

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Motivation . . . . .	7
1.2	État de l'art . . . . .	8
1.3	Objectif de la thèse . . . . .	11
1.4	Plan de la thèse . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Outils mathématiques</b>	<b>17</b>
2.1	Liste des symboles . . . . .	17
2.2	Espaces de Sobolev . . . . .	18
2.3	Espaces duaux . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Factorisation du problème de Poisson dans un domaine cylindrique</b>	<b>23</b>
3.1	Position du problème et cadre fonctionnel . . . . .	23
3.2	Présentation de la méthode de factorisation . . . . .	26
3.2.1	Plongement invariant direct . . . . .	26
3.2.2	Propriétés de l'opérateur $P$ . . . . .	28
3.2.3	Réciproques . . . . .	30
3.2.4	Plongement invariant rétrograde . . . . .	32
3.3	Discrétisation par différences finies . . . . .	36
3.3.1	Approximation à l'ordre 1 en $h$ de $\mathcal{S}_1$ , $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Complétion des données en utilisant la méthode de factorisation</b>	<b>43</b>
4.0.2	Introduction . . . . .	43
4.1	Méthode dans le cas cylindrique . . . . .	43
4.1.1	Problème de complétion des données . . . . .	44
4.2	La complétion des données comme problème de contrôle optimal . .	45
4.3	Utilisation de la méthode de factorisation pour découpler le système d'optimalité . . . . .	47
4.3.1	Application de la méthode de factorisation . . . . .	47

4.3.2	Résolution du problème de contrôle optimal sans régularisation . . . . .	49
4.4	Formulation explicite dans le cas d'un cylindre . . . . .	54
4.4.1	Détermination des opérateurs d'interface . . . . .	54
4.4.2	Influence de la longueur du cylindre . . . . .	55
4.4.3	Conclusion . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Analyse de la solution du problème inverse de l'ECGI avec des données incomplètes sur la surface du corps</b>	<b>57</b>
5.1	introduction . . . . .	57
5.2	Problème continu et méthode de factorisation . . . . .	57
5.2.1	Énoncé du problème . . . . .	59
5.3	Formulation du problème de complétions des données en tant que problème de contrôle optimal . . . . .	59
5.4	Présentation de la méthode de factorisation pour le problème inverse de l'ECG . . . . .	63
5.4.1	Opérateur Neumann-Dirichlet . . . . .	64
5.4.2	Opérateur Dirichlet-Neumann . . . . .	66
5.4.3	Nouveaux opérateurs liés à la mesure incomplète . . . . .	67
5.5	Résolution du problème de contrôle optimal . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Comparaison entre les observations complètes et incomplètes</b>	<b>73</b>
6.0.1	Observation incomplète . . . . .	73
6.0.2	Observation complète . . . . .	80
6.0.3	Interprétation théorique de la taille de la frontière mesurée et de la distribution des effets de bruit sur la solution reconstruite	84
6.1	Simulations numériques du problème . . . . .	85
6.2	Résultats numériques . . . . .	87
6.2.1	Bruit homogène . . . . .	87
6.2.2	Bruit non homogène . . . . .	90
6.2.3	Cas des solutions oscillantes . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Extension de l'application de la méthode de factorisation dans le cas tridimensionnel</b>	<b>94</b>
7.1	Introduction . . . . .	94
7.2	Résolution du problème de Cauchy dans un domaine sphérique . . .	95
7.2.1	Position du problème . . . . .	95
7.2.2	Le problème de contrôle optimal associé . . . . .	96
7.2.3	Plongement invariant . . . . .	97
7.2.4	Résolution du problème de contrôle optimal . . . . .	100

<b>8 Conclusion générale et Perspectives</b>	<b>102</b>
8.1 Conclusion générale . . . . .	102
8.2 Perspectives . . . . .	105
8.3 Annexe . . . . .	106
8.3.1 Décomposition modale . . . . .	106
8.3.2 Écriture dans une base de fonctions propres( $\mathcal{P}_0$ ) . . . . .	106
8.3.3 Expressions modales des opérateurs $P, Q$ et des opérateurs résidus . . . . .	109
8.3.4 Expression modale des résidus $\omega_1$ et $\omega_2$ . . . . .	111
<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>

**Résumé :** Dans ce travail, nous proposons une nouvelle formulation mathématique du problème inverse en imagerie électrocardiographique. La nouveauté de cette approche est que nous prenons en compte les mesures manquantes sur la surface du corps. Le problème inverse de l'imagerie par électrocardiographie est formulé comme un problème de complétions des données pour l'équation de Laplace. La condition aux limites de Neumann est indiquée sur toute la surface du corps. La difficulté vient du fait que la condition aux limites de Dirichlet n'est donnée que sur une partie de la surface du corps et qu'une frontière incomplète est donc adjacente à une frontière complète. Afin de construire le potentiel électrique sur la surface cardiaque, nous utilisons une approche de contrôle optimale où le potentiel inconnu à la frontière externe fait également partie des variables de contrôle. Nous comparons théoriquement ce cas au cas où la condition au limite de Dirichlet est donnée sur la surface entièrement accessible. Nous comparons ensuite les deux cas et sur la base de la distribution du bruit dans les mesures, nous concluons si cela vaut la peine d'utiliser toutes les données. Nous utilisons la méthode de factorisation des problèmes aux limites elliptiques combinée à la méthode des éléments finis. Ceci revient à plonger le problème initial en une famille de problèmes similaires sur des sous domaines limités par une frontière mobile balayant le thorax depuis la peau jusqu'à l'épicerde. Dans le cadre du problème inverse cette analyse permet d'écrire directement avant discrétisation l'équation vérifiée sur l'épicerde par l'estimation optimale du potentiel épicerdique au sens d'un critère quadratique. Elle permet d'analyser le caractère mal posé du problème inverse et donc de discrétiser et de régulariser au mieux ce problème. Un des avantages de cette méthode est que si l'on souhaite calculer le potentiel à différents temps du cycle cardiaque, il n'est pas nécessaire de refaire la résolution de toutes les équations à chaque instant. Nous illustrons les résultats théoriques par des simulations numériques dans un domaine cylindrique. Nous étudions numériquement l'effet de la taille de la zone de données manquante et de la distribution du bruit sur la précision de la solution inverse.

**Mots clés :** Problème inverse, électrocardiographie, méthode de factorisation, équations de Riccati, problèmes aux limites.

**Abstract :** In this work, we provide a new mathematical formulation for the inverse problem in electrocardiographic imaging. The novelty in this approach is that we account for missing measurements on the body surface. The electrocardiography imaging inverse problem is formulated as a data completion problem for the Laplace equation. The Neumann boundary condition is given at the whole body surface. The difficulty comes from the fact that the Dirichlet boundary condition is only given on a part of the body surface and thus an incomplete boundary is adjacent to a complete boundary. In order to construct the electrical potential on the heart surface, we use an optimal control approach where the unknown potential at the external boundary is also part of the control variables. We theoretically compare this case to the case where the a Dirichlet boundary condition is given on the full accessible surface. We then compare both cases and based on the distribution of noise in the measurements, we conclude whether or not it is worth to use all the data. We use the method of factorization of elliptic boundary value problems combined with the finite element method. The idea is to embed the initial problem into a family of similar problems on subdomains bounded by a moving boundary (along a axis of evolution that we define) from the torso skin to the epicardium surface. Regarding the inverse problem, mathematical analysis allows to write an optimal estimation of the epicardial potential based on a quadratic criterion. Then, we can analyse the ill-posed behaviour of the inverse problem and propose a better regularization and discretization of the problem. We illustrate the theoretical results by some numerical simulations in a cylindrical domain. We numerically study the effect of the size of the missing data zone and the noise distribution on the accuracy of the inverse solution.

**Keywords :** Inverse problem, electrocardiography, Factorization method, Riccati equations, boundary values problems.

## Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu de m'avoir donné la force pour réaliser ce présent travail.

J'aimerais remercier chaleureusement toutes les personnes qui ont cru en moi et qui m'ont aidé pendant l'élaboration de ma thèse.

Je souhaite remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, Madame Nadra Bouarroudj, et Messieurs Lekhmissi Belaib. Merci à vous d'avoir accepté de diriger cette thèse, et de m'avoir proposé ce sujet de recherche. C'est pour moi un grand plaisir et honneur. J'ai trouvé en vous une source d'inspiration décisive. Je les remercie pour leur confiance, leur soutien, leur grande disponibilité et leurs nombreux conseils. En plus de m'avoir permis d'entreprendre cette thèse, ils m'ont donné la grande satisfaction et le grand honneur de partager leurs connaissances et leurs amitiés. Qu'ils veuillent croire à ma profonde estime et ma sincère reconnaissance.

Je voudrais remercier Monsieur Messirdi Miloud pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. Sa présence dans mon jury est un grand honneur pour moi.

Je remercie madame Nasri Yasmina et Messieurs Derbah Mohamed, Belghaba Kacem et Terbeche Mekki pour avoir accepté d'examiner mon travail. Leurs avis m'est particulièrement important. Qu'il veuille croire à ma profonde estime.

Je tiens à remercier chaleureusement messieurs Nejib Zemzemi et Jacques Henry et tous les membres de l'équipe de recherche CARMEN (INRIA Bordeaux - Sud-Ouest), et je remercie chaleureusement monsieur Fadhel Jday de l'équipe de recherche LAMSIN (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis ENIT), pour leur aide et leur bonne humeur. Nous avons partagé de bons moments.

Au terme de ce parcours, je remercie celles et ceux qui me sont chers et que j'ai quelque peu délaissés ces derniers mois pour achever cette thèse. Leurs attentions et encouragements m'ont accompagné tout au long de ces années. Je suis redevable à mes parents et mes frères pour leur amour abondant et sans faille, pour leur soutien moral et matériel et leur confiance indéfectible dans mes choix.

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Motivation

Environ trois millions de personnes meurent, chaque année, dans le monde d'un arrêt cardiaque subit ou infarctus. C'est le plus grand tueur de la planète et il peut arriver à n'importe qui, n'importe où et à n'importe quel moment. Certains facteurs peuvent cependant augmenter le risque individuel comme l'âge, l'hypertension artérielle, le haut taux de cholestérol, une activité physique excessive, le diabète, le poids, les antécédents personnels de maladies du coeur, l'abus de tabac, de drogues ou d'alcool, le stress...(Source : <http://www.sisl.ch/technique/aed.htm>). A titre d'exemples d'après l'OMS, 32% de la mortalité totale est causée par des problèmes cardiovasculaires. En 2011, en France, 60 000 crises cardiaques ont été recensées, entraînant la mort de 2400 personnes. 30% des décès sont d'origine cardiovasculaire.( Source <http://www.planetoscope.com/mortalite/1518-crisis-cardiaques-etinfarctus-mortels-en-france.html>). et en algérie 46% des décès sont d'origine cardiovasculaire Selon une étude de l'OMS en 2013, d'ici 2030, les maladies cardiovasculaires et les maladies cardiaques pourraient tuer 23,3 millions de personnes. Malgré leur dangerosité, les problèmes liés à l'activité électrique du coeur et les mécanismes de traitement des infarctus restent encore mal compris. Le développement d'une meilleure compréhension de la fonction cardiaque et com-

ment et quand le coeur ne parvient plus à assurer sa fonction est un sujet de recherche intensive. Au cours des dernières années, les études expérimentales ont été complétées par des modèles mathématiques qui permettent la simulation de la fonction électrique du coeur. Le corps humain et particulièrement le coeur étant très complexe, beaucoup de problèmes restent encore ouverts aussi bien au niveau de la modélisation, de l'analyse que de la simulation pour les modèles existants.

## 1.2 État de l'art

On s'intéresse dans notre étude au problème de complétion de données pour l'équation de Laplace dans un domaine cylindrique borné en dimension 2 et 3. Il s'agit de la reconstruction des données sur une partie de la frontière connaissant ces données sur une autre partie de la frontière. Ce type de problème intervient dans de nombreuses applications industrielles ou biomédicales. Parmi ces applications, on peut citer par exemple l'électrocardiographie, la reconstruction de la température sur le mur intérieur d'un pipeline et la détection de contacts.

L'électrocardiographe mesure à la surface du thorax les potentiels électriques générés par l'activité cardiaque. Cependant, cet outil ne permet pas de connaître les valeurs de ces potentiels à la surface du coeur. Si l'on considère le domaine délimité par le thorax et illustré par la Figure 1, sa frontière est constituée d'une frontière externe, la surface du thorax, et d'une frontière interne, la surface du coeur. Les mesures fournies par l'électrocardiogramme donnent les conditions limites sur la frontière externe. La résolution numérique du problème de Cauchy permet d'identifier les potentiels électriques à la surface du coeur.



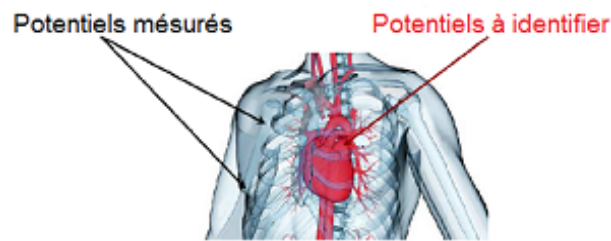


Figure 1 : *Schéma représentatif de la cage thoracique.*

En thermique, considérons l'exemple de la reconstruction de la température et du flux dans un pipeline représenté par la Figure 2 à partir de mesures sur sa frontière externe. Cette application intervient dans de nombreux processus industriels. La stratification thermique d'un fluide parcourant un pipeline génère des contraintes mécaniques pouvant provoquer des dégradations du matériel telles que des fissures. La connaissance de la température sur le mur intérieur d'un pipeline est donc essentielle pour contrôler l'état du matériel.

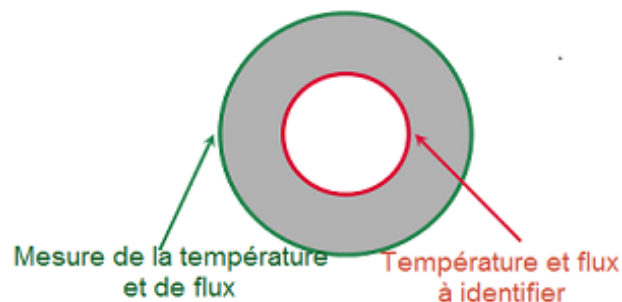


Figure 2 : *Schéma représentatif de pipeline.*

Le dernier exemple que l'on citera concerne la détection de contacts. On considère un solide inclus dans un autre. À partir de mesures de déplacements sur la frontière atteignable, on souhaite identifier les zones de contact et de frottement entre ces deux solides. Cet exemple est illustré par la Figure 3.

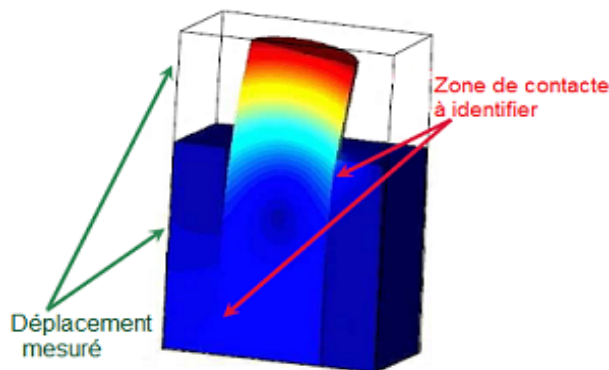


Figure 3 : Schéma représentatif de l'Inclusion.

Ce problème inverse est un problème mal posé au sens de Hadamard, c'est-à-dire qu'une paire de données sur une partie de la frontière ne conduit pas nécessairement à une solution sur tout le domaine (i.e problème d'existence ou ici de compatibilité des données).

En électrocardiographie le problème inverse de détermination des paramètres est mathématiquement modélisé par une équation de Laplace :

$$(\mathcal{P}_{inv}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial x} |_{\Gamma_0} = 0, & u |_{\Gamma_0} = u_{mes}. \end{cases}$$

Où  $u_{mes}$  est le potentiel mesuré sur le torse avec  $\Omega$ , la cage thoracique entre la peau et l'épicarde. Pour tester les méthodes numériques et la méthode de factorisation, nous allons simplifié le problème en supposant que  $\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$  avec  $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$ .

Le problème  $(\mathcal{P}_{inv})$  est aussi un problème de Cauchy mal posé au sens de Hadamard. Voici l'exemple classique de Hadamard d'un problème mal posé :

$$(\mathcal{P}_H) \begin{cases} -\Delta u_n = 0 & \text{dans } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ -\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx), & u_n(x, 0) = 0. \end{cases}$$

la solution du problème  $(\mathcal{P}_H)$  est donnée par :  $u_n = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$

Romarquons que  $u_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , mais la solution explose.

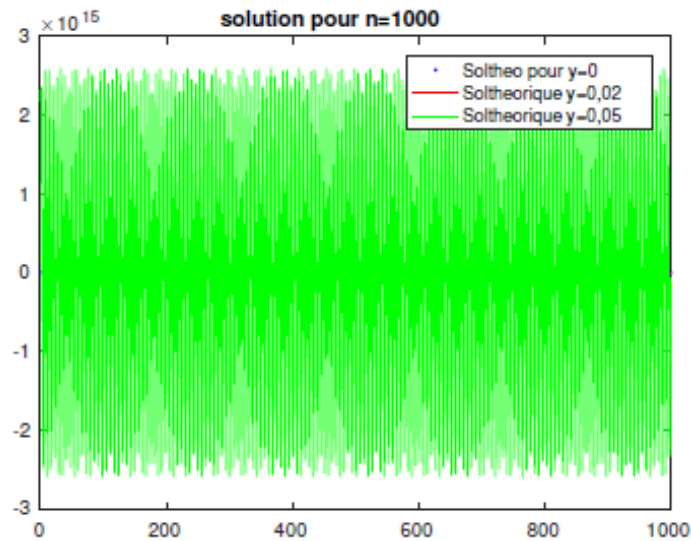


Figure 7 : Illustration de la solution du problème de Hadamard, obtenue pour  $n = 1000$ ,  $x = ih$  avec  $h = \frac{\pi}{n}$ .

Cette problématique fournit aux chercheurs un défi intéressant pour la mise au point de méthodes numériques permettant d'approcher la solution du problème de Cauchy. De nombreux travaux théoriques et appliqués portant sur ce sujet ont été proposés. En voici une énumération :

- F. Ben Belgacem et H. El Fekih [10] [38].
- A. Cimetière et al.[5].
- L. Bourgeois [16].
- J. Baumeister et J. Leitão [8].

### 1.3 Objectif de la thèse

L'objectif de cette thèse est de proposer une nouvelle formulation mathématique du problème inverse en imagerie électrocardiographique. La nouveauté de cette approche est que nous prenons en compte les mesures manquantes sur la surface du corps. Le problème inverse de l'imagerie par électrocardiographie est formulé comme un problème de complétions des données pour l'équation de Laplace. La

condition aux limites de Neumann est indiquée sur toute la surface du corps. La difficulté vient du fait que la condition aux limites de Dirichlet n'est donnée que sur une partie de la surface du corps et qu'une frontière incomplète est donc adjacente à une frontière complète. On va utiliser dans ce travail deux techniques : le plongement invariant et la résolution d'un problème inverse en ayant recours à une fonctionnelle d'écart à la loi de comportement.

La technique du plongement invariant introduite par J. Henry et A. Ramos dans ([28], [29]) permet de factoriser un problème aux limites elliptique de second ordre en un système de problèmes de premier ordre. Cette technique a été utilisée pour obtenir des résultats analytiques et numériques dans certains domaines applicatifs tel que : la physique de l'atmosphère, la théorie du transport et la propagation des ondes acoustiques [31]. Le principe de la méthode revient à plonger le problème initial dans une famille de problèmes similaires dépendant d'un paramètre, elle a été proposée par Bellman [12], dans le contexte de la théorie du contrôle optimal, puis elle a été développée par Henry et Ramos ([28] [29]) qui ont présenté une justification complète dans le cas du problème de Poisson dans un domaine cylindrique, en adaptant la méthode développée par J.L. Lions dans [33] pour résoudre les problèmes de contrôle optimal en boucle fermée de systèmes gouvernés par des équations paraboliques. Ils ont plongé le problème initial dans une famille de problèmes similaires, chacun défini sur un sous-cylindre délimité par une section variable. Dans ce cas, le plongement est naturellement fait dans la direction de l'axe du cylindre, ce qui permet la factorisation de l'opérateur du second ordre en un produit d'opérateurs de premier ordre. Ils ont obtenu une factorisation en deux problèmes découplés de type parabolique, dans des directions opposées. Ils ont montré, ainsi, que la même méthode appliquée au problème discrétisé peut être interprétée comme une factorisation de Gauss par bloc de la matrice du problème. Cette méthode est également utilisée dans les travaux de thèse de F. Jday [19] pour traiter le problème inverse de complétion de données, et elle est étudiée en détails, notamment sur des domaines de géométries quelconques, dans le livre de J. Henry et A. M. Ramos [28]. Nous nous appuyerons dans cette thèse sur ces deux

derniers ouvrages.

De façon synthétique, cette méthode permet de "transporter" des données connues depuis une surface vers une autre surface où l'on cherche à obtenir des informations. Dans le cadre du problème inverse en électrocardiographie, cela revient à transporter les données de potentiel et de dérivées de potentiel connues sur la surface du torse vers la surface du coeur, permettant ainsi de compléter les données de Dirichlet et Neumann manquantes. Dans le cadre de la théorie du contrôle optimal, le problème initial de Poisson est décomposé en deux "sous-problèmes" bien posé [43] :

- ▶ l'un vérifie la condition de Dirichlet sur le torse et un paramètre de contrôle vérifie la condition de Neumann sur le coeur.

- ▶ inversement, le second vérifie la condition de Neumann sur le torse et un paramètre de contrôle vérifie la condition de Dirichlet sur le coeur.

On obtient ainsi deux problèmes aux limites bien posés. Au lieu de chercher à minimiser une fonction coût qui porte sur les solutions des deux problèmes en introduisant les états adjoints et permettant d'obtenir les valeurs des paramètres de contrôle qui complètent la solution et sa dérivée sur le coeur, nous allons appliquer la méthode de factorisation. On plonge spatialement ces problèmes dans deux familles de problèmes aux limites similaires définis sur des sous-domaines du problème initial et délimités par une frontière mobile dont la position décrira l'axe de plongement. C'est cette frontière mobile qui va jouer le rôle de "transport" des informations (la condition de Dirichlet ou bien de Neumann suivant le sous-problème) depuis la peau du thorax jusqu'à l'épicarde. Ce plongement se fait suivant un axe du domaine qui sera le plus approprié à définir. Le plongement va dépendre d'un paramètre qui sera la coordonnée qui permettra de repérer l'abscisse de la frontière le long de cet axe de plongement. Dans le cas du problème direct ces problèmes sont résolus dans les deux directions opposées de l'axe de plongement : torse  $\rightarrow$  coeur et coeur  $\rightarrow$  torse. Dans le cadre du problème inverse, la résolution de ces deux problèmes se fera dans le même sens torse  $\rightarrow$  coeur, correspondant ainsi à la physique de notre problème.

Pour résoudre ces deux familles de problèmes on définit alors sur la frontière mobile des opérateurs de type Dirichlet-Neumann et Neumann-Dirichlet et des termes de résidus leurs sont associés. Ces opérateurs vérifient des équations de Riccati et permettent de donner la valeur du potentiel sur la surface mobile en fonction de la valeur de la dérivée normale de la solution et inversement. Ils sont reliés à la géométrie du problème. Les termes de résidus vérifient quand à eux des équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et sont associés aux conditions limites à la surface du torse. On obtient alors deux systèmes d'équations découplés portant sur les opérateurs et les résidus et qui dépendent du paramètre qui décrit la position de la frontière mobile. Nous avons besoin ensuite de résoudre ces systèmes d'équations pour obtenir la valeur des opérateurs et des résidus sur la surface du coeur.

A partir de là il est possible de montrer que l'inversion d'un système matriciel construit à partir des valeurs des opérateurs et résidus définis sur la surface du coeur est équivalente à minimiser la fonction coût du problème de contrôle optimal. Si on applique un terme de régularisation à la fonctionnelle (dû aux instabilités numériques, aux erreurs sur les conditions limites sur le torse) on peut alors montrer comment la matrice à inverser est également modifiée. Un des avantages de la méthode réside dans le fait que, comme il a été déjà précisé auparavant, les opérateurs sont liés à la géométrie du problème étudié. Autrement dit, si on possède plusieurs jeux de données de conditions limites sur le torse (dans le but par exemple de suivre l'évolution temporelle du potentiel sur le coeur), il n'est nécessaire de ne résoudre qu'une seule fois les équations de Riccati. Les équations portant sur les résidus devront quand à elles être résolues autant de fois qu'il y a de jeux de données sur les conditions limites définies sur le torse. Un autre point est que la formulation matricielle à inverser est analytique et porte sur un système défini en amont de toute discrétisation numérique. On peut donc étudier précisément le caractère mal posé du problème et proposer une régularisation et discrétisation adaptées.

On comprend que les opérateurs de Dirichlet et Neumann sont essentiels à la

bonne reconstruction des données sur le coeur. De la précision avec laquelle nous serons capables de les approximer sur la surface du coeur dépendra la "qualité" du champ de potentiel reconstruit. Il est donc nécessaire de résoudre au mieux les équations de Riccati afin d'assurer le bon transport des informations depuis la surface du torse vers la surface du coeur.

## 1.4 Plan de la thèse

Ce document est réparti en une introduction, six chapitres et finalisé par une conclusion.

►Le deuxième chapitre est consacré à l'adaptation des outils mathématiques qui seront utilisés dans la suite de ce travail.

►Notre objectif dans le troisième chapitre est de présenter la méthode de plongement invariant extraite des travaux de Ramos et Henry ([28] [29]) il s'agit de la factorisation du problème de Poisson dans un domaine cylindrique. Nous présentons le cadre fonctionnel et les calculs formels de la méthode.

►Dans le chapitre 4 nous appliquons la méthode de factorisation pour résoudre le problème de complétion de données pour l'équation de Laplace dans un domaine cylindrique borné, cette méthode permet de fournir directement les données manquantes.

►Dans le chapitre 5 Nous présentons un article publié dans le journal *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* [3]. nous proposons une nouvelle formulation mathématique du problème inverse en imagerie électrocardiographique. La nouveauté de cette approche est que nous prenons en compte les mesures manquantes sur la surface du corps. Le problème inverse de l'imagerie par électrocardiographie est formulé comme un problème de complétions des données pour l'équation de Laplace. Afin de construire le potentiel électrique sur la surface cardiaque, nous utilisons une approche de contrôle optimale où le potentiel inconnu à la frontière externe fait également partie des variables de contrôle. Nous appliquons la méthode de factorisation pour résoudre le problème de complétion de données pour

l'équation de Laplace dans un domaine cylindrique borné, cette méthode permet de fournir directement les données manquantes. En plus grâce à cette méthode nous donnons une approximation explicite des opérateurs d'interface ce qui nous aide à choisir une bonne régularisation du problème de Cauchy.

► Le but du sixième chapitre est d'analyser l'effet de la régularisation du bruit sur la solution du problème de complétions des données, à la fois lorsqu'on considère une observation complète et incomplète sur la frontière accessible.

► Dans le chapitre 7, nous appliquons la méthode de plongement invariant pour la résolution du problème inverse dans un domaine tridimensionnel quelconque. Nous faisons l'application dans un domaine sphérique.

► Dans le huitième chapitre nous présentons une conclusion générale de notre travail, et nous donnons les perspectives pour des travaux futurs.



# Chapitre 2

## Outils mathématiques

Le but de ce chapitre est de fixer les notations et de rappeler sans démonstration les résultats que nous allons utiliser tout au long de ce travail.

### 2.1 Liste des symboles

$grad u = \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$	gradient.
$\partial_n u = \nabla u \cdot \eta$	dérivée normale.
$n$	la normale sortante par rapport à la surface considérée
$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplacien par rapport aux coordonnées cartésiennes.
$E'$	dual de $E$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$	produit scalaire dans la dualité $E', E$ .
$\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$	domaine borné à frontière et de dimension $d = 2, 3$ .
$\partial\Omega = \Gamma$	frontière du domaine $\Omega$ .
$\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O}$	domaine cylindrique de longueur $a$ .
$\Gamma_a$	partie du bord sur laquelle on cherche la solution.
$\Sigma = \partial\mathcal{O} \times ]0, a[$	la frontière latérale du cylindre.

