République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

présenté par :

M. RIAHI MOHAMMED EL AMINE

Soutenu le : 19 / 06/ 2019

Équations différentielles elliptiques linéaires et non linéaires

Devant le jury composé de :

Président :	M. A.Bensedik	MCB, Université de Tlemcen.
Examinateur :	M. T.Khedim	MCB, Université de Tlemcen.
Examinateur :	M. M.Houbad	MCB, Université de Tlemcen.
Encadrant :	M. B.Messirdi	MCB, Université de Tlemcen.

Année Universitaire : 2018 - 2019

Dedicaces

Tout d'abord je remercie le DIEU tout clément pour ce qu'il m'a offert. Je dédie ce travail :

À ceux, que je dois tout, ma mère (Guermoudi Setti Hafida) pour ses sacrifices consenties et qui m'a aidé et pousser à réaliser ce travail, et pour toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure.

À ma soeur Imen et mes frères (Omar, Hadj Abdelkader,Younes), pour leurs encouragements, leur aide et leur patience et mon grand père Abdelkader Guermoudi et ma grande mère Rachida Yahiya Berouiguet pour leurs conseils et encouragements.

À ma grande famille Guermoudi et mes oncles :

- Guermoudi Ali.
- Guermoudi Amine.
- Guermoudi Fethallah.
- Guermoudi Hichame.
- Guermoudi Mohammed.
- Guermoudi Otman.
- Guermoudi Rabie .
- Guermoudi Zoubir -Rahimahou Allah-.
- Ma tente Salima et son mari Mr Bouserhane Adnane.

À tous mes collègues de la promo EDP et application.
À tous mes amis surtout Si Abdelhalime, Sebaa Karim, Ghitri Abdelkayoum,Ghomari Tewfik, Belmokhtar, Younes Abdelbadie, Zerifi, Kafnemer Meryem. Et à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

"Les bienfaits que nous avons reçus de nos parents sont les plus grands de tous."
Socrate ; Le monde grec -Ve s. av.J.-C

Remerciments

Je veux remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail. Tout d'abord je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon respectueux professeur et encadrant monsieur B. Messirdi pour son orientation et ses conseils, ses encouragements et son immense capacité de tenir patience au court de la réalisation de ce travail, ainsi que ses précieuses directions.

Mes remerciements vont également à monsieur A.Bensedik M.C.B à l'U.A.B.B, qui a accepté de présider le jury.

Mes vifs remerciements vont également à monsieur M.Houbad et T.Khedim, pour leurs serviabilité exemplaire et de m'avoir fait l'honneur d'être membre du jury et d'avoir accepter de juger mon travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs qui m'ont beaucoup appris, pour leurs précieux conseils et aimables encouragements durant toute ma trajectoire d'étude surtout monsieurs A.Lansari, k.Yadi, Brixi, A. Bensedik, S.M.Bouguima, F.Abi ayad, F.Boukhari, Laabbas,A.Benchaib, M.Houbad et madames Merzagui, Chadli, Khitri.

Sincères remerciements vont à ma chère mère pour sa patience infinie.

Notations

Notations générales

1. $x = (x_1, \ldots, x_N)$: Élément de $\mathbb{R}^N$.

2. $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$: Module de x.

3. Ω : Un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

4. $\partial\Omega$: Le bord de Ω.

5. $\mathcal{C}^0(\Omega)$: L'ensemble de fonctions continues sur Ω.

6. $\mathcal{D}(\Omega)$: L'ensemble de fonctions indéfiniment dérivable sur Ω et à support compact.

7. $\mathcal{D}'(\Omega)$: Dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

8. $L^\infty(\Omega)$: L'ensemble de fonctions bornées p.p sur Ω.

9. $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ mesurable sur Ω et tel que $||f||_{L^p(\Omega)} < \infty\}$.

10. $W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega)/\exists g_i$, i=1,...,N tels que $\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\phi, \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)\ \forall i = 1, ..., N\}$.

11. $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^0(\Omega)/u : \Omega \to \mathbb{R}^N, |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, x, y \in \Omega\}$.

12. $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions k-fois continument différentiables et leures dérivées partielles sont continues H$\ddot{o}$lderienne d'exposant α.

13. $\langle\ ,\ \rangle_{(E,E')}$: Produit dans la dualité E, E' p.p.

14. E' : Dual topologique de E.

15. p.p : presque partout.

16. s.c.i : Semi continuité inférieure pour la topologie forte.

17. f.s.c.i : Semi continuité inférieure pour la topologie faible.

18. p' : le conjugué harmonique de p tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

19. $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$: Gradient de u.

20. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$: Laplacien de u.

21. $D_i u = \partial_i u = u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$: La dérivée partielle de u par rapport à x_i.

22. $D_{ij} u = \partial_{ij} u = u_{x_{ij}} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$: La dérivée seconde de u par rapport à $x_i x_j$.

23. $\hookrightarrow$: injection continue.

Table des matières

Introduction

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (parfois appelée équation différentielle partielle et abrégée en EDP) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.
Une EDP a souvent de nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable, les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

L'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'EDP appelé équations de Navier-Stokes.

Les EDP, les plus intéressantes proviennent de la modélisation de quelques phénomènes :

- Le transport : convection de la chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère . . .
- La diffusion : diffusion de la chaleur dans un solide . . .
- Les vibrations : son dans l'air, vibration des structures . . .
- L'équilibre : calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces . . .

La recherche des solutions d'une EDP est donnée par des méthodes analytiques et d'autres numériques pour arriver à approximer les solutions.

La résolution des problèmes liés au champs pratique a conduit à développer des outils mathématiques d'analyse non-linéaire comme les méthodes variationnelles , la méthode des sous et sur solutions, les arguments de compacité et les théorèmes de point fixe . . .

L'objet de ce mémoire est l'étude de deux classes de problèmes elliptiques :

- La première classe de problèmes est les EDP elliptiques linéaires.
- La deuxième classe de problèmes est les EDP elliptiques non

linéaires, il s'agit de problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce travail est composé de 4 chapitres enrichis avec des exemples pour savoir appliquer quelques techniques de résolutions des problèmes précédents.

Dans le premier chapitre on fait un rappel de quelques notions sur les équations aux dérivées partielles et d'analyse fonctionnelle ainsi que des définitions de certains espaces fonctionnels qui nous seront d'une grande utilité, comme les espaces de Banach, Hilbert, et de Sobolev, et quelque outils dans ces espaces comme (la formule d'intégration par parties de Green, l'inégalité de Poincaré, les injections de Sobolev et le théorème de Rellich-Kondrachov.), on rappelle aussi quelques notions d'optimisation convexe.

Le deuxième et le troisième chapitre sont consacrés à présenter les méthodes variationnelles et leurs applications dans la recherche des solutions faibles de certains problèmes elliptiques linéaires, et par la suite on donne des résultats de régularité elliptique.

Certains cas rendent les techniques variationnelles inutiles et inopérantes, citons parmi eux, les problèmes elliptiques non linéaires, c'est l'objet du chapitre 4, qui porte sur l'étude des techniques topologiques pour la résolution des problèmes elliptiques non linéaires, comme la méthode de sous et sur solutions et la méthode de monotonie qui sont basée sur le principe du maximum, et la méthode de compacité qui est basée sur la compacité d'un opérateur et donne l'existence d'un point fixe.[3]

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Introduction sur les EDPs

Soit u une fonction de plusieurs variables

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tq $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre les variables et les dérivées partielles de u. Cette équation est ainsi de la forme

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}) = 0.$$

L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé de la dérivée partielle.

Une EDP est dite linéaire si elle est de la forme $Lu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où L est un opérateur linéaire, c'est à dire $L(au+bv) = aLu+bLv$. Si de plus $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$, on dit que l'équation est linéaire homogène. Si non elle est non homogène.

Exemple 1 : L'équation $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - (\frac{\partial u}{\partial y})^3 = 0$ est du 1^{er} ordre non linéaire.

Exemple 2 : L'équation

$(x^2 + y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x + y + u$ est du 1^{er} ordre, linéaire non homogène.

Certaines équations classiques de la physique sont des EDP linéaires homogènes d'ordre 2. Citons parmi eux

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = 0$, où $u = u(x, y, z, t)$,
est l'équation d'onde.
2. $\frac{\partial u}{\partial t} - k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = 0$, où $u = u(x, y, z, t)$,
est l'équation de la chaleur.
3. $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = 0$, où $u = u(x, y, z, t)$,
est l'équation de Laplace ou du potentiel.

Il existe d'autres exemples importants d'EDPs. Ainsi en finance, le prix $c = c(t, s)$ d'un option d'achat (sous certaines conditions) satisfait

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} + rs\frac{\partial c}{\partial s} - rc = 0.$$

qui est une équation linéaire homogène d'ordre 2, dite l'équation de `Black-Scholes`.
On appelle problème aux limites, une EDP munie des conditions sur le bord du domaine.

Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$a(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

où $z = f(x, y)$ est la fonction inconnue et a, b, c et F sont des fonctions données dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. On cherche une solution z de l'équation ci-dessus en supposant que la valeur de z sur une courbe γ ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$sont connues. Autrement dit, (problème de Cauchy) on cherche une solution z de cette équation connaissant z et la dérivée normale $\frac{\partial z}{\partial n}$ sur la courbe γ (c-à-d, le produit scalaire du gradient de z par le vecteur normal unitaire).

Définition 1.1 *L'équation caractéristique d'une équation à coefficients constants est une équation polynomiale dépendant de la solution de l'équation différentielle, linéaire, homogène, et à coefficients constants associée.*

Définition 1.2 *Une caractéristique pour l'équation ci-dessus est une courbe dans D satisfaisant à l'équation différentielle :*

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + c = 0. \tag{1.2}$$

L'équation (1.1) est dite du type :

i) ***Hyperbolique :*** *dans D si en tout point de D,* $b^2 - ac > 0$. *Dans ce cas, on peut résoudre l'équation (1.2) localement ce qui montre que par tout point passent deux caractéristiques réelles. On montre que les transformations*

$$\xi = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}x + y,\ \eta = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}x + y.$$

où $a \neq 0$, *ramènent l'équation (1.1) à une équation du type*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type hyperbolique.

Exemple : *L'équation des cordes vibrantes*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

où z(x, t) est le déplacement du point d'abscisse x à l'instant t. C'est une équation hyperbolique (a=1,b=0,c $= -k^2$*), se généralise à trois dimensions à l'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

ii) ***Parabolique :*** *dans D si en tout point de D,* $b^2 - ac = 0$*. les deux caractéristiques sont confondues. Supposons que* $a \neq 0$ *et posons*

$$\xi = \tfrac{b}{a}x + y,\ \eta = \tfrac{-b}{a}x + y.$$

L'équation (1.1) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type parabolique.

Exemple : *L'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

où t est le temps, z est la température d'un corps et α *une constante. C'est une équation parabolique (a=*α^2*,b=c=0).*

iii) ***Elliptique*** *dans D si en tout point de D,* $b^2 - ac < 0$*. Dans ce cas, les caractéristiques sont imaginaires. Si* $a \neq 0$*, la transformation*

$$\xi = \tfrac{-b}{a}x + y,\ \eta = \tfrac{\sqrt{ac-b^2}}{a}x.$$

permet d'écrire l'équation (1.1) sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

et s'appelle forme canonique de type elliptique.

Exemple : *L'équation des fonctions harmoniques (ou équation de Laplace à deux variables)*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

C'est une équation elliptique (a=c=1,b=0). En dimension trois, l'équation de Laplace (ou équation du potentiel) s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Soit

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) = g(x) \tag{1.3}$$

L'équation du 2[e] ordre linéaire non homogène où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ les coefficients $a_{ij}(x)$, $1 \leq i; j \leq n$ sont réels, les solutions u de cette équation appartiennent à $\mathcal{C}^2(\Omega)$, la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i;j \leq n}$ est symétrique. Soient $x_0 \in \Omega$ un point arbitraire et $\lambda_1(x_0); \ldots; \lambda_n(x_0)$ les valeurs propres de la matrice $A(x_0)$ (ces valeurs propres sont évidemment réelles). On note $n_+ = n_+(x_0)$ le nombre de valeurs propres positives, $n_- = n_-(x_0)$ le nombre de valeurs propres négatives, $n_0 = n_0(x_0)$ le nombre de valeurs propres nulles et $n = n_+ + n_0 + n_-$.

L'équation aux dérivées partielles (1.3) est elliptique (au point x_0) si $n_+ = n$ ou $n_- = n$. Elle est elliptique sur un ensemble $E \subset \Omega$, si elle l'est en tout point de E. Par exemple, l'équation de Poisson :$\Delta u = f$ où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, est elliptique dans $\mathbb{R}^N$.

Hyperbolique (au point x_0) si ($n_+ = n-1$ et $n_- = 1$) ou ($n_+ = 1$ et $n_- = n-1$). Elle est hyperbolique sur un ensemble $E \subset \Omega$, si elle l'est en tout point de E. Parabolique (au point x_0) si $n_0 > 0$. Elle est parabolique sur un ensemble $E \subset \Omega$, si elle l'est en tout point de E. Par exemple, l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = g(x)$$

est parabolique dans $\mathbb{R}^N$.
Notons brièvement que dans le langage des formes quadratiques, on peut reformuler l'opérateur $L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ (opérateur), et associons à L la forme quadratique à n variables $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$:

$$\varphi(x_0, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x_0) \xi_i \xi_j \ , \ x_0 \in \Omega.$$

L'équation en question est dite :
- elliptique (au point x_0) si la forme φ est définie positive ou négative (au point x_0).
- parabolique (au point x_0) si la forme φ est semi-définie positive ou négative (au point x_0).
- hyperbolique (au point x_0) si la forme φ est indéfinie non dégénérée (au point x_0).

Une équation n'est pas nécessairement du même type d'un point à l'autre. Par exemple, l'équation de Tchaplyguin (n = 2),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + T(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = g(x)$$

- est elliptique si T(x_1) positive pour $x_1 > 0$.
- est hyperbolique si T(x_1) négative pour $x_1 < 0$.
- est parabolique si T(x_1) nulle pour $x_1 = 0$.

Remarque 1.1 *Pour réduire l'équation aux dérivées partielles (1.1) à sa forme canonique, on peut raisonner (de manière équivalente) comme suit :*

(i) Si $b^2 - ac > 0$, alors l'équation (1.1) est hyperbolique. L'équation (1.2) possède deux intégrales

$$\varphi(x,y) = C_1,\ \psi(x,y) = C_2.$$

Ce sont deux familles de caractéristiques réelles. En posant

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y).$$

on ramène l'équation (1.2) à sa forme canonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

(ii) Si $b^2 - ac = 0$, alors l'équation (1.1) est parabolique. L'équation (1.2) possède une intégrale

$$\varphi(x,y) = C$$

Les deux familles de caractéristiques se confondent. On pose

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y),$$

où ψ est une fonction arbitraire telle que : $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x} \neq 0$. On ramène ainsi l'équation (1.2) à sa forme canonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

(iii) Si $b^2 - ac < 0$, alors l'équation (1.1) est elliptique. L'équation (1.2) possède deux intégrales

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1,\ \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2$$

En posant

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y),$$

on réduit l'équation (1.1) à sa forme canonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

Exemple : On considère l'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue z(x ; y), de classe $\mathcal{C}^2$

$$x^4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

a) L'équation des caractéristiques est

$$x^4 (\frac{\partial y}{\partial x})^2 - 1 = 0,$$

c-à-d,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{1}{x^2},$$

d'où

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + C_1 & . \\ ou & ,(C_1, C_2 \text{ :sont des constantes}). \\ -\frac{1}{x} + C_2. \end{cases}$$

b) On trouve

$$z(x,y) = \tfrac{x}{2}\left(g\big(\tfrac{1}{x} + y\big) + h\big(-\tfrac{1}{x} + y\big)\right)$$

c) On obtient

i) Si $\lambda > 0$,

$$z(x,y) = x\left(Ae^{-\sqrt{\lambda} y} + Be^{\sqrt{\lambda} y}\right)\left(Ce^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{x}} + De^{\frac{\sqrt{\lambda}}{x}}\right),$$

ii) Si $\lambda = 0$, $z(x,y) = (A + By)(Cx + D)$,

iii) Si $\lambda < 0$, $z(x,y) =$

$$x\left(Acos\sqrt{-\lambda}y + Bsin\sqrt{-\lambda}y\right)\left(Ccos\frac{\sqrt{-\lambda}}{x} + Dsin\frac{\sqrt{-\lambda}}{x}\right)$$

où A, B, C, D sont des constantes.

Parmi les équations de type elliptique on peut citer

1.1.1 Équation de Laplace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et considérons l'équation

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,\, x \in \Omega.$$

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant sur Ω l'équation de Laplace est dite harmonique. Si $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mais u n'est pas nécessairement régulière ou continue sur $\partial\Omega$.

Proposition 1.1 *Toutes les fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^n/\{\xi\}$ et dépendant de la seule différence $|x-\xi|$ ont la forme*

$$\begin{cases} \dfrac{a}{|x-\xi|^{n-2}} + b & si\ n > 2, \\ a \ln|x-\xi| + b & si\ n = 2 \end{cases}$$

où a et b sont des constantes arbitraires.
Une fonction $u(x-\xi)$ harmonique dans $\mathbb{R}^n/\{\xi\}$ définie par la formule :

$$\varphi(x-\xi) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\varepsilon_n|x-\xi|^{n-2}} & si\ n > 2, \\ -\frac{1}{2\pi}\ln|x-\xi| & si\ n = 2 \end{cases}$$

(où $\varepsilon_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, ici Γ désigne la fonction gamma d'Euler), s'appelle solution fondamentale de l'équation de Laplace.

Fonction de Green : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, et $x \in \Omega$ on désigne par φ^x la fonction correctrice c-à-d, la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi^x = \varphi(y-x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

est donnée par G la fonction de Green de Ω où $G(x,y) = \varphi(y-x) - \varphi^x(y)$ pour $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, $x \neq y$. On a $G(x,y) = G(y,x)$. [10]

Proposition 1.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ sont des fonctions données. Alors

$$u(x) = \int_\Omega f(y)G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\frac{\partial G(x,\sigma)}{\partial\eta}d\sigma.$$

1.2 Espaces fonctionnelles

Dans cette section, on rappelle les principaux résultats utilisés dans ce mémoire.

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$

Définition 1.3 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose $L^p(\Omega) = \left\{ f \ : \ \Omega \ \to \mathbb{R} \ \ ; f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et tel que } ||f||_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}$. On note*

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

Définition 1.4 *On note par $C_0^\infty(\Omega)$,l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ définies sur Ω et à support compact dans Ω.*

$$C_0^\infty(\Omega) = \left\{ \, f \in C^\infty(\Omega), \exists K \subset \Omega \ compacte : f = 0 \ sur \, \mathcal{C}^K \, \right\}$$

Définition 1.5 *Un espace de Banach* $(E, ||.||)$ *est espace vectoriel normé, tel que toute suite de cauchy de* E *est convergente pour la norme* $||.||$.

1.2.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.6 *Un espace préhilbertien (E,* $\langle \ . \ , \ . \ \rangle$*) est alors un espace vectoriel* E *muni d'un produit scalaire* $\langle \ . \ , \ . \ \rangle$.

Définition 1.7 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme* $||.||$ *découle d'un produit scalaire ou hermitien*
$\langle \ . \ , \ . \ \rangle$ *par la formule*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Exemples :

1. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
2. L'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien usuel.
3. L'espace $L^2([a,b],\mathbb{C})$ des fonctions de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de carré intégrable avec la convention que deux fonctions égales p.p, muni de
$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx, \text{ sont égales.}$$
4. L'espace des suites ℓ^2, constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty,$$
le produit hermitien de deux suites u et v étant par définition la somme de la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\overline{v}_n.$$
5. $H^1([a,b]) := \Big\{ u \in L^2([a,b])/\exists g \in L^2([a,b]), \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([a,b]), \int_a^b u\varphi' d$
muni du produit scalaire
$$(u,v)_{H^1} := (u,v)_{L^2} + \Big(u',v'\Big)_{L^2} = \int_a^b uvdx + \int_a^b u'v'dx$$
est un espace de Hilbert.

