

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد - تلمسان

Université Abou bekr Belkaïd – TLEMEN

Faculté de Technologie



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTORAT 3^{ème} Cycle**

En : Génie mécanique

Spécialité : Réhabilitation et fiabilité des structures et équipements mécaniques

Par : FELLAH AHMED

Sujet

Influence des fissures sur le comportement vibratoire des rotors

Soutenue publiquement, le **06 / 07 / 2019** , devant le jury composé de :

BENACHOUR Mustapha	Professeur	Univ. Tlemcen	Président
HADJOUI Abdelhamid	Professeur	Univ. Tlemcen	Directeur de thèse
HADJOUI Féthi	MCB	Univ. Tlemcen	Co- Directeur de thèse
BOUKHALFA Abdelkrim	Professeur	Univ. Tlemcen	Examineur 1
BENGUEDIAB Mohamed	Professeur	Univ. SBA	Examineur 2

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail

*A mes chers parents pour leurs encouragements, leurs sacrifices et leurs
patiences tout au long de mes études.*

A mon cher frère Khalid et mes chères sœurs.

A ma grand-mère et mes grands-pères.

A mes chers oncles.

A mes chères tantes.

Aux familles: FELLAH et BEN AIDA.

A tous mes amis.

A tous ceux que j'ai connus de près ou de loin.

FELLAH Ahmed

REMERCIEMENTS

*Louange à Allah de m'avoir guidé vers le bon chemin de la lumière
et du savoir.*

*Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse, le professeur
Abdelhamid HADJOU, pour avoir dirigé ce travail et pour ses
enseignements très enrichissants.*

*J'exprime ma reconnaissance à tous les membres de jury d'avoir
accepté de lire ce travail et d'apporter les critiques nécessaires à la mise
en forme finale de cet ouvrage.*

*Mes remerciements vont aussi à tous mes amis et mes collègues du
laboratoire IS2M.*

*Je remercie tous ceux qui ont aidés de près ou de loin, à la
réalisation de ce travail.*

FELLAH Ahmed

SOMMAIRE

RÉSUMÉ.....	I
ABSTRACT	II
الملخص	III
LISTE DES SYMBOLES	IV
LISTES DES FIGURES	VI
LISTE DES TABLEAUX	X
INTRODUCTION GENERALE	1

CHAPITRE I

Etude bibliographique sur la dynamique des rotors fissurés

1	Introduction.....	5
2	Paramètres influant sur le comportement dynamique des rotors	5
3	Cause des fissures dans les arbres des rotors	6
4	Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations	7
5	Types de fissures transversales selon le comportement en rotation de l'arbre	8
6	Techniques de la détection des fissures d'arbre	10
7	Méthodes d'identification des fissures	11
7.1	Méthodes basées sur les vibrations	11
7.2	L'analyse Modale	12
7.3	Méthodes non-traditionnelles	12
8	Etat de l'art sur les rotors fissurés.....	12

CHAPITRE II

Mise en équation

1	Introduction.....	19
2	Caractéristiques des éléments du rotor	19
3	Energies des différents composants du rotor	20
3.1	Disque.....	20
3.2	Arbre.....	23
3.3	Paliers.....	30
3.4	Balourd.....	31

CHAPITRE III

Modélisation par la version h-p de la MEF

1	Introduction.....	34
2	Définition du problème	35
3	Fonctions de forme utilisées	35
4	Formulation matricielle	37
4.1	Matrice élémentaire de l'arbre	38
4.2	Matrice élémentaire du disque	41
4.3	Matrice de raideur et d'amortissement des paliers	43
4.4	Vecteur des forces de balourd	43
5	Equation globale du mouvement	43

CHAPITRE IV

Résultats et interprétation

1	Introduction.....	46
2	Paramètres du modèle de rotor étudié.....	46
3	Etude de convergence	48

3.1	Convergence de la version h de MEF	48
3.2	Convergence de la version h-p de MEF	49
4	Etude d'un rotor avec une fissure transversale ouverte	51
4.1	Analyse fréquentielle.....	54
4.1.1	Etude à l'état stationnaire ($\Omega=0$).....	55
4.1.2	Etude à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$)	60
4.2	Analyse de la réponse dynamique	64
5	Etude d'un rotor avec une fissure transversale respiratoire	72
5.1	Analyse fréquentielle.....	77
5.2	Analyse de la réponse dynamique	79
CONCLUSION GENERALE		83
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....		85
ANNEXE (A).....		89
ANNEXE (B).....		90

RÉSUMÉ

La présence des fissures dans le rotor influe sur le comportement vibratoire des machines tournantes (fréquences propres, amplitudes, modes propres). L'étude de ce dernier permet d'identifier la présence, l'emplacement et la profondeur de la fissure. L'objectif de ce travail, est d'étudier l'influence d'une fissure transversale sur les paramètres modaux du rotor, en utilisant la version h-p de la méthode des éléments finis. L'élément poutre Euler-Bernoulli est utilisé pour la modélisation du rotor, les fonctions de forme utilisées sont les fonctions d'Hermite cubiques modifiées pour la version h couplées aux polynômes de Legendre spéciaux de Rodrigues pour la version p. Les matrices globales de l'équation du mouvement du rotor fissuré sont déterminées par l'application de l'équation de Lagrange en tenant compte de la variation locale de la rigidité de l'arbre due à la fissure, la rigidité de l'élément fissuré de l'arbre est déterminée en utilisant la méthode de rigidité variable.

Un programme est développé en MATLAB pour calculer les fréquences propres et tracer la réponse dynamique ainsi que les amplitudes et les orbites d'un rotor fissuré et non fissuré. Après avoir montré la rapidité de la convergence de la version h-p de la méthode des éléments finis (MEF) par rapport à la version h, une étude détaillée de l'influence d'une fissure transversale ouverte et respiratoire sur les paramètres modaux du rotor est présentée. Les résultats trouvés montrent l'efficacité de la version h-p de la MEF et la méthode de rigidité variable pour l'étude des rotors fissurés.

Mots-clés: rotor, version h-p de MEF, fissure transversale ouverte, fissure transversale respiratoire, rigidité variable.

ABSTRACT

The presence of cracks affects the dynamic behavior of rotating machines (eigen-frequencies, amplitudes, eigen-modes); the study of this effect makes it possible to identify the presence, the location and depth of the crack. The aim of this work is to study the effect of a transverse crack on the modal parameters of a rotor using the h-p version of the finite method, the one-dimensional finite element Euler-Bernoulli beam is used for modeling the rotor, the shape functions used are the Hermite cubic functions modified for the h version coupled to the special Legendre polynomials of Rodrigues for the p version. The global matrices of the equation of motion of the cracked rotor are determined by the application of the Lagrange equation taking into account the local variation on the shaft's stiffness due to the crack, the stiffness of the cracked element of the shaft are determined using the time-varying stiffness method.

A program is developed in MATLAB to calculate the eigen frequencies and to plot the dynamic response as well as the amplitudes and the orbits of a cracked and uncracked rotor. After showing the rapidity of the convergence of the h-p version of finite element method (FEM) compared to the h version, a detailed study on the influence of an open and breathing transverse crack on the modal parameters of the rotor is presented, the results founded show the efficiency of the h-p version of the MEF and the time-varying stiffness method in the study of cracked rotors.

Keywords: *Rotor, h-p version of FEM, open crack, breathing crack, time-varying stiffness.*

المخلص

وجود التشققات يسبب تأثيرات على الخصائص الديناميكية للألات الدوارة (الترددات ، المدارات ، اشكال التشوهات) ، دراسة هذه الاخيرة تمكن من تحديد وجود تشققات و كذلك معرفة موقعها وعمقها. الهدف من هذا العمل هو دراسة تأثير التشققات العرضية على الخصائص الديناميكية للأعمدة الدوارة باستخدام نسخة hp من طريقة العناصر المنتهية ، حيث يتم استخدام العنصر أحادي البعد poutre Euler-Bernoulli لنمذجة العمود الدوار ، معادلات التشوه المستخدمة هي دوال Hermite cubique معدلة للنسخة h مقرونة مع كثير الحدود الخاص بRodrigues للنسخة p. يتم تحديد المصفوفات الاجمالية لمعادلة الحركة من خلال تطبيق معادلة Lagrange مع الأخذ بعين الاعتبار التغير في صلابة العنصر المشقوق من العمود ، يتم تحديد صلابة العنصر المشقوق في العمود باستخدام طريقة الصلابة المتغيرة بدلالة الزمن.

تم تطوير برنامج في MATLAB لحساب الترددات الخاصة ولرسم تخطيط الحركة بالإضافة إلى مدى الانتقالات العرضية بالنسبة للأعمدة الدوارة المتشقة وغير المتشقة. بعد عرض سرعة تقارب نسخة hp من طريقة العناصر المنتهية مقارنة مع النسخة h ، تم تقديم دراسة تفصيلية عن تأثير التشققات العرضية على الخصائص الديناميكية للأعمدة الدوارة ، تبين النتائج المتحصل عليها كفاءة النسخة hp من طريقة العناصر المنتهية وطريقة الصلابة المتغيرة بدلالة الزمن في دراسة الأعمدة الدوارة المتشقة.

الكلمات المفتاحية: عمود دوار ، نسخة hp من طريقة العناصر المنتهية ، الشق المفتوح ، الشق المنتفس ، الصلابة المتغيرة بدلالة الزمن.

LISTE DES SYMBOLES

Ωt	Angle de rotation
T	Energie cinétique
U	Energie potentielle
F_i	Forces extérieures
q_i	Coordonnées généralisés
$R_0(X, Y, Z)$	Repère fixe (repère galiléen)
$R(x, y, z)$	Repère tournant lié au disque
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Angle de rotation suivant les axes x, y, z
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Les composants du vecteur de rotation instantanée suivant le repère tournant
T_d^{rot}	Energie cinétique de rotation du disque
I_{dx}, I_{dy}, I_{dz}	Les moments d'inertie du disque par rapport aux axes de repère tournant
I_d	Tenseur d'inertie de disque
e	Epaisseur de disque
R	Rayon intérieur de disque
r	Rayon extérieur de disque
u, w	Déplacements du centre de l'arbre suivant les axes OX et OZ du repère fixe
T_d^{trans}	Energie cinétique de translation de disque
m_d	Masse de disque
T_d	Energie cinétique de disque
ρ_d	Densité volumique de disque
S	Section droite de l'arbre
ρ_a	Masse volumique de l'arbre
L_e	Longueur d'un élément de l'arbre
T_a	Energie cinétique de l'arbre
u^*, w^*	Déplacements du centre géométrique de l'arbre suivant les axes x et z du repère tournant
$\{\varepsilon\}$	Champ de déformation
$\{\sigma\}$	Champ de contrainte
σ_{yy}	Contrainte normale
τ_{yz}, τ_{xy}	Contraintes dues au cisaillement transversal.
G_{yz}, G_{yx}	Modules de cisaillement transversal
U_a	Energie de déformation de l'arbre
I_X, I_Z, I_{XZ}	Moments d'inertie de la section transversale de l'arbre par rapport au repère fixe

I_x, I_z, I_{xz}	Moments d'inertie de la section transversale de l'arbre par rapport au repère tournant
A_c	La surface de la partie fissurée de la section transversale
A_l	La surface de la partie non-fissurée de la section transversale
h	Profondeur de la fissure
μ	Rapport de profondeur de la fissure
δW_p	Travail virtuel des forces extérieures des paliers
F_u, F_w	Les forces généralisées des paliers.
m_b	Masse de balourd
β	Angle de phase du balourd par rapport à l'axe Z
T_b	Energie cinétique du balourd
ζ	Coordonnée adimensionnelle
p	Nombre de degré de liberté d'un élément
q	Vecteur de coordonnées généralisé
N	Vecteur des fonctions de formes
N', N''	Première et deuxième dérivée de vecteur des fonctions de formes par rapport à ζ .
N^{disque}	Fonction de formes du disque ($\zeta=1$ ou $\zeta=-1$)
$[M_e^{arbre}]$	Matrice masse élémentaire de l'arbre
$[G_e^{arbre}]$	Matrice gyroscopique élémentaire de l'arbre
$[K_e^{arbre}]$	Matrice de rigidité élémentaire de l'arbre
$[M_e^{disque}]$	Matrice masse élémentaire du disque
$[G_e^{disque}]$	Matrice gyroscopique élémentaire du disque
$[M_g]$	Matrice masse globale du rotor
$[G_g]$	Matrice gyroscopique globale du rotor
$[K_g]$	Matrice de rigidité globale du rotor
$[C_p], [K_p]$	Les matrices d'amortissement et de raideur des paliers.
q	Vecteur des coordonnées généralisées.
F_b	Vecteur des forces de balourd.
n	Nombre des éléments

LISTES DES FIGURES

<i>Figure.1.1 : Fissure transversale</i>	7
<i>Figure.1.2 : Fissure longitudinale</i>	7
<i>Figure.1.3 : Fissure inclinée</i>	8
<i>Figure.1.4 : Section transversale d'une fissure ouverte.</i>	9
<i>Figure.1.5 : Section transversale d'une fissure respiratoire.</i>	10
<i>Figure.1.6 : Section transversale d'une fissure switching.</i>	10
<i>Figure.2.1 : Modèle de rotor Jeffcott.</i>	20
<i>Figure.2.2: Repère fixe liée au support et repère tournant liée au disque.</i>	21
<i>Figure.2.3 : Les angles de reliant le repère fixe avec le repère tournant.</i>	21
<i>Figure.2.4 : Déplacement de centre géométrique de l'arbre.</i>	25
<i>Figure. 2.5: Repère fixe et tournant d'un élément fissuré.</i>	28
<i>Figure. 2.6: Section transversale d'un élément fissuré.</i>	29
<i>Figure 2.7 : Raideurs et amortisseurs des paliers.</i>	30
<i>Figure 2. 8 : Position du balourd par rapport au repère fixe.</i>	31
<i>Figure 3.1 : Élément poutre à p degrés de liberté.</i>	35
<i>Figure 3.2. Fonctions de forme standard d'Hermite cubiques.</i>	36
<i>Figure 3.3 : Les 6 premières fonctions de formes hiérarchiques.</i>	37
<i>Figure 3.4. Matrice élémentaire de taille $p \times p$.</i>	38
<i>Figure 3.5. Arbre discrétisé en n éléments.</i>	38
<i>Figure 3.6. Position de disque par rapport à l'élément de l'arbre.</i>	41
<i>Figure 4.1. Modèle du rotor étudié.</i>	47
<i>Figure 4.2. Modèle du rotor étudié (ANSYS Workbench).</i>	48
<i>Figure 4.3 : Courbe de convergence du premier mode (version h).</i>	49
<i>Figure 4.4 : Courbe de convergence du deuxième mode (version h).</i>	49

Figure 4.5 : Courbe de convergence du troisième mode (version h).	49
Figure 4.6 : Courbe de convergence du premier mode (version h-p).	50
Figure 4.7 : Courbe de convergence du deuxième mode (version h-p).	50
Figure 4.8 : Courbe de convergence du troisième mode (version h-p).	50
Figure 4.9: Modèle éléments finis du rotor étudié.	51
Figure 4.10: Variation de I_x et I_z par rapport à l'angle de rotation (Ωt).	52
Figure 4.11 : Variation de I_{xz} par rapport à l'angle de rotation (Ωt).	52
Figure 4.12 : Variation du moment d'inertie I_x par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).	53
Figure 4.13 : Variation du moment d'inertie I_z par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).	53
Figure 4.14 : Variation du moment d'inertie I_{xz} par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).	53
Figure 4.15 : Courbe de variation des fréquences propres du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.	55
Figure 4.16 : Courbe de variation des fréquences propres du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.	56
Figure 4.17 : Courbe de variation des fréquences propres du troisième par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.	56
Figure 4.18 : Courbe de variation des fréquences propres du premier par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	57
Figure 4.19 : Courbe de variation des fréquences propres du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	57
Figure 4.20 : Courbe de variation des fréquences propres du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	57
Figure 4.21 : Courbe de variation des fréquences propres du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.	58
Figure 4.22: Courbe de variation des fréquences propres du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.	58
Figure 4.23 : Courbe de variation des fréquences propres du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément	59

Figure 4.24 : Courbe de variation des fréquences critiques du premier mode rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau de premier élément.	60
Figure 4.25 : Courbe de variation des fréquences critiques du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.	61
Figure 4.26 : Courbe de variation des fréquences critiques du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.	61
Figure 4.27 : Courbe de variation des fréquences critiques du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	62
Figure 4.28 : Courbe de variation des fréquences critiques du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	62
Figure 4.29 : Courbe de variation des fréquences critiques du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	62
Figure 4.30 : Courbe de variation des fréquences critiques du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.	63
Figure 4.31 : Courbe de variation des fréquences critiques du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.	63
Figure 4.32 : Courbe de variation des fréquences critiques du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.	64
Figure 4.33 : Réponse dynamique et orbite du centre du rotor au voisinage de la première vitesse critique.	65
Figure 4.34 : Réponse dynamique, orbite et amplitude du centre d'un rotor sain au voisinage de la première vitesse sub-critique.	66
Figure 4.35 : Réponse dynamique, orbite et amplitude du centre d'un rotor fissuré ($\mu=0.8$) au voisinage de la première vitesse sub-critique.	67
Figure 4.36 : Réponse dynamique et amplitude d'un rotor fissuré ($\mu=0.7$) au voisinage de la première vitesse sub-critique dans le cas où la fissure est au niveau de premier élément.	68
Figure 4.37 : Réponse dynamique et amplitude d'un rotor fissuré ($\mu=0.7$) au voisinage de la première vitesse sub-critique dans le cas où la fissure est au niveau de deuxième élément.	69
Figure 4.38 : Réponse dynamique et amplitude d'un rotor fissuré ($\mu=0.7$) au voisinage de la première vitesse sub-critique dans le cas où la fissure est au niveau de troisième élément.	70
Figure 4.39 : Orbite d'un rotor fissuré au niveau de nœud 4 au voisinage de la première vitesse sub-critique.	71

Figure 4.40 : Orbites d'un rotor fissuré au voisinage de la première (1500 tr/min) deuxième (1050 tr/min) et troisième (750 tr/min) vitesse sub-critique.	72
Figure 4.41 : Variation de la rigidité d'un arbre avec une fissure transversale respiratoire par rapport de l'angle de rotation.	73
Figure 4.42 : Variation de I_X et I_Z par rapport à l'angle de rotation (Ωt).	74
Figure 4.43 : Variation de I_{XZ} par rapport à l'angle de rotation (Ωt).	75
Figure 4.44 : Variation du moment d'inertie I_X par rapport par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).	75
Figure 4.45 : Variation du moment d'inertie I_Z par rapport par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).	76
Figure 4.46 : Variation du moment d'inertie I_{XZ} par rapport par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).	76
Figure 4.47 : Variation de la première fréquence critique du mode indirect par rapport à l'angle de rotation pour différente valeur de profondeur (μ).	77
Figure 4.48 : Variation de la première fréquence critique du mode direct par rapport à l'angle de rotation pour différente valeur de profondeur (μ).	78
Figure 4.49 : Variation de la première fréquence critique du mode indirect par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes positions de la fissure.	78
Figure 4.50 : Variation de la première fréquence critique du mode direct par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes positions de la fissure.	79
Figure 4.51 : Réponse dynamique, orbite et amplitude du centre d'un rotor avec une fissure respiratoire au voisinage de la première vitesse sub-critique.	80
Figures 4.52 : Variation des amplitudes au voisinage de la première vitesse sub-critique pour différentes position de la fissure.	81
Figures 4.53 : Variation des amplitudes au voisinage de la première vitesse sub-critique pour différentes valeurs du rapport de profondeur de la fissure (μ).	81
Figure 4.54 : Evolution des orbites en fonction des vitesses sub-critiques	82

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 : paramètres de modèle de rotor étudié.	47
Tableau 4.2 : Fréquences propres des trois premiers modes par rapport au nombre des éléments.	48
Tableau 4.3 : Fréquences propres des trois premiers modes par rapport au nombre de degré de polynômes.	50
Tableau 4.4 : Comparaison entre les résultats de la version h-p de la MEF par des résultats numérique et de l'expérimentale.	54
Tableau 4.5 : variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.	55
Tableau 4.6 : variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	56
Tableau 4.7 : variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.	58
Tableau 4.8 : Variation des fréquences propres par rapport à la position de fissure dans le cas où le rapport de profondeur de la fissure $\mu=0.5$.	59
Tableau 4.9 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.	60
Tableau 4.10 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.	61
Tableau 4.11 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.	63
Tableau 4.12 : Variation des vitesses critiques par rapport à la position de fissure dans le cas où le rapport de profondeur de la fissure $\mu=0.5$	64

INTRODUCTION GENERALE

Les machines tournantes sont considérablement utilisées dans l'industrie moderne par le biais de diverses applications allant des centrales électriques aux équipements aérospatiaux et aux systèmes de propulsion marine. Les turbines à gaz et à vapeur, les compresseurs, les ventilateurs et les hélices de navires sont des exemples des machines tournantes. La nécessité constante de développer des machines tournantes a conduit à concevoir des machines avec une partie plus flexible en particulier, les arbres et par conséquent, l'analyse dynamique des rotors est devenue plus importante que jamais.

La présence de fissure dans les arbres des rotors est l'un des défauts les plus dangereux dans les machines tournantes. Ils sont causés par les efforts de fatigue cycliques (inévitables dans les systèmes tournants) et par des défauts mécaniques ou des concentrations de contraintes élevées dues à des défauts dans le processus de fabrication. Si une fissure se propage de manière continue sans être détectée, une défaillance soudaine peut se produire et aboutir à une défaillance catastrophique avec des coûts énormes en temps d'immobilisation.

Des fissures de différentes configurations et de différentes sévérités peuvent être développées sur l'arbre lors du fonctionnement de machines tournantes. Ces fissures sont classées selon leur orientation par rapport à l'axe de l'arbre et sont appelées fissures transversales, fissures longitudinales et fissures obliques. Parmi ces types de fissures, la fissure transversale reste le type de fissure le plus dangereux et le plus important.

Plusieurs techniques de surveillance non destructive, telles que le test de vibration, la thermographie, l'inspection visuelle, la surveillance par ultrasons, sont utilisées pour diagnostiquer et surveiller le comportement dynamique des machines tournantes. Parmi ces techniques de maintenance prédictive, l'analyse des vibrations est la technique la plus utilisée.

Les rotors fissurés font l'objet d'études et de recherches depuis les années 1960. Des recherches importantes ont été réalisées au cours de ces années. Depuis les années 1980, des chercheurs de partout dans le monde ont rédigé des articles scientifiques sur différents sujets

liés aux rotors fissurés. Actuellement, le nombre total des articles sur les rotors fissurés dépasse le millier et continue d'augmenter.

Les travaux théoriques et expérimentaux sur les rotors fissurés ont montré que la présence d'une fissure dans un rotor induit une modification de la rigidité de l'arbre, ce qui entraîne des modifications détectables dans la réponse dynamique de rotor. Parmi les techniques les plus utilisées pour déterminer la rigidité d'un arbre fissuré en utilisant la MEF, nous avons la méthode de flexibilité locale et la méthode de rigidité variable par rapport au temps (*time-varying stiffness*). La méthode de flexibilité locale est la méthode la plus utilisée, cette méthode est basée sur le calcul du facteur d'intensité de contrainte au niveau de la zone fissurée. La méthode de rigidité variable est traduite par la variation des moments d'inertie de l'élément fissuré en fonction de l'angle de rotation, ce qui conduit à une rigidité variable par rapport au temps.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet d'une fissure transversale sur le comportement vibratoire d'un rotor. La version h-p de la MEF est utilisée dans ce travail pour déterminer l'équation globale de mouvement d'un rotor fissuré, la matrice de rigidité de l'élément fissuré est déterminée par la méthode de rigidité variable. L'étude de la variation des fréquences propres et des amplitudes ainsi que le traçage des orbites permet d'identifier la présence de la fissure ainsi que sa position et sa profondeur. Pour atteindre cet objectif, la thèse est développée en quatre chapitres.

- Dans le premier chapitre nous présentons une étude bibliographique sur les types de fissures, les causes de fissuration, ainsi que les différentes techniques et méthodes appliquées pour la détection des fissures dans les arbres des rotors. Un état de l'art sur les rotors fissurés est présenté à la fin de ce chapitre.
- Le deuxième chapitre consiste à la mise en équation générale d'un rotor fissuré sur la base du rotor de Jeffcott. Les caractéristiques des différents éléments qui composent le rotor sont présentés tels que l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de l'arbre, l'énergie cinétique du disque, le travail des forces extérieures dues aux paliers, et l'énergie cinétique du balourd.
- Dans le troisième chapitre, la version h-p de la méthode des éléments finis est utilisée pour la formulation de l'équation différentielle du mouvement d'un rotor fissuré. L'élément poutre unidimensionnelle est utilisé pour la discrétisation de ce rotor. Les fonctions de formes utilisées sont les fonctions d'Hermite cubique modifiées pour la

version h couplés avec les polynômes de Legendre spéciaux de Rodrigues pour la version p. L'équation globale du mouvement d'un rotor fissuré est déterminée par l'application de l'équation de Lagrange en tenant compte de la variation locale de la rigidité de l'arbre due à la présence de la fissure.

- Dans le dernier chapitre, Après avoir montré la rapidité de convergence de la version h-p de la MEF par rapport à la version classique h, nous utilisons la version h-p de la MEF et la méthode de rigidité variable pour étudier l'influence de la profondeur et la position de la fissure sur les fréquences propres et la réponse dynamique ainsi que les amplitudes et les orbites d'un rotor avec une fissure transversale ouverte et respiratoire, Un programme de calcul est développé en MATLAB pour calculer les fréquences propres et tracer la réponse dynamique ainsi que les amplitudes et les orbites d'un rotor fissuré et non fissuré.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA DYNAMIQUE DES ROTORS FISSURES

Table des matières

1	Introduction.....	5
2	Paramètres influant le comportement dynamique des rotors	5
3	Causes des fissures dans les arbres des rotors	6
4	Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations.....	7
5	Types de fissures transversales selon le comportement en rotation de l'arbre	8
6	Techniques de la détection des fissures d'arbre.....	10
7	Méthodes d'identification des fissures.....	11
7.1	Méthodes basées sur les vibrations.....	11
7.2	L'analyse Modale	11
7.3	Méthodes non-traditionnelles	12
8	Etat de l'art sur les rotors fissurés	12

1 Introduction

La durabilité, le bon fonctionnement et la durée de vie des machines tournantes reposent largement sur les techniques permettant de détecter les symptômes de défauts naissants. Les fissures ont été classées comme les défauts le plus important qui affectent la sécurité et le comportement vibratoire des machines tournantes. Si la fissure continue à se propager dans une machine en fonctionnement et n'est pas détectée à l'avance, elle s'agrandit continuellement. Ainsi, la section transversale du rotor réduite due à la croissance de la fissure ne peut pas supporter les charges dynamiques qui lui sont appliquées, une défaillance rapide et imprévisible se produit sous la forme d'un mode de rupture fragile une fois que la fissure atteint sa taille critique, cette défaillance soudaine génère une quantité considérable d'énergie stockée dans l'arbre de rotor, et cela peut entraîner des dégâts énormes dans le système d'exploitation.

Au fil de dernières décennies, de nombreux chercheurs ont étudié de manière approfondie le comportement dynamique des arbres fissurés. Au cours de cette période, de nombreux modèles et techniques de détection des fissures ont été développés. Parmi ces techniques, l'analyse vibratoire est la principale technique de maintenance prédictive utilisée, L'analyse vibratoire des arbres est basée sur la surveillance des modifications du comportement dynamique due à la présence de fissure.

Dans ce chapitre, nous présentons une étude bibliographique sur les causes, types et les caractéristiques et les différents techniques et méthodes appliqué pour la détection des fissures dans les arbres des rotors. Un état de l'art sur les rotors fissuré est présenté à la fin de ce chapitre.

2 Paramètres influant le comportement dynamique des rotors

Le comportement dynamique des rotors est affectée par plusieurs facteurs, tels que :

- Propriétés mécaniques du matériau de l'arbre, et les facteurs les affectant, telle que la température de fonctionnement.
- Propriétés géométriques et la répartition de la masse.
- Nombre, type et comportement élastodynamique des roulements.
- Précontraintes mécaniques et les charges statiques.
- Amortissement (interne ou externe).

- Imperfections locales, telles que les défauts, les fissures, les microfissures de fatigue, etc., qui affectent l'intégrité structurelle de l'arbre.

3 Causes des fissures dans les arbres des rotors

L'initiation et la propagation d'une fissure dans les arbres est un processus complexe résultant d'imperfections d'usinage, telles que les rainures de clavettes, les changements de section transversaux, les entailles et les rainures, ou à cause des facteurs tels que le fretting et/ou les facteurs métallurgiques tels que des défauts de forgeage, les inclusions, les porosités et les vides, les fissures peuvent être aussi causées par des augmentations de contraintes mécaniques.

Les arbres en rotation sont soumis à différents types de sollicitations mécaniques, telles que la flexion, la torsion, la traction, le cisaillement et les charges statiques et dynamiques. Une fissure sera initiée dans la région où les contraintes dépassent la limite d'élasticité du matériau de l'arbre, qui peut déjà avoir été réduite en raison de la fatigue. Lorsque la fissure atteint une certaine profondeur, l'arbre ne peut plus supporter les charges statiques et dynamiques, et par conséquent, l'arbre subit souvent une fracture soudaine.

Quand une fissure est initiée, quelques facteurs peuvent affecter le taux de croissance de sa profondeur. Dans certaines conditions, la propagation de la fissure peut être accélérée à cause:

- des défauts de fonctionnement
- des contraintes thermiques.
- des conditions environnementales telles que la présence d'un milieu corrosif.
- de la présence de contraintes résiduelles ou de non homogénéité dans le matériau du rotor;
- des conditions métallurgiques
- etc...

4 Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations

Dans la littérature, et sur la base de la géométrie des fissures dans les arbres des rotors, les fissures sont classées en trois groupes comme suit :

- **Fissure transversale**

La fissure transversale reste le type de fissure le plus important car la machine est considérablement influencée par son apparition. La fissure transversale se développe si l'arbre est uniquement soumis à des contraintes de flexion.

Ce type des fissures est perpendiculaire à l'axe de l'arbre (Figure.1.1), elle réduit la section transversale de l'arbre et entraînent des dommages importants aux rotors. Ce type de fissure est le défaut le plus grave et le plus courant. Ainsi, il a été largement étudié par les chercheurs anciens et actuels.

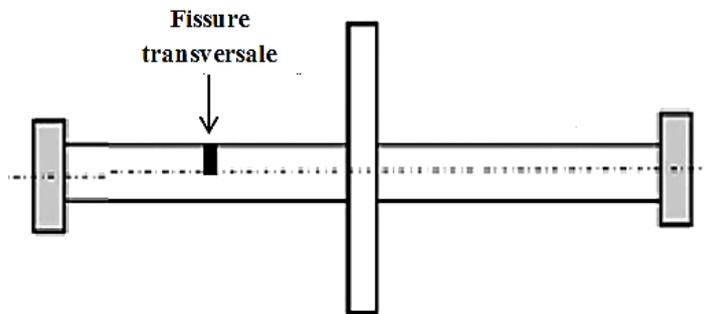


Figure.1.1 : Fissure transversale.

- **Fissure longitudinale**

Ce type de fissure est parallèle à l'axe de l'arbre, il est relativement rare et moins grave (Figure.1.2).

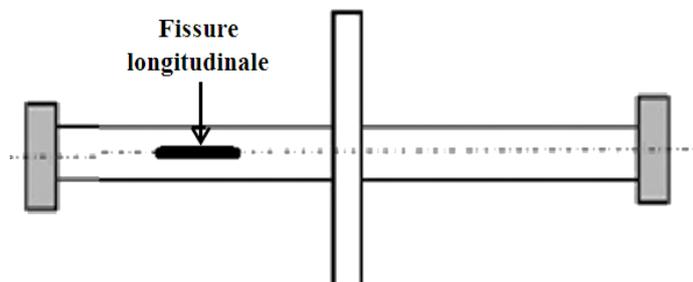


Figure.1.2 : Fissure longitudinale.

- **Fissure inclinée (Slant crack)**

Les fissures inclinées sont identiques aux «fissures hélicoïdales» [1,2]. Ce type de fissure fait un angle avec l'axe de l'arbre (Figure.1.3) et ne se produit pas très souvent, mais pourrait apparaître dans les arbres des machines industrielles et influencent principalement le comportement en torsion du rotor de manière assez similaire à l'effet des fissures transversales sur le comportement en flexion. Sekhar et al [3] ont conclu que l'effet de la fissure oblique sur la vibration latérale est inférieur à celui d'une fissure transversale.

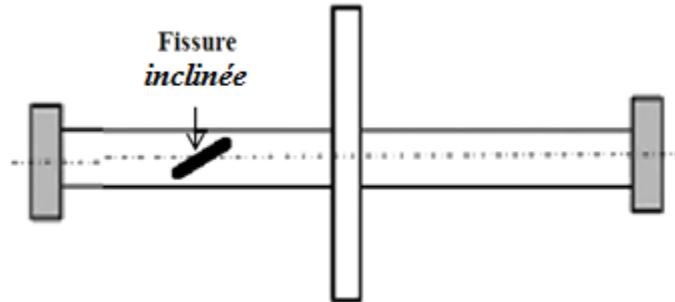


Figure.1.3 : Fissure inclinée.

5 Types de fissures transversales selon le comportement en rotation de l'arbre

- **Modèle de fissure ouverte (Open crack)**

Les fissures de ce type restent toujours ouvertes pendant la rotation de l'arbre (Figure1.4). Ce sont en générales des «encoches ».

Les chercheurs ont étudié ce type de fissure de manière expérimentale en générant une entaille sur l'arbre. Les résultats ont fait l'objet d'un débat, car ils risquent de ne pas refléter la nature réelle de la fissure dans l'arbre [4].

Pour ce modèle des fissures, la variation de la rigidité de l'arbre est périodique par rapport à l'angle de rotation du rotor.

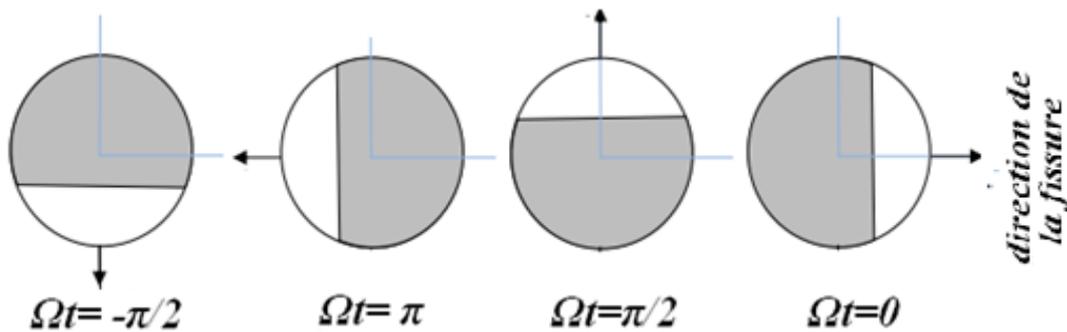


Figure.1.4 : Section transversale d'une fissure ouverte.