## 2.2 Espaces de Sobolev

Soit un  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$ , et  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  à support compact. On note  $L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions à valeurs réelles telles que :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f|^2 dx < +\infty \right\}.$$

La norme de cet espace est :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left[ \int_{\Omega} |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire associé est :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle espace de Sobolev  $H^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ , telles que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $p$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$ . Autrement dit

$$H^p(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) / \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad |\alpha| \leq p, \quad D^\alpha f \in L^2(\Omega) \}.$$

C'est un espace de Hilbert de norme.

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq p} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs  $H_0^1(\Omega)$  est la fermeture dans  $H^1(\Omega)$  de l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . On écrit alors :

$$H_0^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) / f = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \}.$$

De norme :

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Soit  $s$  un réel quelconque. L'espace de Sobolev à exposant fractionnaire  $H^s(\Omega)$  est l'interpolé d'ordre  $\frac{s}{n}$  de  $L^2(\Omega)$  et de  $H^n(\Omega)$  pour  $n > s$ .

Soit  $A \in \mathcal{L}(H^n(\Omega))$  l'opérateur symétrique tel que :

$$\langle Au, v \rangle_{H^n(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^n(\Omega).$$

Comme  $L^2(\Omega)$  est compact dans  $H^n(\Omega)$  et  $A$  est symétrique, alors celui-ci est diagonalisable dans une base  $\omega_n$  orthogonale à la fois pour  $L^2(\Omega)$  et  $H^n(\Omega)$ . On a :

$$A\omega_n = \Lambda_n \omega_n$$

où  $\Lambda$  matrice diagonale.

On caractérise alors  $H^n(\Omega)$  par :

$$H^n(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \omega_n / \sum_n |u_n|^2 \|\omega_n\|_{H^n(\Omega)}^2 < +\infty \right\}.$$

On a alors la définition suivante de  $H^s$  :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \omega_n / \sum_n |u_n|^2 \|\omega_n\|_{H^n(\Omega)}^{2\frac{s}{n}} \|\omega_n\|_{L^2(\Omega)}^{2(1-\frac{s}{n})} < +\infty \right\}.$$

Soit  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la base orthonormale de  $L^2(\Omega)$  constituée de vecteurs propres du Laplacien sur  $\Omega$  avec condition de Dirichlet sur  $\partial\Omega$  et  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des valeurs propres associées.

Dans cette base, les espaces usuels ont pour définition équivalentes :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n) |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$  est l'interpolé d'ordre  $\frac{1}{2}$  entre  $H_0^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ . et on écrit :

$$[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega).$$

On a la caractérisation suivante :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n)^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Enfin, pour  $s \in \mathbb{R}^+$ , on désigne par  $H_0^s(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^s(\Omega)$ .

Pour  $s; s'$  non demi-entiers, l'interpolé entre  $H_0^s(\Omega)$  et  $H_0^{s'}(\Omega)$  d'ordre  $\theta$  (avec  $\theta \in ]0, 1[$ ) est  $H^{\theta s + (1-\theta)s'}(\Omega)$ , sauf si  $\theta s + (1-\theta)s'$  est un demi-entier (cf [30])

## 2.3 Espaces duaux

On note  $H^s(\Omega)'$  le dual de l'espace  $H^s(\Omega)$ ; c'est l'espace des formes linéaires continues sur  $H^s(\Omega)$ .

**Théorème 2.3.1** *Pour tout  $\varphi \in H^s(\Omega)'$ , il existe un unique  $f \in H^s(\Omega)$  tel que :*

$$\langle \varphi, v \rangle_{H^s(\Omega)' \times H^s(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{H^s(\Omega)}, \quad \forall v \in H^s(\Omega).$$

*On identifie  $L^2(\Omega)$  à son dual, mais on identifie pas  $H_0^1(\Omega)$  et son dual. On note  $H^{-s}(\Omega)$  le dual de  $H_0^s(\Omega)$ . Pour  $s \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $H^{-s}(\Omega) = H^s(\Omega)'$ .*

**Cas particulier :**

On désigne par  $H^{-1}(\Omega)$  le dual de  $H_0^1(\Omega)$ . Pour  $s > 0$ , on a :  $H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$  des injections continues et denses.

Si on applique le théorème de représentation de Riesz à la base  $\psi_n$ , on obtient la caractérisation suivante pour  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)'$  :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)' = \left\{ u = \sum_n u_n \psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

**Remarque 2.3.1**  $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$  est le dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ , mais pas celui de  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ , (cf [30]).

**Théorème 2.3.2 (Théorème de trace)** *L'application :*

$$\begin{aligned} g : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\rightarrow (\mathcal{D}(\Gamma))^m \\ u &\rightarrow g(u) = \left( \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} \right)_{0 \leq j \leq (m-1)}, \end{aligned}$$

*se prolonge par continuité en une application linéaire surjective (notée encore  $g$ )*

*de  $H^m(\Omega)$  sur  $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et admet un relèvement linéaire continu :*

$$G : \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^m(\Omega).$$

**Théorème 2.3.3 (Formule de Green)**

*Pour  $u$  et  $v$  régulières sur  $\Omega$  on a :*

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma.$$

*$\eta$  : normal unitaire à  $\partial\Omega = \Gamma$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ .*

**Théorème 2.3.4 (Lax-Milgram)**

*Soit  $V$  un espace de Hilbert et  $a(.,.)$  une forme bilinéaire symétrique continue vérifiant :*

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 ; \forall u \in V.$$

*alors, pour tout  $f \in V'$  (espace dual de  $V$ ) le problème :*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V, \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle ; \forall v \in V. \end{cases}$$

*admet une unique solution  $u$  dans  $V$ .*

**Définition 2.3.1** *Soit  $X$  un espace de Banach de norme  $\|\cdot\|_X$  ; pour tout entier  $m \geq 0$ , on désigne par  $\mathcal{C}^m(0, T; X)$ ,  $0 < T < +\infty$ , l'espace des fonctions  $m$  fois continûment différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$  ; c'est lui-même un espace de Banach pour la norme :*

$$\|v\|_{\mathcal{C}^m(0, T; X)} = \max_{0 \leq k \leq m} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^k v}{dx^k} \right\|_X \right).$$

**Définition 2.3.2** Pour tout  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $L^p(0, T; X)$  l'espace des fonctions  $t \rightarrow v(t)$  fortement mesurables sur  $(0, T)$  pour la mesure  $dt$  et telles que :

$$\|v\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

C'est également un espace de Banach pour cette norme.

Si  $p = \infty$ , on remplace cette norme par :

$$\|v\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in ]0, T[} \text{ess} \|v(t)\|_X.$$

**Proposition 2.3.1** Si  $X$  est un espace de Hilbert de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ , alors  $L^2(0, T; X)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

**Lemme 2.3.1** Si  $u \in L^p(0, T; X)$  et  $\frac{du}{dt} \in L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , alors  $u$  est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de  $]0, T[$ , continue de  $[0, T] \rightarrow X$ .

**Théorème 2.3.5 (Holmgren)**

soit  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\Gamma \subset \partial\Omega$  tel que  $|\Gamma| \neq 0$  si  $u$  est la solution du système :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors  $u = 0$  dans  $\Omega$ .

**Définition 2.3.3 (Problèmes bien-posés et mal-posés)**

Le mathématicien français, Jacques Hadamard a défini le concept d'un problème bien-posé. Il s'agit d'un problème dont : la solution existe ; elle est unique ; et elle dépend continument des données.

Un problème qui n'est pas bien-posé au sens d'Hadamard est dit mal-posé.

## Chapitre 3

# Factorisation du problème de Poisson dans un domaine cylindrique

Dans ce chapitre on rappelle la méthode de factorisation des problèmes aux limites présentée par Jacques Henry et A.Ramos dans [28] pour un problème de Poisson posé dans un domaine cylindrique. Le contenu de ce chapitre constitue l'outil principal exploité tout au long de ce travail de thèse.

### 3.1 Position du problème et cadre fonctionnel

On considère le problème de Poisson posé dans un ouvert cylindrique  $\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^n$ . La section  $\mathcal{O}$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de bord régulier. Le cylindre est limité par ses faces  $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$ ,  $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$ . Nous allons faire jouer à  $x_1$  un rôle particulier, comparable à celui du temps pour le contrôle de problème d'évolution. On reprend donc des notations traditionnelles pour les problèmes d'évolution. On appelle  $\Sigma = \partial\mathcal{O} \times ]0, a[$  la frontière latérale du cylindre (Figure 4). On note  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \Delta_y$  le Laplacien en séparant les variables  $x_2, \dots, x_n$  notées  $y$  et la variable  $x_1$ , que l'on note désormais  $x$ . Pour insister sur

le rôle particulier de la coordonnée  $x$  on notera éventuellement la fonction  $u(x, y)$  comme  $u(x)$  et la dérivée en  $x$  soit  $\frac{\partial u}{\partial x}$  soit  $\frac{du}{dx}$ . On considère le problème :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ -\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = u_1 & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases} \quad (3.1)$$

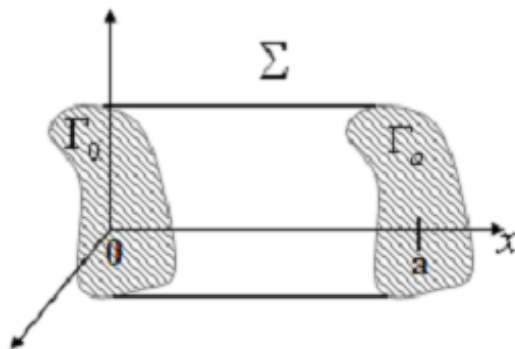


Figure 4 : *Domaine du problème.*

Pour le problème  $(\mathcal{P}_0)$ , on choisit  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  (espace dual de  $H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$ ) et  $u_1 \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$ .

Les espaces  $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_a))'$  et  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)$  sont munis respectivement des produits scalaires suivant (voir [45]) :

$$(u, v)_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)'} = \int_{\Gamma_a} (-\Delta_{\Gamma_a})^{-1/4} u (-\Delta_{\Gamma_a})^{-1/4} v = \int_{\Gamma_a} u (-\Delta_{\Gamma_a})^{-1/2} v,$$

pour tout  $(u, v) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)'$  et

$$(f, g)_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)} = \int_{\Gamma_a} (-\Delta_{\Gamma_a})^{1/4} f (-\Delta_{\Gamma_a})^{1/4} g = \int_{\Gamma_a} f (-\Delta_{\Gamma_a})^{1/2} g,$$

pour tout  $(f, g) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)$ .

**Définition 3.1.1** *On définit les espaces  $X$ ,  $X_0$  et  $Y$  de la façon suivante :*

$$X = L^2(0, a; H_0^1(\mathcal{O})) \cap H^1(0, a; L^2(\mathcal{O})),$$



$$X_0 = X \cap \{u \in X : u|_{\Gamma_a} = 0\},$$

$$Y = \left\{ u \in X : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(0, a; H^{-1}(\mathcal{O})) \right\}.$$

Ces espaces d'un type adapté aux problèmes d'évolution permettent d'insister sur le rôle privilégié donné à la variable  $x$ . On munit  $X$  et  $X_0$  respectivement des normes :

$$\|u\|_X^2 = \int_0^a \|u(x)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + \int_0^a \|u(x)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx + \int_0^a \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx.$$

$$\|u\|_{X_0}^2 = \int_0^a \|u(x)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + \int_0^a \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx.$$

La norme de  $X$  est équivalente à La norme de  $H^1(\Omega)$ . Par l'inégalité de Poincaré il en est de même pour  $X_0$ . Donc  $X_0$  est fermé dans  $X$  lui-même fermé dans  $H^1(\Omega)$ .

On utilisera par la suite le théorème de trace suivant.

**Proposition 3.1.1** Soit  $u \in Y$  et soit  $\Gamma_s = \{s\} \times \mathcal{O}$ , alors on a

$$(u|_{\Gamma_s}, \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_s}) \in \mathcal{C}([0, a]; H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}) \times H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'),$$

et l'application trace  $u \rightarrow (u|_{\Gamma_s}, \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma_s})$  est continue et surjective de  $Y$  sur  $H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}) \times H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$ .

**Preuve:** C'est une application directe du théorème 3.1 P 23 de [30], en prenant en compte le fait que  $H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  est l'interpolé d'ordre 1/2 de  $L^2(\mathcal{O})$  et  $H^{-1}(\mathcal{O})$ .  $\square$

La formulation variationnelle du problème  $(\mathcal{P}_0)$  s'écrit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = (f, v) + \langle u_0, v|_{\Gamma_0} \rangle_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})', H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}, \quad \forall v \in X_0. \quad (3.2)$$

Où  $u \in X$  satisfait la contrainte  $u|_{\Gamma_a} = u_1$ . Après translation d'un relèvement de  $u_1$ , on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram [30]. On obtient donc que le problème (3.1) est bien posé et admet une solution dans  $H^1(\mathcal{O})$ .

## 3.2 Présentation de la méthode de factorisation

La méthode de factorisation des problèmes aux limites consiste à fractionner le domaine d'étude en introduisant une frontière mobile  $\Gamma_s = \{s\} \times \mathcal{O}$  avec  $s \in [0, a]$  sur laquelle on impose une condition de Dirichlet ou de Neumann et à définir un opérateur reliant la valeur de la solution ou de sa dérivée à cette condition au bord, puis à déplacer cette frontière d'une extrémité à l'autre du cylindre (Figure 5).

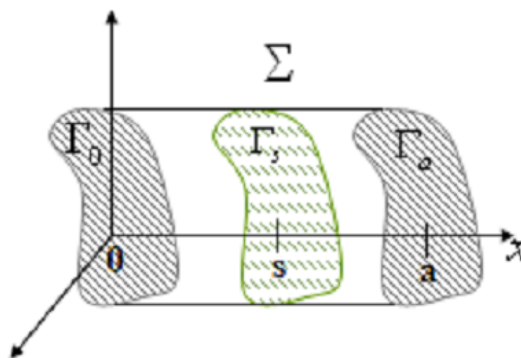
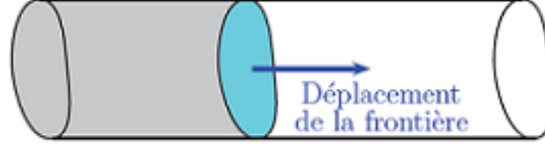


Figure 5 : *Domaine du problème en mouvement.*

Elle vise à transformer un problème aux limites où la solution dépend en chaque point de l'ensemble des données au bord, en le produit de deux problèmes aux valeurs initiales de type Cauchy découplés et reliés par cet opérateur de découplage qui vérifie lui-même un problème de Cauchy. Chaque type de condition sur la frontière mobile va mener à une factorisation.

### 3.2.1 Plongement invariant direct

On se restreint au domaine  $\Omega_s = ]0, s[ \times \mathcal{O}$  compris entre la face gauche du cylindre et la frontière mobile (Figure 5) et on impose une condition de Dirichlet sur celle-ci.  $\Gamma_s$  est confondue initialement avec  $\Gamma_0$ , on la fait ensuite évoluer dans le sens des  $x$  croissants (Figure 6).

Figure 6 : *Déplacement de la frontière mobile.*

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Le problème à résoudre dans le domaine restreint s'écrit :

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta u_s = f & \text{dans } \Omega_s \\ u_s = 0 & \text{sur } \Sigma \\ -\frac{\partial u_s}{\partial x} = u_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_s = h & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases} \quad (3.3)$$

Soit  $u_s = u_s(h)$  la solution de (3.3). De façon évidente (3.1) est exactement (3.3) pour  $s = a$ ,  $h = u_1$ , et donc  $u = u_a(u_1)$ . En fait, on définit ainsi toute une famille de problèmes de Poisson, indicée par les paramètres  $s \in [0, a]$  et  $h \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$ .

Pour  $s \in ]0, a[$  on définit  $Y_s$  comme suit :

$$Y_s = \left\{ v \in H^1(\Omega_s) : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \in L^2(0, s; H^{-1}(\mathcal{O})) \text{ et } v|_{\Sigma} = 0 \right\}.$$

**Définition 3.2.1** Pour tout  $s \in ]0, a[$  on définit l'application Dirichlet-Neumann  $P(s)$  par  $P(s)h = \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} |_{\Gamma_s}$  et le résidu  $\omega(s)$  par  $\omega(s) = \frac{\partial \beta_s}{\partial x} |_{\Gamma_s}$ , où  $h \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$ ,  $\gamma_s \in Y_s$  et  $\beta_s \in Y_s$  sont les solutions des deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma_s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ \gamma_s = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ -\frac{\partial \gamma_s}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \gamma_s = h & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta \beta_s = f & \text{dans } \Omega_s, \\ \beta_s = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ -\frac{\partial \beta_s}{\partial x} = u_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \beta_s = 0 & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases}$$

Posons  $P(0)h = 0$  et  $\omega(0) = -u_0$ .

$P$  est un opérateur de type Dirichlet-Neumann dépendant de  $x$  agissant sur des fonctions de la variable  $y$  définies sur la section  $\mathcal{O}$ .

Pour tout  $s \in [0, a]$ ,  $P(s) : H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  est un opérateur linéaire et  $\omega(s) = \frac{d\beta_s}{dx} \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  grâce au caractère bien posé des problèmes en  $\gamma_s$  et  $\beta_s$  à la proposition (3.1.1).

### 3.2.2 Propriétés de l'opérateur $P$

L'opérateur  $P$  a été défini formellement ; on va maintenant préciser son cadre fonctionnel.

**Proposition 3.2.1** *L'opérateur linéaire  $P(s) : H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  est continu, auto-adjoint et positif pour tout  $s \in [0, a]$  et la forme bilinéaire associée sur  $H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$ ,  $\langle P(s)h, h \rangle_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}$  est coercive pour tout  $s \in [0, a]$ .*

**Preuve:** L'opérateur  $P(s)$  est défini par la composition de deux opérateurs continus :  $h \rightarrow \gamma_s \rightarrow \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} |_{\Gamma_s}$  de  $\mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}), Y_s)$  et  $\mathcal{L}(Y_s, H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})')$  respectivement, il est donc continu.

Soient  $h, \bar{h} \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$  et  $\gamma_s, \bar{\gamma}_s$  les solutions correspondantes dans  $\Omega_s$ . On a, par la formule de Green

$$0 = - \int_{\Omega_s} \Delta \gamma_s \bar{\gamma}_s dx dy = \int_{\Omega_s} \nabla \gamma_s \nabla \bar{\gamma}_s dx dy - \langle P(s)h, \bar{h} \rangle_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}$$

ce qui montre le caractère auto-adjoint de  $P(s)$  si l'on permute  $h$  et  $\bar{h}$  et sa positivité en faisant  $h = \bar{h}$ . On a

$$\langle P(s)h, \bar{h} \rangle_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})} = \int_{\Omega_s} \left( |\nabla_y \gamma_s|^2 + \left| \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} \right|^2 \right) dx dy$$

Alors par un calcul semblable à celui permettant de démontrer l'inégalité de Poincaré

$$\| h \|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}^2 = \|\gamma_s(t)\|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}^2 + \int_t^s \frac{d}{dx} \|\gamma_s(x)\|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}^2 dx$$

Or

$$\frac{d}{dx} \|\gamma_s(x)\|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}^2 = 2 \left\langle \frac{d\gamma_s(x)}{dx}, \gamma_s(x) \right\rangle_{L^2(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})},$$

Où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})}$  est le produit de dualité en prenant  $H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$  pour espace pivot. Alors

$$\| h \|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}^2 \leq C \|\gamma_s(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \int_t^s \|\gamma_s(x)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + \int_t^s \left\| \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx$$

Pour  $0 \leq t \leq s \leq a$ . En intégrant par rapport à  $t$  de 0 à  $s$ , on obtient

$$s \| h \|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}^2 \leq (C + s) \int_0^s \| \gamma_s(x) \|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 dx + s \int_0^s \left\| \frac{\partial \gamma_s}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dx$$

et donc

$$\langle P(s)h, h \rangle_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})' \times H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})} \geq \frac{s}{C + s} \| h \|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})}^2$$

ce qui démontre la coercivité.  $\square$

Un argument de linéarité du problème (3.3) permet d'écrire que :

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} \Big|_{\Gamma_s} = P(s)h + \omega(s),$$

où  $u_s = \beta_s + \gamma_s$ , l'indice  $s$  rappelant que le problème est défini sur  $\Omega_s$ .

On considère maintenant pour  $x \leq s$  la restriction de  $u_s(h)$  à  $\Omega_x$ . Par le raisonnement précédent on a donc la relation

$$\frac{\partial u_s}{\partial x}(x; h) = P(x)u_s(x; h) + \omega(x). \quad (3.4)$$

En dérivant formellement cette relation par rapport à  $x$ , et en utilisant l'équation vérifiée par  $u_s$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = -\Delta_y u_s - f = \frac{dP}{dx} u_s + P \frac{du_s}{dx} + \frac{d\omega}{dx}.$$

En substituant  $\frac{du_s}{dx}$  grâce à (3.4) :

$$0 = \left( \frac{dP(x)}{dx} + P^2(x) + \Delta_y \right) u_s(x) + \frac{d\omega(x)}{dx} + P(x)\omega(x) + f(x) \text{ pour } 0 \leq x \leq s.$$

En faisant  $x = s$

$$0 = \left( \frac{dP}{dx}(s) + P^2(s) + \Delta_y \right) h + \frac{d\omega}{dx}(s) + P(s)\omega(s) + f(s).$$

Comme  $h$  et  $s$  sont arbitraires, cette relation est en fait une identité, dont chaque membre est nul, ce qui signifie que :

$$\begin{cases} \left( \frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y \right) h = 0, \\ \frac{d\omega}{dx} + P\omega = -f. \end{cases}$$

En particulier la première équation est vérifiée pour tout  $h \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$ , on en déduit que l'opérateur  $\left(\frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y\right)$  est nul. Ceci permet d'obtenir le système découplé suivant :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y = 0 & , P(0) = 0, \\ \frac{d\omega}{dx} + P\omega = -f & , \omega(0) = -u_0, \\ -\frac{du}{dx} + Pu = -\omega & , u(a) = u_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

En particulier,  $P$  est solution d'une équation de Riccati, c'est à dire d'une équation différentielle avec un terme quadratique.

$$\frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y = 0. \quad (3.6)$$

En combinant les deux dernières équations du système (3.5), on obtient la forme factorisée du problème de Poisson. En effet, on a :

$$\left(\frac{d}{dx} + P\right)\omega = -f \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dx} - P\right)u = -\omega.$$

il en résulte que :

$$-\left(\frac{d}{dx} + P\right)\left(\frac{d}{dx} - P\right)u = f.$$

Comme l'opérateur  $P$  est auto-adjoint, les deux facteurs sont adjoints l'un de l'autre.

Le système (3.5) est découplé car on peut intégrer les deux premières équation en  $x$  de 0 à  $a$  pour obtenir  $P$  et  $\omega$  ("descente"), puis  $u$  est obtenu par intégration rétrograde de la troisième équation ("remonter").

### 3.2.3 Réciproques

On vient de voir que la factorisation du problème de Poisson permet d'obtenir un système découplé d'équations aux conditions initiales ; on va maintenant établir la réciproque, c'est à dire montrer comment on peut retrouver le problème de Poisson à partir de ce système découplé.

**Lemme 3.2.1** Soit  $u, \omega \in Y_a$  et  $P \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}), H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})')$  vérifiant le système découplé :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dx} + P^2 + \Delta_y = 0 & , P(0) = 0, \\ \frac{d\omega}{dx} + P\omega = -f & , \omega(0) = -u_0, \\ -\frac{du}{dx} + Pu = -\omega & , u(a) = u_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Alors  $u$  est solution du problème de Poisson (3.1).

**Preuve:** Pour ce faire, on utilise la relation affine  $\frac{\partial u}{\partial x} = Pu + \omega$  et on la dérive formellement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{dP}{dx}u + P\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

L'équation différentielle sur  $\omega$  permet de remplacer  $\frac{d\omega}{dx}$  par  $-P\omega - f$  :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{dP}{dx}u + P\frac{\partial u}{\partial x} - P\omega - f.$$

L'équation de Riccati sur l'opérateur  $P$  permet alors de remplacer le terme  $\frac{dP}{dx}$  par  $-P^2 - \Delta_y$ , d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-P^2 - \Delta_y)u + P\frac{\partial u}{\partial x} - P\omega - f.$$

or

$$P\frac{\partial u}{\partial x} = P^2u + P\omega.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-P^2 - \Delta_y)u + P^2u + P\omega - P\omega - f.$$

Ce qui se simplifie en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta_y u = f.$$

$u$  vérifie bien l'équation de Poisson.

On va maintenant prouver que les conditions aux bords du problème (3.1) sont également respectées.

Tout d'abord  $u|_{\Sigma} = 0$  puisque  $u \in Y_s$ , et  $u(a) = u_1$  (condition initiael pour le système). Il reste à prouver que  $u$  vérifie la condition de Neumann sur la face gauche du cylindre.

En  $x = 0$  on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = P(0)u(0) + \omega(0) \text{ or } P(0) = 0 \text{ et } \omega(0) = -u_0.$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = -u_0.$$

$u$  est donc bien solution de (3.1).  $\square$

On vient de voir que les deux systèmes sont équivalents : on a remplacé un problème aux limites par un système découplé aux conditions initiales.

### 3.2.4 Plongement invariant rétrograde

Pour factoriser le problème de Poisson, on a choisi arbitrairement de se restreindre à la partie gauche du cylindre et d'imposer une condition de type Dirichlet sur la frontière mobile. Cependant, il est tout à fait possible de factoriser le problème sur l'autre partie du cylindre, ou de choisir une condition différente sur la frontière mobile. La formulation obtenue aboutira encore à un système découplé, avec un opérateur solution d'une équation de Riccati.

On va mettre en oeuvre la méthode de factorisation pour la famille des domaines complémentaires : on se restreint au domaine  $\overline{\Omega}_s = ]s, a[ \times \mathcal{O}$  compris entre la face droite du cylindre et la frontière mobile  $\Gamma_s$ , sur laquelle on définit une condition de Neumann arbitraire. La frontière se déplace cette fois de  $a$  vers 0 (Figure 7).

On va donc définir une famille de problèmes sur le domaine restreint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \overline{u}_s & = f \quad \text{dans } \overline{\Omega}_s, \\ \overline{u}_s & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ -\frac{\partial \overline{u}_s}{\partial x} & = h \quad \text{sur } \Gamma_s, \\ \overline{u}_s & = u_1 \quad \text{sur } \Gamma_a. \end{array} \right.$$





Figure 7 : Déplacement de la frontière mobile.

