontières). Les fonctions f_i sont supposées régulières (continues) sur les S_i , les frontières aussi sont supposées régulières (continues). Il est aussi supposé que $\bigcup_i S_i \cup_{ij} \Sigma_{ij} = \mathbb{R}^N$ (l'union des ouverts S_i et de leur frontière donne l'espace tout entier).

Ce type de système est rencontré dans la modélisation de différents phénomènes physiques, biologiques, économiques etc...

Si dans notre système nous avons $f_i(x) = f_j(x) \quad \forall x \in \Sigma_{ij}$, Σ_{ij} étant la frontière entre les deux ensembles adjacents S_i et S_j , dans ce cas \dot{x} est défini de façon unique, l'étude du système revient à faire une analyse classique, dans ce cas particulier les orbites dans la région

S_i peuvent approcher la frontière Σ_{ij} et passer transversalement à la région S_j . Les systèmes faisant apparaître une discontinuité sont alors appelés *systèmes de Filippov* (dans ce mémoire). Deux cas de figure se présentent à nous

1. Si les composantes transversales de $f_i(x)$ et $f_j(x)$ en $x \in \Sigma_{ij}$ sont de même signe l'orbite traverse la frontière Σ_{ij} , mais le vecteur tangent possède une discontinuité en ce point.

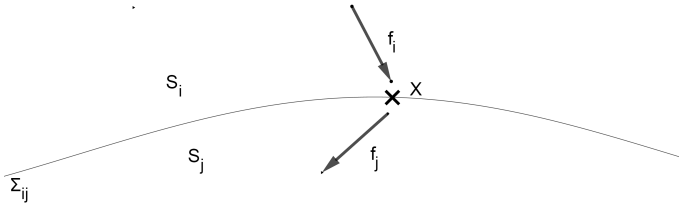


FIGURE 2.1 – Les composantes transversales de $f_i(x)$ et $f_j(x)$ sont de même signe

2. Si les composantes transversales de $f_i(x)$ et $f_j(x)$ en $x \in \Sigma_{ij}$ sont de signes opposés (les champs de vecteurs se répulsent ou se repoussent) dans des directions contraires. L'état du système est alors forcé de rester sur la frontière Σ_{ij} et d'y coulisser, (glisser).

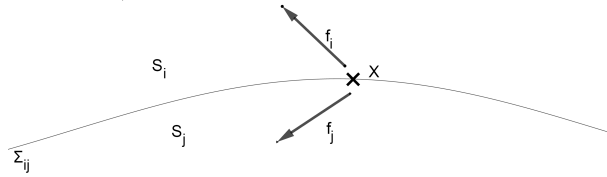
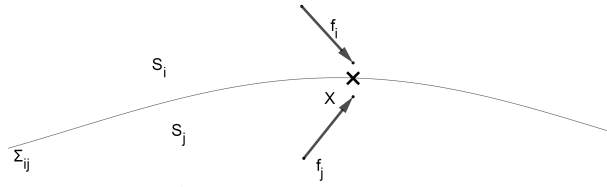


FIGURE 2.2 – Les composantes transversales de $f_i(x)$ et $f_j(x)$ sont de signes opposés

Le mouvement sur la frontière peut être défini de plusieurs façons, l'une d'elle est la méthode convexe de Filippov, qui semble être la plus naturelle, cette méthode définit la dynamique coulissante comme suit : $\dot{x} = g(x)$ sur Σ_{ij} où $g(x)$ est une combinaison convexe de f_i et f_j $g(x) = (\lambda f_i + (1 - \lambda) f_j)$, est tangente à Σ_{ij} en x ce qui fait de cette combinaison une formule unique.

Il est aussi à noter que l'analyse de bifurcation surtout dans la dynamique coulissante est d'une importance remarquable.

Pour illustrer tout ce qui a été dit plus haut, il est suffisant de nous limiter au système de Filippov planaire $x \in \mathbb{R}^2$ ou f_i $i = 1, 2$ afin de simplifier et de présenter notre travail de manière plus pédagogique . Soit donc le système

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in S_1 \\ f_2(x), & \text{si } x \in S_2 \end{cases}$$

On suppose de plus que la frontière séparant les deux régions S_1 et S_2 notée Σ est donnée par :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = 0\},$$

avec H une fonction régulière (disons C^1) avec un gradient ∇H qui ne s'annule pas le long de Σ .

On supposera aussi (sans perte de généralité) que :

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) < 0\},$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) > 0\},$$

et que $f_1 \neq f_2$ sur Σ .

Remarque : Σ est soit une courbe fermé ou une courbe infinie dans les deux sens.

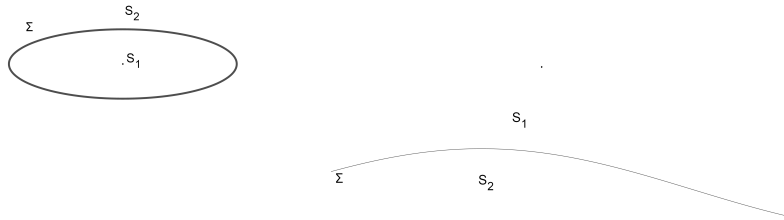


FIGURE 2.3 – Courbe fermé (à gauche), courbe infinie (à droite)

Le but de la méthode de Filippov est de "relier" les solutions standards obtenues dans S_1 et S_2 avec les solutions coulissantes dans Σ .

On considère la fonction :

$$\sigma(x) = \langle \nabla H(x), f_1 \rangle \langle \nabla H(x), f_2 \rangle.$$

H étant la fonction intervenant dans la définition de Σ . ∇H est son gradient.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire classique.

Rappelons que si :

$\langle u, v \rangle < 0$ alors u et v ne sont pas dans le même sens.

$\langle u, v \rangle > 0$ alors u, v sont dans la même sens.

$\langle u, v \rangle = 0$ alors u, v sont orthogonaux.

On définit alors "the crossing set" l'ensemble de croisement ou de traverse comme suit :

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma : \sigma(x) > 0\}.$$

Pour expliquer Σ_c , on peut dire que c'est l'ensemble de tous les points $x \in \Sigma$ où les deux vecteurs $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ont des composantes normales de même signe (pour faire simple, le champ de vecteur généré par $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont dans la même direction).

Dans ce cas de figure si $x \in \Sigma_c$, l'orbite traverse la frontière Σ ainsi l'orbite qui atteint x en provenance de S_1 est reliée à l'orbite entrant en S_2 au point x .

On définit à présent "the sliding set" l'ensemble coulissant ou glissant $\Sigma_s = \mathbb{C}_{\Sigma} \Sigma_c$ c'est le complémentaire de Σ_c dans Σ en d'autre terme $\Sigma_s = \{x \in \Sigma : \sigma(x) \leq 0\}$.

Σ_c est un ouvert (par définition même).

Σ_s est quant à lui l'union de segments (d'intervalle) coulissants et de points isolés (glissant) ou coulissant.

