

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
Université Abou-Bekr BELKAID – Tlemcen



Faculté de Technologie
Département de Génie civil

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

Mohammed DJELIL

**Décomposition modale des phénomènes
d'instabilité des profils en acier formés à froid
par la méthode des splines bandes finies**

Soutenue le 23/11/2019 devant le jury composé de

MEGNOUNIF A.	Prof.	Univ. Tlemcen	Président
BOUMECHRA N.	Prof.	Univ. Tlemcen	Examineur 1
BOURAHLA N.	Prof.	ENP Alger	Examineur 2
KERDAL D. E.	Prof.	UST Oran	Examineur 3
DJAFOUR M.	Prof.	Univ. Tlemcen	Directeur
MATALLAH M.	Prof.	Univ. Tlemcen	Co-Directeur
DJAFOUR N.	MCB	Univ. Tlemcen	Co-Encadreur

À la mémoire de notre cher et regretté Prof. Mustapha DJAFOUR

Remerciements

Je tiens d'abord à rendre hommage à mon directeur de thèse, Prof. Mustapha DJAFOUR, qui m'a toujours témoigné de sa confiance et de son aide. Pendant toutes ses années, j'ai eu la chance de travailler au côté d'un chercheur de haute qualité humaine, très compétent et passionné par la recherche scientifique. Il a su me transmettre la capacité à surmonter les difficultés dans la recherche. Malgré l'importance de ses responsabilités, il a été toujours disponible pour mes questions. Sans lui, cette thèse n'aurait sûrement pas vu le jour. Que Dieu le Tout-Puissant lui accorde sa miséricorde.

J'exprime toute ma reconnaissance également à M. Mohammed MATALLAH, Professeur au département de Génie civil et à Mme Naoual DJAFOUR, Maître de conférences au département de Génie civil de l'université Abou-Bekr Belkaid pour avoir accepté de diriger cette thèse dans sa phase finale et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de recherche.

Je remercie vivement M. Abdellatif MEGNOUNIF, Professeur au département de Génie civil de l'université Abou-Bekr Belkaid, pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Mes plus vifs remerciements vont également aux examinateurs, M. Nadir Boumechra, Professeur au département de Génie civil de l'université AbouBekr Belkaid, M. Noureddine BOURAHLA, Professeur à l'École Nationale Polytechnique d'Alger et M. Djamel Eddine KERDAL, Professeur au département de Génie civil de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf. Leurs idées et analyses critiques ont contribué à l'enrichissement de ce travail.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement ma famille pour son soutien et ses encouragements. C'est son amour qui m'a aidé à surmonter les moments les plus difficiles.

Table des matières

ملخص.....	ix
Résumé.....	x
Abstract.....	xi
Liste des Tableaux	xii
Liste des Figures	xiii
Principales notations	xvii
Chapitre 1	1
Introduction	1
1.1 Contexte – Problématique.....	1
1.2 Objectifs – Contributions.....	6
1.3 Plan de la thèse.....	8
Chapitre 2.....	11
Profilés formés à froid : Particularités	11
2.1 Introduction.....	11
2.2 Les trois instabilités de base	12
2.2.1 Introduction.....	12
2.2.2 L’instabilité locale	12
2.2.3 L’instabilité globale.....	13
2.2.4 Instabilité distorsionnelle.....	13
2.2.5 Commentaires	14
2.3 Règles de calcul des profilés formés à froid.....	16
2.3.1 Introduction.....	16
2.3.2 Le concept de largeur efficace	17
2.3.3 La méthode de résistance directe (DSM)	23
2.4 La méthode des bandes finies classique : Un outil important dans l’étude de la stabilité des profilés formés à froid	30
2.5 L’identification visuelle des modes purs d’instabilité	32
2.5.1 Règles pratiques	32
2.5.2 L’incertitude dans l’identification des modes purs d’instabilité	34

2.5.2.1	Exemple (a).....	34
2.5.2.2	Exemple (b).....	35
2.5.2.3	Exemple (c).....	36
2.5.2.4	Exemple (d).....	37
2.5.2.5	Exemple (e).....	38
2.5.2.6	Discussion.....	39
2.6	Décomposition et identification modale : Un nouvel outil dans la compréhension et la conception des profilés formés à froid.....	40
2.6.1	Introduction.....	40
2.6.2	Principe.....	40
2.6.3	Exemples d'application de la MBFc.....	44
2.6.4	Applicabilité de la MBFc dans la procédure de dimensionnement des PFF 48	
2.6.5	Autres travaux de recherches sur la décomposition modale.....	53
2.7	Conclusion.....	56
Chapitre 3	58
La méthode des splines bandes finies conventionnelle	58
3.1	Introduction.....	58
3.2	Justification du choix de la méthode des splines bandes finies.....	59
3.3	Travaux de recherches basés sur la méthode des splines bandes finies.....	62
3.4	La méthode des splines bandes finies : la théorie.....	63
3.4.1	La fonction spline.....	63
3.4.2	Champ de déplacement.....	65
3.4.3	Modélisation – Fonctions d'interpolation.....	66
3.4.4	Matrices de rigidité.....	69
3.4.5	Matrices de rigidité géométrique.....	70
3.4.6	Transformation et assemblage.....	72
3.4.7	Solution de l'équation de la stabilité.....	73
3.5	Le programme élaboré.....	73
3.5.1	Une nouvelle version de SHEBA.....	73
3.5.2	Exemple numérique.....	75
3.5.2.1	La colonne étudiée et sa modélisation.....	75

3.5.2.2	Résultats et commentaires	76
3.6	Conclusion	78
Chapitre 4	80
La méthode des splines bandes finies contrainte : Dérivation	80
4.1	Introduction.....	80
4.2	Principe	81
4.3	Dérivation de \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D	82
4.3.1	Introduction.....	82
4.3.2	Dérivation de \mathbf{R}_{GD}	82
4.3.2.1	Introduction.....	82
4.3.2.2	La matrice de rigidité élastique dans l'espace GD : $\mathbf{K}_{E,GD}$	83
4.3.2.3	La matrice de contrainte pour les DDL membranaires	84
4.3.2.4	Applications de la matrice de contrainte pour les degrés de liberté membranaires à la matrice de rigidité globale $\mathbf{K}_{E,GD}$	90
4.3.2.5	Dérivation de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD}	91
4.3.3	Décomposition de l'espace GD	92
4.3.3.1	Introduction.....	92
4.3.3.2	Dérivation de \mathbf{R}_G	92
4.3.3.3	Dérivation de \mathbf{R}_D	94
4.4	Dérivation de \mathbf{R}_L	95
4.5	Dérivation de \mathbf{R}_O	96
4.6	Conclusion.....	98
Chapitre 5	100
La méthode des splines bandes finies contrainte : Applications	100
5.1	Introduction.....	100
5.2	Un premier exemple de validation : Section en C.....	101
5.3	Algorithme d'optimisation du modèle splines bandes finies.....	104
5.3.1	Introduction.....	104
5.3.2	Optimisation du nombre des nœuds de la section transversale.....	104
5.3.3	Optimisation du nombre des sections nodales (ou sections splines) par demi-onde.....	105
5.4	Résultats de l'espace L et GD	107

5.4.1	Section en I soumise à une flexion.....	107
5.4.2	Section transversale avec des branches et des parties fermées	110
5.4.3	Section fermée ramifiée	112
5.5	Décomposition de l'espace GD	114
5.5.1	Introduction.....	114
5.5.2	Trois sections en C additionnelles : Section CS2, CS3 et CS4.....	114
5.5.3	Section creuse rectangulaire (RHS)	117
5.5.3.1	Introduction.....	117
5.5.3.2	Torsion des sections fermées	118
5.5.3.3	Exemples de validation	119
5.5.4	Calcul des modes globaux individuels	125
5.6	Une approche alternative de décomposition de l'espace D	131
5.7	Discussion sur l'applicabilité de la MSBFc dans la procédure de dimensionnement des PFF.....	132
5.8	Un nouvel outil de conception des PFF basé sur la MSBFc.....	134
5.9	Conclusion.....	137
	Conclusions générales.....	139
	Références.....	141