On note  $\bar{Y}_s$  l'espace fonctionnel suivant :

$$\bar{Y}_s = \{v \in H^1(\bar{\Omega}_s) : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \in L^2(s, a; H^{-1}(\mathcal{O})) \text{ et } v|_{\Gamma_a} = v|_{\Sigma} = 0\}.$$

**Définition 3.2.2** Pour tout  $s \in ]0, a[$  et  $h \in H_0^{1/2}(\mathcal{O})'$  on définit l'application  $Q(s) \in \mathcal{L}(H_0^{1/2}(\mathcal{O})', H_0^{1/2}(\mathcal{O}))$  par  $Q(s)h = \bar{\gamma}_s|_{\Gamma_s}$ , où  $\bar{\gamma}_s \in \bar{Y}_s$  est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{\gamma}_s = 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_s \\ \bar{\gamma}_s|_{\Sigma} = 0, & -\frac{\partial \bar{\gamma}_s}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h, \bar{\gamma}_s|_{\Gamma_a} = 0. \end{cases}$$

et définissons  $\bar{\omega}$  par  $\bar{\omega}(s) = \bar{\beta}_s|_{\Gamma_s} \in H_0^{1/2}(\mathcal{O})$ , où  $\bar{\beta}_s \in \bar{Y}_s$  est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{\beta}_s = f & \text{dans } \bar{\Omega}_s \\ \bar{\beta}_s|_{\Sigma} = 0, & -\frac{\partial \bar{\beta}_s}{\partial x}|_{\Gamma_s} = 0, \bar{\beta}_s|_{\Gamma_a} = u_1 \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$Q(a) = 0, \quad \bar{\omega}(a) = u_1.$$

On obtient ainsi un opérateur  $Q$  qui agit sur des fonctions définies sur la section. Il s'agit cette fois d'un opérateur de type Neumann-Dirichet. Comme pour la formulation précédente, le caractère linéaire du problème permet d'écrire :

$$u = Qh + \bar{\omega}$$

$$\bar{u}_s(x) = -Q(x) \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x}(x) + \bar{\omega}(x).$$

En dérivant formellement en  $x$  :

$$\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x}(x) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x) \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x}(x) - Q(x) \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}(x).$$

L'équation de Poisson permet d'obtenir :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial^2 x} = -\Delta_y \bar{u}_s - f.$$

et en remplaçant

$$\bar{u}_s(x) = -Q(x) \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x}(x) + \bar{w}(x).$$

Alors

$$\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x}(x) = \left( -\frac{\partial Q}{\partial x} - Q \Delta_y Q \right) \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x}(x) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(x) + Q \Delta_y \bar{w}(s) + Qf(x).$$

En faisant  $x = s$  et en utilisant le fait que  $\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x}(s; h) = h$  est arbitraire, on obtient le système découpé :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \Delta_y Q + I = 0 & , Q(a) = 0, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + Q \Delta_y \bar{w} = -Qf & , \bar{w}(a) = u_1, \\ Q \frac{\partial u}{\partial x} + u = \bar{w} & , \frac{\partial u}{\partial x}(0) = -u_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

En combinant les deux dernières équations du système, on obtient la factorisation du problème de Poisson :

$$-\left( \frac{\partial}{\partial x} + Q \Delta_y \right) \left( I + Q \frac{\partial}{\partial x} \right) u = Qf. \quad (3.9)$$

L'opérateur Neumann-Direchlet vérifie donc lui aussi une équation de Riccati :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + Q \Delta_y Q + I = 0. \quad (3.10)$$

Pour retrouver une forme auto-adjointe de cette factorisation, on utilise l'inversibilité de  $Q$  pour  $x \neq a$  ainsi que son caractère auto-adjoint. Multiplions (3.9) par  $Q^{-1}$

$$\begin{aligned} -Q^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} + Q \Delta_y \right) \left( I + Q \frac{\partial}{\partial x} \right) &= -Q^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} + Q \Delta_y \right) Q \left( Q^{-1} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= - \left( Q^{-1} \frac{\partial}{\partial x} Q + \Delta_y Q \right) \left( Q^{-1} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

grâce à l'équation de Riccati sur  $Q$  ( 3.8).

De même que pour la première formulation, ce système découplé permet de retrouver le problème de Poisson (3.1).

**Lemme 3.2.2** *Soit  $\bar{u}, \bar{w} \in \bar{Y}_0$  et  $Q \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})', H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}))$  vérifiant le système découplé :*

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \Delta_y Q - I = 0 & , Q(a) = 0, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - Q \Delta_y \bar{w} = Qf & , \bar{w}(a) = u_1, \\ -Q \frac{\partial u}{\partial x} + u = \bar{w} & , \frac{\partial u}{\partial x}(0) = -u_0. \end{cases}$$

*Alors  $\bar{u}$  est solution du problème de Poisson (3.1).*

**Preuve:** Ce lemme se démontre de la même manière que pour la première formulation. □

### 3.3 Discrétisation par différences finies

Nous voulons montrer dans cette partie comment on peut appliquer la méthode de plongement invariant à des versions discrétisées du problème  $(\mathcal{P}_0)$ .

Nous supposons que  $\Omega$  est un rectangle dans  $\mathbb{R}^2$  de longueur  $a$  et de largeur  $b$  c'est-à-dire  $\Omega = ]0, a[ \times ]0, b[$ , On suppose que  $f$ ,  $u_0$  et  $u_1$  sont suffisamment régulières et que les conditions de compatibilité sont vérifiées aux angles du bord du domaine, pour obtenir une solution  $u \in \mathcal{C}^3(\Omega)$  et la convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème continu.

Pour deux entiers  $N$  et  $p$  donnés, nous posons  $h = a / (N - \frac{1}{2})$  et  $k = b/p$ . Alors (voir Figure.8), les noeuds sont définis par :

$$\begin{cases} a_{i,j} = ((-\frac{1}{2} + i)h, jk) & \text{pour } i \in \{0, \dots, N\} \text{ et } j \in \{0, \dots, p\} \\ a_{1/2, j} = (0, jk) & \text{pour } j \in \{0, \dots, p\} \end{cases}$$

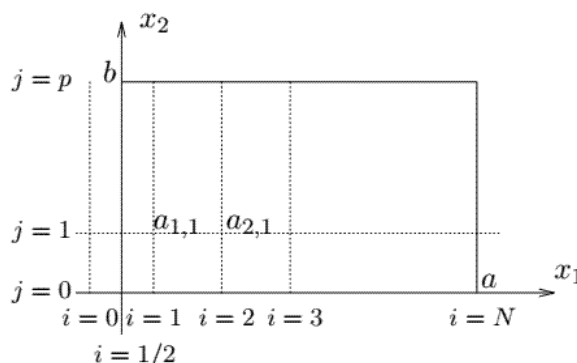


Figure 8 : *Maillage du domaine.*

#### Approximation du problème $(\mathcal{P}_0)$ :

Si  $i \in \{2, \dots, N - 1\}$  et  $j \in \{1, \dots, p - 1\}$  alors :

$$\begin{aligned} -\Delta u(a_{i,j}) &= f(a_{i,j}) \\ &= \frac{1}{k^2} [2u(a_{i,j}) - u(a_{i,j-1}) - u(a_{i,j+1})] \\ &+ \frac{1}{h^2} [2u(a_{i,j}) - u(a_{i-1,j}) - u(a_{i+1,j})] + O(h^2 + k^2). \end{aligned}$$

Et pour  $i = 1$  et  $j \in \{1, \dots, p-1\}$ ;

$$\begin{aligned} -\Delta u(a_{1,j}) &= f(a_{1,j}) \\ &= \frac{1}{k^2} [2u(a_{1,j}) - u(a_{1,j-1}) - u(a_{1,j+1})] \\ &\quad + \frac{1}{h^2} [u(a_{1,j}) - u(a_{2,j})] - \frac{1}{h} u_0(a_{1/2,j}) + O(h^2 + k^2). \end{aligned}$$

Remarquons ici que pour  $i = N$  et  $j \in \{1, \dots, p-1\}$  (ce qui correspond à la section  $\Gamma_a$ ), on a  $u(a_{N,j}) = u_1(a_{N,j})$  et pour  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  et  $j \in \{0, p\}$ ,  $u(a_{i,j}) = 0$  (bord latéral  $\Sigma$ ). Nous utilisons les notations suivantes :

$$u(a_i) = \begin{pmatrix} u(a_{i,1}) \\ \vdots \\ u(a_{i,p-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-1}.$$

$$u(a) = \begin{pmatrix} u(a_1) \\ \vdots \\ u(a_{N-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)(p-1)}.$$

$$\Delta_{y,h} = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p-1)(p-1)}(\mathbb{R}).$$

Alors si on pose  $B_1 = I - h^2 \Delta_{y,h}$  et  $B_i = 2I - h^2 \Delta_{y,h}$  pour  $i = 2, \dots, N-1$ , on a  $A_h u(a) = F_h + O(h^2 + k^2)$ , où

$$A_h = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & -I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -I & B_2 & -I & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & -I & B_3 & -I & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -I & B_{N-3} & -I & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -I & B_{N-2} & -I & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -I & B_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(N-1)(p-1)(N-1)(p-1)}(\mathbb{R}),$$

$$F_h = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{u_0(a_{1/2})}{h} \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \frac{u_1(a_N)}{h^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)(p-1)}. \quad (3.12)$$

avec  $f_i = (f(a_{i,j}))_j \in \mathbb{R}^{p-1}$ , pour tout  $i \in 1, \dots, N-1$ ,  $u_0(a_{1/2}) = (y_0(a_{1/2,j}))_j \in \mathbb{R}^{p-1}$  et  $u_1(a_N) = (u_1(a_{N,j}))_j \in \mathbb{R}^{p-1}$ .

Donc la discrétisation du problème  $(\mathcal{P}_0)$  consiste à chercher

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)(p-1)}.$$

tel que  $(\mathcal{P}_h) \quad A_h u_h = F_h$ .

### Application de la méthode de factorisation au problème ( $\mathcal{P}_h$ )

Pour  $i_0 \in \{2, \dots, N\}$  on définit le même problème ( $\mathcal{P}_0$ ) sur le sous domaine  $\Omega_{i_0}$ , ( $i \in \{1, \dots, i_0\}$ ) avec la donnée de Dirichlet  $u_{i_0}$  pour  $i = i_0$ . Si nous notons par :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i_0-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(i_0-1)(p-1)}$$

la solution du problème défini sur le sous domaine  $\Omega_i$ , nous obtenons

$$(\mathcal{P}_h^{i_0}) : \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & -I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -I & B_2 & -I & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -I & B_3 & -I & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -I & B_{i_0-3} & -I & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -I & B_{i_0-2} & -I \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -I & B_{i_0-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i_0-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{u_0(a_{1/2})}{h} \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{i_0-2} \\ f_{i_0-1} + \frac{u_{i_0}}{h^2} \end{pmatrix}$$

#### Approximation du système ( 3.7 ) :

Pour tout  $i \in \{1, \dots, i_0\}$ , posons  $P_{i-1} = P(-\frac{1}{2} + ih)$  et  $\omega_i = (\omega(a_{i,j}))_{1 \leq j \leq p-1} \in \mathbb{R}^{p-1}$ .

$P_{i-1}$  est l'opérateur Dirichlet-Neumann discrétisé qui est une matrice  $M_{p-1}(\mathbb{R})$ .

Nous avons alors de l'équation ( 3.4 ) :

$$P_{i-1}u(a_{i-1}) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_{i-1}) - \omega_{i-1},$$

Nous approximons  $\frac{\partial u}{\partial x}(a_{i-1})$  par  $\frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ , nous obtenons

$$P_{i-1}u_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \omega_{i-1}. \quad (3.13)$$

Ce qui implique :

$$u_i = (I + hP_{i-1})u_{i-1} - h\omega_{i-1}. \quad (3.14)$$

Nous approximons  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  par  $\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$ , et  $\Delta_y$  par  $\Delta_{y,h}$  nous obtenons :

Si  $u$  est la solution de  $(\mathcal{P}_h^{i_0})$  nous obtenons :

$$-u_{i-1} + 2u_i - h^2\Delta_{y,k}u_i - u_{i+1} = h^2f_i \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, i_0\}.$$

Ce qui implique  $-h^2\Delta_{y,k}u_i - h^2f_i = u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}$ .

avec  $u_{i+1} = (I + hp_i)u_i + h\omega_i$ . Alors

$$-h^2\Delta_{y,k}u_i - h^2f_i = hP_iu_i - hP_{i-1}u_{i-1} + h\omega_i - h\omega_{i-1}.$$

Et on a  $u_{i-1} = (I + hP_{i-1})^{-1}(u_i - h\omega_{i-1})$ . On obtient alors

$$-h^2\Delta_{y,k}u_i - h^2f_i = hP_iu_i - hP_{i-1}(I + hP_{i-1})^{-1}(u_i - h\omega_{i-1}) + h\omega_i - h\omega_{i-1}.$$

Puisque  $u_{i_0}$  est arbitraire, nous obtenons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{l} P_i = P_{i-1}(I + hP_{i-1})^{-1} - h\Delta_{y,h} \\ P(0) = 0 \end{array} \right. \\ \mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{l} \omega_i = (I + hP_{i-1})^{-1}\omega_{i-1} - hf_i \\ \omega(0) = -u_0(a_{\frac{1}{2}}) \end{array} \right. \\ \mathcal{S}_3 \left\{ \begin{array}{l} (I + hP_i)u_i = u_{i+1} - h\omega_i \\ u_N = u_1(a_N) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

**Remarque 3.3.1** À chaque itération on a une inversion d'une matrice pleine, un produit de deux matrices et une somme.

**Proposition 3.3.1** Le schéma (3.15) est implicite équivalent à  $(\mathcal{P}_h)$  et par suite il est d'ordre  $O(h^2, k^2)$ .

**Preuve:** Nous posons  $U_i = (I + hP_i)$  et  $L_i = (I + hP_i)^{-1}$ .



Alors  $\mathcal{S}_2 \Rightarrow :$

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -L_1 & I & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & -L_2 & I & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -L_{N-4} & I & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -L_{N-3} & I & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -L_{N-2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 - \frac{u_0(a_1)}{h} \\ -f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -f_{N-2} \\ -f_{N-1} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{S}_3 \Rightarrow :$

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} U_1 & -I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & -I & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & U_3 & -I & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & U_{N-3} & -I & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 0 & U_{N-2} & -I \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & U_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 \\ -\omega_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\omega_{N-2} \\ -\omega_{N-1} + \frac{u_1(a_N)}{h} \end{pmatrix}$$

On obtient alors la factorisation par blocs  $LU$  de Gauss de  $A_h$ .

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -L_1 & I & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -L_2 & I & \ddots & \vdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -L_{N-2} & I \end{pmatrix} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} U_1 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & -I & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & U_3 & \ddots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U_{N-1} \end{pmatrix}$$

On peut le vérifier pour  $i \in \{1, \dots, N-2\}$  on a  $-L_i U_i = -I$

$$\begin{aligned}
L_i + U_{i+1} &= (I + hP_i)^{-1} + I + hP_{i+1} \\
&= (I + hP_i)^{-1} + I + hP_i(I + hP_i)^{-1} - h^2\Delta_{y,k} \\
&= (I + hP_i)^{-1}(I + hP_i) + I - h^2\Delta_{y,k} \\
&= 2I - h^2\Delta_{y,k} \\
&= B_i \\
U_1 &= I + hP_1 \\
&= I + hP_0(I + hP_0)^{-1} - h^2\Delta_{y,k} \\
&= B_1
\end{aligned}$$

□

### 3.3.1 Approximation à l'ordre 1 en $h$ de $\mathcal{S}_1$ , $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$

À l'ordre 1, on a :  $(I + hP_i)^{-1} = I - hP_i + o(h)$ , le système (3.15) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{l} P_i = P_{i-1}(I - hP_{i-1}) - h\Delta_{y,k} + o(h) \\ P(0) = 0 \end{array} \right. \\ \mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{l} \omega_i = (I - hP_{i-1})\omega_{i-1} - hf_i + o(h) \\ \omega(0) = -u_0(a_{\frac{1}{2}}) \end{array} \right. \\ \mathcal{S}_3 \left\{ \begin{array}{l} u_i = (I - hP_i)(u_{i+1} - h\omega_i) + o(h) \\ u_N = u_1(a_N) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

**Remarque 3.3.2** 1) *Ce schéma est explicite puisqu'il ne nécessite pas d'inversion de matrice. Il est d'ordre  $O(h + k^2)$ . C'est le schéma d'Euler pour la discrétisation des équations de la factorisation de  $(\mathcal{P}_0)$ .*

2) *A chaque pas de calcul il nécessite une seule multiplication de matrice  $M_{(p-1)}(\mathbb{R})$ .*

## Chapitre 4

# Complétion des données en utilisant la méthode de factorisation

### 4.0.2 Introduction

Dans cette partie, nous allons utiliser une nouvelle méthode mathématique : celle du plongement invariant par factorisation des problèmes aux limites mentionné dans le deuxième chapitre.

### 4.1 Méthode dans le cas cylindrique

Nous nous appuyerons tout le long de ce chapitre sur le manuscrit de thèse de F. Jday [19]. Nous allons dans un premier temps définir mathématiquement le problème à résoudre pour résoudre le problème de complétion des données. Nous allons distinguer deux cas : dans ce chapitre nous allons traiter le cas de l'observation complète, et dans le chapitre qui suit nous allons traiter le cas de l'observation incomplète.

### 4.1.1 Problème de complétion des données

On considère le problème de Laplace sur le cylindre de longueur  $a$  et de section  $\mathcal{O}$  telque  $\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  un ouvert borné et  $a$  un réel strictement positif. Soit  $\Sigma = ]0, a[ \times \partial\mathcal{O}$  la frontière latérale du cylindre. On considère que la solution est nulle sur cette partie du domaine. On note  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_a$  les faces du cylindre telles que  $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathcal{O}$  et  $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$  et on désigne par  $x$  la coordonnée qui décrit l'axe du cylindre entre ces deux surfaces voire la (Figure 9).

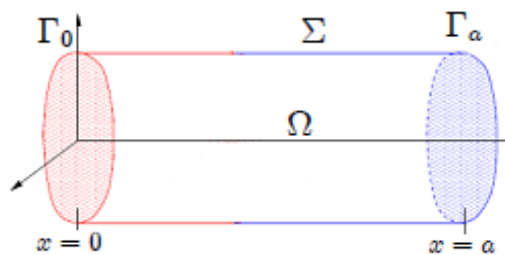


Figure 9 : *Domaine du problème.*

Les données de Cauchy de notre problème sont connues sur la surface en  $x = 0$  :  $u = T$  et  $\partial_n u = \nabla u \cdot n = \Phi$  sur  $\Gamma_0$ , telque  $(\Phi, T) \in \left(H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})\right)' \times H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$  (avec  $n$  utilisant la convention de la normale sortante par rapport à la surface considérée). Notre problème s'écrit alors :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u = T & \text{sur } \Gamma_0, \\ \partial_n u = \Phi & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Nous n'avons pas de conditions aux limites sur  $\Gamma_a$  et c'est ces données manquantes que l'on cherche à approcher à l'aide de la condition surabondante sur  $\Gamma_0$ . Ce problème est donc mal posé au sens de Hadamard. En particulier il n'a de solution que si le couple  $(\Phi, T)$  est compatible. Dans ce chapitre nous avons utilisé la même formulation en terme de problème de contrôle optimal que [43], mais nous avons ajouté un terme régulateur à la fonction coût pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système d'optimalité [30]. Nous avons ensuite appliqué

la méthode de factorisation des problèmes aux limites, introduite au deuxième chapitre, pour le résoudre. Cette méthode permet de factoriser un problème aux limites elliptique en le produit de deux problèmes de type parabolique. Elle permet de fournir directement les données manquantes pour tout nouveau couple  $(\Phi, T)$ .

Donc le but est le suivant :

On cherche à déterminer les conditions de Dirichlet et de Neumann sur la surface en  $x = a$  qui complètent le problème  $(\mathcal{P}_0)$ , c'est-à-dire déterminer les données de potentiel  $t$  et sa dérivée  $\varphi$  sur la surface  $\Gamma_a$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u = T \quad ; \quad \partial_n u = \Phi & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = t \quad ; \quad \partial_n u = \varphi & \text{sur } \Gamma_a. \end{array} \right.$$

On suppose que les données  $T$  et  $\Phi$  sont compatibles, c'est-à-dire qu'elles conduisent à une solution sur tout le domaine  $\Omega$  (ce n'est pas forcément le cas à cause des erreurs qui peuvent apparaître quand on modélise et discrétise le modèle ou bien quand on effectue les mesures de potentiel sur la surface du torse dans le cas du problème en ECG). Ceci est une première source de contribution au caractère mal-posé du problème. La seconde est la non-continuité des solutions par rapport aux données de Cauchy. Nous verrons par la suite que des techniques de régularisations sont alors nécessaires.

Il existe différentes façons de résoudre ce problème de Cauchy mal posé. L'une d'entre elles consiste à passer par la résolution d'un problème de contrôle optimale que nous présentons.

## 4.2 La complétion des données comme problème de contrôle optimal

Le problème de complétion de données  $(\mathcal{P}_0)$  est transformé en problème de contrôle optimal en suivant la démarche utilisée dans [43]. Il comprend deux états,

chacun vérifiant une des conditions limites de la surface  $\Gamma_0$  et se traduit par les deux problèmes mixtes biens posés suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_1 = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ u_1 = T \text{ sur } \Gamma_0, \\ \partial_n u_1 = \eta \text{ sur } \Gamma_a. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ u_2 = \tau \text{ sur } \Gamma_a, \\ \partial_n u_2 = \Phi \text{ sur } \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où  $\eta$  et  $\tau$  sont les paramètres de contrôles. telque  $(\eta, \tau) \in \left( H_{00}^{1/2}(\Gamma_a) \right)' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)$ .

On définit ensuite une fonction coût sur les paramètres de contrôles  $\eta$  et  $\tau$  :

$$J(\eta, \tau) = \int_{\Omega} (\nabla u_1(\eta) - \nabla u_2(\tau))^2, \quad (4.3)$$

En cherchant à minimiser cette fonctionnelle, on détermine pour quelle valeur des paramètres  $\eta$  et  $\tau$  nous avons  $u_1 = u_2$ , et ainsi déterminer  $\varphi$  et  $t$  puisque dans ce cas là  $(\eta, \tau) = (\varphi, t)$  sur  $\Gamma_a$ . pour tout  $(\eta, \tau) \in U_{ad} = \left( H_{00}^{1/2}(\Gamma_a) \right)' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)$ ,  $U_{ad}$  est l'ensemble des solutions admissibles.  $u_1(\eta)$  et  $u_2(\tau)$  sont les solutions respectivement de ( 4.1 ) et ( 4.2 ). Le contrôle optimal, s'il existe, est donné par :

$$(\varphi, t) = \arg \min \{ J(\eta, \tau) \text{ tq } : (\eta, \tau) \in U_{ad} \}. \quad (4.4)$$

(Voir [43]).

Le problème de minimisation (4.4) est instable numériquement, en effet l'existence et l'unicité de la solution est lié à la compatibilité des données  $(\Phi, T)$ . Nous régularison alors la fonction  $J(\eta, \tau)$ .

Il existe plusieurs méthode : méthode itérative avec critère d'arrêt pour solution optimale [18], méthode de quasi-réversibilité non itérative [16] [34], méthode de

Tikhonov classique [5]. Nous utilisons cette dernière et nous notons  $J_\epsilon$  la nouvelle fonction coût associée au problème régularisé, nous avons :

$$J_\epsilon(\eta, \tau) = \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 + \epsilon(\|\eta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)}^2 + \|\tau\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)}^2). \quad (4.5)$$

### 4.3 Utilisation de la méthode de factorisation pour découpler le système d'optimalité

#### 4.3.1 Application de la méthode de factorisation

Dans cette partie, nous appliquons la méthode de plongement invariant, présenté dans le deuxième chapitre, au système d'optimalité (4.1) et (4.2). Et à l'aide de cette méthode nous explicitons la fonction coût en fonction des contrôles  $\eta$ ,  $\tau$ .

En nous référant aux notations du deuxième chapitre, nous plongeons chacun des problèmes (4.1) et (4.2) dans une famille de problèmes similaires définis sur  $\Omega_s$ , voir la (Figure 10).

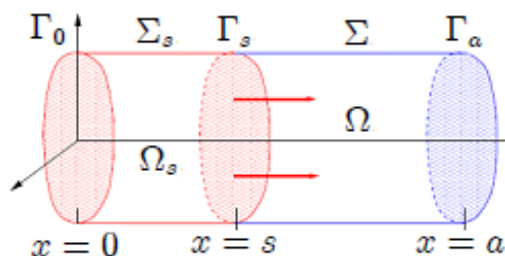


Figure 10 : *Domaine du problème en mouvement.*

Pour (4.1) nous imposons une condition aux limites de Neumann :  $\frac{\partial u_1^s}{\partial x}|_{\Gamma_s} = \alpha$ , et pour (4.2) nous imposons une condition aux limites de Dirichlet :  $u_2^s|_{\Gamma_s} = \beta$ .

$$\begin{cases} -\Delta u_1^s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ u_1^s = 0 & \text{sur } \Sigma_s, \\ u_1^s = T & \text{sur } \Gamma_0, \\ \partial_n u_1^s = \alpha & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ u_2^s = 0 & \text{sur } \Sigma_s, \\ \partial_n u_2^s = \Phi & \text{sur } \Gamma_0, \\ u_2^s = \beta & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases} \quad (4.7)$$

Nous considérons l'application Neumann-Dirichlet (N-D) pour  $u_1 : \alpha \mapsto u_1^s|_{\Gamma_s}$  et Dirichlet-Neumann (D-N) pour  $u_2 : \beta \mapsto \frac{\partial u_2^s}{\partial x}|_{\Gamma_s}$ . D'après le chapitre (2) nous avons

$$\frac{\partial u_2^s}{\partial x}|_{\Gamma_s} = P(s)\beta + \omega_2(s),$$

avec  $P(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}), (H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}))')$ ,  $P(0) = 0$  et  $\omega_2(0) = -\Phi$ . Le plongement invariant directe du chapitre (2) donne

$$\frac{\partial P}{\partial x} + P^2 = -\Delta_y, \quad P(0) = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + P\omega_2 = 0, \quad \omega_2(0) = -\Phi \quad (4.9)$$

Après la résolution de ces équations de Riccati nous obtenons  $u_2$  en intégrant dans le sens rétrograde l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = Pu_2 + \omega_2, \quad u_2(a) = \tau \quad (4.10)$$

Par le même raisonnement, nous pouvons étudier l'opérateur (N-D)  $Q$ , pour  $u_1$  vérifiant (4.6),

$$u_1^s = Q(s)\alpha + \omega_1(s), \quad Q(s) \in \mathcal{L}((H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}))', H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})).$$

pour  $x \leq s$  nous avons

$$u_1^s(x) = Q(s) \frac{\partial u_1^s}{\partial x}(x) + \omega_1(x).$$

En dérivant en  $x$

$$\frac{\partial u_1^s}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial u_1^s}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 u_1^s}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x}.$$



Substituons  $u_1^s$ , en utilisant (4.6), prenons  $x = s$  et puisque  $\alpha$  est arbitraire nous avons

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\Delta_y Q = I, \quad Q(0) = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} - Q\Delta_y \omega_1(x) = 0, \quad \omega_1(0) = T. \quad (4.12)$$

Après la résolution de l'équation de Riccati (4.11) et (4.12) nous obtenons  $u_1$  en intégrant dans le sens rétrograde l'équation différentielle suivante :

$$u_1 = Q \frac{\partial u_1}{\partial x} + \omega_1, \quad u_1(a) = Q(a)\eta + \omega_1(a). \quad (4.13)$$

### 4.3.2 Résolution du problème de contrôle optimal Résolution Sans régularisation

Montrons maintenant que la fonctionnelle d'énergie  $J$  peut être exprimée directement en fonction des contrôles  $\eta$  et  $\tau$  en utilisant les opérateurs  $P$  et  $Q$ .

Dans toute la suite de ce paragraphe nous notons  $P(a)$  et  $Q(a)$  respectivement par  $P$  et  $Q$ .

On définit la matrice d'opérateurs  $A$  par :

$$A = \begin{pmatrix} Q & -QP \\ -PQ & P \end{pmatrix}.$$

Notons  $[\eta; \tau]$  le vecteur ligne de composantes  $\eta$  et  $\tau$ .