Les points tels que $x \in \Sigma_s$ avec $\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle = 0$ sont appelées points coulissants (glissants) singuliers. En ces points ou bien f_1 et f_2 sont tangent à Σ (et donc orthogonaux à $\nabla H(x)$) ou bien l'une des deux (f_1 ou f_2) s'annule et l'autre est tangente à Σ , ou bien les deux s'annulent.

La méthode de Filippov consiste à associer à f_1 et f_2 la combinaison convexe g (en tout point glissant (coulissant) non-singulier) où

$$g(x) = \lambda f_1(x) + (1 - \lambda) f_2(x).$$

avec

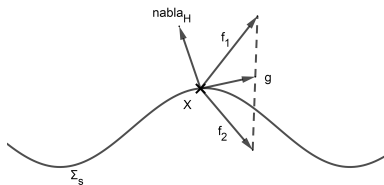
$$\lambda = \frac{\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle}{\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle}.$$

Remarque 2.1. Pourquoi ce choix de λ ?

On choisit cette expression de λ pour que g soit orthogonale à ∇H (g est tangent à Σ) en effet :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla H(x), g(x) \rangle &= \langle \nabla H(x), \frac{\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle}{\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle} f_1(x) \rangle \\
 &+ \langle \nabla H(x), (1 - \frac{\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle}{\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle}) f_2(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla H(x), \frac{\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle}{\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle} (f_1(x) - f_2(x)) \rangle \\
 &+ \langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle \\
 &= \frac{\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle}{\langle \nabla H(x), f_2(x) - f_1(x) \rangle} \langle \nabla H(x), f_1(x) - f_2(x) \rangle \\
 &+ \langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle \\
 &= -\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle + \langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Représentaion graphique



g n'étant pas définie aux points singuliers, on posera alors $g(x) = 0$ si x est un point coulissant (glissant) singulier.

Ainsi l'équation différentielle

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \Sigma_s$$

est complètement définie, ses solutions sont appelées solutions *glissantes* ou *coulissantes*.

Les points d'équilibre de l'équation précédentes peuvent provenir des points coulissants ou glissants singuliers en par hypothèse (par construction de g) g s'annule en ces points, mais aussi quand f_1 et f_2 sont anti-colinéaire et transversales à Σ_s . Ces points x sont appelés *pseudo-équilibre* ou *quasi-équilibre* de l'équation

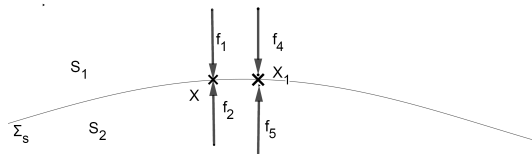


FIGURE 2.4 – f_1 et f_2 anti-colineaire

Un segment glissant (coulissant) sera instable si :

$$\langle \nabla H(x), f_1(x) \rangle > 0$$

et

$$\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle < 0$$

il sera dit stable si :

$$\langle \nabla H(x), f_1(x) \rangle < 0$$

et

$$\langle \nabla H(x), f_2(x) \rangle > 0$$

2.1 Construction de la solution du système :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in S_1 \\ f_2(x), & \text{si } x \in S_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Supposons sans perte de généralité que $x(\cdot) \in S_1$. On commence alors par résoudre l'équation en se palçant dans S_1 , si cette solution $x(t)$ ne reste pas dans S_1 alors nécessairement elle va atteindre la frontière Σ entre S_1 et S_2 en un temps t_1 (comme l'équation de Σ est donnée par $H(x) = 0$) alors on aura nécessairement $H(x(t_1)) = 0$.

On a alors deux possibilités :

1. Si $\sigma(x(t_1)) > 0$ donc $x(t_1) \in \Sigma_c$, dans ce cas on prolonge la solution en résolvant $\dot{x} = f_2$ pour $t \geq t_1$ (on a en quelque sorte recoller les solutions obtenues dans S_1 et dans S_2).
2. Si $\sigma(x(t_1)) \leq 0$, donc $x(t_1) \in \Sigma_s$, dans ce cas on passe à l'équation $\dot{x} = g(x)$ sur Σ_s , on a alors une orbite glissante (coulissante).

Si $g(x(t_1)) = 0$ ($x(t_1)$ est un point d'équilibre de l'équation $\dot{x} = g(x)$.)

On dit que l'orbite dégénère et dans ce cas on prolonge la solution obtenue en S_1 par : $x(t) = x(t_1) \quad \forall t > t_1$

Si $g(x(t_1)) \neq 0$

On étudie la solution $x(t)$, $t > t_1$, cette solution peut rester strictement dans le segment glissant (coulissant) (cela peut arriver si $x(t)$ tend vers un pseudo-équilibre ou vers un point glissant singulier).

D'un autre côté $x(t)$ ($t > t_1$) peut atteindre en un temps t_2 ($t_2 > t_1$) la frontière du segment coulissant (glissant) (en un équilibre frontière ou un point tangent). Si $x(t_2)$ est un équilibre frontière on pose $x(t) = x(t_2) \quad t > t_2$, si $x(t_2)$ est un point tangent dans ce cas on suit l'orbite qui commence en $x(t_2)$ (cette orbite peut aller vers S_2 comme elle peut retourner en S_1).

Points tangents :

Supposons qu'un point tangent $T \in \Sigma_s$ est donné par :

$$\langle \nabla H(T), f_1(T) \rangle = 0.$$

On dira que T est un point tangent visible si l'orbite de $\dot{x} = f_1(x)$ qui commence en T appartient (est incluse) à S_1 , on dira qu'il est invisible si celle-ci appartient (est incluse) à S_2 , et ceci pour tout $|t| \neq 0$ assez petit.

Les mêmes définitions sont conservées pour f_2 et en intervertissant S_1 et S_2 .

2.2 Bifurcations dûes à la discontinuité :

Reprenons notre système de la forme de Filippov

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in S_1 \\ f_2(x), & \text{si } x \in S_2 \end{cases}$$

Le portrait de phase de ce système est l'union de toutes ses orbites qu'on a décrit précédemment.

Deux systèmes (de Filippov de la forme précédente) sont dits topologiquement équivalents si il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, qui envoie le portrait de phase d'un système vers l'autre, tout en conservant l'orientation des orbites, les segments glissants (coulissants) d'un système étant envoyés vers les segments glissants (coulissants) de l'autre. De plus h envoie la frontière d'un système de discontinuité Σ_1 d'un système vers la frontière de discontinuité Σ_2 de l'autre.

Considérons à présent un système de Filippov à un paramètre

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x, \alpha), & \text{si } x \in S_1(\alpha) \\ f_2(x, \alpha), & \text{si } x \in S_2(\alpha) \end{cases}$$

f_1 et f_2 sont des fonctions régulières de (x, α) avec $x \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S_1(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x, \alpha) < 0\},$$

$$S_2(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x, \alpha) > 0\},$$

On dira que ce système paramétré exhibe une bifurcation en $\alpha = \alpha_0$ si une "petite" perturbation autour de α_0 donne lieu à un système qui est topologiquement non-équivalent au système d'origine. Nous nous

intéressons aux bifurcations qui apparaissent sur

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x, \alpha) = 0\}$$

(les bifurcations dans S_1 et dans S_2 sont les bifurcations classiques).