1.2.2 Espace de Sobolev

Définition 1.8 *En analyse fonctionnelle, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles.*

Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.9 *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega) :=$$
$$\left\{ \quad u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \forall i{=}1,\ldots,N \end{array} \right. \right\}$$

On pose $\boxed{\; H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)}$.

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *, on note*
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ *et* $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$*=grad u.*

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\boxed{\; ||u||_{W^{1,p}(\Omega)} := ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{L^p(\Omega)}}$$

est un espace de Banach séparable et réflexif pour $1 < p < \infty$.

ou parfois de la norme équivalente.

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(||u||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour $1 \leq p < \infty$.
On définit $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

Comme $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ on a $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.[5].

Théorème 1.1 *Soit $u \in W^{1.p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1.p}(\Omega)$ si et seulement si u=0 sur $\partial\Omega$.*

1.2.3 Quelques outils dans l'espace de Sobolev

INÉGALITÉ DE POINCARÉ

Théorème 1.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.Il existe une constante C telle que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)},$$

avec $$||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx.$$

Définition 1.10 *un espace régulier est un espace topologique vérifiant les deux conditions suivantes :*

1. *L'espace est séparé.*
2. *On peut séparer un point x et un fermé ne contenant pas x par deux ouverts disjoints.*

THÉORÈME DE SOBOLEV-RELLICH-KONDRACHOV

Théorème 1.3 *Soit Ω un ouvert borné régulier ,$1 \leq p < \infty, N \geq 1$:*

1. $p < N$:$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\quad ,\forall\ q \in \left[1, \frac{Np}{N-p}\right[$.
2. $p = N$:$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\quad ,\forall\ q \in \left[1, \infty\right[$.
3. $p > N$:$W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega)$ $\quad ,0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p}$.

Les injections 1,2 et 3 sont compactes. *c-à-d toute partie bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^q(\Omega)$ pour les injections 1 et 2 et dans $\mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega)$ pour l'injection 3.*

Théorème de trace

Théorème 1.4 *:*
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, alors il existe une application

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$$

linéaire continue *et symétrique telle que :*

1. $T(W^{1,p}(\Omega)) = L^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$.
2. $Tu = u_{|\partial\Omega}$ *pour* $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$.
3. $\exists c > 0$, $\forall u \in L^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$, $\exists g \in W^{1,p}(\Omega)$ *un relèvement de u tel que*

$$Tg = u, \text{ et } ||u||_{L^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \leq C||g||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Théorème de densité

Théorème 1.5
Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ alors :

$$\overline{D(\Omega)}^{||.||_{H_0^1}} = H_0^1(\Omega)$$

Formule de Green dans H^1

Théorème 1.6 *Soit Ω un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux, alors si $u, v \in H^1(\Omega)$ on a la formule d'intégration par parties appelée aussi première formule de Green*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\mu_i d\sigma,\ \forall i = 1, ..., N \text{ où } \mu_i \text{ la ième composante du vecteur normal } \mu$$

Conséquences : 1.1 *On suppose que Ω est un ouvert borné on a :*

1. *$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, est une injection compacte si Ω est régulier (Rellich-Kondrachov).*
2. *si $p < \frac{N+2}{N-2}$, alors $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ est une injection compacte (Rellich-Kondrachov).*
3. *$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$, par injection continue et dense.*
4. $\displaystyle\int_\Omega v\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} v\mu_i d\sigma$, *(deuxième formule de Green).*

THÉORÈME DE DENSITÉ DANS $W^{1,p}$(SERRIN-MEYÈRES)

Théorème 1.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}$, alors il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, telle que*

1. $||U_n - U||_{W^{1,p}(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
2. $\overline{C_0^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)}^{||.||_{W^{1,p}}} = W^{1,p}(\Omega).$

Théorème 1.8 *Soit $F \subset \mathbb{R}^N$, un fermé et $f : F \to \mathbb{R}$ continue alors il existe $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, continue telle que $\tilde{f}_{|F} = f$, et on a*

1. $\sup_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_i(x) = \sup_F f_i(x) = \max_F f_i(x).$
2. $\inf_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_i(x) = \inf_F f_i(x) = \min_F f_i(x).$

[2] Soit E un espace de Banach.

Convergence faible

Définition 1.11 *Soit E un espace de Banach ,considérons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ,on dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une limite U si et seulement si*

$$U_n \rightharpoonup U \iff \langle U_n, \ell\rangle_{(E,E')} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle U, \ell\rangle_{(E,E')} \ \forall \ell \in E'.$$

1.2.4 Espaces de Hölder

Définition 1.12 *Supposons Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $0 < \alpha \leq 1$.*

- *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est dite continue Höldérienne d'exposant α si*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha,\ x, y \in \Omega.$$

- *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est bornée et continue,on écrit*

$$||u||_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

- *On note une semi norme d'ordre α de la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ par*

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y \in \Omega_{x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}.$$

- *de plus La norme d'ordre α est donnée par*

$$||u||_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = ||u||_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

- ***Définition 1.13*** *L'espace de Hölder $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est constituée des fonctions $\mathcal{C}^k(\Omega)$ pour lesquelles la norme*

$$||u||_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \text{ est fini.}$$

Donc l'espace $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est constitué de fonctions k-fois continument différentiables et leures dérivées partielles sont continues Hölderiennes d'exposant α.

[7]

1.2.5 Points critiques et optimisation convexe

Définition 1.14 *On dit que la fonction J est* ***Gâteaux différentiable*** *en u, dans la direction φ dans E un espace de Banach s'il existe $\boldsymbol{l} \in E'$*

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta} \Big(J(u + \theta\varphi) - J(u) \Big) = \langle \boldsymbol{l}, \varphi \rangle,\ \forall\ \theta > 0.$$

Avec $DJ(u) = \boldsymbol{l}$.

Définition 1.15 *Soient E un espace de Banach, $\omega \subseteq E$ un ouvert et, $J : \omega \to \mathbb{R}$ si $u \in \omega$, on dit que J est différentiable en u au sens de* **Frèchet**, *s'il existe $\boldsymbol{l} \in E'$ tel que*

$$\forall v \in \omega, J(v) - J(u) - \langle \boldsymbol{l}, v-u \rangle = \theta(v-u).$$

Si J est différentiable, $\boldsymbol{l}$ est unique et on la note par : $DJ(u) = \boldsymbol{l}$.

Proposition 1.3 *lien entre gateau diff et frèchet diff.*

Définition 1.16 *On dit que f est semi-continue inférieurement en x_0 si :*
- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $\forall\ x \in U, f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$.
Si on est dans un espace métrique, la propriété suivante suffit :

- $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$, où $\liminf$ désigne la limite inférieure d'une fonction en un point.

Proposition 1.4 *La fonction f est dite semi-continue inférieurement sur X si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
1) f est semi-continue inférieurement en tout point de X.
2) Pour tout réel α, l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ est fermé.
3) L'épigraphe $\{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$ est fermé.

Définition 1.17 *J est dite semi continue inférieurement (resp. faiblement) sur E si et seulement si*

$$u_n \underset{fort}{\longrightarrow} u \implies J(u) \leq \liminf_{n \to \infty} J(u_n).$$
$$(resp. u_n \rightharpoonup u \implies J(u) \leq \liminf_{n \to \infty} J(u_n)).$$

Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, K un convexe non vide de V.

Définition 1.18 *On dit que la fonction J est convexe de k dans $\mathbb{R}$ si*

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v),\ \forall\ u, v \in k,\ 0 \leq \theta \leq 1.$$

On dira que J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte avec $0 < \theta < 1$.

Définition 1.19 *On dit qu'une fonction$J : V \to \mathbb{R}$, est* ***semi continue inférieurement****, en u si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathcal{V}(u)),\ tel\ que\ J(v) \geq J(u) - \varepsilon,$$
$$\forall v \in \mathcal{V}(u) \iff J(u) \leq \lim_{v \to u} inf\, J(v) = \sup_{\mathcal{V}(u)} \inf_{v \in \mathcal{V}(u)} J(v).$$

Proposition 1.5 *K un convexe non vide de V, $J : V \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle sur V, convexe et Gâteaux dérivable sur K, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *J est convexe.*
2. *$\forall\ u, v \in k\ J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v - u \rangle$.*
3. *J' est monotone c-à-d :$\forall u, v \in k\ \langle J'(v) - J'(u), v - u \rangle \geq 0$.*

Soit E un espace de Banach

Définition 1.20 *On dit qu'une fonctionnelle $J : E \to \mathbb{R}$ est coercive si*

$$\lim_{||u|| \to \infty} J(u) = +\infty.$$

Exemple 1.1 1. *$J(u) = ||u||$.*

2. *$J(u) = u^2$, avec $E = \mathbb{R}$.*

Définition 1.21 *Soient E un espace de Banach, $\omega \subseteq E$ un ouvert et,*

$$J : E \to \mathbb{R},\ J \in C^1(\omega, \mathbb{R}),\ u \in \omega,\ est\ point\ critique\ de\ J\ si :$$
$$J'(u) = 0$$

Théorème 1.9 *Soient, K un sous ensemble convexe non vide de E, J fonctionnelle sur E, convexe et Gâteaux dérivable sur K et $u \in E$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) u est tel que : $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$.

ii) $u \in K$, et $\forall v \in K$, $\nabla J(u).(v-u) \geq 0$.

Théorème 1.10 *Sous les hypothèses du théorème 1.9, et si de plus pour tout $u, v \in k$, $\lambda \mapsto J'(u + \lambda(v-u))$, et continue sur $[0,1]$, alors propriétés i) et ii) du théorème 1.9 sont équivalentes à*

J' est monotone c-à-d : $\forall u, v \in k$ $\langle J'(v) - J'(u), v-u \rangle \geq 0$.

Théorème 1.11 *Soient E un espace de Banach réflexif $J : E \to \bar{\mathbb{R}}$, convexe, est s.c.i $(faiblement)$, et K un sous ensemble fermé de E (non vide) et J est propre (c-à-d $\exists$ v tel que $J(v) < \infty$), alors il existe au moins un u tel que $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$ dans le cas où J est coercive ou bien K est borné.*
Si de plus, J est strictement convexe alors u est unique.

Théorème 1.12 *Soit E un espace de Banach réflexif et $J : E \to \bar{\mathbb{R}}$, coercive, faiblement s.c.i et, J est non identiquement égale à ∞. Alors J admet un minimum dans E.*

Contraintes

Définition 1.22 *E un espace de Banach, $F \in C^1(E, \mathbb{R})$, F définie un ensemble de contraintes par :*

$$S := \left\{ \ v \in E, F(v) = 0 \ \right\} \ \textit{et} \ F'(v) \neq 0, \forall \ v \in S.$$

J une fonctionnelle telle que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, ou C^1 dans S. C est une valeur critique de J sur S si $\exists u \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$J(u) = C \text{ et } J'(u) = \lambda F'(u).$$

u est alors dit point critique de J sur S et λ est dit multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique C.

Remarque :

$J'(u) = \lambda F'(u)$ est l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite au point u sur la contrainte S.

Propriété 1.1 *Si* $\exists u_0 \in S$ *est tel que* $J(u_0) = \inf\limits_{v \in S} J(v)$, *alors* $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$.

Proposition 1.6 *Soient* E *un espace de Banach réflexif et* $F : E \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1,
$S := \left\{ v \in E, F(v) = 0 \right\}$, *tel que* $\forall v \in S$ $F'(v) \neq 0$, F *est faiblement sequentiellement continue,* J *est faiblement s.c.i de* S *dans* $\mathbb{R}$ *et si* J *est infinie à l'infini alors,* J *atteint son minimum sur* S.

Chapitre 2

Méthodes variationnelles

2.1 Introduction sur l'approche variationnelle

L'approximation par éléments finis de certaines équations aux dérivées partielles pose naturellement plusieurs questions. La première est celle de l'existence de solution à l'équation que l'on souhaite résoudre. En effet, si l'équation n'a pas de solution, que calcule-t-on numériquement ? Néanmoins, même si le problème que l'on étudie possède une solution, ce n'est pas suffisant. Il faut également que cette solution varie continûment (dans un sens à préciser) en fonction des données. En effet, en pratique, les données du problème ne sont connues qu'approximativement et on ne souhaite pas que la solution que l'on calcule numériquement soit trop éloignée de la solution exacte. Enfin, on souhaiterait pouvoir quantifier l'erreur commise par la méthode en fonction des éléments à notre disposition (typiquement le maillage, le second membre de l'équation, la donnée au bord, etc). Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces EDP elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données. L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle.

L'approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

[1]

Interprétation physique On cherche, parmi un ensemble d'états possibles, celui qui correspond à la plus petite énergie. Par exemple si l'on considère l'équilibre d'une membrane élastique, on recherche la position en laquelle la membrane subira le moins d'efforts, de tensions internes.

2.2 Solutions faibles pour le problème de Dirichlet

On s'intéresse à l'EDP (équation de Laplace) suivante

$$(E)\begin{cases}-\Delta u = f & \text{dans } \Omega,\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

Définition 2.1 *Une fonction u est dite solution faible de (E) si $u \in H_0^1(\Omega)$ et si $-\Delta u = f$ au sens de distribution. C-à-d si $u \in H_0^1(\Omega)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$-\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega f v dx.$$

Remarque 2.1 *Une solution classique (on parle aussi de solution forte) de (E) est une solution $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, ce qui implique que le second membre f doit appartenir à $\mathcal{C}(\Omega)$.*

Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes pour démontrer l'existence d'une solution. C'est pourquoi nous remplacerons la formulation classique de (E) *par une formulation, dite variationnelle.*

2.2.1 Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de (E) est continu sur $\overline{\Omega}$. Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Soit* u *une fonction de* $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *Soit* X *l'espace défini par*

$$X = \{\phi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Alors u *est une solution du problème aux limites* (E) *si et seulement si* u *appartient à* X *et vérifie l'égalité*

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \tag{2.1}$$

L'égalité (2.1) *est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites* (E).

Remarque 2.2 *Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle* (2.1) *est qu'elle a un sens si la solution* u *est seulement une fonction de* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*, contrairement à la formulation "classique"* (E) *qui requiert que* u *appartienne à* $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$*. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre* (2.1) *que* (E) *puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.*

Dans la formulation variationnelle (2.5)*, la fonction v est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites* (E)*. En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.*
Lorsqu'on prend $v = u$ dans (2.1)*, on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de* (2.1)*) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de* (2.1)*).*

Formulation variationnelle du problème (E)
Soit u une solution faible de (E) et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,alors on a

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, \varphi\rangle &= \langle f, \varphi\rangle_{(H^{-1},H_0^1)}, \\ \left\langle -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi\right\rangle &= \langle f, \varphi\rangle_{(H^{-1},H_0^1)}, \\ \sum_{i=1}^{N}\left\langle -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi\right\rangle &= \langle f, \varphi\rangle_{(H^{-1},H_0^1)}, \\ \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx &= \langle f, \varphi\rangle_{(H^{-1},H_0^1)} \text{ (Intégration par partie)}, \\ \int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx &= \langle f, \varphi\rangle_{(H^{-1},H_0^1)}. \end{aligned}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ et $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergent vers v $(\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega))$. En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$(E_1)\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \langle f, v\rangle_{(H^{-1},H_0^1)}. \end{cases}$$

On passe ainsi de l'EDP (E) à ce problême. Le point intéressant est qu'on a l'équivalence entre les deux problêmes.

Lemme 2.1 *Soit Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$ Une fonction u est solution faible de (E) si, et seulement si, elle vérifie (E_1).*

Remarque 2.3 *Une formulation variationnelle est la donnée*

- D'une forme bilinéaire continue $a(.,.)$ sur $V \times V$.

- D'une forme linéaire continue $\ell(.)$ sur V.

et consiste à rechercher une solution faible du problème

$$(E_2) \begin{cases} u \in V, \\ \forall v \in V a(u,v) = \ell(v). \end{cases}$$

Exemple
La formulation (E_1) est appelée formulation variationnelle du problème de Dirichlet pour le Laplacien (E). Elle rentre bien dans le cadre de la définition (2.1), où l'on a : $V = H_0^1$, $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}$. On vérifie

que a est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u,v)| \leq ||\nabla u||_{L^2} ||\nabla v||_{L^2} \leq ||u||_{H^1} ||v||_{H^1}.$$

Le fait que $f \in H^{-1}(\Omega)$ alors la forme linéaire ℓ est continue.

2.3 Théorème de Lax-Milgram

Note historique sur le théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram c'est une extension du théorème de représentation de Riesz, dans lequel on remplace le produit scalaire par la forme bilinéaire $a(.,.)$. Il suffit de remarquer que dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, le théorème de Lax-Milgram 1954 se réduit au théorème de représentation de Riesz

1907.

Le point fort de cette approche repose sur la possibilité d'utiliser le théorème suivant.

Théorème 2.1 *(Lax-Milgram)* *On se donne une formulation variationnelle selon la définition (2.1). On suppose que la forme bilinéaire a est coercive, c'est à dire*

$$\exists \alpha > 0 : \forall u \in V,\ a(u,u) \geq \alpha ||u||_V^2.$$

Alors le problème (E_2) admet une unique solution u.

De plus, si a est symétrique i.e $\forall\ u, v \in V\ \ a(u,v) = a(v,u)$, *alors u est l'unique minimiseur de* $J(u) = \min\limits_{v \in V} J(v)$.*[11]*

Pour démontrer ce théorème on utilise le théorème suivant.

Théorème 2.2 *(de Riesz)* *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté* $\langle .,. \rangle$, $f \in H'$ *une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait* $f(x) = \langle x, y \rangle$.

$$\exists !\ y \in H \quad \forall x \in H\,, \quad f(x) = \langle y, x \rangle.$$

[11]

Preuve Pour tout $w \in V$, l'application $v \mapsto a(w,v)$ et une forme linéaire continue sur V, par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V, noté $A(w)$, tel que

$$a(w,v) = \langle A(w); v \rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(w,v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \mapsto A(w)$ De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité de $a(w,v)$ montre que

$$||A(w)||^2 = a(w, A(w)) \leq M||w||.||A(w)||, \text{ avec } M = cst > 0\ .$$

c'est-à-dire que $||A(w)|| \leq M||w||$ et donc $w \mapsto A(w)$ est continue. Une autre application du Théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V, noté f, tel que

$$||f||_V = ||\ell||_{V'} \text{ avec } \ell(v) = \langle f, v\rangle \ \forall\ v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (E_1) est équivalent à trouver $u \in V$ telle que $A(u) = f$.

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à ℓ).
La coercivité de $a(w, v)$ montre que

$$v||w||^2 = a(w, w) = \langle A(w), w\rangle \leq ||w||.||A(w)||,$$

ce qui donne

$$v||w|| \leq ||A(w)|| \text{ pour tout } w \in V.$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $Im(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $Im(A)$ est fermé dans V et que $Im(A)^{\perp} = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^{\perp} = (Im(A)^{\perp})^{\perp} = \overline{Im(A)} = Im(A)$ ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans $Im(A)$ qui converge vers b dans V. On a

$$v||w_n - w_p|| \leq ||A(w_n) - A(w_p)||.$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V, c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in Im(A)$ et $Im(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in Im(A)^{\perp}$, la coercivité de $a(w, v)$ implique que

$$v||v||^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $Im(A)^{\perp} = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse. L'inégalité avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continue, donc la solution u dépend continûment de f.