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الرسالة هو تقديم طريقة رقمية جديدة تسمى (constrained spline Finite Strip Method). تسمح هذه الطريقة بالتصنيف التلقائي لأنماط الانبعاج لحساب حمولاتها المرنة باستعمال أسلوب الشرائط المحدودة من نوع (Splines Bandes Finies). تركز هذه الطريقة على مصفوفات لتعريف مختلف أنواع الانبعاج حيث تم عرض تعريفات سهلة لأنواع الانبعاج مستقلة عن الطريقة و عن النموذج الرقمي. كما أن الطريقة المقترحة تحافظ على سهولة التعامل مع الشرائط و خصوصياتها و كذا ترقيم العقد مما جعلها تسمح بدراسة الأعمدة و روافد الحديد المشكل على البارد من مختلف الأشكال، فهي تستطيع دراسة حتى الأشكال المغلقة. من أجل التحقق من صحة المنهج المقترح، تم إجراء عدة اختبارات لدراسة العناصر الهيكلية الخاضعة لمختلف أنواع الضغوط. النتائج المتحصل عليها مماثلة لتلك المتحصل عليها من مختلف الطرق الرقمية المتوفرة (cFSM و GBT). تناقش الدراسة أيضا بعض الجوانب العلمية لكيفية عزل مختلف أنواع الانبعاج و كذا قابلية استعمال هذه التقنية في تحديد حمولة الأعمدة روافد الحديد المشكل على البارد باستخدام طريقة (DSM).

الكلمات المفتاحية: الانبعاج، الحديد المشكل على البارد، أسلوب الشرائط المحدودة من نوع Splines مع الإرغام التصنيف التلقائي لأنماط الانبعاج.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'introduire « la méthode des splines bandes finies contrainte ». L'approche proposée est une nouvelle version de la méthode des splines bandes finies qui permet le classement automatique des principaux modes de flambement des éléments de structures à parois minces. En utilisant certaines hypothèses mécaniques, le modèle spline bande finies est contraint à forcer l'apparition d'un mode d'instabilité spécifique, par exemple forcer l'élément de structure à se déformer en mode local ou en mode distorsionnel. Les différentes matrices de contrainte définissant les trois instabilités de base (Local, distorsionnel et global) sont formulées dans le contexte de la méthode des splines bandes finies pour le cas des structures à parois minces avec une forme arbitraire et des conditions aux limites standard. Ainsi, l'équation de stabilité de la méthode des splines bandes finies est contrainte à la classe d'instabilité choisie et l'analyse est ensuite exécutée. Afin de valider l'approche proposée, plusieurs exemples numériques de décomposition modale sont présentés pour des éléments de structure soumis à des contraintes de compression ou de flexion. Les résultats obtenus prouvent que l'approche développée permet d'estimer correctement les charges (moments) critiques des modes purs d'instabilité. Certains aspects pratiques sur la façon de contraindre un modèle splines bandes finies sont également discutés avec l'applicabilité de la nouvelle technique de décomposition modale dans la procédure de conception des éléments en acier formés à froid.

Mots clés : Profilés formés à froid, Stabilité, Décomposition modale, Splines bandes finies, Splines bandes finies contrainte.

Abstract

The present work aims at introducing the constrained spline Finite Strip Method. The proposed approach is basically a spline Finite Strip Method (spline FSM) that allows the modal decomposition. Similarly to the constrained Finite Strip Method (cFSM), some mechanical assumptions are made in order to constrain the general spline FSM model to buckle in specific modes, for example to enforce the member to buckle in the local- plate mode, or distortional mode. The constraint matrices that define the local (L), distortional (D) and global (G) modes for thin-walled members with arbitrary cross-section are derived in the context of the spline FSM. The implementation of the mechanical criteria is done by using FEM procedure rather than the cFSM one. Moreover, some practical aspects on how to constrain a spline FSM model are also discussed, including how to force the torsional mode of closed cross-sections. Numerical examples of modal decomposition are provided for a column - beam problem, with standard boundary conditions. The critical buckling loads obtained are found to be in good agreement with those calculated via the cFSM and the Generalized Beam Theory (GBT). A discussion on the applicability of csFSM in cold-formed steel member design is also given.

Keywords : Cold-formed steel, stability, modal decomposition, spline Finite Strip Method, constrained spline Finite Strip Method.

Liste des Tableaux

Tableau 2-1 Modélisation des parois d'une section transversale (CEN, 2006)	19
Tableau 2-2 Critères mécaniques utilisés dans la MBFc pour les 4 classes d'instabilité.....	42
Tableau 2-3 Les dimensions retenues dans l'approche de (Beregszászi and Ádány, 2011).	50
Tableau 2-4 Facteurs de correction : Cas des éléments soumis à une compression uniforme (Beregszászi and Ádány, 2011)	53
Tableau 2-5 Facteurs de correction : Cas des éléments soumis à une flexion pure (Beregszászi and Ádány, 2011)	53
Tableau 3-1 Les B3-splines modifiées vérifiant les conditions aux limites.	69
Tableau 4-1 Résumé des différentes situations possibles (Djafour, 2015).....	88

Liste des Figures

Figure 1-1	Forme des sections ouvertes en acier formé à froid.	2
Figure 1-2	La modélisation des profilés en acier formés à froid comme structures à parois minces.....	3
Figure 1-3	Exemples d'instabilité globale : (a) flexionnelle et (b) flexionnelle-torsionnelle. 4	
Figure 1-4	Les deux instabilités harmoniques : (a) locale et (b) distorsionnelle.	4
Figure 1-5	Largeurs efficaces de section en C fléchie et comprimée (les parties noircies sont inefficaces).....	5
Figure 2-1	Instabilité locale d'une section en C uniformément comprimée.....	13
Figure 2-2	Instabilités globales d'une section en C uniformément comprimée.....	13
Figure 2-3	Instabilité distorsionnelle d'une section en C uniformément comprimée.....	14
Figure 2-4	Modes d'instabilité d'une section en C soumise à un effort axial (Dubina, 2002).	15
Figure 2-5	Élément plan raidi uniformément comprimé.....	17
Figure 2-6	Evolution de la distribution des contraintes lors du chargement d'un élément raidi.....	17
Figure 2-7	Largeur efficace d'un élément plan raidi uniformément comprimé.....	19
Figure 2-8	Détermination de la rigidité du ressort.....	20
Figure 2-9	Raidisseur de bord.....	22
Figure 2-10	Largeurs et épaisseurs efficaces de section en C fléchie.....	23
Figure 2-11	Courbes de résistance pour les instabilités locale et distorsionnelle (a) cas de la compression (b) cas de la flexion.	27
Figure 2-12	Courbe de signature et identification des charges critiques : Résultat typique de la MBF.....	31
Figure 2-13	Forces critiques de l'exemple (a) (Ádány, 2004).	35
Figure 2-14	Sections déformées de l'exemple (a) à différentes longueurs de demi-ondes (Ádány, 2004).	35
Figure 2-15	Forces critiques de l'exemple (b) (Ádány, 2004).	36
Figure 2-16	Sections déformées de l'exemple (b) à différentes longueurs de demi-ondes (Ádány, 2004).	36
Figure 2-17	Forces critiques de l'exemple (c) (Ádány, 2004).....	37
Figure 2-18	Sections déformées de l'exemple (c) à différentes longueurs de demi-ondes (Ádány, 2004).....	37
Figure 2-19	Forces critiques de l'exemple (d) (Ádány, 2004).....	38
Figure 2-20	Sections déformées de l'exemple (d) à différentes longueurs de demi-ondes (Ádány, 2004).....	38
Figure 2-21	Forces critiques de l'exemple (e) (Ádány, 2004).....	39
Figure 2-22	Sections déformées de l'exemple (e) à différentes longueurs de demi-ondes (Ádány, 2004).....	39
Figure 2-23	Modes individuels d'une section en C obtenus par la MBFc.....	44