Nous n'allons pas faire une analyse complète de bifurcations des systèmes de Filippov car cela dépasse le cadre de ce master mais nous allons donner les formes normales des bifurcations.

On supposera de plus que \mathbf{X}_α est un équilibre hyperbolique du système de Filippov à un paramètre qui existe en S_1 pour $\alpha < 0$ et entre en collision avec la frontière Σ pour $\alpha = 0$.

On supposera que le système linéarisé autour de \mathbf{X}_α possède des valeurs propres simples.

La collision a lieu en un point $\mathbf{X}_0 \in \Sigma$, où $f_2(x, \alpha)$ est transversale à Σ .

2.3 Type de bifurcations :

Frontière-Foyer (Boundary-Focus bifurcation) :

Cette bifurcation résulte de la collision d'un foyer avec la frontière de discontinuité Σ . On supposera que ce foyer est instable avec une orientation dans les sens des aiguilles d'une montre (les sens horaire). On a alors 5 formes normales $BF_1, BF_2, BF_3, BF_4, BF_5$ donnant lieu à une bifurcation de type *Frontière-Foyer* (Boundary-Focus) pour le système

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } H(x, \alpha) < 0 \\ f_2(x), & \text{si } H(x, \alpha) > 0 \end{cases}$$

avec $H(x, \alpha) = y + \alpha$

Type	$f_1(x)$	$f_2(x)$
BF_1	$\begin{pmatrix} x - 2y \\ 4x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
BF_2	$\begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
BF_3	$\begin{pmatrix} -x - 2y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
BF_4	$\begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
BF_5	$\begin{pmatrix} -x - 2y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Frontière-nœud (Boundary-node bifurcation) :

Cette bifurcation résulte de la collision d'un nœud (stable ou instable) avec la frontière de discontinuité Σ .

On a alors deux formes normales BN_1 et BN_2 donnant lieu à une bifurcation de type *Frontière-nœud* pour le système

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } H(x, \alpha) < 0 \\ f_2(x), & \text{si } H(x, \alpha) > 0 \end{cases}$$

avec $H(x, \alpha) = y + \alpha$

Type	$f_1(x)$	$f_2(x)$
BN_1	$\begin{pmatrix} -3x - y \\ -x - 3y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
BN_2	$\begin{pmatrix} -3x - y \\ -x - 3y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pseudo-nœud-selle (Pseudo-saddle-node bifurcation)

Cette bifurcation résulte de la collision de deux pseudo-équilibre qui "s'annulent" l'un de l'autre à travers une petite variation du paramètre α (cette bifurcation est plus simple à analyser, nous donnerons pas de formes normales.)

Remarques :

1. Il existe beaucoup d'autres type de bifurcations qui dépassent le cadre de ce master.
2. Il existe des théorèmes qui donne des conditions d'équivalence topologique avec les formes normales données.

Chapitre 3

Application à un modèle proie-prédateur

Dans cette partie, nous allons voir comment toute la théorie discutée sur les systèmes de Filippov et les bifurcations dans ces systèmes peut être appliquée à une version modifiée du modèle de Rosenzweig-MacArthur.

3.1 Modification du modèle Rosenzweig-MacArthur

Rappelons que après le processus de redimensionnement, les équations du système sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(1-x) - \frac{axy}{b+x} \\ \dot{y} = \frac{axy}{b+x} - dy \end{array} \right.$$

où a, b et d sont des paramètres positifs. Maintenant la chasse ou la pêche des prédateurs est introduite pour $y > \alpha$. En termes d'équations,

3.1. MODIFICATION DU MODÈLE ROSENZWEIG-MACARTHUR³³

cela signifie que pour $y > \alpha$ le taux de mortalité varie de $-d$ à $-(d+E)$, où $E > 0$ représente l'effort de chasse ou la pêche. Le champ vectoriel résultant est discontinu le long de la ligne $y = \alpha$ et donc le système est un système de Filippov. Dans la discussion qui suit, certaines valeurs seront attribuées aux paramètres a , b , d et E . Le seul paramètre système restant sera α . La dynamique de cette famille de systèmes de Filippov est donnée par

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} f_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_1 \\ f_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

Le partitionnement du premier quadrant en régions S_1 , S_2 est illustré par la figure 3.1.

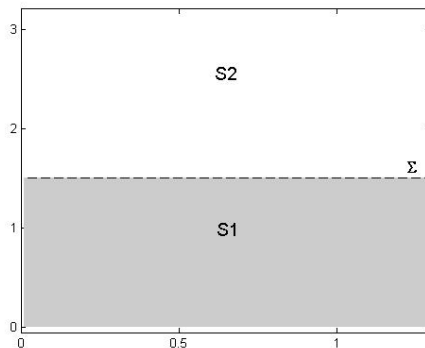


FIGURE 3.1 – Partitionnement de l'espace de phase pour $\alpha = 1.5$.

Les régions S_1 et S_2 sont exprimées à l'aide de la fonction $H(\mathbf{x}, \alpha)$.

$$S_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : H(\mathbf{x}) < 0 \text{ et } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2\},$$

$$S_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : H(\mathbf{x}) > 0 \text{ et } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2\},$$

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : H(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2\}.$$

Dans le système considéré, la discontinuité dans le champ de vecteurs se produit le long de la ligne $y = \alpha$ et donc

$$H(\mathbf{x}, \alpha) = y - \alpha, \alpha > 0,$$

qui est un choix convenable pour la fonction H . On suppose que $\alpha > 0$, parce que le cas $\alpha = 0$ correspondrait à un autre système continu avec un taux de mortalité naturelle différent.

La dynamique sur S_1 et S_2 est donnée par

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x(1-x) - \frac{axy}{b+x} \\ \frac{axy}{b+x} - dy \end{bmatrix}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x(1-x) - \frac{axy}{b+x} \\ \frac{axy}{b+x} - (d+E)y \end{bmatrix}.$$

Rappelons que dans la méthode convexe de Filippov, l'ensemble glissement Σ_s comme précédemment définie. Pour ce système, $\sigma(\mathbf{x})$ est donné par

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}) &= \langle \nabla H(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}) \rangle \langle \nabla H(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \left(\frac{a\alpha x}{b+x} - d\alpha \right) \left(\frac{a\alpha x}{b+x} - (d+E)\alpha \right). \end{aligned}$$

Imposons $\sigma(\mathbf{x}) \leq 0$.

