Solutions positives pour un problème elliptique non homogène

MOKTIT Farida [1]

Novembre. 2011

[1] Adresse : Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Université Abou bekr BELKAID (Tlemcen) - BP 119 Tlemcen13000 - ALGERIE.

Dédicaces:

Je dedie ce mémoire

A la mémoire de mon père qui me manque tellement.

A ma mère.

A mon mari:Boulenouar.

A ma soeur: Yasmina.

A mes chèrs frères: Mohammed, kaddour et Youness.

A toute ma famille.

A tous mes amies.

A tous mes enseignants.

Remerciements

Je remercie mon Dieu qui m'a donnée la volonté, la patience et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.

Mes parents qui m'ont encouragé , qui m'ont appris à travailler honnêtement et m'ont réalisé tous les moyens afin d'apprendre.

J'adresse mes remerciements par un grand respect et gratitude en particulier à mon encadreur M^r *M.Bouchekif* qui a dirigé ce travail, pour m'avoir encadrée et proposé un sujet aussi passionnant et intéressant. Sa disponibilité permanente et son aide m'ont été d'un soutien dont je lui suis particulièrement reconnaissante. Sa compétence et ses conseils m'ont été d'un grand secour.

Mes vifs remerciement vont à Monsieur *B.Abdellaoui* qui m'a honorée en acceptant de présider mon jury.

Je remercie très respectueusements Monsieur *A. Bensedik* et Monsieur *B. Messirdi* qui ont consacré leur temp à bien examiner et juger mon travail minutieusement.

En fin, un grand merci à toute personne m'ayant aidée pour la réalisation de cette étude.

Tables des Matières

Notation

$(X, \|.\|_X)$ est un espace de Banach

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, $\partial\Omega$ désigne sa frontière.

Soit $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, ∇u est le gradiant de la fonction u, il est défini par

$$(\frac{\partial u}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_i})$$

Δu est le Laplacien de la fonction u c'est-à- dire:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} = div(\nabla u)$$

$C^0(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.

$C_0^\infty(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ à support compact dans Ω.

$L^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des foncions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables et essentiellement bornées c'est-à- dire: il existe une constante C telle que:

$$|u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega$$

Aussi

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c/ \, |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

$W^{1,p}(\Omega)$: l'espace de Sobolev de fonctions $u \in L^P(\Omega)$ tels que:
$|\nabla u| \in L^p(\Omega)$, dont la norme est

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^P}$$

$H^1(\Omega)$:l'espace de Sobolev de fonctions $u \in L^2(\Omega)$ tels que:
$|\nabla u| \in L^2(\Omega)$, dont la norme est

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}$$

$\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre du problème :

$$(\text{p1}) \begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

et φ_1 est la fonction propre associée à $\lambda_1(\Omega)$.

Introduction

L'intéret de ce mémoire est de résoudre un problème elliptique non homogène avec des données qui changent de signe.
Plus explicitement le problème suivant:

$$(\ P_\lambda\ )\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}\, u + \lambda f(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où
Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, $f(x)$ est une fonction qui change de signe.
Dans le cas où $f \equiv 0$, et $1 < \frac{N+2}{N-2}$, le problème (P_λ) a fait l'objet de plusieurs recherches en particulier P. L. Lions [12] par des méthodes topologiques (degré topologique, théorie de bifurcation), et des méthodes variationnelles.
Le cas critique c'est à dire où $p = \frac{N+2}{N-2}$,$\lambda = 0$ et Ω a une forme étoilée, ce problème ne possède pas de solution positive non triviale, ceci a été prouvé par Pohozaev dans[13].L'idée de la perturbation par un terme d'orde inférieure à p a été traité par Brézis et Nirenberg. Ils montrent dans [4] que la présence de cette perturbation d'ordre inférieure et dépendante de u peut conduire à l'existence de solution positive. Ils adoptent une approche variationnelle, en utilisant le théorème du Col.
Dans le cas d'une perturbation par une fonction indépendante de u, le problème (P_λ) a été traité par Tarantello en 1992 [14]. Elle a obtenue des solutions multiples. La première solution a été obtenu par le Principe variationnel d'Ekeland. La deuxième solution a été obtenue par le théorème du Col.
L'objet de ce travail est de prouver l'existence de deux solutions positives bien que la donnée f est un terme indfini. L'une a été obtenue par la méthode de sous et sur solution. L'autre par le théorème du Col.

Ce mémoire est organisé comme suit:
Dans le premier chapitre, on rappelle quelques définitions et résultats imporants.
Le deuxième chapitre concèrne les résultats d'existence et de multiplicité de solution positive.
Le troisième chapitre est consacré aux propriétés des solutions obtenues.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on va présenter les définitions et les méthodes nécessaires pour notre travail.
On considère le problème:

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = g(.,u) & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, g et u_0 des fonctions données.

Définition 1 *:*
On dit qu'une fonction $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de Carathéodory si elle vérifie,

$$s \longmapsto g(x,s) \text{ est continue pour presque tout } x \in \Omega$$

et

$$x \longmapsto g(x,s) \text{ est mesurable pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

1.1 Sous et sur solution

Définitions 1 *:*

- *On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une sous solution de (1) si*

$$u \leq u_0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et

$$-\Delta u \leq g(.,u) \text{ dans } \Omega$$

- *On dit que* $u \in H^1(\Omega)$ *est une sur solution de (1) si*

$$u \geq u_0 \ sur \ \partial\Omega$$

et

$$-\Delta u \geq g(.,u) \ dans \ \Omega$$

Théorème 1 *:*
Supposons que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *est une sous solution de (1) et* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *est une sur solution de (1)et qu'il existe des constantes* $\underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R}$ *telles que*

$$-\infty \leq \underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c} < +\infty \ p.p \ dans \ \Omega,$$

alors il existe une solution faible $u \in H^1(\Omega)$ *de (1) vérifiant*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \ p.p \ dans \ \Omega$$

1.2 Injection de Sobolev

Cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$

Théorème 2 *:*
Soient $\Omega \subset R^N$ *un ouvert de classe* C^1 *dont la frontière* $\partial\Omega$ *est bornée, et* $1 \leq p \leq \infty$.

- *Si* $1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$. *avec* $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
- *Si* $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[$
- *Si* $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

  De plus,si $p > N$ *,on a pour tout* $u \in W^{1,P}(\Omega)$*:*

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}} |x-y|^{1-\frac{N}{p}} \ , \ pp \ x, y \in \Omega$$

avec injections continues.

Théorème de Rellich-Kondrachov

Théorème 3 *:*
On suppose Ω bornée de classe C^1. On a alors:

- *Si $p < N$, alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[$.
- *Si $p = N$, alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[$.
- *Si $p > N$, alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

avec injections compactes.

1.3 Lemme du Col

Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach et $E : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle.