Figure 2-24 Décomposition et identification modale d'une colonne simplement appuyée : (a) décomposition modale et (b) identification modale.	45
Figure 2-25 (a) Décomposition et (b) identification modales de l'exemple (a) (Djafour, 2007).	46
Figure 2-26 (a) Décomposition et (b) identification modale de l'exemple (e) (Djafour, 2007).	47
Figure 2-27 Identification modale d'une colonne bi-encasté (avec $L=2450$ mm).	48
Figure 2-28 Courbe de signature et choix des moments critiques (Li and B. W. Schafer, 2010a)	49
Figure 2-29 Formes de sections couvertes par la procédure proposée : section en C, section en C avec raidisseur d'âme, section en Z, section en chapeau (Omégas) et les montants des rayonnages.	50
Figure 3-1 B3-spline à intervalles (a) inégaux et (b) égaux (c) les trois sections splines concernées par les conditions aux limites – la limite est k	65
Figure 3-2 (a) Une fonction B3-spline à intervalles égaux et (b) une combinaison linéaire de B3-splines.....	66
Figure 3-3 Modélisation en bandes d'une structure à parois minces.	67
Figure 3-4 Une B3-spline bande finie typique.....	67
Figure 3-5 Chargement de base sur une B3-spline bande finie.	72
Figure 3-6 Interface du logiciel SHEBA (Version 1.1): Prétraitement.....	74
Figure 3-7 Interface du logiciel SHEBA (Version 1.1): Post-traitement.....	75
Figure 3-8 Interface du logiciel SHEBA (Version 1.2): Le préprocesseur.....	75
Figure 3-9 Géométrie de la section en C baptisée « CS1 » (a) avec son maillage MSBF (b).	76
Figure 3-10 Les courbes de flambement du premier mode de l'exemple CS1.....	77
Figure 3-11 Formes déformées de la section « CS1 » soumise à une compression uniforme à différentes longueurs physiques (a) $L=109$ mm (b) $L=1390$ mm et (c) $L=5000$ mm.	78
Figure 4-1 Les différentes familles de sections traitées.....	87
Figure 4-2 Distribution des déplacements de gauchissement pour les modes globaux des sections ouvertes obtenues par la MBFc de (Ádány and Schafer, 2006b, 2006a).....	92
Figure 5-1 Interface du logiciel SHEBA (Version 2.1) : Un nouveau processeur.	101
Figure 5-2 Interface du logiciel SHEBA (Version 2.1): Le postprocesseur.....	101
Figure 5-3 Modes fondamentaux d'instabilité de l'exemple CS1 : espace GD.....	102
Figure 5-4 Forces critiques du premier mode de l'exemple CS1 : espace GD.....	103
Figure 5-5 MSBF contrainte vs GBT : le premier mode GD.....	103
Figure 5-6 Les trois configurations considérées pour étudier la sensibilité des charges critiques des modes locaux aux nombres des nœuds.	105
Figure 5-7 Instabilité locale : Sensibilité des résultats de la MSBF contrainte / nombre de nœuds considérés.....	105
Figure 5-8 Instabilité locale : Sensibilité des résultats de la MSBF contrainte / nombre de sections nodales considérées.....	106
Figure 5-9 Instabilité distorsionnelle : Sensibilité des résultats de la MSBF contrainte / nombre de sections nodales considérées.	106

Figure 5-10 (a) Géométrie de la section en I étudiée avec (b) son maillage MSBF.	107
Figure 5-11 Les courbes de stabilité du premier mode de la section en I leurs décompositions en modes purs L et GD.	108
Figure 5-12 Formes déformées de la section en I soumise à une flexion pure à différentes longueurs physiques.	109
Figure 5-13 (a) Section transversale mono symétrique à une cellule avec des branches et une partie fermée avec (b) son maillage MSBF.	110
Figure 5-14 Les courbes de stabilité du premier mode de la section monosymétrique à 1 cellule et leurs décompositions en modes purs L et GD.	111
Figure 5-15 Formes déformées de l'élément traité soumis à une compression uniforme à différentes longueurs physiques.	111
Figure 5-16 (a) Section transversale asymétrique à 3 cellules et (b) sa modélisation MSBF.	112
Figure 5-17 La courbe de stabilité du premier mode de la section asymétrique à 3 cellules et sa décomposition en modes purs L et GD.	113
Figure 5-18 Formes déformées de l'exemple traité soumis à une compression uniforme à différentes longueurs physiques.	113
Figure 5-19 Trois sections en C additionnelles, baptisées CS2, CS3 et CS4.	115
Figure 5-20 Charges critiques de la section CS2 : Mode 1 distorsionnel et global.	116
Figure 5-21 Charges critiques de la section CS3 : Mode 1 distorsionnel et global.	116
Figure 5-22 Charges critiques de la section CS4 : Mode 1 distorsionnel et global.	116
Figure 5-23 Section creuse rectangulaire (RHS) étudiée : Géométrie et dimensions.	117
Figure 5-24 Modes fondamentaux d'instabilité de la section étudiée (RHS) dans l'espace GD.	119
Figure 5-25 Forces critiques du premier mode de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme obtenues en considérant l'interaction entre les modes purs.	120
Figure 5-26 Forces critiques du premier mode distorsionnel de l'exemple étudié (RHS).	121
Figure 5-27 Forces critiques des modes globaux de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme.	121
Figure 5-28 Formes déformées de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme à différentes longueurs physiques: (a) L=1 m (b) L=2 m.	121
Figure 5-29 Moments critiques du premier mode de l'exemple étudié (RHS) soumis à une flexion pure obtenus en considérant l'interaction entre les modes purs.	122
Figure 5-30 Formes déformées de l'exemple étudié (RHS) soumis à une flexion à différentes longueurs physiques: (a) L=1 m (b) L=20 m.	122
Figure 5-31 Moments critiques des modes purs de l'exemple étudié (RHS) soumis à une flexion pure.	123
Figure 5-32 Forces critiques de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme : Cas d'un élément Encastré-Libre (CF).	124
Figure 5-33 Forces critiques de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme : Cas d'un élément Encastré-Appuyé (CS).	125

Figure 5-34 Forces critiques de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme : Cas d'un élément Encasturé-Encasturé (CC).....	125
Figure 5-35 Section en sigma (CS5) étudiée : Géométrie et dimensions.....	126
Figure 5-36 Charges critiques de la section CS4 comprimée simplement appuyée : (a) spline FSM vs MSBFc (b) quelques formes déformées sélectionnées.	127
Figure 5-37 Charges critiques des modes individuels (BX et T) : (a) la section CS4 et (b) la section CS5.	128
Figure 5-38 Charges critiques des modes individuels (BX, BZ et T) de la section fermée (RHS): (a) MSBFc (opt#1) vs MSBFc (opt#2) (b) MSBFc (opt#2) vs GBT.	130
Figure 5-39 Charges critiques du mode individuel (BX) de la section fermée (RHS): MSBFc (opt#2) vs GBT.	130
Figure 5-40 Résultats type « MBF » en considérant des modes supérieurs et un nombre de demi-ondes $m > 1$: (a) modes supérieurs avec $m=1$ et (b) modes supérieurs avec un nombre de demi-ondes $m > 1$ (Schafer, Li and Moen, 2010b).	133
Figure 5-41 Interface de l'application permettant la conception des PFF (Version 1.1) : Le préprocesseur.	136
Figure 5-42 Interface de l'application permettant la conception des PFF (Version 1.1) : Le postprocesseur.	136

Principales notations

Toutes les notations sont définies lors de leur première apparition dans le texte. Dans ce qui suit, nous donnons les principaux symboles utilisés.