**Proposition 4.3.1** *La fonction coût  $J$  s'écrit sous la forme suivante :*

$$J(\eta, \tau) = C + [\eta, \tau]A[\eta, \tau]' - 2 \int_{\Gamma_a} (\omega_1 P \tau + Q \omega_2 \eta),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\eta$  et  $\tau$ . Si un minimum  $(\varphi, t)$  de  $J$  est atteint, il satisfait :

$$A[\varphi, t]' = [Q\omega_2, P\omega_1]'. \quad (4.14)$$

**Preuve:** Notons  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions de

$$\begin{cases} -\Delta\alpha = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \alpha = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \alpha = T & \text{sur } \Gamma_0, \\ \partial_n\alpha = 0 & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} -\Delta\beta = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \beta = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \partial_n\beta = \Phi & \text{sur } \Gamma_0, \\ \beta = 0 & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases} \quad (4.16)$$

En utilisant la formule de Green, (4.1) et (4.2) nous aurons

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau) &= \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 dx dy \\ &= \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (u_1 - u_2) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (u_1 - u_2) dy \\ &= \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} - \Phi \right) (T - u_2) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (u_1 - u_2) dy \\ &= \int_{\Gamma_0} \left( -\Phi T + \frac{\partial u_1}{\partial n} T + \Phi u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial n} u_2 \right) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (u_1 - \tau) dy. \end{aligned}$$

Appliquons la formule de Green pour le terme  $\frac{\partial u_1}{\partial n} u_2$

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau) &= \int_{\Gamma_0} \left( -2\Phi T + \frac{\partial u_1}{\partial n} \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial n} u_2 \right) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta \tau - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) dy \\ &\quad + \int_{\Gamma_a} \left( \eta - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (u_1 - \tau) dy. \end{aligned}$$

De même pour le terme  $\frac{\partial u_1}{\partial n} \alpha$  et  $\frac{\partial \beta}{\partial n} u_2$

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau) &= -2 \int_{\Gamma_0} \Phi T dy + \int_{\Gamma_0} \left( T \frac{\partial \alpha}{\partial n} + u_2 \Phi \right) dy - \int_{\Gamma_a} \left( \eta \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial n} \cdot \tau \right) dy \\ &\quad + \int_{\Gamma_a} \left( \eta \tau - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (u_1 - \tau) dy, \\ &= -2 \int_{\Gamma_0} \Phi T dy + \int_{\Gamma_0} \left( T \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \beta \Phi \right) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta (u_1 - \alpha) + \left( \frac{\partial u_2}{\partial n} - \frac{\partial \beta}{\partial n} \right) \tau \right) dy \\ &\quad - 2 \int_{\Gamma_a} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} dy. \end{aligned}$$

D'après (4.10), (4.13) nous obtenons

$$\begin{aligned} u_1(a) &= Q(a)\partial_n u_1(a) + \omega_1(a) = Q(a)\eta + \omega_1(a), \\ \partial_n u_2(a) &= P(a)u_2(a) + \omega_2(a) = P(a)\tau + \omega_2(a). \end{aligned}$$

Et d'après la définition de  $\alpha$  et  $\beta$  nous obtenons

$$\alpha(a) = \omega_1(a), \quad \frac{\partial \beta}{\partial n}(a) = \omega_2(a). \quad (4.17)$$

Donc

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau) &= -2 \int_{\Gamma_0} \Phi T dy + \int_{\Gamma_0} \left( T \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \beta \Phi \right) dy + \int_{\Gamma_a} (\eta Q \eta + \tau P \tau) dy \\ &\quad - 2 \int_{\Gamma_a} (Q \eta + \omega_1)(P \tau + \omega_2) dy. \\ &= -2 \int_{\Gamma_0} \Phi T dy + \int_{\Gamma_0} \left( T \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \beta \Phi \right) dy + \langle Q \eta, \eta \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a) \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)'} \\ &\quad + \langle P \tau, \tau \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a)' \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)} - \langle Q \eta, P \tau \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a) \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)'} - \langle P \tau, Q \eta \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a)' \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)}. \end{aligned}$$

Les opérateurs  $P$  et  $Q$  sont autoadjoints donc nous obtenons

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau) &= -2 \int_{\Gamma_0} \Phi T dy + \int_{\Gamma_0} \left( T \frac{\partial \alpha}{\partial n} + \beta \Phi \right) dy + \langle Q \eta, \eta \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a) \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)'} \\ &\quad + \langle P \tau, \tau \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a)' \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)} - \langle \eta, Q P \tau \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a) \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)'} - \langle \tau, P Q \eta \rangle_{H_0^{1/2}(\Gamma_a)' \times H_0^{1/2}(\Gamma_a)}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.3.2** *Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les solutions des équations (4.9) et (4.12). A l'optimum de  $J$  la relation (4.14) est équivalente à*

$$(I - QP)t = Q\omega_2 + \omega_1 \quad \text{et} \quad (I - PQ)\varphi = P\omega_1 + \omega_2. \quad (4.18)$$

*La compatibilité des données  $(\Phi, T)$ , pour le problème de Cauchy, et caractérisée par les trois assertions suivantes qui sont équivalentes :*

1.  $(Q\omega_2, P\omega_1)' \in \mathcal{I}(A)$ ,
2.  $Q\omega_2 + \omega_1 \in \mathcal{I}(I - QP)$ ,
3.  $\omega_2 + P\omega_1 \in \mathcal{I}(I - PQ)$ .

*Notons que, pour un opérateur  $X$ ,  $\mathcal{I}(X)$  représente l'image de  $X$ .*

**Preuve:** D'après la proposition (4.3.1) nous avons

$$\begin{cases} Q\varphi - QPt = Q\omega_2, \\ Pt - PQ\varphi = P\omega_1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Par la coercivité de  $P$  et le théorème de Lax-Milgram [30],  $P$  est un isomorphisme de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)$  vers  $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_a))'$ . Alors la deuxième équation de (4.19) est équivalente à

$$t = Q\varphi + \omega_1. \quad (4.20)$$

De même la première équation de (4.19) est équivalent à

$$\varphi = Pt + \omega_2. \quad (4.21)$$

Alors nous obtenons (4.18) par les combinaisons  $Q(4.21)+(4.20)$  et  $(4.21)+P(4.20)$ .

Réciproquement : supposons que (4.18) est satisfait.

Montrons d'abord que  $I - QP$  est injectif. Supposons qu'il existe  $\tau$  tel que  $(I - QP)\tau = 0$ , et considérons les problèmes (4.1), (4.2) dans le cas homogène ( $\Phi = T = 0$ ), c'est-à-dire  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Ensuite nous choisissons  $\eta = \partial_n u_2|_{\Gamma_a}$  la condition de Neumann sur la face  $\Gamma_a$  pour le système d'équation (4.1).

Nous aurons alors

$$u_1(\eta)|_{\Gamma_a} = Q\partial_n u_2|_{\Gamma_a} = QPu_2|_{\Gamma_a} = u_2|_{\Gamma_a}.$$

En appliquant le théorème d'Holmgren (2.3.5),  $u_1 = u_2$ . Donc  $u_1|_{\Gamma_a} = u_2|_{\Gamma_a} = 0$  et  $\partial_n u_1|_{\Gamma_a} = \partial_n u_2|_{\Gamma_a} = 0$ . Appliquons une autre fois le théorème d'Holmgren, nous déduisons que

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Donc  $\tau = 0$ , et par suite  $I - PQ$  est injectif.

Revenons à (4.18) la combinaison  $-P(4.18)_1+(4.18)_2$  donne

$$(I - PQ)(\varphi - Pt) = (I - PQ)\omega_2.$$

et nous retrouvons donc (4.21) et par le même raisonnement que précédemment nous retrouvons (4.20). (4.14) est obtenue par une combinaison linéaire de (4.20) et (4.21).

Passons maintenant à la condition de compatibilité pour les données  $(\Phi, T)$ . Si  $(Q\omega_2, P\omega_1)' \in \mathcal{I}(A)$  alors il existe  $(\varphi, t) \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma_a))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_a)$  solution du système (4.19). Soit  $u_1$  et  $u_2$  les fonction définies précédemment avec  $u_2|_{\Gamma_a} = t$  et  $\partial_n u_1|_{\Gamma_a} = \varphi$ . Alors la deuxième relation de (4.19) donne

$$\begin{aligned} \partial_n u_2 - \omega_2 &= PQ\partial_n u_1 + P\omega_1 \\ &= Pu_1 \end{aligned}$$

Donc  $P(a)u_1(a) = P(a)u_2(a)$ , et par la coercivité de  $P$  et le théorème de Lax-Milgram [30] :

$$u_1(a) = u_2(a)$$

De la même façon la première relation de (4.19) donne

$$\partial_n u_1|_{\Gamma_a} = \partial_n u_2|_{\Gamma_a}.$$

Ce qui implique que  $(\varphi, t)$  est la solution du problème inverse de complétion de données, puisque  $(\Phi, T)$  sont compatibles.

Réciproquement, si  $(\Phi, T)$  est compatible alors le problème inverse a une solution unique  $(\varphi, t)$  qui est le minimum la fonction  $J$ . La proposition (4.3.1) donne

$$A[\varphi, t]' = [Q\omega_2, P\omega_1]'.$$

Montrons maintenant que l'assertion 2) implique 3). Soit  $Q\omega_2 + \omega_1 \in \mathcal{I}(I - QP)$  et  $t$  tel que  $t - QPt = Q\omega_2 + \omega_1$ . Donc  $t - \omega_1 = QPt + Q\omega_2$ . Posons  $\varphi = Pt + \omega_2$ . Nous avons

$$Q\varphi = QPt + Q\omega_2 = t - \omega_1.$$

Multiplions par  $P$

$$PQ\varphi = Pt - P\omega_1 = \varphi - \omega_2 - P\omega_1,$$

Donc

$$\omega_2 + P\omega_1 \in \mathcal{I}(I - PQ).$$

Par un calcul similaire 3) implique 2).

D'après le calcul précédent, si nous avons la relation (4.19) alors (4.18) est satisfait, donc 1) implique 2) et 3). nous avons déjà montré que, réciproquement, 2) et 3) implique 1).  $\square$

## 4.4 Formulation explicite dans le cas d'un cylindre

### 4.4.1 Détermination des opérateurs d'interface

Dans cette partie on va traiter le problème  $(\mathcal{P}_0)$ , en utilisant une solution explicite de l'équation de Riccati dans le cas où  $\Omega$  est un cylindre. Dans ce cas particulier, on peut intégrer explicitement les équations de Riccati et déterminer les opérateurs Neumann-Dirichlet  $Q(a)$  et Dirichlet-Neumann  $P(a)$  sur la face  $\Gamma_a$ .

**Proposition 4.4.1** *Soit  $U(x)$  le  $C_0$  semi-groupe de générateur  $-2(-\Delta_y)^{1/2}$ . Pour un domaine cylindrique  $\Omega$  la solution de (4.8) est explicitement donnée par*

$$P(x) = (-\Delta_y)^{1/2}(I - U(x))(I + U(x))^{-1} \quad (4.22)$$

La solution  $Q(x)$  de (4.11) est donnée par :

$$Q(x) = (-\Delta_y)^{-1}P(x).$$

les opérateurs  $P$  et  $Q$  commute et  $R$  est donné par

$$R(x) = I - P(x)Q(x) = I - Q(x)P(x) = 4U(x)(U(x) + I)^{-2}.$$

Où  $R$  est l'opérateur d'interface, qui permet de passer aux données  $\varphi$  et  $t$  sur  $\Gamma_a$ .

**Preuve:** La formule (4.22) est prouvée dans [35] en utilisant la régularisation de Yosida. De cette formule nous concluons que  $P$  commute avec  $-\Delta_y$  et ses puissances.

Multiplions (4.8) par  $(-\Delta_y)^{-1}$ . Nous déduisons que  $(-\Delta_y)^{-1}P$  est une solution de (4.11), qui admet une unique solution donc

$$Q = (-\Delta_y)^{-1}P = (-\Delta_y)^{1/2}(I - U(x))(I + U(x))^{-1}.$$

Alors  $R = I - PQ$  est donné par

$$\begin{aligned} R(x) &= I - (-\Delta_y)^{-1}Q^2(x), \\ &= 4U(x)(U(x) + I)^{-2}. \end{aligned}$$

De la même façon  $S(x) = Q^{-1}(x) - P(x)$  est donnée par

$$S(x) = 4(-\Delta_y)^{1/2}U(x)(I - U^2(x))^{-1}.$$

□

#### 4.4.2 Influence de la longueur du cylindre

Nous utilisons ici les formules explicites obtenues dans la section précédente (4.4) pour étudier l'influence de la longueur du cylindre sur le caractère mal-posé du problème  $(\mathcal{P}_0)$ . Si la donnée  $(\Phi, T)$  est compatible, la solution  $(\varphi, t)$  du problème  $(\mathcal{P}_0)$  est donnée par :

$$(\varphi, t) = (S(a)^{-1}\omega_2(a) + R^{-1}\omega_1(a) \quad , \quad R(a)^{-1}\omega_2(a) - \Delta_y S(a)^{-1}\omega_1(a)).$$

Soit  $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\alpha_n > 0$  le spectre de l'opérateur  $(-\Delta_y)^{-1/2}$ . La suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croit vers  $+\infty$ . Alors le spectre de  $R(a)$  est donné par

$$\left\{ \frac{4 \exp^{-2\alpha_n a}}{(1 + \exp^{-2\alpha_n a})^2}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

le spectre de  $S(a)$  est donné par

$$\left\{ \alpha_n \frac{4 \exp^{-2\alpha_n a}}{1 - \exp^{-4\alpha_n a}}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

et le spectre de  $(-\Delta_y)^{-1}S(a)$  est

$$\left\{ \frac{4 \exp^{-2\alpha_n a}}{\alpha_n (1 - \exp^{-4\alpha_n a})}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Notons que ces suites décroissent exponentiellement vers 0, si  $n$  tend vers l'infini, et ça explique le caractère mal posé du problème( $\mathcal{P}_0$ ).

Nous remarquons aussi que si la longueur du cylindre  $a$  croit la vitesse de convergence de ces suites vers 0 augment. Ces formules permettent donc de quantifier le caractère mal-posé du problème inverse en fonction de la longueur du cylindre, c'est-à-dire de la distance entre la surface où les données sont surabondantes et celle où elles sont manquantes.

### 4.4.3 Conclusion

La méthode de factorisation a permis une expression directe des approximations des données manquantes du problème de complétion de données écrit comme un problème de contrôle optimal. Dans cette formulation les opérateurs  $P$  et  $Q$  ne dépendent pas des données. Donc si ce problème doit être résolu pour plusieurs jeux de données, pour chaque nouveau couple  $(\Phi, T)$  on doit résoudre uniquement les équations en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .



## Chapitre 5

# Analyse de la solution du problème inverse de l'ECGI avec des données incomplètes sur la surface du corps

### 5.1 introduction

Dans cette partie, nous allons traiter le problème de complétion des données avec des observations incomplètes sur la surface du corps.

### 5.2 Problème continu et méthode de factorisation

Par souci de simplicité, nous étudions un problème modèle où le domaine considéré est un cylindre. La géométrie cylindrique et l'opérateur Laplace facilitent la présentation de la méthode de factorisation.

La méthode peut être généralisée à des domaines non cylindriques réguliers

et à des opérateurs elliptiques de second ordre auto-adjoints plus généraux. La généralisation d'un domaine réaliste en trois dimensions peut être effectuée et sera présentée dans un autre article.

Considérons le domaine cylindrique  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega = ]0, a[ \times \mathcal{O}$ , où  $\mathcal{O}$  est un domaine borné dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ . La longueur du cylindre  $a$  est un nombre réel strictement positif. On note  $\partial\Omega$  la frontière du cylindre :  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_a \cup \Sigma$ , où  $\Sigma = ]0, a[ \times \partial\mathcal{O}$  est la frontière latérale de  $\Omega$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma_0^m \cup \Gamma_0^u = \{0\} \times \mathcal{O}$  et  $\Gamma_a = \{a\} \times \mathcal{O}$  sont les faces. La section  $\mathcal{O}$  pourrait être partitionnée comme  $\mathcal{O} = \mathcal{O}^m \cup \mathcal{O}^u$ , de sorte que  $\{0\} \times \mathcal{O}^m = \Gamma_0^m$  et  $\{0\} \times \mathcal{O}^u = \Gamma_0^u$ . Nous supposons que  $\Gamma_0$  est une frontière accessible, ce qui signifie que nous pouvons construire le potentiel électrique. D'autre part,  $\Gamma_a$  est une frontière inaccessible, ce qui signifie que nous ne pouvons construire aucune mesure dessus. Pour les raisons mentionnées précédemment, la frontière  $\Gamma_0^m$  est la partie de  $\Gamma_0$  où nous avons des mesures des potentiels et dans  $\Gamma_0^u$  nous n'avons pas de mesures de potentiel électrique. On note  $x \in \mathbb{R}$  les coordonnées le long de l'axe du cylindre et par  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  les coordonnées dans la section, perpendiculaires à l'axe. La représentation schématique du domaine  $\Omega$  et de toutes ses frontières est représentée sur la (Figure 11).

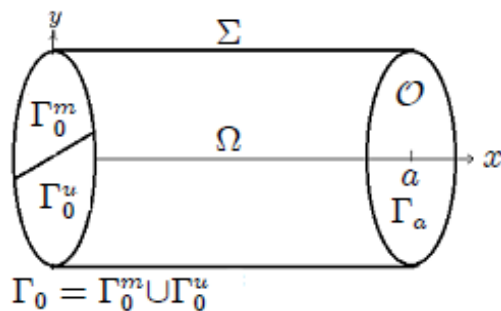


Figure 11 : Représentation schématique du domaine cylindrique utilisé dans l'étude.

### 5.2.1 Énoncé du problème

Nous considérons le problème suivant  $(\mathcal{P}_0)$  sur  $\Omega$  avec les données de Cauchy sur  $\Gamma_0^m$  :

$$(\mathcal{P}_0) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = T & \text{sur } \Gamma_0^m. \end{array} \right.$$

La frontière  $\Gamma_0^m$  est la portion mesurée de la surface de  $\Gamma_0$  c'est-à-dire la partie de  $\Gamma_0$  où nous avons à la fois les conditions aux limites de Dirichlet ( $u = T$ ) et de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ). La frontière  $\Gamma_0^u$  est la partie non mesurée de la surface  $\Gamma_0$  c'est-à-dire c'est la partie de  $\Gamma_0$  où nous savons seulement que nous avons une condition au limite de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ), aucune condition aux limites n'est disponible sur  $\Gamma_a$ . Le but de ce travail est de récupérer ces données aux limites manquantes en exploitant les données sur-spécifiées sur  $\Gamma_0^m$ . L'existence d'une solution à ce problème n'est pas assurée pour les données de Cauchy arbitraires

## 5.3 Formulation du problème de complétions des données en tant que problème de contrôle optimal

Nous supposons que nous connaissons exactement l'observation  $T$  sur  $\Gamma_0^m$  correspondant au problème des conditions aux limites et nous cherchons à déterminer les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sur  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_0^u$  complétant le problème  $(\mathcal{P}_0)$ , i.e. les données du potentiel électrique  $\tau$  et sa dérivée  $\eta$  sur la surface  $\Gamma_a$  et le potentiel  $\tau'$  sur  $\Gamma_0^u$  tels que le problème des conditions aux limites

surdéterminées ( $\mathcal{P}_0$ ) donné par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = T & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ u = \tau' & \text{sur } \Gamma_0^u, \\ u = \tau, \frac{\partial u}{\partial n} = \eta & \text{sur } \Gamma_a. \end{array} \right.$$

a une solution. Selon le théorème d'Holmgren, de telles conditions sont uniques et nous les désignons respectivement par  $t$ ,  $\varphi$ , et  $\hat{\tau}'$ . Afin d'éviter les détails techniques inutiles nous faisons l'hypothèse suivante ( $\mathcal{H}$ ) sur le sous-ensemble  $\Gamma_0^m$  et  $\Gamma_0^u$  de  $\Gamma_0$  :

$$(\mathcal{H}) \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } \partial\Gamma_0 \subset \partial\Gamma_0^m, \\ \text{ou } \partial\Gamma_0 \cap \partial\Gamma_0^m = \emptyset. \end{array} \right.$$

Pour faire face à des problèmes bien posés, il faut préciser les espaces où  $T$  est donné et  $\tau'$  est recherché. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.3.1** *Considérons l'ensemble borné ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  avec une frontière régulière  $\Gamma$ . Supposons que  $\Omega$  est séparé en deux parties ouvertes  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  avec une frontière commune  $\gamma_0^1 : \Omega = \Omega_0 \cup \gamma_0^1 \cup \Omega_1$ , satisfaisant l'hypothèse ( $\mathcal{H}$ ). Soit  $u \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$  tel que  $u \equiv 0$  dans  $\Omega_1$ . Alors  $u|_{\Omega_0} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega_0)$ .*

**Preuve:** La preuve est inspirée de celle du Théorème 11.7 dans [30]. Par partition d'unité et utilisation de cartes locales, le problème est réduit à la géométrie simplifiée :  $\Omega = \mathbb{R}^n, \Gamma = \{x_n = 0\}, \Omega_0 = \{x_n < 0\}, \Omega_1 = \{x_n > 0\}$ . D'après le théorème 10.2 p 52 de [30], puisque  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , nous avons :

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty t^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - u(x)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Par conséquent, en définissant  $x = (x', x_n)$ , en particulier pour  $i = n$ , nous avons :

$$\left( \int_0^\infty t^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x', x_n + t) - u(x)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Mais puisque par hypothèse  $u(x) \equiv 0$  dans  $x_n < 0$ , et comme  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+^n)$ , où  $\mathbb{R}_+^n = \{x_n > 0\}$ , nous avons :

$$\left( \int_0^\infty t^{-2} \int_{\mathbb{R}_+^n} |u(x', x_n + t) - u(x)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

À partir des deux estimations précédentes, on en déduit

$$\left( \int_0^\infty t^{-2} dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^t |u(x', x_n)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

L'intégration par parties en  $t$  nous donne :

$$\left( \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{x_n} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

C'est la condition de régularité au voisinage de  $\Gamma$  pour que  $u$  appartienne à  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega_1)$  (Theorem 11.7 p 66 in [30]).  $\square$

Grâce à l'hypothèse  $(\mathcal{H})$ , il est possible de construire une extension  $\tilde{T}$  de  $T$  dans  $\Gamma_0^u$  telle que :

$$T_0 = \begin{cases} T & \text{sur } \Gamma_0^m \\ \tilde{T} & \text{sur } \Gamma_0^u \end{cases} ; \quad T_0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0).$$

Soit  $\gamma_m^u$  la frontière commune à  $\Gamma_0^m$  et  $\Gamma_0^u$ . Par  $(\mathcal{H})$ ,  $\gamma_m^u$  est inclus dans un sous-ensemble ouvert relativement compact dans  $\Gamma_0$ . Ensuite, l'extension peut être faite localement par symétrie par rapport à  $\gamma_m^u$  [30]. Les fonctions  $\tilde{T}$  et  $\tau'$  doivent satisfaire certaines conditions de compatibilité avec  $T$  sur  $\gamma_m^u$  afin de satisfaire aux restrictions sur  $\Gamma_0^u$  des fonctions de  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ . Pour éviter ce problème, nous ajoutons un biais à  $\tau'$  : à la place, nous considérons comme inconnu  $\tau'_0 = \tau' - \tilde{T}$  sur  $\Gamma_0^u$ . Maintenant, grâce à lemme 5.3.1,  $\tau'_0$  est recherché dans  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)$ .

Le problème de complétion des données  $(\mathcal{P}_0)$  est converti en un problème de contrôle optimal selon l'approche utilisée dans [43], [1] et [25].

La différence est que maintenant, il comprend trois états au lieu de deux. Chacune d'elles représente une condition au limite soit sur la frontière inaccessible

$\Gamma_a$  soit sur la frontière accessible mais non observée  $\Gamma_0^u$ . Pour tout triplet  $(\eta, \tau, \tau'_0) \in \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)$ , nous définissons le triplet d'états  $(u_1, u_2, u_3)$  comme suit :

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_1 = T & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ u_1 = \tilde{T} & \text{sur } \Gamma_0^u, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} = \eta & \text{sur } \Gamma_a. \end{array} \right. , \quad (\mathcal{P}_2) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u_2 = \tau & \text{sur } \Gamma_a. \end{array} \right.$$

et

$$(\mathcal{P}_3) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_3 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_3 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ u_3 = \tau'_0 = \tau' - \tilde{T} & \text{sur } \Gamma_0^u, \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_a. \end{array} \right.$$

où  $\eta, \tau$  et  $\tau'_0$  sont les variables de contrôle. Les trois états sont bien définis dans  $H^1(\Omega)$ .

Nous définissons la fonction coût suivante en fonction des variables de contrôle :

$$J(\eta, \tau, \tau'_0) = \int_{\Omega} |(\nabla u_1 + \nabla u_3) - \nabla u_2|^2 dx dy. \quad (5.1)$$

Nous minimisons cette fonction par rapport à  $\eta, \tau$  et  $\tau'_0$  dans  $\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)$ . En raison de l'hypothèse d'une observation parfaite sur  $\Gamma_0^m$  nous avons fait que le minimum de  $J$  est 0 :

$$\inf_{(\eta, \tau, \tau'_0) \in \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} J(\eta, \tau, \tau'_0) = J(\varphi, t, \hat{\tau}' - \tilde{T}) = 0.$$

Clairement, au minimum,  $u_1(\varphi) + u_3(\hat{\tau}' - \tilde{T}) = u_2(t)$ . On note  $\Delta_{\Gamma}$  le  $(n-1)D$ -laplacien sur n'importe quelle section  $\Gamma_x$ . Les espaces  $\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)'$  et  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$  sont

munies, respectivement, du produit scalaire suivant (voir [30]) :

$$\langle u, v \rangle_{\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)'} = \int_{\Gamma_a} (-\Delta_{\Gamma})^{-\frac{1}{4}} u (-\Delta_{\Gamma})^{-\frac{1}{4}} v dy = \int_{\Gamma_a} u (-\Delta_{\Gamma})^{-\frac{1}{2}} v dy,$$

pour tout  $u, v \in \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)'$ , et

$$\langle u, v \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} = \int_{\Gamma_a} (-\Delta_{\Gamma})^{\frac{1}{4}} u (-\Delta_{\Gamma})^{\frac{1}{4}} v dy = \int_{\Gamma_a} u (-\Delta_{\Gamma})^{\frac{1}{2}} v dy,$$

pour tout  $u, v \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)$ . De même

$$\langle u, v \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} = \int_{\Gamma_0^u} (-\Delta_{\Gamma})^{\frac{1}{4}} u (-\Delta_{\Gamma})^{\frac{1}{4}} v dy = \int_{\Gamma_0^u} u (-\Delta_{\Gamma})^{\frac{1}{2}} v dy,$$

pour tout  $u, v \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)$ . En raison du caractère mal posé du problème inverse, et en particulier en raison de la non-continuité des solutions par rapport aux données de Cauchy [26], la résolution avec des observations bruitées nécessite l'utilisation d'une régularisation. Nous utilisons une régularisation de Tikhonov et notons  $J_{\epsilon}$  la nouvelle fonction coût :

$$J_{\epsilon}(\eta, \tau, \tau'_0) = J(\eta, \tau, \tau'_0) + \epsilon \left( \|\eta\|_{\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)'}^2 + \|\tau\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 + \|\tau'_0\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)}^2 \right). \quad (5.2)$$

Où  $\epsilon$  est un paramètre de régularisation non négatif .

## 5.4 Présentation de la méthode de factorisation pour le problème inverse de l'ECG

Dans cette partie nous appliquons la méthode de plongement invariant au système d'optimalité  $(\mathcal{P}_1)$ ,  $(\mathcal{P}_2)$  et  $(\mathcal{P}_3)$ . Et à l'aide de cette méthode nous explicitons la fonction coût en fonction des contrôles  $\eta, \tau$  et  $\tau'_0$ . Nous plongeons chacun des problèmes  $(\mathcal{P}_1)$ ,  $(\mathcal{P}_2)$  et  $(\mathcal{P}_3)$  dans une famille de problèmes similaires définis sur  $\Omega_s$ . Où  $\Omega_s$  est donnée à la (Figure 12).

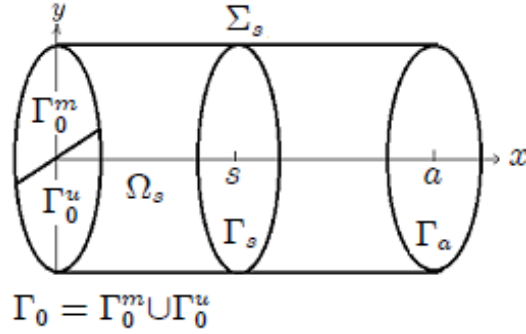


Figure 12 : Représentation schématique du domaine en mouvement  $\Omega_s$ .