Définition 2 *:*
On dit que E est différentiable (au sens de Fréchet) en un point $u \in X$, s'il existe une application linéaire continue $E'(u) \in X^*$ (dual de X) telle que:

$$\frac{|E(u+v) - E(u) - E'(u)v|}{\|v\|_X} \to 0 \text{ quand } \|v\|_X \to 0.$$

Si E est différentiable en tout point de X et si l'application $u \longmapsto E'(u)$ est continue, on dit que E est continument différentiable sur X et on écrit $E \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Définition 3 *:*
On dit que $u \in X$ est un point critique de E si $E'(u) = 0$.

Définition 4 *:*
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de E, s'il existe un point critique u de E tel que $E(u) = c$.

Soit $E \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Définition 5 ***(Condition de Palais-Smale):***
On dit que E vérifie la condition de Palais-Smale au niveau β notée $(P.S)_\beta$, si pour toute suite $(u_n) \subset X$ telle que:

$$E(u_n) \to \beta$$

et

$$E'(u_n) \to_{n\to\infty} 0 \text{ dans } X^*,$$

il existe une sous suite fortement convergente.
E satisfait la condition $(P.S)$ si elle vérifie $(P.S)_\beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Le lemme du Col est un exemple très simple de méthode du Min Max. Il permet souvent de trouver un nouveau point critique lorsqu'on connait un minimum local (parfois une solution évidente) et si la fonctionnelle n'est pas minorée. Donnons tout de suite son énoncé.

Théorème 4 ***(Ambrosetti - Rabinowitz):***
Soit E une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach X, qui vérifie les hypothèses suivantes:

1. *Il existe $u_0 \in X$, $\rho > 0$, et $\alpha > 0$ tels que:*

$$\text{si } \|u - u_0\| = 0 \text{ alors } E(u) > E(u_0) + \alpha \tag{1.3.1}$$

2. *Il existe un point $u_1 \in X$ tel que:*

$$\|u_0 - u_1\| > \rho \text{ et } E(u_1) < E(u_0) + \alpha \tag{1.3.2}$$

Soit P l'ensemble des chemins reliant u_0 à u_1, c'est à dire

$$P = \{p \in C([0,1], V) \text{ tels que } p(0) = u_0, p(1) = u_1\},$$

et

$$\beta = inf_{p\in P}(sup_{s\in[0,1]} E(p(s))).$$

Alors $\beta \geq E(u_0) + \alpha$ et β est une valeur critique généralisée de J.
Si J vérifie (P.S), β est donc une valeur critique de E.

Avant de donner la preuve de ce théorème, commençons par un résultat préliminaire.

Proposition 1.3.1 *:*
L'ensemble $\widetilde{K}_c$ des valeurs critiques généralisées de E est fermé(dans $\mathbb{R}$). De même l'ensemble K_c des valeurs critiques est fermé.

Preuve. :
Soit β_n une suite de valeurs critiques généralisées de E, telle que

$$\beta_n \to \beta \text{ dans } \mathbb{R}(\beta \in \mathbb{R}).$$

Il faut montrer que β est une valeur critique généralisée de E.
Par définition de β_n, pour n fixé, il existe une suite $(v_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$

$$E(v_k^n) \to \beta_n \ k \to +\infty$$
$$|dE(v_k^n)| \to 0 \ k \to +\infty$$

Posons alors $u_n = v_{k(n)}^n$.On vérifie que:

$$E(u_n) \to \beta, n \to \infty$$
$$\text{et}$$
$$dE(u_n) \to 0 \text{ dans } X^*, n \to +\infty.$$

et donc β est une valeur critique généralisée de E. ■

Preuve. du théorème 4:
Quitte à changer d'origine, et à soustraire une constante de E, on peut toujours supposer que $u_0 = 0$ et $E(u_0) = E(0) = 0$ (ceci soulagera un peu les notations)
Montrons tout d'abord que

$$\beta \quad \geq \quad E(u_0) + \alpha = \alpha \tag{1.3.3}$$

Rappelons que

$$\beta \quad = \quad \inf_{p\in P}\big(\sup_{s\in[0,1]} E(p(s))\big) \tag{1.3.4}$$

Considérons un chemin $p \in P$. Comme $p(0) = u_0$, $p(1) = u_1$et p est continue ,
la fonction $\varphi(s) = \|p(s) - p(0)\|$est continue et $\varphi(0) = 0, \varphi(1) > \rho$, il existe donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $s_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\varphi(s_0) = \|p(s_0) - u_0\| = \rho$$

et donc

$$E(p(s_0)) \geq \alpha$$

Il en résulte que, pour tout chemin $p \in P$,

$$\sup_{s \in [0,1]} E(p(s)) \geq \alpha,$$

Afin de montrer que β est une valeur critique généralisée,
on raisonne par l'absurde. On suppose que β n'est pas une valeur critique généralisée, c'est à dire que $\beta \notin \widetilde{K}_c$.
D'après la proposition précédente, comme $\widetilde{K}_c$ est fermé, son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert: alors il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que

$$E \text{ n'a pas de valeur critique généralisée dans } [\beta - 2\epsilon, \beta + 2\epsilon]\,. \quad (1.3.5)$$

Montrons à l'aide du lemme de déformation que l'on aboutit à une contradiction. D'après le lemme de déformation, pour $a = \beta - \epsilon$, $b = \beta + \epsilon$, il existe, une rétraction de E^b sur E^a, c'est à dire une application continue Φ de $E^{\beta+\epsilon} \times [0,1]$ vers $E^{\beta+\epsilon}$ telle que

$$\begin{cases} \Phi(v,0) = v, & \forall v \in E^{\beta+\epsilon} \\ \Phi(v,1) \in E^{\beta-\epsilon} & \\ \Phi(v,0) = v & \forall v \in E^{\beta-\epsilon}. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

On remarque en particulier, qu'on peut choisir ϵ suffisament petit de sorte que

$$\beta - \epsilon > E(u_1) \quad (1.3.7)$$

et

$$\beta - \epsilon > 0 \quad (1.3.8)$$

Pour ce choix de ϵ, on voit que les extrémités des chemins de P c'est á dire u_0 et u_1, ne bougent pas au cours de la rétraction, car

$$E(u_0) = 0 < \beta - \epsilon; E(u_1) < \beta - \epsilon \text{ entrainent } u_0 \in E^{\beta-\epsilon} \text{ et } u_1 \in E^{\beta-\epsilon}$$

et donc par (1.2.6),

$$\Phi(u_0, 1) = u_0, \Phi(u_1, 1) = u_1 \tag{1.3.9}$$

.
Considérons un chemin $p \in P$ tel que

$$\sup_{s\in[0,1]} E(p(s)) < \beta + \epsilon \tag{1.3.10}$$

(il est toujours possible de trouver un tel chemin en raison de la définition même de β). (9) signifie que $\forall s \in [0,1], p(s) \in E^{\beta+\epsilon}$, et donc p est un chemin qui relie u_0 à u_1 dans $E^{\beta+\epsilon}$.
A l'aide de la déformaion Φ, nous allons pousser ce chemin sur $E^{\beta-\epsilon}$. Un tel chemin contredirait la définition de β,ce qui achèvera notre démonstration.