a	Longueur d'une plaque (longueur d'une bande)
b	Largeur d'une plaque
m	Nombre total de degrés de liberté
nn	Nombre de nœuds
n_s	Nombre de bandes
x-y-z	Système d'axe de coordonnées locales
X-Y-Z	Système d'axe de coordonnées globales
u_i, v_i, w_i et θ_i	Degrés de liberté locaux
U_i, V_i, W_i et Θ_i	Degrés de liberté globaux
n_c	Nombre de bandes connectées à un nœud donné
E	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
γ_{xy}	Les distorsions membranaires
ε_x	Les déformations membranaires transversales
Δ	Vecteurs des DDL du modèle splines bandes finies
Δ_e et Δ_k	DDL à éliminer et à garder, respectivement
\mathbf{K}_E	Matrice de rigidité du modèle splines bandes finies
\mathbf{K}_E^{GD}	Matrice de rigidité modifiée en supposant la flexion cylindrique des plaques
\mathbf{K}_G	Matrice de rigidité géométrique du modèle splines bandes finies
\mathbf{R}_M	Matrice de contrainte de la classe de flambement du mode M
α	Angle entre l'axe local x et l'axe global X
λ	Facteur de charge
Λ	Matrice diagonale des valeurs propres
Φ	Matrice des vecteurs propres

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte – Problématique

L'utilisation de l'acier formé à froid comme matériau de construction présente de nombreux avantages en comparaison avec les méthodes traditionnelles de construction. La résistance et la ductilité de l'acier formé à froid – connu aussi sous le nom d'acier léger – offrent des solutions de conception très intéressantes et permettent de nombreux types d'applications et de conception de bâtiments, y compris celles qui présentent un défi architectural. La construction à base d'acier formé à froid permet aussi une construction plus rapide, d'une qualité uniforme et une érection simple et rapide à l'aide d'outils de base, ce qui permet une réduction dans les besoins en matière de main-d'œuvre hautement qualifiée. Les profilés formés à froid sont généralement galvanisés (galvanisation sendzimir¹ ou par trempage) ce qui résout les problèmes de corrosion. De plus, cette solution présente de meilleures performances environnementales puisqu'elle crée moins de déchets et nécessite moins de ressources naturelles en comparant avec les méthodes traditionnelles de construction.

L'acier léger a également la capacité de se prêter à la construction modulaire hors site – une solution intéressante dans les zones où les méthodes traditionnelles de construction ne sont pas pratiques ou trop coûteuses. En effet, cette nouvelle technologie de construction remodèle, ou plus précisément, révolutionne le monde de la construction. De nombreux facteurs sont à l'origine de ce changement vers ces méthodes de construction alternatives. Les attitudes sociales vis-à-vis des méthodes de construction traditionnelles, la croissance démographique, l'évolution des politiques environnementales, la technologie, ainsi que le coût de la main-d'œuvre qualifiée sont autant de facteurs qui concourent à

¹ Galvanisation Sendzimir est un procédé industriel de protection des aciers à base de zinc extrêmement performant qui est utilisé dans de nombreux domaines industriels notamment pour les constructions métalliques (ossatures, toitures,...)

l'adoption de ces nouvelles méthodes de construction modernes pour répondre à ces nouvelles exigences.

Dans ce type de constructions modernes, les charpentes sont fabriquées en utilisant des profilés standards en différentes classes ou nuances d'aciers. Ces profilés sont obtenus par pliage ou profilage à température ambiante de feuillards (ou bobines) d'aciers laminés à chaud. Ces feuillards d'aciers ont une faible épaisseur (qui ne dépasse pas les 3 mm) ce qui permet, d'une part, de faciliter la procédure de fabrication, et d'autre part, de produire une grande variété de formes qu'on peut optimiser en fonction des besoins structuraux ou esthétiques (voir la Figure 1-1). Une particularité de ce type de profilés, par rapport aux profilés formés à chaud, c'est que les formes produites ont des rapports largeur-épaisseur des parois relativement grands. Ce type de sections souffre donc inévitablement des problèmes de stabilité, ce qui complique également la procédure de conception.

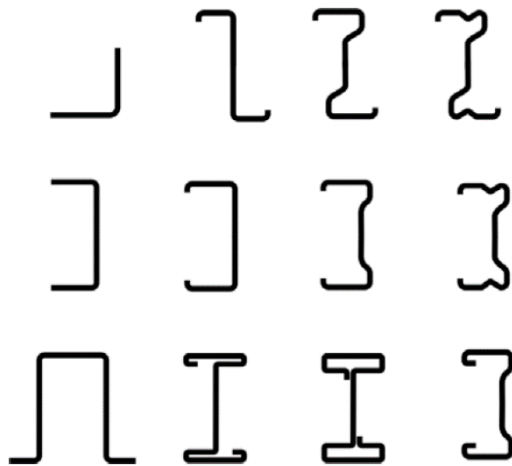


Figure 1-1 Forme des sections ouvertes en acier formé à froid.

Les éléments de structures formés à froid lorsqu'ils sont totalement ou partiellement comprimés² peuvent présenter trois modes d'instabilité élastique : (i) une instabilité locale (ii) une instabilité distorsionnelle et (iii) une instabilité globale.

Avant de définir chacun de ces modes, il est important de noter que les modes d'instabilité dépendent de la forme de la section transversale, des conditions de fixation de l'élément de structure, et du cas de chargement (uniformément répartie – longitudinale ou transversale – ou localisée). Aussi, les profilés formés à froid sont considérés comme des structures à parois planes minces. C'est-à-dire que ces sections sont formées de bandes (ou parois planes) raccordées par des congés. Ces congés, ou coins arrondis peuvent être négligés et assimilés à des arêtes vives. D'ailleurs, l'Eurocode préconise de remplacer la section par des éléments plans fictifs. Un élément de structure formé à froid peut alors être vu comme une structure à parois (planes) minces (voir Figure 1-2). Dans ce qui suit, les

² Cas des éléments comprimés ou fléchis

définitions des trois modes d'instabilité de base sont données en se basant sur des résultats d'une analyse de stabilité élastique d'une section en C simplement appuyée et uniformément comprimée.

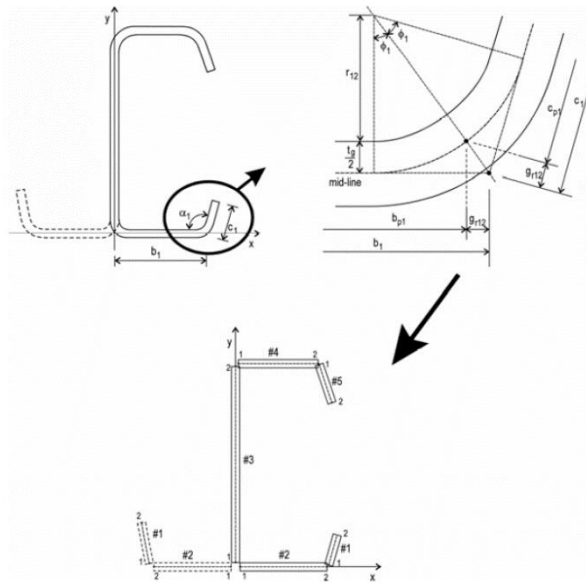


Figure 1-2 La modélisation des profilés en acier formés à froid comme structures à parois minces.

Les instabilités globale et locale sont connues depuis longtemps. Dans une instabilité globale, la forme de la section transversale reste inchangée (ou subit une légère distorsion). Elle peut prendre la forme d'un mode individuel (figure 1.3 (a)) ou d'un mode couplé (figure 1.3(b)). Cette instabilité est une instabilité non périodique puisqu'elle couvre toute la longueur de l'élément de structure. Par contre, dans une instabilité locale (ou voilement), chaque bande plane constituant la section transversale se déforme hors de son plan en conservant les « lignes » de jonctions des parois planes essentiellement droites. Cette instabilité est une instabilité périodique puisqu'elle prend la forme d'ondulations sinusoidales harmoniques telle que montrée dans la figure 1.4(a).

La moins connue des trois instabilités de base est l'instabilité distorsionnelle. Elle est caractérisée par le déplacement de certaines parties planes (ou un ensemble de parties planes) en mode rigide, alors que d'autres parois planes subissent un voilement local. L'instabilité distorsionnelle est aussi considérée comme une instabilité périodique puisqu'elle se manifeste par des ondulations harmoniques dont les longueurs des demi-ondes sont plus grandes que celle de l'instabilité locale (voir la figure 1.4(b)).