D'après l'égalité (1.4) on a $\left(\frac{a\alpha x}{b+x} - d\alpha \right) \geq 0$ donc $\left(\frac{a\alpha x}{b+x} - (d+E)\alpha \right) \leq 0$, et on résout pour x donne que :

$$\Sigma_s = \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma \mid \frac{bd}{a-d} \leq x \leq \frac{b(d+E)}{a-(d+E)} \right\}.$$

Cela implique que Σ_s est constitué d'un segment glissant unique qui est entre le segment de droite compris entre les deux points $(\frac{bd}{a-d}, \alpha)$ et $(\frac{b(d+E)}{a-(d+E)}, \alpha)$. A partir de maintenant, chaque fois que Σ_s est mentionné, le lecteur devrait interpréter cela comme "le segment glissement unique de Σ_s ".

L'étape suivante consiste maintenant à trouver l'équation décrivant la dynamique sur Σ_s . Pour ce faire, nous utiliserons la méthode convexe de Filippov. Rappelons que nous sommes intéressés par de trouver $g(\mathbf{x})$, qui est l'unique combinaison convexe linéaire de $f_1(\mathbf{x})$ et $f_2(\mathbf{x})$, tangente à Σ . Notons que par le fait $H(\mathbf{x}, \alpha) = y - \alpha$, il s'ensuit que

$$\nabla_{\mathbf{x}} H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et donc

$$\lambda = \frac{\langle \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) \rangle}{\langle \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}) \rangle} = \frac{-ax}{E(b+x)} + \frac{d+E}{E}.$$

En utilisant λ , la fonction $g(\mathbf{x})$, qui décrit la dynamique sur le segment glissant de Σ_s , est donné par

$$g(\mathbf{x}) = \lambda f_1(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Observons que la composante x de $g(\mathbf{x})$ est exactement la composante x des champs de vecteurs $f_1(\mathbf{x})$ et $f_2(\mathbf{x})$. Cela fait beaucoup de sens étant donné que f_1 et f_2 ont les mêmes composantes x et que $g(\mathbf{x})$ est la combinaison convexe linéaire unique de f_1 et f_2 tangente à Σ . Ici, "tangente à Σ " signifie "composante nulle en y ", car Σ est donnée par

une ligne de constante y . Il s'ensuit que $g(\mathbf{x})$ se réduit à une projection de f_1 (où f_2) sur l'axe x , qui ce traduit par l'équation (3.2).

De plus, notons que

$$g(\mathbf{x}) = g^*(x)$$

ne dépend que de x . Cela signifie que nous pouvons traiter la dynamique sur Σ_s comme un système unidimensionnel (une équation scalaire).

Nous verrons bientôt que la connaissance des isoclines s'avérera très utile pour la détection des bifurcations.

Les isoclines verticales du système (3.1) sont

$$\dot{x} = 0$$

et donc :

$$N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\},$$

$$N_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{a}(1-x)(b+x)\},$$

les isoclines horizontales sont donnés par

$$\dot{y} = 0$$

et donc :

$$N_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\},$$

$$N_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{bd}{a-d}, y \leq \alpha\},$$

$$N_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{b(d+E)}{a-(d+E)}, y \geq \alpha\}.$$

Notons qu'en raison de la division du premier quadrant en S_1 et S_2 , les isoclines horizontales non triviales maintenant sont également

3.1. MODIFICATION DU MODÈLE ROSENZWEIG-MACARTHUR³⁷

divisées en deux parties (N_4 et N_5). Puisque la frontière de discontinuité Σ est donnée par une demi-ligne de constante $y = \alpha$, il en résulte que les points tangents sur Σ ne peuvent pas se produire lorsque la composante y de f_1 ou f_2 est égal à zéro. Par conséquent, des points tangents se produisent aux intersections des isoclines horizontales avec Σ et il en résulte qu'il y a seulement deux points tangents, à savoir

$$T_1 = \left(\frac{bd}{a-d}, \alpha \right) \quad \text{et} \quad T_2 = \left(\frac{b(d+E)}{a-(d+E)}, \alpha \right).$$

Ceux ci correspondent aux intersections de N_4 et N_5 avec Σ_s et qui sont déjà apparus dans la discussion sur l'unicité du segment glissant Σ_s .

Pour donner une idée pour les portraits de phase et les isoclines de cette famille de système Fillipov, deux portraits de phase sont indiquées à la figure 3.2

Le segment glissant est représenté par une ligne noire et le flux sur le segment glissant est indiqué par les flèches noir. Les équilibres standards sont représentés par des points noirs, les pseudo-équilibres sont représentés par des points rouges et les points tangents par un bleu, le champ de vecteur est indiqué par les flèches bleu. Les isoclines verticales sont les lignes en vert et les isoclines horizontales sont les lignes en rouge. Comme on peut le constater, pour les valeurs relativement α grandes, il existe une cycle limite dans la région S_1 . Cette cycle limite disparaît lorsque α diminue, comme on peut le voir sur la figure 3.2.

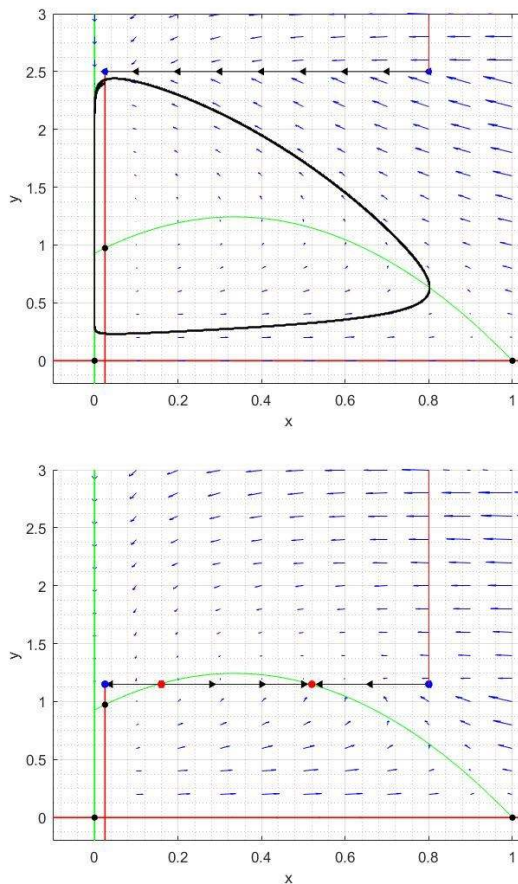


FIGURE 3.2 – Portrait de phase pour le système de Filippov pour $\alpha = 2.5$ et $\alpha = 1.15$. Les autres paramètres du système sont définies $a = 0.3556$, $b = 0.33$, $d = 0.0444$ et $E = 0.2067$.

Nous étudierons maintenant comment cela se produit et quelles autres bifurcations se produisent.