Plus précisément, considérons le chemin

$$\widetilde{p} : [0,1] \to E^{\beta-\epsilon}$$

défini par $\widetilde{p}(s) = \Phi(p(s), 1)$
On a bien

$\widetilde{p}(0) = \Phi(p(0), 1) = \Phi(u_0, 1) = u_0$

$\widetilde{p}(1) = \Phi(p(1), 1) = \Phi(u_1, 1) = u_1$
On vérifie aisément que $\widetilde{p}$ est continue(composée de fonctions continues), et donc $\widetilde{p} \in P$.
On a, en outre $\forall s \in [0,1]\, p(s) \in E^{\beta-\epsilon}$, et donc

$$\sup_{s\in[0,1]} E(\widetilde{p}(s)) < \beta - \epsilon$$

Ceci est évidemment contradictoire avec la définition de β. ∎

Remarque:

1. Il exist de nombreuses variantes de ce théorème (voir[Struwe])

Chapitre 2

Résultat d'existence et de multiplicité

Considérons le problème non linéaire suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda f(x) \\ u = 0 \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et f est une fonction qui change de signe.

Hypothèses générales

(H1): $0 \neq f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$;
(H2): Le problème de Dirichlet linéaire

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution non négative.

Remarque 1 *L'hypothèse (H2) a un sens d'après les travaux de Càc et al. dans ([7,8]).*

2.1 Existence d'une solution positive par sous et sur solution

A- Cas où $p > 1$

Théorème 5 *:*
Supposons que f vérifie (H1) et (H2) et que $p > 1$. Alors, il existe un nombre positif λ_* tel que le problème (P_λ) admet au moins une solution positive pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

Preuve. :
On note par $u_{0f} \neq 0$, la solution non négative du problème (P).
Soit $\underline{u} = \lambda u_{0f}$, $\lambda > 0$ est un paramètre positif, donc on a:

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &= -\lambda \Delta u_{0f} = \lambda f \\ &\leq |\underline{u}|^{p-1}\, \underline{u} + \lambda f \end{aligned}$$

et par suite $\underline{u}$ est une sous solution du problème (P_λ).

Le principe de sous et sur solution, nous permet d'obtenir une solution du problème (P_λ) à condition de trouver une sur solution $\overline{u}(x)$ de (P_λ) vérifiant $\overline{u}(x) \geq \underline{u}(x)$.
Soit u_1 la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

L'existence reulte du théorème de Lax-Milgram.
d'aprés le principe du maximum $u_1 > 0$ pour $x \in \Omega$
Posons $\overline{u} = M u_1$, nous avons $-\Delta \overline{u} = -M \Delta u_1 = M$.
Choisissons $M > 0$ de telle sorte que $\overline{u}$ soit une sur solution
(*)

$$-\Delta \overline{u} \geq \overline{u}^p + \lambda f$$

$(*)$ nous donne:

$$M \geq M^p u_1^p + \lambda f$$

Si on prend M_0

$$M_0 \geq M_0^p \max_{\Omega} u_1^p + \lambda \max_{\Omega} |f| \qquad \forall \lambda \leq M_0^p.$$

Alors $\overline{u}_0 = M_0 u_1$ est une sur solution de (P_λ).
Par ailleurs, si nous choisissons λ_0 petit $\lambda_0 u_{0f}(x) \leq M_0 u_1(x)$, alors la méthode de sous-sur solution implique que le problème (P_λ) a une solution u avec $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}_0$ pour $0 < \lambda < \lambda_0$,
On peut conclure que $u(x) > 0$ pour $x \in \Omega$ arbitraire.
En effet: posons $w(x) = u(x) - \underline{u}(x) = u(x) - \lambda u_{0f}(x)$, alors

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) &= -\Delta u(x) + \lambda \Delta u_{0f}(x) \\ &= u^p(x) + \lambda f(x) - \lambda f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = u^p(x) \geq 0 \\ w(x) = 0 \end{cases}$$

et $w(x) \neq 0$ donc le principe de maximum assure que $w(x) > 0$, par conséquent $u(x) \geq \underline{u}(x) \geq 0, \forall x \; in\Omega$

Remarque 2 *Cette méthode nous permet d'avoir des solutions du problème (P_λ) mème dans le cas il est superciritique.*

2.2 Existence d'une deuxième solution positive par le théorème du Col

A- Cas où $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$

L'objet de ce paragraphe est de montrer l'existence d'une deuxième solution positive du problème (P_λ). Pour cela, on applique le théorème du Col.

Théorème 6 *:*
Supposons que $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$ *et* f *vérifie (H1)et (H2). Alors, il existe un nombre positif* λ_* *tel que le problème* (P_λ) *admet au moins deux solutions positives pour* $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

Preuve. :
Soit u_λ la solution de (P_λ) obtenue dans le paragraphe précédent. Alors par un argument similaire à celui utilisé dans [1], on peut prouver que u_λ est une solution positive minimale c'est à dire que toute solution positive u du problème (P_λ) vérifie $u(x) \geq u_\lambda(x), x \; in\Omega$.
Afin de trouver une deuxième solution de (P_λ), nous introduisons le problème:

$$(\sum) \begin{cases} -\Delta v = (v + u_\lambda)^p - u_\lambda^p & \text{dans} \quad \Omega \\ v > 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Posons

$$g_\lambda(x,t) = \begin{cases} (t + u_\lambda)^p - u_\lambda^p & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

et

$$G_\lambda(x,v) = \int_0^v g_\lambda(x,t)dt$$

Alors la fonctionnelle d'énergie associée à $(\sum)$ est

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x,v)dx$$

Si $v \in H_0^1$ est un point critique de J_λ alors v est une solution de $(\sum)$ et par le principe du maximum, $v > 0$ dans Ω. Donc $v_\lambda = u_\lambda + v$ est une solution du problème (P_λ), et on prouvera par absurde que $v_\lambda \neq u_\lambda$.

Lemme 1 $v = 0$ *est un minimum local de* J_λ *dans* $H_0^1(\Omega)$

Preuve. :
D'aprés le théorème 8 dans[6], il suffit de montrer que $v = 0$ est un minimum local de J_λ dans C^1.