Si u est solution de la formulation variationnelle (2.1), on développe (grâce à la symétrie de a)

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v;v) + a(u,v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u).$$

Comme $u + v$ est quelconque dans V, u minimise bien l'énergie J dans V. Réciproquement, soit $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Pour $v \in V$ on définit une fonction $j(t) = J(u + tv)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(0) = 0$ qui est exactement la formulation variationnelle (2.1).[1]

Remarque 2.4 *Dans le théorème de Lax-Milgram, on obtient en plus une estimation a priori sur la solution. En effet, dans*

$$\forall v \in V,\ a(u,v) = \ell(v).$$

il suffit de prendre $u = v$ et on obtient $a(u,u) = \ell(u)$ Ainsi, en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a,

$$\alpha ||u||_V^2 \leq a(u,u) = \ell(u) \leq ||\ell||_{V'} ||u||_V \implies ||u||_V \leq \frac{||\ell||_{V'}}{\alpha}.$$

Théorème 2.3 *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ Alors (E) admet une unique solution faible u. De plus, il existe une constante c, ne dépendant que de Ω, telle que*

$$||u||_{H^1} \leq c||f||_{H^{-1}}.$$

[11]

Preuve D'après le lemme (2.1) (et les propriétés de la continuité de a et de f), il suffit de vérifier la coercivité de la forme bilinéaire a. La coercivité de a se vérifie grâce à l'inégalité de Poincaré

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u.\nabla u dx = ||\nabla u||^2_{L^2} \geq C_\Omega ||u||^2_{H^1}.$$

2.4 Remarque

Cas où la méthode variationnelle ne fonctionne pas

1.
$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
avec $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, $\mathcal{C}(\partial\Omega) \not\subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ donc g n'admet pas un relèvement dans $H^1(\Omega)$ c-à-d $\nexists\ \tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma(\tilde{g}) = g$. Donc ici l'approche variationnelle ne marche pas.

2.
$$(P^*) \begin{cases} -\Delta u = f(x,u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = g. \end{cases}$$
comme f dépend du gradient on ne peut pas appliquer directement des méthodes variationnelles pour trouver des solutions.

Quelques inconvénients de la méthode variationnelle et comment y remédier ! La méthode variationnelle permet d'établir très facilement l'existence d'une solution faible. Elle n'est pas toujours applicable, mais elle peut être complétée.

Exemple 2.1 *a)* ***Méthode de dualité****(ou de transposition).* *Soit $f \in L^1(\Omega)$ ou même f mesure (de Radon) sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier, et cherchons à résoudre le problème*

$$(1) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dès que $N > 1$ la forme linéaire $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$ n'est pas définie pour
$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et par conséquent la méthode variationnelle est inopérante. Par contre, on peut utiliser la technique suivante :

On désigne par $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'opérateur $f \mapsto u$ (où u est la solution de (1) qui existe pour $f \in L^2(\Omega)$). On sait que T est auto-adjoint. D'autre part $T : L^p(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega)$ pour $2 \leq p < \infty$ et grâce aux théorèmes de Sobolev et Morrey, $T : L^p(\Omega) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ si $p > \frac{N}{2}$. Par dualité on en déduit que

$$T^* : M(\Omega) = \mathcal{C}(\overline{\Omega})' \mapsto L^{p'}(\Omega) \text{ si } p > \tfrac{N}{2}.$$

Or comme T est autoadjoint dans L^2, T^* est un prolongement de T, donc on peut considérer $u = T^*f$ comme une solution généralisée de (1) .En fait, si $f \in L^1(\Omega)$, alors $u = T^*f \in L^q(\Omega)$ pour tout $q < \frac{N}{N-2}$, u est l'unique solution (très) faible de (1) au sens suivant

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \ \forall\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}),\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

b) ***Méthode de densité*** *(voir l'exemple 1. le problème (P)). Il est donc exclu de chercher une solution de (P) dans $H^1(\Omega)$* ***la méthode variationnelle est inopérante****. Néanmoins on a le*

Théorème 2.4 *Il existe $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ unique solution de (P).*

Preuve *On donne que les grandes lignes de la preuve*

i) Considérons une suite $(u_n)_n$ dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, u_n solution *classique du problème*

$$(P_n)\begin{cases} -\Delta u_n + u_n = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ u_n = g_n & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et montrons que $(u_n)_n$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *.*

ii) Utiliser le théorème de Tietze-Urysohn. (il faut montrer qu'il existe $\tilde{g}_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tel que* $\tilde{g}_{n_{|\partial\Omega}} = g_n$*)*

iii) L'unicité découle de principe du maximum (voir chapitre 4).

([5],[6])

Chapitre 3

Les EDPs elliptiques linéaires

3.1 Formulation faible

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, c-à-d

$$\begin{gathered}\exists\alpha > 0; \forall\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^{N} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \text{ p.p dans } \Omega\ . \\ \text{où } |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2}.\end{gathered} \tag{3.1}$$

On cherche une solution au problème

$$(E) \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.

Exemple 3.1 *Si on prend $a_{i,j} = \delta_i^j$ c-à-d*

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

alors le problème (E) devient

$$(E')\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = g & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 3.1 ***(Solution classique)*** *On suppose que $a_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$, et que $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. On appelle alors une solution classique de (E) une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (E).*
On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, ($\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ désigne l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions appartenant à $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$).
Il n'existe pas forcément de solution classique à (E). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après. Pour comprendre leur nature, considérons d'abord le cas $g = 0$, avec $a_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ et $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, et supposons qu'il existe une solution classique $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. Par définition celle-ci vérifie

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) = f(x) \ \forall x \in \Omega.$$

Notion de solutions faibles

On dit que u est une solution faible de (E) si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ on a la formulation suivante

$$-\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u)(x)\Big)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

D'après la deuxième formule d'intégration par parties de Green on a

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j}(x)\partial_j u(x)) \Big) \partial_i \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

Comme $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, on a $\partial_i u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, et $D_j u = \partial_j u$ p.p. De plus $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$ .Enfin, comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a finalement $u \in H_0^1(\Omega)$.
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, c-à-d $\varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v$ et $\partial_i \varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} D_i v$ pour $i = 1, \ldots, N$. En écrivant (3.1) avec $\varphi = \varphi_n$, on obtient.

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j}(x)\partial_j u)(x) \partial_i \varphi_n(x) \Big) dx = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j}(x)D_j u)(x) D_i v(x) \Big) dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

C'est la formulation faible du problème (E).
Donc on peut dire que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible si elle vérifie la formulation variationnelle pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 3.1 ***(Cas symétrique)*** *Dans le cas où* $a_{i,j} = a_{j,i}$ *p.p pour* $i \neq j$*,* u *est solution de (3.2) si et seulement si* u *est solution du problème suivant, qu'on appelle formulation variationnelle*

$$u \in H_0^1(\Omega),\ J(u) \leq J(v),\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Où la fonctionnelle J *est définie par*

$$J(v) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{i,j}D_j v)D_i v\right)dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

La démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (3.2) et (3.3) utilise le Lemme de Lax-Milgram qu'on a vu dans le chapitre 2.

Lemme 3.1 ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*,* $N \geq 1$ *(ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe* C_Ω *ne dépendant que de* Ω *tel que*

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}\ , \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

N.B. On désigne toujours par $|.|$ *la norme euclidienne dans* $\mathbb{R}^N$*. On a donc*

$$||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i u(x)^2 dx. \tag{3.6}$$

Proof Par hypothèse sur Ω, il existe $a > 0$ tel que $\Omega \subset]-a, a[\times \mathbb{R}^{N-1}$. Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ on prolonge u par 0, on a donc

$$u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ u = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t = (x_1, y)^t \in \Omega$ avec $x_1 \in]-a, a[$ et $y = (x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a

$$u(x_1, y) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t, y) dt.$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|u(x_1, y)|^2 \leq \left(\int_{-a}^{a} |\partial_1 u(t, y)| dt \right)^2 \leq 2a(\partial_1 u(t, y))^2 dt.$$

En intégrant entre -a et a, on obtient

$$\int_{-a}^{a} |u(x_1, y)|^2 dx_1 \leq 4a^2 \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t, y))^2 dt.$$

et donc, en intégrant par rapport à y, on trouve

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq 4a^2 \int_\Omega (\partial_1 u(x))^2 dx\ , \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{3.7}$$

On procède ensuite par densité ; pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u$. On a donc $u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ et $\partial_i u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} D_i u$. On écrit alors (3.6) pour u_n et en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$||u||_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 ||D_1 u||_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \sum_{i=1}^{N} ||D_i u||_{L^2(\Omega)}^2 = 4a^2 ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}^2.$$

Théorème 3.1 ***(Existence et unicité de la solution faible*** (3.2)***)*** *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*,* $f \in L^2(\Omega)$ *soient* $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ *et* $\alpha > 0$ *tels que* (3.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (3.2)*.[11]*

Preuve Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram on écrit le problème (3.2) sous la forme

$$u \in H,\ a(u, v) = T(v) \text{ pour tout } v \in H.$$

avec $H = H_0^1(\Omega)$ (qui est bien un espace de Hilbert, muni de la norme définie par $||u||_{H^1(\Omega)} = (||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$, telle que

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_j v(x) \Big) dx \text{ et}$$
$$T(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire T est bien continue. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|T(v)| \leq ||v||_{L^2(\Omega)} ||f||_{L^2(\Omega)} \leq ||v||_{H^1(\Omega)} ||f||_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque a, est bilinéaire, et elle vérifie

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i,j=1}^N ||a_{i,j}||_{L^\infty(\Omega)} ||D_i u||_{L^2(\Omega)} ||D_j v||_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$C ||u||_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)},$$

avec $C = \sum_{i,j=1}^N ||a_{i,j}||_{L^\infty(\Omega)}$. Elle est donc continue.

Voyons si a est coercive, il faut montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|a(u, u)| \geq \beta ||u||^2_{H^1(\Omega)}, \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega)\ .$$

Par hypothèse sur a, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i u(x) \Big) dx \geq$$
$$\alpha \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 \Big) dx$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré (3.5)

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} = ||u||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||D_i u||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$(C_\Omega^2 + 1) \sum_{i=1}^N ||D_i u||^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où on obtient que

$$\sum_{i=1}^N ||D_i u||^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_\Omega^2 + 1} ||u||^2_{H^1(\Omega)},$$

et donc

$$a(u,u) \geq \alpha \sum_{i=1}^N ||D_i u||^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\alpha}{C_\Omega^2 + 1} ||u||^2_{H^1(\Omega)},$$

ce qui démontre la coercivité de a. Par le théorème de Lax-Milgram, on a donc bien existence et unicité de la solution du problème (3.2).

Remarque 3.2 *L'inégalité de Poincaré est encore vrai avec $1 \leq p \leq +\infty$ au lieu de $p = 2$ .Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$,$N \geq 1$, il existe $C_{p,\Omega}$ ne dépendant que de p et Ω tel que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ceci permet de définir une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $W^{1,p}(\Omega)$, (Pour $p = 2$, cette équivalence de norme est en faite démontrée dans la démonstration du théorème 3.1).

Définition 3.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$,($N \geq 1$) avec $1 \leq p \leq +\infty$. Pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on pose*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Selon la remarque 3.2, c'est donc, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$. Pour $p = 2$, l'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ est aussi noté $H_0^1(\Omega)$ et la norme $||.||_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ est la norme $||.||_{H_0^1(\Omega)}$.

Par le théorème de Lax-Milgram, on démontre de manière similaire l'existence et l'unicité dans le cas où le second membre de (3.2) est donné par un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$,c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$).

Théorème 3.2 *(Existence et unicité,* $T \in H^{-1}$*)* *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$,soient $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que (3.1) soit vérifiée. Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$ il existe alors une unique solution u de*

$$u \in H_0^1(\Omega),$$
$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{i,j}(x) D_j u(x) D_i v(x) \right) dx = T(v), \; \forall \; v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.8}$$

[11]

Remarque 3.3 *Soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il est intéressant de savoir si l'application $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx$ (définie par, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$) se prolonge en un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (et dans ce cas, le prolongement sera unique par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. En dimension $N = 1$, l'hypothèse $f \in L^1(\Omega)$ est suffisante. En dimension $N \geq 3$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q = \frac{2N}{N+2}$ est suffisante. En dimension $N = 2$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > 1$ est suffisante.[11]*

3.2 Résultats de régularité elliptique

Régularité H^2

Les équations elliptiques linéaires du second ordre possèdent une propriété très importante, la solution gagne deux dérivées par rapport au second membre de l'équation. C'est ce qu'on appelle la régularité elliptique. Il s'agit d'une théorie très technique, et nous renvoyons à [8] pour les démonstrations, mais les résultats sont essentiels pour les applications. On peut néanmoins comprendre d'où vient la régularité elliptique à l'aide de deux exemples simples.

Bref aperçu sur la transformation de Fourier

Rappelons d'abord quelques notions de la transformation de Fourier.

a) **Distribution tempérée**

Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$. L'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées est donc le dual topologique de $\mathcal{S}$. Par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$, il s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{D}'$ de toutes les distributions, le sous-espace (propre) des distributions qui s'étendent continûment à $\mathcal{S}$.

Par exemple, les fonctions continues bornées, comme la fonction constante, définissent des distributions tempérées, ainsi que toutes les distributions à support compact, comme la distribution de Dirac.

b) **Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$**

Soit f une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ définit une distribution régulière $T_{\mathcal{F}(f)}$. Or, $\mathcal{F}(f)$ est elle-même dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, donc dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$. La distribution qu'elle définit, $T_{\mathcal{F}(f)}$, est alors tempérée et pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle T_{\mathcal{F}(f)}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y)e^{-2i\pi\langle x,y\rangle}dy\right)\phi(x)dx.$$

- **Exemple1**

On utilise la transformation de Fourier. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors on va montrer que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. En effet si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ alors $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, l'espace des distributions tempérées (voir [4]) sur lequel la transformation de Fourier est un isomorphisme et où l'on a la formule $\mathcal{F}(\partial_j u) = i\xi_j\hat{u}$. Par conséquent,

$$\mathcal{F}(\Delta u)(\xi) = -\xi_j\xi_j\hat{u} = -|\xi|^2\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

De même, $\mathcal{F}(\partial_{ij}u)(\xi) = -\xi_j\xi_j\hat{u}(\xi)$, donc

$$|\mathcal{F}(\partial_{ij}u)(\xi)|^2 = \xi_i^2\xi_j^2|\hat{u}(\xi)|^2 \leq (\sum \xi_i^2)(\sum \xi_j^2)|\hat{u}(\xi)|^2 = |\xi|^4|\hat{u}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

On en déduit que $\mathcal{F}(\partial_{ij}u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ c-à-d $\partial_{ij}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ puisque la transformation de Fourier est aussi un isomorphisme sur cet espace. Comme la transformation de Fourier est en outre une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ (modulo un facteur $(2\pi)^{-\frac{N}{2}}$) on voit que $||\partial_{ij}u||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq ||\Delta u||_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, d'où l'estimation (il y a N^2 dérivées secondes).

$$||u||_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq (||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + N^2||\Delta u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}}.$$

- **Exemple2**

On utilise ce que l'on appelle la méthode des translations de Nirenberg. Considérons le problème, trouver

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

telle que avec $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. C'est un problème trivialement variationnel

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u.\nabla v + uv)dx = \langle f, v\rangle, \text{ avec}$$
$$||u||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Supposons maintenant que $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors on va montrer que
$u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. En effet, choisissons un indice i et pour tout $h \neq 0$ définissons les translatés

$$u_h(x) = u(x + he_i) \text{ et } f_h(x) = f(x + he_i).$$

Manifestement on a, $-\Delta u_h + u_h = f_h$, $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla\Big(\frac{u_h - u}{h}\Big).\nabla v + \frac{u_h - u}{h}v\right)dx = \Big\langle\frac{f_h - f}{h}, v\Big\rangle \text{ ,et}$$
l'estimation
$$||\tfrac{u_h-u}{h}||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq ||\tfrac{f_h-f}{h}||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Or comme $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $\frac{f_h-f}{h} \xrightarrow[h\to 0]{w} \partial_i f$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.

En effet, pour tout fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a $\langle\frac{f_h-f}{h}, \varphi\rangle = \langle f, \frac{\varphi_{-h}-\varphi}{h}\rangle$ Or il est facile de voir à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué aux dérivées à tous ordres de φ que $\frac{\varphi_{-h}-\varphi}{h} \to -\partial_i\varphi$ au sens de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent ,$\langle\frac{f_h-f}{h}, \varphi\rangle \to \langle f, -\partial_i\varphi\rangle = \langle\partial_i f, \varphi\rangle$ c-à-d $\frac{f_h-f}{h} \to \partial_i f$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ donc au sens de $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ faible par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. On en déduit que $\frac{f_h-f}{h}$ est borné dans $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, donc que $\frac{u_h-u}{h}$ est borné dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout j,$\frac{\partial_j u_h-\partial_j u}{h}$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. D'un autre côté, on sait que $\frac{\partial_j u_h-\partial_j u}{h} \to \partial_{ij}u$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ par le même argument que plus haut. On en déduit que $\partial_{ij}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et l'estimation

$$||u||_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{N+1}||f||_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
grâce au fait que $||f||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ et
$$||\partial_i f||_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

et que $\partial_i u$ est finalement la solution H^1 de $-\Delta\partial_i u + \partial_i u = \partial_i f$.

Remarque 3.4 *On ne pouvait pas utiliser directement le fait que $-\Delta\partial_i u + \partial_i u = \partial_i f$ ce qui est trivialement vrai au sens des distributions, car on ne dispose pas au départ de l'information $\partial_i u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (ce qui est en fait la conclusion !). Donc on ne peut pas utiliser la formulation variationnelle pour ce problème.*

Théorème 3.3 *Soit $0 < \alpha < 1$ et Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ supposons que les coefficients de $\mathcal{L}, a_{ij}, b_i$ et $c \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ est soit Λ un majorant de leurs normes dans cet espace. Soit $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction telle que*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = g & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Avec $\mathcal{L} = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$ est un opérateur elliptique du deuxième ordre.

Alors $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec l'estimation

$$||u||_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\Bigg(||f||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + ||g||_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}\Bigg). \tag{3.9}$$

Où C ne dépend que $N, \alpha, \lambda, \Lambda$ et Ω.

Remarque 3.5 *i) Dans les estimations de Schauder, on ne suppose pas en général que $c \geq 0$ et il faut ajouter au second membre de (3.9) un terme $||u||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$. Quand $c \geq 0$, ce terme devient inutile grâce au théorème 4.7.*

ii) *Elle convient de souligner le caractère a priori surprenant de la régularité elliptique. Prenons le cas de $\mathcal{L} = -\Delta$ avec $g = 0$. La seule information que Δu appartient à un certain $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire qu'une certaine combinaison linéaire de dérivées secondes de u est dans cet espace, suffit à assurer que toutes les dérivées secondes, y-compris les dérivées croisées qui n'apparaissent pas dans l'opérateur, sont individuellement dans le même espace (sous réserve que u et l'ouvert possèdent déjà une certaine régularité minimale). Il s'agit donc d'une propriété extrêmement forte et profonde des opérateurs elliptiques.*

iii) *Il faut noter que la régularité n'a pas lieu pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Ainsi par exemple, il existe une fonction u telle que $\Delta u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$mais $u \notin \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.*

iv) *De façon générale, les résultats de régularité elliptique sont de nature locale. Ainsi, si ω est un ouvert compact inclus dans Ω, et si la restriction de f à ω est de classe $\mathcal{C}^{0,\alpha}$, alors la restriction de u à ω est de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.*

En parallèle avec le résultat d'estimation, on a aussi un résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 3.4 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment sur l'ouvert et l'opérateur $\mathcal{L}$, pour tous $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que*

$$\mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega,\; u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Remarque 3.6 *Le théorème 3.4 montre que l'opérateur $\mathcal{L}^{-1}$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times (\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})/\mathcal{C}_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))$ et $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

On a également des résultats de régularité d'ordre plus élevé.

Théorème 3.5 *Soit $0 < \alpha < 1$, k un entier positif et Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^{k+2,\alpha}$. Supposons que les coefficients de $\mathcal{L}$, a_{ij}, b_i et c appartiennent à $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ et soit Λ un majorant de leurs normes dans cet espace. Soit $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction telle que*

$$\mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega,\ u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Alors $u \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec l'estimation

$$||u||_{\mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\Bigg(||f||_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} + ||g||_{\mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})}\Bigg). \tag{3.10}$$

où C ne dépend que de N, α,λ, Λ, k et Ω.