Ce classement vient du fait que chaque type d'instabilité de base a son propre comportement post-critique. Une instabilité locale peut avoir une réserve post-critique significative, puisque dans ce type de déformation le comportement des éléments plans est principalement élastique. Une instabilité distorsionnelle peut également présenter une réserve post-critique, mais beaucoup moins que pour une instabilité locale. Finalement, une instabilité globale n'en possède aucune et la capacité de l'élément est inférieure à sa charge

critique élastique. Ainsi, il est important de classer clairement les divers modes d'instabilité afin d'obtenir la résistance de conception réelle. Il y'a lieu de noter aussi qu'une instabilité élastique peut avoir lieu en mode de base (par exemple en mode local ou distorsionnel) ou bien en mode couplé (par exemple en mode combiné local-distorsionnel ou local-global). On parle alors de phénomène d'interaction entre modes qui complique davantage la procédure de dimensionnement puisqu'il cause une diminution de la charge critique d'instabilité, c'est-à-dire qu'on observe une chute de la résistance réelle par rapport aux valeurs obtenues par les différents modèles théoriques des modes de base.

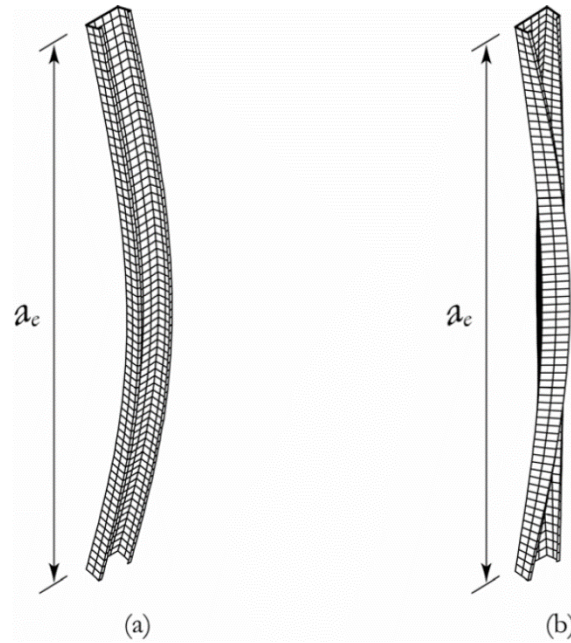


Figure 1-3 Exemples d'instabilité globale : (a) flexionnelle et (b) flexionnelle-torsionnelle.

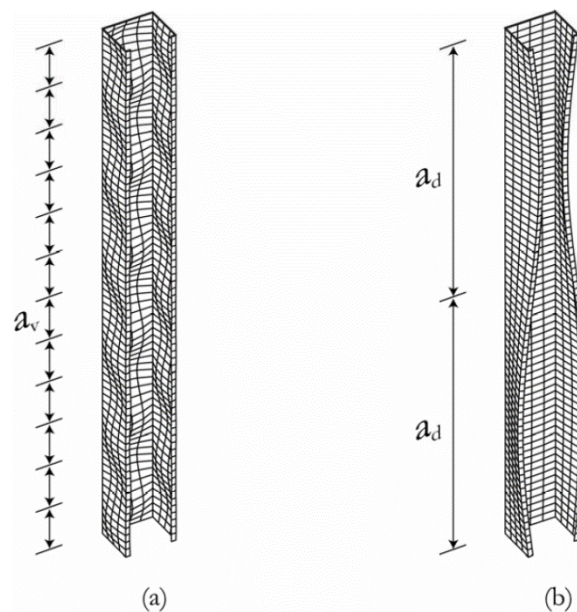


Figure 1-4 Les deux instabilités harmoniques : (a) locale et (b) distorsionnelle.

Les principaux codes et règlements de calcul tiennent compte de ces trois instabilités de base dans la détermination de la résistance de calcul des éléments de structure en profilés et plaques formés à froid. Le dimensionnement de ces éléments vis-à-vis de l'instabilité globale est fait à l'aide des courbes de flambement. Le choix de la courbe de flambement appropriée est fixé en fonction du type de la section transversale, de l'axe de flambement, de la limite d'élasticité du matériau et du chargement appliqué.

D'autre part, les effets des instabilités locale et distorsionnelle³ peuvent être pris en compte en considérant le concept de la largeur efficace (voir Figure 1-5). Cette approche a été introduite par Von Korman et calibrée aux profilés formés à froid par Winter pour étudier le voilement des éléments plans. Il s'agit d'une méthode élémentaire dans le sens où elle considère de manière isolée chaque partie plane constituant la section. L'aire efficace de la section transversale est déterminée en supposant que les parois planes sont soumises à une compression axiale. Les différentes parois constituant une section transversale sont modélisées soit en parois planes internes ou en consoles. La largeur efficace d'une paroi plane raidie ou non est obtenue en utilisant les facteurs de réduction de voilement calculés en fonction de l'élançement d'un élément de paroi [1] [2], [3][4], [5].

Le dimensionnement vis-à-vis de l'instabilité distorsionnelle est pris en compte par une extension de la notion de la largeur efficace; et il concerne les éléments plans raidis possédant un raidisseur de bord ou un raidisseur intermédiaire [4]. Les calculs pour tenir compte des effets du flambement par distorsion sont basés sur l'hypothèse selon laquelle le raidisseur se comporte comme une barre comprimée avec un maintien partiel continu, dont la rigidité de ressort dépend des conditions aux limites et de la rigidité de flexion des parois adjacentes. Un coefficient de réduction pour la résistance au flambement par distorsion (flambement par flexion d'un raidisseur) est à déterminer à partir d'un élançement réduit. Il est important de souligner que les formules analytiques de dimensionnement vis-à-vis de l'instabilité distorsionnelle font appel à des équations semi-empiriques complexes qu'il faut résoudre de manière itérative afin de calculer les contraintes critiques.

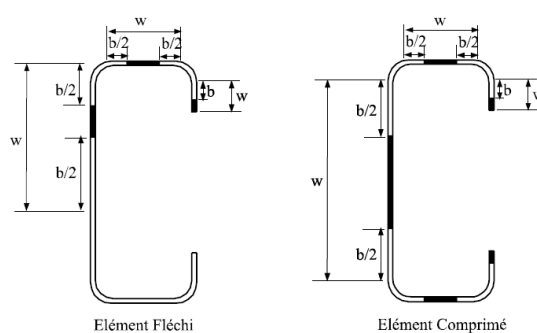


Figure 1-5 Largeurs efficaces de section en C fléchie et comprimée
(les parties noircies sont inefficaces)

³ Dans l'Eurocode 3, on parle d'un flambement par distorsion ou d'un flambement par flexion d'un raidisseur

Les nouveaux procédés de fabrication des éléments de structures formés à froid à partir d'acier à haute résistance ont permis de produire des formes de sections de plus en plus complexes et comportant de raidisseurs de bords et intermédiaires de plus en plus nombreux avec des formes de plus en plus compliquées (voir la figure 1.1). Ainsi, on peut avancer que le dimensionnement de ces profilés de nouvelle génération en se basant sur le concept de la largeur efficace est extrêmement complexe. Il est donc indispensable de développer une méthode simple et efficace permettant le dimensionnement de ce type de structure. Il faut également tenir compte des trois instabilités de base, car la réserve post-critique en dépend.

Afin de surmonter ces difficultés, une nouvelle méthode de dimensionnement des éléments de structure à base d'acier léger a été introduite par [6]. Cette méthode, baptisée « La méthode de la résistance directe⁴ » (DSM), considère la section dans sa totalité contrairement à l'approche basée sur la largeur efficace qui nécessite la décomposition de l'élément de structure en éléments plans individuels. Cette approche se base sur la contrainte critique d'instabilité élastique de la section entière évaluée par les méthodes numériques d'analyse de la stabilité élastique, plus précisément la méthode des bandes finies conventionnelle. La courbe de dimensionnement de la section entière est considérée comme une fonction de cette contrainte critique élastique. La méthode de la résistance directe, comme la méthode de la largeur efficace, tient compte de la résistance post-critique et permet ainsi une conception économique. Cette méthode a donné des résultats si convaincants qu'elle a été annexée dans les règlements nord-américain et australien [1], [7]–[9][2], [3].