Soit v^+ la partie positive de v.
Posons

$$h_\lambda(s) = \begin{cases} s^p + \lambda f(x) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

et

$$H_\lambda(u) = \int_0^u h_\lambda(s)ds$$

et donc, la fonctionnelle d'énergie du problème (P_λ) est définie comme suit:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega H_\lambda(u)dx$$

donc

$$\begin{aligned} H_\lambda(u) &= \int_0^u h_\lambda(s)ds \\ &= \int_0^u s^p + \lambda f(x)ds \\ &= \frac{1}{p+1}u^{p+1} + \lambda u f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_\lambda(v) &= \int_0^v g_\lambda(x,t)dt \\ &= \int_0^v (t+u_\lambda)^p - u_\lambda^p dt \\ &= \frac{1}{p+1}(v+u_\lambda)^{p+1} - \frac{1}{p+1}u_\lambda^{p+1} - u_\lambda^p v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_\lambda(v^+) - H_\lambda(u_\lambda + v^+) &= -\frac{1}{p+1}u_\lambda^{p+1} - u_\lambda^p v^+ - \lambda(u_\lambda + v^+)f(x) \\ &= -\frac{1}{p+1}u_\lambda^{p+1} - u_\lambda^p v^+ - \lambda u_\lambda f(x) - \lambda v^+ f(x) \end{aligned}$$

Alors,

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\left\|\nabla v^+\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla v^-\right\|^2 - \int_\Omega G(v^+)dx.$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\nabla v^+\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla v^-\right\|^2 - \int_\Omega H(u_\lambda + v^+)dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega u_\lambda^{p+1}dx +$$

$\int_\Omega (u_\lambda^p + \lambda f(x))v^+dx + \int_\Omega \lambda u_\lambda f(x).$

$$= \frac{1}{2}(\left\|\nabla v^+\right\|^2) + \frac{1}{2}(\left\|\nabla v^-\right\|^2) - \int_\Omega H(u_\lambda + v^+)dx +$$

$\int_\Omega (u_\lambda^p + \lambda f(x))v^+dx + \int_\Omega H(u_\lambda)dx.$

$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}(\left\|\nabla v^+\right\|^2) + \frac{1}{2}(\left\|\nabla v^-\right\|^2) + I(u_\lambda + v^+) - \frac{1}{2}(\left\|\nabla v^+\right\|^2) - \frac{1}{2}(\|\nabla u_\lambda\|^2) -$

$\mathrm{I}(\mathrm{u}_\lambda) + \frac{1}{2}(\|\nabla u_\lambda\|^2)$

$$= \frac{1}{2}(\left\|\nabla v^-\right\|^2) + I(u_\lambda + v^+) - I(u_\lambda).$$

On utilise le lemme qui affirme que, pour tout $\lambda \in (0, \lambda^*)$ le problème (P_λ) admet une solution u_λ qui est en plus un minimum local de I pour la topologie C^1
donc $J_\lambda(v) \geq \frac{1}{2}\left\|\nabla v^-\right\|^2 \geq 0$
et par suite, $\|\nabla v\|_{C^1} < \epsilon$.

Lemme 2 *:[2,3]*

- *Si* $p < \frac{N+2}{N-2}$ *alors* J_λ *vérifie* $(P.S)_\beta$ *pour tout* β.
- *Si* $p = \frac{N+2}{N-2}$ *et si 0 est un point critique de* J_λ*, alors* J_λ *vérifié* $(P.S)_\beta$ *pour toute* $\beta < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$*, où* S *est la constante de Sobolev,donnée par* $S = \inf \frac{\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx}{\int_\Omega (|v_n|^p dx)^{\frac{2}{p}}}$

Preuve. :
Soit $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$J_\lambda(v_n) \to \beta < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$$

$$J_\lambda^{'}(v_n) \to 0 \text{ dans } (H_0^1(\Omega)) \text{ quand } n \to \infty.$$

Alors (v_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En effet,

$$\|v_n\|_2^2 = \int_\Omega |v_n|^2 \leq (\int_\Omega |v_n|^{2.\frac{2^*}{2}})^{\frac{2}{2^*}}((|\Omega|)^{1-\frac{2}{2^*}})^{\frac{1}{2}} \text{ (Holder) }.$$

$$\|v_n\|_2^2 \leq \|v_n\|_{2^*}^2 .((|\Omega|)^{1-\frac{2}{2^*}})^{\frac{1}{2}} \leq ((|\Omega|)^{1-\frac{2}{2^*}})^{\frac{1}{2}} \forall n \text{ car } \|v_n\|_{2^*}^2 = 1$$

ce qui implique que (v_n) est bornée dans $L^2(\Omega)$.

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \leq S + \lambda((|\Omega|)^{1-\frac{2}{2^*}})^{\frac{1}{2}}. \|f\|_2^2 + 0(1)(0(1) \Rightarrow \exists N_0, n > N_0 \, |0(1)| \leq 1)$$

$$\leq S + \lambda |\Omega| . \|f\|_2^2 + 1, n \geq N_0$$
$$\|\nabla v_n\|_2^2 \leq \max(\|\nabla v_0\|_2^2, \|\nabla v_1\|_2^2, \ldots, \|\nabla v_{N_0-1}\|_2^2, C)$$
$$\leq M$$

et puisque que H_0^1 est un espace de Hilbert et donc reflexive, la boule unité est faiblement compacte . Alors, on peut extraire une sous suite telle que

$$\begin{array}{lll} v_n & \rightharpoonup & v \text{ dans } H_0^1(\Omega) \\ v_n & \to & v \text{ dans } L^t(\Omega), \text{ pour } 1 < t < 2^* \text{ pp } \Omega \\ v_n & \to & v \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ pour } 2 \leq p < 2^* \text{fortement} \end{array}$$

De plus $v = 0$ est un point critique de J_λ dans $H_0^1(\Omega)$
Maintenent, on montre que $v_n \to 0$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

D'après Brézis-Lieb, on a

$$\int_\Omega (u_\lambda + v_n^+)^{2^*} dx - \int_\Omega u_\lambda^{2^*} dx = \int_\Omega (v_n^+)^{2^*} dx + o(1)$$

et
$\left\langle J'_\lambda(v_n), u_\lambda + v_n \right\rangle =$
$\int_\Omega \nabla v_n^+ \nabla (u_\lambda + v_n) dx - \int_\Omega (v_n^+ + u_\lambda)^p (v_n + u_\lambda) dx + \int_\Omega u_\lambda^p (v_n + u_\lambda) dx + o(1)$
$= \int_\Omega |\nabla v^+|^2 dx - \int_\Omega ((v_n^+ + u_\lambda)^p - u^p)((v_n + u_\lambda)) dx + o(1)$
$= \int_\Omega |\nabla v^+|^2 dx - \int_\Omega (v_n^+)^p dx + o(1) \to 0$ quand $n \to \infty$
on peut supposer que

$$\|\nabla v_n\|^2 \to b \text{ et}$$

$\int_\Omega (v_n^+)^p dx \to b \geq 0$ quand $n \to \infty$

si $b = 0$ la preuve est complète .

Sinon, nous savons d'aprés la définition de S que
$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \geq S(\int_\Omega (v_n^+)^p dx)^{\frac{2}{p}}$ et $b \geq S^{\frac{N}{2}}$, alors on aura

$$\begin{aligned}
\beta &= J_\lambda(v_n) + o(1) \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla v_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega (v_n^+)^p dx + o(1) \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})b \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \text{ contradiction .}
\end{aligned}$$

■

Lemme 3 *:*
Soit β^* définie comme dans le lemme 2, alors

$$\sup_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\epsilon) < \beta^*$$

.