En d'autres termes, la solution d'une équation elliptique du second ordre a deux dérivées de plus que la donnée f. Ceci implique que si l'ouvert, les coefficients de l'opérateur différentiel et les données sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors la solution est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il existe une théorie analogue dans les espaces de Sobolev. Elle convient de distinguer entre solutions faibles, i.e. au sens des distributions, et solutions fortes, c'est-à-dire presque partout. Les hypothèses minimales de régularité sur les coefficients de l'opérateur ne sont pas les mêmes dans ces deux cas. Pour les solutions faibles, on considère l'opérateur différentiel sous forme divergence, $\mathcal{L}u = -div(A\nabla u) + cu = -\partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu$, avec a_{ij} ,$c \in L^\infty(\Omega)$, A coercive et $c \geq 0$ (on peut également rajouter des termes d'ordre 1). Si les coefficients de A sont réguliers, alors la forme divergence est semblable à celle que nous avons utilisé pour les estimations de Schauder.

Théorème 3.6 *Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^2$ et supposons que les coefficients de A appartiennent à $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^2(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction telle que*

$$\mathcal{L}u = f \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega),\ u - g \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ *avec l'estimation*

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C\Big(||f||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{H^2(\Omega)}\Big), \tag{3.11}$$

où C *ne dépend pas de* f *et* g. *De plus, l'équation est vérifiée p.p sous la forme*

$$-a_{ij}\partial_{ij}u - \partial_i a_{ij}\partial_j u + cu = f.$$

Remarque 3.7 *i) L'existence et l'unicité de* u *découle ici directement du théorème de Lax-Milgram (on ne suppose pas la matrice* A *symétrique).*

ii) Si $a_{ij} \in \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$, *alors* $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *et donc* $\partial_i a_{ij}\partial_j u \in L^2(\Omega)$. *Ce terme a bien un sens et l'on peut appliquer la formule de Leibniz pour dériver le produit* $a_{ij}\partial_j u$.

iii) La régularité de l'ouvert n'est pas une condition nécessaire pour que le résultat ait lieu. Ainsi, en dimension 2, si Ω *est un polygone convexe, alors* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $g = 0$ *impliquent* $u = (-\Delta)^{-1}f \in H^2(\Omega)$. *Par contre, si* Ω *est un polygone qui possède un angle rentrant, alors il existe des données* f *dans* $L^2(\Omega)$ *telles que* $u \notin H^2(\Omega)$.

Plus généralement, la régularité se propage comme précédemment aux ordres plus élevés, à condition de faire des hypothèses appropriées sur l'ouvert et les coefficients de l'opérateur.

Théorème 3.7 *Soit* $k \geq 1$, Ω *un ouvert de classe* $\mathcal{C}^{k+2}$, $a_{ij} \in \mathcal{C}^{k,1}(\overline{\Omega})$ *et* $c \in \mathcal{C}^{k-1,1}(\overline{\Omega})$. *Soit* $f \in H^k(\Omega)$ *et* $g \in H^{k+2}(\Omega)$ *Soit* $u \in H^1(\Omega)$ *fonction telle que*

$$\mathcal{L}u = f \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ u - g \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $u \in H^{k+2}(\Omega)$ *avec l'estimation*

$$||u||_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C_k\Big(||f||_{H^k(\Omega)} + ||g||_{H^{k+2}(\Omega)}\Big). \tag{3.12}$$

où C_k ne dépend pas de f et g.

On retrouve le fait que si l'ouvert, les coefficients et les données sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, la solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour les solutions fortes, c'est à dire les fonctions $u \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que $\mathcal{L}u = -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = f$ p.p, on a également une théorie d'existence et de régularité.

Théorème 3.8 *Soit* Ω *un ouvert de classe* $\mathcal{C}^{1,1}$, $a_{ij} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ *et* b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$
Pour tous $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in W^{2,p}(\Omega)$ *avec* $1 < p < +\infty$ *il existe un unique* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *une fonction telle que*

$$\mathcal{L}u = f \text{ presque partout dans } \Omega,\ u - g \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

avec l'estimation

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p\Big(||f||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{W^{2,p}(\Omega)}\Big). \tag{3.13}$$

où C_p *ne dépend pas de* f *et* g.

Remarque 3.8 *Le résultat est faux pour* $p = 1$ *et* $p = +\infty$.
Pour les dérivées d'ordre plus élevé, la situation est analogue.

Théorème 3.9 *Soit $k \geq 1$ Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^{k+1,1}$ et $a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{k-1,1}(\overline{\Omega})$. Pour tous $f \in W^{k,p}(\Omega)$ et $g \in W^{k+2,p}(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$, il existe un unique $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ une fonction telle que*

$$\mathcal{L}u = f \text{ presque partout dans } \Omega,\ u - g \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec l'estimation

$$||u||_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C_{k,p}\Big(||f||_{W^{k,p}(\Omega)} + ||g||_{W^{k+2,p}(\Omega)}\Big). \tag{3.14}$$

où $C_{k,p}$ ne dépend pas de f et g.

Ce type de résultats de régularité elliptique se généralise considérablement à des systèmes, grâce aux résultats de Agmon, Douglis et Nirenberg. Notons qu'ils ne se cantonnent pas aux conditions aux limites de Dirichlet, mais que des opérateurs frontière plus compliqués sont possibles. Il doit néanmoins y avoir une certaine compatibilité entre l'opérateur différentiel à l'intérieur de l'ouvert et l'opérateur frontière. Notons aussi que la régularité elliptique (globale) n'a pas lieu si l'on a des conditions mixtes, par exemple Dirichlet sur une partie de la frontière et Neumann sur son complémentaire, sauf si ces deux parties sont d'adhérences disjointes.
Pour terminer ce bref catalogue de résultats de régularité, mentionnons deux théorèmes utiles. Le premier est dû à De Giorgi.

Théorème 3.10 *Soit Ω un ouvert régulier, A une matrice à coefficients $L^\infty(\Omega)$ coercive, $f_0 \in L^{\frac{N}{\varepsilon+2}}(\Omega)$, $f \in L^{N+\varepsilon}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$et soit $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$-div(A\nabla u) = f_0 + div f.$$

Alors il existe $0 < \alpha < 1$ et $C > 0$ tels que $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\Bigg(||f||_{L^{N+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}^N)} + ||f_0||_{L^{\frac{N}{\varepsilon+2}}(\Omega)} \Bigg).$$

Remarque 3.9 *i) Le théorème de De Giorgi se démontre facilement si les coefficients sont réguliers à partir des résultats de régularité L^p et des injections de Sobolev. La difficulté vient de ce que les coefficients sont discontinus.*

ii) Le théorème n'est pas vrai pour les systèmes en général. Dans ce cas, on montre typiquement que $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}/H)$, où H est un ensemble.

Le second résultat est le théorème de Meyers.

Théorème 3.11 *Soit Ω un ouvert régulier et A une matrice à coefficients $L^\infty(\Omega)$ coercive. Il existe $2 < p_0 < +\infty$ tel que l'opérateur $u \mapsto -div(A\nabla u)$ est un isomorphisme entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p}(\Omega)$ pour tout $p_0' \leq p \leq p_0$.[11]*

Remarque 3.10 *On sait, par le théorème de Lax-Milgram, que cet opérateur est un isomorphisme entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème de Meyers permet donc de gagner un peu d'intégrabilité, même avec des coefficients discontinus, il reste valable pour les systèmes.*

Théorème 3.12 *soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, si $f \in \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ alors*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N} \int_\Omega \frac{f(x)}{|x-y|^{N-2}} dy.$$

définit une solution $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$ dans Ω.

Théorème 3.13 ***(Théorème de Schauder)*** *soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ alors le problème*

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

admet une solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ *si de plus* Ω *de classe* $\mathcal{C}^{m+2,\alpha}$ *et* $f \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ *alors* $u \in \mathcal{C}^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *et on a*

$$||u||_{\mathcal{C}^{m+2,\alpha}} \leq C||f||_{\mathcal{C}^{m,\alpha}}.$$

[2]

Proposition 3.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné et* $f \in L^1(\Omega)$ *alors*

1. *u est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et harmonique sur* $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$.
2. *Si f est bornée dans* Ω *alors* $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$.
3. *Si* $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *alors* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Théorème 3.14 *(Théorème de S.Agmon)* *Soit A un opérateur elliptique à coefficients indéfiniment dérivables,* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert. Alors si* $u \in L^2_{Loc}(\Omega)$ *est solution faible de* $Au = f$ *et* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *alors* $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*[2]*

Théorème 3.15 *(Théorème de Géorg-Stampacchia)* *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné régulier et* $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ *tel que* $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2 \ \forall \xi \in \Omega \ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *et* $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ $p > \frac{N}{2}$ *si* $u \in H_0^1(\Omega)$ *est une solution du problème*

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $\exists \alpha \in]0,1[$, $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(\alpha = \alpha(\Omega, p))$. *[2]*

Théorème 3.16 *(Agmon-Douglis-Nirenberg)* *Soit* Ω *de classe* $\mathcal{C}^2$ *,*$\partial\Omega$ *borné et* $f \in L^p(\Omega)$ *alors le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $1 < p < +\infty$

Si de plus Ω *de classe* $\mathcal{C}^{m+2}$ *et* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(m \geq 1)$ *alors* $u \in W^{m+2,p}(\Omega)$ *et on a* $||u||_{\mathcal{C}^{m+2,p}} \leq C||f||_{W^{m,p}}$.*[2]*

Exemple

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ de mesure $|\Omega| = M > 0$. Pour $g \in L^2(\Omega)$ on a la formulation faible associée au problème

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = g & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega g(x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx \text{ une forme bilinéaire.}$$
$$L(v) = \int_\Omega g(x)v(x)dx \text{ une forme linéaire .}$$

1 . La forme bilinéaire a est continue, en effet

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx\right| \leq \int_\Omega \left|\nabla u(x).\nabla v(x)\right|dx,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|a(u,v)| \leq ||\nabla u||_{L^2}||\nabla v||_{L^2} = ||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1}.$$

Donc $\exists M = 1\ \forall (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1}$$

2 . La forme bilinéaire a est coercive, vu que

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla u(x)dx = \left|\left|u\right|\right|^2_{H_0^1} \geq \frac{1}{2}\left|\left|u\right|\right|^2_{H_0^1}$$

Donc $\exists \alpha = \frac{1}{2} > 0\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,u) \geq \alpha\left|\left|u\right|\right|^2_{H_0^1}$$

3. $g \in L^2(\Omega)$ et puisque $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ on a $g \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ ceci entraine que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.

D'après les résultats précédents on conclut d'après le théorème de Lax-Milgram que le problème (P) admet une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ et elle est unique.

D'après le théorème 3.6 (pour $\mathcal{L} = -\Delta$) ou la remarque 3.7 (iii), $u = (-\Delta)^{-1}g \in H^2(\Omega)$, si de plus $g \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ et Ω régulier, le théorème 3.13 de Schauder (avec $m = 1$ et $f = g$) entraine que $u \in \mathcal{C}^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Chapitre 4

Les EDPs elliptiques non linéaires

Soit le problème

$$(P)\begin{cases}-\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega,\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

Considérons le problème semi-linéaire (P) qui consiste à trouver une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, étant donnés Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, telle que

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Il est clair que $|F(t)| \leq ||f||_{L^\infty(\mathbb{R})}|t|$. Associons à ce problème la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx. \tag{4.1}$$

4.1 Pourquoi chercher des points critiques ?

Problème de minimisation

Dans de nombreuses situations, la résolution d'une EDP elliptique peut être associée à la recherche d'un équilibre en terme d'énergie. Par exemple, lorsque l'EDP régit un problème d'élasticité, il peut s'agir de trouver la solution qui minimise les efforts subits par une membrane élastique **sous contraintes** . On se propose de minimiser la fonctionnelle J associée au problème (P).

Proposition 4.1 *La fonctionnelle J est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H_0^1(\Omega)$. Sa différentielle est donnée par*

$$DJ(u)v = \langle DJ(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f(u)v dx. \tag{4.2}$$

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve voir [9].

Corollaire 4.1 *Tout point critique de J est solution du problème modèle et réciproquement.*

Remarque 4.1 *Il est donc équivalent de résoudre le problème aux limites et de trouver des points critiques de J, c'est-à-dire en fait des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange (voir chapitre préliminaire) associée à la fonctionnelle J. Notons qu'a priori, J n'est pas convexe en raison du terme $u \mapsto I(u)$ qui n'est pas concave car f n'a aucune propriété de ce type. On peut donc avoir d'autres points critiques que les extrémums.*

On va donc s'attacher à trouver des points critiques, ou ce qui est équivalent des valeurs critiques, pour des fonctionnelles J assez générales. Les applications seront typiquement des problèmes aux limites semi-linéaires.

4.1.1 La condition de Palais-Smale et le théorème du col

Quand nous avons minimisé une fonctionnelle du calcul des variations, un ingrédient essentiel a été la compacité relative (pour une certaine topologie) des suites minimisantes. La condition de

Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non de valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

Définition 4.1 *Soit V un espace de Banach et $J : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) si de toute suite $(u_n)_n$ de V telle que*

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } DJ(u_n) \to 0 \text{ dans } V'.$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque 4.2
1. *La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite $(u_n)_n$, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.*
2. *Remarquons que la topologie ici est la topologie forte.*
3. *Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_V J$, on peut parfaitement avoir une suite minimisante.*

Théorème 4.1 *(**Du col -Pass Mountain**) Soit V un espace de Banach et $J : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant la condition de Palais-Smale et telle que*

i) $J(0) = 0$.

ii) $\exists R > 0$ *et* $a > 0$ *tels que si* $||u||_V = R$ *alors* $J(u) \geq a$.

iii) $\exists v \in V$, $||v||_V > R$, *tel que* $J(v) < a$.

Alors J admet une valeur critique $c \geq a$.[9]

Remarque 4.3 *Il existe une version similaire du théorème du col qui donne le même résultat avec le théorème d'Ambrosetti-Rabinovitz.*

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses i) ii) et iii). Alors J possède une valeur critique c telle que $c \geq a$. De facon plus précise, si on pose,*

- $P := \{p : p \in \mathcal{C}([0,1]), p(0) = 0, p(1) = v\}$.
- $c := \inf_{p \in P} \max_{0 \leq t \leq 1} J(p(t))$

Alors c est une valeur critique de J, et $c \geq a$.

4.1.2 Application du théorème du Col

Soit le problème

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 3, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

tel que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ carathéodory (continue par rapport à x, mesurable par rapport à u). On pose

(f_1) $\exists c, d > 0,\ 0 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$ tel que $|f(x,t)| \leq c|t|^p + d$.

(f_2) $f(x,t) = \circ(|t|)$ quand $t \to 0$ uniformément en x

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\exists \delta = \delta(\varepsilon) : |f(x,t)| \leq \varepsilon |t|, \forall |t| \leq \delta.$$

(f_3) $\exists \mu > 2,\ r > 0$ tel que $0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t)\ , \forall |t| > r$.

Sous ces hypothèses le problème (P_1) admet une solution non triviale.

Montrons d'abord que $u_0 = 0$ est un minimum local stricte c-à-d $I(u) > 0 = I(0)$ avec $I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(.,u) dx$

Majoration de $F(x,t)$ pour $|t| \leq \delta$ on a d'après (f_2)
$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta = \delta(\varepsilon) : |f(x,t)| \leq \varepsilon|t|, \forall |t| \leq \delta$. Ainsi $|F(x,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2, \forall |t| \leq \delta$. Majoration de F pour $|t| \geq \delta$ (f_1) : $|F(x,t)| \leq c_1|t|^{p+1} + d|t|$
Après calculs on obtient
$\forall t |F(x,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t| + A_\varepsilon|t|^{p+1}$ vu que $|t| \geq \delta \implies \frac{1}{|t|^p} \leq \frac{1}{\delta^p}$ et $A_\varepsilon = c_1 + \frac{d}{\delta^p}$ et par suite $|F(x,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + A_\varepsilon|t|^{p+1}$ entraine

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \tfrac{1}{2}||u||^2 - \tfrac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - A_\varepsilon \int_\Omega |u|^{p+1}dx, \\ &\geq \tfrac{1}{2}||u||^2_{H_0^1} - \tfrac{\varepsilon}{2}||u||^2_{L^2} - A_\varepsilon||u||^{p+1}_{L^{p+1}}. \end{aligned}$$

Pour avoir la même norme on a

$$\begin{aligned} &||u||^2_{L^2} \leq \tfrac{1}{\lambda_1}||u||^2_{H_0^1} \text{ (L'inégalité de Poincaré).} \\ &||u||^{p+1}_{L^{p+1}} \leq c_0||u||^{p+1}_{H_0^1} \text{ (Injection de Sobolev).} \\ \implies &I(u) \geq (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\varepsilon}{2\lambda_1})||u||^2 - c_\varepsilon||u||^{p+1} = g(||u||). \\ &g(||u||) = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{\varepsilon}{\lambda_1})||u||^2 - c_\varepsilon||u||^{p+1}. \end{aligned}$$

Considérons la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{2}(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1})t^2 - c_\varepsilon t^{p+1}$ avec $t \geq 0$.

$$g(t) = \left(\tfrac{1}{2}\big(1 - \tfrac{\varepsilon}{\lambda_1}\big) - c_\varepsilon t^{p-1}\right)t^2.$$

Choisissons $\varepsilon < \lambda_1$ on a $\frac{1}{2}\big(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\big) - c_\varepsilon t^{p-1} > 0$

$$\iff \underbrace{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\big(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\big)\right)^{\frac{1}{p-1}}}_{t_0} > t$$

$g(t) > 0 \; \forall t < t_0$, en conclusion si on prend u tel que $0 < ||u|| < t_0$ alors $I(u) > 0 \ldots (1)$

Ainsi $u_0 = 0$ est un minimum local stricte de I.

2) Montrons que $\exists v_0 \in H_0^1(\Omega)/\{0\}$ tel que $I(v_0 < 0)$ .Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$, $||v|| \neq 0$ et $\rho > 0$ il suffit de montrer que $I(\rho v) \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} -\infty$ par la même méthode on contrôle le terme $\displaystyle\int_\Omega F(x,\rho v)dx$ en utilisant (f_1) et (f_3) on déduit directement que (pour r fixé) $F(x,r)$ est borné, en effet

$$F(x,r) \leq \tfrac{r}{\mu} f(x,r) \leq \tfrac{r}{\mu}(cr^p + d) < +\infty$$

ce qui entraine que

$$I(\rho v) \leq \tfrac{\rho^2}{2}||v||^2 - \rho^\mu c||v||^\mu \xrightarrow[\rho\to+\infty]{\mu>2} -\infty,$$

donc

$$\exists \rho_0 > 0 / I(\rho_0 v) < 0 \ldots (2).$$

Maintenant il nous reste à montrer que que I satisfait la condition de Palais-Smale.

Soit $(u_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $|I(u_n)| < c$ et $I'(u_n) \xrightarrow{H^{-1}(\Omega)} 0$ on a

$$c \geq \tfrac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx$$

en utilisant (f_3) et le fait que $\exists \mu > 2$, $\exists r > 0$ tel que $(\forall \varepsilon > 0)$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$n \geq n_0 \; |I'(u_n)v| < \varepsilon||v|| \ldots (A).$$

$$|I'(u_n)v| = \Big|\underbrace{\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u_n)v dx}_{w}\Big| < \varepsilon||v|| \text{ pour}$$

$\varepsilon = 1$ et $v = u_n$, on a

$$||u_n||^2 - \int_\Omega f(x,u_n) > -||u_n|| \text{ car}$$

$$|w| < \varepsilon ||v|| \implies -\varepsilon ||v|| < w < ||v||\varepsilon$$

$$-\tfrac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx > -\frac{1}{\mu}\big(||u_n||^2 + ||u_n||\big) \ldots (B).$$

De (A) et (B) on a $c \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu})||u_n||^2 - \frac{1}{\mu}||u_n|| - a$,
Si $||u_n||$ n'est pas bornée dans $\mathbb{R}$

$$\frac{c}{||u_n||^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu||u_n||} - \frac{a}{||u_n||^2}$$
$$\text{Si } ||u_n|| \to +\infty \implies 0 \geq \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\mu} \ .$$

Mais ceci est faut car $\mu > 2$ donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} > 0$.