- **Modèle de fissure respiratoire (Breathing crack)**

La respiration des fissures transversales est l'un des modèles les plus utilisés par de nombreux chercheurs pour étudier la dynamique des arbres fissurés. À chaque tour, la fissure s'ouvre et se ferme progressivement, c'est-à-dire qu'elle respire pendant la rotation de l'arbre. Par exemple, dans les grands rotors des turbine, le poids est dominant, autrement dit la déflexion statique du rotor est beaucoup plus grande que la vibration due aux forces de balourd qui font respirer la fissure à chaque tour.

Le comportement respiratoire des fissures entraîne des modifications sur la rigidité de l'arbre. La rigidité d'un arbre intact reste la même valeur avec des angles de rotation différents. Cependant, lorsqu'un arbre présente une fissure transversale respiratoire, la rigidité de l'arbre change périodiquement selon l'angle de rotation (Figure.1.5). À l'angle ($\Omega t = \pi/2$), lorsque les contraintes exercées sur la surface de fissure sont compressives, la fissure reste fermée et l'arbre a presque la même rigidité qu'un arbre intact. Lorsque les contraintes deviennent importantes et la fissure s'ouvre ($\Omega t = -\pi/2$), la rigidité de l'arbre est réduite de manière significative. Papadopoulos [5] a également abordé la situation intermédiaire entre l'état complètement ouvert et l'état complètement fermé. C'est une fissure partiellement ouverte ou partiellement fermée ($\Omega t = 0, \Omega t = \pi$).

Les fissures de l'arbre respirent lorsque la taille des fissures est petite, les vitesses de rotation sont faibles et les forces radiales sont importantes [6].

Récemment, la plupart des travaux de recherche théoriques se concentrent sur les fissures de «respiration transverse» en raison de leur pertinence pratique directe.

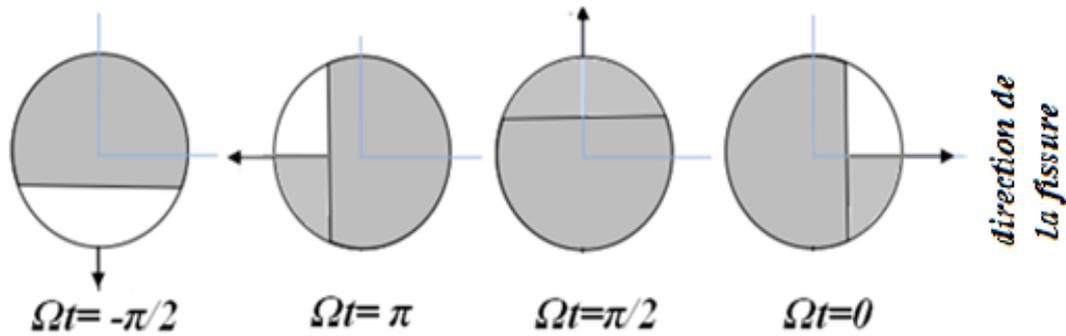


Figure.1.5 : Section transversale d'une fissure respiratoire.

- **Modèle Switching (hinge model)**

Ce type est un cas particulier d'une fissure respiratoire. Dans le cas de ce modèle, les chercheurs ont supposé que la fissure soit totalement ouverte ou totalement fermée et il n'y a pas de situation intermédiaire entre l'état complètement ouvert et l'état complètement fermé (Figure.1.6).

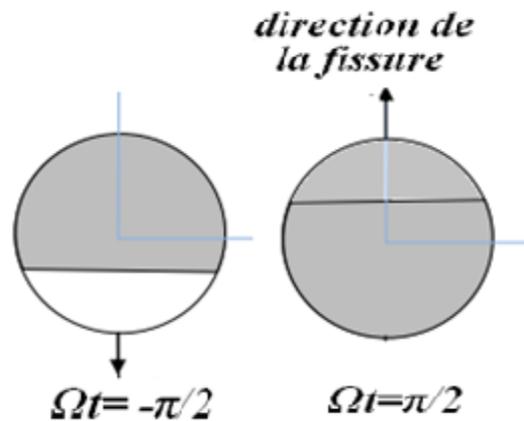


Figure.1.6 : Section transversale d'une fissure switching.

6 Techniques de la détection des fissures d'arbre

Plusieurs techniques de maintenance prédictive sont utilisées pour analyser et détecter les fissures dans les arbres des machines et équipements rotatifs. Telles que l'analyse vibratoire, les ultrasons, la thermographie, la tribologie, la surveillance des processus, l'inspection visuelle et d'autres techniques d'analyse non destructive [7]. Parmi ces techniques, l'analyse vibratoire est la principale technique de maintenance prédictive utilisée [8] car elle est non destructive et n'interfère pas avec le fonctionnement normal de la machine.

7 Méthodes d'identification des fissures

7.1 Méthodes basées sur les vibrations

Il est connu que la présence d'une fissure dans l'arbre augmente la flexibilité du rotor, ce qui tend à modifier ses caractéristiques dynamiques. Sur ce principe, des méthodes basées sur les vibrations ont été développées pour identifier les fissures.

Les méthodes de détection des fissures basées sur les vibrations peuvent en outre être divisées en plusieurs méthodes:

- **Méthodes basées sur les signaux de vibration**

Dans ce cas, on utilise des équipements de contrôle des vibrations tels que des accéléromètres, des transducteurs à courants de Foucault, des sondes de proximité, des analyseurs de spectre...etc.

Ces méthodes servent à mesurer ou à surveiller l'évolution des signaux de vibration de la réponse du système avec et sans fissure.

- **Méthodes basées sur des modèles**

Elles s'appuient sur des modèles analytiques ou numériques pour simuler le comportement de l'arbre fissuré en cours de fonctionnement et tente de corréler la signature de vibration observée avec la présence d'une fissure à des emplacements discrets sur l'arbre.

L'identification des fissures et l'analyse dynamique des systèmes fissurés à l'aide de méthodes basées sur des modèles peuvent être peu fiables ou peuvent comporter de grosses erreurs. Cela est dû aux erreurs numériques et aux hypothèses sur lesquelles reposent les techniques basées sur des modèles. Par exemple, la prise en compte de la rigidité des arbres fissurés produit des erreurs importantes, car certains des modèles développés ne représentent pas réellement les modifications périodiques effectuées à différents angles de rotation en fonction des paramètres de rigidité utilisés pour la modélisation de ces modèles.

7.2 L'analyse Modale

L'analyse modale repose sur les modifications des caractéristiques modales du système telles que les changements des fréquences et modes propres, et les réponses à des excitations spécialement appliquées (autre qu'un déséquilibre).

La plupart des méthodes modales exigent que le rotor soit à l'arrêt, tandis que d'autres exigent que le rotor tourne à une fraction de sa vitesse de fonctionnement.

7.3 Méthodes non-traditionnelles

Ce sont des méthodes de détection des fissures basé sur des systèmes automatisés, telles que :

- Réseaux de neurones.
- Logique floue.
- Inspection endoscopique.

Par exemple, Rosard et al. [9] ont présenté un système de surveillance des fissures en ligne installé dans une turbine à vapeur. Le système mesure en permanence les paramètres de vapeur à l'entrée et à la sortie du cylindre haute pression. Un programme basé sur les éléments finis calcule ensuite les températures du rotor, les propriétés thermiques et mécaniques du matériau du rotor, puis les contraintes de fonctionnement et les taux de croissance de la fissure correspondants pour divers points du rotor. Les informations concernant les fissures détectées précédemment peuvent être entrées dans le programme, qui prédit ensuite la période de fonctionnement sûre pour toutes les conditions de fonctionnement données ainsi que la durée avant qu'une autre inspection exhaustive de l'endoscope ne soit nécessaire.

8 Etat de l'art sur les rotors fissurés

Les rotors fissurés font l'objet d'études et de recherches depuis les années 1960. Il semble que le premier article sur les structures fissurées ait été publié en 1957. Des recherches importantes ont été réalisées au cours de ces années. La connaissance du comportement dynamique des arbres fissurés a permis de reconnaître la présence d'une fissure et d'arrêter le rotor à temps avant la défaillance catastrophique. Lorsqu'une fissure est détectée, le rotor fissuré est remplacé par un autre rotor, et le temps d'arrêt de la machine et de rechange de l'arbre est compris entre quelques jours à quelques semaines. Le temps d'arrêt de la machine conduit à des pertes économiques considérables. Cette situation explique l'intérêt croissant sur le comportement des rotors fissurés. Depuis les années 1980, des chercheurs de partout dans le monde ont rédigé des articles scientifiques sur différents sujets liés aux rotors fissurés. Maintenant, le nombre total des articles sur les rotors fissurés dépasse le millier et continue d'augmenter.

En 1976, Gasch [10], Henry et Okah-Avae [11] ont examiné le mécanisme non linéaire de respiration de la fissure en utilisant différentes valeur de flexibilités pour les états ouvert et

fermé et ont résolu les équations du mouvement à l'aide d'un ordinateur analogique. Mayes et Davies [12,13] ont mené une enquête analytique et expérimentale détaillée sur les arbres fissurés. Ils ont dérivé une estimation analytique approximative basée sur le principe d'énergie de Paris. Bien qu'ils aient considéré les équations non linéaires d'un rotor simple, ils ont obtenu des solutions analytiques en considérant une fissure ouverte menant à un arbre avec des moments d'inertie dissemblables dans les deux directions normales.

En 1979, Grabowski [14], a montré que la déformation d'une poutre, due à son propre poids, est supérieure de plusieurs ordres de grandeur à l'amplitude de vibration. Par conséquent, il suggère que la non-linéarité n'affecte pas la réponse de l'arbre car la fissure s'ouvre et se ferme régulièrement en rotation. Par conséquent, les équations de mouvement peuvent être considérées comme linéaires avec des coefficients variables.

L'influence d'une fissure sur le comportement dynamique en torsion d'une poutre a été introduite en 1980 par Dimarogonas et Massouros [15,16]. Cette étude a conduit à la conclusion que l'introduction d'une fissure entraîne une diminution des fréquences propres de torsion. Les résultats expérimentaux ont confirmé l'analyse, les résultats ont montré que le changement de la réponse dynamique dû à la fissure était suffisamment élevé pour permettre la détection de l'emplacement et la profondeur de la fissure.

Au cours des trois dernières décennies, plusieurs chercheurs ont accordé une grande attention au diagnostic des fissures dans les machines tournantes. Les excellents articles de Dimarogonas [17], Wauer [18] et Gasch [19] couvrent de nombreux aspects de ce domaine et fournissent des informations et des connaissances précieuses.

Plaut et al. [20] ont comparé les réponses d'un arbre avec une fissure respiratoire et ouverte à celles d'un arbre non fissuré. Ils ont démontré que l'angle entre la fissure et le balourd peut induire des changements importants dans les réponses du rotor.

Ishida et al. [21] suggèrent un autre indicateur pour détecter les fissures dans les rotors, Au lieu de surveiller les composants supercritique ($1x$ ou $2x$) de la vitesse critique, ils suggèrent de surveiller les composants sub-critiques ($1/2x$ ou $1/3 x$), car ils sont plus sensibles aux fissures.

Sekhar et Prabhu [22] ont trouvé les modifications des fréquences propres du rotor et ont utilisé ces différences pour détecter la fissure. Ils ont constaté que les changements de

fréquences propres dus à une fissure sont appréciables dans le cas d'une poutre à faible rapport entre la longueur et le diamètre de l'arbre.

Lee et Chung [23] ont présenté une procédure d'évaluation non destructive permettant d'identifier une fissure dans une structure de type poutre à une dimension utilisant les données de fréquence naturelle et la MEF. Lele et Maiti [24] ont présenté le problème direct (détermination des fréquences des poutres connaissant les paramètres de la fissure) et inverse (détermination de l'emplacement de la fissure connaissant les fréquences naturelles) dans une poutre de Timoshenko tout en représentant la fissure par un ressort en rotation.

Dong et al. [25] ont mesuré la déviation entre deux points symétriques d'un rotor avec une fissure transversale ouverte à l'état stationnaire en utilisant la méthode d'identification par contour, l'emplacement et la profondeur de la fissure sont prévus. Dans cette étude l'arbre est modélisé par une poutre Euler-Bernoulli et la rigidité de la région fissurée est modélisée comme une flexibilité locale utilisant les lois de la mécanique de la rupture.

Gounaris et Papadopoulos [26] ont utilisé une méthode basée sur l'analyse modale, ils ont trouvé que les modes propres de toute structure fissurée sont différents de ceux de la structure non fissurée. Les différences sont dues à la discontinuité de la pente des modes propres de vibration à l'emplacement de la fissure. Et dans [27] ils ont utilisé les vibrations couplées introduites par une fissure afin d'identifier une fissure dans un rotor. L'arbre a été modélisé comme une poutre Timoshenko en rotation, incluant l'effet gyroscopique et les vibrations axiales dues au couplage. La méthode utilisée était basée sur les mesures de la réponse aux vibrations axiales dues à différentes fréquences d'excitation et à différentes vitesses de rotation du rotor.

Darpe et al [28], ont analysé la réponse d'un rotor Jeffcott ou de Laval à vitesse angulaire constante sous excitation axiale à différentes fréquences, cette impulsion est transmise à un rotor fissuré et non fissuré, les spectres de vibration trouvés présentent des différences nettes indiquant l'existence d'une fissure. Poursuivant cet effort, Darpe et al. [29] ont examiné ce phénomène à titre expérimental. Ils ont prouvé les résultats analytiques trouvés pour des rotors à l'état stationnaire et rotationnel, en les excitants par des excitations axiales de fréquences différentes. Plus tard en 2004, Darpe et al. [30] ont également étudié le couplage entre les vibrations longitudinales, latérales et torsionnelles d'un rotor fissuré en utilisant un modèle de fissure respiratoire.

Dharmaraju et al. [31,32] ont appliqué des techniques d'ingénierie inverse pour estimer les paramètres de la fissure à partir des mesures expérimentales force-réponse. Dans ce travail, un algorithme d'identification générale a été mis au point pour estimer les coefficients de flexibilité et la profondeur de la fissure sur la base des informations force-réponse.

Plus récemment, J-J Sinou [33] a analysé et déterminé la réponse non linéaire et les diverses régions d'instabilité d'un rotor avec une fissure transversale respiratoire, pour les trois premières vitesses critiques, prenant en compte l'effet de la profondeur et l'emplacement de la fissure, il a utilisé la méthode de la balance harmonique pour déterminer la réponse périodique. J-J Sinou [34], a aussi présenté un travail sur la détection de fissures dans les rotors sur la base des composantes de la deuxième et troisième vitesse super-harmonique.

En 2009, J-J Sinou [35] a présenté un vaste travail expérimental prenant en compte les influences de la profondeur de la fissure et de l'orientation du balourd par rapport à la direction de la fissure afin d'examiner la possibilité de détecter la présence d'une fissure transversale ouverte dans les rotors, la fissure ouverte était considérée comme une entaille, l'évolution des orbites du centre de rotor au voisinage de la première vitesse sub-critique est étudié en détail pour proposer un indicateur efficace de la présence de fissures dans les rotors.

Al-Shudeifat et al [36] ont étudié théoriquement et expérimentalement l'effet des deux modèles de la fissure, à savoir la fissure respiratoire et la fissure ouverte, sur les fréquences propres, les amplitudes et les orbites d'un rotor à deux disques, L'équation de mouvement est déterminée par la version classique h de la MEF, en utilisant les mêmes fonctions représentant la variation temporelle de la rigidité utilisées par J-J Sinou [33]. En 2011, Al-Shudeifat et Eric Butcher [37] ont développé deux nouvelles fonctions pour la variation de rigidité d'un élément fissuré pour le cas d'une fissure transversale respiratoire à la base de la variation des moments d'inertie de la section droite de la fissure par rapport aux repères de rotations, il ont prouvé théoriquement et expérimentalement que les nouvelles fonctions sont plus précises que celles utilisées précédemment dans les références [12,13,33,34]. Après, Al-Shudeifat a utilisé ces fonctions pour étudier un rotor avec une fissure ouverte [38], et pour étudier la stabilité d'un rotor fissuré [39].

En 2016, Lu et al. [40] ont étudié les caractéristiques de réponse non linéaire d'un rotor à fissure transversale respiratoire. Les résultats indiquent que la fissure transversale provoque des pics de résonance super-harmoniques aux deuxième, troisième et quatrième vitesses sous-

critiques. Tamrakara et Mittal [41] ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet d'une fissure transversale ouverte sur les fréquences propres du rotor à l'état stationnaire, dans l'étude numérique, le diagramme de Campbell est généré par la simulation dans ANSYS. Anuj Kumar Jain et al [42] ont étudié expérimentalement l'effet de la profondeur de la fissure sur la rigidité de l'arbre et les fréquences propres. Les fréquences propres ont été obtenues par le système d'analyse de vibrations (système OROS), utilisant un test de frappe au marteau dans des conditions statiques, ce travail inclut également la réponse dynamique du rotor avec fissure respiratoire.

En 2017, Chao-Zhong Guo et al [43] ont étudié expérimentalement l'effet d'une fissure de fatigue sur l'évolution des orbites et les spectres de fréquence, la fissure de fatigue a été induite à l'aide d'une plieuse à trois points. Ce travail présente une méthode efficace de détection des fissures basée sur la réponse dynamique pour le diagnostic en ligne des fissures dans les rotors.

À partir de cette recherche bibliographique sur les rotors fissurés, nous pouvons citer les remarques suivantes :

- Plusieurs techniques ont été utilisées pour l'étude des défauts naissant dans les rotors, l'analyse vibratoire reste la principale technique de maintenance prédictive utilisée.
- La fissure transversale est le type le plus étudié par les chercheurs, car le comportement dynamique de la machine est considérablement influencé par son apparition.
- La présence des fissures dans les rotors influent sur le comportement dynamique de ces derniers, la rigidité de l'arbre diminue à cause de la réduction de section transversale de la fissure ce qui influe sur les paramètres modaux du rotor (fréquences propres, amplitudes, orbites, modes propres). L'étude de ces derniers permet d'identifier la présence, l'emplacement et la profondeur de la fissure.
- Les principales techniques utilisées pour formuler la variation de la rigidité de l'arbre, en utilisant la MEF, sont la méthode de flexibilité locale et la méthode de la rigidité variable dans le temps (time-varying stiffness). La méthode de la flexibilité locale est la technique la plus utilisée pour formuler la matrice de rigidité d'un élément fissuré du rotor [44,45], cette méthode est basée sur le calcul du facteur d'intensité de contrainte au niveau de la zone fissurée, La méthode de rigidité variable se traduit par une

réduction des moments d'inertie de la section droite de la fissure par rapport aux axes de rotation, cette méthode a été développée pour la première fois par Mayes et Davies [12,13] et a été amélioré par Al-shudeifat et Butcher [37].

CHAPITRE II
MISE EN EQUATION

Table des matières

1	Introduction.....	19
2	Caractéristiques des éléments du rotor.....	19
3	Energies des différents composants du rotor	20
3.1	Disque	20
3.2	Arbre	23
3.3	Paliers	30
3.4	Balourd	31

1 Introduction

Ce chapitre consiste à la mise en équation générale d'un rotor fissuré. Tous d'abord, les caractéristiques des différents éléments qui composent un rotor industriel sont présentées.

L'arbre est caractérisé par ses énergies cinétiques et de déformation, le disque est caractérisé par son énergie cinétique, les paliers exercent des forces extérieures aux l'arbre de rotor, et le balourd est caractérisé par la force centrifuge déterminée à partir de son énergie cinétique.

L'équation différentielle du mouvement est obtenue par application de l'équation de Lagrange aux différents composants de rotor. La démarche utilisée est semblable à celle développée par M.Lalanne et G.Ferraris [46] pour la prévision du comportement dynamique de rotors dont le support est fixe.

2 Caractéristiques des éléments du rotor

D'une manière générale, un rotor est constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques, et soumis à des sollicitations comme le balourd.

Dans notre étude d'un rotor fissuré, des hypothèses sont retenues :

- L'arbre est déformable (flexible).
- L'effet secondaire de cisaillement n'est pas pris en considération (Poutre Euler-Bernoulli).
- Les disques sont rigides.
- Le rotor tourne à une vitesse constante Ω .
- La fissure cause une diminution de la section transversale de l'arbre.
- Les paliers sont flexibles.
- Le support est fixe.

Le modèle de base utilisé dans l'introduction à la compréhension du comportement dynamique vibratoire des rotors est le modèle connu sous le nom de "**rotor de Jeffcott**" à propos duquel ce dernier avait publié une étude en 1919 [47], nommé aussi "**rotor de Laval**" ou "**rotor de Foepl**".

Le modèle de rotor de Jeffcott (**Figure. 2.1**) est essentiellement constitué de:

- Un arbre déformable.
- Un disque rigide ayant un rayon extérieur supérieur au rayon de l'arbre.

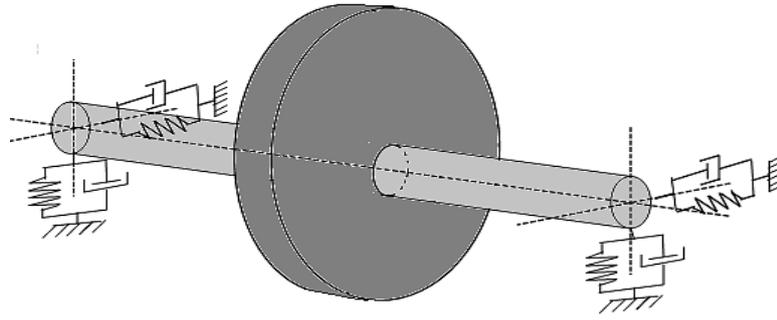


Figure.2.1 : Modèle de rotor Jeffcott.

La mise en équation nécessite la détermination des énergies cinétiques et de déformations ainsi que le travail virtuel des forces correspondant aux éléments de base du rotor : disque, arbre, paliers, balourd.

L'application de l'équation de Lagrange permet de déterminer les équations du mouvement. La démarche utilisée est celle développée par M.Lalanne et G.Ferraris [46]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad (2.1)$$

T : énergie cinétique totale du rotor.

U : énergie potentielle totale du rotor.

F_i : Forces extérieures.

q_i : coordonnées généralisés.

3 Energies des différents composants du rotor

3.1 Disque

La figure 2.2 représente les repères de référence utilisés dans l'étude du rotor. Soient $R_0(X, Y, Z)$ un repère fixe définit un repère galiléen et $R(x, y, z)$ un repère tournant lié au disque. Le système de coordonnées de repère tournant x, y et z est relié au système de coordonnées de repère fixe X, Y et Z par l'intermédiaire des angles θ_z, θ_x et θ_y .

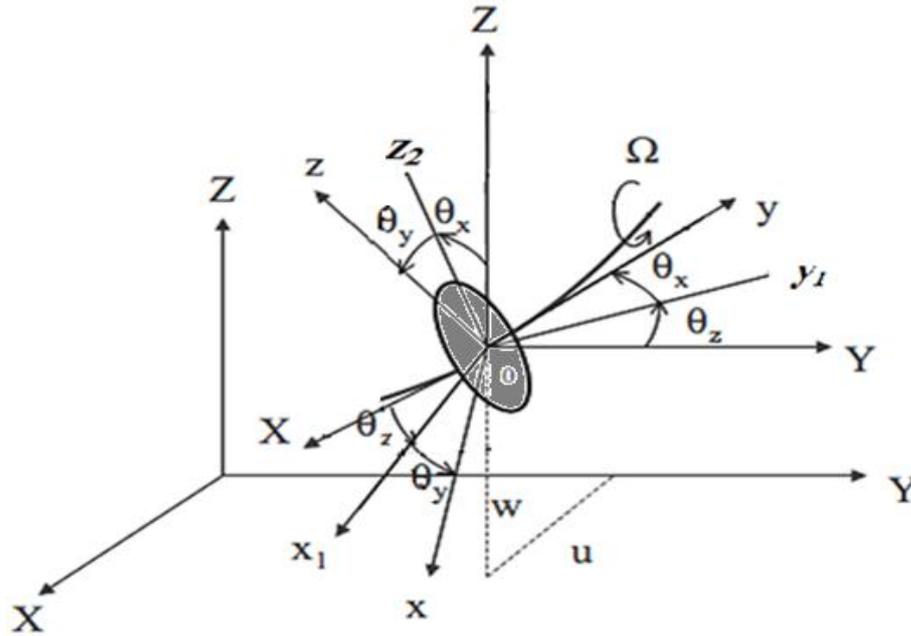


Figure.2.2: Repère fixe liée au support et repère tournant liée au disque.

Pour déterminer le vecteur de rotation du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle θ_z (la précession) autour de l'axe Z (Figure.2.3 (a)), puis d'un angle θ_x (la nutation) autour du nouvel axe noté x_1 (Figure.2.3 (b)), et enfin d'un angle θ_y (la rotation propre) autour de l'axe de rotation du disque y (Figure.2.3 (c)).

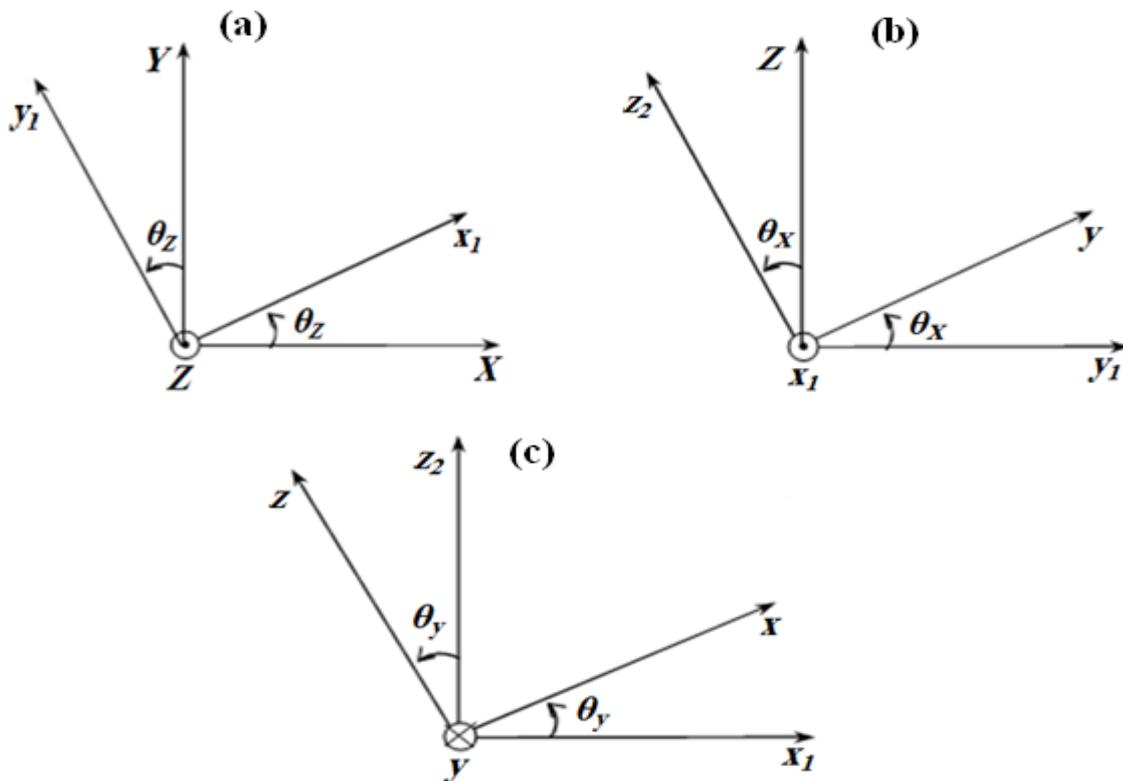


Figure.2.3. Les angles reliant le repère fixe avec le repère tournant.

Le vecteur de rotation traduisant la position du disque dans le repère fixe R s'écrit :

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y} \quad (2.2)$$

Où \vec{Z} , \vec{x}_1 et \vec{y} sont les vecteurs unitaires suivant les axes OZ , Ox_1 et Oy .

Pour exprimer le vecteur de rotation du disque dans le repère fixe, on détermine les expressions des vecteurs unitaires \vec{Z} et \vec{x}_1 en fonction des vecteurs unitaires du repère lié au disque O,x,y,z à l'aide des représentations donnés sur la figure 2.3. Par projection on a :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos \theta_y \vec{x} - \sin \theta_y \vec{z} \\ \vec{Z} &= \sin \theta_x \vec{y} + \cos \theta_x \vec{z} = \sin \theta_x \vec{y} + \cos \theta_x (\sin \theta_y \vec{x} + \cos \theta_y \vec{z}) \\ \vec{Z} &= \cos \theta_x \sin \theta_y \vec{x} + \sin \theta_x \vec{y} + \cos \theta \cos \theta_y \vec{z} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Qui donnent :

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ω_x , ω_y et ω_z sont les composants du vecteur de rotation instantanée suivant le repère tournant (x, y, z) .

D'une part, on a le disque qui tourne avec le rotor autour de son axe principal à la vitesse constante Ω d'où $\Omega = \dot{\theta}_y$, et d'autre part les angles θ_z et θ_x sont petits d'où l'on peut faire les approximations $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$. Dans ce cas le vecteur de la vitesse de rotation de disque devient :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_z \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \Omega - \dot{\theta}_z \theta_x \\ \dot{\theta}_z \cos \theta_y - \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

L'énergie cinétique de rotation du disque autour du centre de masse est donnée par :

$$\begin{aligned} T_d^{rot} &= \frac{1}{2} I_{dx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{dy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{dz} \omega_z^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_z \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y)^2 + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega - \dot{\theta}_z \theta_x)^2 + \frac{1}{2} I_{dz} (\dot{\theta}_z \cos \theta_y - \dot{\theta}_x \sin \theta_y)^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Où I_{dx} , I_{dy} , I_{dz} représentent les moments d'inertie du disque par rapport aux axes du repère tournant liée à son axe où $I_{dx} = I_{dz}$, le terme $\dot{\theta}_z \theta_x$ qui est d'un ordre élevé peut être négligé.

Le tenseur d'inertie de disque est donné par :

$$I_d = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Où :

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{m_d}{12} (3r^2 + 3R^2 + e^2), \quad I_{dy} = \frac{m_d}{12} (r^2 + R^2) \quad (2.8)$$

R et r représentent le rayon intérieur et extérieur respectivement, et e est son épaisseur.

L'expression de l'énergie cinétique de rotation du disque sera donc :

$$T_d^{rot} = \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_z + \dot{\theta}_x)^2 + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 - 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \quad (2.9)$$

Pour le vecteur de vitesse de translation, on considère les déplacements u et w du centre de l'arbre suivant les axes OX et OZ du repère fixe, le déplacement longitudinale est négligeable L'énergie cinétique de translation disque est donnée par :

$$T_d^{trans} = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (2.10)$$

Où la masse de disque m_d sera donnée par :

$$m_d = \pi (R^2 - r^2) e \rho_d \quad (2.11)$$

ρ_d est sa densité volumique.

L'énergie cinétique totale du disque est finalement égale à :

$$T_d = T_d^{trans} + T_d^{rot} = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_z \theta_x) \quad (2.12)$$

Le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ qui est constant n'a pas d'influence, et le terme $I_{dy} \Omega \dot{\theta}_x \theta_z$ représente l'effet gyroscopique.

3.2 Arbre

L'arbre est flexible et considéré en tant qu'une poutre de section transversale circulaire et uniforme.

❖ **Energie cinétique**

L'énergie cinétique d'un élément de l'arbre peut être déduite par extension de l'énergie cinétique du disque en considérant une masse d'arbre infiniment mince d'épaisseur dy , de section droite S , de masse volumique ρ_a et de moment d'inertie diamétral I , pour cela il suffit de prendre comme masse élémentaire : $dm_a = \rho_a S dy$

$$\begin{aligned} dI_x &= \iiint_v (y^2 + z^2) dm = \left(\iint_s z^2 ds \right) \rho dy = \rho I_x dy \\ dI_y &= \iiint_v (x^2 + z^2) dm = \left(\iint_s x^2 ds + \iint_s z^2 ds \right) \rho dy = \rho (I_x + I_z) dy = 2\rho I_x dy \\ dI_z &= \iiint_v (y^2 + x^2) dm = \left(\iint_s x^2 ds \right) \rho dy = \rho I_x dy \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour un élément de longueur L_e , l'expression de l'énergie cinétique est donné par :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho_a S \int_0^{L_e} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \rho_a \frac{I_a}{2} \int_0^{L_e} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) dy + \rho_a I_a L_e \Omega^2 + 2\rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \dot{\theta}_z \dot{\theta}_x dy \quad (2.14)$$

Où ;

- $\frac{1}{2} \rho_a S \int_0^{L_e} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$: représente l'énergie cinétique de translation d'une poutre en flexion.
- $\rho_a \frac{I_a}{2} \int_0^{L_e} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) dy$: représente l'effet secondaire de l'inertie de rotation.
- $\rho_a I_a L_e \Omega^2$: est un terme constant, représente l'énergie de rotation de l'arbre.
- $2\rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \dot{\theta}_z \dot{\theta}_x dy$: représente l'effet gyroscopique.

❖ **Energie de déformation**

En considérant un point B de la section droite de l'arbre, u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique de l'arbre suivant les axes x et z dans le repère tournant, Les déplacements u^* et w^* sont exprimés dans le repère fixe par :

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{aligned} \quad (2.15)$$

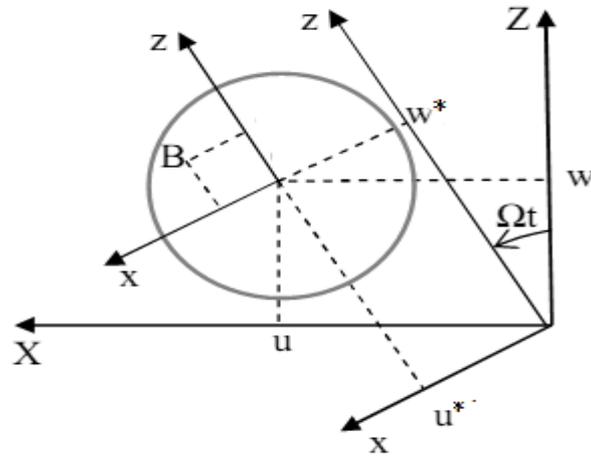


Figure.2.4. : Déplacement de centre géométrique de l'arbre.

Le champ de déplacement de point B de la section droite s'exprime dans le repère tournant sous la forme :

$$\{u^*, v^*, w^*\}^T = \begin{cases} u^* \\ -z\theta_x + x\theta_z \\ w^* \end{cases} \quad (2.16)$$

Le champ de déformation associé est alors :

$$\{\varepsilon\} = \begin{cases} \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + x \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = -\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \\ \gamma_{yx} = \theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \end{cases} \quad (2.17)$$

La relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\{\sigma\} = \begin{cases} \sigma_{yy} = E_{yy} \varepsilon_{yy} \\ \tau_{yz} = G_{yz} \gamma_{yz} \\ \tau_{yx} = G_{yx} \gamma_{yx} \end{cases} \quad (2.18)$$

Où σ_{yy} est la contrainte normale, τ_{yz} et τ_{yx} sont les contraintes dues au cisaillement transversal. Les quantités E_{yy} , G_{yz} et G_{yx} sont respectivement le module de Young suivant l'axe y du rotor et les modules de cisaillement transversal.