Preuve. :
Pour $N \geq 4$

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, v) dx$$

On donne la fonction

$$v_\epsilon = \frac{\phi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}};$$

$\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ est une fonction positive telle que:
$\phi(x) \equiv 1$ dans un voisinage de 0

donc

$$J_\lambda(tv_\epsilon) = \frac{t^2}{2}\|\nabla v_\epsilon\|^2 - \int G_\lambda(x, tv_\epsilon)dx$$

D'aprés la formule qui affirme que,
pour $p > 1$,il existe $\alpha = \alpha(p)$, tel que
$(a+b)^p \geq a^p + b^p + \alpha(p)ab^{p-1}, \forall a, b \geq 0,$
on a,

$$\begin{aligned} g_\lambda(x, tv_\epsilon) \geq (tv_\epsilon)^p + u_\lambda^p + \alpha(p)tv_\epsilon u_\lambda^{p-1} - u_\lambda^p. \\ = (tv_\epsilon)^p + \alpha(p)tv_\epsilon u_\lambda^{p-1}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} G_\lambda(tv_\epsilon) &= \int_0^{tv_\epsilon} g_\lambda(x, s)ds \\ &\geq \frac{t^{p+1}}{p+1}v_\epsilon^{p+1} + \alpha(p)\frac{t^2}{2}v_\epsilon^2 u_\lambda^{p-1} \end{aligned}$$

$$J_\lambda(tv_\epsilon) \quad \leq \quad \frac{t^2}{2}\|\nabla v_\epsilon\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int v_\epsilon^{p+1}dx - \frac{1}{2}\alpha t^2 \int v_\epsilon^2 u_\lambda^{p-1}dx$$

On sait que $u_\lambda > M_0$.

$$J_\lambda(tv_\epsilon) \leq \frac{t^2}{2}\|\nabla v_\epsilon\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int v_\epsilon^{p+1}dx - \frac{\alpha(p)t^2}{2}M_0\int v_\epsilon^2 dx$$
$$h_\epsilon(t) = \frac{t^2}{2}\|\nabla v_\epsilon\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int v_\epsilon^{p+1}dx - \frac{\alpha(p)t^2}{2}M_0\int v_\epsilon^2 dx$$
$$h_\epsilon^{'}(t) = t\|\nabla v_\epsilon\|^2 - t^p\int v_\epsilon^{p+1}dx - \alpha(p)tM_0\int v_\epsilon^2 dx.$$
$$h'(t) = 0 \Rightarrow t(\|\nabla v_\epsilon\|^2 - t^{p+1}\int v_\epsilon^{p+1}dx - \alpha(p)M_0\int v_\epsilon^2 dx) = 0$$
$$\Rightarrow t_\epsilon = (\frac{\|\nabla v_\epsilon\|^2 - \alpha(p)M_0\int v_\epsilon^2 dx}{\int v_\epsilon^{p+1}dx})^{\frac{1}{p-1}}$$

$\max_{t\geq 0} h(t) = h(t_\epsilon)$

$$\begin{aligned} J_\lambda(tv_\epsilon) &\leq h(t_\epsilon) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})(t_\epsilon^{p+1}\int v_\epsilon^{p+1}dx) \end{aligned}$$

Nous allons estimer le quotient:

$$Q(v_\epsilon) = (\frac{\|\nabla v_\epsilon\|_2^2 - \alpha(p)M_0\|v_\epsilon\|_2^2}{\|v_\epsilon\|_{p+1}^2})^{\frac{p+1}{p-1}}$$

1. On calcule

$$\nabla v_\epsilon(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{(N-2)\phi(x)x}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N}{2}}}$$
$$\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx = \int_\Omega \frac{|\nabla\phi|^2}{(\epsilon + |x|^2)^{N-2}} + (N-2)^2\int_\Omega \frac{\phi^2(x)|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^N}dx$$
$$-2(N-2)\int_\Omega \frac{|\nabla\phi(x)|\,\phi(x)\,|x|}{(\epsilon + |x|^2)^{N-1}}dx$$

au voisinage de 0, $\phi \equiv 1$ et donc $\nabla\phi \equiv 0$, on a alors

$$\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx = (N-2)^2\int_\Omega \frac{\phi^2(x)|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^N}dx + O_\epsilon(1)$$

$$\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2\,dx = (N-2)^2\int_\Omega \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx + (N-2)^2\int_\Omega \frac{(\phi^2(x)-1)\,|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx + O_\epsilon(1)$$

au voisinage de 0 on a $(\phi^2(x)-1)\equiv 0$ donc,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2\,dx &= (N-2)^2\int_\Omega \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx + O_\epsilon(1)\\
&= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx - (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N/\Omega} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx + O_\epsilon(1)\\
&= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx + O_\epsilon(1)(\text{ car } 0\notin \mathbb{R}^N/\Omega)\\
&= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{\epsilon^N(1+\frac{|x|^2}{\epsilon})^N}dx + O_\epsilon(1)
\end{aligned}$$

$$= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon\,|y|^2\,\epsilon^{\frac{N}{2}}}{\epsilon^N(1+|y|^2)^N}dy + O_\epsilon(1) \text{ en posant } y=\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(N-2)^2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2}{(1+|y|^2)^N}dy + O_\epsilon(1)\\
&= \frac{K_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(1)
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega |v_\epsilon|^{p+1} = \int_\Omega \frac{\phi^{p+1}(x)}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx \;=\; \int_\Omega \frac{\phi^{p+1}-1}{(\epsilon+|x|^2)^N}dx + \int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon+|x|$$

au voisinage de 0 on a $(\phi^{p+1}(x)-1)\equiv 0$ donc

$$\int_\Omega |v_\epsilon|^{p+1} = \int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^N} - \int_{\mathbb{R}^N/\Omega} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^N} + O_\epsilon(1)(\text{ car } 0\notin \mathbb{R}^N/\Omega)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon^{\frac{N}{2}}}{\epsilon^N(1+|y|^2)^N}dy + O_\epsilon(1) \text{ en posant } y=\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$= \frac{K_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\epsilon(1)$$

Il vient ainsi $\left(\int_\Omega |v_\epsilon|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} = \frac{K_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(\epsilon)$,
en posant $K_2 = \left(K_2'\right)^{\frac{2}{p+1}}$ et en calculant (par la formule des accroissements finis) que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{K_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\epsilon(1)\right)^{\frac{2}{p+1}} &= \left(\frac{K_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}}\right)^{\frac{2}{p+1}} + O_\epsilon(1)\,(b_\epsilon)^{\frac{2}{p+1}-1} \\
|b_\epsilon|^{\frac{2}{p+1}-1} &\leq \left(\frac{K_2'}{\epsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\epsilon(1)\right)^{\frac{2}{p+1}-1} \\
&\leq \left(O_\epsilon\left(\epsilon^{\frac{-N}{2}}\right)\right)^{\frac{2}{p+1}-1} \\
&= O_\epsilon(\epsilon).
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega |v_\epsilon|^2\,dx = \frac{\phi^2(x)-1}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}}dx + \int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}}$$

au voisinage de 0 on a $(\phi^2(x)-1) \equiv 0$ donc ,

$$= \int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} + O_\epsilon(1)\,\ldots\ldots\ldots(A)$$