Pour tout triplet  $(\alpha_1, \beta, \alpha_2) \in \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)$ , nous définissons le triplet d'états  $(u_1^s, u_2^s, u_3^s)$  solutions des problèmes suivants sur  $\Omega_s$  :

$$(\mathcal{P}_1^s) \begin{cases} -\Delta u_1^s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ u_1^s = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_1^s = T & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ u_1^s = \tilde{T} & \text{sur } \Gamma_0^u, \\ \frac{\partial u_1^s}{\partial n} = \alpha_1 & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases}, \quad (\mathcal{P}_2^s) \begin{cases} -\Delta u_2^s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ u_2^s = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u_2^s}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u_2^s = \beta & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{P}_3^s) \begin{cases} -\Delta u_3^s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ u_3^s = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_3^s = 0 & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ u_3^s = \alpha_2 & \text{sur } \Gamma_0^u, \\ \frac{\partial u_3^s}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_s. \end{cases}$$

### 5.4.1 Opérateur Neumann-Dirichlet

Pour simplifier en divisant le problème  $(\mathcal{P}_1^s)$  en deux problèmes bien posés, on peut écrire  $u_1^s$  comme une somme de deux fonctions  $\gamma_s$  et  $\delta_s$  dépendant linéairement de  $\alpha_1$  et  $T$  respectivement. Les fonctions  $\gamma_s$  et  $\delta_s$  sont des solutions des deux



problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\gamma_s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ \gamma_s = 0 & \text{sur } \Sigma_s, \\ \gamma_s = 0 & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ \gamma_s = 0 & \text{sur } \Gamma_0^u, \\ \frac{\partial\gamma_s}{\partial n} = \alpha_1 & \text{sur } \Gamma_s. \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\delta_s = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ \delta_s = 0 & \text{sur } \Sigma_s, \\ \delta_s = T & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ \delta_s = \tilde{T} & \text{sur } \Gamma_0^u, \\ \frac{\partial\delta_s}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_s. \end{array} \right.$$

Pour chaque  $s \in ]0, a]$  nous définissons l'application Neumann-Dirichlet  $Q(s)$  par :

$$Q(s)\alpha_1 = \gamma_s|_{\Gamma_s}.$$

Nous définissons également la partie résiduelle  $\omega(s)$  associée à l'opérateur  $Q$  par  $\omega(s) = \delta_s|_{\Gamma_s} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$ . Nous avons :

$$u_1^s|_{\Gamma_s} = Q(s)\alpha_1 + \omega(s).$$

Pour tout  $s$  dans  $]0, a]$ ,  $Q(s) : \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)\right)' \mapsto H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$  est un opérateur continu coercive, auto-adjoint et linéaire. Pour  $x < s$ , la restriction de  $u_1^s(\alpha_1)$  sur  $\Omega_x$  est une solution du problème  $(\mathcal{P}_1^x)$ . Par le même calcul que précédemment nous avons la relation :

$$u_1^s(x, \alpha_1) = Q(x)\frac{\partial u_1^s}{\partial x}(x, \alpha_1) + \omega(x). \quad (5.3)$$

Par souci de clarté, on note désormais  $u_1$  (respectivement,  $Q$  et  $\omega$ ), la restriction sur  $\Gamma_x$  de  $u_1(x)$  (respectivement,  $Q(x)$  et  $\omega(x)$ ) :

$$u_1 = Q\frac{\partial u_1}{\partial x} + \omega. \quad (5.4)$$

De manière formelle, nous prenons la dérivée de (5.4) par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{dQ}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

En remplaçant le terme  $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$  par  $-\Delta_y u_1$  et en substituant  $u_1$ , en utilisant (5.4) et le fait que  $\alpha_1$  soit arbitraire on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{dx} - Q\Delta_y Q = I, \\ \frac{d\omega}{dx} - Q\Delta_y \omega = 0. \end{array} \right.$$

On peut étendre par continuité cet argument à  $x = 0$ . Écrire une relation (5.3) à  $x = 0$ , et en utilisant le fait que  $u_1(0)$  est arbitraire, on obtient les conditions initiales  $Q|_{\Gamma_0} = 0$ ,  $\omega|_{\Gamma_0^m} = T$  et  $\omega|_{\Gamma_0^u} = \tilde{T}$ .

En ajoutant la condition sur  $\Gamma_a$  pour  $u_1$ , nous résumons le résultat dans une formulation équivalente de  $(\mathcal{P}_1)$  :

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx} - Q\Delta_y Q = I & Q|_{\Gamma_0} = 0, \\ \frac{d\omega}{dx} - Q\Delta_y \omega = 0 & \omega|_{\Gamma_0^m} = T, \quad \omega|_{\Gamma_0^u} = \tilde{T}, \\ u_1 = Q \frac{\partial u_1}{\partial x} + \omega & \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{\Gamma_a} = \eta. \end{cases} \quad (5.5)$$

### 5.4.2 Opérateur Dirichlet-Neumann

Nous utilisons la même méthodologie que dans le paragraphe précédent. Nous définissons l'application Dirichlet-Neumann  $P(s)$  comme l'application linéaire qui fait correspondre  $\beta$  à  $\frac{\partial u_2^s}{\partial x}|_{\Gamma_s}$ . Encore une fois, pour tout  $x < s$ , la restriction  $u_2^s(x)$  satisfait :

$$\frac{\partial u_2^s}{\partial x}(x) = P(x) u_2^s(x),$$

ou simplement :

$$\frac{\partial u_2^s}{\partial x} = P u_2^s. \quad (5.6)$$

En prenant la dérivée par rapport à  $x$  :

$$\frac{d^2 u_2^s}{dx^2} = \frac{dP}{dx} u_2^s + P \frac{\partial u_2^s}{\partial x},$$

et en substituant  $u_2^s$ , en utilisant  $(\mathcal{P}_2^s)$ , en prenant  $x = s$  et en utilisant le fait que  $\beta$  est arbitraire nous déduisons :

$$\frac{dP}{dx} + P^2 = -\Delta_y.$$

Nous pouvons étendre par continuité cet argument à  $x = 0$ . En utilisant le fait que  $u_2(0)$  soit arbitraire et que le flux de  $u_2$  sur  $\Gamma_0$  est égal à zéro, on obtient les

conditions initiales pour  $P$ ,  $P|_{\Gamma_0} = 0$ . En ajoutant la condition sur  $\Gamma_a$  pour  $u_2$ , nous résumons le résultat une formulation équivalente de  $(\mathcal{P}_2)$  est :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dx} + P^2 = -\Delta_y & P|_{\Gamma_0} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = Pu_2 & u_2|_{\Gamma_a} = \tau. \end{cases} \quad (5.7)$$

### 5.4.3 Nouveaux opérateurs liés à la mesure incomplète

Nous considérons la famille de problèmes  $(\mathcal{P}_3^s)$ . Pour chaque  $s$  dans  $]0, a]$  nous définissons un nouveau opérateur  $S$  Dirichlet-Neumann comme opérateur linéaire qui fait correspondre  $\alpha_2$  à  $\frac{\partial u_3^s}{\partial x}|_{\Gamma_0^u}$ . On note que l'opérateur  $S$  est bien défini, car pour tout  $\alpha_2$  on peut résoudre le problème  $(\mathcal{P}_3^s)$ . Alors, par linéarité du problème  $(\mathcal{P}_3^s)$ , et par le problème qui est bien posé sur  $u_3^s$  et la continuité de l'opérateur de trace, nous définissons, pour tout  $s$  dans  $]0, a]$ , l'opérateur  $S(s)$  comme suit :

$$\begin{aligned} S(s) : \quad H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u) &\mapsto \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)\right)' \\ \alpha_2 &\mapsto \frac{\partial u_3^s}{\partial s}(\alpha_2)|_{\Gamma_0^u} = S(s)\alpha_2. \end{aligned}$$

$S(s)$  est un opérateur continu coercive, auto-adjoint et linéaire. Pour des calculs ultérieurs, nous simplifions la notation en écrivant :

$$\frac{\partial u_3^s}{\partial s} = Su_3^s. \quad (5.8)$$

En définissant l'opérateur d'extension  $R$  et les opérateurs de projection  $\Pi_u$  et  $\Pi_m$  :

$$\begin{aligned} R : \quad H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u) &\mapsto H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \\ \alpha_2 &\mapsto \alpha_2^0 = \begin{cases} \alpha_2 & \text{dans } \Gamma_0^u, \\ 0 & \text{dans } \Gamma_0^m, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_u : \quad \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\right)' &\mapsto \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u) \cap H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\right)' \\ g &\mapsto g|_{\Gamma_0^u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_m : \quad \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\right)' &\mapsto \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^m) \cap H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\right)' \\ g &\mapsto g|_{\Gamma_0^m}. \end{aligned}$$

et en utilisant la transformation de symétrie  $x \rightarrow a - x$  du domaine cylindrique  $\Omega$ , on obtient la relation suivante entre les opérateurs de Dirichlet-Neumann  $S$  et  $P$  :

$$S(s) = \Pi_u \circ P(s) \circ R,$$

où  $\circ$  est le signe de composition des opérateurs.

On définit aussi pour tout  $s$  dans  $]0, a]$  l'opérateur  $H$  comme suit :

$$\begin{aligned} H(s) : \quad & H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u) \mapsto H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s) \\ & \alpha_2 \mapsto u_3^s(\alpha_2) |_{\Gamma_s} = H(s) \alpha_2. \end{aligned}$$

L'opérateur linéaire  $H$  pourrait être construit sur la base du résidu  $\omega$  défini dans (5.3). En effet, pour une donnée  $\alpha_2 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)$ ,  $H(s)\alpha_2$  correspond au résidu  $\omega$  avec la condition initiale  $\omega(0) = R\alpha_2$ .

Le nouveau opérateur  $P'$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned} P'(s) : \quad & H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \mapsto \left( H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \right)' \\ & T_0 \mapsto \frac{\partial u'_1}{\partial s} |_{\Gamma_0} = P'(s) T_0, \end{aligned}$$

où  $T_0 = \begin{cases} T \text{ sur } \Gamma_0^m \\ \tilde{T} \text{ sur } \Gamma_0^u \end{cases}$ , et  $u'_1$  est la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u'_1 = 0 & \text{dans } \Omega_s, \\ u'_1 = 0 & \text{sur } \Sigma_s, \\ \frac{\partial u'_1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ u'_1 = T_0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Cet opérateur satisfait :

$$\frac{dP'}{ds}(s) + (P')^2(s) = -\Delta_y, \quad P'(0) = 0.$$

Par l'unicité de la solution de l'équation de Riccati,  $P'$  est identique à  $P$  mais nous gardons la notation  $P'$  pour rappeler que nous l'utilisons sur  $\Gamma_0$ .

## 5.5 Résolution du problème de contrôle optimal

Nous noterons  $P = P(a)$ ,  $Q = Q(a)$ ,  $S = S(a)$  et  $H = H(a)$ . Soit  $A$  la matrice des opérateurs défini comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} Q & -QP & 0 \\ -PQ & P & -PH \\ 0 & -H^*P & S \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$H^*$  est l'opérateur adjoint de  $H$ . Notons  $[\eta, \tau, \tau'_0]$  le vecteur ligne avec les composantes  $\eta$ ,  $\tau$  et  $\tau'_0$ . Remarquons qu'en relation avec le caractère mal posé du problème de Cauchy, l'opérateur  $A$  n'est pas coercive, mais auto-adjoint.

**Proposition 5.5.1** *Le fonctionnel coût  $J$  peut être écrit de manière équivalente,*

$$J(\eta, \tau, \tau'_0) = K + (\eta, \tau, \tau'_0) A \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \\ \tau'_0 \end{pmatrix} - 2 \langle \omega(T_0), P\tau \rangle_{\Gamma_a} + 2 \langle \tau'_0, \Pi_u \circ P'T_0 \rangle_{\Gamma_0^u}, \quad (5.10)$$

où  $K$  est une constante qui ne dépend pas de  $\eta$ ,  $\tau$  et  $\tau'_0$ . Si un minimum de  $J$  est atteint au triplet  $(\varphi, t, \hat{\tau}'_0)$ , il satisfait :

$$A [\varphi, t, t']' = [0, P\omega(T_0), -\Pi_u \circ P'T_0]'. \quad (5.11)$$

**Preuve:** Soit  $\lambda_1, \lambda_2$  les solutions de :

$$\begin{cases} -\Delta\lambda_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_1 = T_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta\lambda_2 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_2 = \tau'_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases}$$

et  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  satisfait

$$\begin{cases} -\Delta\lambda = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda = T' & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases}; \quad \text{où } T' = \begin{cases} T & \text{sur } \Gamma_0^m, \\ \tau' & \text{sur } \Gamma_0^u. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, nous désignerons de manière abusive les paires de dualités avec des intégrales. On pose  $v_1 = u_1 + u_3$ , en appliquant la formule de Green à la fonction coût (5.1) alors :

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau, \tau'_0) &= \int_{\Omega} |\nabla v_1 - \nabla u_2|^2 dx dy \\ &= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial v_1}{\partial n} (T' - u_2) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (v_1 - \tau) dy. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green pour le terme  $\frac{\partial v_1}{\partial n} u_2$  nous obtenons :

$$J(\eta, \tau, \tau'_0) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial v_1}{\partial n} \lambda dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta \tau - v_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) (v_1 - \tau) dy.$$

et pour les termes dans  $\frac{\partial v_1}{\partial n}$

$$J(\eta, \tau, \tau'_0) = \int_{\Gamma_0} T' \nabla \lambda \cdot n dy + \int_{\Gamma_a} \left( \eta (v_1 - \lambda) + \frac{\partial u_2}{\partial n} \tau \right) dy - 2 \int_{\Gamma_a} v_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} dy. \quad (5.12)$$

De (5.4), (5.6) et de la définition de  $\lambda$  ( $\lambda(a) = \omega(a)$ ) on obtient

$$J(\eta, \tau, \tau'_0) = \int_{\Gamma_0} T' \frac{\partial \lambda}{\partial n} dy + \int_{\Gamma_a} (\eta Q \eta + \tau P \tau) dy - 2 \int_{\Gamma_a} (Q \eta + \omega(T')) P \tau dy. \quad (5.13)$$

De la définition de  $T'$  et  $\lambda$  nous avons :

$$\int_{\Gamma_0} T' \frac{\partial \lambda}{\partial n} dy = \int_{\Gamma_0^m} T \frac{\partial \lambda_1}{\partial n} d\Gamma_0^m + \int_{\Gamma_0^u} \tau' \frac{\partial \lambda_1}{\partial n} d\Gamma_0^u + \int_{\Gamma_0^m} T \frac{\partial \lambda_2}{\partial n} d\Gamma_0^m + \int_{\Gamma_0^u} \tau' \frac{\partial \lambda_2}{\partial n} d\Gamma_0^u. \quad (5.14)$$

où le terme  $K = \int_{\Gamma_0^m} T \frac{\partial \lambda_1}{\partial n} d\Gamma_0^m$  ne dépend pas des contrôles  $\eta$ ,  $\tau$  et  $\tau'_0$ . Selon la définition des opérateurs  $S$ ,  $P'$ ,  $\Pi_m$  et  $\Pi_u$ , nous avons

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial n} |_{\Gamma_0^u} = S \tau'_0, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial n} |_{\Gamma_0^u} = \Pi_u \circ P' T_0, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial n} |_{\Gamma_0^m} = \Pi_m \circ P' \tau'_0, \quad (5.15)$$

On note  $\omega(T')$  par  $\omega(T; \tau')$  afin de montrer la dépendance de  $\omega$  sur les données de  $\Gamma_0^m$  et  $\Gamma_0^u$ . Nous avons :

$$\omega(T') = \omega(T; \tau') + \omega(0; \tau'_0) = \omega(T_0) + H \tau'_0 \quad (5.16)$$

En remplaçant (5.14), (5.15) et (5.16) dans (5.13) nous obtenons

$$\begin{aligned}
J(\eta, \tau, \tau'_0) &= K + \int_{\Gamma_0^u} \tau' \Pi_u \circ P' T_0 d\Gamma_0^u + \int_{\Gamma_0^m} T \Pi_m \circ P' \tau'_0 d\Gamma_0^m + \int_{\Gamma_0^u} \tau' S \tau'_0 d\Gamma_0^u \\
&+ \int_{\Gamma_a} (\eta Q \eta + \tau P \tau) d\Gamma_a - 2 \int_{\Gamma_a} (Q \eta + \omega(T_0)) P \tau d\Gamma_a \\
&- 2 \int_{\Gamma_a} H \tau'_0 P \tau d\Gamma_a. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Le troisième terme de droite pourrait être développé comme suit

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0^m} T \Pi_m \circ P' \tau'_0 d\Gamma_0^m &= \int_{\Gamma_0^m} u'_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial n} d\Gamma_0^m \\
&= - \int_{\Gamma_0^u} u'_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial n} d\Gamma_0^u + \int_{\Omega} \nabla u'_1 \nabla \lambda_2 d\Omega \\
&= - \int_{\Gamma_0^u} \tilde{T} S \tau'_0 d\Gamma_0^u + \int_{\Gamma_0^u} \frac{\partial u'_1}{\partial n} \lambda_2 d\Gamma_0^u \\
&= - \int_{\Gamma_0^u} \tilde{T} S \tau'_0 d\Gamma_0^u + \int_{\Gamma_0^u} \tau'_0 \Pi_u \circ P' T_0 d\Gamma_0^u \tag{5.18}
\end{aligned}$$

En substituant (5.18) dans (5.17), on obtient

$$\begin{aligned}
J(\eta, \tau, \tau'_0) &= K' + \int_{\Gamma_0^u} \tau'_0 \Pi_u \circ P' T_0 d\Gamma_0^u + \int_{\Gamma_0^u} \tau'_0 \Pi_u \circ P' T_0 d\Gamma_0^u + \int_{\Gamma_0^u} \tau'_0 S \tau'_0 d\Gamma_0^u + \\
&\int_{\Gamma_a} (\eta Q \eta + \tau P \tau) d\Gamma_a - 2 \int_{\Gamma_a} (Q \eta + \omega(T_0)) P \tau d\Gamma_a - 2 \int_{\Gamma_0^u} \tau'_0 H^* P \tau d\Gamma_0^u,
\end{aligned}$$

Où nous mettons  $K' = K - \int_{\Gamma_0^u} \tilde{T} \Pi_u \circ P' T_0 d\Gamma_0^u$ . Cette formule peut être écrite comme

(5.10) en tenant compte du fait que  $P, Q, S$  sont auto-adjoints.

En dérivant le fonctionnel  $J$  par rapport à  $\eta, \tau$  et  $\tau'_0$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial J}{\partial \eta}, \psi \right\rangle &= 2 \int_{\Gamma_a} Q \eta \psi d\Gamma_a - 2 \int_{\Gamma_a} Q P \tau \psi d\Gamma_a, \\
\left\langle \frac{\partial J}{\partial \tau}, \varphi \right\rangle &= 2 \int_{\Gamma_a} P \tau \varphi d\Gamma_a - 2 \int_{\Gamma_a} P Q \eta \varphi d\Gamma_a - 2 \int_{\Gamma_a} P H \tau'_0 \varphi d\Gamma_a - 2 \int_{\Gamma_a} P \omega(T_0) \varphi d\Gamma_a, \\
\left\langle \frac{\partial J}{\partial \tau'_0}, \mu \right\rangle &= 2 \int_{\Gamma_0^u} \Pi_u \circ P' T_0 \mu d\Gamma_0^u + 2 \int_{\Gamma_0^u} S \tau'_0 \mu d\Gamma_0^u - 2 \int_{\Gamma_0^u} H^* P \tau \mu d\Gamma_0^u.
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque l'observation sur  $\Gamma_0^m$  est exacte, l'optimum de  $J$  est atteint à  $(\varphi, t, t'_0)$  satisfaisant le système linéaire suivant

$$Q\varphi - QPt = 0, \quad (5.19)$$

$$-PQ\varphi + Pt - PHt'_0 = P\omega(T_0), \quad (5.20)$$

$$-H^*Pt + St'_0 = -\Pi_u \circ P'T_0. \quad (5.21)$$

□



## Chapitre 6

# Comparaison entre les observations complètes et incomplètes

Dans cette section, nous analyserons l'effet de la régularisation et du bruit sur la solution du problème de complétions des données, à la fois lorsque l'on considère une observation complète et incomplète sur la frontière accessible.

### 6.0.1 Observation incomplète

Dans ce paragraphe, nous présentons une analyse de la régularisation de Tikhonov dans le cas cylindrique où l'observation du potentiel électrique est effectuée sur une partie de la frontière accessible  $\Gamma_0^m \subset \Gamma_0$  comme précédemment présenté. Le but est d'estimer comment l'erreur entre la solution du problème exacte et le problème régularisé se comporte par rapport à la taille de  $\Gamma_0^m$  et au bruit introduit ( $u = T + \delta$ ). Nous suivons l'approche développée par Morozov et Stessin [46]. Nous rappelons que la fonction coût avec le terme de régularisation de Tikhonov défini

dans (5.2) est :

$$J_\epsilon(\eta, \tau, \tau'_0) = J(\eta, \tau, \tau'_0) + \epsilon \left( \|\eta\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 + \|\tau\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 + \|\tau'_0\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^a)}^2 \right).$$

Ainsi, à partir de la proposition 5.5.1, l'optimum de  $J_\epsilon$  est atteint à  $(\varphi_\epsilon, t_\epsilon, t'_\epsilon)$  satisfaisant le système linéaire suivant :

$$(\epsilon I + Q) \varphi_\epsilon - Q P t_\epsilon = 0, \quad (6.1)$$

$$-P Q \varphi_\epsilon + (\epsilon I + P) t_\epsilon - P H t'_\epsilon = P \omega(T_0), \quad (6.2)$$

$$-H^* P t_\epsilon + (\epsilon I + S) t'_\epsilon = -\Pi_u \circ P' T_0. \quad (6.3)$$

En notant par  $A_\epsilon = A + \epsilon I$ , nous avons

$$A_\epsilon [\varphi_\epsilon, t_\epsilon, t'_\epsilon]' = [0, P \omega(T_0), -\Pi_u \circ P' T_0]'. \quad (6.4)$$

En ajoutant un bruit  $\delta \in L^2(\Gamma_0^m)$  aux données observables exactes  $T$ , on note  $(\varphi_\epsilon^\delta, t_\epsilon^\delta, t'_\epsilon^\delta)$ , la solution du problème régularisé mais avec une observation bruyante  $T + \delta$ . Evidemment, ce triplet satisfait :

$$A_\epsilon [\varphi_\epsilon^\delta, t_\epsilon^\delta, t'_\epsilon^\delta]' = [0, P \omega(T_0 + \delta), -\Pi_u \circ P' (T_0 + \delta)]'. \quad (6.5)$$

Dans ce qui suit, notre objectif est double. Tout d'abord, nous estimons l'erreur entre  $t_\epsilon^\delta$  et la solution exacte  $t$  à la frontière inaccessible  $\Gamma_a$ . Deuxièmement, nous allons quantifier l'effet de la taille de  $\Gamma_0^m$  sur l'erreur  $\|t_\epsilon^\delta - t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}$ .

Suivant l'approche de Morozov, nous appliquons d'abord une factorisation de Cholesky de l'opérateur  $A$ .

$$A = R^* R \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} B & C & 0 \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Par identification, nous avons

$$\begin{cases} B = Q^{\frac{1}{2}}, \\ C = -Q^{\frac{1}{2}}P, \\ D = (P - PQP)^{\frac{1}{2}}, \\ E = -(P - PQP)^{-\frac{1}{2}}PH, \\ F = [S - H^*P(P - PQP)^{-1}PH]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

**Théorème 6.0.1** *Il existe une suite positive décroissante  $(h_\epsilon)_{\epsilon>0}$*

$$h_\epsilon \longrightarrow 0 \text{ pour } \epsilon \longrightarrow 0,$$

*une constante non négative  $k_1$  qui ne dépend que du domaine  $\Omega$  et une constante positive  $k_2$  dépendant de  $\Gamma_0^u$ , telle que*

$$\|t_\epsilon^\delta - t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} + \|t_\epsilon^\delta - t'\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} \leq \frac{\sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)}}{\epsilon} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)} + h_\epsilon. \quad (6.6)$$

*De plus, s'il existe  $(y_1, y_2) \in L^2(\Gamma_a)$  et  $y_3 \in L^2(\Gamma_0^u)$  tels que  $t = C^*y_1 + D^*y_2$ ,  $\varphi = B^*y_1$  et  $t' = E^*y_2 + F^*y_3$ , alors la solution satisfait*

$$\|t_\epsilon^\delta - t\| + \|t_\epsilon^\delta - t'\| \leq \frac{\sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)}}{\epsilon} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)} + \sqrt{\epsilon} \sqrt{\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2}, \quad (6.7)$$

*et*

$$\|t_\epsilon^\delta - t\|^2 \leq \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{\epsilon^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)}^2 + \epsilon (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2). \quad (6.8)$$

**Remarque 6.0.1** *La condition  $(y_1, y_2) \in L^2(\Gamma_a)$  et  $y_3 \in L^2(\Gamma_0^u)$  telles que  $t = C^*y_1 + D^*y_2$ ,  $\varphi = B^*y_1$  et  $t' = E^*y_2 + F^*y_3$  est équivalent au fait que la solution de triplet  $(\varphi, t, t')$  appartient à l'image de l'opérateur  $R^*$ .*

**Preuve:** Afin de prouver ce théorème, nous utilisons l'inégalité triangulaire suivante

$$\begin{aligned} \|t_\epsilon^\delta - t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} + \|t_\epsilon^\delta - t'\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} &\leq \|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} + \|t_\epsilon - t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} \\ &\quad + \|t_\epsilon^\delta - t'_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} + \|t'_\epsilon - t'\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous allons estimer séparément. chacun des deux termes  $\left( \|t'_\epsilon - t'\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} + \|t_\epsilon - t\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} \right)$  et  $\left( \|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} + \|t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} \right)$ .

Par souci de simplicité et de lisibilité, nous considérerons le  $\|\cdot\|$  pour tous les espaces, il fait référence à  $\|\cdot\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}$  pour  $t_\epsilon^\delta$ ,  $t_\epsilon$  et  $t$ , il se réfère à  $\|\cdot\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)}$  pour  $t'_\epsilon{}^\delta$ ,  $t'_\epsilon$  et  $t'$  il se réfère à  $\|\cdot\|_{\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)'}$ , pour  $\varphi_\epsilon^\delta$ ,  $\varphi_\epsilon$  et  $\varphi$ , il se réfère à  $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_0^m)}$  pour le bruit  $\delta$  puisque l'on ne mesure que sur  $\Gamma_0^m$ , et il se réfère à  $\|\cdot\|_{L^2(\theta)}$  pour les fonctions  $y_1$ ,  $y_2$  et  $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_0^u)}$  pour  $y_3$ .