En remplaçant ε_{yy} , γ_{yz} et γ_{yx} dans l'équation (2.18) :

$$\{\sigma\} = \begin{cases} \sigma_{yy} = E_{yy} \left(-z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + x \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = G_{yz} \left(-\theta_x + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \\ \tau_{yx} = G_{yx} \left(\theta_z + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.19)$$

L'expression de l'énergie de déformation d'une poutre en flexion est donné par :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^t [\sigma] dv \quad (2.20)$$

On obtient alors :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^{Le} \int_S (\sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{yx} \gamma_{yx}) dS dy \quad (2.21)$$

Dans le cas d'une poutre Euler-Bernoulli où l'effet de cisaillement transversale n'est pris en considération, l'expression de l'énergie de déformation devient alors:

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^{Le} \int_S \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dS dy \quad (2.22)$$

En remplaçant σ_{yy} et ε_{yy} par leurs expressions, on trouve :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^{Le} \int_S E_{yy} \left[-z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + x \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \right]^2 dS dy \quad (2.23)$$

Et par simplification, L'expression de l'énergie de déformation dans le repère tournant est :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^{Le} \int_S \left[z^2 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + x^2 \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 - 2xz \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right] dS dy \quad (2.24)$$

L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle, donc les rotations (θ_x, θ_z) sont les dérivée des déplacements (u^*, w^*) , tel que :

$$\theta_x = \frac{\partial w^*}{\partial y} \quad \text{et} \quad \theta_z = -\frac{\partial u^*}{\partial y} \quad (2.25)$$

L'énergie de déformation de l'arbre sera ;

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^{Le} \int_S \left[z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + x^2 \left(-\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 - 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (2.26)$$

Les moments d'inertie de la section droite de l'arbre par rapport à x et z sont données par :

$$[I]_R = \begin{cases} I_x = \int_S z^2 dS \\ I_z = \int_S x^2 dS \\ I_{xz} = \int_S xz dS \end{cases} \quad (2.27)$$

L'expression de l'énergie de déformation en fonctions des moments d'inertie de la section transversale par rapport au repère tournant et en fonction des déplacements d'un point dans le repère tournant est donné par :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^{Le} \left(I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 - 2I_{xz} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right) dy \quad (2.28)$$

En remplacement les déplacements u^* , w^* dans le repère tournant par les déplacements u et w dans le repère fixe :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^{Le} \left(I_x \left(\frac{\partial^2 (u \sin \Omega t + w \cos \Omega t)}{\partial y^2} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 (u \cos \Omega t - w \sin \Omega t)}{\partial y^2} \right)^2 - 2I_{xz} \frac{\partial^2 (u \sin \Omega t + w \cos \Omega t)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (u \cos \Omega t - w \sin \Omega t)}{\partial y^2} \right) dy \quad (2.29)$$

Par simplification, nous trouvons :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^{Le} \left(\left(I_x \sin^2 \Omega t + I_z \cos^2 \Omega t - 2I_{xz} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(I_z \sin^2 \Omega t + I_x \cos^2 \Omega t - 2I_{xz} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \left((I_x - I_z) \sin \Omega t \cos \Omega t - 2I_{xz} (\cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy \quad (2.30)$$

L'expression finale de l'énergie de déformation de l'arbre par rapport au repère fixe est donnée par ;

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^{L_e} \left(I_X \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + I_Z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2I_{XZ} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \quad (2.31)$$

Tel que I_X , I_Z et I_{XZ} sont les moments d'inertie de la section transversale par rapport au repère fixe, I_x , I_z et I_{xz} sont donné en fonction de I_x , I_z et I_{xz} par :

$$\begin{cases} I_X = I_x \sin^2 \Omega t + I_z \cos^2 \Omega t - 2I_{xz} \cos \Omega t \sin \Omega t \\ I_Z = I_z \sin^2 \Omega t + I_x \cos^2 \Omega t - 2I_{xz} \cos \Omega t \sin \Omega t \\ I_{XZ} = (I_x - I_z) \sin \Omega t \cos \Omega t - 2I_{xz} (\cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) \end{cases} \quad (2.32)$$

Pour le cas d'un élément sain où la section transversale est circulaire et symétrique, $I_X = I_Z = I_a = \pi R^2/4$ et $I_{XZ}=0$.

Pour le cas d'un élément fissuré où la section transversale n'est pas circulaire (Figure. 2.5), et au cours de la rotation, la fissure cause une dissymétrie par rapport aux axes de repère fixe, donc les moments d'inertie par rapport au axes X et Z n'ont pas des même valeurs ($I_X \neq I_Z$ et $I_{XZ} \neq 0$).

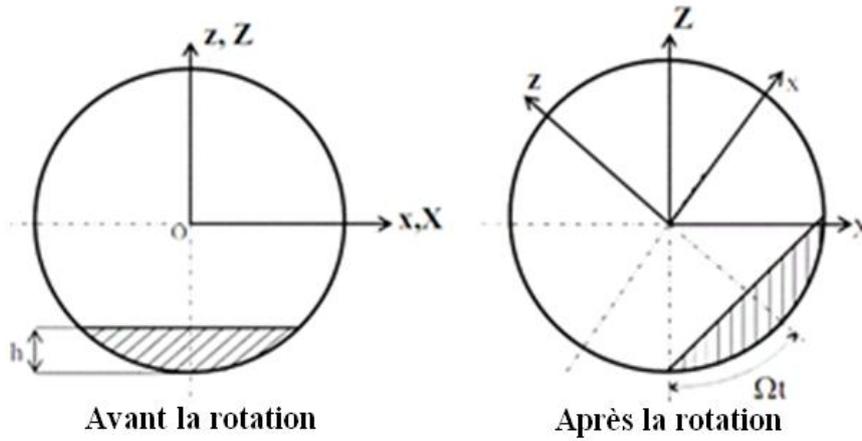


Figure. 2.5: Repère fixe et tournant d'un élément fissuré.

La section droite S de l'arbre sera réduite avec à la propagation de la fissure (profondeur de la fissure), La figure 2.6 montre une section transversale d'un élément fissuré, où A_c représente la surface de la partie fissuré et A_l représente la surface de la partie non-fissuré, et h est la profondeur de la fissure.

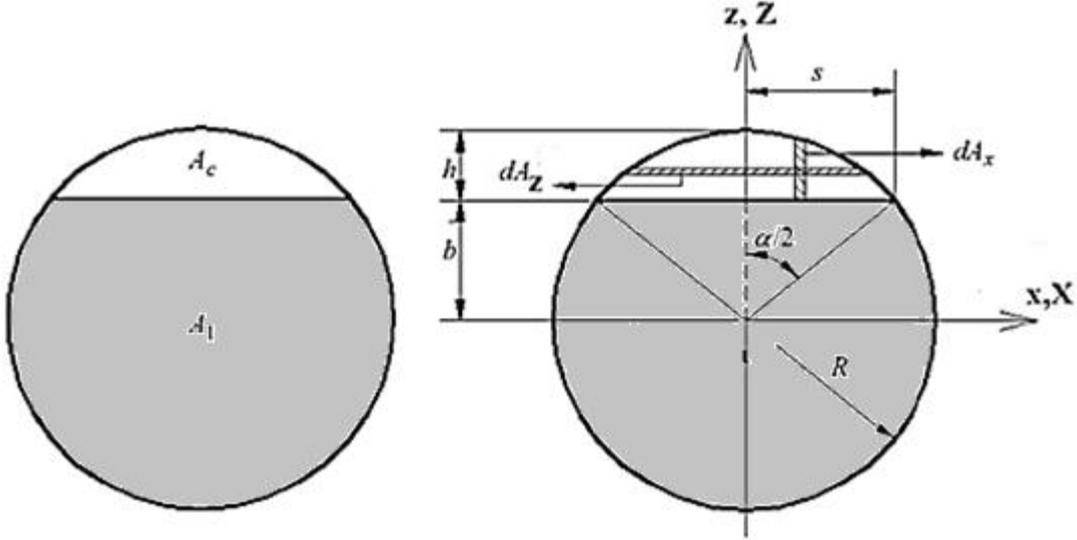


Figure. 2.6: Section transversale d'un élément fissuré.

La surface A_c de la partie fissurée est donné par :

$$A_c = \int_{A_c} dA_x = 2 \int_0^s (z - b) dx = 2 \int_0^s (\sqrt{R^2 - x^2} - b) dx = R^2 \sin^{-1} \left(\frac{s}{R} \right) + s \sqrt{R^2 - x^2} - 2bs \quad (2.33)$$

$$A_c = R^2 \sin^{-1} \gamma - R^2 (1 - \mu) \gamma$$

Où

$\mu = h/R$ représente le rapport entre la profondeur de la fissure et le rayon de l'arbre ($0 \leq \mu \leq 1$) et avec $\gamma = \sqrt{\mu(2-\mu)}$.

Avec :

$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2} \\ b = R(1 - \mu) \\ s = R\gamma \\ \gamma = \sqrt{\mu(2 - \mu)} \end{cases} \quad (2.34)$$

La surface A_1 de la partie non-fissurée est donné par :

$$A_1 = \pi R^2 - A_c = R^2 (\pi - \cos^{-1}(1 - \mu) + (1 - \mu) \gamma) \quad (2.35)$$

Les moments d'inertie I_x , I_z et I_{xz} par rapport au repère tournant ont une relation avec la profondeur de la fissure (h).

Selon Al-Shudeifat et Butcher [37], les moments d'inertie de la section non-fissuré A_1 par rapport au repère tournant sont donné par :

$$\begin{cases} I_x = \frac{\pi R^4}{8} + \frac{R^4}{4} \left((1-\mu)(2\mu^2 - 4\mu + 1)\gamma + \sin^{-1}(1-\mu) \right) \\ I_z = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{R^4}{12} \left((1-\mu)(2\mu^2 - 4\mu - 3)\gamma + 3\sin^{-1}\gamma \right) \\ I_{xz} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Le développement des équations de I_x , I_z et I_{xz} est représenté dans l'annexe(A).

3.3 Paliers

Les paliers sont flexibles et caractérisés par leurs raideurs et amortissements (Figure 2.7). Le travail virtuel δW_p des forces extérieures des paliers agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta W_p &= -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \\ &= F_u\delta u + F_w\delta w \end{aligned} \quad (2.37)$$

On peut mettre l'équation (2.37) sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Où F_u et F_w sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers.

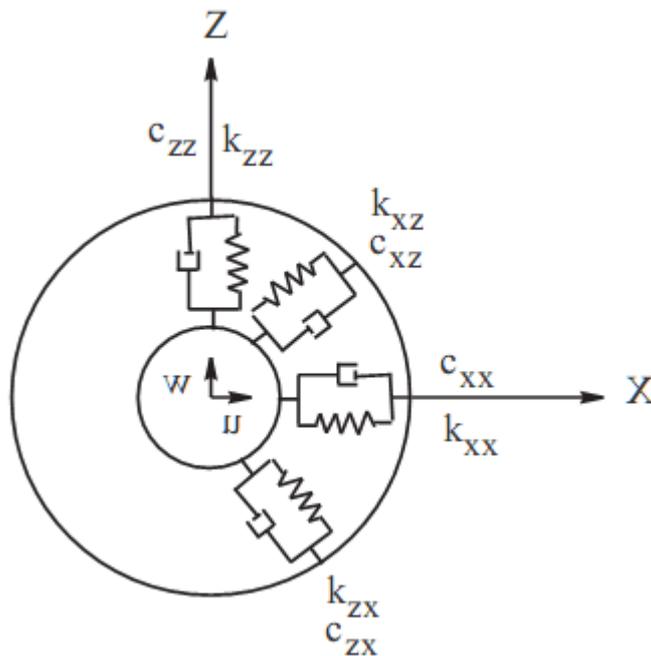


Figure 2.7. Raideurs et amortisseurs des paliers.

3.4 Balourd

Le balourd dont une représentation géométrique (Figure 2.8), peut être assimilé à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique de l'arbre et β est sa phase par rapport à l'axe Z, Son énergie cinétique doit être prise en compte.

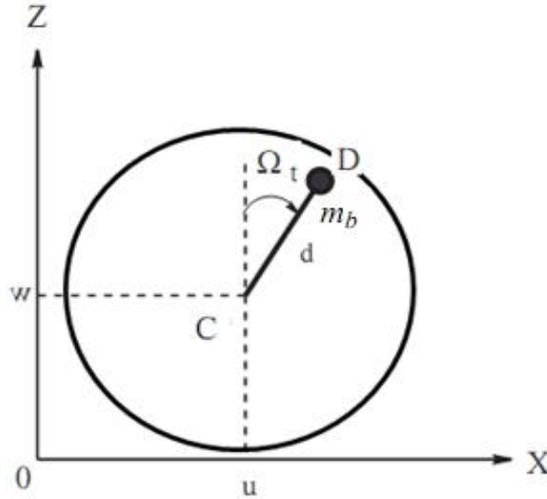


Figure 2. 8 : Position du balourd par rapport au repère fixe.

La masse de balourd reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y, sa coordonnée selon cet axe dans le repère fixe est donc constante :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} u + d \sin(\Omega t + \beta) \\ cnste \\ w + d \cos(\Omega t + \beta) \end{vmatrix}_{R_0} \quad (2.39)$$

Le vecteur de vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos(\Omega t + \beta) \\ 0 \\ \dot{w} + d\Omega \sin(\Omega t + \beta) \end{vmatrix}_{R_0} \quad (2.40)$$

L'expression de l'énergie cinétique T_b du balourd devient :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega \dot{u} d \cos(\Omega t + \beta) - 2\Omega \dot{w} d \sin(\Omega t + \beta)) \quad (2.41)$$

Le terme $\Omega^2 d^2/2$ est constant et n'interviendra pas dans les équations. La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor, donc, l'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$T_b = m_b d \Omega^2 (\dot{u} \cos(\Omega t + \beta) - \dot{w} \sin(\Omega t + \beta)) \quad (2.42)$$

CHAPITRE III

MODELISATION PAR LA VERSION H-P DE LA MEF

Tables des matières

1	Introduction.....	34
2	Définition du problème	35
3	Fonctions de forme utilisées	35
4	Formulation matricielle.....	37
4.1	Matrice élémentaire de l'arbre.....	38
4.2	Matrice élémentaire du disque.....	41
4.3	Matrice de raideur et d'amortissement des paliers	43
4.4	Vecteur des forces de balourd	43
5	Equation globale du mouvement	43

1 Introduction

Dans la plupart des cas de structures réelles, la détermination du comportement statique ou dynamique ne peut s'effectuer que numériquement à cause de la complexité des géométries et des conditions aux limites. Dans ce cas la méthode des éléments finis est très utilisée, cette méthode consiste à discrétiser la structure en éléments de dimensions finies appelés éléments finis qui sont réunis en des points situés sur leur contour appelés points nodaux ou nœuds, Si la structure est composée de N éléments alors, l'énergie totale est la somme des énergies élémentaires des N éléments.

Au cours des quatre dernières décennies, des progrès considérables ont été accomplis dans l'évolution, l'établissement et la progression de la méthode des éléments finis (MEF). Actuellement, elle est devenue la méthode prédominante d'analyse approximative dans toutes les disciplines d'ingénierie classiques et continue à être développée à la fois pour de nouvelles applications et pour une efficacité et une fiabilité améliorées. Chronologiquement, la version h du FEM a été la première à être développée [48,49]. En général, cette méthode utilise des éléments d'un degré faible et fixe, et la convergence est recherchée en affinant successivement le maillage. Plus tard, au cours des années 1970, la version p de la FEM, parfois appelée méthode des éléments finis hiérarchiques, a évolué [50-54]. Cette technique utilise un maillage fixe, et la convergence est recherchée en augmentant successivement le degré de polynômes des éléments. En général, elle offre des performances supérieures à la version h, mais il a fallu plus de 15 ans pour que ses mérites soient reconnus au niveau commercial [55]. Plus récemment, une version hybride de la FEM a été avancée [56-60], qui est effectivement la combinaison des deux concepts précédents, sa convergence est maintenant recherchée en affinant simultanément le maillage et en augmentant le degré des éléments.

Dans le domaine de la vibration des rotors, la version h-p de la MEF est peu utilisée. On peut citer les travaux de Boukhalfa et Hadjoui [61], et récemment Saimi et Hadjoui [62].

Dans ce chapitre, la version h-p de la méthode des éléments finis est utilisée pour la formulation de l'équation différentielle du mouvement d'un rotor fissuré. L'élément poutre unidimensionnelle est utilisé pour la discrétisation de ce rotor. Les fonctions de formes utilisées sont les fonctions d'Hermite cubique modifiées pour la version h couplées avec les polynômes de Legendre spéciaux de Rodrigues pour la version p. Les matrices globales de l'équation du mouvement d'un rotor fissuré sont déterminées par la méthode de Lagrange en tenant compte de la variation locale de la rigidité due à la fissure.

2 Définition du problème

L'arbre est modélisé par des éléments poutres Euler-Bernoulli, chaque élément de l'arbre possède un total de p degrés de liberté dans un seul plan, deux à chaque extrémité (nœud) et $p-4$ à l'intérieur (Figure.3.1) avec les rotations sont les dérivées des déplacements (Equation 2.25). Le disque est modélisé par un nœud possédant 2 degrés de liberté.

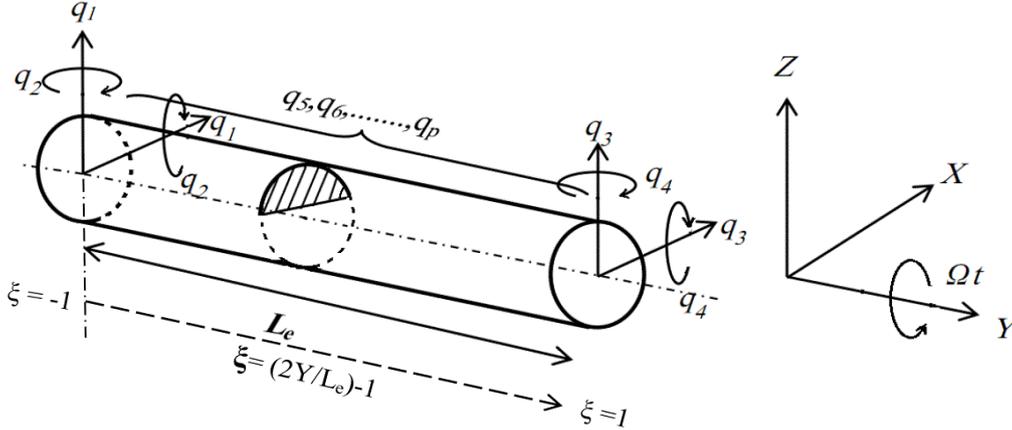


Figure 3.1 : Elément poutre à p degrés de liberté.

3 Fonctions de forme utilisées

Les déplacements et les rotations sont représentés en fonction des coordonnées généralisées et de fonctions de formes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= [N_u]\{q_u\} \\ w &= [N_w]\{q_w\} \\ \theta_x &= [N_u']\{q_u\} \\ \theta_z &= [-N_w']\{q_w\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Avec :

$$[N_u'] = \frac{d[N_u]}{dy} \quad ,, \quad [N_w'] = \frac{d[N_w]}{dy} \quad (3.2)$$

Où :

- q est le vecteur de coordonnées généralisé, donné par :

$$q_{u,w} = \{q_1 q_2 q_3 q_4 \dots \dots q_p\} \quad (3.3)$$

- N est le vecteur des fonctions de formes :

$$N = \{f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 \dots \dots f_p\} \quad (3.4)$$

- p est le nombre de degré de liberté d'un élément (degré de polynômes).

Les quatre premiers fonctions du vecteur $N (f_1, f_2, f_3, f_4)$ sont les fonctions de forme standard du type Hermite de la version classique h de la MEF qui représentent les déplacements et les rotations de chaque nœud de l'élément dans un seul plan :

$$\begin{aligned}
 f_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\
 f_2(\xi) &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)L_e \\
 f_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\
 f_4(\xi) &= \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3\right)L_e
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Avec ξ est la coordonnée adimensionnelle qui a une relation avec la longueur de l'élément L_e (Figure 3.1).

$$\xi = \frac{2y}{L_e} - 1 \quad \text{avec} \quad -1 \leq \xi \leq 1
 \tag{3.6}$$

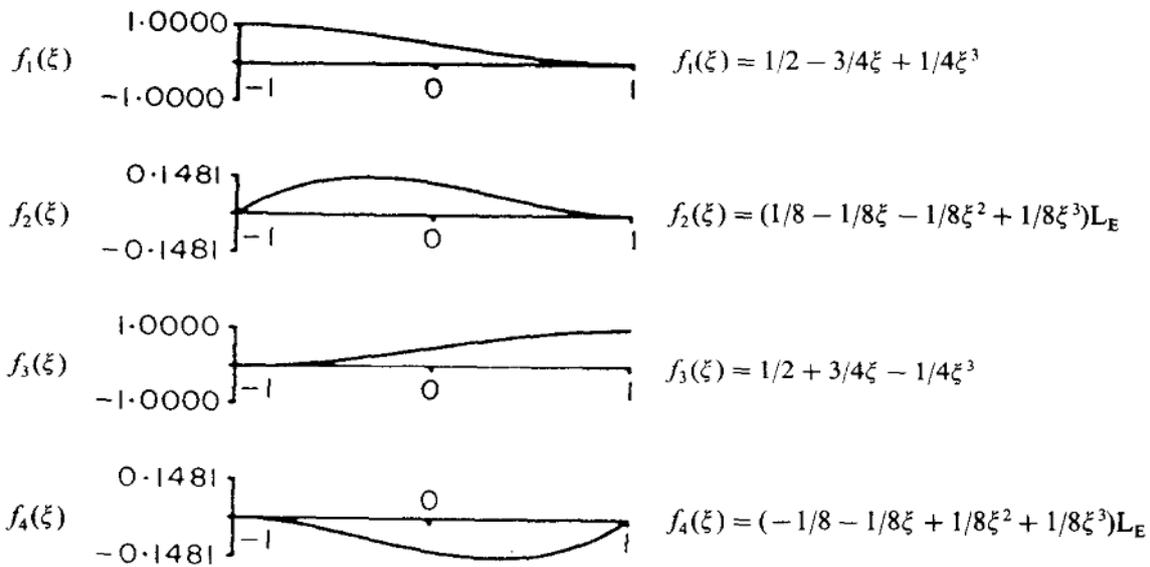


Figure 3.2 : Fonctions de forme standard d'Hermite cubiques [64].

Les fonctions de forme hiérarchiques de la version p de la MEF qui représentent le champ de déplacement interne sont les fonctions de polynômes de Legendre spéciaux de Rodrigues [63], où $p > 4$ qui sont :

$$f_p(\xi) = \sum_{n=0}^{(p-1)/2} \frac{(-1)^n (2p-2n-7)!!}{2^{2n} n! (p-2n-1)!} \xi^{(p-2n-1)} \quad (3.7)$$

Où $r!! = r(r-2)(r-4) \dots (2 \text{ ou } 1)$, $0!! = (-1)!! = 1$, et $(p-1)/2$ Désigne sa propre partie entière.

La figure 3.3 représente les 6 premières fonctions de formes hiérarchiques.

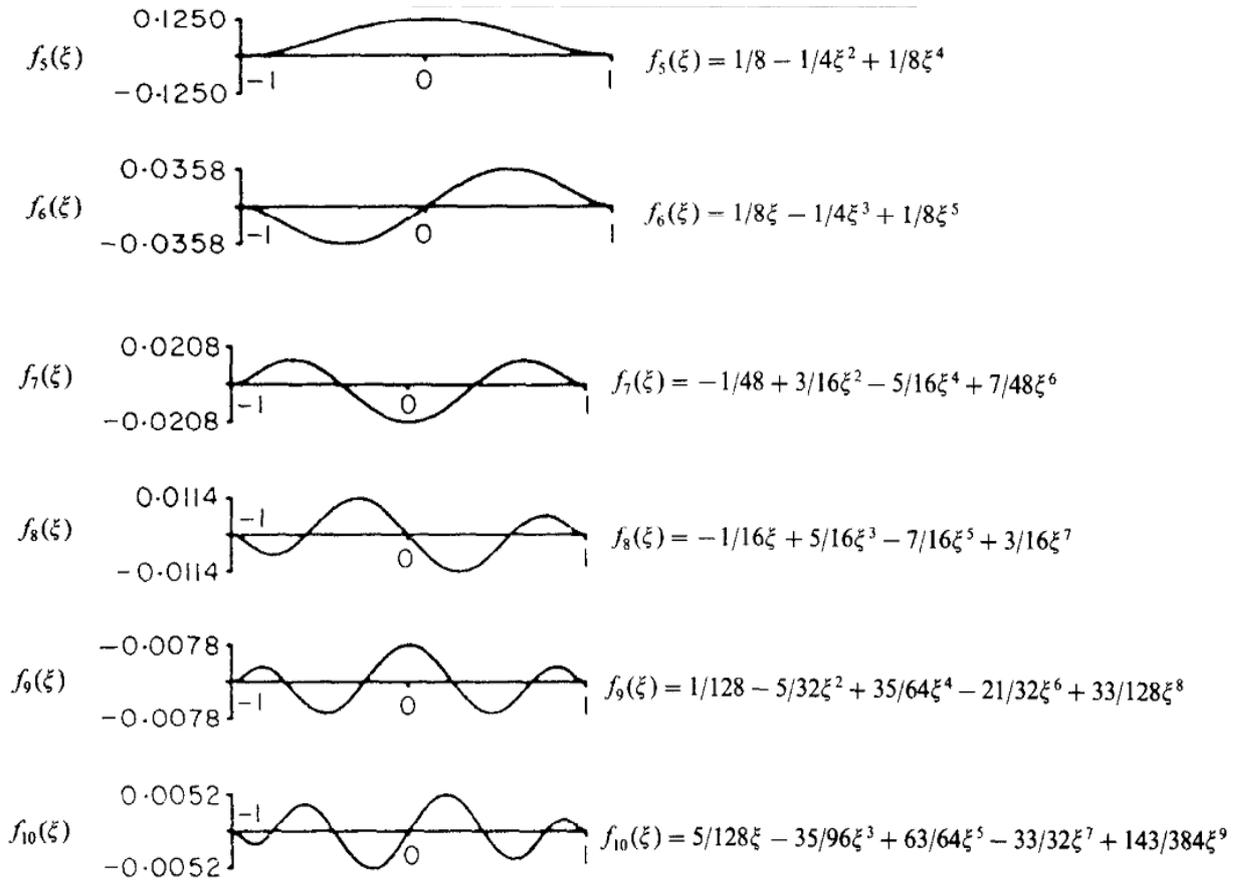


Figure 3.3 : Les 6 premières fonctions de formes hiérarchiques [64].

4 Formulation matricielle

L'application de l'équation de Lagrange sur les différentes énergies des éléments du rotor et le remplacement des déplacements et les rotations par les vecteurs des coordonnées généralisées et de fonctions de formes permet de déterminer les matrices élémentaires de taille $p \times p$ de chaque élément.

Les sous-matrices des matrices élémentaires de taille 4×4 dans l'emplacement supérieur gauche sont identiques aux matrices élémentaires de la version classique h, et seront appelées h. Les sous-matrices de taille $(p-4) \times (p-4)$ dans l'emplacement inférieur droit sont les matrices élémentaires trouvées par la version hiérarchique p de MEF et ont des relations avec le nombre des fonctions de forme hiérarchiques et seront appelées p. Les autres sous-matrices qui sont les parties supérieures droites de taille $4 \times (p-4)$ appelées h-p et inférieures gauches de taille $(p-4) \times 4$ appelées p-h correspondent à la fusion de la version h et p de la MEF (Figure 3.4).

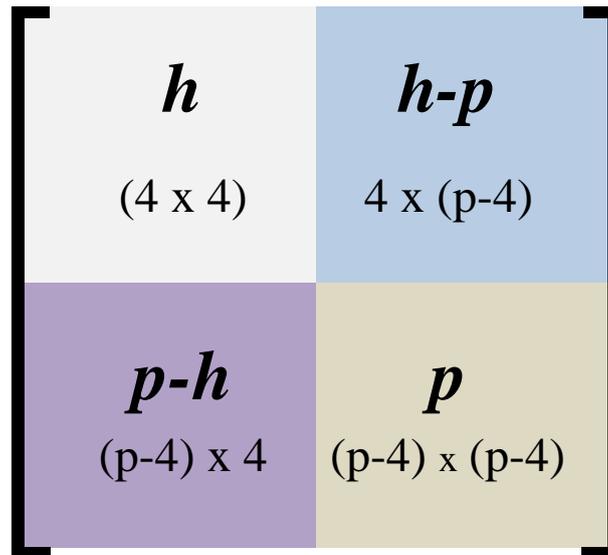


Figure 3.4 : Matrice élémentaire de taille $p \times p$.

4.1 Matrices élémentaires de l'arbre

❖ Matrice masse et gyroscopique

Comme mentionné précédemment, l'arbre est modélisé par des éléments poutres Euler-Bernoulli, il est discrétisé en un nombre n d'éléments, chaque élément contient 2 nœuds et chaque nœud a 2 degrés de liberté.



Figure 3.5 : Arbre discrétisé en n éléments.

Le remplacement des déplacements et des rotations par le vecteur de coordonnées généralisées et le vecteur de fonctions de formes (équation 3.1) dans l'équation de l'énergie cinétique de l'arbre (équation 2.14) et par l'application de l'équation de Lagrange, nous permet de déduire la matrice masse et gyroscopique élémentaire de l'arbre.

$$\begin{aligned}
 T_a = & \frac{1}{2} \rho_a S \int_0^{L_e} \left[\left\{ \dot{q}_u \right\}^t \{N_u\}^t \{N_u\} \left\{ \dot{q}_u \right\} \right] + \left[\left\{ \dot{q}_w \right\}^t \{N_w\}^t \{N_w\} \left\{ \dot{q}_w \right\} \right] dy \\
 & + \frac{1}{2} \rho_a I_a \int_0^{L_e} \left[\left\{ \dot{q}_u \right\}^t \{N_u'\}^t \{N_u'\} \left\{ \dot{q}_u \right\} \right] + \left[\left\{ \dot{q}_w \right\}^t \{N_w'\}^t \{N_w'\} \left\{ \dot{q}_w \right\} \right] dy \\
 & - 2 \rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \left[\left\{ \dot{q}_u \right\}^t \{N_u'\}^t \{N_w'\} \left\{ \dot{q}_w \right\} \right] dy + \rho_a I_a L_e \Omega^2
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Par l'application de l'équation de Lagrange, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}_u} \right) = & \rho_a S \int_0^{L_e} \left[\{N_u\}^t \{N_u\} \right] \left\{ \ddot{q}_u \right\} dy + \rho_a I_a \int_0^{L_e} \left[\{N_u'\}^t \{N_u'\} \right] \left\{ \ddot{q}_u \right\} dy \\
 & - 2 \rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \left[\{N_u'\}^t \{N_w'\} \right] \left\{ \dot{q}_w \right\} dy
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}_w} \right) = \rho_a S \int_0^{L_e} \left[\{N_w\}^t \{N_w\} \right] \left\{ \ddot{q}_w \right\} dy + \rho_a I_a \int_0^{L_e} \left[\{N_w'\}^t \{N_w'\} \right] \left\{ \ddot{q}_w \right\} dy \tag{3.10}$$

$$- \frac{\partial T_a}{\partial q_w} = 2 \rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \left[\{N_w'\}^t \{N_u'\} \right] \left\{ \dot{q}_u \right\} dy \tag{3.11}$$

La matrice $\rho_a S \int_0^{L_e} \left[\{N_u\}^t \{N_u\} \right] dy + \rho_a I_a \int_0^{L_e} \left[\{N_u'\}^t \{N_u'\} \right] dy$ représente la matrice masse de suivant l'axe X du repère fixe.

La matrice $\rho_a S \int_0^{L_e} \left[\{N_w\}^t \{N_w\} \right] dy + \rho_a I_a \int_0^{L_e} \left[\{N_w'\}^t \{N_w'\} \right] dy$ représente la matrice masse de suivant l'axe Z du repère fixe.

Donc la matrice masse élémentaire de l'arbre est donné par :

$$[M_e^{arbre}] = \begin{bmatrix} \rho_a S \int_0^{L_e} \{N_u\}^t \{N_u\} dy + \rho_a I_a \int_0^{L_e} \{N_u'\}^t \{N_u'\} dy & 0 \\ 0 & \rho_a S \int_0^{L_e} \{N_w\}^t \{N_w\} dy + \rho_a I_a \int_0^{L_e} \{N_w'\}^t \{N_w'\} dy \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Les matrices $-2\rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \{N_u'\}^t \{N_w'\} dy$ et $2\rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \{N_w'\}^t \{N_u'\} dy$ représentent l'effet gyroscopique de l'arbre.

Donc la matrice gyroscopique élémentaire de l'arbre est donné par :

$$[G_e^{arbre}] = \begin{bmatrix} 0 & 2\rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \{N_w'\}^t \{N_u'\} dy \\ -2\rho_a I_a \Omega \int_0^{L_e} \{N_u'\}^t \{N_w'\} dy & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

❖ Matrice de rigidité

En remplaçant les déplacements et les rotations par le vecteur de coordonnées généralisées et le vecteur de fonctions de formes (équation 3.1) dans l'équation de l'énergie de déformation de l'arbre (équation 2.31), nous trouvons :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^{L_e} I_x \left[\{q_u\}^t \{N_u''\} \{N_u''\} \{q_u\} \right] + I_z \left[\{q_w\}^t \{N_w''\} \{N_w''\} \{q_w\} \right] - 2I_{xz} \left[\{q_w\}^t \{N_w'\} \{N_u'\} \{q_u\} \right] dy \quad (3.14)$$

En appliquant l'équation de Lagrange, nous trouvons :

$$\frac{\partial U_a}{\partial q_u} = E \int_0^{L_e} I_x \left[\{N_u''\}^t \{N_u''\} \right] \{q_u\} - 2I_{xz} \left[\{N_u'\}^t \{N_w'\} \right] \{q_w\} dy \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial U_a}{\partial q_w} = E \int_0^{L_e} I_x \left[\{N_w''\}^t \{N_w''\} \right] \{q_w\} - 2I_{xz} \left[\{N_w'\}^t \{N_u'\} \right] \{q_u\} dy \quad (3.16)$$

La matrice $E \int_0^{L_e} I_x \left[\{N_u''\}^t \{N_u''\} \right] dy$ représente la rigidité de l'arbre suivant l'axe X de repère fixe.

La matrice $E \int_0^{L_e} I_z \left[\{N_w''\}^t \{N_w''\} \right] dy$ représente la rigidité de l'arbre suivant l'axe Z de repère fixe.

La matrice $E \int_0^{Le} -2I_{XZ} \left(\left[\begin{matrix} \{N'_w\}^t \\ \{N'_u\} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \{N'_u\}^t \\ \{N'_w\} \end{matrix} \right] \right) dy$ représente la matrice de rigidité due à la dissymétrie de la section transversale.