On doit ici traiter différemment les cas $N = 4$ et $N \geq 5$.
En effet: on remarque que l'intégrale $\int_\Omega \frac{r^{N-1}}{r^{2(N-2)}}dr$ existe si et seulement si $2(N-2)-(N-1) > 1$, c'est à dire $N > 4$.
Quand $N \geq 5$, (A) devient

$$\int_\Omega |v_\epsilon|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} - \int_{\mathbb{R}^N/\Omega} \frac{dx}{(\epsilon+|x|^2)^{N-2}} + O_\epsilon(1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{\epsilon^{N-2}(1+|y|^2)^{N-2}}dy + O_\epsilon(1)$$

$$= \frac{K_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\epsilon(1)$$

Quand $N = 4, (A)$ se réécrit

$$\int_\Omega |v_\epsilon|^2 \, dx = \int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^2} + O_\epsilon(1)$$

Puisque $0 \in \Omega$ et que Ω est un ouvert borné, il existe deux constantes $0 < R_1 < R_2$ telles que $B(0, R_1) \subset \Omega \subset B(0, R_2)$. Il vient que

$$\int_{B(0,R_1)} \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^2} \leq \int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^2} \leq \int_{B(0,R_2)} \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^2}$$

Or:

$$\int_{B(0,R)} \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^2} = w \int_0^R \frac{r^3 dr}{(\epsilon + r^2)^2} \text{ où } w \text{ est l'aire de la sphère } S^3$$

$$\begin{aligned}
&= w\left(\frac{1}{4}\int_0^R \frac{4r^3 + 4r\epsilon}{r^4 + 2r^2\epsilon + \epsilon^2} dr - \int_0^R \frac{r\epsilon}{(\epsilon + r^2)^2} dr\right) \\
&= w\left(\frac{1}{4}\left[\ln\left(r^4 + 2r^2\epsilon + \epsilon^2\right)\right]_0^R + \left[\frac{1}{2}\frac{\epsilon}{\epsilon + r^2}\right]_0^R\right) \\
&= w(\underbrace{\frac{1}{4}(\ln(R^4 + 2R^2\epsilon + \epsilon^2))}_{O_\epsilon(1)} - \frac{1}{4}\ln\epsilon^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\epsilon}{(\epsilon + R^2)^2}}_{O_\epsilon(1)} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{w}{2}|\ln(\epsilon)| + O_\epsilon(1)
\end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\int_\Omega \frac{dx}{(\epsilon + |x|^2)^2} = \frac{w}{2}|\ln\epsilon| + O_\epsilon(1)$$

On résume:

$$\|\nabla v_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{K_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(1)$$
$$\|v_\epsilon\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} = \frac{K_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(\epsilon).$$

$$\|v_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} \frac{K_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\epsilon(1) & \text{si } N \geq 5 \\ \frac{w}{2}\,|\ln \epsilon| + O_\epsilon(1) & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

On peut dés lors écrire,

$$Q(v_\epsilon)^{\frac{p-1}{p+1}} = \begin{cases} \dfrac{\frac{K_1}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(1) - M_0(\frac{K_3}{\epsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\epsilon(1))}{\frac{K_2}{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\epsilon(\epsilon).} & \text{si } N \geq 5 \\ \dfrac{\frac{K_1}{\epsilon} + O_\epsilon(1) - M_0(\frac{w}{2}|\ln \epsilon| + O_\epsilon(1))}{\frac{K_2}{\epsilon} + O_\epsilon(\epsilon)} & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K_1 - M_0 K_3 \epsilon + O_\epsilon(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})}{K_2 + O_\epsilon(\epsilon^{\frac{N}{2}})} & \text{si } N \geq 5 \\ \dfrac{K_1 - M_0 \frac{w}{2}|\ln(\epsilon)|\epsilon + O_\epsilon(\epsilon)}{K_2 + O_\epsilon(\epsilon^2)} & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S + O_\epsilon(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) - M_0 \frac{K_3}{K_2}\epsilon & \text{si } N \geq 5 \\ S + O_\epsilon(\epsilon) - M_0 \frac{w}{2K_2}\epsilon\,|\ln(\epsilon)| & \text{si } N = 4 \end{cases}$$

puisque $\frac{K_1}{k_2} = S$ en utilisant $\frac{1}{k_2 + x} = \frac{1}{K_2} + x(\ldots)$.
Faisant tendre ϵ vers 0, on aura $Q(v_\epsilon)$ tend vers $S^{\frac{p+1}{p-1}}$
Donc,

$$\sup_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\epsilon) < (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}) S^{\frac{p+1}{p-1}}$$

Maintenant on peut assurer l'existence d'une deuxième solution positive. D'aprés le lemme 1, $v = 0$ est un minimum local de J_λ. Alors, il existe un nombre positive suffisament petit $\overline{\rho}$ tel que $J_\lambda(v) > 0$ pour $\|v\| = \overline{\rho}$. Puisque $J_\lambda(tv_\epsilon) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$, alors il existe $T > 0$ tel que $\|Tv_\epsilon\| > \overline{\rho} > 0, et J_\lambda(tv_\epsilon) < 0$.
On définit

$$\beta := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\gamma(t))$$

où

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], H^1_0), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = Tu_\epsilon\right\}.$$

Pour $\beta < \beta^*$, $(P.S)_\beta$ est réalisée par le lemme 2, alors d'aprés le lemme 3 on conclut que

$$\beta \leq \sup_{t\geq 0} J_\lambda(tTv_\epsilon) \leq \sup_{t\geq 0} J_\lambda(tv_\epsilon) < \beta^*$$

Donc, appliquons le théorème du Col, on obtient le point critique non trivial v de J_λ. ■

B- Cas où $p > \frac{N+2}{N-2}$

Théorème 7 *:*
Supposons que $p > \frac{N+2}{N-2}$ l'hypothèse (H1) est satisfaite et Ω a une forme étoilée. Alors, il existe un nombre positif λ_0 tel que le problème (P_λ) admet au moins une solution pour $\lambda \in (0, \lambda_0)$ si et seulement si f satisfait (H2).

La condition (H2) est suffisante d'après la section(2.1). Montrons que la condition est nécessaire. Cela est équivalent à prouver la proposition suivante:

Proposition 1 *:*
Si $p > \frac{N+2}{N-2}$ et le problème (P_λ) admet une solution positive pour tout λ assez petit, alors le problème (P) admet une solution non- négative.