1.2 Objectifs – Contributions

Dans la méthode de la résistance directe, la détermination de la capacité portante nominale d'un élément de structure vis-à-vis des trois modes d'instabilité fondamentaux est basée essentiellement sur l'estimation des forces critiques élastiques correspondantes calculées pour la section entière. Cela présente un avantage certain puisque l'élément de structure à parois minces n'a plus besoin d'être décomposé. Cependant, cette méthode a besoin d'outils numériques fiables pour évaluer et identifier correctement les modes purs d'instabilité et les charges critiques élastiques correspondantes.

D'une manière générale, l'identification des modes d'instabilité par les méthodes numériques classiques, type MBF ou MEF, se fait par inspection visuelle. Cette démarche repose sur la bonne compréhension des rôles de la forme déformée associée à l'instabilité et de la longueur de demi-onde. En effet, il est demandé d'identifier parmi la grande quantité de résultats numériques, les trois charges critiques des instabilités de base qui constituent les données utiles dans la procédure de dimensionnement basée sur la DSM.

⁴ The « Direct Strength Method », en anglais

La détermination des forces critiques associées aux modes globaux est relativement simple pour la plupart des cas pratiques, par contre, la détermination des forces critiques associées aux instabilités locales et distorsionnelles n'est pas évidente. Plusieurs difficultés peuvent être rencontrées même pour des sections de formes simples avec des dimensions typiques [10]. À titre d'exemple, il est possible que les points minima de la courbe de signature n'appartiennent pas à des modes purs d'instabilité. Un autre cas très fréquent est celui de l'existence d'un seul minimum dans la courbe de signature (soit local ou distorsionnel). Il est possible aussi que le premier point minimum associé à la plus petite longueur ne corresponde pas nécessairement à une instabilité locale. D'une manière générale, l'inspection visuelle des formes déformées peut aider à identifier les modes purs d'instabilité, mais cette procédure reste lourde et surtout subjective. Ainsi, la question de la classification des modes des résultats numériques de la stabilité élastique (calcul des modes purs d'instabilité, p. ex., local, distorsionnel et global) n'est pas une question purement théorique, mais surtout un besoin pratique très important.

Lors de la dernière décennie, le calcul et l'identification explicite de la charge critique d'un mode pur d'instabilité donné ont suscité l'intérêt de la communauté scientifique. Plusieurs méthodes ont été proposées dans le contexte de la MBF [11]–[14], la MEF [15], [16] ou des approches combinées MEF-GBT [17][18]. Ces méthodes, dites spécialisées, sont basées essentiellement sur les travaux de l'équipe de Camotim (les premiers qui ont introduit la classification automatique des modes d'instabilité, et ce dans le contexte de la théorie des poutres généralisées⁵). L'idée fondamentale de ses techniques de décomposition modale est d'introduire des critères mécaniques (ou bien des définitions mécaniques) qui permettent l'identification et le calcul des modes d'instabilité. De cette façon, le modèle numérique (par exemple, type MBF) est contraint à reproduire le mode pur (ou combiné) recherché.

Certes, il s'agit d'un progrès considérable dans le domaine de l'analyse numérique de la stabilité élastique. Toutefois, cette problématique n'est toujours pas entièrement résolue [19]. En fait, il reste indispensable de développer une méthode simple et efficace qui permette de calculer aisément les modes purs d'instabilité élastiques et les charges correspondantes. La méthode à développer doit être simple et à la portée des ingénieurs en vue de son utilisation dans la DSM. La méthode des éléments finis, qui est évidemment la méthode numérique la plus puissante dont on dispose, exige des modèles très élaborés et assez compliqués à préparer ainsi que des moyens de calcul onéreux. Elle ne correspond donc pas à cet objectif. D'un autre côté, la méthode recherchée doit être efficace dans le sens où elle doit être capable de modéliser et d'étudier la plupart des cas pratiques introduits dans les nouveaux règlements [9], à savoir des structures à parois minces avec n'importe quelle forme de section, type de conditions aux limites, chargement, avec présence de trous, colonnes et poutres composées...etc.

⁵ Generalized beam theory, en anglais

La méthode qui nous semble capable de répondre aux critères recherchés dans une méthode générale de décomposition modale est la méthode des splines bandes finies (MSBF)[20]. Cette méthode est une variante de la méthode des bandes finies conventionnelle et qui peut être considérée comme une alternative intéressante à la MEF. En effet, elle a la capacité, grâce au type particulier de ses fonctions d'interpolations (splines), de permettre la modélisation d'une grande variété de conditions aux limites longitudinales et de prendre en charge les appuis intermédiaires. L'objectif est donc de modifier cette méthode afin de développer un outil numérique simple et efficace pour le calcul des modes purs d'instabilité des profilés formés à froid.

1.3 Plan de la thèse

Ce document est organisé en cinq chapitres.

Ce premier chapitre qui a permis de présenter le contexte, les motivations et les objectifs de cette thèse.

Le deuxième chapitre présente les avantages et les particularités des profilés formés à froid, on y rappelle les définitions des trois instabilités de base et les deux approches principales de conception des profilés formés à froid, à savoir le concept de la largeur efficace et la méthode de résistance directe. Ce chapitre propose également une revue de littérature sur les méthodes numériques conventionnelles utilisées pour l'analyse de la stabilité élastique des structures à parois minces, notamment la méthode des bandes finies, mais également les nouvelles techniques de décomposition modale basées sur ces méthodes.

Le troisième chapitre commence par présenter les critères recherchés dans une méthode de décomposition générale et les motivations qui nous ont amenés à développer la nouvelle méthode appelée « splines bandes finies contrainte⁶ ». Une synthèse sur les travaux de recherches basés sur la méthode des splines bandes finies est également fournie. Ensuite, les fondements théoriques de cette méthode, nécessaires à la formulation de la nouvelle technique de décomposition modale, seront présentés et suivis par la présentation d'un programme numérique, baptisé SHEBA⁷, qui intègre cette méthode numérique avec un seul exemple de validation.

La nouvelle technique de décomposition modale basée sur la méthode des splines bandes finies est présentée dans le quatrième chapitre. Les développements théoriques de cette nouvelle technique sont fournis en détail, notamment la formulation des différentes matrices de contrainte permettant de forcer les trois modes de base avec les définitions mécaniques utilisées. Une attention particulière est accordée à l'espace GD, puisqu'il s'agit de l'espace le plus problématique. La méthode proposée est implantée dans SHEBA et elle

⁶ The constrained spline Finite Strip Method (csFSM), en anglais

⁷ Pour SHell Buckling Analysis, en anglais

utilise des techniques originales de séparation des modes d'instabilité dans le but de lever certaines insuffisances de la méthode des bandes finies contraintes.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation de l'approche proposée. Plusieurs exemples seront présentés et couvrent essentiellement des résultats numériques pour (i) les trois instabilités de base (L, D et G) (ii) des sections transversales de formes arbitraires, ainsi que (iii) des conditions aux limites standard. Afin de promouvoir l'utilisation de la nouvelle « splines bandes finies contraintes », nous proposerons également un logiciel « pour ingénieur » de conception des profilés formés à froid basé sur la méthode développée et la DSM.

Ce document est clôturé par une conclusion sur l'intérêt du travail et les résultats obtenus. Ensuite les perspectives offertes à courts et moyens termes par les approches développées sont présentées.

Chapitre 2

Profilés formés à froid : Particularités

2.1 Introduction

Les applications de l'acier formé à froid se sont élargies au fil des ans. L'acier formé à froid est maintenant utilisé pour la fabrication des éléments structuraux principaux (dans les bâtiments résidentiels, les étagères de stockage en acier, les portiques et les structures en treillis et en charpente tubulaires, etc.), et les éléments structuraux secondaires (dans les toitures et les murs système comportant des pannes, des jupes et des tôles d'acier ondulé). En outre, d'autres systèmes de construction intégrés, tels que des cassettes¹, ont été mis au point.