Donc la matrice de rigidité élémentaire de l'arbre est donné par :

$$[K_e^{arbre}] = \begin{bmatrix} EI_x \int_0^{Le} \left[\begin{matrix} \{N''_u\}^t \\ \{N''_u\} \end{matrix} \right] dy & -2EI_{XZ} \int_0^{Le} \left[\begin{matrix} \{N'_u\}^t \\ \{N'_w\} \end{matrix} \right] dy \\ -2EI_{XZ} \int_0^{Le} \left[\begin{matrix} \{N'_u\}^t \\ \{N'_w\} \end{matrix} \right] dy & EI_z \int_0^{Le} \left[\begin{matrix} \{N''_w\}^t \\ \{N''_w\} \end{matrix} \right] dy \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Pour la matrice de rigidité de l'élément fissuré, les moments d'inertie I_x , I_z et I_{XZ} sont remplacé par ses valeurs dont laquelle la section transversale n'est pas circulaire.

4.2 Matrice élémentaire du disque

❖ Matrice masse et gyroscopique

Le disque est modélisé par un nœud et fixer entre deux élément de l'arbre, donc ses fonctions de formes N^{disque} sont déterminées à la base de $\xi=-1$ où le disque est situé au niveau de nœud gauche de l'élément arbre, ou $\xi=1$ où le disque est situé au niveau de nœud droite de l'élément arbre (Figure 3.6).

Pour le disque, toutes les fonctions de formes hiérarchiques sont égales a zéros, car le disque est considéré comme un nœud donc il n'a pas des déplacements internes.

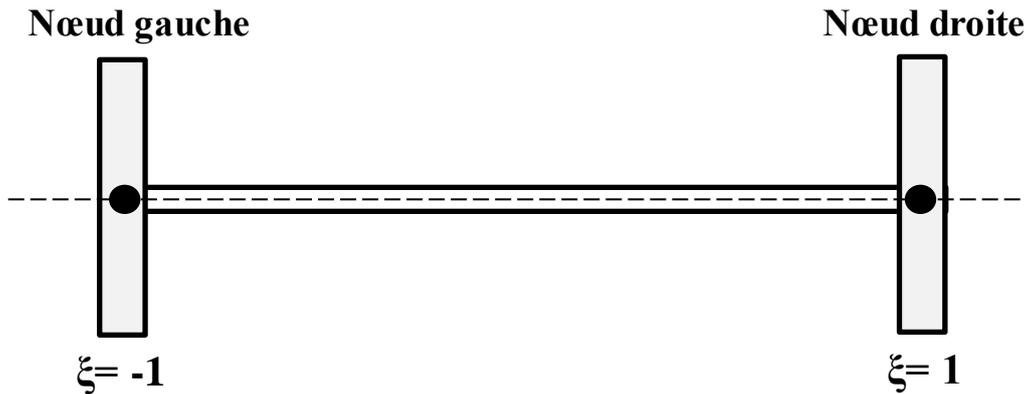


Figure 3.6 : Position de disque par rapport à l'élément de l'arbre.

Les matrices élémentaires de masse et gyroscopique du disque sont déterminées à partir de l'énergie cinétique du disque, en remplaçant les déplacements et les rotations par le vecteur de coordonnées généralisées et le vecteur de fonctions de formes du disque.

$$\begin{aligned}
 T_d = & \frac{1}{2} m_d \left(\left[\left\{ \dot{q}_u \right\}^t \{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \left\{ \dot{q}_u \right\} \right] + \left[\left\{ \dot{q}_w \right\}^t \{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \left\{ \dot{q}_w \right\} \right] \right) + \\
 & \frac{1}{2} I_{dx} \left(\left[\left\{ \dot{q}_u \right\}^t \{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \left\{ \dot{q}_u \right\} \right] + \left[\left\{ \dot{q}_w \right\}^t \{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \left\{ \dot{q}_w \right\} \right] \right) + \\
 & \frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2 - I_{dy} \Omega \left(\left[\left\{ \dot{q}_u \right\}^t \{N_u^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \left\{ \dot{q}_w \right\} \right] \right)
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Par l'application de l'équation de Lagrange, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{q}_u} \right) = & \frac{1}{2} m_d \left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right] \ddot{q}_u + \frac{1}{2} I_{dx} \left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right] \ddot{q}_u \\
 & - I_{dy} \Omega \left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right] \dot{q}_w
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{q}_w} \right) = \frac{1}{2} m_d \left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right] \ddot{q}_w + \frac{1}{2} I_{dx} \left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right] \ddot{q}_w \quad (3.20)$$

$$- \frac{\partial T_d}{\partial q_u} = I_{dy} \Omega \left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right] \dot{q}_u \quad (3.21)$$

La matrice $\frac{1}{2} m_d \left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right] + \frac{1}{2} I_{dx} \left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right]$ représente la matrice masse de translation et de rotation suivant l'axe X de repère fixe.

La matrice $\frac{1}{2} m_d \left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right] + \frac{1}{2} I_{dx} \left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right]$ représente la matrice masse de translation et de rotation suivant l'axe Z de repère fixe.

Donc la matrice masse élémentaire de l'arbre est donné par :

$$[M_e^{disque}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_d \left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right] + \frac{1}{2} I_{dx} \left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_d \left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right] + \frac{1}{2} I_{dx} \left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Les matrices $-I_{dy} \Omega \left(\left[\{N_u^{disque}\}^t \{N_w^{disque}\} \right] \right)$ et $I_{dy} \Omega \left(\left[\{N_w^{disque}\}^t \{N_u^{disque}\} \right] \right)$ représentent l'effet gyroscopique du disque.

Donc la matrice gyroscopique élémentaire du disque est donné par :

$$[G_e^{disque}] = \begin{bmatrix} 0 & I_{dy}\Omega \begin{bmatrix} \{N_w^{disque}\} \\ \{N_u^{disque}\} \end{bmatrix} \\ -I_{dy}\Omega \begin{bmatrix} \{N_u^{disque}\} \\ \{N_w^{disque}\} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Les sous-matrices h-p et p-h et p des matrices élémentaires de disques sont des matrices nulles, donc la taille de ces matrices est (8 x 8).

4.3 Matrice de raideur et d'amortissement des paliers

Les valeurs des raideurs et des amortissements des paliers sont placées au niveau des déplacements des nœuds correspondant à leurs positions, les matrices raideur $[K_p]$ et d'amortissement $[C_p]$ des paliers sont données par :

$$[K_p] = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xz}] \\ [K_{zx}] & [K_{zz}] \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$[C_p] = \begin{bmatrix} [C_{xx}] & [C_{xz}] \\ [C_{zx}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

4.4 Vecteur des forces de balourd

La masse de balourd est situé dans le nœud du disque. A partir de l'énergie cinétique de balourd, nous déterminons le vecteur de forces F_b , donné par :

$$\{F_b\} = \begin{Bmatrix} m_b d\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \\ 0 \\ m_b d\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

5 Equation globale du mouvement

Après avoir déterminé les matrices élémentaires des différents composant du rotor, l'étape d'assemblage est nécessaire afin d'obtenir les matrices globales de l'équation différentielle de mouvement.

La méthode d'assemblage des matrices élémentaire de la version h-p de la MEF est une combinaison de la méthode d'assemblage de la version h et la méthode d'assemblage de la version p en respectant le vecteur des coordonnées généralisées, la méthode d'assemblage est bien présenté dans la référence [64].

L'équation différentielle de mouvement d'un rotor fissuré est donnée par :

$$[M_g]\ddot{q} + ([C_p] + \Omega[G_g])\dot{q} + ([K_p] + [K_g])q = F_b \quad (3.27)$$

Où :

$[M_g]$ est la matrice masse globale qui comprend les matrice élémentaires de masse du disque $[M_e^{disque}]$ et de l'arbre $[M_e^{arbre}]$.

$[G_g]$ est la matrice gyroscopique globale qui comprend les matrice gyroscopique élémentaires du disque $[G_e^{disque}]$ et de l'arbre $[G_e^{arbre}]$.

$[K_g]$ est la matrice de rigidité globale de l'arbre qui comprend les matrices de rigidité élémentaires $[K_e^{arbre}]$ des éléments intact assemblés avec la matrice de de rigidité de l'élément fissuré en remplaçant la matrice de l'élément sain correspond à la position de la fissure par celle de l'élément fissuré.

$[C_p]$ et $[K_p]$ sont les matrices d'amortissement et de raideur des paliers.

q est le vecteur des coordonnées généralisées $\{q_u, q_w\}$.

F_b est le vecteur des forces de balourd.

Ω vitesse de rotation en rd/s.

Les fréquences naturelles des modes direct et indirect sont déterminées à partir des valeurs propres de la matrices $[S(\Omega)]$ qui sont données par :

$$[S(\Omega)] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M_g]^{-1}([K_g] + [K_p]) & -[M_g]^{-1}(\Omega[G_g] + [C_p]) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

CHAPITRE IV

RESULTATS ET INTERPRETATION

Table des matières

1	Introduction	46
2	Paramètres du modèle de rotor étudié	46
3	Etude de convergence	48
3.1	Convergence de la version h de MEF	48
3.2	Convergence de la version h-p de MEF	49
4	Etude d'un rotor avec une fissure transversale ouverte	51
4.1	Analyse fréquentielle	54
4.1.1	Etude à l'état stationnaire ($\Omega=0$)	55
4.1.2	Etude à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$)	60
4.2	Analyse de la réponse dynamique	64
5	Etude d'un rotor avec une fissure transversale respiratoire	72
5.1	Analyse fréquentielle	77
5.2	Analyse de la réponse dynamique	79

1 Introduction

Les travaux théoriques et expérimentaux sur les rotors fissurés ont montré que la présence d'une fissure dans un rotor induit une modification de la rigidité de l'arbre de ce rotor, ce qui entraîne des modifications détectables des propriétés modales (fréquences propres, amplitudes de vibration, mode propres...). Parmi toutes ces propriétés modales, l'étude de la variation des fréquences propres est la plus intéressante en tant qu'outil d'identification des fissures. Les variations des fréquences propres dues à une fissure peuvent être mesurées facilement à partir de quelques points accessibles sur le rotor fissuré.

Parmi les techniques les plus utilisées pour déterminer la rigidité d'un arbre fissuré en utilisant la MEF, on cite la méthode de flexibilité locale et la méthode de rigidité variable par rapport au temps (*time-varying stiffness*). La méthode de flexibilité locale est la méthode la plus utilisée, cette méthode est basée sur le calcul de facteur d'intensité de contrainte au niveau de la zone fissurée [44,45]. La méthode de rigidité variable est traduite par la variation des moments d'inertie de l'élément fissuré en fonction de l'angle de rotation, ce qui conduit à une rigidité variable par rapport au temps [12,13,33-39].

Dans ce chapitre, après avoir montré la rapidité de convergence de la version h-p de la MEF par rapport à la version classique h, nous utilisons la version h-p de la MEF et la méthode de rigidité variable pour étudier l'effet de la présence d'une fissure transversale ouverte et respiratoire sur le comportement dynamique d'un rotor. Dans ces études, nous étudions l'influence de la profondeur et la position de la fissure sur les fréquences propres et la réponse dynamique ainsi que les amplitudes et les orbites du rotor, Les résultats sont trouvés à l'aide d'un programme de calcul développé en MATLAB.

2 Paramètres du modèle de rotor étudié

Le modèle de rotor étudié dans ce chapitre est celui étudié théoriquement et expérimentalement par AL-Shudeifat [38,39], ce rotor est composé d'un arbre flexible en acier et deux disques identiques en aluminium et repose sur des paliers (Figure 4.1-4.2), Les caractéristiques géométriques et physiques de ce rotor sont données dans le tableau 4.1.

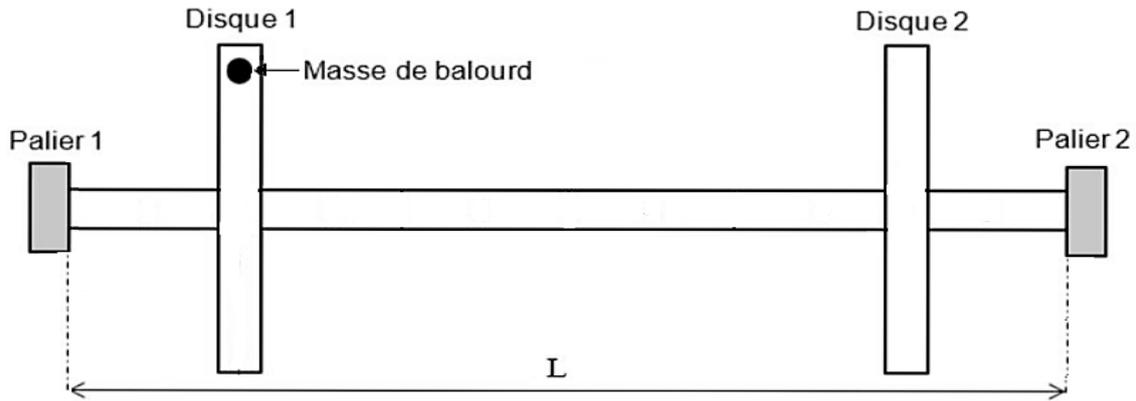


Figure 4.1. Modèle du rotor étudié.

Longueur de l'arbre (L)	0.724 m
Rayon de l'arbre (R)	9.525e-3 m
Masse volumique de l'arbre (ρ_a)	7800 kg/m ³ (Acier)
Module de Young (E)	2.1e11 N/m ²
Nombre de disque	2
Masse volumique du disque (ρ_d)	2700 kg/m ³ (Aluminium)
Rayons intérieurs des disques (R)	9.525e-3 m
Rayons extérieures des disques (r)	76.2e-3 m
épaisseur des disques (e)	14.27e-3 m
Position de disque 1	0.124 m (de palier 1)
Position de disque 2	0.6 m (de palier 1)
Rigidité des paliers (k_{xx}, k_{zz})	$k_{xx}=k_{zz}= 7 \cdot 10^7$ N/m
Amortissement des paliers (c_{xx}, c_{zz})	$c_{xx}=c_{zz}=5 \cdot 10^2$ Ns/m
Masse de balourd (m_b, d)	10^{-6} kg.m
Angle de phase de balourd (β)	$\pi/2$ rad

Tableau 4.1 : paramètres du modèle du rotor étudié.

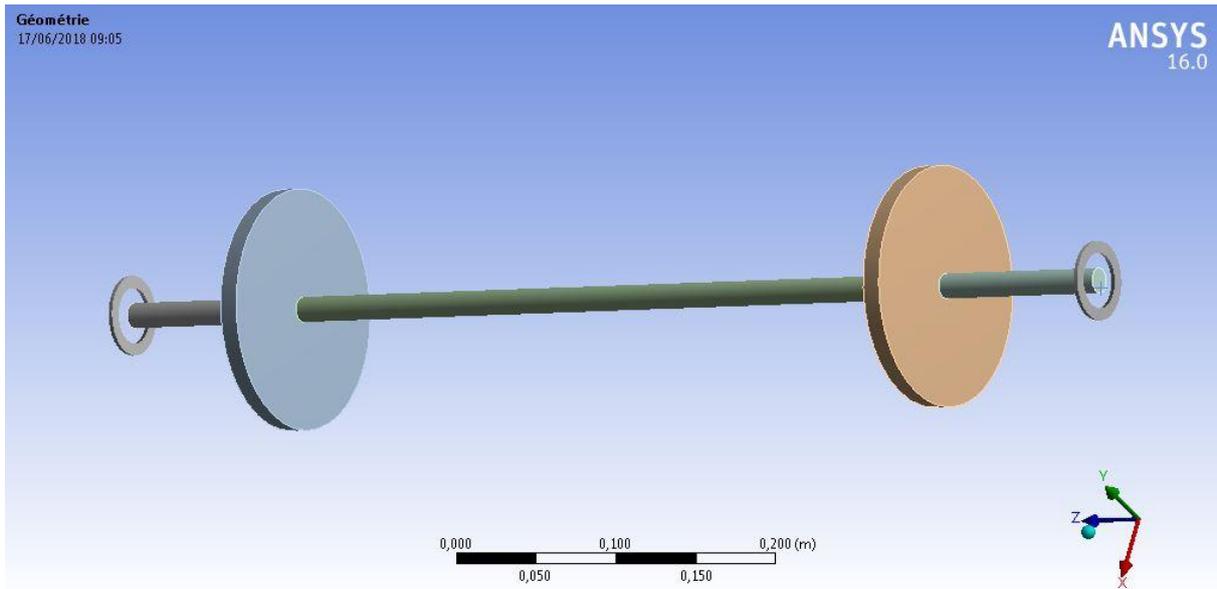


Figure 4.2. Modèle du rotor étudié (ANSYS Workbench).

3 Etude de convergence

L'étude de convergence est faite pour montrer la rapidité de convergence de la version h-p par rapport à la version classique h. Les caractéristiques du modèle utilisé dans cette étude sont données dans le tableau 4.1.

3.1 Convergence de la version h de MEF

La convergence de la version classique h de la MEF est obtenue en augmentant le nombre des éléments de maillage (n) avec un nombre de degré de polynômes $p=4$. Le tableau 4.2 représente la convergence de la version classique h de MEF des fréquences propres de trois premiers modes d'un rotor sain ($\mu=0$) à l'état stationnaire ($\Omega=0$). Les résultats de ce tableau sont représentés dans les figures 4.3-4.4 et 4.5.

Mode (Hz)	Nombre des éléments					
	n=6	n=12	n=18	n=24	n=36	n=48
1	49.0161	49.0152	49.0151	49.0151	49.0151	49.0151
2	150.1712	150.1556	150.1548	150.1546	150.1546	150.1545
3	353.4762	353.1575	353.1397	353.1366	353.1355	353.1353

Tableau 4.2 : Fréquences propres des trois premiers modes par rapport au nombre des éléments.

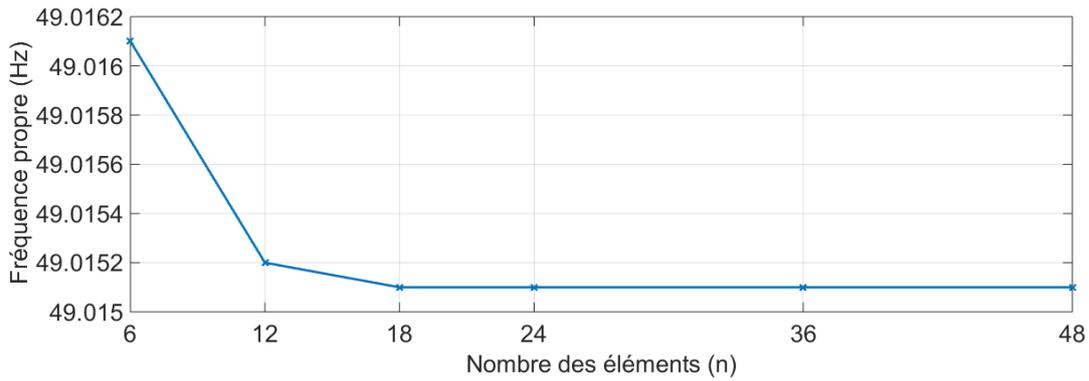


Figure 4.3 : Courbe de convergence du premier mode (version h).

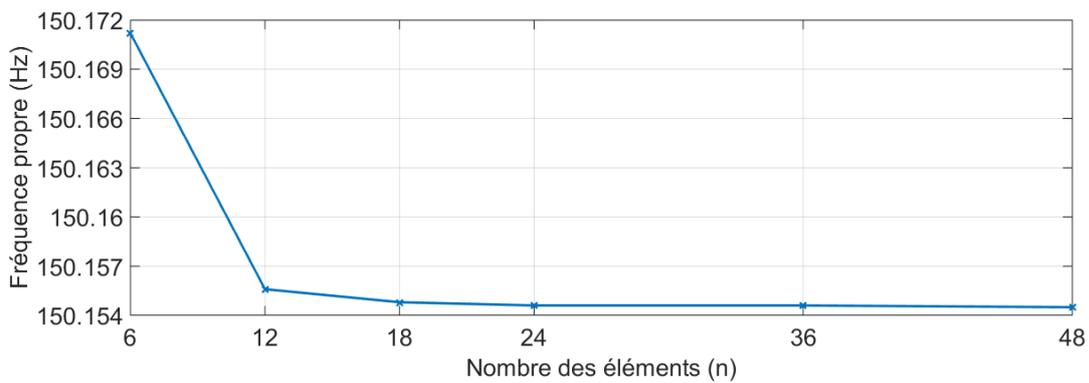


Figure 4.4 : Courbe de convergence du deuxième mode (version h).

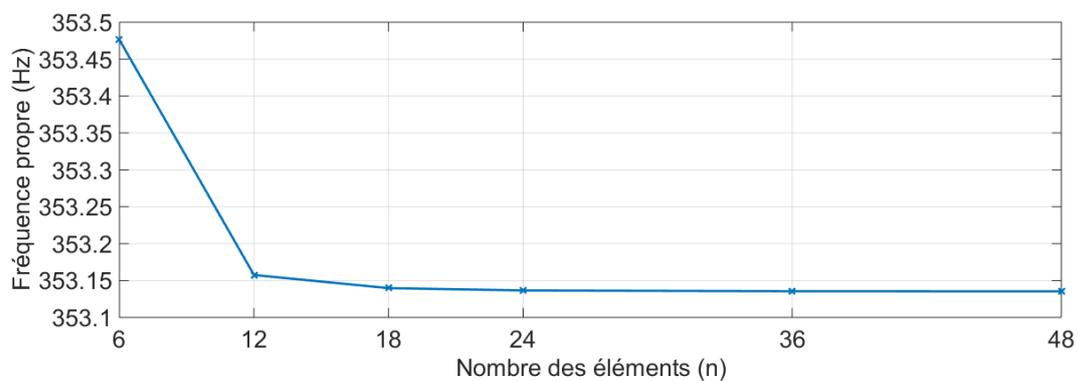


Figure 4.5 : Courbe de convergence du troisième mode (version h).

3.2 Convergence de la version h-p de MEF

Le tableau 4.3 montre la convergence de la version h-p des trois premiers modes, et la convergence est obtenue en fixant le nombre des éléments à 6 éléments et en variant le nombre de degré de polynômes p . Les résultats de ce tableau sont représentés dans les figures. 4.6-4.7 et 4.8

Mode (Hz)	Degré de polynômes					
	p=5	p=6	p=7	p=8	p=9	p=10
1	49.0152	49.0151	49.0151	49.0151	49.0151	49.0151
2	150.1547	150.1545	150.1545	150.1545	150.1545	150.1545
3	353.1396	353.1353	353.1352	353.1352	353.1352	353.1352

Tableau 4.3 : Fréquences propres des trois premiers modes par rapport au nombre de degré de polynômes.

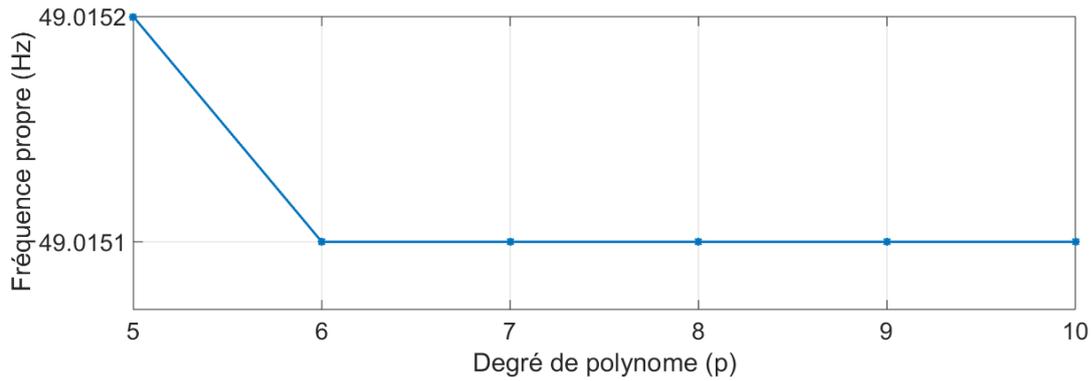


Figure 4.6 : Courbe de convergence du premier mode (version h-p).

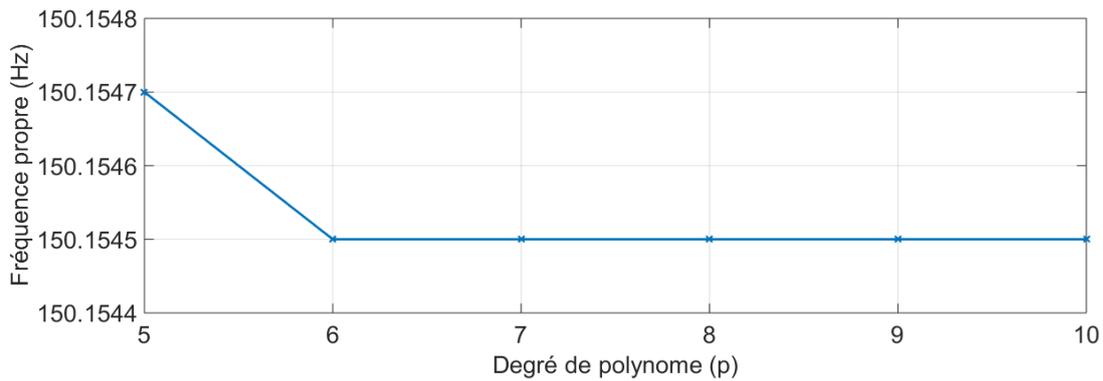


Figure 4.7 : Courbe de convergence du deuxième mode (version h-p).

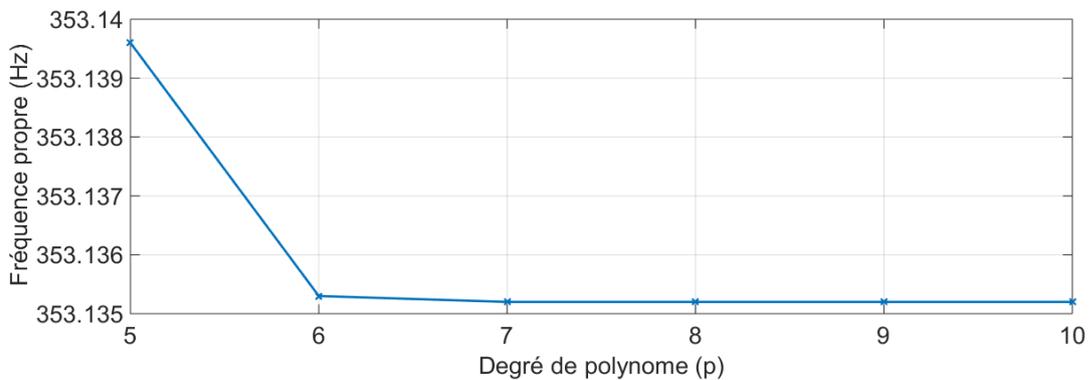


Figure 4.8 : Courbe de convergence du troisième mode (version h-p).

Le tableau 4.3 et les figures 4.3-4.5 montrent que, dans l'étude de convergence de la version classique h de la MEF, les valeurs des fréquences propres convergent à partir de 18 éléments pour le premier mode et à partir de 24 éléments pour le deuxième et le troisième mode, et dans le cas de la version h-p de la FEM, le tableau 4.3 et les figures 4.6 et 4.8 montrent que pour un rotor discrétisé en 6 éléments, les fréquences propres des trois premiers modes convergent à partir de 6 degrés de polynômes, ces résultats montrent la rapidité de convergence de la version h-p de la MEF par rapport à la version h.

Le modèle de rotor étudié dans ce chapitre sera discrétisé en 6 éléments et un degré de polynôme égal à 6 ($p=6$). Le modèle éléments finis de ce rotor est représenté dans la figure 4.9.

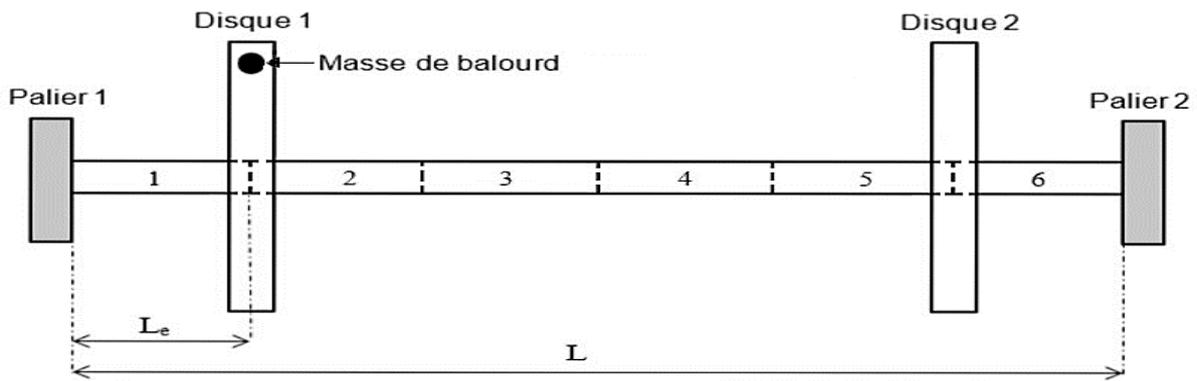


Figure 4.9: Modèle éléments finis du rotor étudié.

4 Etude d'un rotor avec une fissure transversale ouverte

Dans le cas d'une fissure transversale ouverte, la fissure reste ouverte pendant la rotation, Donc, les moments d'inerties de la section transversale de la fissure sont variable par rapport aux axes de repère fixe, cette variation est périodique.

Les figures 4.10, et 4.11 représentent la variation des moments d'inertie I_x , I_z , et I_{xz} par rapport à l'angle de rotation (Ωt) dans le cas où le rapport de profondeur ($\mu=0.5$), ces figures montre que, I_x , I_z , et I_{xz} varient périodiquement par rapport à l'angle de rotation, cela signifie que la rigidité d'un élément fissuré varie périodiquement par rapport à l'angle de rotation.

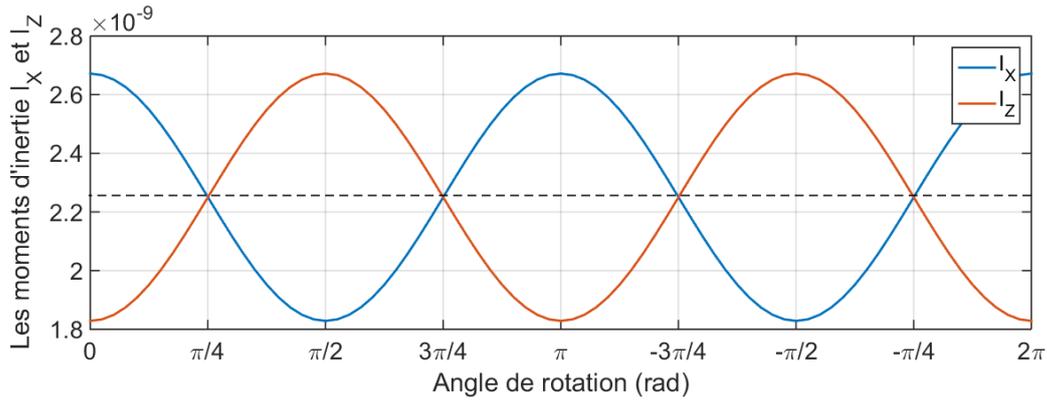


Figure 4.10 : Variation de I_X et I_Z par rapport à l'angle de rotation (Ωt).

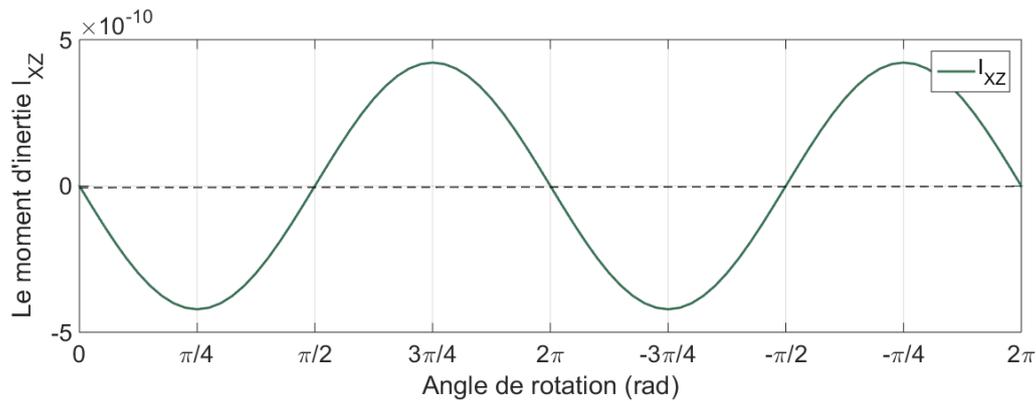


Figure 4.11 : Variation de I_{XZ} par rapport à l'angle de rotation (Ωt).

Les figures 4.12 et 4.13 montrent que les valeurs moyennes des moments d'inertie de la section transversale diminuent par rapport à la profondeur de la fissure, ce qui signifie que la rigidité de l'arbre diminue avec la propagation de la fissure.

La figure 4.14 représente la variation du moment d'inertie I_{XZ} par rapport à la profondeur de la fissure (μ). A partir de cette figure nous remarquons que la dissymétrie causé par la fissure varie périodiquement par rapport à la profondeur de la fissure, la dissymétrie est maximale dans le cas où le rapport de profondeur $\mu=0.5$, et dans le cas où $\mu=1$ la section transversale de l'élément fissuré est symétrique et $I_X=I_Z$ ce qui implique que $I_{XZ}=0$.

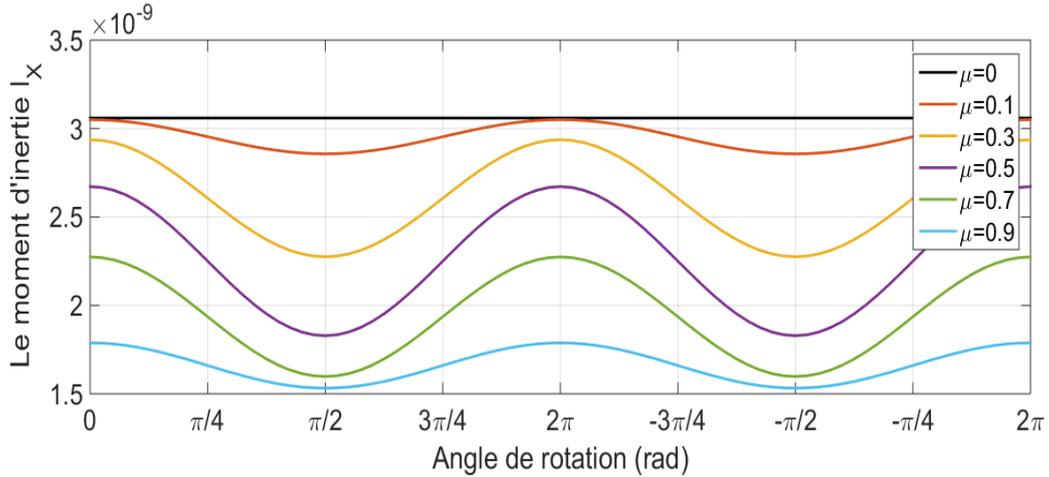


Figure 4.12 : Variation du moment d'inertie I_x par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).