Preuve. :
Soit u_λ la solution positive de (P_λ).
Posons $u_\lambda = \lambda v_\lambda$, alors v_λ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda = \lambda^{p-1} v_\lambda^p + f(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ v_\lambda = 0 & \text{sur} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.2.0}$$

D'après la preuve du théorème 11 ci-après, on affirme qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de λ telles que :

$$\|v_\lambda\|_{p+1} \leq \left(\frac{C_1}{\lambda^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

$$\|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2$$

Par conséquent, on peut extraire une sous suite v_λ qui converge faiblement vers un certain $w \in H_0^1(\Omega)$ quand $\lambda \to 0$; et telle que, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, nous avons:

$$\int_\Omega \nabla v_\lambda \nabla \varphi dx \quad \to \quad \int_\Omega \nabla w \nabla \varphi dx \quad qd \quad \lambda \to \infty \tag{2.2.1}$$

On utilise l'inégalité de Hlder

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_\lambda^p \varphi dx &\leq \|v_\lambda\|_{p+1}^p \|\varphi\|_{p+1} \\ &\leq (\frac{C}{\lambda})^{\frac{p(p-1)}{p+1}} \end{aligned}$$

$$\lambda^{p-1} \int_\Omega v_\lambda^p \varphi dx \quad \to \quad 0 \quad qd \quad \lambda \to 0 \tag{2.2.2}$$

Multipliant l'équation du problème (2.2.1) par $\varphi(x)$ et en intégrant sur Ω, on obtient:

$$\int_\Omega \nabla v_\lambda \nabla \varphi dx \quad = \quad \lambda^{p-1} \int_\Omega v_\lambda^p \varphi dx + \int_\Omega f \varphi dx \tag{2.2.3}$$

En faisant tendre λ vers 0 des deux cotés de l'égalité (2.2.4) et en prenant (2.2.2) et (2.2.3) en compte, nous obtenons:

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi dx \quad = \quad \int_\Omega f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Ceci implique que w est une solution faible du problème (P) et par la théorie de la régularitée, nous savons que w est une solution classique du problème (P) et $w \geq 0$ en raison du fait que $v_\lambda > 0$ pour $\lambda > 0$.
Ceci complète la preuve de la proposition, et donc le théorème 8 est prouvé.

■

2.3 Résultat de non existence

Théorème 8 *:*
Supposons que f vérifie (H1) et (H2) et que $p > 1$. Alors, il existe un nombre positif λ^* tel que le problème (P_λ) n'a aucune solution pour $\lambda > \lambda^*$.

Preuve. :
Soit

$\lambda_* = \sup\{\lambda_0 \in \mathbb{R}_+,\ \text{tel que } (P_\lambda) \text{ admet au moins une solution positive pour } \lambda \in (0, \lambda_0)\}$

alors il est évident que (P_λ) possède au moins une solution positive pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

On raisonne par contraposée, en effet, si le problème (P_λ) admet une solution u_λ, nous avons:

$$-\int_\Omega \Delta u_\lambda \varphi_1 dx = \int_\Omega u_\lambda^p \varphi_1 dx + \lambda \int_\Omega f \varphi_1 dx.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega f\varphi_1 dx &= -\int_\Omega u_\lambda^p \varphi_1 dx + \lambda_1 \int_\Omega u_\lambda \varphi_1 dx.\\ &= \int_\Omega (\lambda_1 u_\lambda - u_\lambda^p)\varphi_1 dx. \qquad (2.3.1)\end{aligned}$$

En évaluant le minimum de la fonction

$$g(t) = t^p - \lambda_1 t \text{ dans } [0, +\infty[$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow = pt^{p-1} - \lambda_1 = 0.$$

Ce qui implique que $t = (\frac{\lambda_1}{p})^{\frac{1}{p-1}}$

$$\begin{aligned}g(t) &= (\frac{\lambda_1}{p})^{\frac{p}{p-1}} - \lambda_1(\frac{\lambda_1}{p})^{\frac{1}{p-1}}\\ &= (\frac{\lambda_1}{p})^{\frac{p}{p-1}}(1-p),\end{aligned}$$

on obtient:

$$g(t) \geq (\frac{\lambda_1}{p})^{\frac{p}{p-1}}(1-p) \text{ pour } t \geq 0 \qquad (2.3.2)$$

En combinant (2.3.1) et (2.3.2), nous aurons

$$\lambda \int_\Omega f\varphi_1 dx \quad \leq \quad (p-1)(\frac{\lambda_1}{p})^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega \varphi_1 dx \tag{2.3.3}$$

En utilisant le fait que le problème (P) admette une solution non négative u_{0f}, nous avons:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u_{0f}\varphi_1 dx &= \lambda_1 \int_\Omega u_{0f}\varphi_1 dx \\ &= \int_\Omega f\varphi_1 dx \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_\Omega f\varphi_1 dx > 0$
et en faisant usage de (2.3.3), nous avons:

$$\lambda \quad \leq \quad (p-1)(\frac{\lambda_1}{p})^{\frac{p}{p-1}} \frac{\int_\Omega \varphi_1 dx}{\int_\Omega f\varphi_1 dx}$$

Ceci implique immédiatement l'existence d'un nombre $\lambda^* > 0$ tel que le problème (P_λ) n'admette pas de solution positive pour $\lambda > \lambda^*$. $\blacksquare$

Chapitre 3

Propriétés de la solution

Dans cette section, nous étudions quelques propriétés de solution du problème (P_λ)
Les principaux resultats présentés ici sont les suivants:

Théorème 9 *Soit* $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$*, alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que, pour chaque solution positive* w_λ *du problème* (P_λ)*, nous avons:*

$$\|w_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c,$$

Théorème 10 *Supposons que* $p \geq \frac{N+2}{N-2}$*,* Ω *est étoilé et* w_λ *est une solution positive de* (P_λ) *distincte de la solution minimale* u_λ*, alors nous avons:*

$$\|w_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty \qquad lorsque \qquad \lambda \to 0$$

Théorème 11 *Si* $p > \frac{N+2}{N-2}$ *et* Ω *est étoilé, alors chaque solution positive* $w_\lambda(x)$ *du problème* (P_λ) *vérifie :*

$$\|w_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \qquad quand \qquad \lambda \to 0$$

Pour les preuves du théorème 10 et 11, nous avons besoin des deux lemmes suivants:

Lemme 4 *:*
Il existe une constante positive A telle que, pour tout $\lambda \in (0, \lambda_*)$*, le problème* (P_λ) *admet au plus une solution positive u telle que* $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A$.
Preuve. *:*
Soit $A > 0$ *assez petit tel que*

$$pA^{p-1} \quad < \quad \lambda_1(\Omega) \tag{3.0.1}$$

ou $\lambda_1(\Omega)$ *est la première valeur propre de (1) . On raisonne par absurde, on suppose que le problème* (P_λ) *possède une deuxième solution* $w = u_\lambda + v$ *telle que*

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \leq \quad A. \tag{3.0.2}$$

Puisque u_λ *est une solution minimale de* (P_λ)*, nous avons* $v(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$ *et* $v(x) \neq 0$ *et vérifie (appliquons le théorème des acroissements finis)*

$$\begin{cases} -\Delta v = pa^{p-1}(x)v & \quad dans \quad \Omega \\ v = 0 & \quad sur \quad \Omega \end{cases} \tag{3.0.3}$$

où $u_\lambda(x) \leq a(x) \leq u_\lambda(x) + v(x)$.
En multipliant l'equation (3.0.3) par $v(x)$ *et en intégrant sur* Ω*, on aura*

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \quad = \quad p \int_\Omega a^{p-1} v^2 dx \tag{3.0.4}$$

D'après la caractérisation de la premiȓe valeur propre λ_1*,nous avons*

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq \lambda_1(\Omega) \int_\Omega v^2 dx$$

Nous utilisons ceci et (3.0.4) pour obtenir

$$\lambda_1(\Omega) \int_\Omega v^2 dx \leq p \int_\Omega a^{p-1} v^2 dx \tag{3.0.5}$$

Par (3.0.2) et la définition de $a(x)$ *, nous avons* $\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A$.
Donc(3.0.5) devient:

$$\lambda_1(\Omega) \int_\Omega v^2 dx \leq pA^{p-1} \int_\Omega v^2 dx$$

et puisque $pA^{p-1} < \lambda_1(\Omega)$*ceci implique que* $v = 0$*,*

(d'où la contradiction)

■

Remarque 3 *:*
On utilise se lemme poiur démontrer le théorème 10.