Considérons la dynamique sur le segment glissant Σ_s

$$\dot{x} = g^*(x), x \in \left[\frac{bd}{a-d}, \frac{b(d+E)}{a-(d+E)} \right].$$

Ceci peut être considéré comme une équation scalaire et donc l'ana-

lyse de bifurcation par rapport à α sera plutôt simple. Dans le même temps, la caractérisation complète du comportement des bifurcations de ce système par rapport à a, b, d, E et α est très complexe. Comme indiqué au chapitre 1, il se produit une bifurcation de Hopf pour $b = \frac{a-d}{a+d}$ dans le modèle continu de Rosenzweig-MacArthur. La discussion des différentes interactions d'une bifurcation de Hopf avec la frontière de discontinuité n'est pas inclus dans ce mémoire. Au lieu de cela, les paramètres a, b, d et E seront fixés. Le seul paramètre système restant sera α et l'analyse de la bifurcation sera effectuée pour α . Deux configurations de paramètres différentes de a, b, d et E doivent être considérés, dont la première configuration est $a = 0.3556, b = 0.33, d = 0.0444$ et $E = 0.2067$. Cela correspond au cas $b < \frac{a-d}{a+d}$ et donc pour de grande valeur de α , un cycle limite sera présent dans la région S_1 . La seconde configuration de paramètre est $a = 0.3, b = 0.4, d = 0.15$ et $E = 0.05$, ce qui correspond au cas où $b > \frac{a-d}{a+d}$ et donc aucun cycle limite n'existera dans S_1 . Cette configuration de paramètres a été tirée de l'article 2. Ce paramètre a été choisi pour être un peu comparable à la configuration du premier paramètre tout en représentant le cas $b > \frac{a-d}{a+d}$. De plus, les valeurs choisies sont relativement simples à utiliser et simplifier la réalisation du portrait de phase claire de manière à pouvoir comparer les deux cas plus facilement. La bifurcations locale sera discutée pour les deux ensembles de paramètres.

3.2 Bifurcations pour le cas : $b < \frac{a-d}{a+d}$

Pour représenter le cas $b < \frac{a-d}{a+d}$, les paramètres sont définis sur $a = 0.3556, b = 0.33, d = 0.0444$ et $E = 0.2067$.

3.2.1 Bifurcations locales

Rappelons que la dynamique sur le segment glissant Σ_s est donnée par $\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x})$. Maintenant, pour trouver les équilibres de ce système, nous avons mis

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x}) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Si \bar{x} est une solution de $x(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x}) = 0$, alors (\bar{x}, α) est un *pseudo-équilibre* ou *équilibre-frontière* du système considéré.

La figure 3.3 montre la dépendance des pseudo-équilibres sur α .

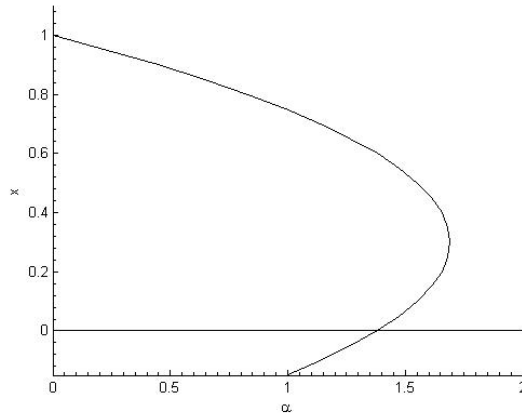


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation pour la dynamique sur Σ_s montrant α sur l'axe horizontal et x sur l'axe vertical.

3.2.1.1 pseudo-nœud-selle :

Pour étudier l'équation

$$x \left(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x} \right) = 0$$

et le diagramme de bifurcation de la figure 3.3, deux valeurs de α semblent particulièrement intéressantes.

— Le premier est l'intersection de la ligne $x = 0$ avec la parabole

$$\left(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x}\right) = 0 \quad (3.3)$$

— Le deuxième point d'intérêt est le sommet de la parabole (3.3).

La fonction $g(\mathbf{x})$ décrit le comportement des solutions sur le segment glissant Σ_s qui est délimitée par les points tangents T_1 et T_2 . Puisque les deux points tangents ont toujours des composantes x positives, il s'ensuit que $g(\mathbf{x})$ ne peut pas dicter le comportement d'une solution en $x = 0$. Cela signifie que rechercher l'intersection de la parabole et la ligne $x = 0$ ne donne aucune idée significative.

Très différemment pour le sommet de la parabole (3.3). On a l'équation de l'isocline verticale non triviale donné par

$$y = \frac{1}{a}(1-x)(b+x),$$

on fait

$$\dot{y} = 0$$

on trouve $x = \frac{1-b}{2}$, et on remplace dans l'équation de l'isocline verticale non triviale on obtient

$$y = \frac{(b+1)^2}{4a}$$

donc le sommet est donné par :

$$(x, y) = \left(\frac{1-b}{2}, \frac{(b+1)^2}{4a}\right). \quad (3.4)$$

Ceci correspond exactement au moment où la frontière de discontinuité Σ touche le maximum de parabole, c'est-à-dire l'isocline verticale non triviale

$$y = \frac{1}{a}(1-x)(b+x).$$

Encore une fois, par la figure 3.3 et l'étude de l'équation (3.3), on pourrait penser qu'il se produit une bifurcation de nœud-selle au point indiqué en (3.4). Pour vérifier cela, il convient d'utiliser le théorème suivant.

Théorème. *Si $\dot{x} = f(x, \alpha)$ est une équation différentielle du premier ordre telle que.*

1. $f(\hat{x}, \alpha_0) = 0$,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \alpha_0) = 0$,
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \alpha_0) \neq 0$,
4. $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\hat{x}, \alpha_0) \neq 0$,

alors cette équation différentielle suit une bifurcation de nœud-selle pour $\alpha = \alpha_0$ et $x = \hat{x}$

Maintenant on pose $f(x, \alpha) = x \left(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x}\right)$, et on applique le théorème ci-dessus, on remplace par le point de sommet $\hat{x} = \frac{1-b}{2}$ et $\alpha_0 = \frac{(b+1)^2}{4a}$ puis on vérifie les conditions du théorème.

1. $f(\hat{x}, \alpha_0) = x \left(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x}\right) \Big|_{\hat{x}, \alpha_0} = 0$,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \alpha_0) = 1 - 2x - \frac{a\alpha b}{(b+x)^2} \Big|_{\hat{x}, \alpha_0} = 0$,
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \alpha_0) = -2 + \alpha \frac{2ab}{(b+x)^3} \Big|_{\hat{x}, \alpha_0} = 2 \frac{b-1}{b+1}$,
4. $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\hat{x}, \alpha_0) = -\frac{ax}{b+x} \Big|_{\hat{x}, \alpha_0} = \frac{a(b-1)}{b+1}$.

Notons qu'il semble que les deux premières conditions sont vérifiées. La troisième et la quatrième conditions sont vérifiées *si et seulement si* $b \neq 1$. Dans le cas de $b = 1$, la frontière de discontinuité Σ toucherait

le maximum du isocline verticale non triviale au point $(x, y) = (0, \frac{1}{a})$. Ce point ne se trouve pas sur le segment de droite entre les points tangents T_1 et T_2 et donc n'est pas contenu dans le segment glissant Σ_s .