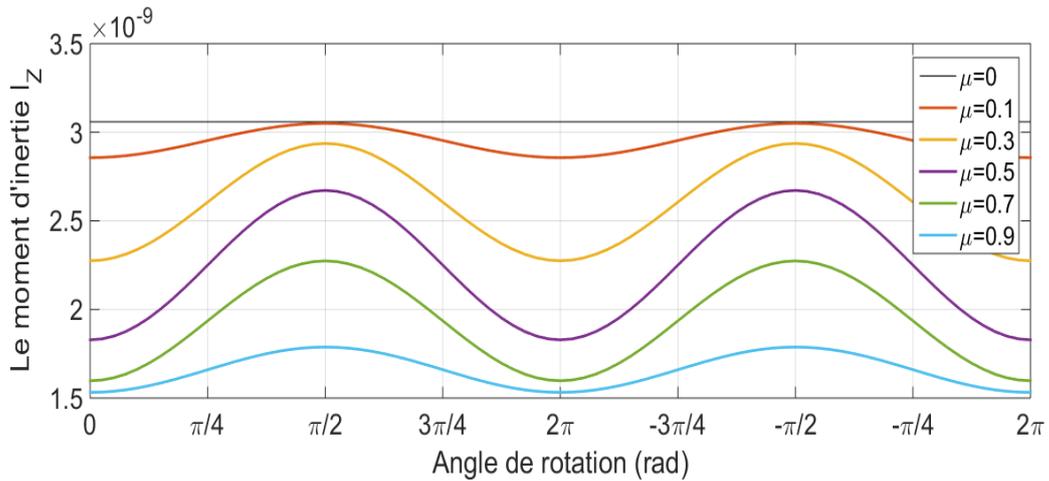


Figure 4.13 : Variation du moment d'inertie I_z par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).

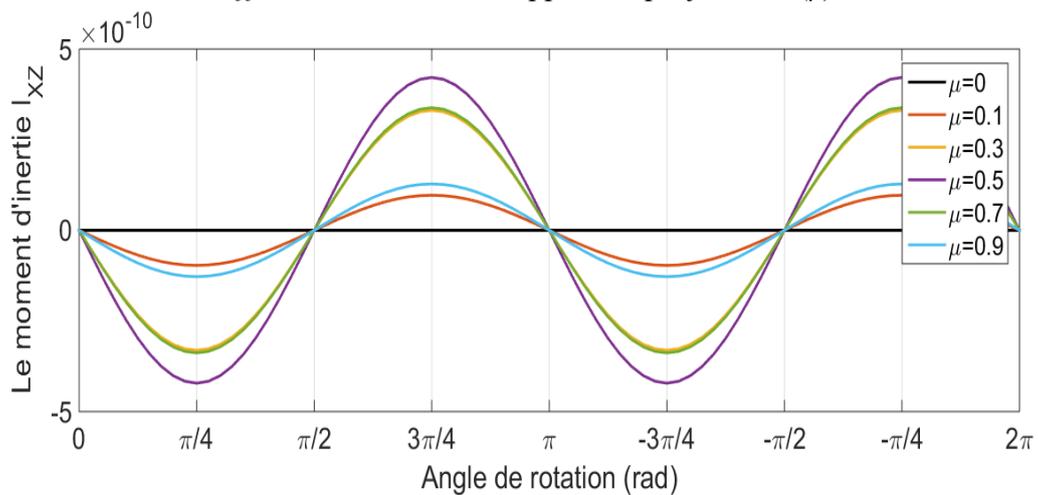


Figure 4.14 : Variation du moment d'inertie I_{xz} par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).

4.1 Analyse fréquentielle

Dans cette analyse, nous étudions l'influence de la profondeur et la position de la fissure sur les fréquences propres du rotor à l'état stationnaire ($\Omega=0$) et rotationnelle ($\Omega\neq 0$).

Comme mentionné précédemment, la rigidité d'un élément fissuré est variable par rapport à l'angle de rotation cause une variation dans les fréquences propres par rapport à l'angle de rotation, par contre dans les études expérimentales nous trouvons une seule valeur de fréquence pour le cas d'une fissure ouverte, pour notre étude nous linéarisons notre système d'équations en prenant la valeur moyenne de la rigidité qui signifie donc les valeurs moyennes des moments d'inerties.

Pour valider notre hypothèse, le tableau 4.4 représente l'écart entre les vitesses critiques (tr/min) trouvés par la version h-p de la MEF avec l'expérimental donné par Al-Shudeifat [39], et avec des résultats de simulation trouvés par ANSYS Workbench.

Le modèle de rotor étudié dans cette partie de validation est discrétisé en 12 éléments et la fissure est située à 22.2 cm par rapport au palier gauche, les caractéristiques géométrique et physiques de ce modèle sont données dans le tableau 4.2.

Le tableau 4.4 montre que, le pourcentage d'erreur entre les résultats trouvés par la version h-p de la MEF en prenant la valeur moyenne de la rigidité de l'élément fissuré avec les autres résultats n'atteint pas les 4%, cela prouve l'efficacité de la version h-p et la méthode de rigidité variable dans l'étude des rotors fissurés, et aussi la performance de notre programme de calcul.

	Vitesses critiques (tr/min)						
	Indirect	Direct					
Rapport de profondeur de la fissure (μ)	0	0.15	0.3	0.45	0.6	0.75	1
version h-p de la MEF	2863.8	3014	2997	2976	2952	2926	2874
Etude expérimentale d'AL-Shudeifat [39]	2869	3062	3050	3037	3015	2995	2970
ANSYS Workbench	2870.5	3018.7	3016.6	2992.5	2988.3	2989.2	2980.8
$\epsilon_{h-p/Exp}$ (%)	0.18	1.56	1.74	2	2.79	2.3	3.23
$\epsilon_{h-p/ANSYS}$ Workbench (%)	0.2	0.15	0.65	0.5	1.22	2.1	3.58

Tableau 4.4: Comparaison entre les résultats de la version h-p de la MEF par des résultats numérique et de l'expérimental.

4.1.1 Etude à l'état stationnaire ($\Omega=0$)

Dans cette analyse, nous étudions l'influence d'une fissure transversale ouverte sur les fréquences propres du rotor où $\Omega=0$, nous varions la profondeur et la position de la fissure et nous montrons l'effet de la fissure.

Les tableaux 4.5, 4.6 et 4.7 représentent respectivement la variation des fréquences propres de trois premiers modes (direct et indirect) par rapport à la profondeur de la fissure (μ) dans le cas où la fissure est au niveau de premier, deuxième et troisième élément.

Les résultats de ces tableaux sont illustrés dans les figures 4.15 à 4.23.

Mode		Rapport de profondeur de la fissure (μ)										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	indirect	49.02	48.98	48.91	48.84	48.76	48.66	48.55	48.44	48.32	48.19	48
	direct	49.02	48.98	48.92	48.85	48.75	48.67	48.55	48.46	48.33	48.2	48
2	indirect	150.2	149.8	149.18	148.4	147.6	146.65	145.68	144.65	143.55	142.37	141.1
	direct	150.2	149.81	149.23	148.5	147.65	146.78	145.8	144.78	143.65	142.43	141.1
3	indirect	353.1	351.85	349.65	347	344	340.9	337.6	343.3	331.3	327.4	323.74
	direct	353.1	351.9	349.8	347.2	344.4	341.3	338	334.7	331	327.65	323.74

Tableau 4.5 : variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

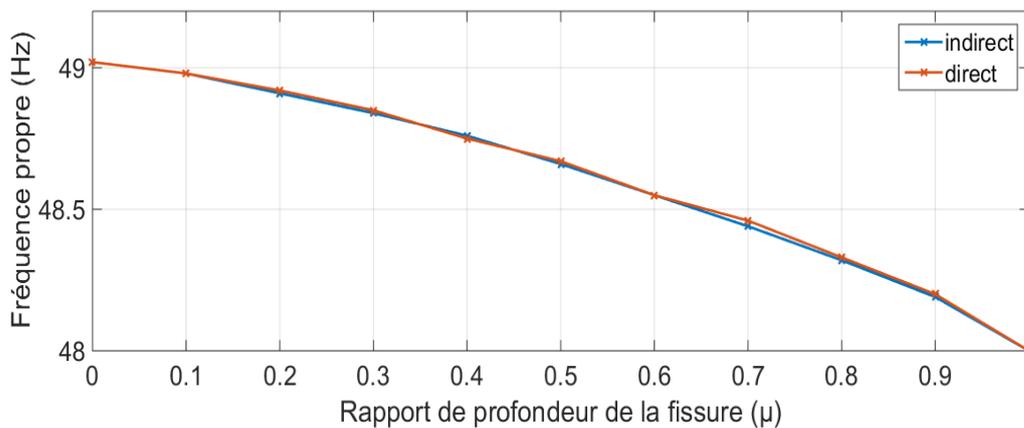


Figure 4.15 : Courbe de variation des fréquences propres du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

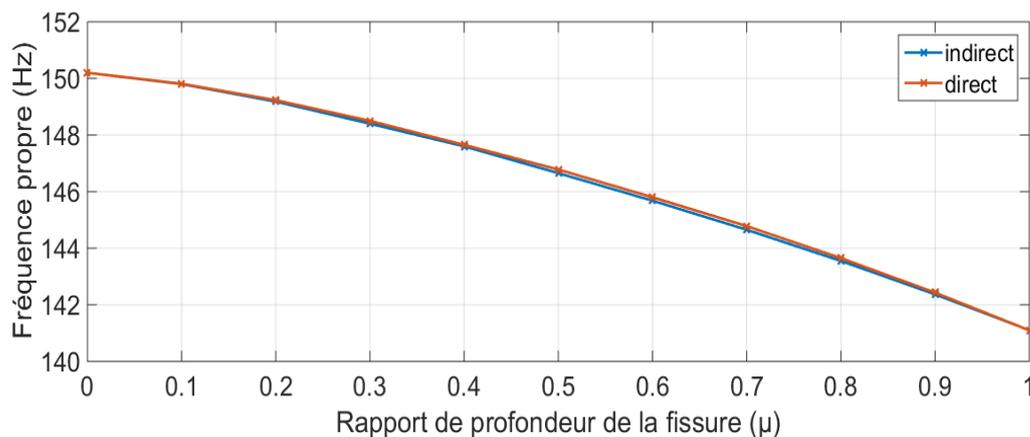


Figure 4.16 : Courbe de variation des fréquences propres du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

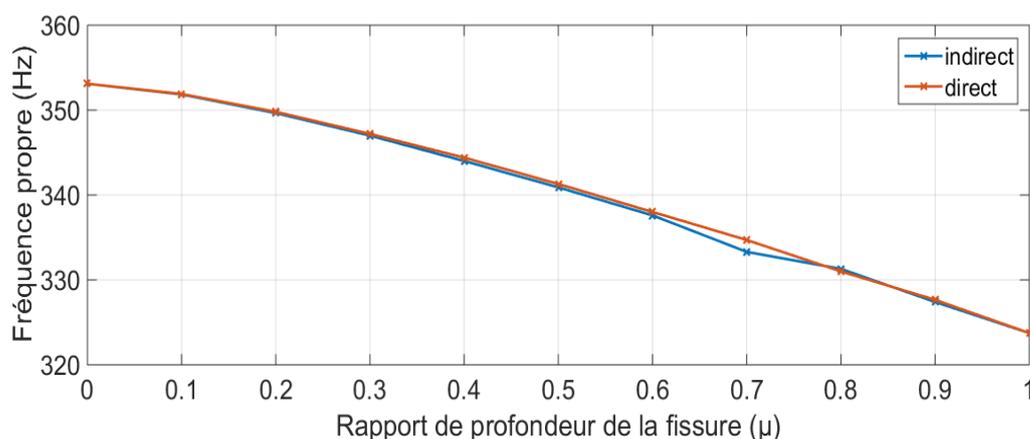


Figure 4.17 : Courbe de variation des fréquences propres du troisième par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

Mode (Hz)	Rapport de profondeur de la fissure (μ)											
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
1	indirect	49.02	48.85	48.57	48.23	47.84	47.42	46.97	46.5	46	45.48	44.9
	direct	49.02	48.85	48.58	48.24	47.86	47.45	47	46.53	46.03	45.49	44.9
2	indirect	150.2	149.3	147.9	146.4	144.7	142.88	141	139.3	137.49	135.6	133.7
	direct	150.2	149.4	148	146.5	144.8	143	141.2	139.4	137.58	135.7	133.7
3	indirect	353.1	352.3	351	349.4	347.65	345.85	344	342.16	340.27	338.34	336.2
	direct	353.1	352.3	351	349.5	347.75	345.97	344.15	342.3	340.37	338.38	336.2

Tableau 4.6 : variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

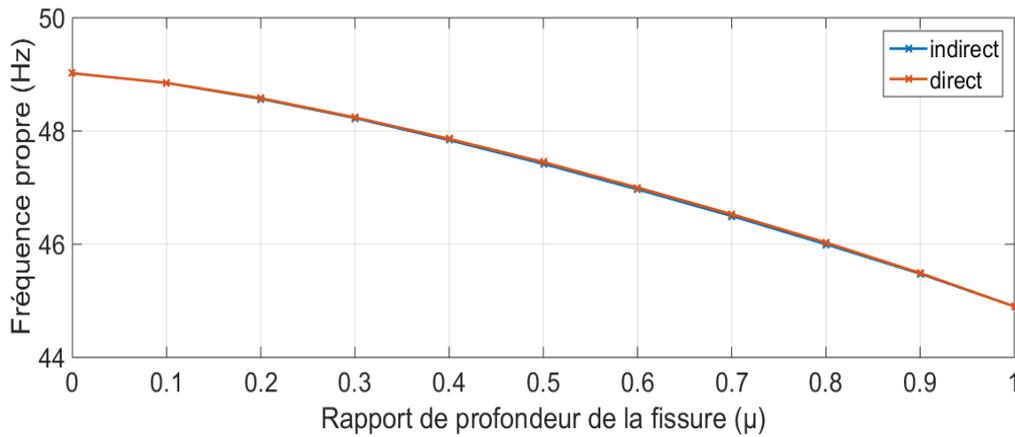


Figure 4.18 : Courbe de variation des fréquences propres du premier par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

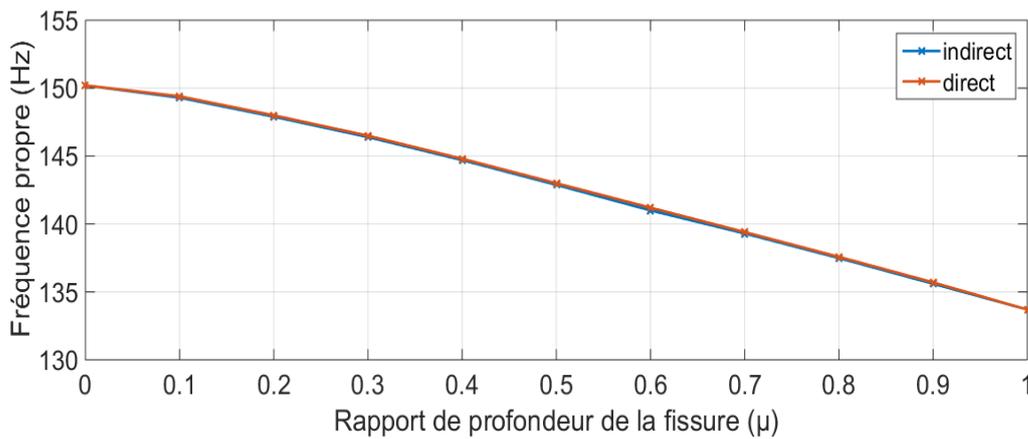


Figure 4.19 : Courbe de variation des fréquences propres du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

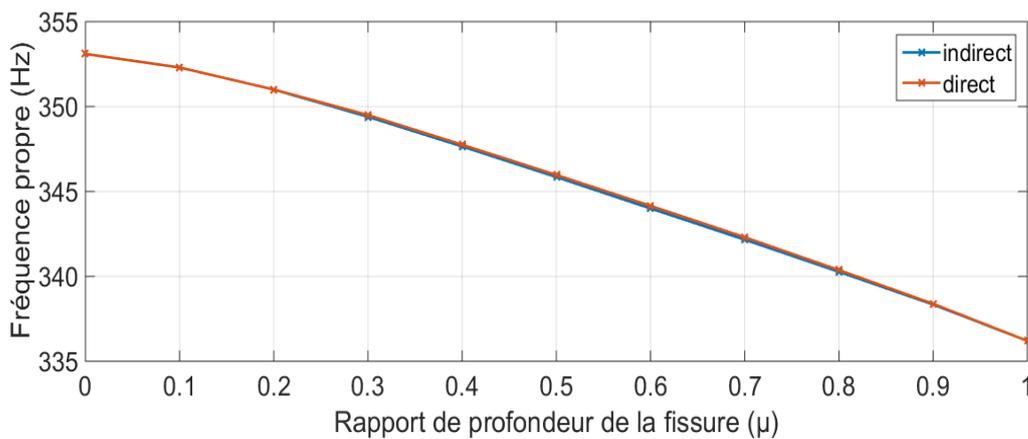


Figure 4.20 : Courbe de variation des fréquences propres du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

Mode		Rapport de profondeur de la fissure (μ)										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	indirect	49.02	48.77	48.36	47.86	47.3	46.7	46.1	45.48	44.83	44.14	43.3
	direct	49.02	48.78	48.39	47.9	47.38	46.8	46.2	45.55	44.89	44.18	43.3
2	indirect	150.2	149.98	149.71	149.38	149	148.6	148.2	147.8	147.37	146.93	146.45
	direct	150.2	150	149.73	149.4	149.05	148.65	148.26	147.84	147.41	146.95	146.45
3	indirect	353.1	352.1	350.4	348.3	346.1	343.8	341.45	339.1	336.8	334.4	331.9
	direct	353.1	352.14	350.5	348.5	346.35	344	341.75	339.1	337	334.53	331.9

Tableau 4.7 : variation des fréquences propres par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

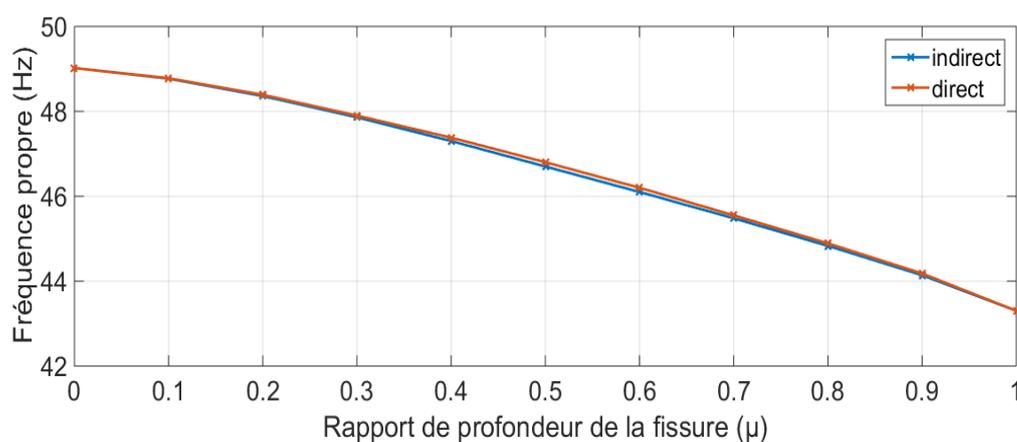


Figure 4.21 : Courbe de variation des fréquences propres du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

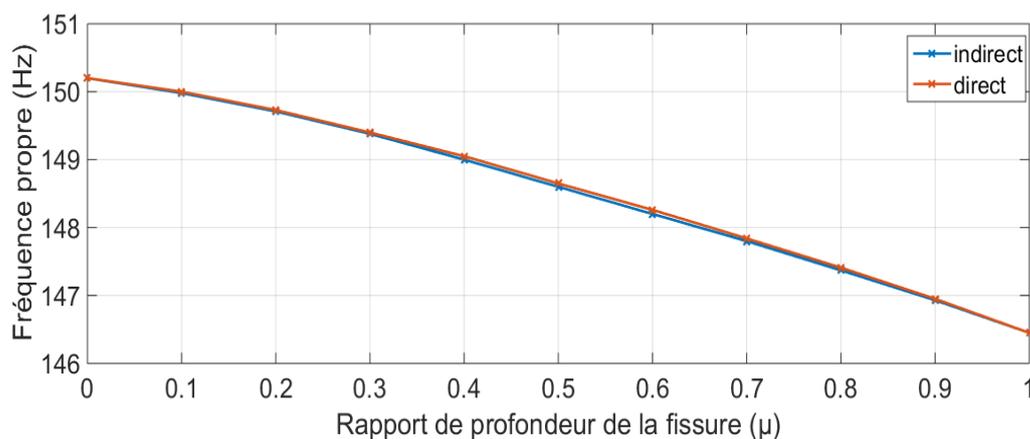


Figure 4.22: Courbe de variation des fréquences propres du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

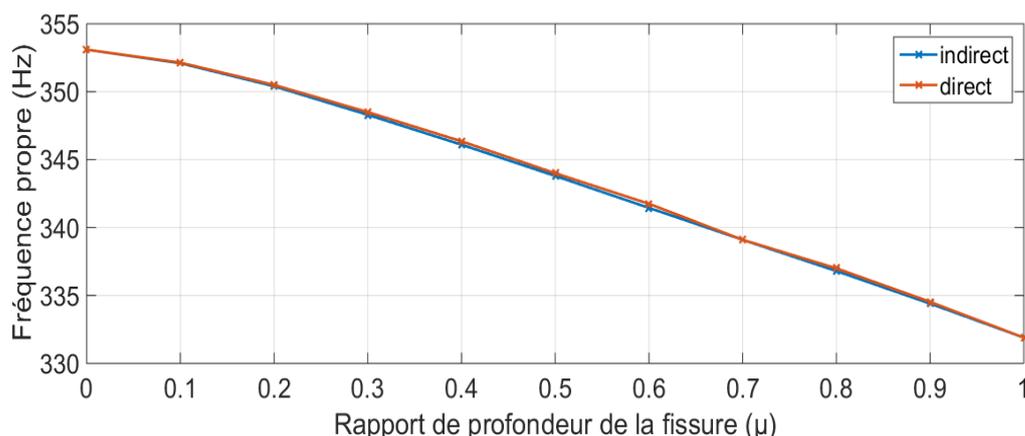


Figure 4.23 : Courbe de variation des fréquences propres du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

Les tableaux 4.5, 4.6 et 4.7 et les figures 4.15-4.23 montrent que les fréquences propres de mode direct et indirect d'un rotor fissuré diminuent par rapport aux fréquences propres d'un rotor sain, Les fréquences propres du rotor diminuent avec la propagation de la fissure quelle que soit leur position, ceci en raison de la diminution de la rigidité de l'arbre due à la fissure.

Les fréquences naturelles diminuent de façon linéaire à partir de la profondeur $\mu = 0,3$, une petite divergence entre les fréquences propres des modes direct et indirect apparaît entre les valeurs $\mu=0.3$ et $\mu=0.7$, cette divergence est due à la dissymétrie de la géométrie du rotor provoquée par la présence de la fissure (I_{XZ} atteint sa valeur maximale).

Le tableau 4.8 représente la variation des fréquences propres par rapport à la position de la fissure dans le cas où $\mu=0.5$, ce tableau montre que, quand la fissure s'approche du milieu de l'arbre, les fréquences du premier mode diminuent et dans le cas du deuxième mode, les fréquences propres prennent leur valeur minimale lorsque la fissure se situe dans le deuxième élément; par conséquent, la courbe de variation des fréquences propres par rapport à la position de la fissure est similaire à la courbe du mode de déformation de l'arbre.

Elément fissuré	Mode (Hz)					
	1		2		3	
	indirect	direct	indirect	direct	indirect	direct
1	48.66	48.67	146.65	146.78	340.9	341.3
2	47.42	47.45	142.88	143	345.85	345.97
3	46.7	46.8	148.6	148.65	343.8	344

Tableau 4.8: Variation des fréquences propres par rapport à la position de fissure dans le cas où le rapport de profondeur de la fissure $\mu=0.5$.

4.1.2 Etude à l'état rotationnelle ($\Omega \neq 0$)

Dans cette étude, nous étudions l'influence de la profondeur et la position d'une fissure transversale ouverte sur les fréquences critiques du rotor déterminées à partir de diagramme de Campbell.

Dans les tableaux 4.9, 4.10 et 4.11, nous représentons respectivement la variation des fréquences critiques de trois premiers modes (direct et indirect) par rapport à la profondeur de la fissure (μ) dans le cas où la fissure est au niveau du premier, deuxième et troisième élément et les résultats de ces tableaux sont illustrés dans les figures 4.24 à 4.32.

Mode (Hz)		Rapport de profondeur de la fissure (μ)										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	indirect	47.73	47.68	47.65	47.57	47.5	47.42	47.33	47.23	47.12	47	46.87
	direct	50.42	50.37	50.3	50.2	50.12	50	49.88	49.75	49.62	49.47	49.3
2	indirect	147.2	146.9	146.4	145.8	145.1	144.3	143.5	142.6	141.6	140.5	139.3
	direct	152.9	152.5	151.8	151	150	149	147.9	146.7	145.5	144.2	142.8
3	indirect	345.2	343.6	340.7	337.1	332.9	328.3	323.4	318.3	312.9	307.4	301.4
	direct	358.4	357.4	355.7	353.7	351.5	349.3	347	344.8	342.4	340.2	337.8

Tableau 4.9 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

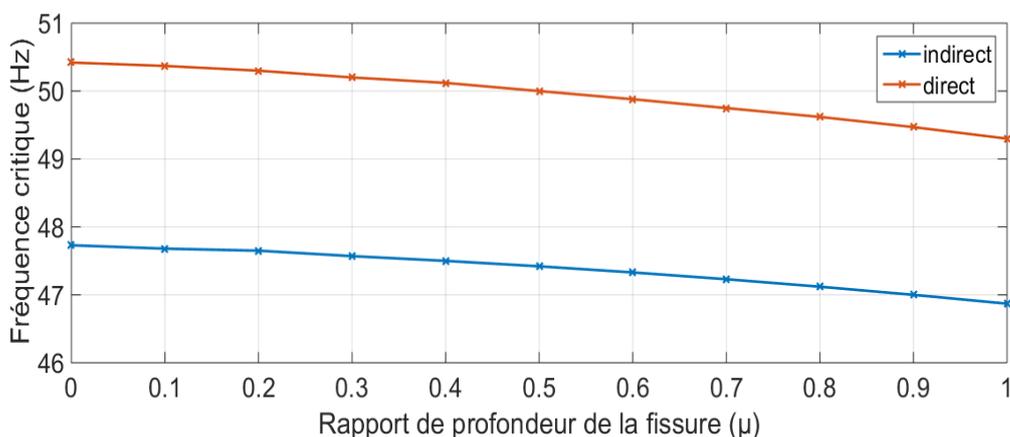


Figure 4.24 : Courbe de variation des fréquences critiques du premier mode rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

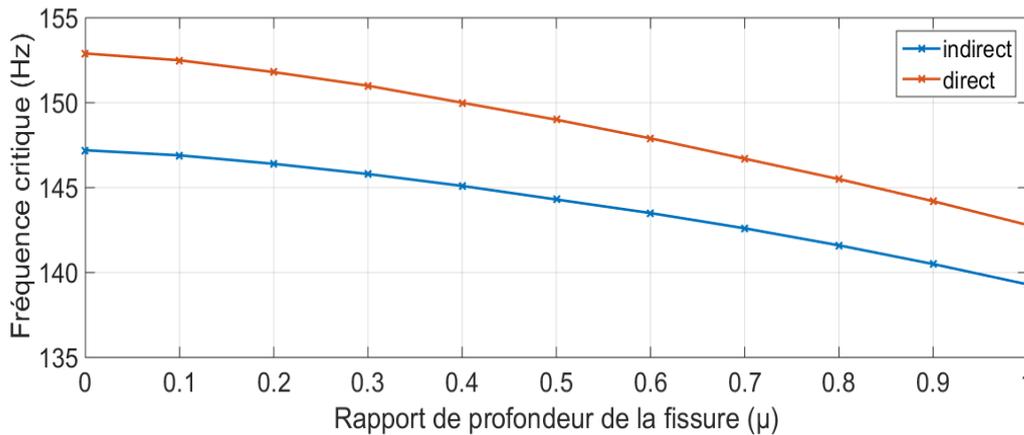


Figure 4.25 : Courbe de variation des fréquences critiques du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

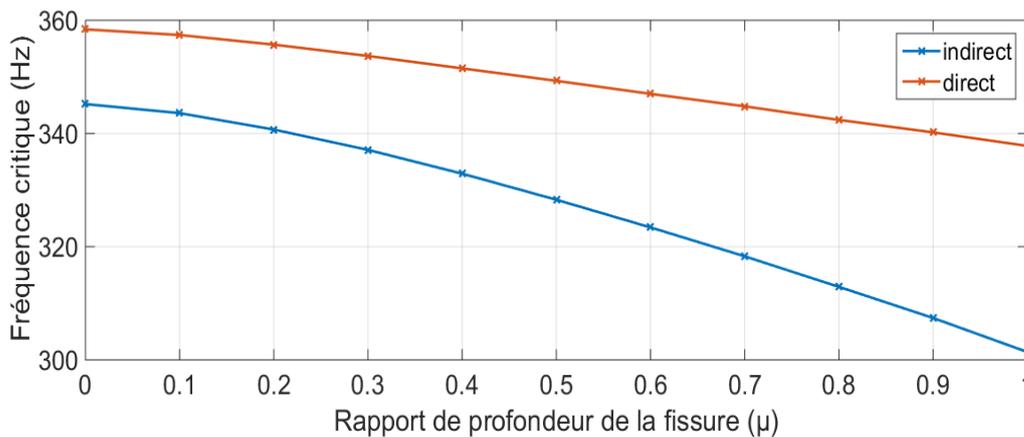


Figure 4.26 : Courbe de variation des fréquences critiques du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

Mode (Hz)	Rapport de profondeur de la fissure (μ)											
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
1	indirect	47.73	47.57	47.28	46.95	46.57	46.15	45.72	45.25	44.75	44.22	43.63
	direct	50.42	50.23	49.95	49.62	49.23	48.82	48.37	47.9	47.4	46.85	46.27
2	indirect	147.2	146.4	145	143.3	141.6	139.7	137.9	136.1	134.2	132.3	130.3
	direct	152.9	152.2	150.9	149.3	147.7	146	144.3	142.6	140.8	139	137.2
3	indirect	345.2	344.7	343.8	342.7	341.4	340.1	338.8	337.3	335.8	334.2	332.5
	direct	358.4	357.4	355.8	353.9	351.8	349.7	347.6	345.4	343.3	341.1	338.7

Tableau 4.10 : Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

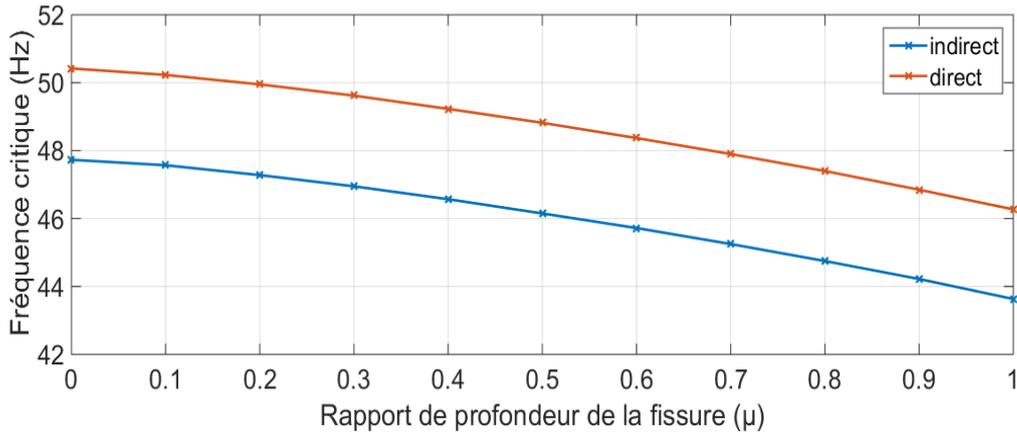


Figure 4.27 : Courbe de variation des fréquences critiques du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

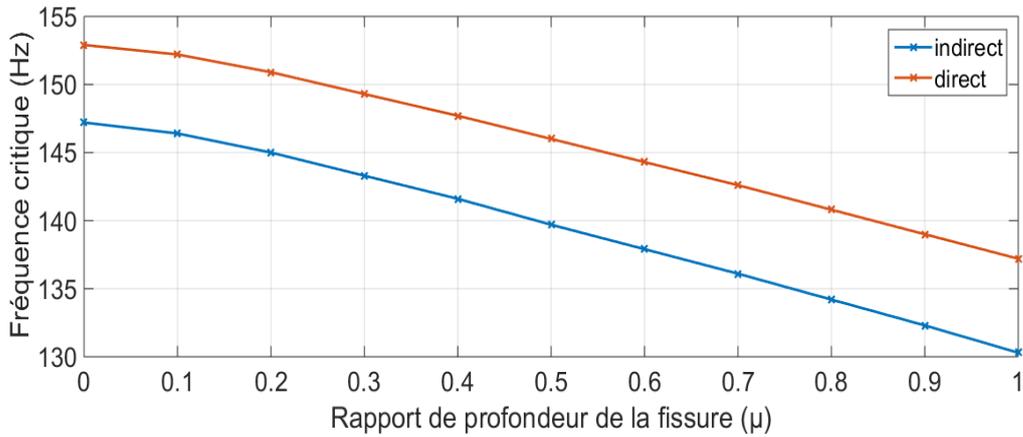


Figure 4.28 : Courbe de variation des fréquences critiques du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

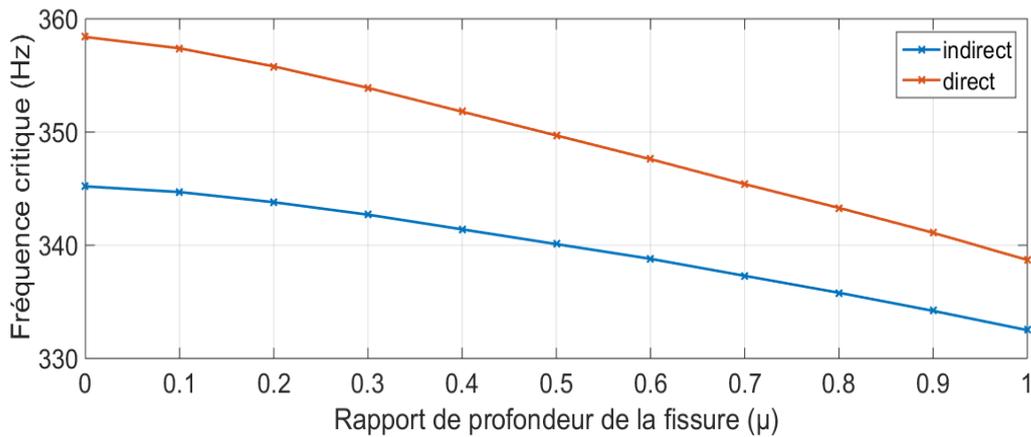


Figure 4.29 : Courbe de variation des fréquences critiques du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