**Estimation de**  $\|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} + \|t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)}$ :

Nous avons

$$\left\langle A_\epsilon \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon^\delta - \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon^\delta - t_\epsilon \\ t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon^\delta - \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon^\delta - t_\epsilon \\ t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ P\omega(\delta) \\ -\Pi_u \circ P'\delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon^\delta - \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon^\delta - t_\epsilon \\ t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon \end{pmatrix} \right\rangle,$$

ce qui signifie

$$\left\langle A \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon^\delta - \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon^\delta - t_\epsilon \\ t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon^\delta - \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon^\delta - t_\epsilon \\ t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon \end{pmatrix} \right\rangle + \epsilon \|\varphi_\epsilon^\delta - \varphi_\epsilon\|^2 + \epsilon \|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\|^2 + \epsilon \|t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon\|^2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} P\omega(\delta), \sqrt{\epsilon} (t_\epsilon^\delta - t_\epsilon) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Pi_u \circ P'\delta, \sqrt{\epsilon} (t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon) \right\rangle.$$

Puisque  $A$  est symétrique définie positive, nous avons

$$\epsilon \|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\|^2 + \epsilon \|t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon\|^2 \leq \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{2\epsilon} \|\delta\|^2 + \frac{\epsilon}{2} \left[ \|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\|^2 + \|t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon\|^2 \right],$$

où  $k_1 = \|P\omega\|$  et  $k_2 = \|\Pi_u \circ P'\|$ . Nous obtenons alors

$$\|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\|^2 + \|t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon\|^2 \leq \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{\epsilon^2} \|\delta\|^2. \quad (6.9)$$

Nous concluons que

$$\|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\| + \|t'_\epsilon{}^\delta - t'_\epsilon\| \leq \frac{\sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)}}{\epsilon} \|\delta\|. \quad (6.10)$$

**Estimation de**  $\left( \|t'_\epsilon - t'\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} + \|t_\epsilon - t\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u)} \right)$ :

Nous avons

$$A_\epsilon \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon \\ t'_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P\omega(T_0) \\ -\Pi_u \circ P'T_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon \\ t'_\epsilon \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon \\ t'_\epsilon \end{pmatrix} ; \quad A \begin{pmatrix} \varphi \\ t \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P\omega(T_0) \\ -\Pi_u \circ P'T_0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne

$$\left\langle A \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon - \varphi \\ t_\epsilon - t \\ t'_\epsilon - t' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon - \varphi \\ t_\epsilon - t \\ t'_\epsilon - t' \end{pmatrix} \right\rangle + \epsilon \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon \\ t_\epsilon \\ t'_\epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon - \varphi \\ t_\epsilon - t \\ t'_\epsilon - t' \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Nous obtenons alors

$$\left\langle A \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon - \varphi \\ t_\epsilon - t \\ t'_\epsilon - t' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon - \varphi \\ t_\epsilon - t \\ t'_\epsilon - t' \end{pmatrix} \right\rangle = -\epsilon \langle \varphi_\epsilon, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle - \epsilon \langle t_\epsilon, t_\epsilon - t \rangle - \epsilon \langle t'_\epsilon, t'_\epsilon - t' \rangle.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \varphi_\epsilon, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle &= \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 + \langle \varphi, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle, \\ \langle t_\epsilon, t_\epsilon - t \rangle &= \|t_\epsilon - t\|^2 + \langle t, t_\epsilon - t \rangle, \\ \langle t'_\epsilon, t'_\epsilon - t' \rangle &= \|t'_\epsilon - t'\|^2 + \langle t', t'_\epsilon - t' \rangle. \end{aligned}$$

Notons par

$$X_\epsilon = \begin{pmatrix} \varphi_\epsilon - \varphi \\ t_\epsilon - t \\ t'_\epsilon - t' \end{pmatrix},$$

nous avons

$$\langle AX_\epsilon, X_\epsilon \rangle + \epsilon \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 + \epsilon \|t_\epsilon - t\|^2 + \epsilon \|t'_\epsilon - t'\|^2 = -\epsilon \langle \varphi, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle - \epsilon \langle t, t_\epsilon - t \rangle - \epsilon \langle t', t'_\epsilon - t' \rangle.$$

En utilisant la positivité de  $A$ , nous avons

$$\frac{\epsilon}{2} \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 + \frac{\epsilon}{2} \|t_\epsilon - t\|^2 + \frac{\epsilon}{2} \|t'_\epsilon - t'\|^2 \leq \frac{\epsilon}{2} (\|\varphi\|^2 + \|t\|^2 + \|t'\|^2).$$

Ou de manière équivalente

$$\|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 + \|t_\epsilon - t\|^2 + \|t'_\epsilon - t'\|^2 \leq \left( \|\varphi\|^2 + \|t\|^2 + \|t'\|^2 \right) = Cte,$$

où  $Cte$  est une constante positive. On peut alors extraire une sous-suite convergente

$$\begin{cases} \varphi_\epsilon \longrightarrow \varphi \\ t_\epsilon \longrightarrow t \\ t'_\epsilon \longrightarrow t' \end{cases} \quad \text{faiblement en } H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u).$$

puisque,

$$0 \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 + \|t_\epsilon - t\|^2 + \|t'_\epsilon - t'\|^2 \right] \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-\langle \varphi, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle - \langle t, t_\epsilon - t \rangle - \langle t', t'_\epsilon - t' \rangle] = 0,$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \varphi_\epsilon \longrightarrow \varphi \\ t_\epsilon \longrightarrow t \\ t'_\epsilon \longrightarrow t' \end{cases} \quad \text{fortement en } H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^u).$$

Par conséquent,  $\exists h_\epsilon \geq 0 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ , tel que

$$\|\varphi_\epsilon - \varphi\| + \|t_\epsilon - t\| + \|t'_\epsilon - t'\| \leq h_\epsilon. \quad (6.11)$$

En combinant les inégalités (6.10) et (6.11), on obtient

$$\|t_\epsilon^\delta - t_\epsilon\| + \|t'_\epsilon^\delta - t'_\epsilon\| + \|t_\epsilon - t\| + \|t'_\epsilon - t'\| \leq \frac{\sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)}}{\epsilon} \|\delta\| + h_\epsilon. \quad (6.12)$$

### La seconde estimation :

Selon les conditions d'optimalité, nous faisons : ((6.1)-(5.19))  $\times (t_\epsilon - t)$  + ((6.2)-(5.20))  $\times (\varphi_\epsilon - \varphi)$  + ((6.1)-(5.19))  $\times (t'_\epsilon - t')$  nous obtenons

$$\begin{aligned} & \epsilon \langle t_\epsilon, t_\epsilon - t \rangle + \epsilon \langle t'_\epsilon, t'_\epsilon - t' \rangle + \epsilon \langle \varphi_\epsilon, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle + \|D(t_\epsilon - t) + E(t'_\epsilon - t')\|^2 + \\ & + \|C(t_\epsilon - t) + B(\varphi_\epsilon - \varphi)\|^2 + \|F(t'_\epsilon - t')\|^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Nous avons

$$\epsilon \langle t_\epsilon, t_\epsilon - t \rangle = \epsilon \|t_\epsilon - t\|^2 + \epsilon \langle t, t_\epsilon - t \rangle, \quad (6.14)$$

$$\epsilon \langle t'_\epsilon, t'_\epsilon - t' \rangle = \epsilon \|t'_\epsilon - t'\|^2 + \epsilon \langle t', t'_\epsilon - t' \rangle, \quad (6.15)$$

$$\epsilon \langle \varphi_\epsilon, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle = \epsilon \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 + \epsilon \langle \varphi, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle. \quad (6.16)$$

Remplaçons  $t$  par  $C^*y_1 + D^*y_2$ ,  $t'$  par  $E^*y_2 + F^*y_3$  et  $\varphi$  par  $B^*y_1$  respectivement dans les deuxièmes termes du côté droit des équations (6.14), (6.15) et (6.16), respectivement. En sommant les trois équations, on obtient

$$\begin{aligned} \epsilon \langle t_\epsilon, t_\epsilon - t \rangle + \epsilon \langle t'_\epsilon, t'_\epsilon - t' \rangle + \epsilon \langle \varphi_\epsilon, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle &= \epsilon \|t_\epsilon - t\|^2 + \epsilon \langle (C^*y_1 + D^*y_2), (t_\epsilon - t) \rangle \\ &+ \epsilon \|t'_\epsilon - t'\|^2 + \epsilon \langle (E^*y_2 + F^*y_3), (t'_\epsilon - t') \rangle + \epsilon \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 + \epsilon \langle B^*y_1, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Regroupons les termes de  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$  et appliquons l'inégalité de Young nous obtenons

$$\begin{aligned} &\epsilon \langle t_\epsilon, t_\epsilon - t \rangle + \epsilon \langle t'_\epsilon, t'_\epsilon - t' \rangle + \epsilon \langle \varphi_\epsilon, \varphi_\epsilon - \varphi \rangle \\ &\geq \epsilon \|t_\epsilon - t\|^2 + \epsilon \|t'_\epsilon - t'\|^2 + \epsilon \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 - \frac{\epsilon^2}{2} (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2) \\ &- \frac{1}{2} (\|D(t_\epsilon - t) + E(t'_\epsilon - t')\|^2 + \|C(t_\epsilon - t) + B(\varphi_\epsilon - \varphi)\|^2 + \|F(t'_\epsilon - t')\|^2). \end{aligned} \quad (6.17)$$

En injectant cette dernière inégalité dans la partie gauche de l'équation 6.13, on obtient

$$\epsilon \|t_\epsilon - t\|^2 + \epsilon \|t'_\epsilon - t'\|^2 + \epsilon \|\varphi_\epsilon - \varphi\|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2} (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2). \quad (6.18)$$

Par conséquent, nous avons

$$\|t_\epsilon - t\| + \|t'_\epsilon - t'\| \leq \sqrt{\epsilon} \sqrt{(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2)}. \quad (6.19)$$

On en déduit la seconde estimation du théorème 6.0.1

$$\|t_\epsilon^\delta - t\| + \|t'_\epsilon^\delta - t'\| \leq \frac{\|\delta\|}{\epsilon} \sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)} + \sqrt{\epsilon} \sqrt{\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2}.$$

Enfin, de 6.9 et de 6.18, nous obtenons également

$$\|t_\epsilon^\delta - t\|^2 \leq \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{\epsilon^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)}^2 + \epsilon (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2). \quad (6.20)$$

□

## 6.0.2 Observation complète

Dans ce paragraphe, nous présentons une analyse de la régularisation de Tikhonov [5] dans le cas cylindrique avec une observation totale du potentiel sur  $\Gamma_0$ . Nous allons estimer l'erreur entre la solution du problème exacte et le problème régularisé lorsque la donnée d'observation  $T$  est donnée sur toute la frontière  $\Gamma_0^m = \Gamma_0$ , et évaluer l'effet du bruit en considérant  $(u = T + \delta)$  sur  $\Gamma_0$ . Nous suivons l'approche développée par Morozov et Stessin [46]. Nous considérons le problème suivant :

$$(P_0) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = T & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = t, \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi & \text{sur } \Gamma_a. \end{cases}$$

En utilisant la même définition de  $u_1$  et  $u_2$  que dans  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ , et en considérant que  $\Gamma_0^u = \emptyset$ , le fonctionnel coût avec observation totale est :

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau) &= \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx dy. \\ J(\eta, \tau) &= Cte + (\eta, \tau) A \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} - 2 \langle \omega(T), P\tau \rangle. \\ \inf_{(\eta, \tau, \tau'_0) \in \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)' \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} J(\eta, \tau) &= J(\varphi, t) = 0. \end{aligned}$$

où la matrice des opérateurs  $A$  est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} Q & -QP \\ -PQ & P \end{pmatrix}.$$

Pour les valeurs non négatives de  $\epsilon$ , la fonction coût avec la régularisation de Tikhonov est défini comme suit :

$$J_\epsilon(\eta, \tau) = Cte + (\eta, \tau) A \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} - 2 \langle \omega(T), P\tau \rangle + \epsilon \left( \|\eta\|_{\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)'}^2 + \|\tau\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 \right),$$



Nous définissons également une fonction coût pour les données bruitées et la régularisation de Tikhonov comme suit :

$$J_\epsilon^\delta(\eta, \tau) = Cte + (\eta, \tau) A \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} - 2 \langle \omega(T + \delta), P\tau \rangle + \epsilon \left( \|\eta\|_{\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)\right)'}^2 + \|\tau\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 \right).$$

Le but du théorème suivant est de donner une estimation du potentiel électrique reconstruit lorsque l'on considère des données bruitées sur la frontière accessible complète.

En Suivant la même stratégie utilisée dans le cas d'observation incomplète, nous appliquons une factorisation de Cholesky de l'opérateur  $A$ .

$$A = R^* R \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Par identification, nous avons

$$\begin{cases} B = Q^{\frac{1}{2}}, \\ C = -Q^{\frac{1}{2}}P, \\ D = (P - PQP)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

On pourrait vérifier que les opérateurs  $P$ ,  $Q$  et  $I - PQ$  sont positifs.

**Théorème 6.0.2** *On note par  $(\varphi, t)$ , la solution exacte et  $(\varphi_\epsilon^{\delta,c}, t_\epsilon^{\delta,c})$  la solution du problème régularisé avec des données bruitées. Alors, nous avons*

$$\|t_\epsilon^{\delta,c} - t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)} \leq \frac{k_1}{\epsilon} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0)} + g_\epsilon, \quad (6.21)$$

où

$$g_\epsilon \geq 0 \quad \text{et} \quad g_\epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \epsilon \longrightarrow 0.$$

De plus, si  $(\varphi, t) \in \text{Im}(R^*)$  signifiant qu'il existe  $y_1, y_2 \in L^2(\Gamma_a)$  tel que  $\varphi = B^*y_1$  et  $t = C^*y_1 + D^*y_2$ , alors nous avons

$$\|t_\epsilon^{\delta,c} - t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)}^2 \leq \frac{k_1^2}{\epsilon^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + \epsilon (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2). \quad (6.22)$$

La preuve du théorème 6.0.2, utilise exactement les mêmes arguments développés dans la preuve du théorème 6.0.1. La deuxième condition du théorème est satisfaite lorsque les données de Cauchy sont suffisamment régulières, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 6.0.1** *Pour un potentiel électrique donné  $T$  compatible avec la condition au limite de flux zéro, si  $(t, \varphi)$  est la solution du problème de complétion des données, alors on peut trouver  $y_1$  et  $y_2$  tels que  $y_1 \in L^2(\theta)$ ,  $y_2 \in L^2(\theta)$  tel que  $\varphi = B^*y_1$  et  $t = C^*y_1 + D^*y_2$ , dès que  $T \in H^{\frac{3}{2}}(\theta)$ .*

La preuve du lemme 6.0.1 est basé sur l'utilisation de la décomposition modale de l'opérateur Laplace dans le sens transversal.

**Preuve:** Puisque nous cherchons  $y_1$  et  $y_2$  dans  $L^2(\theta)$  tels que  $\varphi = B^*y_1$  et  $t = C^*y_1 + D^*y_2$ , nous avons formellement  $\varphi = Q^{\frac{1}{2}}y_1$ . Cela signifie que

$$y_1 = Q^{-\frac{1}{2}}\varphi.$$

D'autre part, nous avons  $\varphi = Pt$ , cela signifie que  $t = P^{-1}\varphi$

$$t = P^{-1}\varphi = D^*y_2 - C^*y_1 = D^*y_2 - P\varphi.$$

Cela signifie que  $D^*y_2 = (P^{-1} + P)\varphi$ .

Nous commençons par prouver que nous pouvons trouver  $y_2$  tel que  $D^*y_2 = (P^{-1} + P)\varphi$ . Nous décomposons les données de Dirichlet  $T$  sur la base des fonctions propres  $(e_i)_{i>0}$  de  $\Delta_\theta$  le laplacien sur la direction transversale  $\theta$ ;

$$T = \sum_i T_i e_i.$$

Alors nous avons

$$t = \sum_i T_i \exp\left(-\int_0^a \lambda_i \tanh(\lambda_i x) dx\right) e_i.$$

et puisque  $\varphi = Pt$ , alors :

$$\varphi = \sum_i \lambda_i T_i \tanh(\lambda_i a) \exp\left(-\int_0^a \lambda_i \tanh(\lambda_i x) dx\right) e_i.$$

nous multiplions par  $(P^{-1} + P)$  :

$$(P^{-1} + P)\varphi = \sum_i (\lambda_i^2 \tanh^2(\lambda_i a) + 1) T_i \exp\left(-\int_0^a \lambda_i \tanh(\lambda_i x) dx\right) e_i.$$

nous remarquons que

$$\exp\left(-\int_0^a \lambda_i \tanh(\lambda_i x) dx\right) = \frac{1}{\cosh(\lambda_i a)}.$$

D'autre part, on a  $D = (P - PQP)^{\frac{1}{2}}$ , ses valeurs propres sont

$$(\lambda_i \tanh(\lambda_i a))^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cosh(\lambda_i a)}.$$

On peut donc définir  $y_2$  par

$$\begin{aligned} y_2 &= \sum_i \frac{(\lambda_i^2 \tanh^2(\lambda_i a) + 1)}{\cosh(\lambda_i a)} \cdot \frac{\cosh(\lambda_i a)}{(\lambda_i \tanh(\lambda_i a))^{\frac{1}{2}}} T_i e_i \\ &= \sum_i \frac{1}{(\lambda_i \tanh(\lambda_i a))^{\frac{1}{2}}} + (\lambda_i \tanh(\lambda_i a))^{\frac{3}{2}} T_i e_i. \end{aligned}$$

Ainsi,  $y_2$  est bien défini dans  $L^2(\theta)$   $\left(\sum_i (y_2^i)^2 < +\infty\right)$  dès que  $\sum_i \lambda_i^3 T_i^2 < +\infty$ , ce qui équivaut au fait que  $T \in H^{\frac{3}{2}}(\theta)$ .

En utilisant la même stratégie, on peut trouver  $y_1$  défini comme suit

$$\begin{aligned} y_1 &= Q^{-\frac{1}{2}}\varphi = \sum_i \frac{(\lambda_i)^{\frac{1}{2}}}{(\tanh(\lambda_i a))^{\frac{1}{2}}} \lambda_i \frac{\tanh(\lambda_i a)}{\cosh(\lambda_i a)} T_i e_i \\ &= \sum_i (\lambda_i)^{\frac{3}{2}} \frac{(\tanh(\lambda_i a))^{\frac{1}{2}}}{\cosh(\lambda_i a)} T_i e_i. \end{aligned}$$

Nous avons  $y_1 \in L^2\left(\sum_i (y_1^i)^2 < +\infty\right)$  pour  $T \in H^{\frac{3}{2}}(\theta)$ . □

### 6.0.3 Interprétation théorique de la taille de la frontière mesurée et de la distribution des effets de bruit sur la solution reconstruite

En termes de taux de convergence, les estimations théoriques présentées dans le théorème 6.0.1 et le théorème 6.0.2 fournissent le même taux de convergence en termes de bruit  $\delta$  et en termes du paramètre de régularisation  $\epsilon$ . La différence entre les cas de mesure complets et incomplets réside dans les constantes de la convergence. Cela pourrait refléter si l'un ou l'autre est beaucoup plus approprié en fonction de la distribution du bruit. Notons  $E^c$  l'erreur maximale sur le potentiel électrique sur la frontière du cœur  $\Gamma_a$  dans le cas où nous mesurons sur l'ensemble accessible  $\Gamma_0$ .

$$\begin{aligned} E^c(\epsilon, \delta) &= \frac{k_1^2}{\epsilon^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + \epsilon (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) \\ &= \frac{k_1^2}{\epsilon^2} \left( \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)}^2 + \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^u)}^2 \right) + \epsilon (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2). \end{aligned}$$

D'autre part, nous notons  $E^i$  l'erreur maximale dans le cas où nous mesurons uniquement sur le sous-frontière  $\Gamma_0^m$

$$E^i(\Gamma_0^m, \epsilon, \delta) = \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{\epsilon^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)}^2 + \epsilon (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2).$$

La différence entre les deux frontières d'erreur se lit

$$E^c(\epsilon, \delta) - E^i(\Gamma_0^m, \epsilon, \delta) = \frac{k_1^2}{\epsilon^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^u)}^2 - \frac{k_2^2}{\epsilon^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)}^2 - \epsilon \|y_3\|^2.$$

On en distingue deux cas en fonction de la distribution du bruit  $\delta$  :

- Si  $\|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^u)}^2 < \frac{k_2^2}{k_1^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)}^2 + \frac{\epsilon^3}{k_1^2} \|y_3\|$ , alors il convient d'utiliser toutes les mesures disponibles à  $\Gamma_0$ .
- Si  $\|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^u)}^2 > \frac{k_2^2}{k_1^2} \|\delta\|_{L^2(\Gamma_0^m)}^2 + \frac{\epsilon^3}{k_1^2} \|y_3\|$ , alors il convient d'utiliser uniquement les mesures sur  $\Gamma_0^m$ .

**Remarque 6.0.2** *En pratique,  $\|y_3\|$  n'est pas disponible, mais puisque ce terme est multiplié par  $\epsilon^3$ , le terme  $\frac{\epsilon^3}{k_1^2} \|y_3\|$  pourrait être négligé. Ce problème pourrait*

être évité en utilisant des données simulées pour lesquelles on a une solution exacte et pourrait donc construire  $y_1, y_2, y_3$ . On pourrait alors tester si la distribution du bruit est beaucoup plus appropriée pour une observation complète sur  $\Gamma_0$  ou des mesures incomplètes sur  $\Gamma_0^m$  en utilisant des données simulées.

**Remarque 6.0.3** Lorsque l'interpolation est effectuée comme dans [27], [4], [42] il est important de construire un estimateur de l'erreur d'interpolation, qui pourrait ensuite être utilisé pour décider d'utiliser ou non les données interpolées.

**Remarque 6.0.4** Les bornes d'erreur ne prennent pas en compte les erreurs liées à la discrétisation du problème. Il serait intéressant d'ajouter l'erreur de discrétisation au résultat de la comparaison.

## 6.1 Simulations numériques du problème

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulations numériques pour résoudre le problème de complétion des données ( $P_0$ ) sur une surface rectangulaire en utilisant la technique du plongement invariante développée dans les sections précédentes. L'idée est de tester l'effet et la zone pour un problème où la solution analytique est connue. Il est donc possible de comparer avec précision les résultats "reconstruits" et "analytiques".

Nous considérons le problème ( $P_0$ ) sur  $]0, a[ \times ]0, 2\pi[$ .  $x$  est la variable qui décrit la dimension de longueur entre 0 et  $a$ , tandis que  $y$  est celle de la coordonnée transversale entre 0 et  $\pi$ . Les données de Cauchy sur  $\Gamma_0$  sont  $u(x, y)|_{\Gamma_0^m} = u(0, y)|_{\Gamma_0^m} = T = \sin(y)$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} u(x, y)|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u}{\partial n} (0, y)|_{\Gamma_0} = 0$  et on cherche à reconstruire les données sur la surface  $\Gamma_a$ . On pourrait vérifier que la fonction harmonique  $u(x, y) = \cosh(x) \sin(y)$  est la solution du problème ( $P_0$ ). Les données à compléter sur  $\Gamma_a$  sont :  $t_{\text{theo}} = u(a, y) = \cosh(a) \sin(y)$  et  $\varphi_{\text{theo}} = \frac{\partial u}{\partial n} (a, y) = \sinh(a) \sin(y)$  et sur  $\Gamma_0^u$  on construit aussi  $t'_{\text{theo}} = u(0, y) = \sin(y)$ . Nous utilisons une méthode des différences finies pour la solution numérique de (5.5) et (5.7). Pour ce faire, on note  $n$  le nombre de points le long de la direction  $x$  et  $p$  le nombre de points le long

de la direction transversale  $y$ . On définit par  $u(ih, jk)$  la solution du problème aux coordonnées des points de la grille  $x = ih, y = jk$ . Cette discrétisation se fait en deux étapes distinctes. La première suit la direction transversale et fait tourner les opérateurs discrets de Dirichlet-Neumann et de Neumann-Dirichlet dans des matrices respectivement  $P_i$  et  $Q_i$  à  $x = ih, 0 \leq i \leq n$ . Ces matrices sont alors de taille  $(p-1) \times (p-1)$  qui relie les valeurs  $u_i$  de la solution aux points de grille sur la section  $x = ih$  à l'approximation de la dérivée sur la même section. Ces matrices satisfont les équations de Riccati le long de la variable  $x$ . La deuxième étape consiste en la discrétisation selon l'axe de plongement, c'est-à-dire en  $x$ . On applique ensuite un schéma d'Euler pour résoudre et déterminer sur la surface  $x = a$  est la même procédure pour la résolution des équations de résidu. La première discrétisation définit la matrice de taille  $\omega(p-1) \times 1$  et vérifie également l'équations de résidu. La seconde permet, également en utilisant un schéma Euler pour déterminer le  $\omega$  sur la surface pour les données manquantes. Enfin, nous devons construire l'opérateur d'interface et résoudre des problèmes linéaires pour déterminer  $t_{\text{num}}$  et  $t'_{\text{num}}$ . Après une discrétisation dans la direction  $x$ , cette équation est résolue par un schéma Euler explicite respectant les conditions de stabilité.

$$\begin{cases} P_i = P_{i-1} (I - h\Delta_{T,k}) - h\Delta_{T,k}, \\ P(0)|_{\Gamma_0} = 0. \end{cases}$$

où  $\Delta_{T,k}$  est la matrice à trois diagonales associée à l'approximation à trois points de la dérivée seconde.

Un schéma similaire est appliqué à l'opérateur Neumann-Dirichlet

$$\begin{cases} Q_i = Q_{i-1} (I - h\Delta_{T,k}Q_{i-1}) - hI, \\ Q(0)|_{\Gamma_0^m} = 0, \quad Q(0)|_{\Gamma_0^u} = 0. \end{cases}$$

et à l'équation résiduelle :

$$\begin{cases} \omega_i = (I - h\Delta_{T,k}Q_{i-1})\omega_{i-1} \\ \omega(0)|_{\Gamma_0^m} = 0, \quad \omega(0)|_{\Gamma_0^u} = 0 \end{cases},$$

Les équations des opérateurs  $S, P'$  et  $H$  sont résolues de la même manière. Le schéma a été implémenté dans un programme MATLAB.

Afin de pouvoir comparer les résultats avec différents niveaux de bruit, nous avons généré un bruit blanc normalisé en utilisant la fonction `rand` du `matlab`. Ce bruit est enregistré et est utilisé pour tous les cas de test, il sera simplement redimensionné complètement ou partiellement remis à l'échelle afin de produire différents niveaux de bruit. Dans les simulations suivantes, nous avons pris  $p = 201$ ,  $n = 2000$ ,  $a = \pi$ ,  $b = 2\pi$  et  $\epsilon = 10^{-6}$ . Nous dirons également que dans ce qui suit la frontière de mesure est placée au centre de  $\Gamma_0$ . Pour un pourcentage donné  $\alpha$ , nous définissons  $\Gamma_0^m$  comme l'intervalle  $[\frac{b}{2}(1 - \frac{\alpha}{100}), \frac{b}{2}(1 + \frac{\alpha}{100})]$ .

## 6.2 Résultats numériques

Dans cette section, nous allons mener à deux cas du test reflétant les résultats théoriques que nous avons obtenus. Dans le premier cas de test, nous utiliserons un bruit blanc homogène, ce qui signifie que le niveau de bruit est le même dans toutes les bords  $\Gamma_0$ . Cela ne signifie pas que le bruit est constant, cela signifie seulement que point par point, la valeur absolue du bruit est inférieure à une constante donnée. Dans ce cas, nous imitons le fait que les électrodes couvrent tout le domaine accessible  $\Gamma_0$  et que les électrodes ont la même erreur de mesure. Nous examinerons comment la perte d'une partie de ces mesures d'électrodes affecte la solution reconstruite.

Dans le second cas, on considère qu'une partie des électrodes manque ou qu'elle est mesuré mais avec un niveau de bruit élevé. Dans le cas où une partie des électrodes est manquante, nous supposons que l'on pourrait utiliser une méthode d'interpolation et en fonction de l'erreur d'interpolation, nous examinerons si la considérations de ces signaux interpolés améliore ou détériore la solution.

### 6.2.1 Bruit homogène

Dans ce paragraphe, nous testons l'effet de la taille de la sous-frontière des mesures  $\Gamma_0^m$  et des différents niveaux de bruit sur la qualité de la solution reconstruite

sur la frontière inaccessible  $\Gamma_a$ . Nous faisons varier la taille de  $\Gamma_0^m$  de 20% à 100% de la frontière complète accessible. Nous faisons également varier le niveau de bruit de 0% à 30%. Dans la Figure 13 (respectivement Figure 14), on mesure  $T$  sur 50% (respectivement 90%) de  $\Gamma_0$ , les mesures contiennent 10% (respectivement, 20%) de bruit comme indiqué dans le panneau de gauche Figure 13 (respectivement Figure 14). La solution obtenue sur la frontière "coeur"  $\Gamma_a$  est affichée dans la Figure 13 (respectivement Figure 14) (ligne continue rouge) où nous la comparons à la solution exacte (ligne pointillée bleue). L'erreur relative par rapport à la solution exacte est 0,26 (respectivement 0,18).