La conception des structures à base d'acier formé à froid est perçue comme un défi par de nombreux ingénieurs en structure, car ce type d'éléments de structure sont réalisés avec des formes ayant des rapports largeur-épaisseur relativement grands ce qui entraîne des modes de flambage et de défaillance que l'on ne retrouve pas dans la conception des structures en acier laminé à chaud. De plus, les techniques de profilage se sont développées rapidement au cours des dernières décennies ce qui a permis de produire des profilés hautement optimisés dotés de raidisseurs intermédiaires et de bords complexes. Leur conception avec les méthodes classiques devient donc une tâche très complexe.

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler les définitions des trois modes d'instabilité de base, à savoir l'instabilité locale, l'instabilité distorsionnelle et l'instabilité globale, puis nous exposerons les principales approches utilisées dans la conception des structures à parois minces. Une attention particulière est accordée à la nouvelle démarche de conception basée sur la méthode de la résistance directe, ainsi, qu'à la méthode des bandes finies conventionnelle vue son statut très particulier dans l'étude de la stabilité élastique des structures à parois minces. L'incertitude dans l'identification des modes purs d'instabilité dans la MBF est également discutée à travers quelques exemples numériques.

¹ Pour l'habillage des façades

Ensuite, et conformément aux objectifs de cette thèse, nous présenterons une synthèse bibliographique de l'ensemble des travaux de recherche sur la décomposition modale des phénomènes d'instabilité. La synthèse présentée couvre essentiellement les travaux de recherche basés sur la MBF, la MSBF et la MEF.

2.2 Les trois instabilités de base

2.2.1 Introduction

D'une manière générale, trois classes de modes de flambement, appelés aussi modes de base, sont distinguées dans l'étude du comportement de flambement des éléments à parois minces : le mode global, le mode distorsionnel, et le mode local. Ils sont généralement définis sur la base des déformations transversales dans le plan. Cependant, ce n'est pas la configuration de déformation qui fait la distinction importante, mais plutôt le comportement post-critique. Généralement, le flambement global n'a pas de réserve post-critique, alors que le mode local (voilement de plaque) en possède une importante. Le mode de flambement distorsionnel possède également une réserve post-critique, mais beaucoup moins importante que celle du voilement. L'existence, ou l'absence de la réserve post-critique influence fortement la capacité portante de l'élément de structure. Il est donc important de pouvoir identifier correctement le mode de flambement qui entre en jeu, car les effets favorables de la réserve post-critique en dépendent. Cela donne lieu à différentes procédures de dimensionnement. L'adoption de la bonne procédure permet également un dimensionnement optimisé.

Dans ce qui suit, les trois types d'instabilité de base tels que définis dans les règlements européennes [4] et américaines [1] sont présentés. La définition de ces modes de base, ou modes purs d'instabilité repose essentiellement sur la forme déformée de la section transversale ainsi que sur la longueur de demi-onde associée à une instabilité [1]. Les critères présentés ci-après permettent l'identification visuelle des différents modes d'instabilité des éléments structuraux soumis à des contraintes longitudinales.

2.2.2 L'instabilité locale

Dans une instabilité locale, les parois planes d'un élément de structure se déforment d'une manière significative. La déformation de la section transversale est caractérisée par des rotations, sans aucune translation, au niveau des lignes d'intersection entre les éléments plans – voir Figure 2-1. Ce mode d'instabilité est également caractérisé par le développement des ondulations sinusoidales. La longueur de demi-onde de ces ondulations est plus petite que la plus grande dimension caractéristique de la section transversale. Ainsi, toutes les instabilités harmoniques dont les longueurs de demi-onde sont inférieures à la plus grande dimension caractéristique sont des instabilités locales ou de voilements.

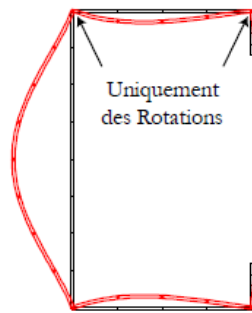


Figure 2-1 Instabilité locale d'une section en C uniformément comprimée

2.2.3 L'instabilité globale

Dans une instabilité globale, la forme de la section transversale de l'élément de structure ne subit aucun changement. La section transversale se déplace en mode rigide, soit par une translation et/ou une rotation – voir Figure 2-2. C'est une instabilité non périodique, c'est-à-dire qu'elle couvre toute la longueur du poteau ou de la poutre. Les modes globaux se produisent, donc, avec une seule demi-onde et la longueur de cette dernière est égale à la longueur effective de flambement. Il est à noter que la charge critique du flambement décroît lorsque la longueur augmente. L'instabilité prend la forme d'une instabilité par flexion (flambement d'Euler), par torsion ou par flexion/torsion pour le cas des poteaux, et la forme d'un déversement pour le cas des poutres fléchies.

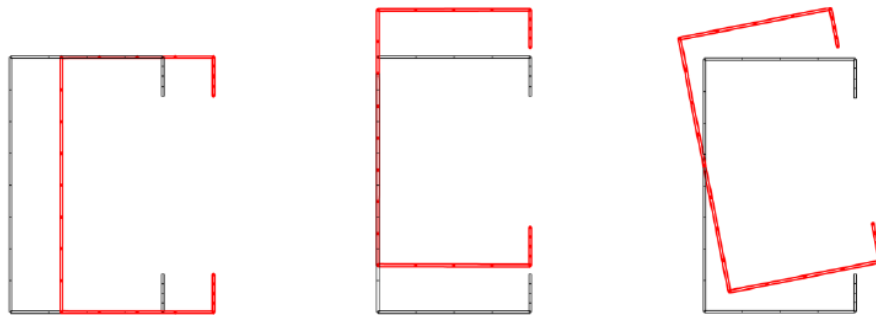


Figure 2-2 Instabilités globales d'une section en C uniformément comprimée

2.2.4 Instabilité distorsionnelle

D'une manière générale, une instabilité distorsionnelle induit des déplacements et des rotations au niveau des lignes d'intersection entre les parois planes formant la section. Plus précisément, une instabilité distorsionnelle est caractérisée par la déformation d'une partie de la section transversale avec un déplacement en mode rigide de l'autre partie. Comme exemple illustratif, les ensembles semelle – raidisseur de la section en C présentée dans la Figure 2-3 se sont déplacés sans se déformer alors que l'âme a subi des déformations de type voilement.

Cette instabilité, comme le voilement, est une instabilité harmonique. Elle se produit en développant des ondulations dans le sens longitudinal. Typiquement, la longueur de la demi-onde est égale à plusieurs fois la dimension caractéristique de la section. Seulement, contrairement à l'instabilité locale, elle dépend fortement de la géométrie de la section ainsi que du type de chargement.

D'autre part, il est important de souligner que le raidissage des parois planes peut limiter la rotation de la jonction âme/semelle dans la zone comprimée et donc retarder l'instabilité distorsionnelle. Aussi, les sections en C et en Z comprimées (ou fléchies) exhibent souvent ce mode de base alors que pour d'autres sections l'instabilité distorsionnelle peut ne pas se produire, par exemple le cas des sections en U, I et L.

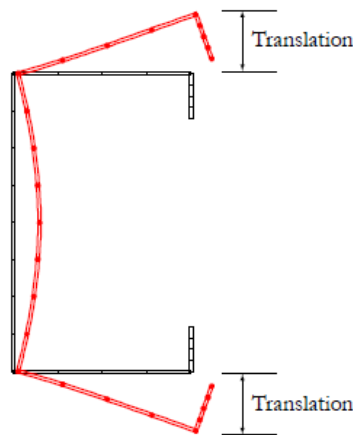


Figure 2-3 Instabilité distorsionnelle d'une section en C uniformément comprimée

2.2.5 Commentaires

Comme il a été souligné plus haut, les profils formés à froid soumis à des efforts de compression (ou de flexion) peuvent subir, au moins, trois types d'instabilité élastique de base : une instabilité locale, une instabilité globale ou une instabilité distorsionnelle. Cette classification vient du fait que chaque instabilité présente une réserve post-critique et une sensibilité aux imperfections particulières. De ce fait, il est indispensable de les identifier correctement afin de les utiliser dans la procédure de dimensionnement, notamment dans « la méthode de résistance directe » que nous présentons plus loin dans ce chapitre. Il y a lieu également de noter qu'une instabilité distorsionnelle possède une réserve post-critique plus faible que celle du voilement, alors qu'elle est beaucoup plus sensible aux imperfections que le mode local. L'instabilité distorsionnelle peut contrôler la rupture même dans les cas où la charge critique distorsionnelle est plus grande que la charge critique de voilement.