Mode (Hz)		Rapport de profondeur de la fissure (μ)										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	indirect	47.73	47.5	47.1	46.63	46.08	45.53	44.93	44.33	43.67	43	42.25
	direct	50.42	50.15	49.73	49.25	48.68	48.08	47.47	46.82	46.13	45.4	44.63
2	indirect	147.2	147.1	146.8	146.4	146.1	145.7	145.3	144.8	144.4	144	143.4
	direct	152.9	152.8	152.5	152.2	151.8	151.4	151.1	150.7	150.3	149.8	149.3
3	indirect	345.2	344.4	342.9	341.3	339.4	337.4	335.4	333.4	331.3	329.2	326.9
	direct	358.4	357.3	355.4	353.2	350.9	348.4	345.9	343.4	340.8	338.2	335.4

Tableau 4.11: Variation des fréquences critiques par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

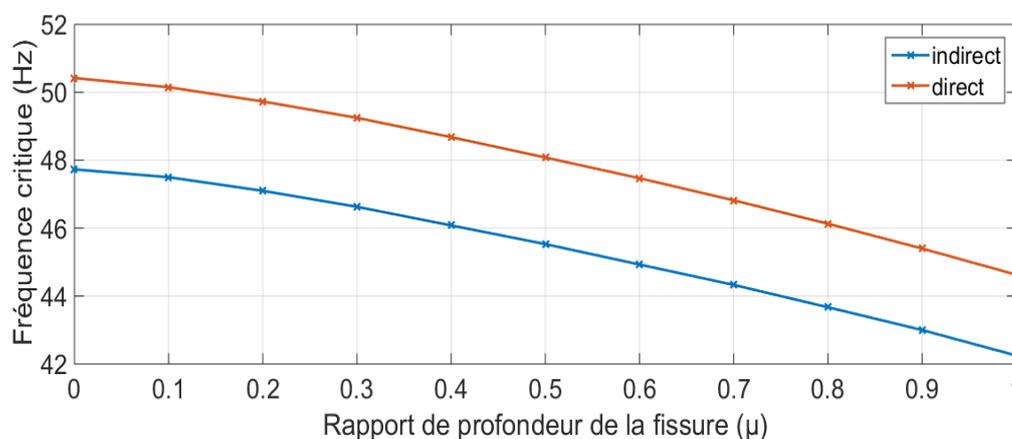


Figure 4.30 : Courbe de variation des fréquences critiques du premier mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

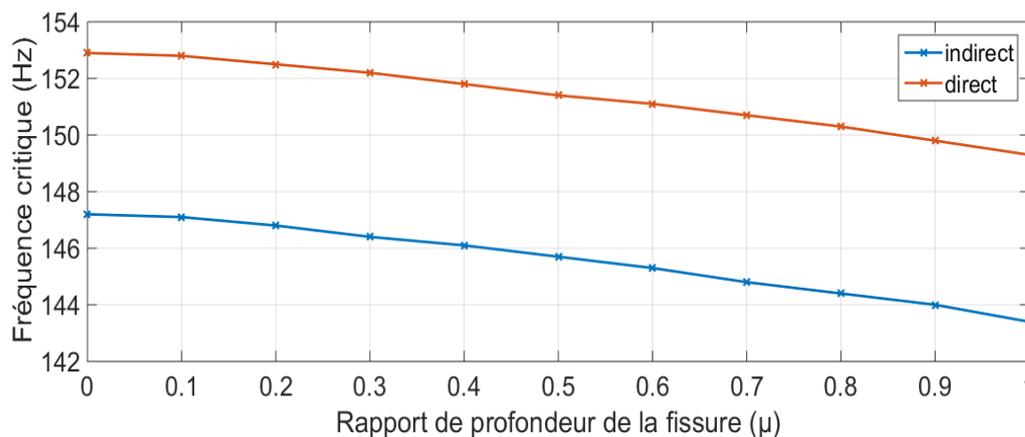


Figure 4.31 : Courbe de variation des fréquences critiques du deuxième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

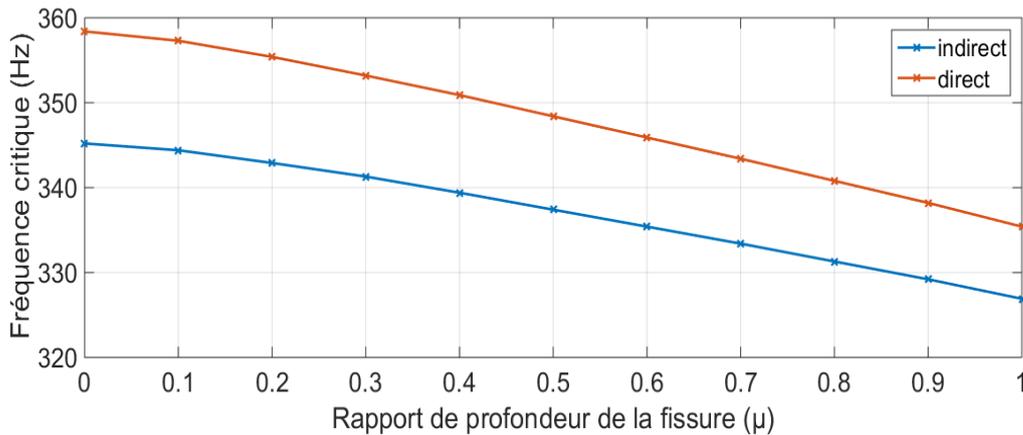


Figure 4.32 : Courbe de variation des fréquences critiques du troisième mode par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

Les tableaux 4.9, 4.10 et 4.11 et les figures 4.24-4.32 montrent que les fréquences critiques de mode direct et indirect d'un rotor fissuré diminuent par rapport aux fréquences critiques d'un rotor sain.

Les fréquences critiques du rotor diminuent quand la fissure se propage quelle que soit leur position, ceci en raison de la diminution de la rigidité de l'élément fissuré.

Le tableau 4.12 représente la variation des fréquences propres par rapport à la position de la fissure dans le cas où $\mu=0.5$, ce tableau montre que, la courbe de variation des fréquences critiques par rapport à la position de la fissure est similaire à la courbe du mode de déformation de l'arbre.

Elément fissuré	Mode (Hz)					
	1		2		3	
	indirect	direct	indirect	direct	indirect	direct
1	47.42	50	144.3	149	328.3	349.3
2	46.15	48.82	139.7	146	340.1	349.7
3	45.53	48.08	145.7	151.4	337.4	348.4

Tableau 4.12 : Variation des vitesses critiques par rapport à la position de fissure dans le cas où le rapport de profondeur de la fissure $\mu=0.5$

4.2 Analyse de la réponse dynamique

Dans cette analyse, nous étudions l'influence de la profondeur et la position d'une fissure transversale ouverte sur la réponse dynamique du rotor, en prenant compte l'effet de la non-linéarité due à la variation de la rigidité par rapport au temps.

L'étude de la variation des amplitudes et des orbites du centre de l'arbre permet d'identifier la présence d'une fissure dans les rotors.

La réponse dynamique transitoire des nœuds du rotor est obtenue en résolvant les équations du mouvement à l'aide de l'algorithme implicite d'intégration temporelle de Newmark basé sur l'accélération moyenne (correspondant au jeu de paramètres $\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1/4$) [65], cette méthode est choisie en raison de sa stabilité. La méthode de Newmark permet la résolution numérique d'équations différentielles du second ordre. Elle convient, non seulement pour des systèmes différentiels linéaires, mais aussi pour des systèmes fortement non-linéaires, Dans le second cas de systèmes, le calcul nécessite une boucle d'itération supplémentaire liée au non linéarité à l'intérieur de chaque pas de temps [65]. (**Annexe B**)

La figure 4.33 représente la réponse dynamique et l'orbite du centre du rotor au voisinage de la première vitesse critique (3000 tr/min) au niveau du nœud 2, cette figure montre que les amplitudes des déplacements horizontal et vertical tendent vers l'infini, ceci implique qu'on a un phénomène de résonance ; la fréquence propre du rotor est égale à la fréquence d'excitation ($\Omega/60$). Dans ce stade l'analyse de la réponse dynamique du rotor est impossible à cause de l'inexistence d'un signal clair pour faire l'étude. L'étude au voisinage des vitesses sub-critiques ($1/2, 1/3, ..$ de la vitesse critique) est la technique la plus utilisée pour étudier la réponse dynamique des rotors fissurés tout en évitant le phénomène de résonance.

La réponse dynamique d'un rotor fissuré au voisinage des vitesses sub-critiques diffère de la réponse d'un rotor sain, et les variations des amplitudes et des orbites peuvent être utilisées comme un moyen pour identifier la présence des fissures.

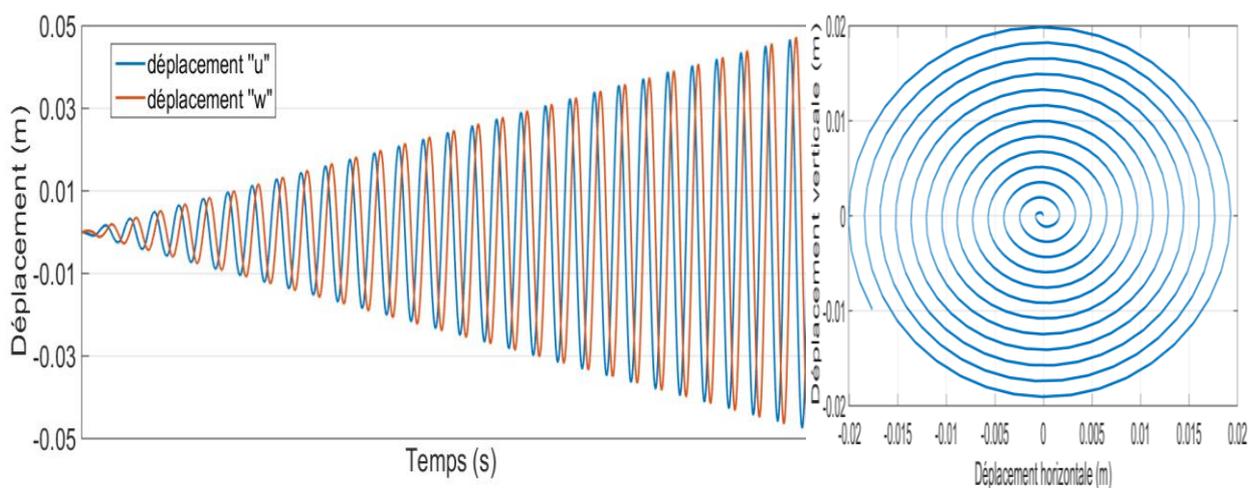


Figure 4.33 : Réponse dynamique et orbite du centre du rotor au voisinage de la première vitesse critique.

Les figures 4.34 et 4.35 représentent la réponse dynamique, l'orbite et l'amplitude $\sqrt{(u^2 + w^2)}$ du centre du rotor au niveau du nœud 2 d'un rotor sain et d'un rotor fissuré au voisinage de la première vitesse sub-critique (1500 tr/min) dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément et $\mu=0.8$, les paramètres de la force excitatrice de balourd est donnée dans le tableau 4.1. Ces figures montrent que, l'amplitude des déplacements d'un rotor fissuré augmentent par rapport à un rotor sain. où dans le cas d'un rotor sain les amplitudes ne dépassent pas 0.4 mm par contre dans le cas où $\mu=0.8$; les amplitudes dépassent 0.4 mm.

Ces figures montrent aussi que, les orbites d'un rotor fissuré diffèrent des orbites d'un rotor sain, une boucle apparaît à l'intérieur de l'orbite, elle est due à la présence de la fissure. Cette boucle a une relation avec la profondeur de la fissure et les vitesses sub-critiques.

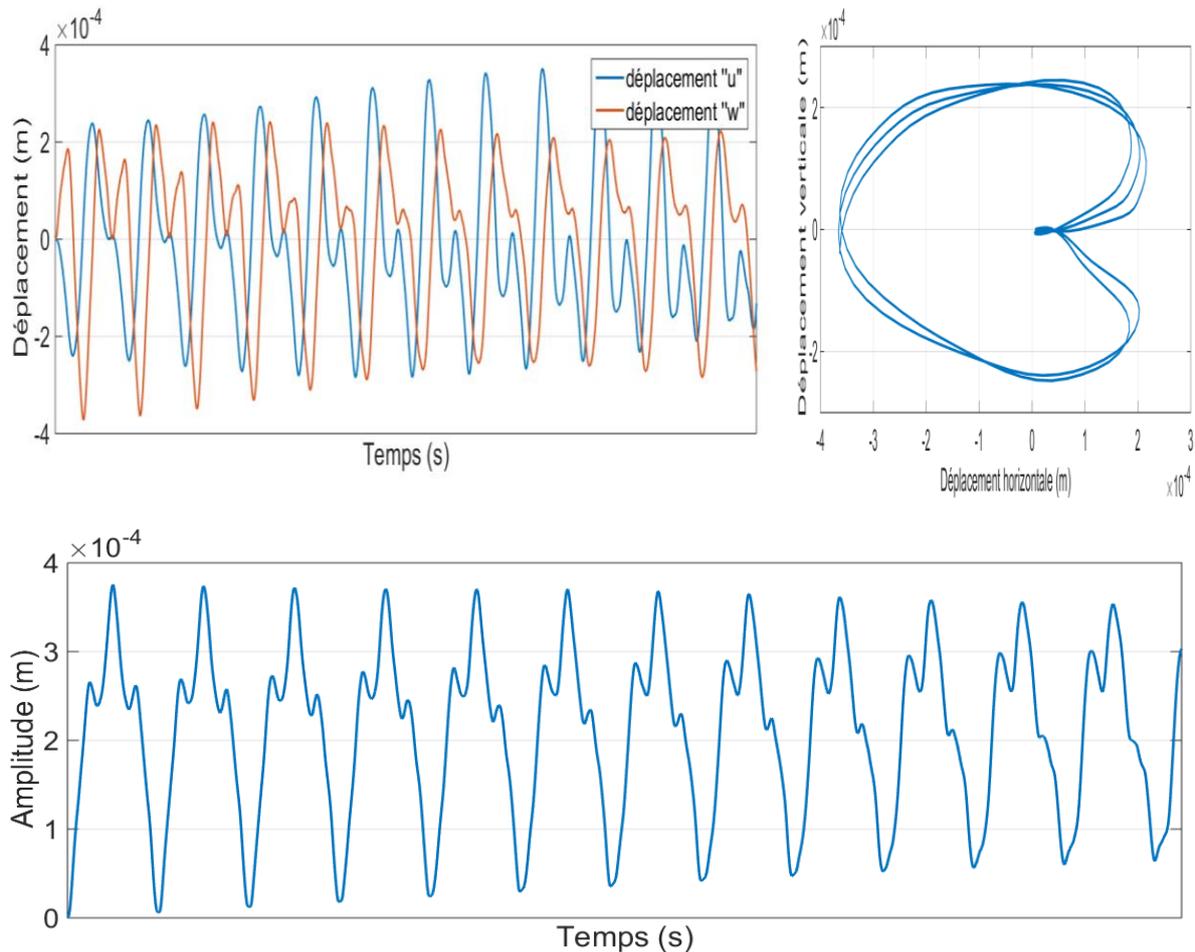


Figure 4.34 : Réponse dynamique, orbite et amplitude du centre d'un rotor sain au voisinage de la première vitesse sub-critique.

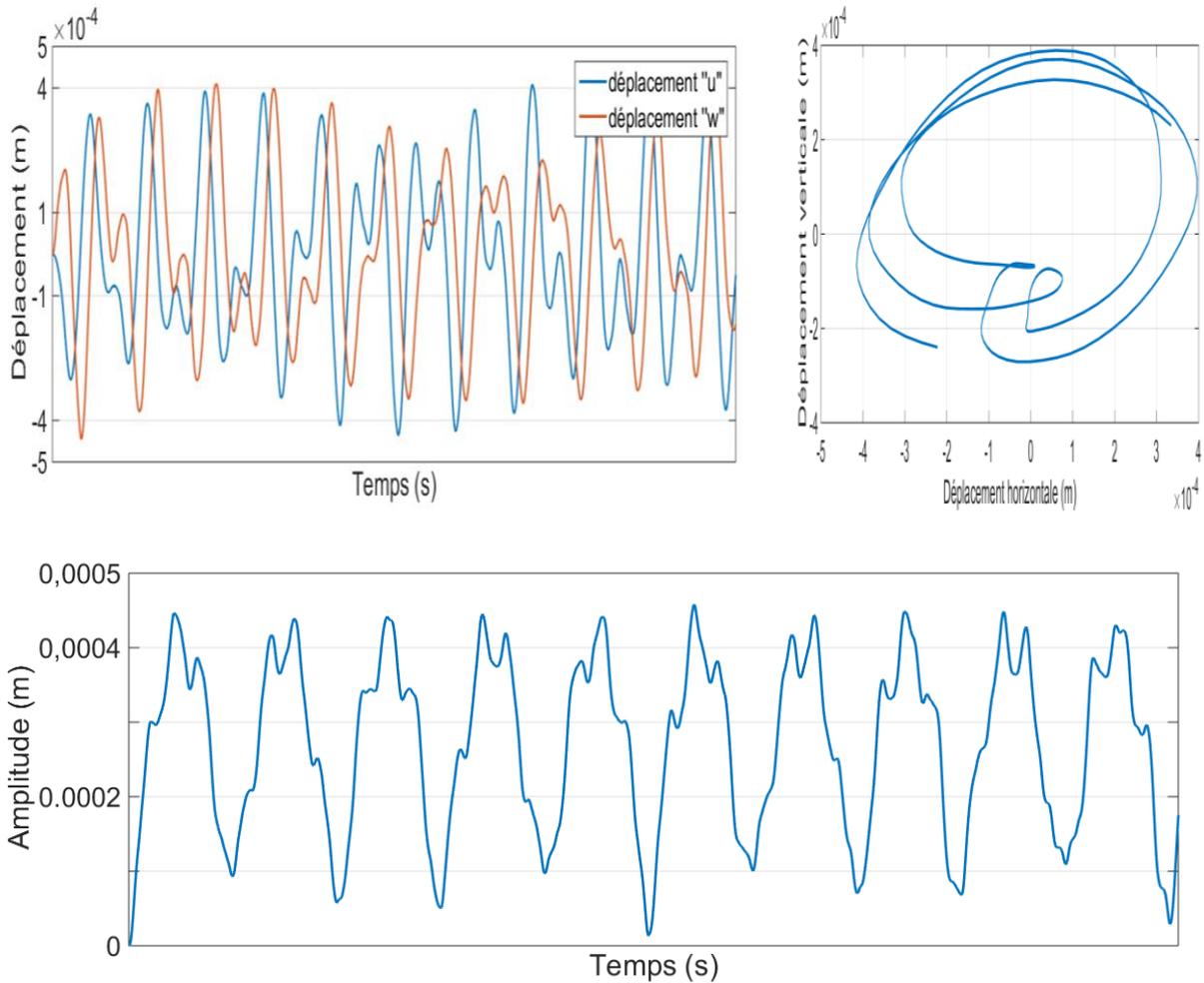


Figure 4.35 : Réponse dynamique, orbite et amplitude du centre d'un rotor fissuré ($\mu=0.8$) au voisinage de la première vitesse sub-critique.

Pour identifier la position de la fissure à partir de l'analyse de la réponse dynamique au voisinage de la première vitesse sub-critique (1500 tr/min), les figures 4.36, 4.37 et 4.38 représentent respectivement la réponse dynamique et l'amplitude du centre de rotor au niveau du nœud 4 dans le cas où la fissure est au niveau de premier, deuxième et troisième élément avec $\mu=0.7$. Ces figures montrent que les amplitudes des déplacements au voisinage de la première vitesse sub-critique augmentent, quand la fissure s'approche du milieu du rotor.

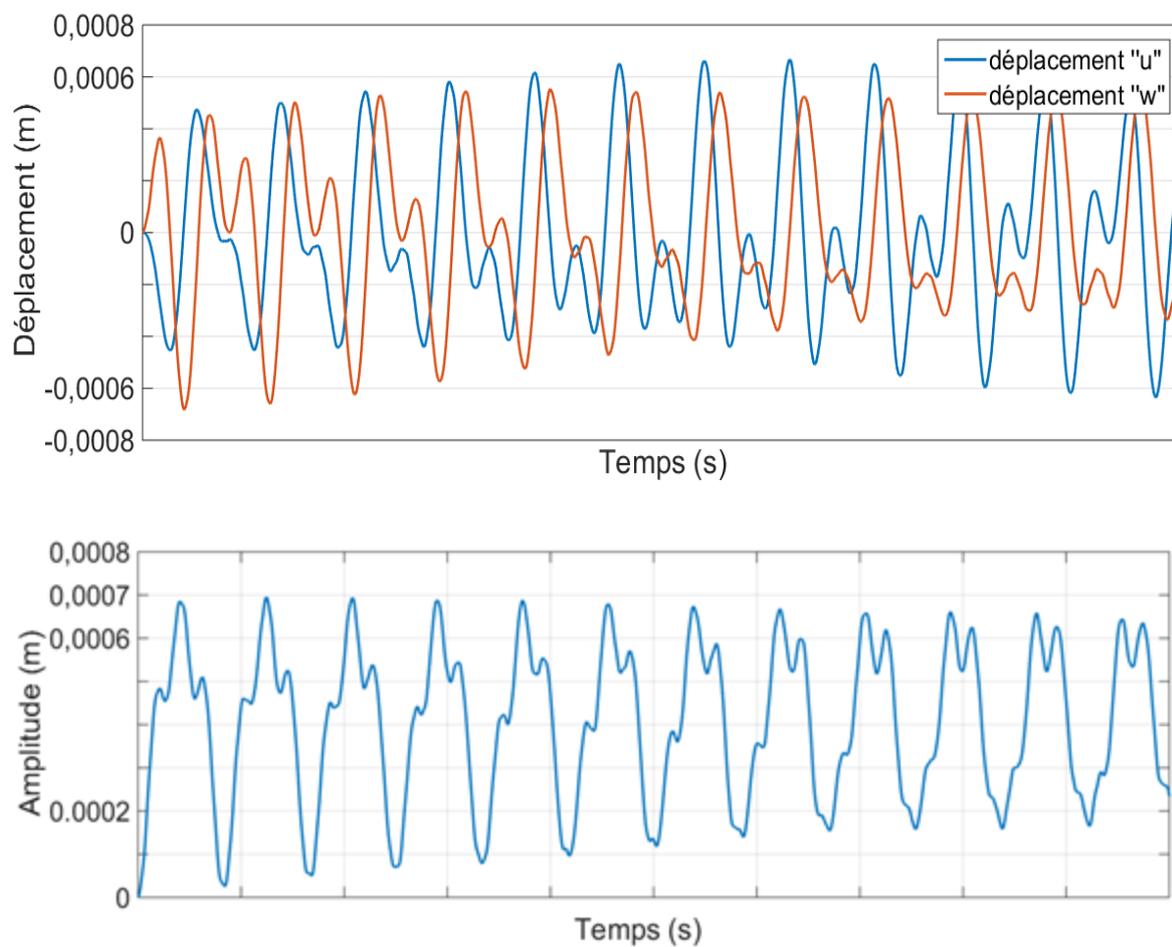


Figure 4.36 : Réponse dynamique et amplitude d'un rotor fissuré ($\mu=0.7$) au voisinage de la première vitesse sub-critique dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément.

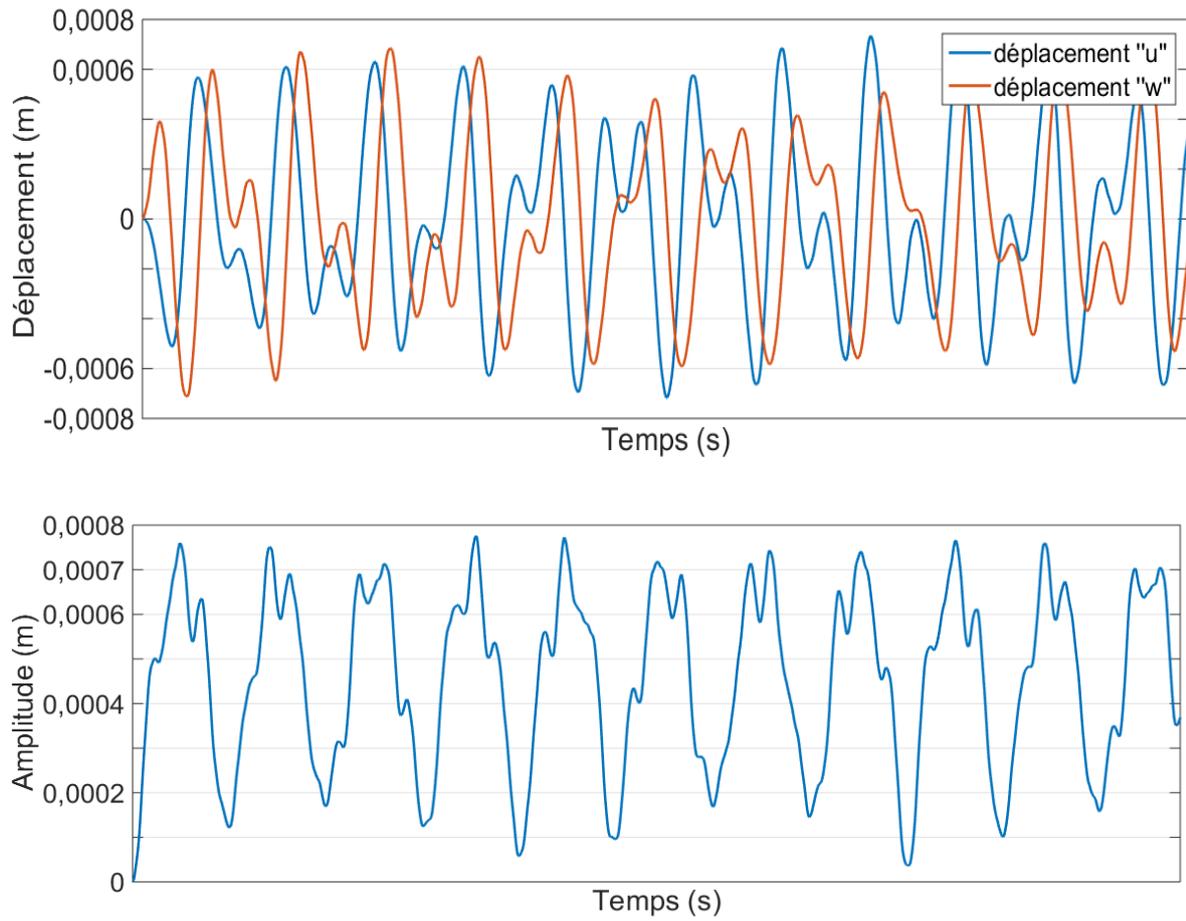


Figure 4.37 : Réponse dynamique et amplitude d'un rotor fissuré ($\mu=0.7$) au voisinage de la première vitesse sub-critique dans le cas où la fissure est au niveau du deuxième élément.

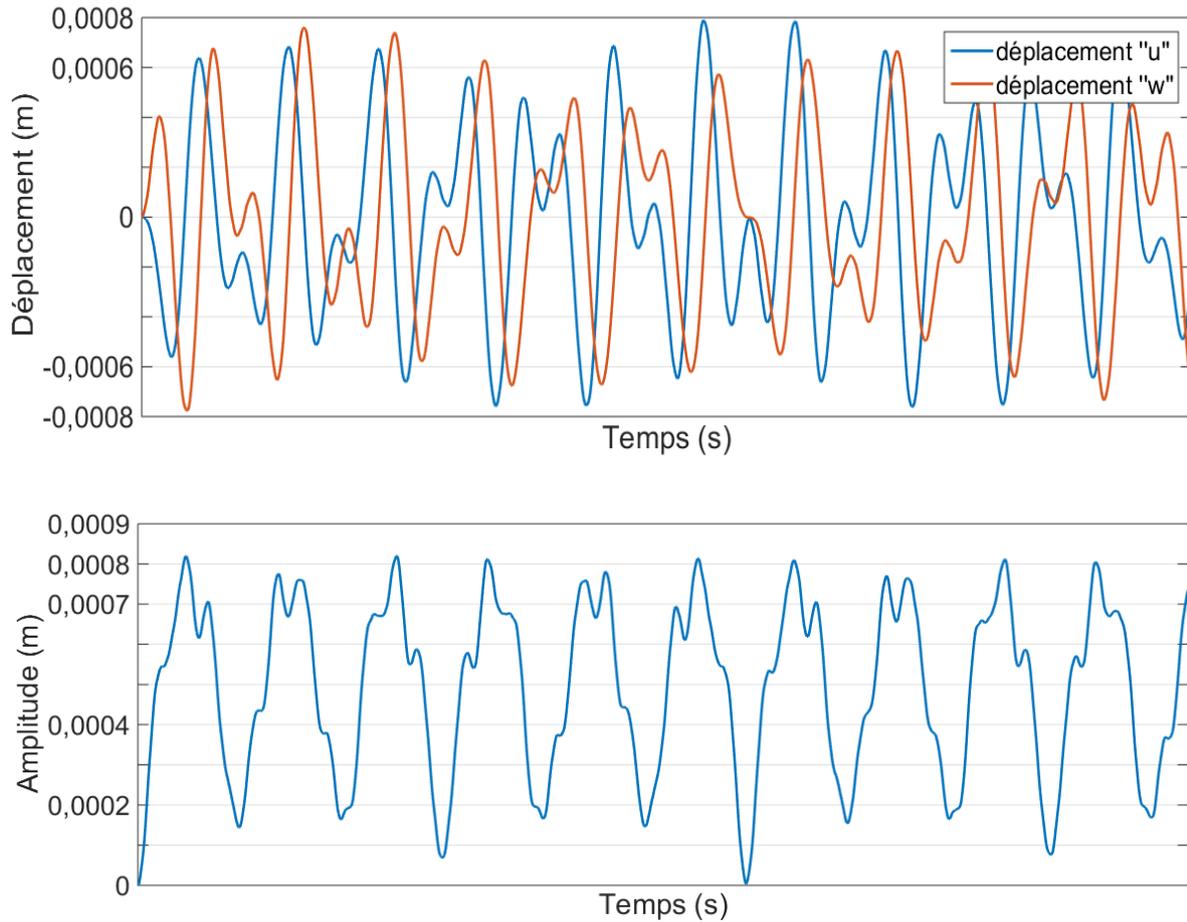


Figure 4.38 : Réponse dynamique et amplitude d'un rotor fissuré ($\mu=0.7$) au voisinage de la première vitesse sub-critique dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément.

Comme mentionné précédemment, l'orbite d'un rotor fissuré a une relation avec la fissure et les vitesses sub-critique, la figure 4.39 montre l'orbite d'un rotor fissuré au niveau de nœud 4 au voisinage de la première vitesse sub-critique (1500 tr/min) dans le cas où la fissure est au niveau du troisième élément pour différents valeurs de profondeur (μ). Cette figure montre que, la boucle qui apparaît à l'intérieur de l'orbite, s'agrandit avec la propagation de la fissure mais cet agrandissement n'est pas clair.

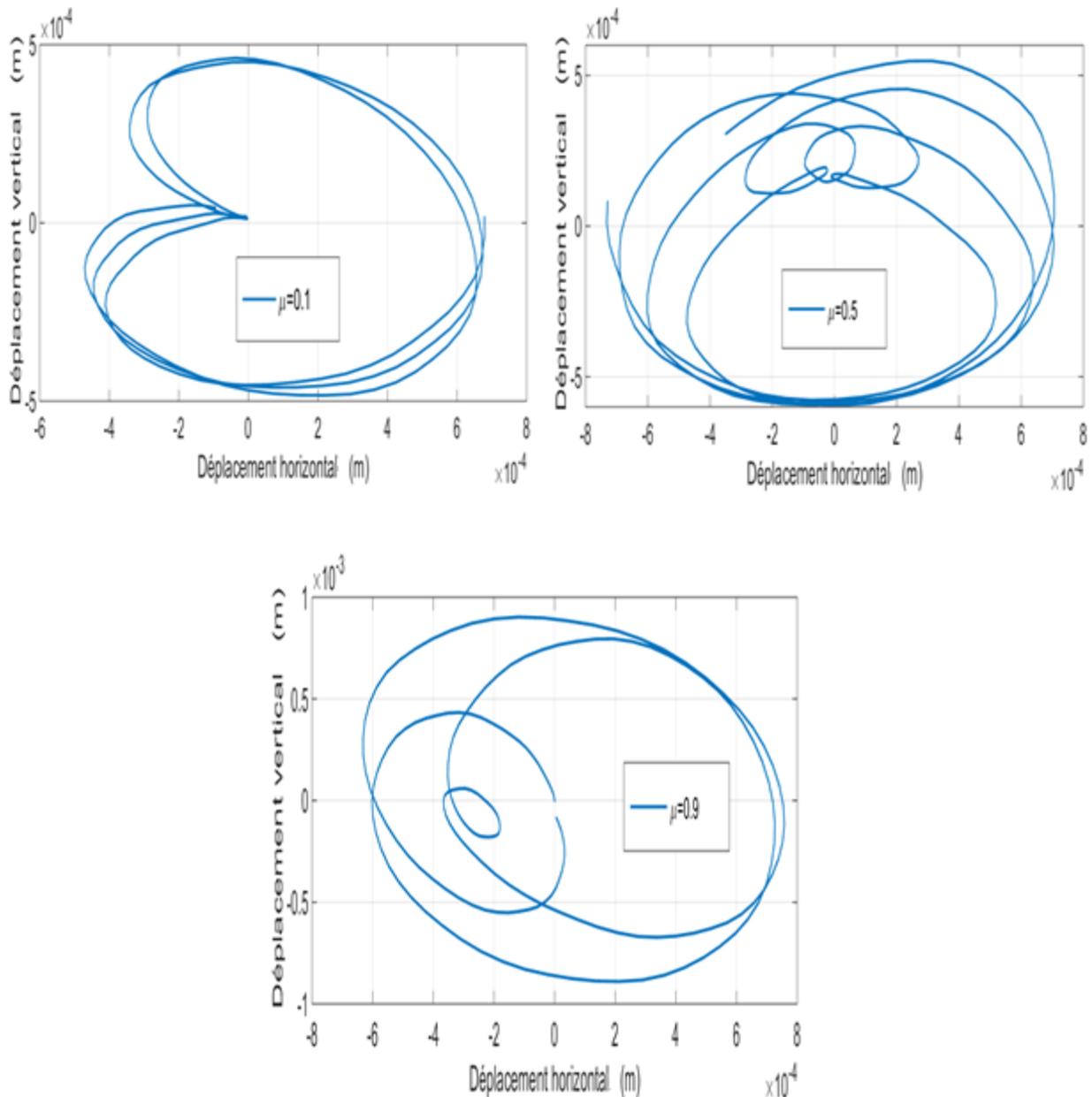


Figure 4.39 : *Orbite d'un rotor fissuré au niveau de nœud 4 au voisinage de la première vitesse sub-critique.*

La figure 4.40 montre les orbites d'un rotor fissuré au niveau du nœud 4 au voisinage de la première (1500 tr/min), deuxième (1050 tr/min) et troisième (750 tr/min) vitesse sub-critique dans le cas où la fissure est au niveau de troisième élément et pour $\mu=0.7$. Cette figure montre que, deux boucles apparaissent au voisinage de la deuxième vitesse sub-critique, et l'orbite devient instable après cette vitesse.