Ainsi $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et puisque $I'(u_n) \xrightarrow{H^{-1}(\Omega)} 0$. Alors $(u_n)_n$ possède une sous-suite convergente dans $H_0^1(\Omega)$ donc I satisfait la condition de Palais-Smale … (3).

(1),(2) et (3) satisfait les hypothèses du théorème du Col alors I admet un point critique non trivial et par la suite le problème admet une solution faible non triviale.[2]

Maintenant on va énoncer les résultats du principe du maximum fort où on considère des solutions fortes, et le principe du maximum faible concernant des solutions faibles.

Introduction

Le principe du maximum est une propriété des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, de type elliptique ou parabolique qui dit qu'une fonction solution d'une telle équation sur un domaine atteint son maximum sur la frontière du domaine. De façon plus précise, le principe du maximum fort dit que si la fonction atteint son maximum à l'intérieur du domaine, elle est constante. Le principe du maximum faible dit que le maximum de la fonction est atteint sur la frontière du domaine, mais peut aussi éventuellement être atteint à l'intérieur du domaine. Un principe du maximum encore plus faible se contente simplement de borner la fonction par son maximum sur la frontière.

Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques est connu depuis les travaux de Gauss en 1839. En 1927, Eberhard Hopf généralise ce résultat en montrant qu'une fonction satisfaisant une inéquation aux dérivées partielles du second ordre d'un certain type sur un domaine de $\mathbb{R}^N$ et qui atteint son maximum à l'intérieur du domaine est nécessairement constante.[9]

4.2 Principe du maximum fort

Commençons par une première version du principe du maximum fort.

Théorème 4.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A dont les composantes a_{ij} appartiennent à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, un vecteur $b \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ de composantes b_i, $i = 1, \ldots, n$ et une fonction $c \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que $c(x) \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$, et un opérateur $\mathcal{L} = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$. Toute fonction $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui satisfait*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x) \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

est positive ou nulle dans $\overline{\Omega}$.[9]

Remarque 4.4 *En d'autre termes, si l'on introduit l'opérateur différentiel du second ordre $\mathcal{L} = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$, si une fonction u avec la régularité indiquée est solution du problème aux limites $\mathcal{L}u = f$ dans Ω ;$u = g$ sur $\partial\Omega$,avec $f \geq 0$ et $g \geq 0$,* *alors* $u \geq 0$ *,C'est un résultat de monotonie, si* f *représente une « force », alors la solution* u *va dans le sens où tire la force, si celui-ci est défini.*

Le résultat repose sur les lemmes suivants.

Lemme 4.1 *Soit* $\mathcal{L}' = -a_{ij}\partial_{ij}$. *Si* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *atteint un minimum local en un point* x_0 *de* Ω, *alors* $\mathcal{L}'u(x_0) \leq 0$.

Lemme 4.2 *Soit* $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ *telle que* $\mathcal{L}u \geq 0$ *dans* Ω *alors*

i) Si $c = 0$ *on a* $\min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u_-$.

ii) Si $c \geq 0$ *on a* $\min\limits_{\overline{\Omega}} u \geq \min\limits_{\partial\Omega}(-u_-)$.

Remarquons que le point (ii) n'a d'intérêt spécifique que si $c \not\equiv 0$.

Remarque 4.5 *i) On voit donc que si* $c = 0$ *ou si* u *prend des valeurs négatives, alors* u *atteint son minimum au bord de l'ouvert. Par contre, si* u *ne prend pas de valeurs négatives sur le bord et* c *n'est pas nul, on ne peut rien dire du point où le minimum est atteint. On a bien sûr un résultat analogue avec les maximums en inversant tous les signes.*

ii) Le principe du maximum est encore vrai, mais nettement plus délicat à montrer sous des hypothèses de régularité plus faibles, $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$ *et* $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. *Cette version du principe du maximum fort, plus exactement du lemme 4.1, est due à Bony.*

iii) Mentionnons que le principe du maximum est spécifique aux équations elliptiques du second ordre. En d'autres termes, il n'a pas d'analogue, sauf exception, ni pour les systèmes d'équations, ni pour les équations elliptiques d'ordre plus élevé.

iv) *Le principe du maximum fort entraîne l'unicité de la solution du problème de Dirichlet dans la classe $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$. En effet, $\mathcal{L}u = 0$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ entraîne $u \geq 0$ et $u \leq 0$ dans Ω.*
On va raffiner l'étude des points de minimum de u par un résultat dû à Hopf. Pour cela, on doit supposer une certaine régularité de la frontière de Ω.

Théorème 4.4 *Soient $\mathcal{L}$ et $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfaisant les mêmes hypothèses que précédemment (du théorème 4.3). Si u atteint un minimum local strict en un point x_0 de $\partial\Omega$ dans le cas où $c = 0$, ou bien un minimum local strict négatif dans le cas où $c \geq 0$, alors*

$$\tfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) = n_i(x_0)\partial_i u(x_0) < 0, \tag{4.3}$$

[9]

Théorème 4.5 *(Hopf)* *Soient $(a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice symétrique, localement uniformément définie positive dans Ω et les coefficients a_{ij}, $b_i = b_i(x)$ sont localement bornés et $u = u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui satisfait l'inégalité*

$$\mathcal{L}u \geq 0 \text{ dans un ouvert } \Omega.$$

Si u atteint son maximum M dans Ω, alors $u \equiv M$.

Remarque 4.6 *Le principe du maximum de Hopf ne s'applique qu'aux opérateurs différentiels linéaires. C'est en particulier le point de vue que l'on trouve dans l'ouvrage "Methoden der mathematischen Physik" de Courant et Hilbert. Cependant, dans les dernières sections de son papier originel, Hopf a considéré des situations plus générales mettant en jeu* *des opérateurs non-linéaires, et dans certains cas il a ainsi obtenu des résultats d'unicité, en particulier pour le problème de Dirichlet pour l'opérateur de courbure moyenne et pour les équations de Monge-Ampère.*

Le théorème de Hopf entraine une deuxième version du principe du maximum.

Théorème 4.6 *Soit Ω un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^N$ et $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $\mathcal{L}u \geq 0$ sur Ω. On note $m = \min\limits_{\overline{\Omega}} u$. Alors si $c = 0$ ou bien si $c \geq 0$ et $m \leq 0$, on a l'alternative : soit $u \equiv m$ sur $\overline{\Omega}$, soit $u > m$ dans Ω.[9]*

Théorème 4.7 *Soit $\eta > 0$ et $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ telle que $\mathcal{L}u + \eta u = f$ sur Ω et $u = g$ sur $\partial\Omega$. Alors*

$$||u||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} \leq \max\left\{ ||g||_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)}, \frac{||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}}{\eta} \right\}.$$

Proof *D'abord, comme u satisfait l'équation, on a nécessairement $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Posons $v = u - \max\left\{ ||g||_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)}, \dfrac{||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}}{\eta} \right\}$, on a*

$$v \leq u - ||g||_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et}$$
$$\mathcal{L}v + \eta v = f - (c + \eta) \max\left\{ ||g||_{\mathcal{C}^0(\Omega)}, \frac{||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}}{\eta} \right\},$$
$$\leq f - c\frac{||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}}{\eta} - ||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} \leq -c\frac{||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}}{\eta} \leq 0.$$

Donc, par le principe du maximum fort, $v \leq 0$ dans $\overline{\Omega}$ c-à-d $||u||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} \leq \max\left\{ ||g||_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)}, \dfrac{||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}}{\eta} \right\}$ dans $\overline{\Omega}$.

On refait le même raisonnement avec $v = u + \max\left\{ ||g||_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)}, \dfrac{||f||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}}{\eta} \right\}$.

Remarque 4.7 *On pouvait aussi supposer $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$. Le résultat est toujours vrai si l'on suppose alors f bornée sur*

Ω (si f n'est pas bornée, le majorant du membre de droite vaut $+\infty$, ce qui n'est pas une information pertinente).

Signalons un résultat d'estimation assez semblable au précédent.

Théorème 4.8 *Soit $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $\mathcal{L}u = f$ sur Ω avec f bornée sur Ω, et $u = g$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une constante C qui ne dépend que du diamètre de Ω, de $||b||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$ et de λ telle que*

$$||u||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} \leq ||g||_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)} + C \sup_\Omega |f|.$$

.

4.3 Principe du maximum faible

Dans cette section, nous considérons le même type de questions que précédemment, mais pour des solutions faibles et sous des hypothèses de régularité moins restrictives que précédemment. Naturellement, les résultats sont moins fins. Donnons d'abord l'analogue du théorème 4.3.

Théorème 4.9 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A dont les composantes a_{ij} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et une fonction $c \in L^\infty(\Omega)$ telle que $c \geq 0$ p.p. Toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui satisfait*

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + cu \geq 0, \\ u_- \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

est positive ou nulle pp dans Ω.

Remarque 4.8 *On rappelle qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive si et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ dans Ω, on a*

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \geq 0 \ .$$

Commençons par un lemme sur les éléments de $H^{-1}(\Omega)$.

Lemme 4.3 *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ telle que $f \geq 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, $\langle f, v_+ \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \geq 0$.[9]*

Théorème 4.10 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A dont les composantes a_{ij} appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et une fonction $c \in L^\infty(\Omega)$ telle que $c \geq \eta > 0$ p.p. Toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de*

$$-div(A\nabla u) + cu \geq 0. \tag{4.4}$$

au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ satisfait

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq \tfrac{1}{\eta}||f||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.5}$$

[9]

Preuve Tout d'abord, si $f \notin L^\infty(\Omega)$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $f \in L^\infty(\Omega)$, soit $K \in \mathbb{R}^+$. Nous savons que $(u-k)_+ \in H_0^1(\Omega)$. Nous déduisons de (3.6) que

$$\int_\Omega (A\nabla u.\nabla(u-k)_+)dx + \int_\Omega cu(u-k)_+dx = \int_\Omega f(u-k)_+dx.$$

Or

$$\int_\Omega (A\nabla u.\nabla(u-k)_+)dx = \int_\Omega (A\nabla(u-k).\nabla(u-k)_+)dx,$$
$$= \int_\Omega (A\nabla(u-k)_+.\nabla(u-k)_+)dx \geq 0.$$

en effet, $\nabla(u-k)_+ = 1_{u>k}\nabla(u-k)$ et $1_{u>k} = 1^2_{u>k}$.

Remplaçant cette inégalité dans l'égalité qui la précède, il vient

$$\int_\Omega cu(u-k)_+dx \leq \int_\Omega f(u-k)_+dx.$$

Comme Ω est borné, on peut soustraire $\int_\Omega ck(u-k)_+dx$ aux deux membres de cette inégalité, ce qui donne $\int_\Omega c(u-k)(u-k)_+dx \leq \int_\Omega (f-ck)(u-k)_+dx$.

Or $\int_\Omega c(u-k)(u-k)_+dx = \int_\Omega c[(u-k)_+]^2dx \geq \eta\big|\big|(u-k)_+\big|\big|^2_{L^2(\Omega)}$.

Mais si $k = \frac{||f||_{L^\infty(\Omega)}}{\eta}$, alors $f - ck \leq 0$ pp. Comme $(u-k)_+ \geq 0$ p.p, on en déduit que $\int_\Omega (f-ck)(u-k)_+dx \leq 0$. Par la dernière égalité, il vient $(u-k)_+ = 0$, c-à-d $u \leq K$ p.p.

On reprend ensuite le même raisonnement avec $v = (u+k)_-$, toujours avec $k = \frac{||f||_{L^\infty(\Omega)}}{\eta}$.

Remarque 4.9 *On a un résultat analogue si Ω est un ouvert régulier et*
$\gamma(u) = g$ pour $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Il suffit de prendre $|K| \geq ||g||_{L^\infty(\partial\Omega)}$.

4.4 Méthode de sous et sur-solutions

Le principe du maximum et la régularité elliptique peuvent être utilisés pour résoudre certaines équations non linéaires. Nous développons ici la méthode des sur et sous-solutions. Le problème est le suivant.
Soit $\mathcal{L} = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$ un opérateur elliptique à coefficients $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, où Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. On se donne une fonc-

tion $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne et l'on cherche à résoudre le problème aux limites, $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$,

$$(P) \begin{cases} \mathcal{L}u(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 4.2 *On dit que* $\overline{u}$*(resp.*$\underline{u}$*) est une sur solution (resp.sous solution) si* $\overline{u}$*(resp.*$\underline{u}$*) appartient à* $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ *et vérifie* $\mathcal{L}\overline{u} \geq f(x, \overline{u})$*(resp.*$\mathcal{L}\underline{u} \leq f(x, \underline{u})$*) dans* Ω *et* $\overline{u} \geq 0$ *(resp.*$\underline{u} \leq 0$*) sur* $\partial\Omega$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 4.11 *Supposons qu'il existe une sur-solution* $\overline{u}$ *et une sous-solution* $\underline{u}$ *telle que* $\overline{u} \geq \underline{u}$ *Le problème* (P) *admet alors une solution maximale* $\overline{u}^*$ *et une solution minimale* $\underline{u}_*$ *telles que* $\overline{u} \geq \overline{u}^* \geq \underline{u}_* \geq \underline{u}$ *et qu'il n'existe pas de solution* u *comprise entre* $\overline{u}$ *et* $\underline{u}$ *telle que* $u(x) > \overline{u}^*(x)$ *ou* $u(x) < \underline{u}_*(x)$ *pour un point* x *de* Ω*.[9]*

La démonstration se fait sur le même schéma qu'une démonstration par point fixe, en itérant l'opérateur. On utilise le principe du maximum et les estimations de régularité elliptique pour obtenir la convergence. Plus précisément,

Lemme 4.4 *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que les deux suites* $(\overline{u}^n)_n$ *et* $(\underline{u}_n)_n$ *définies par :*

$$\begin{cases} \overline{u}^0 = \overline{u}, \\ \mathcal{L}\overline{u}^{n+1} + M\overline{u}^{n+1} = f(x, \overline{u}^n) + M\overline{u}^n & \textit{dans } \Omega, \\ \overline{u}^{n+1} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \underline{u}^0 = \underline{u}, \\ \mathcal{L}\underline{u}^{n+1} + M\underline{u}^{n+1} = f(x, \underline{u}^n) + M\underline{u}^n & \textit{dans } \Omega, \\ \underline{u}^{n+1} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

convergent simplement vers $\overline{u}^*$ (resp.$\underline{u}_*$) dans $\overline{\Omega}$.

Preuve Remarquons d'abord que si f est une application localement lipschitzienne d'un espace métrique (X,d) dans un espace métrique (Y,δ), alors elle est globalement lipschitzienne sur tout compact de X. En effet, soit K un compact de X et supposons que f ne soit pas globalement lipschitzienne sur K. Ceci signifie que pour tout entier n, il existe un couple (x_n, x'_n) de points de K tels que

$$\delta(f(x_n), f(x'_n) > nd(x_n, x'_n). \tag{4.6}$$

Comme f est continue, $f(K)$ est compact, donc de diamètre fini. Par conséquent,
$d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} diam(f(k)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Extrayons une sous-suite, toujours notée $(x_n)_n$ telle que
$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $x'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x'$ dans k. L'inégalité ci-dessus implique que $x = x'$. Par hypothèse, il existe un voisinage V de x et une constante Λ_V, $z, z' \in V$
$\delta(f(z), f(z')) \leq \Lambda d(z, z')$. Or pour n assez grand, on a $x_n, x'_n \in V$ ce qui est contradictoire avec l'inégalité (4.3).

Soit $m = max\left\{ ||\overline{u}||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}, ||\underline{u}||_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} \right\}$ On applique la remarque précédente au compact $k = \overline{\Omega} \times [-m, m]$.$\exists\Lambda$ telle que

$|f(y,t) - f(y',t')| \leq \Lambda(|y - y'| + |t - t'|)$ pour tous (y, t) et (y', t') dans k. Soit alors $M = \Lambda + 1$.

Montrons alors que la fonction $\tilde{f}(x, s) = f(x, s) + Ms$ est croissante par rapport à s pour (x,s) dans k. il vient

Soit $s, s' \in [-m, m]$ avec $s \geq s'$. Comme $|f(x,s) - f(x,s')| \leq \Lambda|s - s'|$, il vient

$$\tilde{f}(x,s) - \tilde{f}(x,s') \geq (M - \Lambda)(s - s') = s - s' \geq 0.$$

Notons à ce stade que si $v \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors $x \to \tilde{f}(x, v(x))$ appartient aussi à $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. En effet, nous pouvons écrire

$$\begin{gathered} \left|\tilde{f}(x,v(x)) - \tilde{f}(y,v(y))\right| \leq \\ \Lambda\Big||x-y| + |v(x) - v(y)| + M|v(x) - v(y)|\Big|, \\ \leq C\big(|x-y| + |x-y|^{\alpha}\big). \end{gathered}$$

où C dépend de Λ, M et $||v||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$. Par conséquent. Pour $x \neq y$, on voit que

$$\frac{\left|\tilde{f}(x,v(x)) - \tilde{f}(y,v(y))\right|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(|x-y|^{1-\alpha} + 1),$$

et le membre de droite est borné sur $\overline{\Omega}$.
Posons $\tilde{\mathcal{L}}u = \mathcal{L}u + Mu$, on voit que la suite $(\overline{u}^n)_n$ est définie par

$$\begin{cases} \overline{u}^0 = \overline{u}, \\ \overline{u}^{n+1} = T(\overline{u}^n). \end{cases}$$

où l'application $T : \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ est bien définie pour tout $0 < \alpha < 1$ par

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(T(v)) = \tilde{f}(x,v) & \text{dans } \Omega, \\ T(v) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

par la remarque précédente et la théorie d'existence et d'unicité dans les espaces de Hölder.

Remarquons maintenant que si $\underline{u} \leq v \leq \overline{u}$ alors $\underline{u} \leq u = T(v) \leq \overline{u}$. En effet

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(u-\overline{u}) = \tilde{f}(x,v) - \tilde{\mathcal{L}}\overline{u} \leq \tilde{f}(x,v) - \tilde{f}(x,\overline{u}) \leq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u-\overline{u} = -\overline{u} \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

puisque $\tilde{f}$ est croissante par rapport à son deuxième argument sur le compact K. Par le principe du maximum fort, il vient $u \leq \overline{u}$. De même, on montre que $\underline{u} \leq u$. Appliquant la remarque précédente à la suite $(\overline{u}^n)_n$ et raisonnant par récurrence, on voit immédiatement que cette suite est bien définie et telle que $\underline{u} \leq \overline{u}^n \leq \overline{u}$ pour tout n. Montrons par récurrence qu'elle est décroissante. On a bien $\overline{u}^1 \leq \overline{u}^0$. Supposons que $\overline{u}^n \leq \overline{u}^{n-1}$. Reprenant le raisonnement précédent, il vient

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(\overline{u}^{n+1} - \overline{u}^n) = \tilde{f}(x,\overline{u}^n) - \tilde{f}(x,\overline{u}^{n-1}) \leq 0 & \text{dans } \Omega, \\ \overline{u}^{n+1} - \overline{u}^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

d'où, d'après le principe du maximum fort, $\overline{u}^{n+1} \leq \overline{u}^n$ Pour chaque $x \in \Omega$, la suite $(\overline{u}^n(x))_n$ est donc décroissante et minorée. Elle est par conséquent convergente.
On montre de même que la suite $(\underline{u}^n(x))_n$ est croissante et majorée donc convergente pour tout x.

Résultats On note $\overline{u}^*$ et $\underline{u}_*$ les limites ponctuelles des suites $(\overline{u}^n)_n$ et $(\underline{u}^n)_n$. Notons que nous n'avons à ce stade aucune information sur la régularité de ces fonctions.

1. On a $\underline{u}_* \leq \overline{u}^*$

   On montre comme précédemment par récurrence sur $\mathcal{L}$ et par le principe du maximum que pour tout couple d'entiers (m,n) on a, $\underline{u}^m \leq \overline{u}^n$.

2. Les limites $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ appartiennent à $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

3. $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ sont solutions du problème (P).