Lemme 5 *:*
Soit Ω un domaine borné et régulier et supposons que $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue et $w \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifie:

$$\begin{cases} -\Delta w = g(x, w(x)) & \textit{dans} \quad \Omega \\ w = 0 & \textit{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

Si $y \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur fixe et $n(x)$ est la normale unitaire extèrieure à Ω en x, alors w satisfait

$$\int_{\partial\Omega} (x-y).n(x)\, |\nabla w|^2\, dS = 2N \int_{\Omega} G(x,w)dx + 2\int_{\Omega} (x-y)\nabla_x G dx$$
$$-(N-2)\int_{\Omega} g(x,w)w dx$$

ou $G(x,w) = \int_0^w g(x,t)dt$, $\nabla_x G(x,w)$ est le gradient de $G(x,w)$ par rapport a la variable x

Remarque 4 *: pour la preuve de ce lemme nous nous référons à [10,13]*

Preuve de théorème 11

Soit w_λ une solution positive quelconque du problème (P_λ). Posons $w_\lambda = \lambda v_\lambda$, alors v_λ satisfait:

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda = \lambda^{p-1} v_\lambda^p + f(x) & \textit{dans} \quad \Omega \\ v_\lambda = 0 & \textit{sur} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.0.6}$$

On applique le lemme 5 pour le problème (3.0.6), et nous obtenons:

$$\int_{\partial\Omega} (x-y).n(x)\, |\nabla v_\lambda|^2\, dS = (\frac{2N}{P+1} - (N-2))\lambda^{p-1}\int_{\Omega} v_\lambda^{p+1} dx + 2\int_{\Omega} (x-y)\nabla f v_\lambda dx$$
$$+(2+N)\int_{\Omega} f v_\lambda dx$$

avec $g(x, v_\lambda(x)) = \lambda^{p-1} v_\lambda^p + f(x)$.

$$G(x, v_\lambda(x)) = \int_0^{v_\lambda} g(x,t)dt = \int_0^{v_\lambda} (\lambda^{p-1} t^p + f(x))dt.$$
$$= \frac{\lambda^{p-1}}{p+1} v_\lambda^{p+1} + f(x) v_\lambda$$

Puisque Ω *est étoilé par rapport à* y*, nous avons*
$\int_{\partial\Omega} (x-y).n(x) \left|\nabla w\right| dS \geq 0$
Donc

$$(\frac{-2N}{P+1} + (N-2))\lambda^{p-1} \int_\Omega v_\lambda^{p+1} dx \leq 2 \int_\Omega (x-y)\nabla f v_\lambda dx + (2+N) \int_\Omega f v_\lambda dx \tag{3.0.7}$$

D'aprés l'hypothèse $p > \frac{N+2}{N-2}$*, la constante* $C = \frac{-2N}{P+1} + (N-2) > 0$*, donc par (3.0.7)on aura:*

$$\lambda^{p-1} \int_\Omega v_\lambda^{p+1} dx \leq \frac{1}{C} [2 \int_\Omega (x-y)\nabla f v_\lambda dx + (2+N) \int_\Omega f v_\lambda dx] \tag{3.0.8}$$

D'aprés l'équation différentielle satisfaite par v_λ*, nous avons*

$$\int_\Omega \left|\nabla v_\lambda\right|^2 dx = \lambda^{p-1} \int_\Omega v_\lambda^{p+1} dx + \int_\Omega f v_\lambda dx$$

En combinant ceci avec(3.0.8), nous aurons

$$\int_\Omega \left|\nabla v_\lambda\right|^2 dx \leq \frac{2}{C} \int_\Omega (x-y)\nabla f v_\lambda dx + (1 + \frac{(2+N)}{C}) \int_\Omega f v_\lambda dx.$$

Donc, il existe une constante C_1 independandante de λ telle que

$$\int_\Omega \left|\nabla v_\lambda\right|^2 dx \leq C_1.$$

On a
$$\left\|w_\lambda\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \lambda^2 \left\|v_\lambda\right\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

On aura $\left\|w_\lambda\right\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ quand $\lambda \to 0$.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, H. Brézis and G. Crami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some ellipic problems.* J. Funct. Anal. 122 (1994) $519-543$.

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and application.* J. Funct. Anal.14 (1973) $348-381$.

[3] H.Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et Application,* Université Pière et Marie Curie et Ecole Polytechnique, 2^{ieme} édition, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico 1987.

[4] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent,* Commun. Pure Appl. Math. 36 (1983) $437-477$.

[5] H. Brézis, L. Nirenberg, *A minimization problem with critical exponent and nonzero data, In 'Symmetry in nature'.* Annli Scuolo Norm. Sup. Pisa (1989) $129-140$.

[6] H. Brézis, L. Nirenberg: *Nonlinear Functional Analysis and application.*

[7] N. P. Càc, J. A. Gatica and Y. Li, *Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign.* Nonlin. Analysis 37 (1999), $501-510$.

[8] N. P. Càc, A. M. Fink and J. A. Gatica, *Nonegative solutions to the radial laplacian with nonlinearity that changes sign.* Proc. Am. Math. Soc 123 (1995) $1393-1398$.

[9] Q. Dai, Y. Gu, *Positive solutions for non-homogenous semilinear elliptic equations with data chng sign.* Roy. Soc. Edin $133A$ (2003) $297-306$.

[10] D. G. Figueiredo, P. l. Lions and R. D. Nussbaum, *A priori estimates and existenc of positive solutions of semilinear elliptic equations.* J. Math. Pures Appl. 61 (1982) $41 - 63$.

[11] N. Ghoussoub, C. Yuan, *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents.* Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) $5703 - 5743$.

[12] P. L. Lions, *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations.* Indu. appl. math.24 (1982) $441 - 466$.

[13] A. Matllah, *Some Applications of Mountain- Pass Theorem* (2007). Université de Tlemcen.

[14] S. I. Pohozaev, *Eigenfunctions of* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ Sov. Math. Dokl 6 (1965) $1408 - 1411$.

[15] G. Tarantello, *On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent.* Annls. Inst. H. Poincaré Analyse Non linéaire 9 (1992) $281 - 304$.