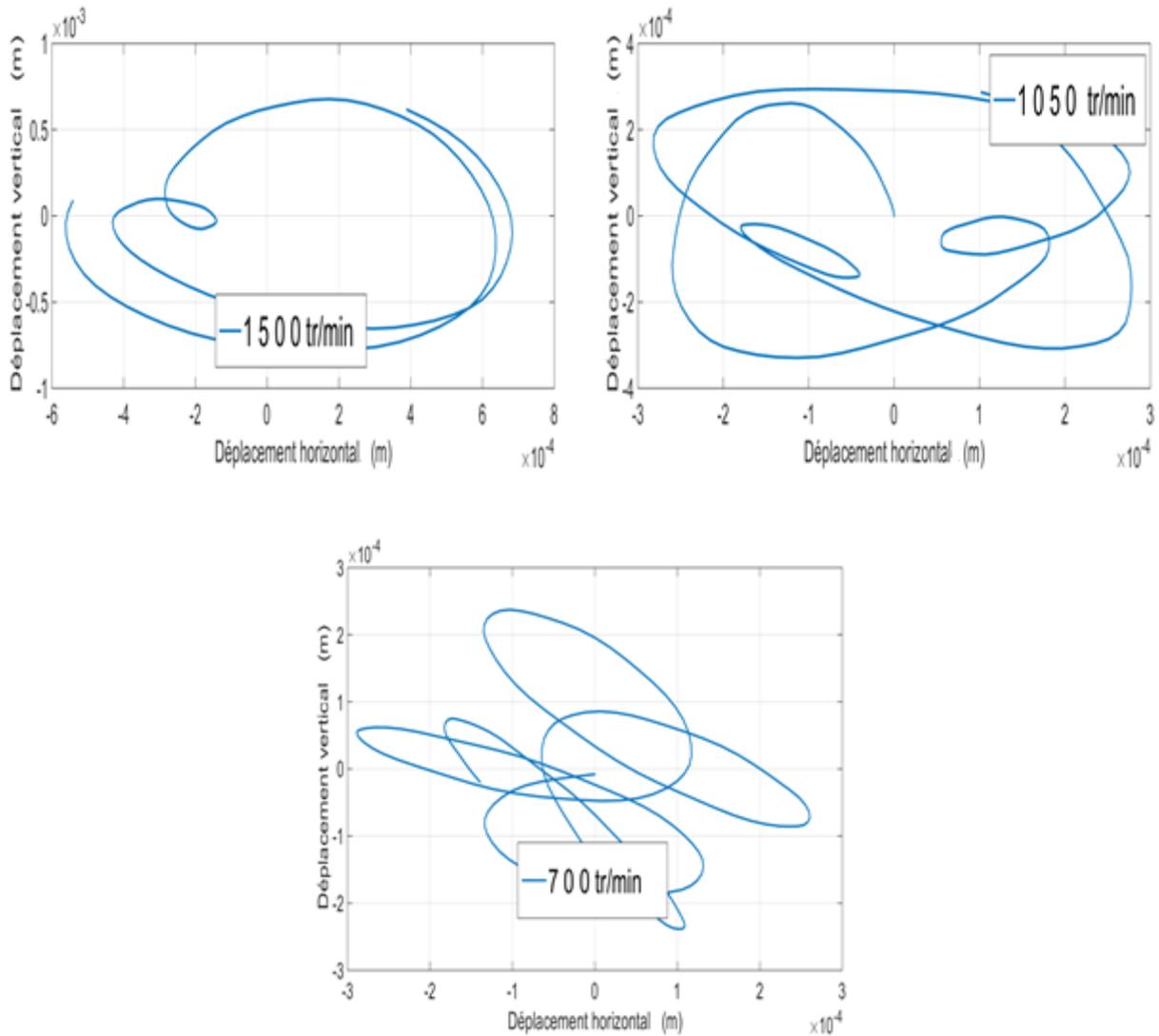


Figure 4.40 : Orbits d'un rotor fissuré au voisinage de la première (1500 tr/min) deuxième (1050 tr/min) et troisième (750 tr/min) vitesse sub-critique.

5 Etude d'un rotor avec une fissure transversale respiratoire

Dans le cas d'une fissure transversale respiratoire, la fissure s'ouvre et se ferme progressivement par rapport à l'angle de rotation, et la rigidité de l'arbre varie entre la rigidité d'un arbre sain et celle d'un arbre avec une fissure totalement ouverte. La figure 4.41 montre la courbe de la variation de la rigidité d'un arbre avec une fissure transversale respiratoire en fonction de l'angle de rotation. A partir de cette figure, nous distinguons 3 états :

- $\Omega t = -\pi/2$, la fissure est totalement ouverte ; la rigidité de l'arbre est égale à la rigidité d'un arbre avec une fissure transversale ouverte.

- $\Omega t = \pi/2$, la fissure est totalement fermée ; la rigidité de l'arbre est égale à la rigidité d'un arbre sain.
- $-\pi/2 < \Omega t < \pi/2$, la fissure est partiellement fermée, et la rigidité de l'arbre est comprise entre celle d'un arbre avec une fissure transversale ouverte et la rigidité d'un arbre sain.

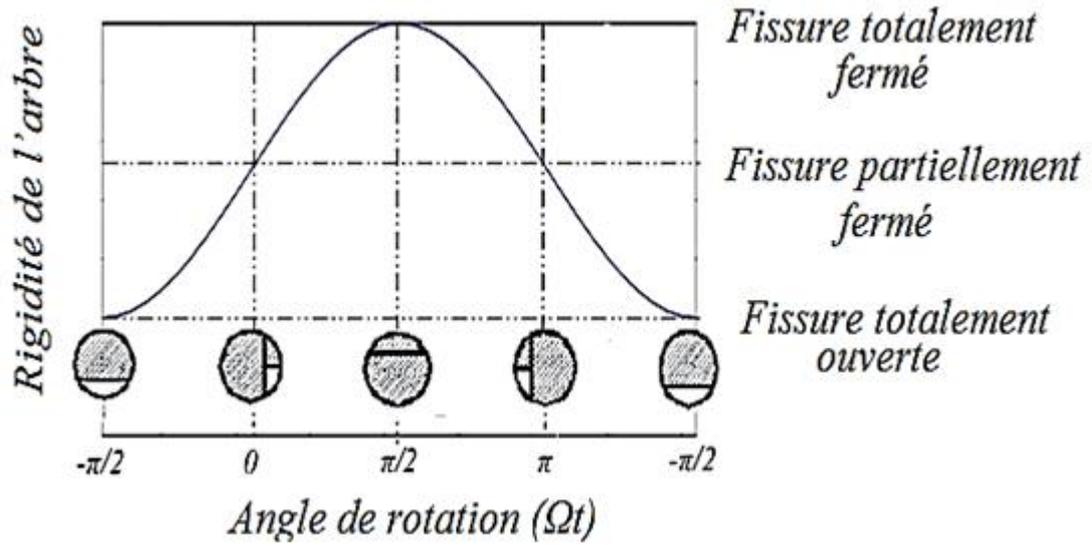


Figure 4.41 : Variation de la rigidité d'un arbre avec une fissure transversale respiratoire par rapport de l'angle de rotation.

Cette variation de rigidité est traduite par la variation des moments d'inerties. La variation des moments d'inertie I_x et I_z de la section transversale par rapport à l'angle de rotation est donnée par l'équation :

$$\begin{cases} I_x = \left(\frac{I_a - I_x}{2} \right) \sin(\Omega t) + \left(\frac{I_a + I_x}{2} \right) \\ I_z = \left(\frac{I_a - I_z}{2} \right) \sin(\Omega t) + \left(\frac{I_a + I_z}{2} \right) \end{cases} \quad (4.1)$$

- A l'angle $\Omega t = -\pi/2$, la fissure est totalement ouverte, et les moments d'inertie I_x et I_z par rapport au repère tournant sont égaux aux moments d'inertie d'une section avec une fissure ouverte.
- A l'angle $\Omega t = \pi/2$, la fissure est totalement fermée, et les moments d'inertie I_x et I_z par rapport au repère tournant sont égaux aux moments d'inertie d'une section d'un arbre sain ($I_x = I_z = I_a$).

- Pour $-\pi/2 < \Omega t < \pi/2$, la fissure est partiellement fermée, et les moments d'inertie I_x et I_z par rapport au repère tournant sont compris entre les moments d'inertie d'une section transversale avec une fissure totalement ouverte et les moments d'inertie d'une section circulaire.

Les moments d'inertie I_x , I_z et I_{xz} de la section fissurée par rapport au repère fixe sont exprimé en fonction de I_x et I_z par l'équation (2.32).

Les figures 4.42, et 4.43 représentent la variation des moments d'inertie I_x , I_z , et I_{xz} par rapport à l'angle de rotation (Ωt) dans le cas où le rapport de profondeur ($\mu=0.5$). Ces figures montrent que :

- A $\Omega t = \pi/2$ les moments d'inertie I_x , I_z sont maximum et égaux aux moments d'inertie d'une section non-fissuré ($I_x = I_z = I_a$).
- A l'angle $\Omega t = -\pi/2$ où la fissure est totalement ouverte I_z est supérieur à I_x , cela est due à la dissymétrie de la section transversale par rapport l'axe X.
- aux angles $\Omega t = \pi/2$ et $\Omega t = \pi/4$, $\Omega t = 3\pi/4$, $\Omega t = -\pi/4$ et $\Omega t = -3\pi/4$ la section transversale est symétrique par rapport aux axes X et Z, donc $I_x = I_z$ et $I_{xz} = 0$.

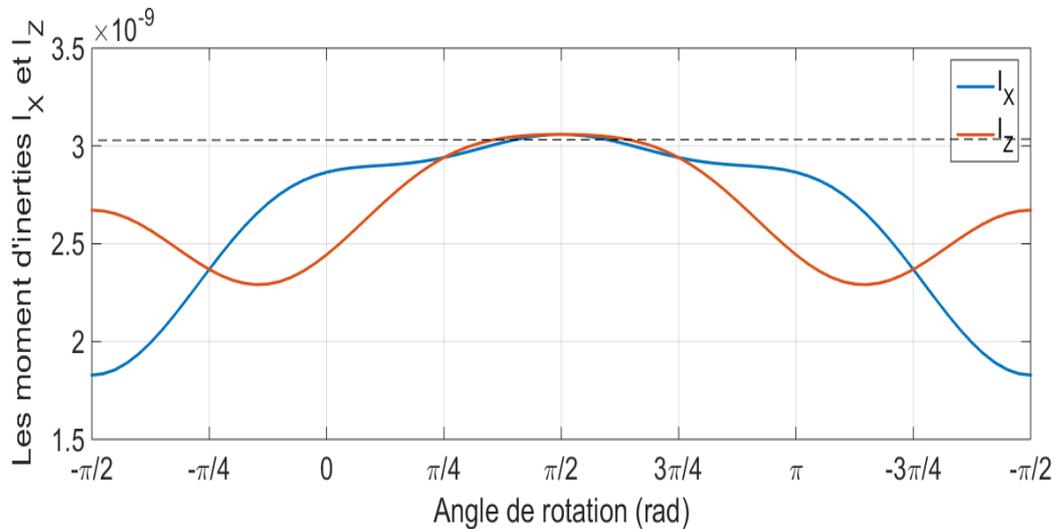


Figure 4.42 : Variation de I_x et I_z par rapport à l'angle de rotation (Ωt).

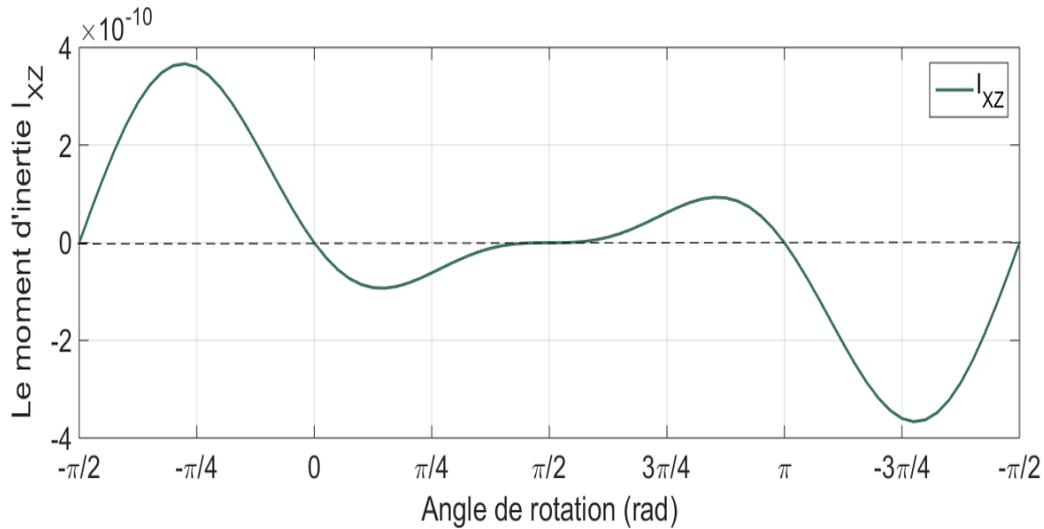
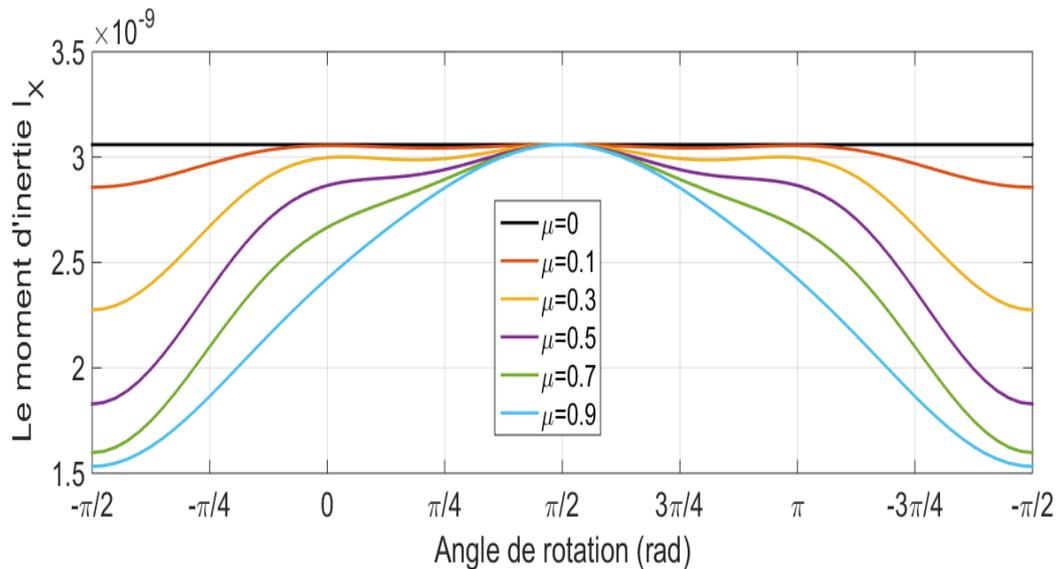
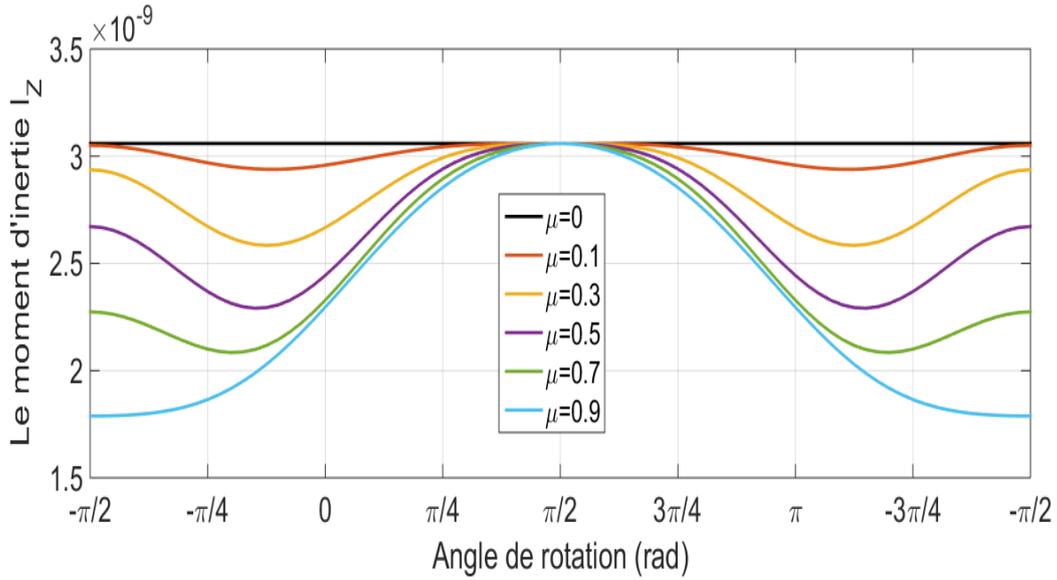


Figure 4.43 : Variation de I_{XZ} par rapport à l'angle de rotation (Ωt).

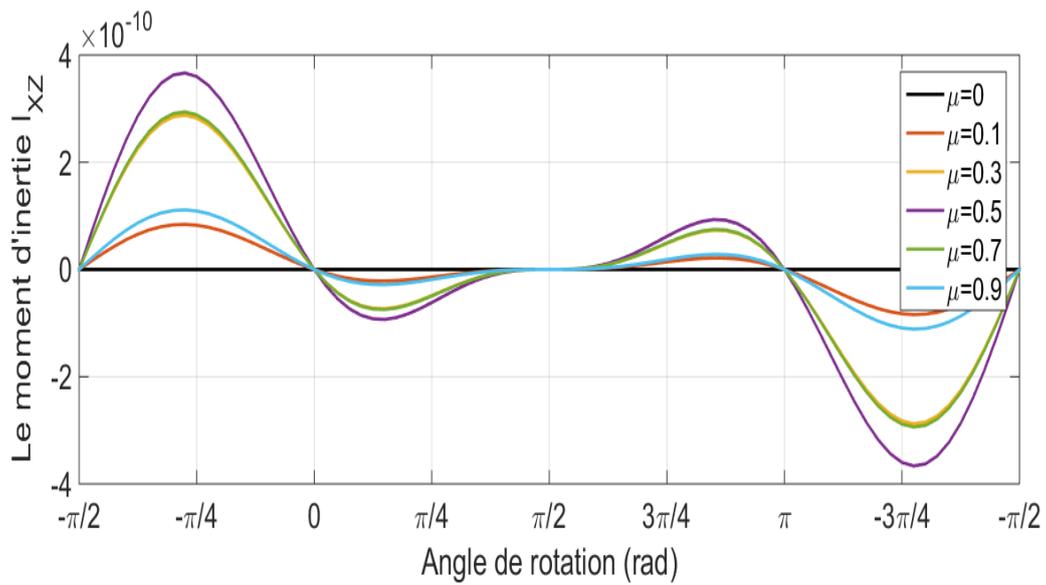
Les figures 4.44-4.46 représentent la variation des moments d'inertie I_X , I_Z , et I_{XZ} par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ), ces figures montrent que les valeurs des moments d'inertie diminuent quand la profondeur de la fissure augmente, ce qui signifie que la rigidité de l'arbre diminue avec la propagation de la fissure, cette variation n'est pas périodique pendant un tour de l'arbre.



Figures 4.44 : Variation du moment d'inertie I_X par rapport par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).



Figures 4.45 : Variation du moment d'inertie I_Z par rapport par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).

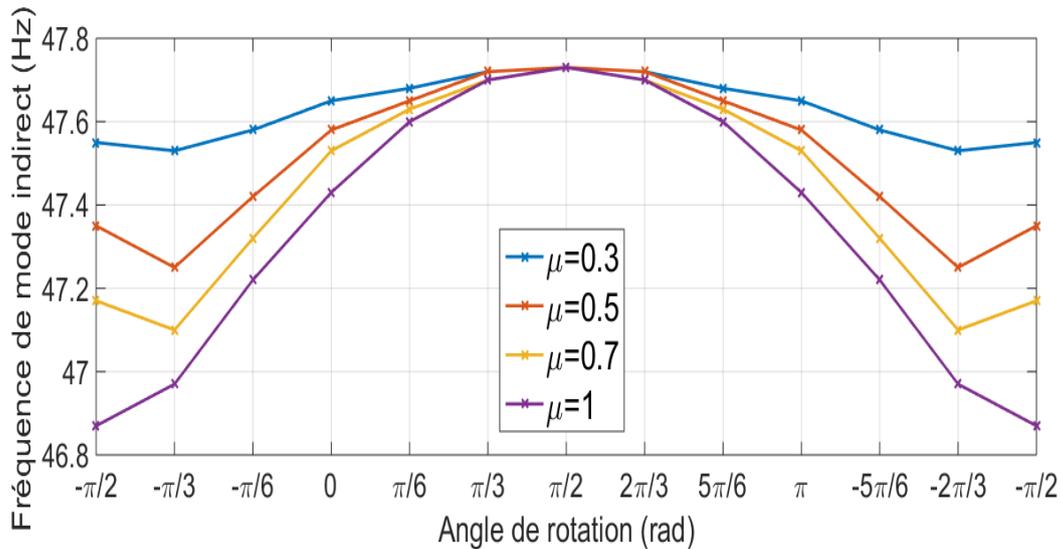


Figures 4.46 : Variation du moment d'inertie I_{XZ} par rapport par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes valeurs du rapport de profondeur (μ).

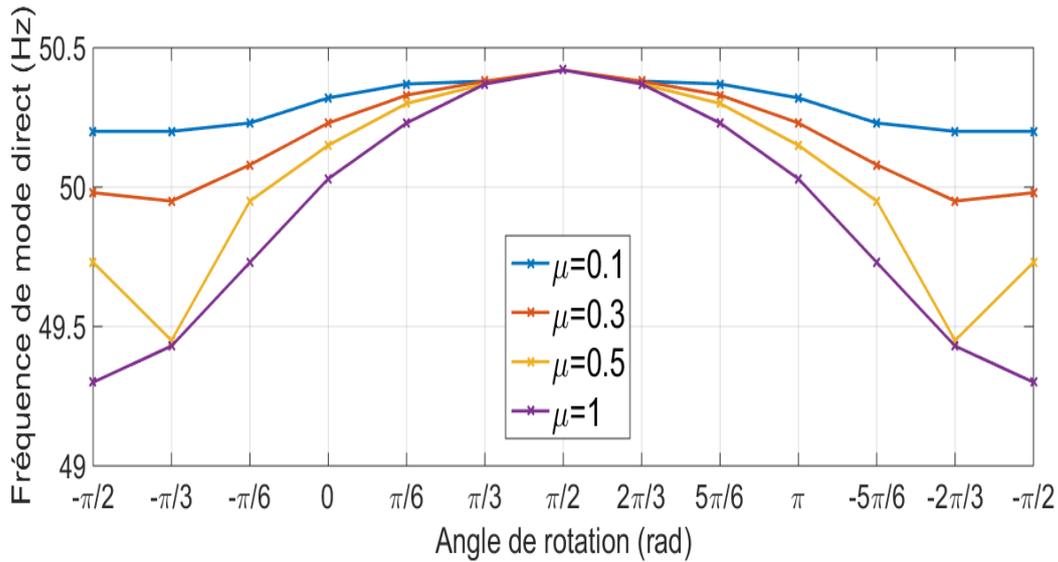
5.1 Analyse fréquentielle

Dans cette analyse, nous étudions l'influence de la rigidité variable due à la présence d'une fissure transversale respiratoire sur les fréquences propres du rotor, en tenant compte la position et la profondeur de la fissure.

Les figures 4.47 et 4.48 montrent respectivement, la variation des modes indirect et direct de la première fréquence critique par rapport à l'angle de rotation pour différentes valeurs de profondeur (μ) dans le cas où la fissure est au niveau du premier élément. Cette variation de fréquence est due à la variation de la rigidité de l'arbre causée de la présence de la fissure respiratoire. A la valeur de l'angle de rotation $\Omega t = \pi/2$ la fréquence est maximale et est égale à la fréquence d'un rotor sain, et à $\Omega t = -\pi/2$ la fréquence est minimale ce qui signifie que la valeur de rigidité est minimale. Nous remarquons une légère diminution de fréquence à l'angle $\Omega t = -\pi/3$ par rapport à l'angle $\Omega t = -\pi/2$; ceci est due à la grande dissymétrie de la section transversale (I_{XZ} est maximale). La valeur moyenne de la fréquence diminue par rapport à la profondeur de la fissure.

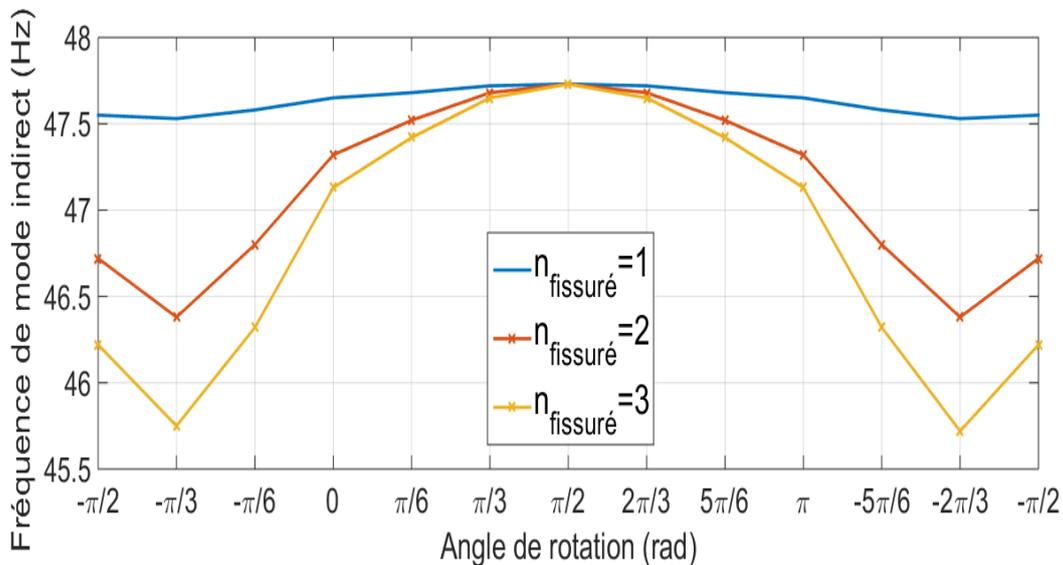


Figures 4.47 : Variation de la première fréquence critique du mode indirect par rapport à l'angle de rotation pour différentes valeurs de profondeur (μ).

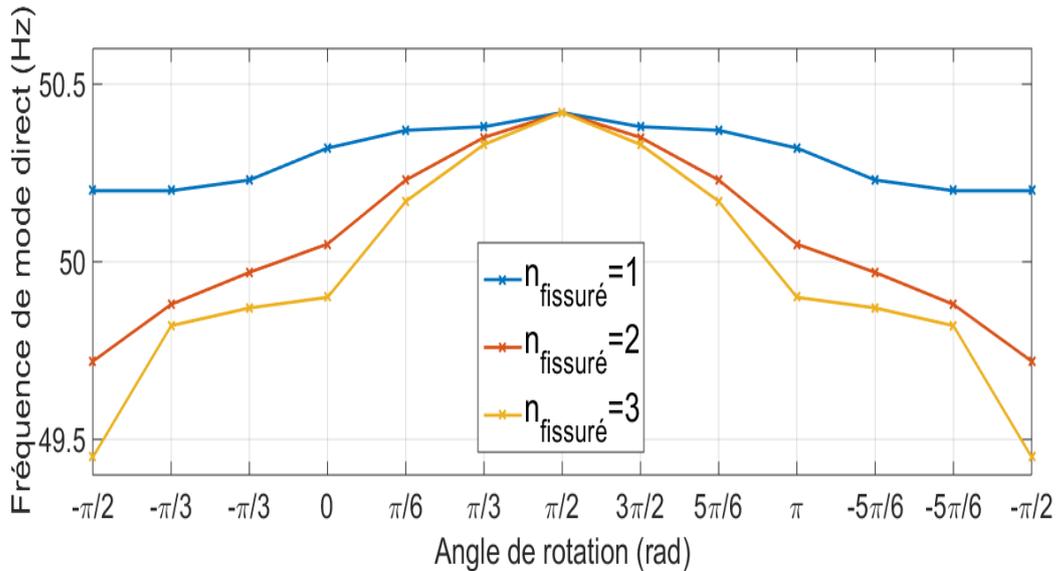


Figures 4.48 : Variation de la première fréquence critique du mode direct par rapport à l'angle de rotation pour différentes valeurs de profondeur (μ).

Pour étudier l'influence de la position d'une fissure respiratoire sur la variation des fréquences, les figures 4.49 et 4.50 représentent la variation de la première fréquence critique des modes direct et indirect pour différentes positions de la fissure dans le cas où $\mu=0.3$. Nous remarquons clairement que la valeur moyenne de la fréquence diminue quand la fissure approche le milieu du rotor.



Figures 4.49: Variation de la première fréquence critique du mode indirect par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes positions de la fissure.



Figures 4.50: Variation de la première fréquence critique du mode direct par rapport à l'angle de rotation (Ωt) pour différentes positions de la fissure.

5.2 Analyse de la réponse dynamique

Dans cette analyse, nous étudions l'influence de la profondeur et la position d'une fissure transversale respiratoire sur la réponse dynamique, les orbites et les amplitudes du centre du rotor, en tenant compte de la variation de la rigidité. L'étude est faite au voisinage des vitesses sub-critiques.

La Figure 4.51 montre la réponse dynamique, l'orbite et l'amplitude du centre du rotor au niveau du nœud 2 d'un rotor avec une fissure respiratoire au voisinage de la première vitesse sub-critique (1500 tr/min) quand la fissure est au niveau du troisième élément et $\mu=0.8$, nous remarquons que l'amplitude de déplacement horizontal (u) est inférieure par rapport à l'amplitude de déplacement vertical (w), ceci est due à la grande rigidité suivant l'axe Z est par rapport à la rigidité suivant l'axe X.

En comparant l'orbite de cette figure avec les orbites des figures 4.34 et 4.35 concernant un rotor sain et un rotor avec une fissure ouverte, nous trouvons aussi qu'une boucle apparaît dans l'orbite mais elle est très grande par rapport à celle qui apparaît dans l'orbite d'un rotor avec une fissure transversale ouverte. Cette boucle est due à la différence entre les amplitudes des déplacements horizontal et vertical. Avec ce critère nous pouvons différencier entre la réponse d'un rotor avec une fissure transversale ouverte et respiratoire.

Cette boucle a aussi une relation avec la profondeur de la fissure et les vitesses sub-critiques.

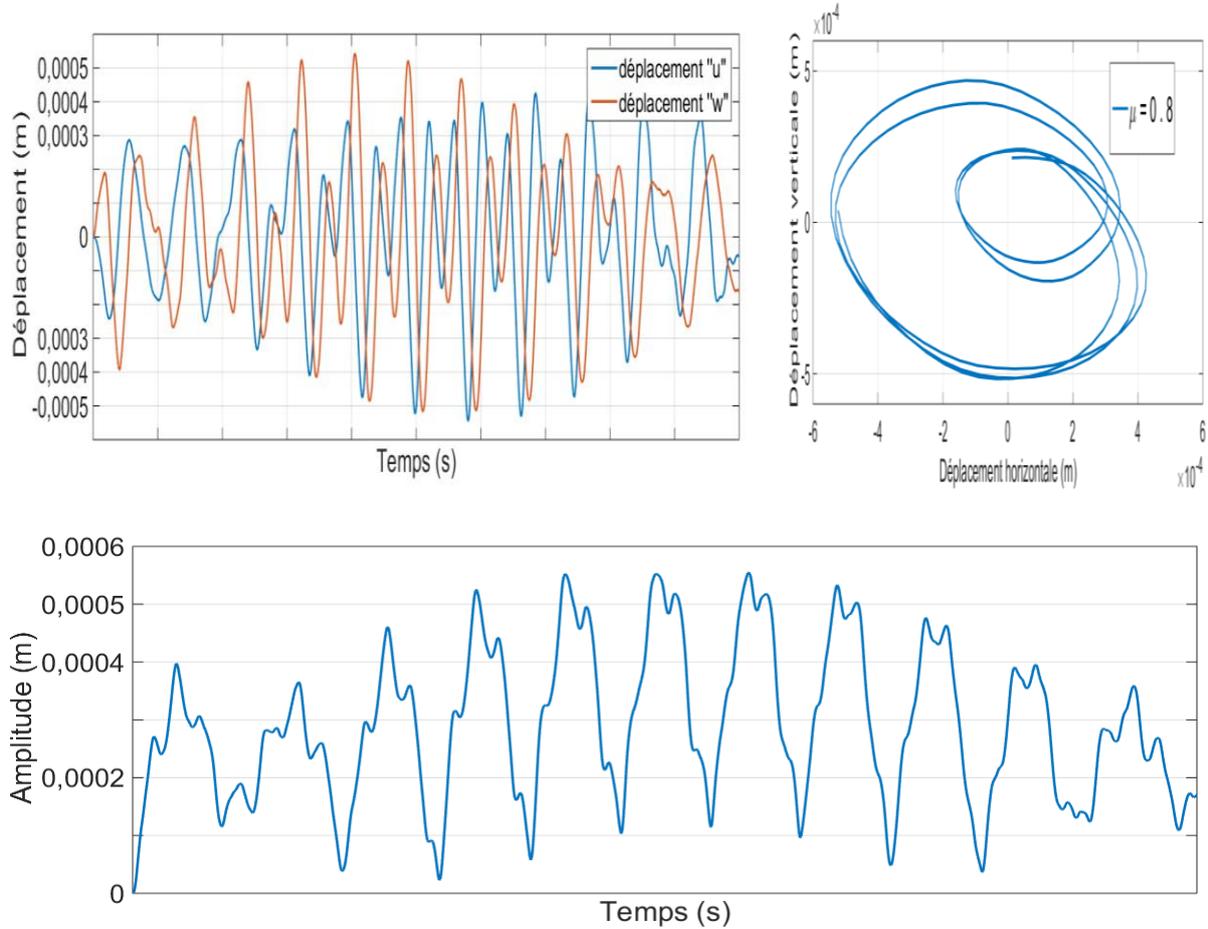
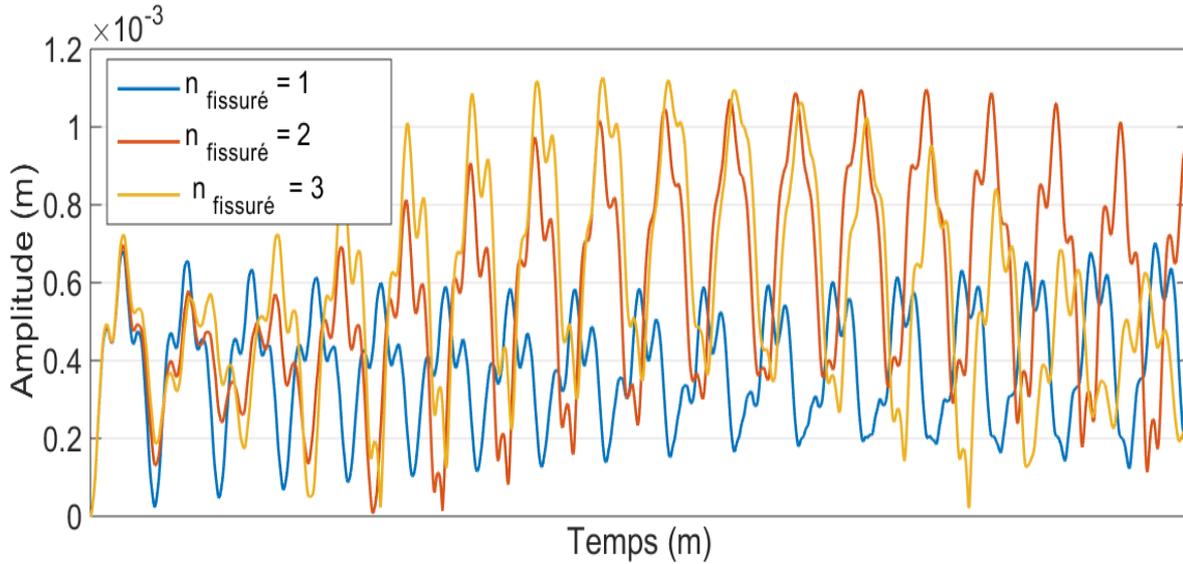
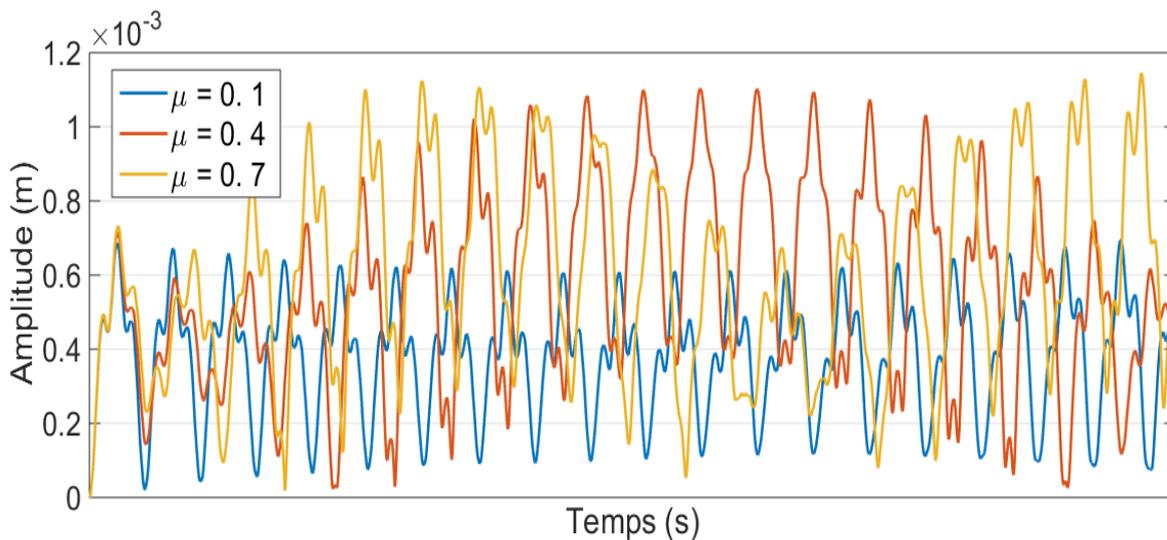


Figure 4.51: Réponse dynamique, orbite et amplitude du centre d'un rotor avec une fissure respiratoire au voisinage de la première vitesse sub-critique.