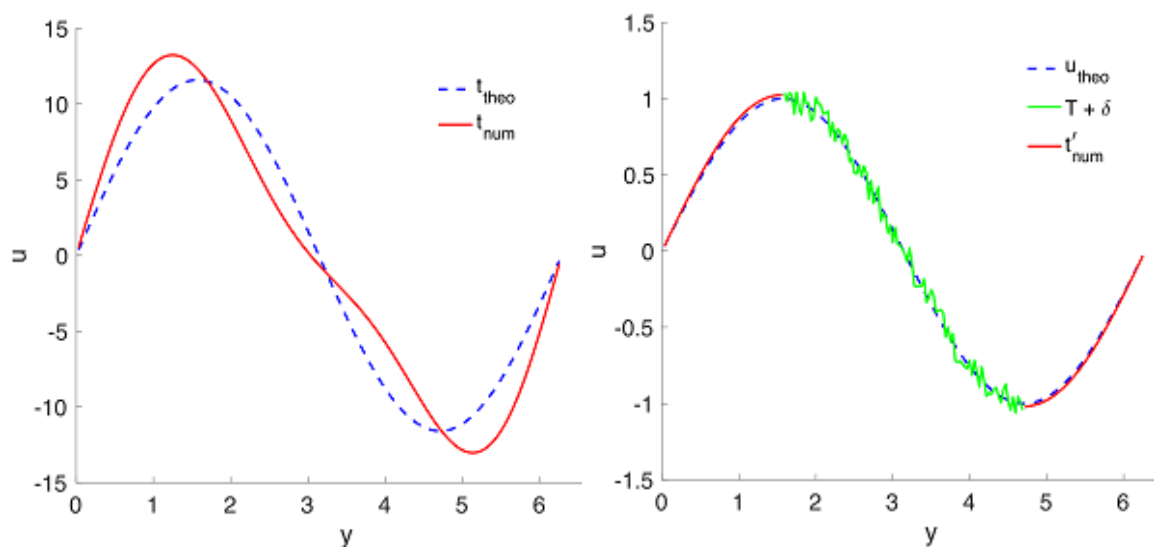


Figure 13 : *Gauche* : Comparaison entre la solution exacte (ligne pointillée bleue) et la solution inverse de mesure de frontière incomplète (ligne continue rouge).

*La frontière  $\Gamma_0^m$  occupe 50% de  $\Gamma_0$  et le niveau de bruit est de 10%.*

*Droite* : Solution reconstituée sur la frontière non mesurée accessible  $\Gamma_0^u$  (ligne continue rouge), mesure bruyante  $T + \delta$  (ligne continue verte) et solution exacte sur  $\Gamma_0$  (ligne pointillée bleue).



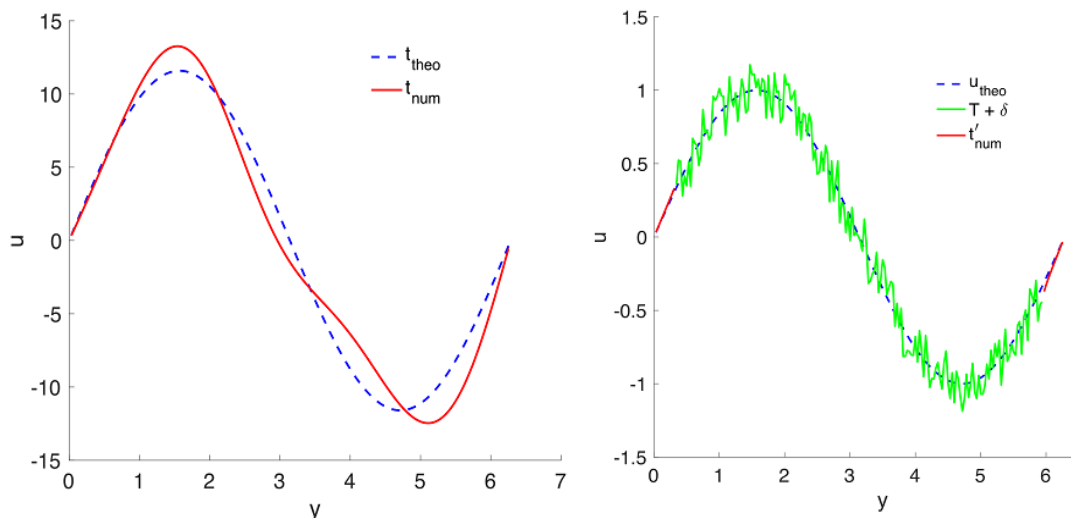


Figure 14 : *Gauche* : Comparaison entre la solution exacte (ligne pointillée bleue) et la solution inverse de mesure de frontière incomplète (ligne continue rouge).

.La frontière  $\Gamma_0^m$  occupe 90% de  $\Gamma_0$  et le niveau de bruit est de 20%.

*Droite* : Solution reconstituée sur la frontière non mesurée accessible  $\Gamma_0^u$  (ligne continue rouge), mesure bruyante  $T + \delta$  (ligne continue verte) et solution exacte sur  $\Gamma_0$  (ligne pointillée bleue).

Dans le Tableau 1, nous présentons l'erreur relative du potentiel reconstruit  $t_{\text{num}}$  sur  $\Gamma_a$  par rapport à la solution théorique.

En observant chaque élément brut du Tableau 1, nous remarquons que l'erreur relative augmente de manière monotone lorsque le niveau de bruit augmente, indépendamment de la taille du domaine de mesure  $\Gamma_0^m$ . D'autre part, en regardant les colonnes du Tableau 1, nous remarquons que l'erreur ne diminue pas de façon monotone lors de l'augmentation de la taille de la frontière de mesure  $\Gamma_0^m$  pour chaque niveau de bruit. Bien que le niveau de bruit soit faible (0%, 1%, 5%, 10%), pour un niveau de bruit élevé (20%, 30%), on voit que l'erreur augmente lorsque la taille de  $\Gamma_0^m$  augmente de 20% à 30%, puis diminue de façon monotone. On pense que la distribution du bruit est la raison principale.

$\Gamma_0^m\%$ / $\delta\%$	0%	1%	5%	10%	20%	30%
20%	0.6151	0.6169	0.6261	0.6417	0.6847	0.7414
30%	0.4358	0.4491	0.5078	0.5901	0.7723	0.9666
50%	0.0894	0.1067	0.1769	0.2655	0.4433	0.6213
60%	0.0312	0.0394	0.1076	0.2036	0.3989	0.5949
80%	0.0062	0.0166	0.0710	0.1399	0.2780	0.4160
90%	0.0059	0.0116	0.0480	0.0950	0.1891	0.2833
100%	0.0059	0.0084	0.0275	0.0532	0.1052	0.1572

Tableau 1 : *Erreur relative entre la solution exacte et la solution obtenue en utilisant différentes sous-frontières de mesure  $\Gamma_0^m$  (lignes) et différents niveaux de bruit  $\delta$  (colonnes), avec  $(a = \pi, b = 2\pi)$ .*

## 6.2.2 Bruit non homogène

Nous supposons ici que certaines électrodes sont défectueuses ou que certaines régions de la frontière accessible ne sont pas couvertes par des électrodes. Nous supposons également que l'utilisateur souhaite effectuer une interpolation sur cette région. Nous supposons ici que l'erreur d'interpolation serait combinée à l'erreur de mesure conduisant à un nouveau niveau de bruit sur la frontière  $\Gamma_0^u$  différent du bruit sur  $\Gamma_0^m$ . Dans ce qui suit nous ne faisons aucune interpolation nous augmentons progressivement le niveau de bruit sur la frontière non mesurée  $\Gamma_0^u$  et nous comparons les solutions des deux cas suivants : Dans le premier cas, nous utilisons uniquement les mesures enregistrées par les électrodes non défectueuses sur  $\Gamma_0^m$  et résoudre le problème inverse avec une information incomplète sur la frontière accessible, on note l'erreur relative  $E^i$  comme précédemment indiqué dans la section d'analyse. Dans le second cas, nous utilisons les données bruitées dans toutes les frontière accessibles  $\Gamma_0$  et nous notons  $E^c$  l'erreur relative correspondante Dans la Figures 15 (gauche, respectivement droite), la frontière de mesure  $\Gamma_0^m$  occupe 80% (respectivement 50%) de  $\Gamma_0$ . En utilisant un niveau de bruit de 2% (respectivement 5%), l'erreur relative  $E^i$  est de 0,03 (respectivement 0,17), voir la ligne constante bleue dans les deux Figures. On remarque que pour un niveau de bruit inférieur à 14% (respectivement 30%) sur  $\Gamma_0^u$ , tout en gardant le niveau de bruit

2% (respectivement 5%) sur  $\Gamma_0^m$ , l'erreur relative de la solution dans le cas des mesures complètes est meilleure que celle de la solution du cas incomplète, la ligne rouge est sous la ligne bleue. Alors que pour un niveau de bruit plus élevé sur  $\Gamma_0^m$ , la solution du cas de mesure complet devient pire que celle incomplète. Ceci reflète le résultat théorique que nous avons obtenu dans la section de comparaison entre  $E^i$  et  $E^c$ .

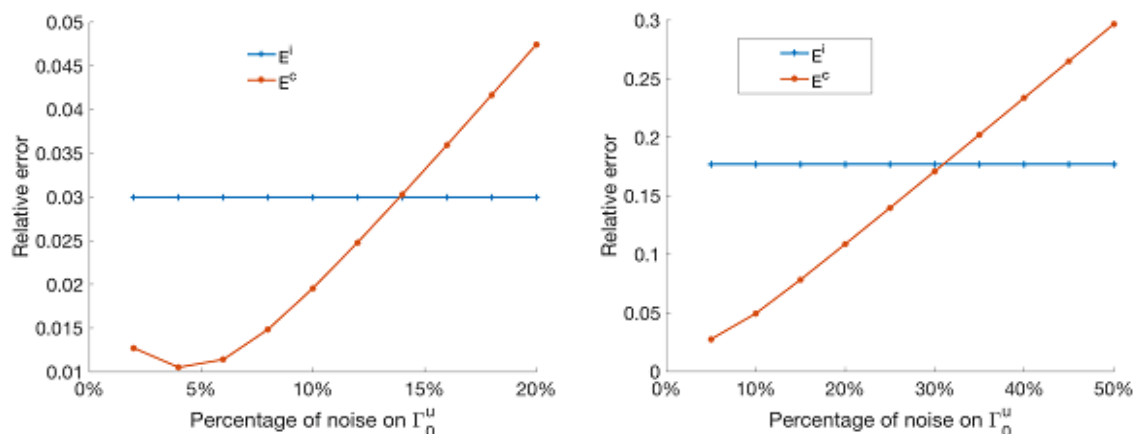


Figure 15 : *Comparaison entre la mesure de la frontière incomplète (ligne bleue) et la mesure de la frontière complète (ligne rouge) des solutions inverses par rapport au niveau de bruit à  $\Gamma_0^u$ . La figure droite :  $\Gamma_0^m$  occupe 50% et le bruit fixe est de 5%. à gauche :  $\Gamma_0^m$  occupe 80% et le bruit fixe est de 2%.*

### 6.2.3 Cas des solutions oscillantes

Afin de montrer comment la méthode fonctionne dans un cas oscillant, nous modifions ici l'expression analytique de la solution en ajoutant une autre fréquence dans la direction  $y$ . La nouvelle fonction que nous recherchons est

$$u(x, y) = \sin(y) \cosh(x) + 4 \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$$

le domaine de l'espace est  $[0, 1.5\pi] \times [0, 8\pi]$ . La frontière mesurée est  $\Gamma_0^m = 0 \times [0.4\pi, 3.6\pi]$  qui correspond à 80% de  $\Gamma_0$  et le pourcentage de bruit  $\delta = 20\%$ ,

voir (Figure 16) (droite). L'erreur relative de la solution illustrée à la (Figure 16) (gauche) est de 13%.

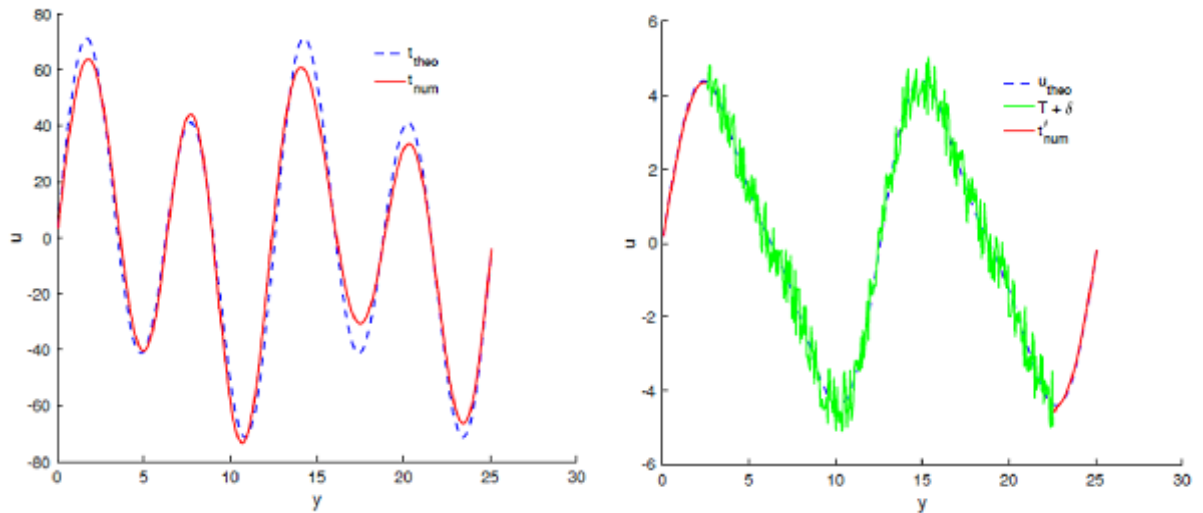


Figure 16 : Comparaison entre la solution exacte (ligne pointillée bleue) et la solution inverse de mesure de frontière incomplète (ligne continue rouge).  $\Gamma_0^m$  occupe 80% de  $\Gamma_0$  et le niveau de bruit est 20%. (gauche). Solution reconstruite sur la frontière accessible (ligne continue rouge), mesure bruyante  $T + \delta$  (ligne continue verte) et solution exacte sur  $\Gamma_0$  (ligne pointillée bleue). (droite).

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode pour résoudre un problème de complétion des données pour le problème inverse de l'imagerie par électrocardiographie. Les données de Cauchy sont mesurées sur la partie de la frontière accessible. Dans notre cas, la condition aux limites de Neumann est donnée dans l'ensemble du domaine accessible. Nous avons utilisé une méthode basée sur la factorisation des problèmes aux limites elliptiques. Nous avons analysé l'erreur en cas de mesures sur tout le domaine accessible et lorsqu'une partie seulement du domaine accessible est mesurée. Nous avons obtenu un résultat de comparaison entre les deux cas en fonction de la distribution du bruit sur  $\Gamma_0$ . Nous avons testé

cette méthode numériquement sur un domaine rectangulaire en 2D. Nous avons obtenu les résultats suivants :

1) pour un  $\Gamma_0^m$  fixe, l'erreur augmente de façon monotone avec le niveau de bruit et ceci est indépendant de la taille du domaine de mesure  $\Gamma_0^m$  ;

2) pour un niveau de bruit fixe, il n'y a aucune garantie que l'erreur diminue tout en augmentant la taille de la frontière de mesure  $\Gamma_0^m$ . Notre conclusion est que cela dépend de la façon dont le bruit est distribué dans  $\Gamma_0$ .

3) en augmentant progressivement le niveau de bruit sur  $\Gamma_0^u$  alors que le niveau de bruit est fixé sur  $\Gamma_0^m$ , on pourrait trouver numériquement le niveau de bruit critique sur  $\Gamma_0^u$  à partir duquel il n'y a aucun gain à considérer les données  $\Gamma_0^u$ . Ce résultat pourrait être pratiquement utilisé si l'on dispose d'un estimateur de l'erreur d'interpolation dans la frontière non mesurée.

## Chapitre 7

# Extension de l'application de la méthode de factorisation dans le cas tridimensionnel

### 7.1 Introduction

Le succès de la méthode de plongement invariant pour la factorisation de problèmes aux limites elliptiques n'est pas lié à la forme cylindrique du domaine (voir [22],[44]). Le cas cylindrique est particulièrement simple car les sous domaines sont des sous cylindres du domaine initial et une variation infinitésimale du domaine est réalisée par un déplacement infinitésimal de la section variable dans la direction de l'axe du cylindre. Dans le cas non cylindrique on devra définir la famille de surfaces balayant le domaine initial et qui limiteront les sous domaines d'une part et d'autre part le champ de déplacement entre ces surfaces. dans ce chapitre, nous montrons que nous pouvons appliquer la méthode de factorisation pour résoudre le problème de complétion de données pour l'équation de Laplace dans une sphère  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

## 7.2 Résolution du problème de Cauchy dans un domaine sphérique

### 7.2.1 Position du problème

Nous considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = T & \text{sur } \Gamma_C, \\ \partial_n u = \Phi & \text{sur } \Gamma_C. \end{cases}$$

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que; } r_i^2 < x^2 + y^2 + z^2 < r_c^2\}$ , avec  $r_i < r_c$  deux réels strictement positifs,  $\Gamma_C$  est la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r_c$ ,  $\Gamma_I$  est la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r_i$ . voir la (Figure 18).

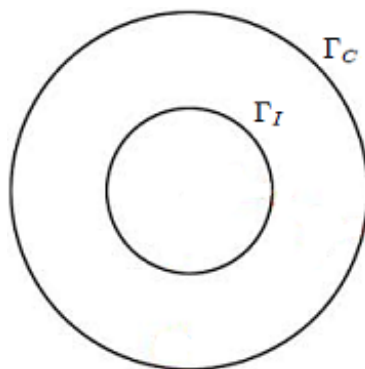


Figure 18 : Représentation schématique du domaine sphérique utilisé dans l'étude.

Comme dans le chapitre (4) sur  $\Gamma_C$  nous avons les données de Cauchy notées aussi  $(\Phi, T) \in H^{-1/2}(\Gamma_C) \times H^{1/2}(\Gamma_C)$ . Nous n'avons pas de conditions aux limites sur  $\Gamma_I$  et c'est ces données manquantes que l'on cherche à rapprocher à l'aide de la condition surabondante sur  $\Gamma_C$ .

Passons aux coordonnées sphériques, nous posons

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad \text{et} \quad z = r \cos(\theta)$$

$$\text{avec } (r, \varphi, \theta) \in [r_i, r_c] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi], u(x, y, z) = u(r, \varphi, \theta)$$

donc le problème  $(\mathcal{P})$  devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = T \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ \partial_n u = \frac{\partial u}{\partial r} = \Phi \quad \text{sur } \Gamma_C. \end{array} \right. \quad (7.1)$$

### 7.2.2 Le problème de contrôle optimal associé

Si nous déterminons les données  $\varphi, t$  sur  $\Gamma_I$  qui complètent le problème  $(\mathcal{P})$ ; nous aurons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = T \quad ; \quad \partial_n u = \Phi \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ u = t \quad ; \quad \partial_n u = \varphi \quad \text{sur } \Gamma_I. \end{array} \right.$$

nous considérons maintenant le problème de contrôle optimal suivant :

pour tout  $(\eta, \tau) \in H^{-1/2}(\Gamma_I) \times H^{1/2}(\Gamma_I)$  l'état est défini par les deux problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_1 = T \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ \partial_n u_1 = \eta \quad \text{sur } \Gamma_I. \end{array} \right. \quad (7.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial u_2 = \Phi \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ u_2 = \tau \quad \text{sur } \Gamma_I. \end{array} \right. \quad (7.3)$$

Notons que  $\partial_n \cdot |_{\Gamma_I} = -\frac{\partial}{\partial r}$  et  $\partial_n \cdot |_{\Gamma_C} = \frac{\partial}{\partial r}$ .



Si  $(\Phi, T)$  sont compatibles alors  $u_1 = u_2$  lorsque  $(\eta, \tau) = (\varphi, t)$ . Nous introduisons ensuite la fonction coût  $J(\eta, \tau)$  définie par :

$$\begin{aligned} J(\eta, \tau) &= \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 dx dy + 2\epsilon \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla u_2 dx dy, \\ &= \int_{r_i}^{r_c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\nabla u_1 - \nabla u_2)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &+ 2\epsilon \int_{r_i}^{r_c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \nabla u_1 \nabla u_2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (7.4)$$

pour tout  $(\eta, \tau) \in U_{ad} = H^{-1/2}(\Gamma_I) \times H^{1/2}(\Gamma_I)$ .

### 7.2.3 Plongement invariant

Dans cette partie nous appliquons la méthode de plongement invariant, au système d'optimalité (7.2) et (7.3). A l'aide de cette méthode nous explicitons la fonction coût en fonction des contrôles  $\eta, \tau$ . Nous plongeons chacun des problèmes (7.2) et (7.3) dans une famille de problèmes similaires définis sur  $\Omega_r = [r, r_c] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

Pour (7.2) nous imposons une condition aux limites de Neumann :  $\partial_n u_1^r|_{\Gamma_r} = \alpha$ , et pour (7.3) nous imposons une condition aux limites de Dirichlet  $u_2^r|_{\Gamma_r} = \beta$ , où  $\Gamma_r$  est la sphère de centre  $O$  et rayon  $r \in ]r_i, r_c[$ , voir la (Figure 19).

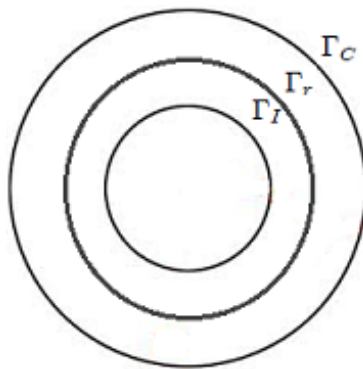


Figure 19 : Représentation schématique du domaine en mouvement  $\Omega_r$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u_1^r}{\partial r}) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u_1^r}{\partial \theta}) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_1^r}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_r, \\ u_1^r = T \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ \partial_n u_1^r = \alpha \quad \text{sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (7.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u_2^r}{\partial r}) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta}) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_2^r}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_r, \\ \partial_n u_2^r = \Phi \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ u_2^r = \beta \quad \text{sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (7.6)$$

Nous considérons l'application Neumann-Dirichlet (N-D) pour  $u_1$

:  $\alpha \mapsto u_1^r|_{\Gamma_r}$  et Dirichlet-Neumann (D-N) pour  $u_2$  :  $\beta \mapsto \partial_n u_2^r|_{\Gamma_r}$ .

Nous avons

$$\partial_n u_2^r|_{\Gamma_r} = P(r)\beta + \omega_2(r),$$

où  $\partial_n \cdot|_{\Gamma_r} = -\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $P(s) \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_r), H^{-1/2}(\Gamma_r))$ ,  $P(r_c) = 0$  et  $\omega_2(r_c) = \Phi$ .

Nous avons aussi

$$u_1^r(r) = Q(r)\partial_n u_2^r + \omega_1(r), \quad Q(r) \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_r), H^{1/2}(\Gamma_r)).$$

$$Q(r_c) = 0 \text{ et } \omega_1(r_c) = T.$$

**Proposition 7.2.1** *L'opérateur de Dirichlet-Neumann  $P$  et la fonction  $\omega_2$  sont donnés par le système d'équations suivant qui découplent (7.3)*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{r}P - P^2 = \Delta_{\top}, \quad P(r_c) = 0, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial r} - P\omega_2 + \frac{2}{r}\omega_2 = 0, \quad \omega_2(r_c) = \Phi. \end{array} \right. \quad (7.7)$$

avec  $\Delta_{\top} = \frac{1}{r^2} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})$

Effectuons le changement de variable  $s = \frac{1}{r}$  nous obtenons  $P' = r^2 P$  et  $\omega_2' = r^2 \omega_2$  alors le système (7.7) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P'}{\partial s} + P'^2 = -\frac{1}{s^4} \Delta_{\top}, \quad P'(\frac{1}{r_c}) = 0, \\ \frac{\partial \omega_2'}{\partial s} + P'\omega_2' = 0, \quad \omega_2'(\frac{1}{r_c}) = r_c^2 \Phi. \end{array} \right. \quad (7.8)$$

Après la résolution du système ( 7.8 ) nous déterminons l'opérateur  $P$  et la fonction  $\omega_2$ . Nous obtenons  $u_2$  en intégrant dans le sens rétrograde l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} = -Pu_2 - \omega_2, \quad u_2(r_i) = \tau. \quad (7.9)$$

**Preuve:** Soit  $v$  une fonction test dans l'espace

$$V = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u|_{\Gamma_C} = 0\},$$

l'équation (7.6) donne

$$- \int_r^{r_c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial r} (s^2 \frac{\partial u_2^r}{\partial r}) + \frac{1}{s^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta}) + \frac{1}{s^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_2^r}{\partial \varphi^2} \right] v s^2 \sin \theta ds d\theta d\varphi = 0.$$

Appliquons la formule de Green nous obtenons

$$\int_r^{r_c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u_2^r}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{s^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_2^r}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] s^2 \sin \theta ds d\theta d\varphi -$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_n u_2^r(r) v(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

Dérivons par rapport à  $r$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u_2^r}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_2^r}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] r^2 \sin \theta d\theta d\varphi - \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_n u_2^r v r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right) = 0.$$

On choisit maintenant  $v$  indépendant de  $r$ , nous obtenons

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_2^r}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \partial_n u_2^r) v \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

Remplaçons  $\partial_n u_2^r|_{\Gamma_r}$  par  $P(r)u_2(r) + \omega_2(r)$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_2^r}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (P(r)u_2^r + \omega_2(r))) v \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

Finalement nous obtenons

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_2^r}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] r^2 \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{r} P - P^2 \right) u_2^r v r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial r} - P\omega_2 + \frac{2}{r}\omega_2 \right) v r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

Éffectuons le changement de variable  $s = \frac{1}{r}$ ,  $P' = r^2 P$  et  $\omega'_2 = r^2 \omega_2$  nous obtenons

$$-\frac{1}{s^4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ s^2 \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{s^2}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_2^r}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \frac{1}{s^2} \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial P'}{\partial s} + P'^2 \right) u_2^r v \frac{1}{s^2} \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial \omega'_2}{\partial s} - P'_2 \omega'_2 \right) v \frac{1}{s^2} \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

$$-\frac{1}{s^4} \left[ \left( s \frac{\partial u_2^r}{\partial \theta}, s \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{s}{\sin \theta} \frac{\partial u_2^r}{\partial \varphi}, \frac{s}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right] - \left( \frac{\partial P'}{\partial s} u_2^r, v \right) - (P' u_2^r, P' v) - \left( \frac{\partial \omega'_2}{\partial s} + P' \omega'_2, v \right) = 0.$$

□

Par le même raisonnement on montre la proposition suivante :

**Proposition 7.2.2** *L'opérateur (N-D)  $Q$  et  $\omega_1$  vérifient,*

$$\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{2}{r} Q + Q \Delta_\top Q = -I, \quad Q(0) = 0, \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial r} + Q \Delta_\top \omega_1(x) = 0, \quad \omega_1(0) = T. \quad (7.11)$$

Nous posons  $Q' = \frac{1}{r^2} Q$  et  $s = \frac{1}{r}$ , donc nous obtenons

$$-\frac{\partial Q'}{\partial s} + s^4 Q' \Delta_\top Q' = -I, \quad Q' \left( \frac{1}{r_c} \right) = 0, \quad (7.12)$$

$$-\frac{\partial \omega_1}{\partial s} + Q' \Delta_\top \omega_1 = 0, \quad \omega_1 \left( \frac{1}{r_c} \right) = T. \quad (7.13)$$

Après la résolution des ces équation de Riccati nous obtenons  $u_1$  en intégrant dans le sens rétrograde l'équation différentielle suivante :

$$u_1 = -Q \frac{\partial u_1}{\partial x} + \omega_1, \quad u_1(r_i) = Q(r_i) \eta + \omega_1(r_i). \quad (7.14)$$

## 7.2.4 Résolution du problème de contrôle optimal

Dans cette section nous montrons que la fonctionnelle d'énergie  $J$  peut être exprimée directement en fonction des contrôle  $\eta$  et  $\tau$  en utilisant les opérateurs  $P$

et  $Q$  comme dans le chapitre (4). Dans toute la suite nous notons  $P(r_i)$  et  $Q(r_i)$  respectivement par  $P$  et  $Q$ . Posons  $A_\epsilon$  la matrice opérateurs définie par :

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} Q & -(1-\epsilon)QP \\ -(1-\epsilon)PQ & P \end{pmatrix}.$$

Notons  $[\eta; \tau]$  le vecteur ligne de composants  $\eta$  et  $\tau$ .