   D'après ce qu'on vient de voir, $\tilde{\mathcal{L}}\overline{u}^{n+1} \to \tilde{\mathcal{L}}\overline{u}^*$ et $\tilde{f}(.,\overline{u}^n) \to \tilde{f}(.,\overline{u}^*)$ uniformément dans Ω.
   On voit donc que $\tilde{\mathcal{L}}\overline{u}^* = \tilde{f}(.,\overline{u}^*)$ ce qui équivaut évidement à $\mathcal{L}\overline{u}^* = f(.,\overline{u}^*)$. De plus comme $\overline{u}^n = 0$ sur $\partial\Omega$ et que la suite converge sur $\overline{\Omega}$, on a aussi $\overline{u}^* = 0$ sur $\partial\Omega$. On procède de même pour $\underline{u}^*$.

   Pour conclure, nous devons montrer que les deux solutions ainsi exhibées sont respectivement minimale et maximale.

4. Soit u une solution du problème (P) telle que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Alors $\underline{u}_* \leq u \leq \overline{u}^*$.

   On montre comme précédemment par récurrence sur n et par le principe du maximum que $\underline{u}^n \leq u \leq \overline{u}^n$.

Remarque 4.10 *D'après les estimations de Schauder, on voit en fait que $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ appartiennent à $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $0 < \alpha < 1$. On peut gagner la régularité de $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ si les coefficients de l'opérateur, l'ouvert et la fonction f sont eux-mêmes plus réguliers. Pour grignoter petit à petit la régularité nécessaire, on fait appel au lemme 4.3.*

Exemple 4.1 *i) Supposons qu'il existe deux constantes $m_- < 0$ et $m_+ > 0$ telles que pour tout x, $f(x, m_-) \geq 0$ et $f(x, m_+) \leq 0$. Alors il existe une solution u telle que $m_- \leq u(x) \leq m_+$. De plus, les inégalités sont strictes, comme on le voit en utilisant théorème (4.6).*

ii) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f'(0) > 0$ et qu'il existe $\beta > 0$ avec

$f(0) = f(\beta) = 0$. Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ dans Ω et $\phi_1 > 0$ est la fonction propre associée à la valeur propre λ_1 , normalisée dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Alors pour tout $\lambda > \frac{\lambda_1}{f'(0)}$ le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

admet une solution non triviale $u > 0$ dans Ω. En effet, $\overline{u} = \beta$ est sur-solution et $\underline{u} = \epsilon\phi_1$ est une sous-solution pour $\epsilon > 0$ assez petit.[9]

4.5 Méthodes de compacité et de monotonie

Dans cette section, on va présenter deux types de méthodes pour obtenir des résultats d'existence de solution pour des problèmes elliptiques non linéaires : une méthode de compacité et une méthode de monotonie. On donnera également une méthode pour obtenir un résultat d'unicité.

4.5.1 Méthode de compacité

Idée sur la méthode de compacité

Soit le problème

$$(E) \begin{cases} \mathcal{L}u = f(u) & \text{dans } \ \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\mathcal{L}$ est un opérateur elliptique (on peut avoir $\mathcal{L} = -\Delta$).

L'idée est de reformuler le problème (E) sous la forme d'un problème de point fixe.

Soient X ,Y des espaces de Banach, $T : X \to Y$ une application telle que $Tx = x$.

En utilisant la compacité de l'opérateur T, on peut assurer l'existence d'un point fixe (c'est le résultat qui était démontré par le théorème de point fixe de Brouwer et Schauder, cette théorie c'était la base de la théorie du degré topologique qui elle même donne des résultats similaires que celles du théorème du point fixe).

Degré topologique et théorème de Schauder

Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et un ouvert borné d'un espace de Banach E. Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ (ou $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, E)$) et $y \in \mathbb{R}^N$ (ou $y \in E$). On cherche à montrer qu'il existe $x \in \overline{\Omega}$ tel que $f(x) = y$. On commence par donner l'existence (et l'unicité) d'une application, appelée degré topologique, en dimension finie puis en dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir le théorème d'existence de solution recherché.

Définition 4.3 *Soit $N \geq 1$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets $(f; \Omega; y)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$ telles que. $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 4.12 ***(Brower 1933)***
Soit $N \geq 1$ et A donné par la définition (4.3). Il existe alors une application d de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$, appelée "degré topologique", vérifiant les trois propriétés suivantes :

d1) $d(I; \Omega; y) = 1$ si $y \in \Omega$ (Normalisation).

d2) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{f(x), x \in \overline{\Omega}/\Omega_1 \cup \Omega_2\}$ (Degré d'une union).

d3) Si $h \in \mathcal{C}([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^N)$ et $y \notin \{h(t,x), x \in \partial\Omega\}$(pour tout $t \in [0;1]$), on a alors

$$d(h(t;.);\Omega;y(t)) = d(h(0;.);\Omega;y(0)) \text{ pour tout } t \in [0,1]$$
(Invariance par homotopie).

Remarque 4.11 *Des propriétés du degré topologique (données dans le théorème (4.12)), on déduit deux conséquences très intéressantes :*

1. $d(f;\Omega;y) \neq 0$ *implique qu'il existe* $x \in \Omega$ *tel que.* $f(x) = y$.
2. *Soit* A *une matrice* $N \times N$ *inversible,* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $y \in \mathbb{R}^N$ *tel que* $A^{-1}y \in \Omega$. *On pose* $f(x) = Ax$ *pour* $x \in \mathbb{R}^N$. *On a alors* $(f;\Omega;y) \in \mathcal{A}$ *et* $d(f;\Omega;y) = sign(\det A)$, *par conséquent* $d(f;\Omega;y) \neq 0$.

La remarque (4.11) nous donne une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit $N \geq 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = y$. Pour cela, on construit une application $h : [0;1] \times \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^N$ telle que

1. $h(1,.) = f$.
2. $h(0,.) = g$ avec g linéaire inversible et telle que $y \in \{g(x), x \in \Omega\}$.
3. $h(t,x) \neq y$ pour tout $t \in [0;1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.

On obtient alors $d(f;\Omega;y) = d(g;\Omega;y) \neq 0$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = y$.

On peut remarquer que dans le cas $N = 1$, on trouve le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition 4.4 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach et* T *un opérateur linéaire continu. Un opérateur* T *de* X *dans* Y *est dit compact lorsque* T *envoi toute partie bornée de* X *en une partie relativement compacte de* Y.

Remarque 4.12 *Les applications linéaires compactes généralisent les applications linéaires continues de rang fini. La théorie est particulièrement intéressante pour les espaces vectoriels normés ou les espaces de Banach. En particulier, dans un espace de Banach, l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la topologie forte. Mieux, dans un espace de Hilbert, un opérateur compact est limite d'opérateurs bornés de rangs finis. Les premiers opérateurs compacts sont apparus avec les équations intégrales et l'étude des espaces fonctionnels. La résolution formelle d'équations intégrales simples fait apparaître un opérateur à noyau dont la compacité tient à des propriétés d'équi-continuité. À travers ce problème est apparue une autre classe importante d'opérateurs, les opérateurs de Fredholm.*

Théorème 4.13 *(Application linéaire compacte)* *Soit E un espace de Banach, L une application linéaire compacte de E dans E et Ω un ouvert borné contenant 0. On suppose que*

$$x \in E \;\; Lx = x \implies x \notin \partial\Omega\ . \tag{4.7}$$

Alors $(I - L, \Omega, 0) \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est donné par la définition (4.3)) et $d(I - L, \Omega, 0) \neq 0$.

Noter que, comme L est linéaire, l'hypothèse (4.7) est équivalente à dire $(x \in E, Lx = x) \implies x = 0$, ce qui est équivalent à dire que 1 n'est pas valeur propre de L.

Remarque 4.13 *On peut maintenant, comme en dimension finie, donner une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit E un espace de Banach, un ouvert borné de E contenant 0, $f : \overline{\Omega} \to E$ une application.*

On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ tel que. $x - f(x) = 0$ (quitte à changer f, on peut toujours se ramener à cette forme). Pour cela, on construit une application $h : [0;1] \times \overline{\Omega} \to E$, compacte et telle que

1. *$h(1,.) = f$.*
2. *$h(0,.) = L$avec L linéaire de E de E.*
3. *$x - h(t,x) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.*

Alors $d(I - f, \Omega, 0) = d(I - L, \Omega, 0) \neq 0$ et donc qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = 0$.

Existence avec le degré topologique

On donne maintenant une application du degré topologique, (cette application pourrait d'ailleurs aussi se faire par le théorème de Schauder).On reprend le même problème que dans le paragraphe précédant en supprimant l'hypothèse f bornée qui permettait une application simple du théorème de Schauder. On considère l'équation de diffusion-convection-réaction suivante

$$(E')\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega a(x,u(x))\nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Omega G(x)\varphi(u(x)).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x, \end{cases}$$

qui est la formulation faible du problème suivant

$$(E)\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) - div(G(x)\varphi(u)) = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notons que cette équation est non linéaire pour trois raisons : les termes de diffusion, convection et réaction sont non linéaires. Le premier terme du membre de gauche est le terme de diffusion, le second terme du membre de gauche est le terme de convection et le membre de droite est le terme de réaction. On se place sous les hypothèses suivantes

$$(H) \begin{cases} (i)\Omega \text{ est un ouvert borné de } \mathbb{R}^N, N \geq 1, \\ (ii) \text{ a est tq } a(;s) \text{ est borélienne } \forall s \in \mathbb{R}^p\ , p \in \mathbb{N}^* \text{ et } a(x;) \text{ est continu} \\ (iii)\exists \alpha, \beta > 0, \alpha \leq a(x,s) \leq \beta, \forall s \in \mathbb{R}, \text{pp } x \in \Omega, \\ (iv) G \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), divG = 0, \\ (v)\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists C_1 \geq 0, \text{tel que } |\varphi(s)| \leq C_1|s|, \forall s \in \mathbb{R}, \\ (vi) f \text{ est une Carathéodory, et} \exists C_2 \geq 0, d \in L^2(\Omega), \text{tq}, |f(x,s)| \leq d(x \\ (vii) \lim\limits_{s \to \pm\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = 0. \end{cases}$$

Remarque 4.14 ***(Sur l'existence et l'unicité des solutions de** (E')**)** *Dans le cas où $a \equiv 1$, $\varphi = 0$ et f est de la forme $f(x;s) = d(x) + \lambda s$ où λ est une valeur propre du Laplacien sur avec condition de Dirichet (c'est-à- dire qu'il existe $\omega \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$ tels que $-\Delta\omega = \lambda\omega$ dans $D^\star(\Omega)$) et d'un élément de $L^2(\Omega)$, le problème (E) devient $-\Delta u = \lambda u + d$, avec condition de Dirichlet. Ce problème n'a une solution que si d est orthogonal à l'espace propre associé à λ (et dans ce cas on n'a pas unicité). Ceci s'appelle l'alternative de Fredholm. C'est pour assurer l'existence pour tout d dans $L^2(\Omega)$ qu'on ajoute l'hypothèse de sous-linéarité sur f (hypothèse (vii)).*

Remarque 4.15 ***(Coercivité)*** *Lorsque $divG \neq 0$, le problème peut se traiter de manière similaire à celle donnée dans la démonstration du théorème 4.12 à condition que $divG \leq \lambda_1$ p.p. où λ_1 est la première valeur propre de $u \mapsto -div(\alpha\nabla u)$ avec condition de Dirichlet (cette valeur propre est strictement positive). Sans cette condition, le problème devient plus difficile, même dans le cas linéaire, c'est-à-dire le cas où a et f ne dépendent pas de u avec $\varphi(u) = u$. La difficulté principale est due à l'absence de coercivité de l'opérateur $u \mapsto -div(\alpha\nabla u) - div(Gu)$.*

Théorème 4.14 *(Existence)* *Sous les hypothèses* (H), *il existe une solution de* (E').

La démonstration est assez longue, donc nous allons énoncer les grandes lignes de cette preuve.

Preuve

- On Pose $a(\overline{u}) = a(x, \overline{u})$ et $f(\overline{u}) = f(x, \overline{u})$.
- Considérer le problème

$$\int_\Omega a(\overline{u})\nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega G\varphi(\overline{u}).\nabla v dx = \int_\Omega f(\overline{u}) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.8}$$

1. On applique le théorème de Schauder.
   (a) Définir de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ une application T par $T(\overline{u}) = u$ où u est solution de (4.5.1).
   (b) **Remarque 4.16** *Il est assez facile de montrer que T est continu et même compact. Par contre il est difficile de montrer que T envoie une boule de $L^2(\Omega)$ dans elle-même. Pour cela, il faut obtenir une estimation sur u en fonction de $\overline{u}$.*
      i. $||u||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq ||G||_\infty C_1 ||\overline{u}||_{L^2(\Omega)} ||u||_{H_0^1(\Omega)} + ||d||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)} + C_2 ||\overline{u}||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)}$.
      ii. Montrons que le dernier terme à lui tout seul empêche d'avoir facilement des estimations. Supposons $G = 0$ et $d = 0$, on a alors avec l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\frac{\alpha}{C_\Omega^2} ||u||^2_{L^2(\Omega)} \leq \alpha ||u||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 ||\overline{u}||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)}.$$

Ce qui montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $||u||_{L^2(\Omega)} \leq R$, revient à montrer que toutes les solutions sont dans la boule B_R (boule fermée de centre 0 et de rayon R), ce qui est une estimation uniforme sur toutes les solutions.

(c) On réécrit le problème sous la forme

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla u.\nabla v dx = \langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

où $F(u)$ est, pour $u \in L^2(\Omega)$, l'élément de $H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega G\varphi(u).\nabla v dx + \int_\Omega f(u) v dx.$$

Comme $G \in L^\infty(\Omega)^N$, $|\varphi(s)| \leq C_1|s|$ et $|f(.,s)| \leq d + C_2|s|$, il est facile de voir que l'application F qui à u associe $F(u)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

(d) Pour $s \in H^{-1}(\Omega)$, le problème linéaire

$$(E^*) \begin{cases} \omega \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla \omega.\nabla v dx = \langle S, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

admet une unique solution $\omega \in H_0^1(\Omega)$. On note B_u l'opérateur qui à S dans $H^{-1}(\Omega)$ associe ω solution de (E^*). L'opérateur B_u est linéaire continu de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$. On en déduit que l'opérateur B_u est compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Le problème (E') est équivalent à résoudre le problème de point fixe $u = B_u(F(u))$, On va donc montrer par degré topologique, que le problème suivant admet une solution

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega), . \\ u = B_u(F(u)) \end{cases}$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose $h(t,u) = B_u(tF(u)) \in L^2(\Omega)$. L'application h est ainsi définie de $[0,1] \times L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{u \in L^2(\Omega), ||u||L^2(\Omega) < R\}$. Nous montrons que

i.

$$\exists R > 0, \left\{ \begin{matrix} u - h(t;u) = 0 & , \\ t \in [0,1], u \in L^2(\Omega). & \end{matrix} \right\} \Longrightarrow ||u||_{L^2(\Omega)} < R. \tag{4.9}$$

ii. h est continue de $[0,1] \times \overline{B}_R$ dans $\overline{B}_R$.

iii. $\{h(t,u), t \in [0,1] : u \in \overline{B}_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On va supposer que $||u||_{L^2(\Omega)} < R$, et faire une majoration sur le terme $\langle , \rangle_{(H^{-1},H_0^1)}$ en utilisant l'inégalité de Poincaré et remplacer dans (E^*) afin d'avoir la bonne majoration sur le terme $||\omega||_{H_0^1(\Omega)}$, ce qui entraine que la suite toute suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ est bornée, enfin d'après le théorème de Rellich-Kondrachov $\{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ par la suite $\{h(t,u), t \in [0,1] : u \in \overline{B}_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ vu que $||h(t,u)||_{H_0^1(\Omega)} = ||\omega||_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{R}{\alpha} = \tilde{R}$.

Soit

$$(H') : \exists C_3 > 0, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \begin{cases} |a(x,s_1) - a(x,s_2)| \leq C_3|s_1 - s_2| \text{p.p } , x \in \mathbb{R} \\ |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq C_3|s_1 - s_2|. \end{cases}$$

avec a et φ soient lipschitziennes.

Théorème 4.15 ***(Existence et unicité)*** *Sous les hypothèses (H) et (H'),*

il existe une et une seule solution à (E') .

Preuve

La technique utilisée apparaît pour la première fois dans un article d'Artola en 1985. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (E'). On a donc

$$\int_\Omega a(u_1)\nabla u_1.\nabla v dx + \int_\Omega G\varphi(u_1).\nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{4.11}$$

et

$$\int_\Omega a(u_2)\nabla u_2.\nabla v dx + \int_\Omega G\varphi(u_2).\nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{4.12}$$

L'idée est de prendre $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$ dans (4.11) et (4.12), où $\varepsilon > 0$ et T_ε est la troncature au niveau ε, c-à-d

$$T_\varepsilon(s) = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } s < -\varepsilon, \\ s & \text{si } -\varepsilon < s < \varepsilon, \\ \varepsilon & \text{si } s > \varepsilon. \end{cases}$$

Si u_1 et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, alors $T_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\nabla T_\varepsilon(u_1 - u_2) = \nabla(u_1 - u_2)1_{\{0<|u_1-u_2|<\varepsilon\}}.$$

En prenant $v = T_\varepsilon(u_1 - u_2)$, et en faisant la différence de (4.11) et (4.12), on obtient

$$\int_\Omega (a(u_1)\nabla u_1.\nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)) - a(u_2)\nabla u_2.\nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2)))dx = \int_\Omega G(\varphi(u_2) - \varphi(u_1)).\nabla(T_\varepsilon(u_1 - u_2))dx$$

On pose maintenant $A_\varepsilon = \{0 < |u_1 - u_2| < \varepsilon\}$,

$$\int_{A_\varepsilon} a(u_1)\nabla(u_1-u_2).\nabla(u_1-u_2)dx = \int_{A_\varepsilon}(a(u_2)-a(u_1))\nabla u_2.\nabla(u_1-u_2)dx + \int_{A_\varepsilon} G(\varphi(u_2)-\varphi(u_1)).\nabla(u_1-u_2)dx$$

et puisque $a(u_1) \geq \alpha$ p.p et donc

$$\alpha\int_{A_\varepsilon}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx \leq \int_{A_\varepsilon} C_3|u_2-u_1||\nabla u_2||\nabla(u_1-u_2)|dx + \int_{A_\varepsilon} C_3|u_1-u_2||G||\nabla(u_1-u_2)|dx.$$

On a $|u_1-u_2| \leq \varepsilon$ p.p dans A_ε. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les deux dernières intégrales, on obtient donc

$$\alpha\int_{A_\varepsilon}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx \leq C_3\varepsilon\Big(\int_{A_\varepsilon}|\nabla u_2|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{A_\varepsilon}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} + C_3\varepsilon\Big(\int_{A_\varepsilon}|G|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{A_\varepsilon}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi on pose $a_\varepsilon = \Big(\int_{A_\varepsilon}|G|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{A_\varepsilon}|\nabla u_2|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}$ ceci entraine,

$$\alpha\Big(\int_{A_\varepsilon}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C_3\varepsilon a_\varepsilon.$$

On a aussi,

$$\alpha\Big(\int_{\Omega}|\nabla(T_\varepsilon(u_1-u_2))|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \alpha||\nabla(T_\varepsilon(u_1-u_2))||_{L^2(\Omega)} \leq C_3\varepsilon a_\varepsilon.$$

donc, en désignant par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$,

$$\frac{\alpha}{m(\Omega)^{\frac{1}{2}}}||\nabla(T_\varepsilon(u_1-u_2))||_{L^1(\Omega)} \leq \alpha||\nabla(T_\varepsilon(u_1-u_2))||_{L^2(\Omega)} \leq C_3\varepsilon a_\varepsilon.$$

Comme $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$, on a $T_\varepsilon(u_1-u_2) \in H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ et l'inégalité de Sobolev donne

$$||T_\varepsilon(u_1-u_2)||_{L^{1^*}} \leq ||\nabla(T_\varepsilon(u_1-u_2))||_{L^1(\Omega)}, \text{ avec } 1^* = \frac{N}{N-1}.$$

Ainsi,

$$\frac{\alpha}{m(\Omega)^{\frac{1}{2}}}||T_\varepsilon(u_1-u_2)||_{L^{1^\star}} \leq C_3\varepsilon a_\varepsilon.$$

Si $N = 1$, on a $N = (N-1) = +\infty$ et conclut facilement que $u_1 = u_2$ p.p. Le cas $N \geq 2$ demande un léger développement supplémentaire. On remarque que

$$||T_\varepsilon(u_1-u_2)||_{L^{1^*}} = \left(\int_\Omega |T_\varepsilon(u_1-u_2)|^{1^*}dx\right)^{\frac{1}{1^*}} \geq \left(\int_{B_\varepsilon} \varepsilon^{1^*}dx\right)^{\frac{1}{1^*}} \geq \varepsilon(m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}},$$

avec $B_\varepsilon = \{x, |u_1(x)-u_2(x)| \geq \varepsilon\}$.
On a donc

$$\varepsilon(m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{(m(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{\alpha}C_3\varepsilon a_\varepsilon.$$

et on en déduit que $(m(B_\varepsilon))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4 A_\varepsilon$. Prenons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a $A_{\frac{1}{n+1}} \subset A_{\frac{1}{n}}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}} = \emptyset$, donc $m(A_{\frac{1}{n}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par continuité décroissante d'une mesure). On rappelle que

$$a_{\frac{1}{n}} = \left(\int_{A_{\frac{1}{n}}} |G|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{A_{\frac{1}{n}}} |\nabla u_2|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme $G, |\nabla u_2| \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{\frac{1}{n}} = 0$. On a aussi $B_{\frac{1}{n+1}} \supset B_{\frac{1}{n}}$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_{\frac{1}{n}} = \{|u_1-u_2| > 0\}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} m(B_{\frac{1}{n}}) = m(\{|u_1-u_2| > 0\})$ (par continuité croissante d'une mesure). Comme

$$(m(B_{\frac{1}{n}}))^{\frac{N-1}{N}} \leq C_4 a_{\frac{1}{n}},$$

en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $m(\{|u_1-u_2| > 0\}) \leq 0$, et donc $u_1 = u_2$ p.p, ce qui termine la démonstration.