Pour identifier la position et la profondeur de la fissure à partir de l'analyse des amplitudes au voisinage de la première vitesse sub-critique (1500 tr/min), la figure 4.52 représente la variation des amplitudes du centre de rotor au niveau du nœud 4 par rapport à la position de la fissure dans le cas où $\mu=0.5$. La figure 4.53 représente la variation des amplitudes du centre de rotor au niveau de nœud 4 par rapport à la profondeur de la fissure dans le cas où la fissure est au niveau de l'élément 3. Ces figures montrent que les amplitudes au voisinage de la première vitesse sub-critique augmentent avec la propagation de la fissure et quand la fissure approche de milieu de l'arbre.



Figures 4.52 : Variation des amplitudes au voisinage de la première vitesse sub-critique pour différentes position de la fissure.



Figures 4.53 : Variation des amplitudes au voisinage de la première vitesse sub-critique pour différentes valeurs du rapport de profondeur de la fissure (μ).

La figure 4.54 montre les orbites d'un rotor fissuré au niveau de nœud 4 au voisinage de la première (1500 tr/min), deuxième (1050 tr/min), troisième (750 tr/min) et quatrième (650 tr/min) vitesses sub-critiques dans le cas où la fissure est au niveau de deuxième élément et pour $\mu=0.6$.

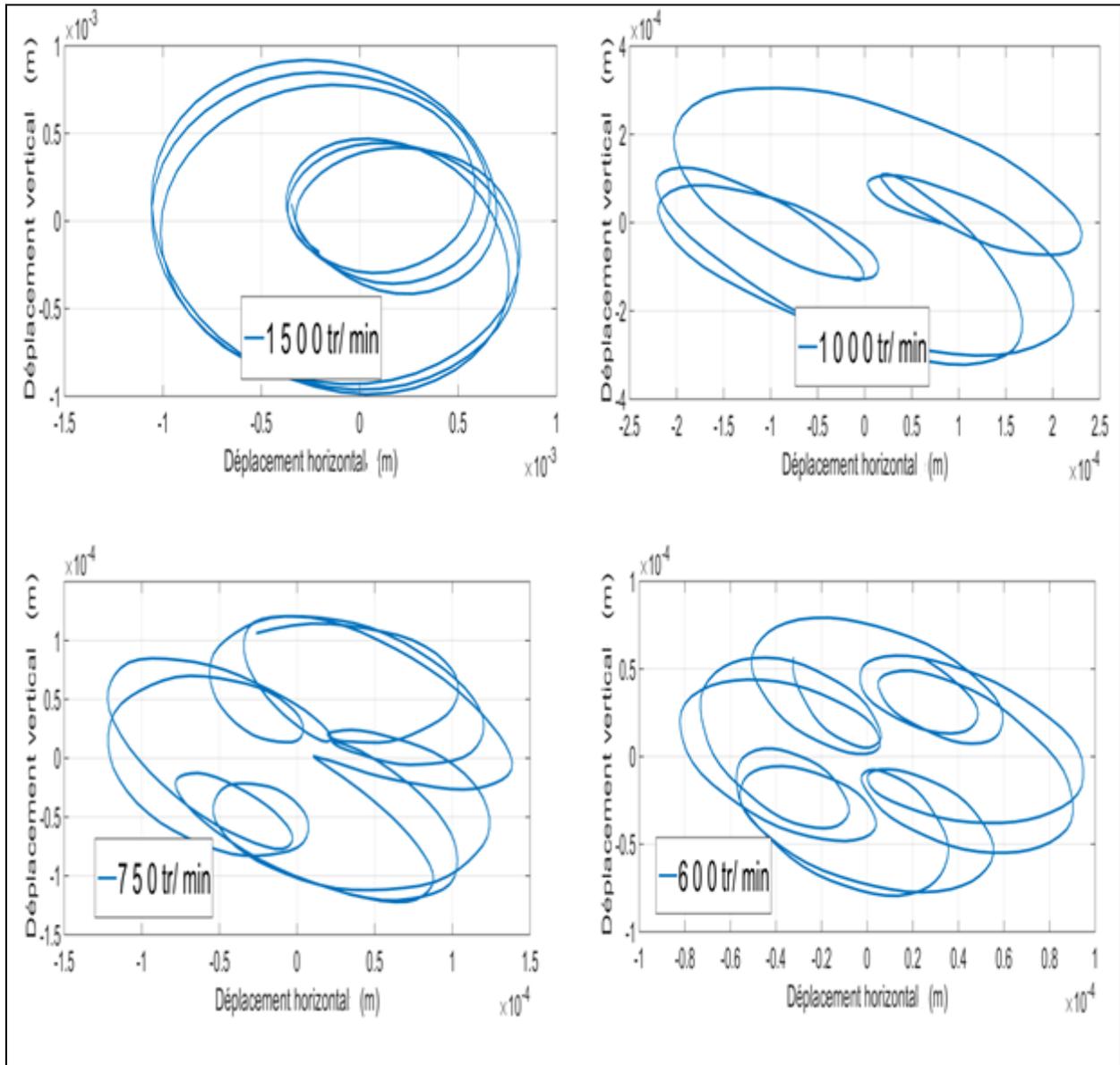


Figure 4.54 : Evolution des orbites en fonction des vitesses sub-critiques.

Cette figure montre que, plusieurs boucles apparaissent au voisinage des vitesses sub-critiques comme dans le cas d'une fissure ouverte, mais cette apparition est très claire dans le cas de la fissure respiratoire.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce travail, est l'étude de l'influence des fissures transversales sur les paramètres modaux du rotor, en utilisant la version h-p de la méthode des finis. L'élément poutre Euler-Bernoulli est utilisé pour la modélisation du rotor, les fonctions de forme utilisées sont les fonctions cubiques Hermite modifiées pour la version h couplées aux polynômes de Legendre spéciaux de Rodrigues pour la version p. Les matrices globales de l'équation de mouvement du rotor fissuré sont déterminées par l'application de l'équation de Lagrange en tenant compte de la variation locale de la rigidité de l'arbre due à la fissure. La rigidité de l'élément fissuré de l'arbre est déterminée en utilisant la méthode de rigidité variable.

Un programme est développé en MATLAB pour calculer les fréquences propres et tracer la réponse dynamique ainsi que les amplitudes et les orbites des rotors fissuré et non fissuré. Après avoir montré la rapidité de la convergence de la version h-p de FEM par rapport à la version h, une étude détaillée de l'influence des fissures transversale ouverte et respiratoire sur le comportement dynamique linéaire du rotor a été présentée ; les résultats trouvés ont montré l'efficacité de la version h-p de la MEF et la méthode de rigidité variable dans l'étude des rotors fissurés.

Ce travail nous a permis d'arriver aux conclusions suivantes :

- La présence des fissures dans les rotors a une nette influence sur le comportement dynamique de ce dernier ; la réduction de la section transversale de la zone fissuré affaiblie la rigidité de l'arbre et ceci cause une influence directe sur les paramètres modaux du rotor (fréquences propres, amplitudes, orbites, modes propres). L'étude de ces derniers permet d'identifier la présence, l'emplacement et la profondeur de la fissure.
- La version h-p de la MEF converge plus rapide par rapport à la version classique h.
- La version h-p de la MEF est la méthode de rigidité variable sont appropriées pour l'étude des rotors fissurés.
- La rigidité d'un élément fissuré de l'arbre est variable par rapport à l'angle de rotation.
- La fissure cause une réduction de la section transversale de l'arbre ce qui induit à des moments d'inertie variables par rapport au temps.

- les fréquences propres des modes direct et indirect des rotors fissurés diminuent par rapport aux fréquences propres des rotors sains ; ceci est dû à la diminution de la rigidité de l'arbre causée par la fissure.
- Les fréquences propres du rotor diminuent avec la propagation de la fissure quelle que soit leur position.
- La fissure transversale ouverte cause une dissymétrie dans le rotor. Cette dissymétrie peut être utilisée pour identifier la présence d'une fissure à l'état stationnaire.
- Les fréquences naturelles diminuent de façon linéaire à partir de la profondeur $\mu = 0,3$,
- La courbe de variation des fréquences propres et critiques par rapport à la position de la fissure est similaire à la courbe du mode de déformation de l'arbre.
- Les amplitudes des déplacements des rotors fissurés augmentent par rapport à celles des rotors sains.
- Les orbites des rotors fissurés diffèrent des orbites des rotors sains ; la présence de la fissure donne naissance à un petit cercle qui apparaît à l'intérieur de l'orbite.
- Plus la fissure s'approche du milieu du rotor plus les amplitudes des déplacements au voisinage de la première vitesse sub-critique augmentent.
- La présence d'une fissure respiratoire cause une variation dans les fréquences propres du rotor par rapport à l'angle de rotation, cela est dû à la variation de la rigidité de l'arbre.
- Dans le cas d'une fissure respiratoire, l'amplitude de déplacement horizontale (u) est inférieure à celle du déplacement vertical (w) ; ceci est causé par la supériorité de la rigidité suivant l'axe Z par rapport à la rigidité suivant l'axe X ,
- Plusieurs cercles apparaissent dans les orbites des rotors au voisinage des vitesses sub-critiques par la présence d'une fissure transversale, mais l'apparition de ces cercles est très claire dans le cas de la fissure respiratoire.
- La détection des fissures n'est pas facile dans les structures complexes.
- Ces remarques peuvent aider les ingénieurs de maintenance préventive pour identifier la présence des fissures dans les machines tournants, pour éviter des pannes accidentelles.

Perspectives : Etude de l'influence des fissures transversale ouverte et respiratoire sur le comportement dynamique non-linéaire des rotors.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Bachschmid, N., Tanzi, E., and Audebert, S. “The effect of helicoidal cracks on the behaviour of rotating shafts. *Engineering Fracture Mechanics*”, 75(3-4), 475-488, (2008).
- [2] Bachschmid, N., Tanzi, E., and Audebert, S. “The effect of helicoidal cracks on the behaviour of rotating shafts. *Engineering Fracture Mechanics*”, 75(3-4), 475-488. (2008).
- [3] Sekhar, A. S., Mohanty, A. R., Prabhakar, S. “Vibrations of cracked rotor system: transverse crack versus slant crack”. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 279(Issue 3-5), p. 1203-1217, (2005).
- [4] Andrew Dimarogonas , Stefanos A.Paipetis , Thomas G.Chondros, “Analytical Methods in Rotor Dynamics”, Second Edition Springer Dordrecht Heidelberg New York London.
- [5] Papadopoulos, C. A. “The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: A state of the art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*”, 22(4), 763-789, (2008).
- [6] Sekhar, A. S. Prabhu, B. S , “Condition Monitoring of Cracked Rotors Through Transient Response,” *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 33, No. 8, 1167-1175, (1998)
- [7] Mobley, R. K. “Vibration fundamentals”. In P. E. magazine (Eds.) *Plant engineering maintenance series chapter 1*. p.26. (1999).
- [8] Z. Cai, “Vibration Diagnosis of Elastic Shafts with A Transverse Crack”, (MSc thesis), School of Engineering, Faculty of Computing, Health and Science, Edith Cowan University, Australia, , pp. 106, (2011).
- [9] Rosard, D. D., Reid, S. R., and Blades, J. C. “Optimizing Maintenance Intervals Using a Turbine Rotor Crack Monitoring Program,” *ASME*, Phoenix, AZ, 94-JPGC-PWR-5617, 1-8. 1994
- [10] Gasch, R.: *Selbsterregte biegeschwingungen rotierender wellen*. *Konstruktion* 23, 5, (1971)
- [11] Henry, T.A., Okah-Avae, B.E. ”Vibrations in cracked shafts”. *ibid*, Paper C162/76, (1976)
- [12] Mayes, I.W., Davies, W.G.R.: “The vibrational behavior of a rotating shaft system containing a transverse crack”. *ibid*, Paper C168/76. (1976)
- [13] I.W. Mayes, W.G.R. Davies, “Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor”, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 106, 139–145. (1984)
- [14] Grabowski, B.: “The vibrational behavior of a turbine rotor containing a transverse crack”. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technology Conference*, ASME paper 79-DET-67. St. Louis (1979)

-
- [15] Dimarogonas, A.D., Massouros, G.: Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack. *Eng. Fract. Mech.* 15(3-4), 439-444 (1981)
- [16] Dimarogonas A.D. "Vibration of cracked structures: A state of the art review". *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5):831-857. (1996)
- [17] Wauer J. On the dynamics of cracked rotors: A literature survey. *Applied Mechanics Review*, 43(1):13-17. (1990)
- [18] Gasch R. A, "Survey Of The Dynamic Behavior Of A Simple Rotating Shaft With A Transverse Crack". *Journal of Sound and Vibration* 160 (2):313-332. (1993)
- [19] Wauer, J., "On the Dynamics of Cracked Rotors: A Literature Survey," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 43, No. 1, 13-17. (1990).
- [20] R.H., Wauer J. "Parametric, external and combination resonances in coupled flexural and torsional oscillations of an unbalanced rotating shaft". *Journal of Sound and Vibration* 183(5):889-897.(1995).
- [21] Ishida, Y., Hirokawa, K., Hirose, M., "Vibrations of a Cracked Rotor: 3/2-Order Super-Subharmonic and One Half-Order Sub-harmonic Resonances", *Proceedings of 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Boston, MA, American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division*, 84(3), 605-612. (1995).
- [22] A.S. Sekhar, P. Balaji Prasad, "Dynamic analysis of a rotor system considering a slant crack in the shaft", *Journal of Sound and Vibration* 208 (3), 457-474. (1997)
- [23] Lee Y., Chung M. "A study on crack detection using eigenfrequency test data". *Computers & Structures*,77(3):327-342. (2000)
- [24] Lele S.P., Maiti S.K. "Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension". *Journal of Sound and Vibration*, 257(3):559-583. (2002).
- [25] Dong G.M., Chen J., Zou J. Parameter identification of a rotor with an open crack. *European Journal of Mechanics - A/Solids*,23(2):325-333.(2004)
- [26] Gounaris G.D., Papadopoulos C.A. "Analytical and experimental crack identification of beam structures in air or in fluid". *Comput Struct*, 65(5):633-639. (1997).
- [27] Gounaris G.D., Papadopoulos C.A. "Crack identification in rotating shafts by coupled response measurements". *Eng. Fract. Mech.* 69(3):339-352. (2002).
- [28] Darpe A.K., Chawla A., Gupta K. "Analysis of the response of a cracked Jeffcott rotor to axial excitation". *Journal of Sound and Vibration*, 249(3):429-445.(2002)
- [29] Darpe A.K., Gupta K., Chawla A. "Experimental investigations of the response of a cracked rotor to periodic axial excitation". *Journal of Sound and Vibration*, 260(2):265-286. (2003)
- [30] Darpe A.K., Gupta K., Chawla A." Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor". *Journal of Sound and Vibration*, 269(1-2):33-60. (2004)
- [31] Dharmaraju N., Tiwari R., Talukdar S." Identification of an open crack model in a beam based on force-response measurements". *Computers and Structures*, 82(2-3):167-179. (2004)
- [32] Dharmaraju N., Tiwari R., Talukdar S. "Development of a novel hybrid reduction scheme for identification of an open crack model in a beam". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(3):633-657. (2005)

- [33] Jean-Jacques Sinou , “Effects of a crack on the stability of a non-linear rotor system”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 42; 959 – 972. (2007).
- [34] Jean-Jacques Sinou, “Detection of cracks in rotor based on the 2nd and 3rd super-harmonics frequency components and the crack-unbalance interactions”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13, 2024–2040. (2008)
- [35] Jean-Jacques Sinou , ‘Experimental response and vibrational characteristics of a slotted rotor’, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 14, 3179–3194. (2009).
- [36] Mohammad A. AL-Shudeifat, Eric A. Butcher, Carl R. Stern, “General harmonic balance solution of a cracked rotor-bearing-disk system for harmonic and sub-harmonic analysis: Analytical and experimental approach”, *International Journal of Engineering Science* 48, 921–935, (2010)
- [37] Mohammad A. Al-Shudeifat, Eric A. Butcher, “New breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotor system: Approach for critical and subcritical harmonic analysis”, *Journal of Sound and Vibration* 330, 526–544, (2011).
- [38] Mohammad A. AL-Shudeifat, “On the finite element modeling of the asymmetric cracked rotor”, *Journal of Sound and Vibration*, 332, 2795–2807, (2013).
- [39] Mohammad A. AL-Shudeifat, “Stability analysis and backward whirl investigation of cracked rotors with time-varying stiffness”, *Journal of Sound and Vibration* 348, 365–380, (2015).
- [40] Z Y Lu, L Hou, Y S Chen. «Nonlinear response analysis for a dual-rotor system with a breathing transverse crack in the hollow shaft”. *Nonlinear Dynamics*, 83: 169–185.(2016)
- [41] R. Tamrakara , N. D. Mittal ,”Campbell diagram analysis of open cracked rotor” , *Engineering Solid Mechanics*, 4, 159-166. (2016)
- [42] Anuj Kumar Jaina, Vikas Rastogi, Atul Kumar Agrawal, “Experimental Investigation of Vibration Analysis of Multi-Crack Rotor Shaft”, *Procedia Engineering*, 144, 1451 –1458. (2016)
- [43] Chao-Zhong Guo , Ji-Hong Yan, Lawrence A. Bergman, “Experimental Dynamic Analysis of a Breathing Cracked Rotor”, *Chin. J. Mech. Eng.* 30:1177–1183. (2017)
- [44] Dimarogonas, A.D, Papadopoulos, C.A., “Vibration of cracked shafts in bending”. *Journal of sound and vibration*, 91(4), 583-593. (1983).
- [45] Silani, M., Ziaei-Rad, S., Talebi, H., “Vibration analysis of rotating systems with open and breathing cracks”. *Applied Mathematical Modeling*, 37 (24), 9907–9921. (2013)
- [46] M. Lalanne and G. Ferraris. “Rotordynamics prediction in engineering”, 2nd edition. J.Wiley and Sons, 33:254, (1998).
- [47] Jeffcott, H. H., “ The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed ”, *Phil. Mag.*, Vol. 6, no. 37, pp. 304-314, (1919).
- [48] R. H. Gallagher. “Finite Element Analysis-Fundamentals”. Prentick Hall, Englewood Cliffs,-NJ (1975).
- [49] O. C. Zienkiewicz, “The Finite Element Method”, 3rd Edn. McGraw-Hill, New York (1977).
- [50] A. Peano, “Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plane bending”. *Comput. Math. Applic.* 2, 211-224 (1976).
- [51] B. A. Szabo, “Some recent developments in the finite element method”. *Comput. Math. Applic.* 5, 115 (1979).

-
- [52] I. Babuska, B. A. Szabo and I. N. Katz, "The p-version of the finite element method". *SIAM J. numer. Anal.* 18, 515-545 (1981).
- [53] W. Gui and I. Babuska, "The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension", part I. The error analysis of the p-version. *Numer. Math.* 49, 577-612 (1986).
- [54] O. C. Zienkiewicz, J. P. De S. R. Gago and D. W. Kelly, "The hierarchical concept in finite element analysis". *Comput. Struct.* 16, 53-65 (1983).
- [55] B. A. Szabo, "PROBE Theoretical Manual Release 1.0". NOETIC Technologies Corporation, St Louis (1985).
- [56] B. Guo and I. Babuska, "The h-p version of the finite element method, part 1: the basic approximation results". *Comput. Mech.* 1, 21-41 (1986).
- [57] B. Guo and I. Babuska, "The h-p version of the finite element method, part 2: general results and applications". *Comput. Mech.* 1, 203-220 (1986).
- [58] I. Babuska and M. Suri, "The h-p version of the finite element method with quasiuniform meshes". *Math. Model numer. Anal.* 21, 199-238 (1987).
- [59] L. Demkowicz, J. T. Oden, R. Rachowicz and O. Hardy, "Toward a universal h-p adaptive finite element strategy", part 1. Constrained approximation and data structure. *Comput. Meth. appl. Engng* 77, 79-112 (1989).
- [60] J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz and T. A. Westerman, "Toward a universal h-p adaptive finite element strategy", part 2. A posteriori error estimation. *Comput. Meth. appl. Mech. Engng* 77, 113180 (1989)
- [61] Boukhalfa, A., Hadjoui, A. "Free vibration analysis of an embarked rotating composite shaft using the h-p version of the FEM". *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(2), 105–141.(2010)
- [62] Saimi, A., Hadjoui, A. "An engineering application of the h-p version of the finite elements method to the dynamics analysis of a symmetrical on-board rotor". *European Journal of Computational Mechanics*, 25(5), 1779-7179. (2016)
- [63] A. Peano, Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plane bending. *Comput. Math. Applic.* 2, 211-224. (1976).
- [64] Bardell, N.S., "An engineering application of the h-p version of the finite element method to the static analysis of a Euler-bernoulli beam". *Computers & Structures*, 59(2), 195-211. (1996).
- [65] Zaki Dakel , Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarquées, Thèse Doctorat, (2014)

ANNEXE (A)

Calcul des moments d'inertie de la section transversale de la fissure suivant les axes de repère tournant :

- **Moment d'inertie suivant l'axe x :**

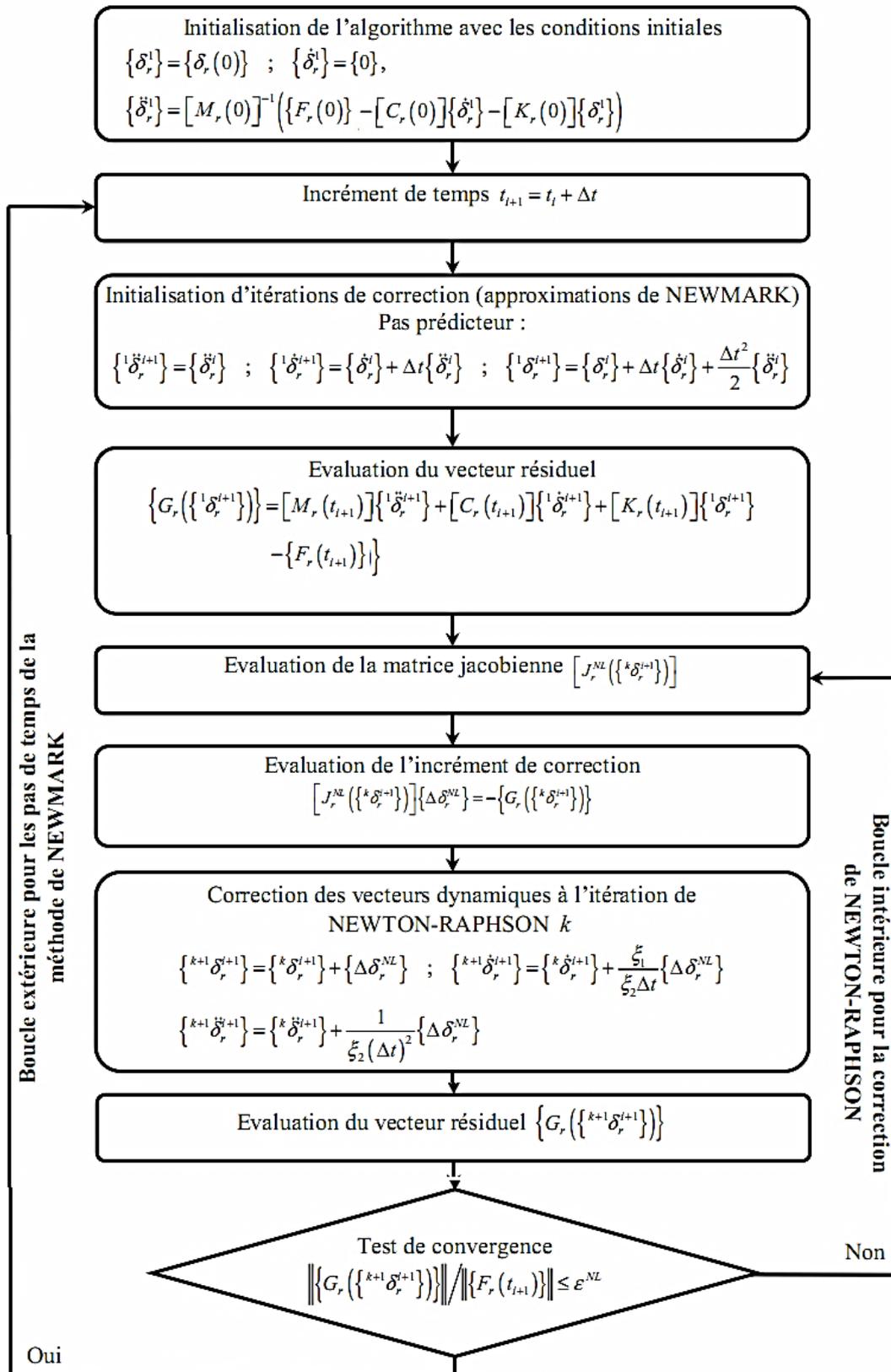
$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{\pi R^4}{4} - \int_{A_c} z^2 dA_y = \frac{\pi R^4}{4} - 2 \int_b^R z^2 x dz = \frac{\pi R^4}{4} - 2 \int_b^R z^2 \sqrt{R^2 - z^2} dz \\
 &= \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi R^4}{8} - \frac{1}{4} \left(R^4 \sin^{-1} \left(\frac{b}{R} \right) - \sqrt{R^2 - b^2} (bR^2 - 2b^3) \right) \\
 &= \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi R^4}{8} - \frac{1}{4} \left(R^4 \sin^{-1} (1 - \mu) - \sqrt{R^2 - b^2} (bR^2 - 2b^3) \right) \\
 &= \frac{\pi R^4}{8} + \frac{R^4}{4} \left((1 - \mu)(2\mu^2 - 4\mu + 1)\gamma + \sin^{-1} (1 - \mu) \right)
 \end{aligned}$$

- **Moment d'inertie suivant l'axe z :**

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{\pi R^4}{4} - \int_{A_c} x^2 dA_x = \frac{\pi R^4}{4} - 2 \int_0^s x^2 (z - b) dx = \frac{\pi R^4}{4} - 2 \int_0^s x^2 (\sqrt{R^2 - x^2} - b) dx \\
 &= \frac{\pi R^4}{4} - \frac{1}{12} \left(3R^4 \sin^{-1} \left(\frac{s}{R} \right) - \sqrt{R^2 - s^2} (3sR^2 - 6s^3) - 8bs^3 \right) \\
 &= \frac{\pi R^4}{4} - \frac{R^4}{12} \left((1 - \mu)(2\mu^2 - 4\mu - 3)\gamma + 3 \sin^{-1} \gamma \right)
 \end{aligned}$$

ANNEXE (B)

Algorithme utilisé pour l'analyse transitoire non linéaire d'un rotor fissuré [64] :



RÉSUMÉ

La présence des fissures dans le rotor influe sur le comportement vibratoire des machines tournantes (fréquences propres, amplitudes, modes propres). L'étude de ce dernier permet d'identifier la présence, l'emplacement et la profondeur de la fissure. L'objectif de ce travail, est d'étudier l'influence d'une fissure transversale sur les paramètres modaux du rotor, en utilisant la version h-p de la méthode des éléments finis. L'élément poutre Euler-Bernoulli est utilisé pour la modélisation du rotor, les fonctions de forme utilisées sont les fonctions d'Hermite cubiques modifiées pour la version h couplées aux polynômes de Legendre spéciaux de Rodrigues pour la version p. Les matrices globales de l'équation du mouvement du rotor fissuré sont déterminées par l'application de l'équation de Lagrange en tenant compte de la variation locale de la rigidité de l'arbre due à la fissure, la rigidité de l'élément fissuré de l'arbre est déterminée en utilisant la méthode de rigidité variable.

Un programme est développé en MATLAB pour calculer les fréquences propres et tracer la réponse dynamique ainsi que les amplitudes et les orbites d'un rotor fissuré et non fissuré. Après avoir montré la rapidité de la convergence de la version h-p de la méthode des éléments finis (MEF) par rapport à la version h, une étude détaillée de l'influence d'une fissure transversale ouverte et respiratoire sur les paramètres modaux du rotor est présentée. Les résultats trouvés montrent l'efficacité de la version h-p de la MEF et la méthode de rigidité variable pour l'étude des rotors fissurés.

Mots-clés: rotor, version h-p de MEF, fissure transversale ouverte, fissure transversale respiratoire, rigidité variable.

ABSTRACT

The presence of cracks affects the dynamic behavior of rotating machines (eigen-frequencies, amplitudes, eigen-modes); the study of this effect makes it possible to identify the presence, the location and depth of the crack. The aim of this work is to study the effect of a transverse crack on the modal parameters of a rotor using the h-p version of the finite method, the one-dimensional finite element Euler-Bernoulli beam is used for modeling the rotor, the shape functions used are the Hermite cubic functions modified for the h version coupled to the special Legendre polynomials of Rodrigues for the p version. The global matrices of the equation of motion of the cracked rotor are determined by the application of the Lagrange equation taking into account the local variation on the shaft's stiffness due to the crack, the stiffness of the cracked element of the shaft are determined using the time-varying stiffness method.

A program is developed in MATLAB to calculate the eigen frequencies and to plot the dynamic response as well as the amplitudes and the orbits of a cracked and uncracked rotor. After showing the rapidity of the convergence of the h-p version of finite element method (FEM) compared to the h version, a detailed study on the influence of an open and breathing transverse crack on the modal parameters of the rotor is presented, the results founded show the efficiency of the h-p version of the MEF and the time-varying stiffness method in the study of cracked rotors.

Keywords: Rotor, h-p version of FEM, open crack, breathing crack, time-varying stiffness.

المخلص

وجود التشققات يسبب تأثيرات على الخصائص الديناميكية للآلات الدوارة (الترددات، المدارات، أشكال التشوهات)، دراسة هذه الأخيرة تمكن من تحديد وجود تشققات وكذلك معرفة موقعها وعمقها. الهدف من هذا العمل هو دراسة تأثير التشققات العرضية على الخصائص الديناميكية للأعمدة الدوارة باستخدام نسخة hp من طريقة العناصر المنتهية، حيث يتم استخدام العنصر أحادي البعد Euler-Bernoulli لنمذجة العمود الدوار، معادلات التشوه المستخدمة هي دوال Hermite cubique معدلة للنسخة h مقرونة مع كثير الحدود الخاص بRodrigues للنسخة p. يتم تحديد المصفوفات الإجمالية لمعادلة الحركة من خلال تطبيق معادلة Lagrange مع الأخذ بعين الاعتبار التغيير في صلابة العنصر المشقوق من العمود، يتم تحديد صلابة العنصر المشقوق في العمود باستخدام طريقة الصلابة المتغيرة بدلالة الزمن.

تم تطوير برنامج في MATLAB لحساب الترددات الخاصة ولرسم تخطيط الحركة بالإضافة إلى مدى الانتقالات العرضية بالنسبة للأعمدة الدوارة المشققة وغير المشققة. بعد عرض سرعة تقارب نسخة hp من طريقة العناصر المنتهية مقارنة مع النسخة h، تم تقديم دراسة تفصيلية عن تأثير التشققات العرضية على الخصائص الديناميكية للأعمدة الدوارة، تبين النتائج المتحصل عليها كفاءة النسخة hp من طريقة العناصر المنتهية وطريقة الصلابة المتغيرة بدلالة الزمن في دراسة الأعمدة الدوارة المشققة.

الكلمات المفتاحية: عمود دوار، نسخة hp من طريقة العناصر المنتهية، الشق المفتوح، الشق المتنفس، الصلابة المتغيرة بدلالة الزمن.