**Proposition 7.2.3** *La fonction coût  $J$  s'écrit sous la forme suivante :*

$$J(\eta, \tau) = C + [\eta, \tau]A_\epsilon[\eta, \tau]' - 2 \int_{\Gamma_I} (1-\epsilon)(\omega_1 P\tau + Q\omega_2\eta),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\eta$  et  $\tau$ . Si un minimum  $(\varphi, t)$  de  $J$  est atteint, il satisfait :

$$A_\epsilon[\eta, \tau]' = (1-\epsilon)[Q\omega_2, P\omega_1]'$$

**Preuve:** Pour démontrer cette proposition, nous utilisant les même arguments de la preuve de la proposition (4.3.1) du chapitre(4), il suffit d'utiliser les coordonnées sphériques. □

# Chapitre 8

## Conclusion générale et Perspectives

### 8.1 Conclusion générale

L'identification de conditions limites sur une partie de la frontière d'un domaine à partir des données surabondantes sur la partie restante de la frontière est une des thématiques du large champ des problèmes inverses. Ce problème revient à résoudre un problème de Cauchy connu pour être mal posé au sens de Hadamard, notamment en raison d'une condition de compatibilité sur les données remettant en cause l'existence et la stabilité de la solution de ce problème. On sait en revanche que si cette solution existe, elle est unique. De nombreux travaux théoriques et appliqués ont été réalisés et de nombreuses méthodes numériques ont été proposées pour l'approximation de la solution du problème de Cauchy. Cependant, ces méthodes présentent la caractéristique commune d'être instables numériquement, en particulier lorsque les données de Cauchy sont bruitées.

Ces travaux de thèse ont porté sur le problème de complétion de données pour l'équation de Laplace via la méthode du plongement invariante, en particulier pour le problème inverse en imagerie électrocardiographique.

La première partie est entièrement consacrée à la présentation de la méthode

de factorisation pour une configuration simple, c'est-à-dire pour un cylindrique de longueur  $a$ . On a envisagé deux formulations, qui font intervenir une frontière mobile se déplaçant d'un bout à l'autre du domaine, et qui permet d'étudier le problème induit dans le sous-domaine compris entre cette frontière et une des deux faces du cylindre. Par ailleurs, l'un des buts de cette partie était de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de problème de complétions des données en utilisant la fonctionnelle énergétique.

Il y a une littérature foisonnante sur la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. L'originalité de notre approche est dans la combinaison de l'outil de plongement invariant et de celui de la transformation d'un problème inverse en un problème de contrôle optimal.

Dans le cadre de cette thèse, la technique d'extension des données est basée sur la minimisation de fonctionnelles d'écart de type énergie. Cette fonctionnelle a été introduite, dans le cadre des complétions de données frontières pour le cas de l'opérateur de Laplace par Stéphane Andrieux et al [43]. Un lien a été ultérieurement établi entre la minimisation de cette fonctionnelle et la méthode de décomposition de domaines, la condition d'optimalité du premier ordre fait apparaître une équation d'interface, l'interface étant la frontière sur laquelle les données doivent être complétées.

L'apport de la thèse réside dans l'exploitation de la méthode de factorisation pour la résolution des problèmes aux limites sous-jacents. La méthode de plongement invariant, quoique facile à mettre en oeuvre, est coûteuse au niveau des calculs numériques par rapport aux méthodes itératives existantes.

La deuxième partie s'est donné pour objectif de traiter des cas de problème inverse plus complexes; nous avons pris en compte les mesures manquantes sur la surface du corps, et ça c'est la nouveauté de ce travail. Le problème inverse de l'imagerie par électrocardiographie est formulé comme un problème de complétions des données pour l'équation de Laplace. La condition aux limites de Neumann est indiquée sur toute la surface du corps. La difficulté vient du fait que la condition aux limites de Dirichlet n'est donnée que sur une partie de la surface du corps et

qu'une frontière incomplète est donc adjacente à une frontière complète. Afin de construire le potentiel électrique sur la surface cardiaque, Nous avons utilisé une approche de contrôle optimale où le potentiel inconnu à la frontière externe fait également partie des variables de contrôle. Nous avons comparé théoriquement ce cas au cas où la condition au limite de Dirichlet est donnée sur la surface entièrement accessible. Nous avons comparé ensuite les deux cas et sur la base de la distribution du bruit dans les mesures, Nous avons conclu si cela vaut la peine d'utiliser toutes les données. Nous avons utilisé la méthode de factorisation des problèmes aux limites elliptiques combinée à la méthode des éléments finis. Ceci revient à plonger le problème initial en une famille de problèmes similaires sur des sous domaines limités par une frontière mobile (suivant un axe d'évolution que nous définirons) balayant le thorax depuis la peau jusqu'à l'épicarde. Dans le cadre du problème inverse cette analyse permet d'écrire directement avant discrétisation l'équation vérifiée sur l'épicarde par l'estimation optimale du potentiel épicaudique au sens d'un critère quadratique. Elle permet d'analyser le caractère mal posé du problème inverse et donc de discrétiser et de régulariser au mieux ce problème. Un des avantages de cette méthode est que si l'on souhaite calculer le potentiel à différents temps du cycle cardiaque, il n'est pas nécessaire de refaire la résolution de toutes les équations à chaque instant. Nous avons illustré les résultats théoriques par des simulations numériques dans un domaine cylindrique. Nous avons étudié numériquement l'effet de la taille de la zone de données manquante et de la distribution du bruit sur la précision de la solution inverse.

Cette méthode de factorisation n'a été appliquée qu'à des géométries spécifiques, mais la généralisation à des géométries plus générales semble possible. Son application au problème inverse de complétion de données y jette un nouvel éclairage. La formulation explicite des opérateurs d'interface aide à mieux comprendre le caractère mal posé du problème de complétion de données et à choisir la meilleure régularisation possible.

Nous avons terminé ce travail par l'extention de la méthode de factorisation pour résoudre le problème de Cauchy dans un domaine sphérique.



## 8.2 Perspectives

Plusieurs perspectives se profilent à l'issue de ces travaux de thèse nous en citons quelques uns :

- ◆ Étendre l'approche au problème 3D dans un domaine réaliste (cage thoracique).

- ◆ Tester d'autres schémas numériques et la régularisation.

- ◆ L'exploitation de la technique de plongement invariant pour le système de Stokes en vue de la résolution du problème de complétion des données frontières.

- ◆ L'analyse du problème de Cauchy-Stokes en considérant des données très incomplètes (i.e. on a accès aux mesures correspondant aux champs de vitesse et à une seule composante de la trace normale).

- ◆ L'analyse de couplage Stokes-Darcy à travers l'interface entre un domaine purement fluide et un milieu poreux. Ce problème apparaît dans plusieurs applications comme le transport de substances par des eaux souterraines.

## 8.3 Annexe

### 8.3.1 Décomposition modale

Dans cette annexe nous nous appuyerons sur le travail de [31], on va mettre en oeuvre une méthode classique, la décomposition modale, qui consiste à écrire les variables du problème dans une base diagonalisante pour le Laplacien transversal. Dans un premier temps, on va expliquer comment écrire les données dans cette base; ensuite, on calculera la décomposition des deux opérateurs  $P$  et  $Q$ , puis on en déduira l'expression modale de leurs partie affine  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

### 8.3.2 Ecriture dans une base de fonctions propres( $\mathcal{P}_0$ )

On va commencer par définir la base de fonctions propres qui permet de diagonaliser le laplacien transversal.

Soit l'opérateur Laplacien  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y$  avec  $\Delta_y$  Laplacien transverse de  $\Delta$ .

**Lemme 8.3.1** *L'opérateur  $\Delta_y$  agissant sur des fonctions définies sur la section  $\mathcal{O}$ , associé à une condition de Dirichlet nulle sur le bord  $\partial\mathcal{O}$ , est diagonalisable dans une base orthonormale de  $L^2(\mathcal{O})$  et orthogonale pour  $H^1(\mathcal{O})$ .*

**Preuve:** L'opérateur  $\mathcal{A} : u \in D(\mathcal{A}) \subset L^2(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{A}u \in L^2(\mathcal{O})$  défini par :

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{L^2(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} \Delta u v dy,$$

avec

$$D(\mathcal{A}) = H_0^1(\Delta, \mathcal{O}) = \{u \in H_0^1(\mathcal{O}) : \Delta u \in L^2(\mathcal{O})\}.$$

est auto-adjoint et a une résolvante compacte, il est donc diagonalisable et ses vecteurs propres forment une base orthonormale dans  $L^2(\mathcal{O})$ . On note  $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  cette base.

Soit  $\lambda_n$  la suite des valeurs propres de  $-\Delta_y$  et  $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$ . Comme  $-\Delta$  est strictement positif, les  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  forment une suite croissante de termes positifs et qui tend vers  $+\infty$ .

Si  $i \neq j$ , on vérifie que :

$$\int_{\mathcal{O}} \nabla \Psi_i \nabla \Psi_j = \lambda_i \int_{\mathcal{O}} \Psi_i \Psi_j = 0.$$

On en déduit que la famille  $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est orthogonale dans  $H_0^1(\mathcal{O})$ . La famille des  $\Psi_i$  est totale, c'est donc une base de  $H_0^1(\mathcal{O})$ .

Soit maintenant  $\gamma$  un élément de  $L^2(0, a; H_0^1(\mathcal{O})) \cap H^1(0, a; L^2(\mathcal{O}))$ . Sa trace sur la section  $\Gamma$ , pour  $y$  fixé, appartient donc à  $H^{1/2}(\mathcal{O})$ . On peut donc écrire sa décomposition dans la base  $\Psi_i$  :

$$\gamma(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(x) \Psi_n(y) \text{ où } \gamma_n(x) = \int_{\mathcal{O}} \gamma(x) \Psi_n(y) dy.$$

Comme la section est constante, les fonctions de base ne dépendent plus de la variable  $x$  et il est possible de dériver l'expression de  $\gamma$  terme à terme.  $\square$

**Lemme 8.3.2** *Dans le domaine cylindrique de section constante, la fonction  $\gamma$  d'expression*

$$\gamma(x, y) = \sum_n \Psi_n(y) \gamma_n(x) dy.$$

*dans la base orthonormée  $\Psi_n$  a pour dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = \sum_n \Psi_n(y) \gamma_n''(x) \text{ et } \Delta \gamma = - \sum_n \alpha_n^2 \Psi_n(y) \gamma_n(x).$$

**Preuve:** Cela revient à démontrer que les coefficients  $\gamma_n'(x)$  ont pour expression :

$$\gamma_n'(x) = \int_S \Psi_n(y) \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) dy.$$

$$\forall \phi \in D(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma_n'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \gamma_n(x) dx.$$

Soit :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma_n'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \int_S \Psi_n(y) \gamma(x, y) dy dx.$$

Par le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma'_n(x) dx = - \int_S \Psi_n(y) \int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \gamma(x, y) dx dy.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma'_n(x) dx &= \int_S \Psi_n(y) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) \phi(x) dx dy. \\ \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \gamma'_n(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_S \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) \phi(x) \Psi_n(y) dy dx. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\gamma'_n(x) = \int_S \Psi_n(y) \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) dy.$$

D'où le résultat. □

Il est également possible d'exprimer la condition de Neumann sur la frontière mobile dans cette base. En effet, le calcul a un sens car les solutions sont cherchées dans l'espace  $Y$ .

**Lemme 8.3.3**  $h \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  peut être décomposé dans la base de fonctions propres  $\Psi_n(y)$  :

$$h(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y).$$

**Preuve:** La famille des  $\Psi_n(y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  constitue une base orthonormée de  $L^2(\mathcal{O})$  et une base orthogonale de  $H_0^1(\mathcal{O})$ . On peut d'ailleurs donner la définition suivante à ces espaces :

$$L^2(\mathcal{O}) = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n / \sum_n |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

$$H_0^1(\mathcal{O}) = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n) |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

$H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$  est l'interpolé de  $H_0^1(\mathcal{O})$  et de  $L^2(\mathcal{O})$ ; il a pour définition :

$$H_{00}^{1/2}(\mathcal{O}) = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n)^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

On identifie maintenant  $H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  à l'espace :

$$\left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n / \sum_n (1 + \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Ceci nous permet d'écrire  $h$  sous la forme :  $h(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y)$ .  $\square$

### 8.3.3 Expressions modales des opérateurs $P$ , $Q$ et des opérateurs résidus

#### Expression modale de $P$

Pour  $s \in ]s; a[$ , l'application Dirichlet-Neumann (D-N) est donnée par :  $P(s)h = \frac{\partial \gamma}{\partial x} |_{\Gamma_s} = 0$ , où  $h \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  et  $\gamma \in Y_s$ , solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = 0 & \text{dans } \Omega_s. \\ \gamma |_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} |_{\Gamma_0} = 0, \quad \gamma |_{\Gamma_s} = h. \end{cases}$$

Tout d'abord, on décompose  $h$  et  $\gamma$  dans la base des  $\Psi_n$  :

$$\begin{cases} \gamma(x, y) = \sum_n \gamma_n(x) \Psi_n(y). \\ h(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y). \end{cases}$$

Comme  $-\Delta \gamma_{s,h} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \Delta_y \gamma$ , on a :  $\sum_n (\alpha_n^2 \gamma_n(x) - \gamma_n''(x)) \Psi_n(y) = 0$ .

Les conditions aux limites s'écrivent : :

$$\begin{cases} \sum_n \gamma_n'(0) \Psi_n(y) = 0. \\ \sum_n \gamma_n(x) \Psi_n(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y). \end{cases}$$

La condition de Dirichlet sur le bord latéral est vérifiée par les fonctions de base. On en déduit un système différentiel pour chaque coefficient  $\gamma_n$  :

$$\begin{cases} -\gamma_n''(x) + \alpha_n^2 \gamma_n(x) = 0 & \forall x \in ]s; a[. \\ \gamma_n(0) = 0. \\ \gamma_n(s) = h_n. \end{cases}$$

Explicitons la solution  $\gamma_n(x)$ , de l'équation  $\gamma_n''(x) - \alpha_n^2 \gamma_n(x) = 0$ , on obtient :

$$\gamma_n(x) = A \exp(-\alpha_n x) + B \exp(\alpha_n x).$$

En utilisant les deux conditions, on a :

$$A = B = \frac{h_n}{2 \cosh(\alpha_n s)}.$$

Ainsi,

$$\gamma_n(x) = h_n \frac{\cosh(\alpha_n x)}{\cosh(\alpha_n s)}.$$

Pour  $x = s$ , on a :  $\gamma_n(s) = h_n$ . Comme :  $P(s)h = \frac{\partial \gamma}{\partial x} |_{\Gamma_0}$ , on a :

$$P(s)h = \sum_n h_n \alpha_n \tanh(\alpha_n s) \Psi_n(y).$$

Soit  $P_n$  le coefficient correspondant à la fonction propre  $\Psi_n$  :

$$P_n(s) = \alpha_n \tanh(\alpha_n s).$$

### Expression modale de $Q$

Pour  $s \in ]s; a[$ , l'application Neumann-Dirichlet (N-D) est donnée par :  $Q(s)h = \tilde{\gamma} |_{\Gamma_a} = 0$ , où  $h \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})'$  et  $\tilde{\gamma} \in \bar{Y}_s$ , solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\gamma} = 0 & \text{dans } \Omega_s. \\ \tilde{\gamma} |_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x} |_{\Gamma_s} = h, \quad \tilde{\gamma} |_{\Gamma_a} = 0. \end{cases}$$

Tout d'abord, on décompose  $h$  et  $\tilde{\gamma}$  dans la base des  $\Psi_n$  :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}(x, y) = \sum_n \tilde{\gamma}_n(x) \Psi_n(y). \\ h(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y). \end{cases}$$

L'équation de Poisson pour  $\tilde{\gamma}$  s'écrit alors :  $\sum_n (\alpha_n^2 \tilde{\gamma}_n(x) - \tilde{\gamma}_n''(x)) \Psi_n(y) = 0$ .

Les conditions sur les bords ont pour expression :

$$\begin{cases} \sum_n \tilde{\gamma}_n(a) \Psi_n(y) = 0. \\ \sum_n \tilde{\gamma}'_n(s) \Psi_n(y) = \sum_n h_n \Psi_n(y). \end{cases}$$

La condition de Dirichlet sur le bord latéral est vérifiée par les fonctions de base. On en déduit un système différentiel pour chaque coefficient  $\tilde{\gamma}_n$  :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_n''(x) - \alpha_n^2 \tilde{\gamma}_n(x) = 0 & \forall x \in ]s; a[. \\ \tilde{\gamma}_n(a) = 0. \\ \tilde{\gamma}'_n(s) = h_n. \end{cases}$$

La solution du système précédent est donnée par :

$$\tilde{\gamma}_n(x) = \frac{h_n \sinh [\alpha_n(a-x)]}{\alpha_n \cosh [\alpha_n(a-s)]}.$$

Comme la fonction  $x \mapsto \cosh x$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , cette définition a toujours un sens. Au total, on trouve :

$$\text{d'où, pour } x = s, \text{ nous avons : } \tilde{\gamma}_n(s) = \frac{h_n}{\alpha_n} \tanh [\alpha_n(a-s)].$$

On en déduit la décomposition modale de  $Q$ , lorsqu'il est bien défini :

$$Q(s)h = \sum_n \frac{h_n}{\alpha_n} \tanh [\alpha_n(a-s)] \Psi_n(y).$$

et  $Q_n$  est donné par :

$$Q_n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \tanh [\alpha_n(a-s)].$$

### 8.3.4 Expression modale des résidus $\omega_1$ et $\omega_2$

On s'intéresse à la décomposition modale des parties affine  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La factorisation permet d'envisager plusieurs méthodes de calcul, par souci de simplicité on se limitera à les équations différentielles sur  $\omega_1$  et  $\omega_2$  issue du deux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + P\omega_1 = 0; \\ \omega_1(0) = -u_0. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial x} - Q \Delta_y \omega = 0; \\ \omega_1(a) = u_1, \end{cases}$$

Comme  $\omega_1(x) \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$  est la trace sur  $\Gamma_s$  d'une fonction de  $\bar{Y}_x$ , son expression et celle de sa dérivée dans la base des  $\Psi_n$  sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1(x, y) = \sum_n \omega_1^n(x) \Psi_n(y); \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x}(x, y) = \sum_n (\omega_1^n)'(x) \Psi_n(y). \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2(x, y) = \sum_n \omega_2^n(x) \Psi_n(y); \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x}(x, y) = \sum_n (\omega_2^n)'(x) \Psi_n(y). \end{array} \right.$$

De la même manière, on peut écrire les conditions initiales  $u_1, u_0 \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{O})$  dans la base de fonctions propres :  $u_1(y) = \sum_n u_1^n \Psi_n(y)$  et  $u_2(y) = \sum_n u_2^n \Psi_n(y)$ .

Les équations différentielles sur  $\omega_1$  et  $\omega_2$  prend donc la forme d'une équation scalaire sur chaque coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\omega_1^n)' + P_n \omega_1^n = 0 ; \\ \omega_1^n(0) = -u_0^n. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\omega_2^n)' - Q_n \Delta_y \omega_2^n = 0 ; \\ \omega_2^n(a) = u_1^n. \end{array} \right.$$

Comme pour  $P$  et  $Q$  la forme du coefficient  $\omega_1^n$  et  $\omega_2^n$  dépend de la valeur de  $\alpha_n$ . Dans ce cas, on a :

$$P_n(x) = \alpha_n \tanh(\alpha_n x) \quad \text{et} \quad Q_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \tanh[\alpha_n(a-x)].$$

Les coefficients  $\omega_1^n$  et  $\omega_2^n$  vérifient donc les équations différentielles suivantes :

$$(\omega_1^n)' + \alpha_n \tanh(\alpha_n x) \omega_1^n = 0 = 0 \quad \text{et} \quad (\omega_2^n)' - \frac{1}{\alpha_n} \tanh[\alpha_n(a-x)] \Delta_y \omega_2^n = 0.$$

On obtient alors :

$$\omega_1^n(x) = \frac{C_1}{\cosh(\alpha_n x)} \quad \text{et} \quad \omega_2^n(x) = \frac{C_2}{\cosh[\alpha_n(a-x)]},$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes.

Comme  $\omega_1^n(0) = -u_0^n$  et  $\omega_2^n(a) = u_1^n$ , on en déduit que :  $C_1 = -u_0^n$  et  $C_2 = u_1^n$ .  $\omega_1^n$  et  $\omega_2^n$  sont donc pour expressions (resp) :

$$\omega_1^n(x) = \frac{-u_0^n}{\cosh(\alpha_n x)} \quad \text{et} \quad \omega_2^n(x) = \frac{u_1^n}{\cosh[\alpha_n(a-x)]}.$$



# Bibliographie

- [1] Amel Ben Abda, Jacques Henry, and Fadhel Jday. Boundary data completion : the method of boundary value problem factorization. *Inverse Problems*, 27(5) :055014, 2011.
- [2] A Chakib and A Nachaoui. Convergence analysis for finite element approximation to an inverse Cauchy problem. *Inverse Problems*, 22(4) : 1191, 2006.
- [3] Addouche.M, Bouarroudj.N, Henry.J, Jday.F, and Zemzemi.N. Boundary data completion : Analysis of the ECGI inverse problem solution with respect to the measurement boundary size and the distribution of noise, *Math. Model. Nat. Phenom.* Volume 14, Number 2, 2019.
- [4] Alireza Ghodrati, Dana H Brooks, and Robert S MacLeod. Methods of solving reduced lead systems for inverse electrocardiography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 54(2) : 339-343, 2007.
- [5] A.N. Tikhonov and V. Arsenin. *Solutions of ill-posed problems.* WH Winston, Washington, DC, 1977.
- [6] Azaïez.M, Barthlemy.X, Ben Abda.A & Ben Abdallah.J - Steklov-poincaré operator for the Cauchy problem *Rapport interne RR 05-03 LAMSIN-Tunis* (2005).
- [7] Azaïez.M, Ben Abda.A, Ben Abdallah.J - Revisiting the Dirichlet-to-Neumann solver for data completion and application to some inverse problems. *Int. J. Appl. Math. Mech.* 1 pp 106-26 (2005).
- [8] Baumeister.L, Leitao.A - On iterative methods for solving ill-posed problems

- modeled by partial differential equation. *Inverse Ill-posed Problems* 9 pp13-30 (2002).
- [9] Ben Belgacem.F, El Fekih.H - On Cauchy's problem : I. A variational Steklov-Poincaré theory. *Inverse Problems*,21, 6, pp 1915-1936 (2005).
- [10] Bourgeois.L - Conditional stability for ill-posed elliptic Cauchy problems : the case of  $C^{1,1}$  domains (part I). : Rapport INRIA n 6585, (2008).
- [11] Bellman.R - *Dynamic Programming*. Princeton University Press (1957).
- [12] Bellman.R - On some applications of dynamic programming to matrix theory. *Illinois J. Math.*1, 297-301 (1957).
- [13] Ben Belgacem.F, El Fekih.H - On Cauchy's problem : I. A variational Steklov-Poincaré theory. *Inverse Problems*,21, 6, pp 1915-1936 (2005).
- [14] Ben Belgacem.F - Why is the Cauchy problem severely ill-posed ? *Inverse Problems*, 23(2),823-836, (2007).
- [15] Ben Belgacem.F. Why is the Cauchy problem severely ill-posed ? *Inverse Problems*, 23(2), 823-836, (2007).
- [16] Bourgeois.L, Dardé.J - A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem. : *Inverse Problems and Imaging*.
- [17] Baumeister L and Leitao A On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equation *Inverse Ill-posed Problems* 9 pp13-30 (2002).
- [18] Cimetière. A, Delvare. F, Jaoua. M & Pons F - Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. : *Inverse Problems* 17 553-70 (2001).
- [19] Fadhel Jday. Complétion de données frontières : la méthode de plongement invariant. PhD thesis, PHD thesis, 2012.
- [20] Hadamard.J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bull. Univ. of Princeton*, pages 49-52, 1902.
- [21] Henry.J, Ramos.A - La méthode de factorisation des problèmes aux limites : 978-1784051419 2016.

- [22] Henry.J, Louro.B, Soares.M.C : A factorization method for elliptic problems in a circular domain : C. R, Math. Acad. Sci. Paris, 339, no. 3, 175-180 (2004).
- [23] Henry, J., Factorization for the inverse EEG-MEG problem, Rapport de Recherche INRIA, 2002.
- [24] Jacques Henry, Bouarroudj Nadra, On direct study of an operator Riccati equation appearing in boundary value problems factorization. Applied mathematical sciences vol.2, 2008.
- [25] Julien Bouyssier, Nejib Zemzemi, and Jacques Henry. Inverse problem in electrocardiography via factorization method of boundary problems : how reconstruct epicardial potential maps from measurements of the torso ? In International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI), 2015. IEEE, 2015.
- [26] Jacques Hadamard. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Courier Corporation, 2014.
- [27] John E Burnes, David C Kaelber, Bruno Taccardi, Robert L Lux, Philip R Ershler, and Yoram Rudy. A lead-compatible method for interpolating biopotentials. *Annals of biomedical engineering*, 26(1) : 37-47, 1998.
- [28] Jacques Henry and AM Ramos. Factorization of second-order elliptic boundary value problems by dynamic programming. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 59(5) : 629-647, 2004.
- [29] Jacques Henry and Angel M Ramos. Study of the initial value problems appearing in a method of factorization of second-order elliptic boundary value problems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 68(10) : 2984-3008, 2008.
- [30] Jacques Louis Lions and Enrico Magenes. *Problemes aux limites non homogenes et applications*. Dunod, 1968.
- [31] Isabelle Champagne - Méthode de Factorisation des équations aux Dérivées Partielles : Ph.D. Thesis, Ecole Polytechnique, (2004).
- [32] Laura Bear, Mark Potse, Josselin Duchateau, Nejib Zemzemi, Yves Coudiere, and R emi Dubois. Accuracy of lead removal vs linear interpolation in

- non-invasive electrocardiographic imaging (ecgi). In Computing in Cardiology Conference (CinC), 2015. IEEE, 2014.
- [33] Lions.J-L - contrôle Optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées Partielles : Voll. Dunod (1968).
- [34] Lattes.R, Lions.J-L : méthode de quasi-réversibilité et applications : Travaux et Recherches Mathématiques, N. 15. Dunod, Paris, (1967).
- [35] Lions.J-L, Magenes - Problèmes aux limites Non homogènes et Applications : Voll. Dunod (1968).
- [36] Mejdi Azaïez, Ben Belgacem Faker , and Henda El Fekih. On cauchy's problem : Ii. completion, regularization and approximation. Inverse problems, 22(4) :1307, 2006.
- [37] Nejla Hariga-Tlatli, TN Baranger, and Jocelyne Erhel. Mis t functional for recovering data in 2d electrocardiography problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, 34(5) : 492-500, 2010.
- [38] Nejib Zemzemi. A steklov-poincaré variational formulation of the inverse problem in cardiac electrophysiology. In CinC-Computing in Cardiology Conference, page 193. IEEE, 2013.
- [39] Nejib Zemzemi, Hamed Bourenane, and Hubert Cochet. An iterative method for solving the inverse problem in electrocardiography imaging : From body surface to heart potential. In Computing in Cardiology Conference (CinC), 2014, pages 717-720. IEEE, 2014.
- [40] Roger C Barr, Maynard Ramsey III, and Madison S Spach. Relating epicardial to body surface potential distributions by means of transfer coefficients based on geometry measurements. Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, pages 1-11, 1977.
- [41] Richard Ernest Bellman and Howard A Osborn. Dynamic programming and the variation of Green's functions. RAND Corporation, 1957.

- [42] Thom F Oostendorp, Adriaan van Oosterom, and Geertjan Huiskamp. Interpolation on a triangulated 3D surface. *Journal of Computational Physics*, 80(2) : 331-343, 1989.
- [43] Stephane Andrieux, Ben Abda Amel, and Thouraya Nouri Baranger. Data completion via an energy error functional. *Comptes Rendus M ecanique*, 333(2) :171-177, 2005.
- [44] Soares.M.C - Factorization by invariant Embedding of Elliptic Problemes : Circular and Star-shaped Domains : PhD Thesis, Faculdade de Ciências Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa (2006).
- [45] Vladimir Arkad'evich Kozlov, Vladimir Gilelevich Maz'ya, and AV Fomin. An iterative method for solving the cauchy problem for elliptic equations. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 31(1) : 64-74, 1991.
- [46] Vladimir Alekseevich Morozov and Michael Stessin. Regularization methods for ill-posed problems. CRC press Boca Raton, FL :, 1993.
- [47] Yong Wang and Yoram Rudy. Application of the method of fundamental solutions to potential-based inverse electrocardiography. *Annals of biomedical engineering*, 34(8) : 1272-1288, 2006.