Posons que les conditions 3 et 4 sont toujours vérifiées pour $b \neq 1$, car il n'a aucune sens de parler de bifurcation du système

$$\dot{x} = x \left(1 - x - \frac{a\alpha}{b+x} \right)$$

qui *ne se trouvent pas* sur Σ_s . Donc, il se produit une bifurcation de nœud-selle sur le segment glissant pour

$$\alpha_{PSN} = \frac{(b+1)^2}{4a} = 1.2436.$$

Les portraits de phase avant, pendant et après cette bifurcation sont présentés à la figure 3.4. Cette bifurcation de nœud-selle étant due à la dynamique de glissement et se produit sur Σ_s , cette bifurcation est appelée *pseudo-nœud de selle* bifurcation.

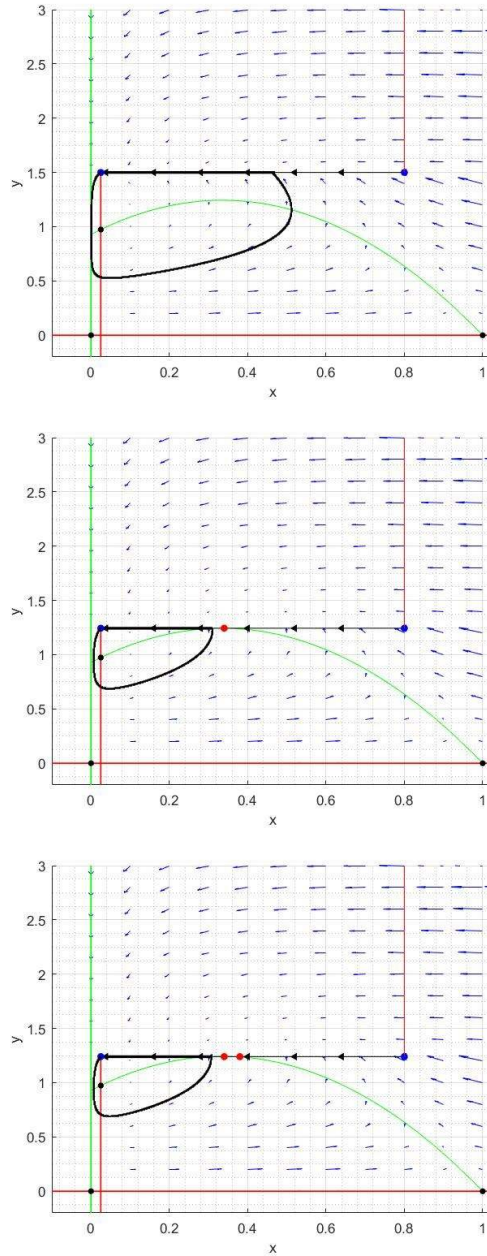


FIGURE 3.4 – Portraits de phase avant, pendant et après la bifurcation pseudo-nœud de selle. Les valeurs de paramètre sont $\alpha = 1.5$, $\alpha_0 \approx 1.2436$ et $\alpha = 1.24$.

Après avoir l'étude de bifurcation locale due à la dynamique sur le segment glissant Σ_s , maintenant on fait une étude des bifurcations locales dues à la collision d'équilibre standard avec Σ_s . Dans chapitre 1 Trois équilibres standard doivent être pris en compte, à savoir les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et l'équilibre de coexistence

$$\left(\frac{bd}{a-d}, \frac{b(a-bd-d)}{(a-d)^2} \right).$$

Les deux équilibres $(0, 0)$ et $(1, 0)$ n'entrent pas en collision avec la frontière de discontinuité Σ car il a été supposé que $\alpha > 0$. Il y a deux collisions qui doivent être étudiées.

La première est la bifurcation du frontière-foyer et correspond à la valeur α telle que le point tangent T_1 se trouve sur l'isocline verticale non triviale.

La deuxième est la bifurcation du frontière-nœud marquée par T_2 se trouve sur l'isocline verticale non triviale.

3.2.1.2 Frontière-foyer

Considérons la collision de la coexistence d'équilibre avec le segment glissant Σ_s . La coexistence de l'équilibre est un foyer instable. Pour classer sa collision avec Σ_s dans l'une des cinq formes de la bifurcation du frontière-foyer, il est nécessaire de vérifier un certain nombre de chose.

Supposons que la collision d'un foyer instable se produit pour certain valeur $\alpha = \alpha_0$. La figure 3.5 indique que l'orientation des solutions dans S_2 proche à la coexistence de l'équilibre est vers le bas lorsque $\alpha \approx \alpha_0$. De plus, il est évident à discuter du bifurcation pseudo-nœud-selle pour $\alpha \approx \alpha_0$ il existe une pseudo-selle proche qui entre en collision avec la coexistence de l'équilibre et T_1 pour $\alpha \approx \alpha_0$. Ces observations excluent déjà les types BF_3 , BF_4 et BF_5 .

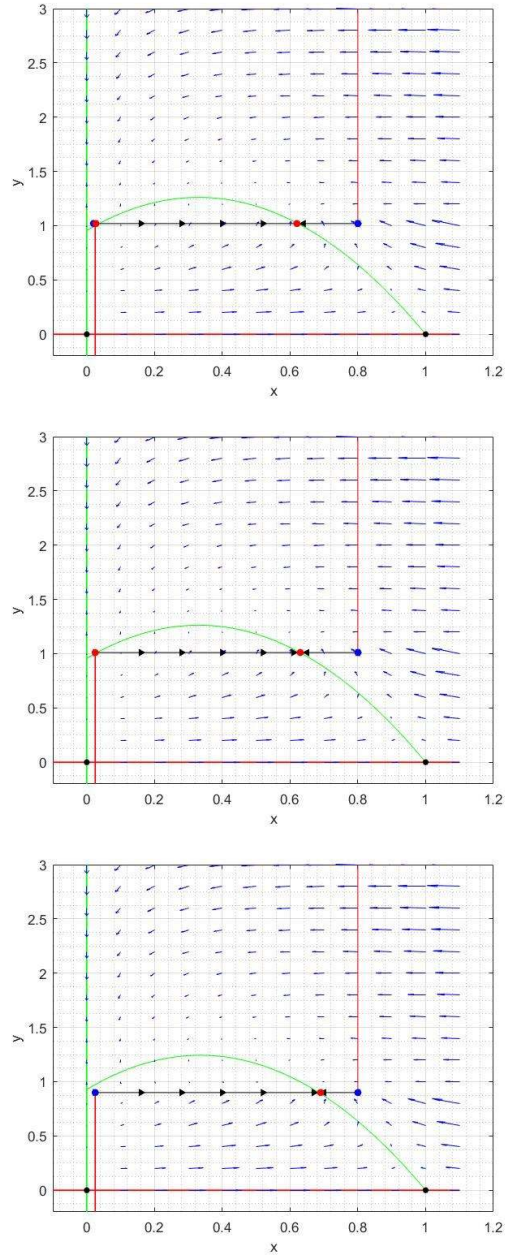


FIGURE 3.5 – Portraits de phase avant, pendant et après la bifurcation frontière-foyer. Les valeurs de paramètre sont $\alpha = 1.02$, $\alpha_0 \approx 1.0105$ et $\alpha = 0.9$. Notons qu'il y a un très petit cycle de glissement présent dans le portrait de phase lorsque $\alpha = 1.02$.