Une première conséquence de cette méthode de "degré topologique" est le théorème de point fixe de Brouwer que nous donnons maintenant.

4.5.2 Théorème de point fixe et applications

Si f est une application d'un ensemble E dans lui-même, on appelle point fixe de f tout élément x de E tel que $f(x) = x$. De nombreux problèmes, y compris des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, peuvent être (re)formulés sous forme de problème d'existence d'un point fixe pour une certaine application. Nous en verrons des exemples plus loin. On rappelle d'abord le théorème de point fixe de Picard pour une contraction stricte, un résultat élémentaire mais peu utilisé pour les applications que l'on a en vue

Théorème 4.16 *Soit (E,d) un espace métrique complet, $T : E \to E$ une contraction stricte, i.e, telle qu'il existe une constante $k < 1$ telle que*

$$\forall x, y \in E, d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors T admet un point fixe unique $x_0 = T(x_0) \in E$. De plus, pour tout $z \in E$, la suite des itérés $T^m(z) \xrightarrow[m \to +\infty]{} x_0$

[9] Ce théorème, ou des variantes de ce théorème, est néanmoins utile dans le contexte des équations aux dérivées partielles d'évolution, contexte qui ne nous concerne pas ici.[9]

Les théorèmes de point fixe de Brouwer et de Schauder

Le théorème de Brouwer est le théorème de point fixe fondamental en dimension finie. Soit $\overline{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m, ||x|| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$ muni de la norme euclidienne usuelle, et $S^{m-1} = \partial\overline{B}^m$ la sphère. Le théorème de Brouwer affirme que

Théorème 4.17 ***(de Brouwer)*** *Toute application continue de $\overline{B}^m$ dans $\overline{B}^m$ admet au moins un point fixe. [9]*

Notons une amusante illustration « physique » (avec des réserves) du théorème de Brouwer. Si l'on prend un disque de papier posé sur une table, qu'on le froisse sans le déchirer et qu'on le repose sur la table de façon à ce qu'il ne dépasse pas de sa position initiale, alors au moins un point du papier froissé se retrouve exactement à la verticale de sa position de départ. Le théorème de Brouwer est un résultat non trivial, sauf dans le cas $m = 1$ où il se montre très simplement par un argument de connexité. Il en existe plusieurs démonstrations dans le cas général, faisant toutes appel à des notions plus ou moins élémentaires. Nous allons en donner une preuve aussi élémentaire que possible (notion subjective, malgré tout, ce qui est élémentaire pour l'un ne l'est pas forcément pour l'autre). Commençons par le théorème de non-rétraction de la boule sur la sphère — une rétraction d'un espace topologique sur un sous-ensemble de cet espace est une application continue de cet espace à valeurs dans le sous-ensemble et égale à l'identité sur le sous-ensemble — dans le cas d'une application de classe $\mathcal{C}^1$. On verra un peu plus loin qu'il est équivalent au théorème de Brouwer.

Théorème 4.18 *Il n'existe pas d'application $f : \overline{B}^m \to S^{m-1}$ continue telle que l'on ait $f_{|_{S^{m-1}}} = Id$ sachant que $f_{|_{S^{m-1}}}$ est la restriction de f à S^{m-1}.[9]*

Preuve Soit f une telle rétraction. On pose $g(x) = -f(x)$. Alors $g \in \mathcal{C}^0(\overline{B}^m; \overline{B}^m)$ admet un point fixe x_0, lequel satisfait donc $x_0 = -f(x_0)$. Comme f est à valeurs dans la sphère unité, $x_0 \in S^{m-1}$. Comme f est une rétraction, on en déduit que $f(x_0) = x_0$, et donc que $x_0 = 0$, ce qui contredit $||x_0|| = 1$. Finalement, théorème de non rétraction continue de la boule et théorème de Brouwer sont deux résultats équivalents. La boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$ n'est pas le seul ensemble à posséder la propriété de point fixe. On déduit facilement du théorème de Brouwer la propriété suivante.

Théorème 4.19 *Soit K un compact homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$. Toute application continue de K dans K admet au moins un point fixe.*

Preuve *Soit g une application continue de K dans K et soit h un homéomorphisme qui envoie K sur la boule unité fermée. L'application $h \circ g \circ h^{-1}$ est continue de $\overline{B}^m$ dans $\overline{B}^m$. Elle admet donc un point fixe $y = h \circ g \circ h^{-1} \in \overline{B}^m$ Par conséquent, $h^{-1}(y) \in K$ est point fixe de g.*

Donnons une conséquence utile de ce résultat.

Théorème 4.20 *Soit C un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^m$. Toute application continue de C dans C admet au moins un point fixe.*

Remarque 4.17 *i) En général, il n'y a pas unicité du point fixe.*

ii) Il existe des ensembles compacts qui ne possèdent pas la propriété de point fixe. Par exemple, le théorème de Brouwer est visiblement faux dans une couronne circulaire, bien qu'il n'existe pas de rétraction de la couronne circulaire sur son bord. En fait, plus généralement, si X est une variété compacte à bord, alors il n'existe aucune rétraction continue de X sur ∂X.

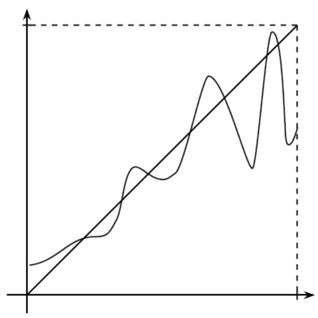

FIGURE 4.1 – Non unicité du point fixe de Brouwer

Théorème 4.21 *Soit E un espace vectoriel normé, C un convexe compact de E et T une application continue de C dans C. Alors T admet un point fixe. [9]*

Théorème 4.22 *Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.*

Preuve *Soit $C' = \overline{convT}(C)$. Il s'agit d'un convexe inclus dans C. En effet, $T(C) \subset C$, donc $convT(C) \subset C$ car C est convexe, et $\overline{convT}(C) \subset C$ car C est fermé. De plus, C' est compact comme enveloppe convexe fermée d'un ensemble relativement compact dans un espace complet. On applique alors le théorème de Schauder à la restriction de T à C'. [9]*

Remarque 4.18 *i) Dans la suite, la mention du théorème de point fixe de Schauder réfèrera indifféremment aux théorèmes (4.21) ou (4.22) (lesquels sont clairement équivalents dans le cas d'un espace de Banach).*

ii) Dans les applications du théorème de Schauder aux problèmes aux limites non linéaires, on dispose d'une certaine liberté. Il faut d'abord reformuler le problème sous forme d'un problème de point fixe d'une certaine application T. Il faut ensuite choisir un espace E sur lequel T soit continue, puis un convexe fermé C tel que T envoie C dans C, qui soit compact ou tel que $T(C)$ soit relativement compact. Notons que pour cette dernière propriété, il suffit parfois de montrer que pour toute suite $x_n \in C$, il existe une sous-suite telle que $T(x_m)$ converge dans E, sans nécessairement montrer que la sous-suite $(x_m)_m$ elle-même converge, ce qui n'est d'ailleurs pas forcément le cas.

Théorème 4.23 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, C un convexe compact de E et T un application continue de C dans C. Alors T admet un point* *fixe. [9]*

Remarque 4.19 *On pourrait penser utiliser le théorème de Tychonov dans la situation suivante. Soit E un espace de Banach réflexif que l'on munit de sa topologie faible. Alors tout convexe fermé borné est compact et l'on a aucune difficulté à ce niveau. Par contre, on rencontrera probablement des difficultés pour montrer qu'une application non linéaire donnée T est continue pour la topologie faible. Ceci limite l'emploi de ce théorème, au moins dans cette situation.[9]*

Résolution d'un problème modèle par une méthode de point fixe

En application des théorèmes de point fixe, nous nous intéressons dans cette section à un problème d'EDP elliptique non linéaire modèle très simple. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit f une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Le problème consiste à trouver une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $D'(\Omega)$. Nous verrons par la suite comment préciser le sens fonctionnel de cette équation. Pour mettre ce problème sous forme d'un problème de point fixe, on commence par énoncer un résultat d'existence et d'unicité linéaire.

Proposition 4.2 *Soit $g \in H^{-1}(\Omega)$ Il existe un unique $v \in H_0^1(\Omega)$tel que $-\Delta u = g$ au sens de $D'(\Omega)$. Cette fonction v est l'unique solution du problème variationnel*

$$\forall w \in H_0^1(\Omega)\ ,\ \int_\Omega \nabla v . \nabla w dx = \langle g, w \rangle. \tag{4.13}$$

De plus, l'application $g \to (-\Delta)^{-1} g = v$ est continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve Pour l'existence, on note que la forme bilinéaire $a(v,w) = \int_\Omega \nabla v.\nabla w dx = \int_\Omega \partial_i v \partial_i w dx$(on utilise la convention de sommation des indices répétés) est continue sur $H_0^1(\Omega)$, qu'elle est $H_0^1(\Omega)$-elliptique par l'inégalité de Poincaré et que la forme linéaire $l(w) = \langle g, w\rangle$est continue sur $H_0^1(\Omega)$ par définition. Le lemme de Lax-Milgram implique donc l'existence et l'unicité de la solution v du problème variationnel. Montrons que cette fonction est solution de l'équation au sens des distributions. Par définition de la dérivation des distributions, Δv est la distribution donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \Delta v, \varphi\rangle = \langle \partial_{ii} v, \varphi\rangle = -\langle \partial_i v, \partial_i \varphi\rangle = -\int_\Omega \partial_i v \partial_i \varphi dx.$$

puisque $\partial_i v \in L^2(\Omega)$ Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ nous avons donc

$$\langle \Delta v, \varphi\rangle = -\langle g, \varphi\rangle \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

c-à-d $\Delta v = -g$. Pour montrer l'unicité, considérons $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta v = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. D'après ce qui précède, ceci signifie que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_\Omega \partial_i v \partial \varphi dx = 0.$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, il existe une suite
$\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} v$. En particulier $\partial_i \varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \partial_i v$. En passant à la limite dans l'intégrale, on voit donc que $\nabla v = 0$, ce qui implique $v = 0$ par l'inégalité de Poincaré. La continuité de l'application $(-\Delta)^{-1}$ découle directement de la formulation variationnelle et de l'inégalité de Poincaré en prenant $w = v$.

Corollaire 4.2 *L'application* $(-\Delta)^{-1}$ *est continue de* $L^2(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.

Preuve *En effet,* $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *(Injection continue). Dans le problème modèle apparaît au second membre de l'équation un terme de la forme* $f(u)$ *dont nous n'avons pas encore précisé le sens. C'est l'objet du théorème de Carathéodory, introduit par un lemme. On note* $\sim$ *la relation d'équivalence de l'égalité presque partout des fonctions mesurables.*

Lemme 4.5 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$*. Pour tout couple de fonctions mesurables* u_1 *et* u_2 *sur* Ω*, si* $u_1 \sim u_2$ *alors* $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$*.*

Preuve *Notons d'abord que si une fonction* u *est mesurable alors* $f \circ u$ *l'est aussi, puisque* f *est continue. Supposons que* $u_1 \sim u_2$*, i.e,* $u_1 = u_2$ *p.p dans* Ω*. Il existe donc un ensemble négligeable* N *tel que si* $x \notin N$*,* $u_1(x) = u_2(x)$*, d'où également* $f(u_1(x)) = f(u_2(x))$*, c-à-d* $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$*. En d'autres termes, on vient de voir que l'application* $u \mapsto f \circ u$ *passe au quotient par la relation d'égalité p.p.*

Théorème 4.24 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ *telle que*
$|f(t)| \leq a + b|t|$*. On définit pour toute classe d'équivalence de fonctions mesurables sur* Ω *la classe d'équivalence* $f(u) = f \circ u$ *comme au lemme précédent. Alors l'application* $u \mapsto f \circ u$ *envoie* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$*et est continue pour la topologie forte.*

Preuve *Si* $u \in L^2(\Omega)$ *alors*

$$\int_\Omega |f(u)|^2 dx \leq 2a^2 mes(\Omega) + 2b^2 ||u||_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

donc $f(u) \in L^2(\Omega)$*. Montrons que l'application ainsi définie est continue de* $L^2(\Omega)$ *fort dans* $L^2(\Omega)$ *fort. Soit* $(u_n)_n$ *une suite convergente dans* $L^2(\Omega)$ *vers une limite* u*. Soit* $(u_m)_m$ *une sous-suite de* $(u_n)_n$*. Extrayons une nouvelle sous-suite* $(u_k)_k$ *qui* *converge presque partout, i.e, il existe un ensemble N de mesure nulle tel que pour tout x n'appartenant pas à N, $u_k(x) \to u(x)$, et telle qu'il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $|u_k(x)| \leq g(x)$ presque partout (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue). Nous avons donc $|f(u_k(x)) - f(u(x))|^2 \to 0$ p.p puisque f est continue et $|f(u_k) - f(u)|^2 \leq 4a^2 + 4b^2g^2 + 2|f(u)|^2$. Le second membre de cette inégalité est une fonction de $L^1(\Omega)$ qui ne dépend pas de k. Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour en déduire que $\int_\Omega |f(u_k) - f(u)|^2 dx \to 0$, c'est à dire que $f(u_k) \to f(u)$ dans $L^2(\Omega)$fort.*

Nous avons montré que de toute sous-suite $\big(f(u_m)\big)_m$, nous pouvons extraire une sous-suite qui converge vers $f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort. L'unicité de cette limite implique que c'est la suite entière $f(u_n)$ qui converge. [9]

Remarque 4.20 *i) L'hypothèse Ω borné n'est pas nécessaire dans cette démonstration. Il suffit clairement que mes$\Omega < +\infty$. De même, les hypothèses que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et que l'on considère la mesure de Lebesgue peuvent visiblement être considérablement généralisées.*

ii) Le théorème de Carathéodory est en fait plus général. Par exemple, soit A un borélien de $\mathbb{R}^N$ et $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\begin{cases} f(.,s) & \text{est mesurable sur } A \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}, \\ f(x,.) & \text{est continue sur } \mathbb{R} \text{ pour presque tout } x \in A, \end{cases}$$

(une telle fonction est dite fonction de Carathéodory). On suppose qu'il existe des exposants $1 \leq p, q < \infty$, une fonction $a \in L^q(A)$ et une constante $b \geq 0$tels que

$$|f(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}} \text{ pour presque tout } x \text{ et tout } s.$$

Alors l'application $u \mapsto \tilde{f}(u)$ définie par $\tilde{f}(u)(x) = f(x,u(x))$ est continue de $L^p(A)$ fort dans $L^q(A)$ fort.

Nous pouvons maintenant attaquer le problème modèle.

Théorème 4.25 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ Il existe au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème $-\Delta u = f(u)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Preuve *On donne une démonstrations utilisant le théorème de point fixe de Schauder. On prend comme espace de Banach de base $E = L^2(\Omega)$. D'après le théorème (4.24), si $v \in E$ alors $f(v) \in E$ (en fait, ici $f(v) \in L^\infty(\Omega)$). $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$. Alors $T : E \to E$ est continue. En effet, elle est composée d'applications continues.*

$$L^2(\Omega) \xrightarrow{\tilde{f}} L^2(\Omega) \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} H_0^1(\Omega) \xrightarrow[\text{continue}]{\text{injection}} L^2(\Omega)$$
$$v \mapsto f(v) \mapsto T(v) \mapsto T(v).$$

Vérifions que tout point fixe de T est une solution de notre problème. Soit donc $u \in L^2(\Omega)$ tel que $T(u) = u$. Comme $T(u) = (-\Delta)^{-1}(f(u))$, on en déduit d'abord que $u \in H_0^1(\Omega)$. D'autre part, par définition de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$, $-\Delta T(u) = f(u)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc u est solution du problème modèle (et réciproquement).

Pour appliquer le théorème de Schauder, il faut encore choisir un convexe. Nous prenons ici $C = \{v \in H_0^1(\Omega)\, ; ||v||_{H_0^1(\Omega)} \leq M\}$ où M est une constante à choisir (on prend ici $||v||_{H_0^1(\Omega)} = ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}$ en utilisant l'inégalité de Poincaré). Par le théorème de Rellich, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, donc C qui est borné dans $H_0^1(\Omega)$, est relativement compact dans E.

De plus, c'est un fermé de E. En effet, si $(v_n)_n \in C$ converge vers $v \in E$, alors $(v_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et contient donc une sous-suite $(v_m)_m$ qui converge faiblement vers un élément de $H_0^1(\Omega)$, lequel ne peut être que v. De plus, la semi-continuité inférieure séquentielle faible de la norme implique que $||v||_{H_0^1(\Omega)} \leq \lim_{m\to+\infty}\inf ||v_m||_{H_0^1(\Omega)} \leq M$, c'est à dire $v \in C$. Par conséquent, C est compact dans E.

Nous allons choisir la constante M pour que $T(C) \subset C$. Il s'agit d'un problème d'estimation de $T(v)$. D'après le théorème de Lax-Milgram, $T(v)$ est solution du problème variationnel.

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla T(v)\nabla w dx = \int_\Omega f(v)w dx.$$

Prenant $w = T(v)$ dans l'équation précédente, il vient

$$||\nabla T(v)||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(v)T(v)dx \leq ||f||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |T(v)|dx$$

(Inégalité de Hölder).

ou bien, puisque $|f(v)T(v)| \leq ||f||_{L^\infty(\mathbb{R})}|T(v)|$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisant que

$$||\nabla T(v)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||f||_{L^\infty(\mathbb{R})} mes(\Omega)^{\frac{1}{2}} ||T(v)||_{L^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C_Ω telle que pour tout z dans $H_0^1(\Omega)$, $||z||_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega ||\nabla z||_{L^2(\Omega)}$. Comme $T(v) \in H_0^1(\Omega)$, obtenons donc, pour tout v dans E,

$$||\nabla T(v)||_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega ||f||_{L^\infty(\Omega)} (mes\Omega)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, il suffit donc de prendre $M = C_\Omega ||f||_{L^\infty(\Omega)}(mes\Omega)^{\frac{1}{2}}$, car $T(E) \subset C$.