Afin de déterminer si la bifurcation est de type BF_1 ou BF_2 , la méthode de distinction analytique de ces deux types, sera utilisée :

Le système

$$\dot{\mathbf{x}} = f_{1(\mathbf{x})}$$

est linéarisé autour de l'équilibre du foyer dans S_1 . Le système linéarisé résultant est donné par

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{d(ab-a+bd+d)}{a(a-d)} & -d \\ \frac{a-bd-d}{a} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Une solution à ce système linéarisé, commençant à $(-\frac{d^*}{c^*}, 1)$, est déterminée numériquement. Le point auquel cette solution coupe la ligne $y = 1$ pour la première fois est $(\theta, 1)$ et nous comparons où se situe ce point par rapport à $(-\frac{b}{a}, 1)$. L'analyse numérique montre que $\theta < -\frac{b}{a}$ et donc la bifurcation est de type BF_1 . Vous pouvez trouver la valeur α de la collision en évaluant le isocline verticale non trivial à coordonnée x de T_1 :

$$\alpha_{BF} = \frac{b(a - bd - d)}{(a - d)^2} = \frac{771}{763} \approx 1.0105.$$

3.2.1.3 Frontière-nœud

La dernière bifurcation locale qui se produit pour cette configuration de paramètre est la bifurcation du frontière-nœud qui correspond à la collision de T_2 avec l'isocline verticale non triviale. Lorsque α diminue après la bifurcation pseudo-nœud-selle, le pseudo-nœud nouvellement généré se évolue le long du l'isocline verticale non triviale jusqu'à ce qu'il entrer en collision avec T_2 dans un équilibre frontière. La valeur α de la collision peut être trouvée en évaluant l'isocline verticale non triviale à coordonnée x de T_2 .

$$\alpha_{BN} = \frac{b[a - b(d + E) - (d + E)]}{(a - (d + E))^2} = \frac{5901}{9025} \approx 0.6539$$

L'équilibre de coexistence dans le modèle continu de Rosenzweig-MacArthur est foyer stable pour $b > \frac{a-d}{a+d}$. Dans la discussion sur la trace et le déterminant de la linéarisation autour de cet équilibre, il a également été montré que ce foyer stable peut être un foyer ou un nœud, selon la configuration du paramètre spécifique. Pour les valeurs de paramètre définis au début de cette sous section, l'équilibre de coexistence dans S_2 est bien un nœud stable. Cela peut facilement être vérifié en calculant les valeurs propres de la matrice linéarisée correspondante. L'équilibre est donné par

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{b(d+E)}{a-(d+E)}, \frac{b(a-b(d+E)-(d+E))}{(a-(d+E))^2} \right),$$

et donc

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2x^* - \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & -\frac{ax^*}{b+x^*} \\ \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1677}{2593} & -\frac{856}{3409} \\ -\frac{1557}{25589} & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -\frac{746}{1199} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{101}{4113}.$$

Les deux valeurs propres sont réelles et négatives, donc l'équilibre est un nœud stable et la collision est bien une bifurcation du frontière-nœud et non une bifurcation du frontière-foyer.

Maintenant que nous savons que nous avons à faire à une bifurcation du frontière nœud, l'étape suivante consiste à classer cette bifurcation comme étant du type BN_1 ou BN_2 . Étant donné que cette bifurcation du frontière-nœuds implique la collision d'un pseudo-nœud-stable avec un point tangent, la bifurcation ne peut éventuellement être que du type BN_1 . Le portrait de phase locale peut être obtenu à partir de la forme normale BN_1 .

Les portraits de phase avant, pendant et après la bifurcation de frontière-nœuds sont donnés à la figure 3.6.

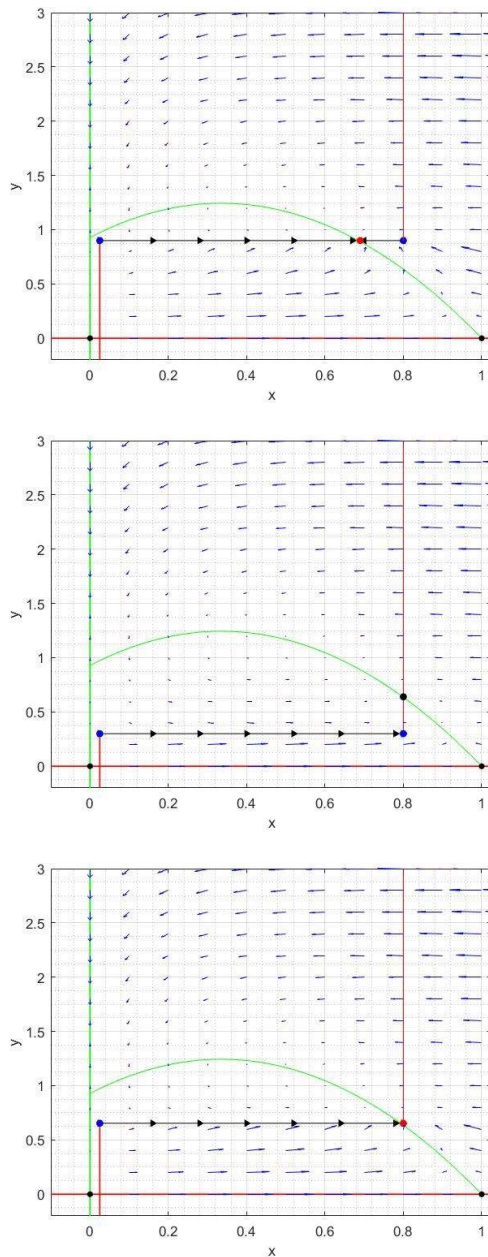


FIGURE 3.6 – Portraits de phase avant, pendant et après la bifurcation de frontière-nœuds. Les valeurs de paramètre sont $\alpha = 0.9$, $\alpha_0 \approx 0.6539$ et $\alpha = 0.3$.

3.3 Bifurcations pour le cas : $b > \frac{a-d}{a+d}$

Pour représenter le cas $b > \frac{a-d}{a+d}$, les paramètres sont définis sur $a = 0.3$, $b = 0.4$, $d = 0.15$ et $E = 0.05$.

3.3.1 Bifurcation locale

La différent fondamental entre le cas $b > \frac{a-d}{a+d}$ et le cas $b < \frac{a-d}{a+d}$ précédent est le position du isocline horizontale non triviale. L'isocline horizontale non trivial est toujours différent dans les deux régions, mais il se situe maintenant à droite du maximum du isocline verticale non triviale dans les deux régions. Cela signifie que, dans les deux régions, l'équilibre de coexistence est stable et qu'il n'existe aucune cycle limite complètement contenue dans S_1 ou S_2 . Notons que la notation pour α_{BF} et α_{BN} est le même pour le cas précédent juste on refaire un calcul actuel.