Les hypothèses du théorème de Schauder, première version, sont satisfaites, par conséquent, il existe au moins une solution du problème modèle dans l'ensemble C.

Théorème 4.26 *On suppose sous les hypothèses précédentes que f est décroissante. Alors la solution u du problème modèle est unique.*

Preuve Soient u_1 et u_2 deux solutions. D'après le théorème (4.25), elles satisfont donc

$$\forall v_1 \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u_1 v_1 dx = \int_\Omega f(u_1) v_1 dx.$$
$$\forall v_2 \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u_2 v_2 dx = \int_\Omega f(u_2) v_2 dx.$$

Prenons $v_1 = u_1 - u_2$ et $v_2 = u_2 - u_1$ et additionnons les deux équations. Nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) dx \leq 0.$$

puisque l'intégrale du membre de droite est négative à cause de la décroissance de f. Par conséquent, $u_1 = u_2$ par l'inégalité de Poincaré.

Rappelons qu'en général, il n'y a aucune raison pour que l'unicité ait lieu.[9]

4.5.3 Méthodes de monotonie

Introduction

La méthode de monotonie est une méthode basée essentiellement sur le principe du maximum, cette méthode est souvent utilisée pour résoudre quelques problêmes non linéaires, qui ne peuvent pas être résolus par des techniques variationnelles. Pour le problème,

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

dans le cas où f (le second membre) dépend de ∇u, on sait encore prouver l'existence d'une solution avec le théorème de Schauder.

La question est plus difficile dans le cas où a dépend de ∇u. On se place sous les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N , \\ a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \\ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \alpha \leq a(\xi) \leq \beta, \forall \xi \in \mathbb{R}^N , \\ f \in L^2(\Omega) . \end{cases}$$

On cherche à montrer l'existence d'une solution au problème suivant

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\nabla u)\nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Peut-on appliquer le théorème de Schauder ? Pour l'appliquer, il faut l'utiliser dans $H_0^1(\Omega)$ pour que $a(\nabla u)$ ait un sens. Soit $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, par le lemme de Lax Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème

$$(P') \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\nabla \tilde{u})\nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On définit l'opérateur T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ par $T(\tilde{u}) = u$ solution de (P'). L'opérateur T est bien défini de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et

(1) il existe $R > 0$ tel que $||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq R$ pour tout $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$,

(2) l'application T est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, si $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\nabla \tilde{u}_n \to \nabla \tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)^N$ et il n'est pas très difficile de montrer que $T(\tilde{u}_n) \to T(\tilde{u})$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Mais, l'application T n'est (en général) pas compacte (de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). Si on était en dimension finie, les points (1) et (2) suffiraient à montrer l'existence d'une solution. L'idée est donc de considérer des problèmes approchés en dimension finie et de passer à la limite en utilisant la monotonie de l'opérateur (qui est vraie sous des hypothèses données sur a ci-après). [11]

Opérateur de Leray-Lions

On considère ici un cas un peu simplifié des opérateurs de Leray-Lions. On considère les hypothèses suivantes :

1) Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$,$1 < p < +\infty$.

2) $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue,

3) $\exists \alpha > 0$ telle que $a(\xi).\xi \geq \alpha|\xi|^p$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ (Coercivité),

4)

$$\exists C \in \mathbb{R}\,; |a(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1}) \ ,\forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \text{(Croissance),} \tag{4.14}$$

5) $(a(\xi) - a(\eta)).(\xi - \eta) \geq 0$ (Monotonie), $\forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^N)^2$,

6) $\sigma \in L^\infty(\Omega)$, $\exists \sigma_0 > 0$, $\sigma \geq \sigma_0$ p.p,

7) $f \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

Ces hypothèses permettent en particulier de traiter les modèles dits "LES" (Large Eddy Simulations) utilisés en mécanique des fluides. On s'intéresse alors au problème suivant

$$(P^*) \begin{cases} -div(\sigma(x)a(\nabla u(x))) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exemple 4.2 *pour* $\sigma \equiv 1$ $a(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, *le problème s'écrit*

$$\begin{cases} -div(\nabla u) = f & si\ p = 2, \\ -div(|\nabla u|\nabla u) = f & si\ p = 3. \end{cases}$$

Le cas $p = 3$ fait intervenir l'opérateur de Smagoriskii qui apparaît dans les modèles de LES. Le cas p quelconque $-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ s'appelle p-laplacien. Cherchons une forme faible adéquate de (P^*). Remarquons que si $w \in (L^p)^N$ alors, par hypothèse 4)

$$|a(w)| \leq C(1 + |w|^{p-1}) \leq C + C|w|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}.$$

Car $C \in L^\infty$ et $|w|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}} = L^{p'}$ (o` $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Donc si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $\nabla u \in (L^p(\Omega))^N$, et $a(\nabla u) \in (L^{p'}(\Omega))^N$.

Prenons $v \in W_0^{1,p}$, alors $\nabla v \in (L^p)^N$ ceci entraine

$$a(\nabla u).\nabla v = \sum_{i=1}^{N} a_i(\nabla u).\nabla v \in L^1(\Omega).$$

Il est donc naturel de chercher $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et de prendre les fonctions test dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

La forme faible qu'on considère est donc

$$(P_1^*) \begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla u).\nabla v dx = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} = \int_\Omega f v dx. \end{cases}$$

Exemple 4.3 *$f \in L^{p'}(\Omega)$, on pose, par abus de langage*

$$\langle T_f, v \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} = \langle f, v \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} = \int_\Omega f v dx.$$

On a donc identifié $T_f \in W^{-1,p'}$ avec $f \in L^{p'}(\Omega)$.

Théorème 4.27 ***(Existence et unicité)*** *Sous les hypothèses (4.14), il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de (P_1^*). Si de plus a est strictement monotone, c'est à dire $(a(\xi) - a(\eta))(\xi - \eta) > 0$ $\forall(\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^N)^2$, alors il existe une unique solution u de (P_1^*). [11]*

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin des lemmes (classiques) d'intégration suivants.

Lemme 4.6 ***(Convergence forte et faible)*** *Pour* $1 < p < +\infty$ $p' = \frac{p}{p-1}$*, si* $f_n \to f$ *et* $g_n \rightharpoonup g$ *dans* $L^p(\Omega)$ *Alors*

$$\int_\Omega f_n g_n dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega fg dx.$$

[11]

Remarque 4.21 *On rappelle que par contre si* $f_n \rightharpoonup f$ *et* $g_n \rightharpoonup g$ *dans* $L^p(\Omega)$ *on a pas toujours,* $\int_\Omega f_n g_n dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega fg dx.$

Pour avoir une idée sur la démonstration voir [5].

Lemme 4.7 *Si* $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$*,* $a(\xi) \leq C(1 + |\xi|^{p-1})$ *et si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{W_0^{1,p}(\Omega)} u$ *alors* $\nabla u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p(\Omega)} \nabla u.$

Ce lemme se démontre par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On rappelle aussi que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont réflexifs pour $1 < p < +\infty$, et donc pour toute suite bornée d'un de ces espaces, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. On rappelle enfin que les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont séparables, i.e ils contiennent une partie dénombrable dense, ce qui va nous permettre l'approximation par des problèmes de dimension finie. On aura également besoin pour la démonstration du lemme suivant.

Lemme 4.8 ***(Opérateur coercif dans*** $\mathbb{R}^N$***)*** *Soit* $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *continue et coercif, c'est à dire*

$$\frac{Tv.v}{v} \xrightarrow[|v|\to+\infty]{} +\infty, \text{ avec . désigne le produit scalaire.}$$

Soit $b \in \mathbb{R}^N$*, il existe* $v \in \mathbb{R}^N$*,* $Tv = b$*. L'opérateur est donc surjectif. [11]*

Preuve On utilise le degré topologique de Brouwer (car on est en dimension finie). On pose $h(t,v) = tTv+(1-t)v$. Pour $t = 0$, on a $h(0,v) = v$ (c-à-d $h(0,v) = Id$ où Id est l'opérateur $v \mapsto v$) quand $t = 1$ on a $h(1,v) = Tv$. Pour appliquer le degré, on remarque d'abord que l'application $h : [0,1] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue (car T est continue).
On veut ensuite montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$t \in [0,1], v \in \mathbb{R}^N \text{ et } h(t,v) = b \implies |v| < R. \tag{4.15}$$

On suppose qu'on a démontré ceci, et quitte à augmenter R, on peut toujours supposer que $|b| < R$. Par invariance par homotopie du degré, on a donc que $d(h(t,.), B_R, b)$ ne dépend pas de t, et donc
$d(T, B_R, b) = d(I, B_R, b) = 1 \neq 0$. On en déduit l'existence de $v \in B_R \subset \mathbb{R}^N$ tel que $T(v) = b$. Il reste à qu'il existe $R > 0$ vérifiant (4.13). Soit $t \in [0,1]$ et $v \in \mathbb{R}^N$, $h(t,v) = b$, c'est-à-dire $tTv + (1-t)v = b$. On a donc $tT(v).v + (1-t)v.v = b.v \leq |b||v|$ et donc

$$\text{si } v \neq 0,\ t\frac{T(v).v}{|v|} + (1-t)|v| = t\frac{T(v).v}{|v|} + (1-t)\frac{v.v}{|v|} \leq |b|.$$

Comme $\frac{T(w).w}{|w|} \to +\infty$ lorsque $|w| \to +\infty$, il existe $R > 0$ tel que.

$$|w| \geq R \implies min\left(\frac{T(w).w}{|w|}, |w|\right) > |b|.$$

On en déduit que $|v| < R$. Ceci termine la démonstration.

Ce lemme se généralise à n'importe quel espace de dimension finie

Lemme 4.9 ***(Opérateur coercif en dimension finie)*** *Soit E un espace de dimension finie, et $T : E \to E'$ continue (noter que $dimE' = dimE < +\infty$). On suppose que T est coercif, c'est-à-dire*

$$\frac{\langle T(v),v\rangle_{(E',E)}}{||v||_E} \xrightarrow[||v||_E\to+\infty]{} +\infty.$$

Alors, $\forall b \in E'$ *il existe* $v \in E$ *tel que,* $T(v) = b$.

Preuve On se ramène à $\mathbb{R}^N$. Soit $N = dimE$. On choisit une base de E, notée $(e_1, \ldots, e_N)$, et on note $(e_1^*, \ldots e_N^*)$ la base duale de E' (c'est-à-dire $(e_i^*, e_i)_{(E',E)} = \delta_{ij}$). On définit une application $I : \mathbb{R}^N \to E$ et une application $J : \mathbb{R}^N \to E'$ par

$$I(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \text{ et } J(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i e_i^* \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^N.$$

L'opérateur I est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans E et l'opérateur J est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans E'. Soit $\tilde{T} = J^{-1} \circ T \circ I$, L'opérateur $\tilde{T}$ est continu de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^N$. On pose $v = I(\alpha)$ et $\beta = \tilde{T}(\alpha)$ (donc $\beta = J^{-1}(T(v))$). On a donc

$$\tilde{T}(\alpha).\alpha = \beta.\alpha = \sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i = \langle \sum_{j=1}^N \beta_j e_j^*, \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \rangle_{(E',E)} =$$

$$\langle J(\beta), I(\alpha)\rangle_{(E',E)} = J(\beta)\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\right) = \langle T(v), v\rangle_{(E',E)}.$$

En prenant comme norme sur $\mathbb{R}^N$, $||\alpha|| = ||I(\alpha)||_E$, l'hypothèse de coercivité sur T donne alors

$$\lim_{||\alpha||\to+\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha).\alpha}{||\alpha||} = +\infty.$$

Par équivalence des normes en dimension finie, on a donc aussi

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \frac{\tilde{T}(\alpha).\alpha}{|\alpha|} = +\infty.$$

On peut donc appliquer le lemme 4.9 à $\tilde{T}$. Soit $b \in E'$. On pose $\beta = J^{-1}(b)$. Le lemme 4.9 donne l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}^N$ telle que $\tilde{T}(\alpha) = \beta$. On pose $v = I(\alpha)$ et on a alors

$$T(v) = T \circ I(\alpha) = J \circ \tilde{T}(\alpha) = J(\beta) = b\ .$$

On a ainsi montré l'existence de $v \in E$ tel que $T(v) = b$.

Pour démontrer le théorème (4.27) on suit les étapes suivantes :

1. **On montre l'existence de la solution** ici on a deux cas :
   (a) **Montrer l'existence de la solution en dimension finie**
   L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable donc dans cette étape on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on cherche un solution du problème suivant, posé en dimension finie :
   $$(P_{1,n}^*) \begin{cases} u_n \in E_n, \text{tel que }, \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla u_n).\nabla v dx = \langle f, v\rangle_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}} = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in E_n \end{cases}$$
      i. Définir l' opérateur T_n et montrer qu'il est continue coercif.
      ii. faire le passage à la limite.

   (b) **Montrer l'existence de la solution en dimension infinie**
   On a montré l'existence d'une solution au problème $(P_{1,n}^*)$. On fait un passage à la limite sur ce problème lorsque $n \to +\infty$, pour montrer l'existence d'une solution au problème (P_1^*). Pour cela nous allons :
      i. Obtenir une estimation sur u_n, qui nous permettra d'obtenir de la compacité.
      ii. Effectuer un passage à la limite sur les problèmes $(P_{1,n}^*)$ de manière à avoir l'existence d'une solution u du problème.
      iii. Pour pouvoir faire la limite sur le terme non linéaire nous utilisons soit l'astuce de Minty soit par la méthode de Leray-lions, en utilisant l'hypothèse 5) (monotonie) de (4.14).

2. **L'unicité de la solution :** on suppose par l'absurde qu'ils existent deux solutions u_1 et u_2 telles que :

$$(P^*_{1,i}) \begin{cases} u_i \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma a(\nabla u_i).\nabla v dx = \langle f, v\rangle_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}} = \int_\Omega f v dx \quad \forall i \in \{1,2\}. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations ,on pose $v = u_1 - u_2$, on obtient

$$\int_\Omega \sigma(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)).\nabla(u_1 - u_2)dx = 0.$$

Or $Z = \sigma(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)).\nabla(u_1 - u_2) \geq 0$, et $Z > 0$ si $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$ on a donc $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p et donc $u_1 = u_2$ car u_1,$u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 4.22 *Dans le cas des opérateurs de Leray - Lions, lorsque a dépend de x, ∇u mais aussi de u, on arrive encore à montrer des résultats d'unicité si $p \geq 2$.*

Exemple 4.4 ***(Le degré d'une application affine)*** *Soient E un espace de Banach. Pour $R > 0$, on pose $B_R = \{v \in E : ||v||_E < R\}$, $f : E \to E$ une application constante, il existe donc $a \in E$ telle que $f(v) = a$ pour tout $v \in E$. Soit $R > 0$ où $||a||_E \neq R$.*

1. *Montrons que $d(I - f, B_R, 0)$ est bien défini et que $d(I - f, B_R, a) = 1$ si $R > ||a||_E$ et $d(I - f, B_R, a) = 0$ si $R < ||a||_E$.*

   Il est clair que f est continue et compacte et que $u - f(u) = 0$ si et seulement si $u = a$. Si $||a||_E \neq R$, $d(I - f; B_R, a)$ est donc bien défini. Si $R < ||a||_E$, l'équation $u - f(u) = 0$ n'a pas de solution dans B_R et donc $d(I - f, B_R, 0) = 0$. Si $R > ||a||_E$, on pose $h(t, v) = tf(v)$. La fonction h est continue et compacte de $[0, 1] \in E$ dans E et l'équation

$u = tf(u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R pour $t \in [0,1]$ (car l'unique solution de $u = tf(u)$ est ta). On a donc

$$d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1,.), B_R, 0) = \\ d(I - h(0,.), B_R, 0) = d(I, B_R, 0) = 1.$$

2. *Soit L une application linéaire compact de E dans E. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de L. Soit $a \in E$. On définit f de E dans E en posant $f(v) = Lv + a$ pour tout $v \in E$.*

   (a) *Montrons que l'équation $u - f(u) = 0$ a au plus une solution.*

   Supposons par l'absurde qu'il existe au moins deux solutions $u_1, u_2 \in E$ telles que $u_1 - f(u_1) = 0$ et $u_2 - f(u_2) = 0$. En posant $u = u_1 - u_2$ on a donc $u - Lu = 0$. Comme 1 n'est pas valeur propre de L, on a donc $u = 0$. Ce qui prouve bien que $u - f(u) = 0$ admet une unique solution .

   (b) *Montrons que l'équation $u - f(u) = 0$ a une unique solution. On note b cette solution. Montrons que $d(I - f, B_R, 0) \neq 0$ si $R > ||b||_E$ et $d(I - f, B_R, 0) = 0$ si $R < ||b||_E$.*

   On pose $h(t,u) = Lu + ta$. La fonctionh : $[0,1] \times E \to E$ est continue et compacte. Soit $R > 0$. L'équation $u = h(0,u)$ n'a pas de solution sur ∂B_R (car 1 n'est pas valeur propre de L).

   Si l'équation $u = h(t,u)$ n'a pas de solution pour $t \in]0,1]$ sur ∂B_R, on a

$$d(I - f, B_R, 0) = d(I - h(1,0), B_R, 0) = \\ d(I - L, B_R, 0) \neq 0,$$

d'après le théorème (4.13). Il existe donc $u \in B_R$ *tel que* $u - f(u) = 0$. *D'autre part, si l'équation* $u = h(t, u)$ *a une solution sur* ∂B_R *pour un* $t \in]0, 1]$. *On note* c *cette solution et on remarque* $(\frac{c}{t}) - f(\frac{c}{t}) = 0$.

Dans tous les cas, on a donc montré qu'il existe $u \in E$ *tel que.* $u - f(u) = 0$. *Enfin, il est facile de voir que* $d(I - f, B_R, 0) = d(I - L, B_R, 0) \neq 0$ *si* $R > ||b||_E$ *et* $d(I - f, B_R, 0) = 0$ *si* $R < ||b||_E$.

(voir [11])

Perspectives

La méthode de monotonie est connue aussi comme la méthode des sur et sous-solutions est une méthode basée essentiellment sur le principe du maximum, cette méthode est souvent utilisée pour résoudre quelques problèmes non linéaires, qui ne peuvent pas être résolus par des techniques variationnelles.

Bibliographie

[1] G.ALLAIRE-F.ALOUGES, Polycopié du cours MAP 431, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, Département de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, Année 2015-2016, Pages 20-26.

[2] A.Bensedik, Gours théorème du Col, Théorie de régularité, M2-EDP et applications , U.A.B.Tlemcen, 2018-2019.

[3] A.Taik, Cours : Équations aux dérivées partielles Méthodes des différences finies,AN3 LST-MI, Département de Mathématiques, FST-Mohammedia, 2008, Page 5.

[4] J.M.Bony, Cours d'analyse théorie des distributions et analyse de Fourier , Ellipses, L'école polytechniques, Paris, 2001.

[5] H.Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et application , 2^e tirage, Masson,Paris-New York -Barcelone-Milan-Mexico Sao Paulo,1987, Pages 149,150,171,199,200.

[6] E.Darrigrand, Equation aux dérivées partielles elliptiques, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, Version du 19 janvier 2015, Pages 41-46.

[7] I.Ghaffour, Régularité des Solutions d'EDPs Elliptiques : Inégalité de Caccioppoli, Thèse de Master, EDPs et applications, U.A.B-Tlemcen, 2010-2011, Pages 11,12.

[8] D.Gilbarg-N.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equation of Second Order,Springer, Berlin-New York, 1998 , 532 pages.

[9] H.Le Dret. Notes de cours M2—Équations aux dérivées partielles elliptiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris,

4 mars 2010, Pages 7,8,11,13,16,17,19-25,77,78,82,83,85-86,89-91,93-98.

[10] A.Lesfari, Introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP) (Master Maths), Université Chouaïb Doukkali, El Jadida, Maroc, 2014-2017, Pages 2,4,5,8,17-21,51,52.

[11] G.Thierry, Équations aux dérivées partielles, Master 2 de mathématiques, Université Aix Marseille, 30 octobre 2013, PageS 28,29,78-101,110 .