3.3.1.1 Frontière-foyer

La première bifurcation locale qui se produira est la collision de foyer stable avec le segment glissant Σ_s . De même discuté pour le cas précédent, la valeur de α qui correspond à la bifurcation du frontière-foyer est :

$$\alpha_{BF} = \frac{b(a - bd - d)}{(a - d)^2} = \frac{8}{5} = 1.6$$

Pour classer cette bifurcation du frontière-foyer, il est nécessaire d'observer qu'un pseudo équilibre est né lors de la collision du foyer stable avec Σ_s . Le portrait de phase de la figure 3.7 illustré le pseudo-équilibre est *un pseudo-nœud-stable*. Cela réduit les possibilités à BF_3 et BF_4 . Prise en compte de la position relative du foyer stable et de la tangente T_1 point à un autre élimine BF_3 ainsi. La bifurcation est de type BF_4 .

3.3.1.2 Frontière-nœud

D'après la configuration des paramètres, il se produit une bifurcation du frontière-nœud lorsque le point tangent T_2 entre en collision avec l'isocline verticale non triviale pour

$$\alpha_{BN} = \frac{b[a - b(d + E) - (d + E)]}{(a - (d + E))^2} = \frac{4}{5} = 0.8$$

qui correspond au valeur de la bifurcation du frontière-nœud.

Dans ce cas, la matrice représentant le système linéarisé autour de l'équilibre de coexistence dans S_2 est

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2x^* - \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & -\frac{ax^*}{b+x^*} \\ \frac{aby^*}{(b+x^*)^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & 0 \end{bmatrix}$$

et les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -\frac{553}{856} \text{ et } \lambda_2 = -\frac{73}{3537}.$$

donc on obtiens deux valeurs propres qui sont réels et négatifs. Donc, l'équilibre de coexistence est un nœud stable. Pour répondre à la question de savoir si la bifurcation du frontière-nœud est de type BN_1 ou BN_2 , notons que cette bifurcation est due à la collision du pseudo-nœud-stable généré par la bifurcation du frontière-foyer de type BF_4 . Cela signifie qu'avant et après la bifurcation du frontière-nœud, il existe un (pseudo) équilibre stable près du point tangent T_2 et la bifurcation doit donc être du type BN_1 . Le portrait de phase de la bifurcation du frontière-foyer et la bifurcation du frontière-nœud sont illustrés à la figure 3.7. De la même manière que l'autre configuration de paramètre, le portrait de phase locale peut être obtenu à partir de la forme normale BN_1 .

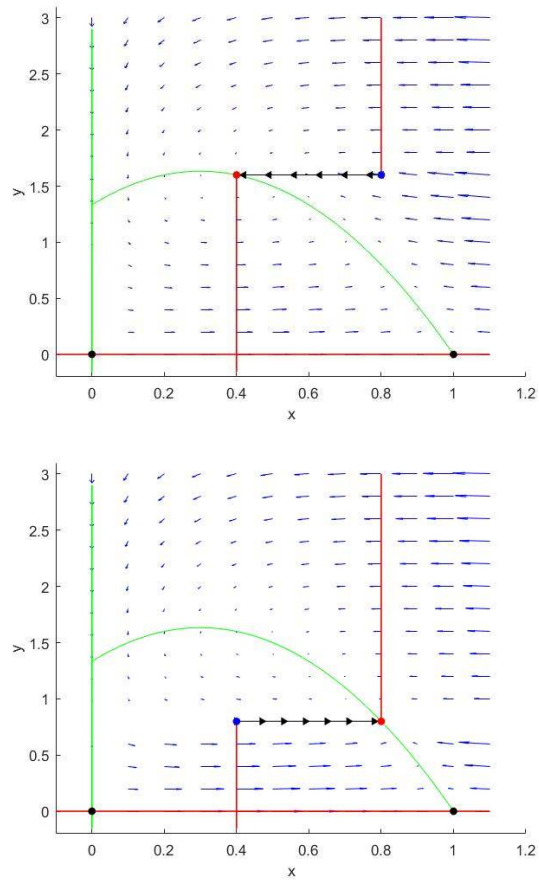


FIGURE 3.7 – Portraits de phase de la bifurcation du frontière-foyer (à gauche, $\alpha = 1.6$) et la bifurcation du frontière-nœud (à droite, $\alpha = 0.8$).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons essayé de présenter une étude mathématique d'un modèle proies-prédateurs, soumis à un effort de pêche, ce dernier n'étant effectif que lorsque la populations des prédateurs dépasse un certain seuil. La méthode de Filippov est utilisée dans cette étude, car par le fait que l'effort de pêche ne soit possible qu'à partir d'un certain seuil, cela donne lieu à une discontinuité dans le système.

Une étude des bifurcations locales, est faite et plusieurs simulations numériques illustrant l'étude théorique sont présentées.

Bibliographie

- [1] Auger, Pierre, Lett, Christophe, et Poggiale, Jean-Christophe. *Modélisation mathématique en écologie-2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2015.
- [2] Y. A. Kuznetsov, Rinaldi, and A. Gragnani. *One-parameter bifurcations in planar filippov systems*. International Journal of Bifurcation and chaos, 13(08) :2157–2188, 2003
- [3] J. Norden *An Application of Filippov Systems to Model Discontinuous Harvesting in a Predator-Prey Model*. Bachelors Thesis. University of Groningen. 2018. 13(08) :2157–2188, 2003
- [4] H. L. Smith. *The Rosenzweig-MacArthur predator-prey model*. School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University : Phoenix, 2008

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons essayé de présenter une étude mathématique d'un modèle proies-prédateurs, soumis à un effort de pêche, ce dernier n'étant effectif que lorsque la populations des prédateurs dépasse un certain seuil. La méthode de Filippov est utilisée dans cette étude, car par le fait que l'effort de pêche ne soit possible qu'à partir d'un certain seuil, cela donne lieu à une discontinuité dans le système.

Une étude des bifurcations locales, est faite et plusieurs simulations numériques illustrant l'étude théorique sont présentées.

Abstract : In this Master thesis, we have tried to present a mathematical study of a prey-predator model, subjected to a fishing effort, the latter only being effective when predator populations exceed a certain threshold. Filippov's method is used in this study because the fishing effort is only possible from a certain threshold, which gives rise to a discontinuity in the system.

A study of local bifurcations is made and several numerical simulations illustrating the theoretical study are presented.

ملخص:

في هذه الأطروحة ، حاولنا تقديم دراسة رياضية لنموذج مفترس فريسة ، يخضع لجهد صيد ، وهذا الأخير يكون فعالاً فقط عندما تتجاوز أعداد الحيوانات المفترسة عتبة معينة. يتم استخدام في هذه الدراسة لأن جهد الصيد ممكن فقط من عتبة معينة، مما يؤدي إلى انقطاع في نظام طريقة Filippov

تم إجراء دراسة حول التشعبات المحلية وتقديم العديد من المحاكاة العددية التي توضح الدراسة النظرية.