D'autre part, les définitions des modes purs d'instabilité données ci-dessus ne correspondent pas toujours à l'usage. À titre d'exemple, les longueurs de demi-ondes du « voilement » des sections en U (ou en L) peuvent être supérieures à la dimension caractéristique de la section. Il est possible aussi que le voilement se produise avec des longueurs de demi-ondes très petites par rapport à la dimension caractéristique de la section.

Ceci peut arriver dans le cas où l'élément est soumis à une flexion (la partie comprimée de la section est petite devant la partie tractée) ou en présence de raidisseurs intermédiaires. D'autre part, les modes global et distorsionnel peuvent interagir entre eux à certaines longueurs, ce qui complique l'identification des instabilités Eulériennes.

D'une manière générale, les trois instabilités de base peuvent interagir entre elles à certaines longueurs. Cela complique l'identification des instabilités dans des analyses type MEF ou MBF. La Figure 2-4 présente certains modes purs ou en interaction d'une section en C comprimé. La section transversale, les conditions aux limites, le chargement ainsi que les états de raidissage compliquent l'identification des modes d'instabilité obtenus par les analyses numériques ; d'où vient l'intérêt des méthodes de décomposition modale automatique que nous présenterons plus tard dans ce chapitre.

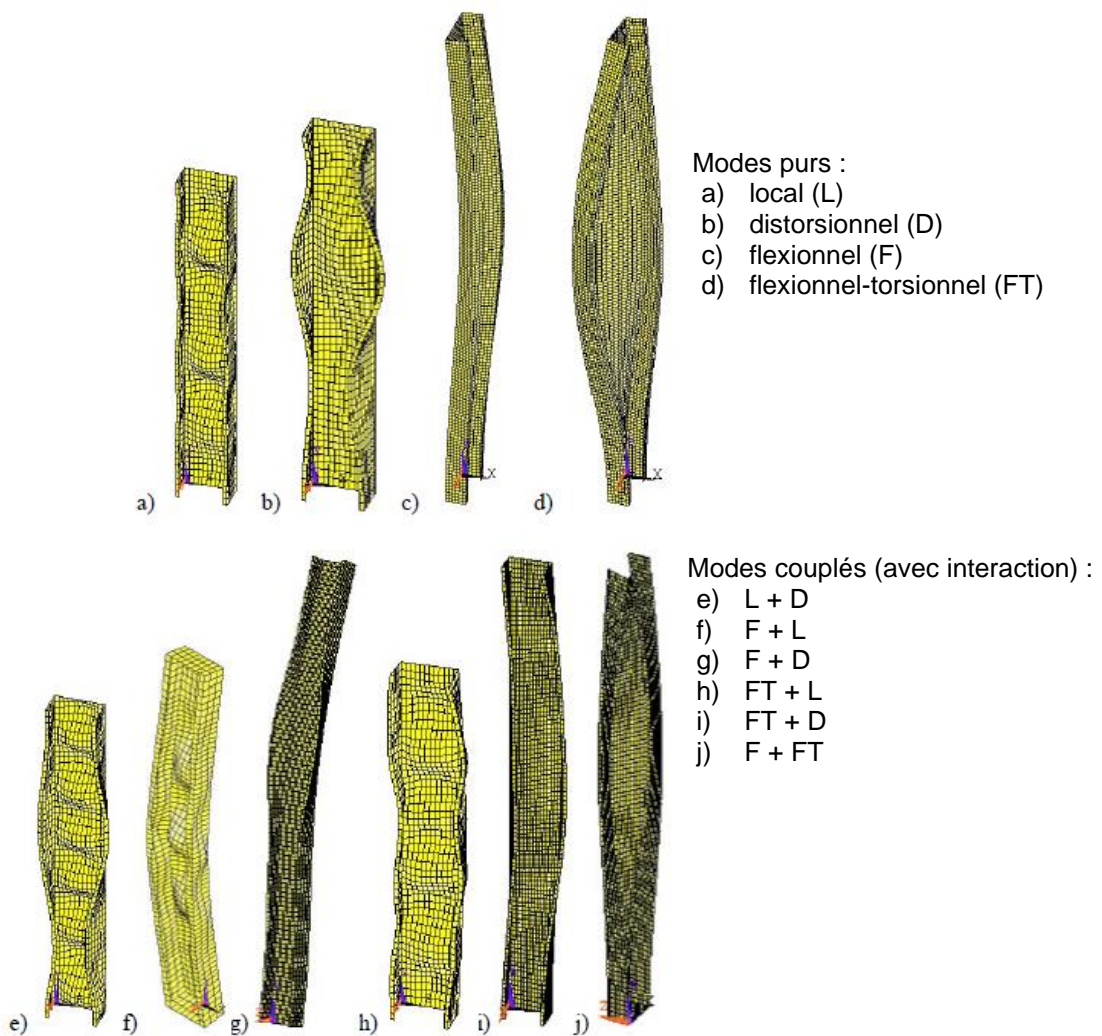


Figure 2-4 Modes d'instabilité d'une section en C soumise à un effort axial (Dubina, 2002).

2.3 Règles de calcul des profils formés à froid

2.3.1 Introduction

Les phénomènes d'instabilité et le comportement post-critique sont deux paramètres principaux dans l'étude du comportement et la conception des profils formés à froid, notamment dans le calcul de la charge de ruine des éléments structuraux.

L'effet des trois modes d'instabilité doit être considéré en mode individuel et en interaction avec les considérations connues pour les structures en acier, à savoir : la non-linéarité matérielle, les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles. Une particularité propre aux profils formés à froid est que les éléments de structures flambent avant la plastification de leur section. Cela est dû au fait que les épaisseurs des parois formant les éléments structuraux sont petites devant leurs largeurs.

Une autre particularité des profils formés à froid est que les éléments comprimés ne s'effondrent pas quand la contrainte d'instabilité est atteinte. Une redistribution des contraintes après l'instabilité permet à l'élément de structure de supporter une charge additionnelle. Ce phénomène est appelé « une réserve post-critique » et il est expliqué par l'exemple illustratif suivant.

Soit un élément plan raidi uniformément comprimé – voir la Figure 2-5. Les différents schémas de la Figure 2-6 présentent une idéalisation de la distribution de la contrainte longitudinale pendant les étapes consécutives du chargement. Au début de la mise en charge, la contrainte est uniformément distribuée. Quand la contrainte appliquée approche la contrainte critique, la distribution des contraintes n'est plus uniforme, et la contrainte maximale augmente au-delà de la contrainte d'instabilité jusqu'à ce qu'elle atteigne la limite d'élasticité ; on considère alors qu'il y a ruine de l'élément. On note que cette idéalisation ignore les variations longitudinales de la contrainte, mais illustre le comportement moyen de la contrainte membranaire.

Ce phénomène, c'est-à-dire le comportement post-critique élastique d'une paroi mince est à l'origine du concept de largeur efficace développé par Winter (1947), qui est devenu plus tard le concept de base des différentes méthodes de calcul des éléments structuraux en PFF, de la première version des règles AISI en 1947 jusqu'aux dernières versions des règlements les plus importants [9][4].

Dans ce qui suit, nous présentons les deux approches les plus importantes dans le dimensionnement des éléments structuraux en aciers formés à froid, à savoir la méthode de la largeur efficace (EWM²) et la méthode de résistance directe (DSM³). Nous allons discuter les avantages et les inconvénients de chaque méthode et démontrer que la procédure basée sur le concept de la largeur efficace est extrêmement longue et complexe et que la DSM présente une alternative très intéressante à la EWM. Nous présentons également un état de

² Effective width method, en anglais

³ Direct strength method, en anglais

codification de la DSM avec une synthèse sur les problèmes structurels traités et qui restent inexplorés.



Figure 2-5 Elément plan raidi uniformément comprimé

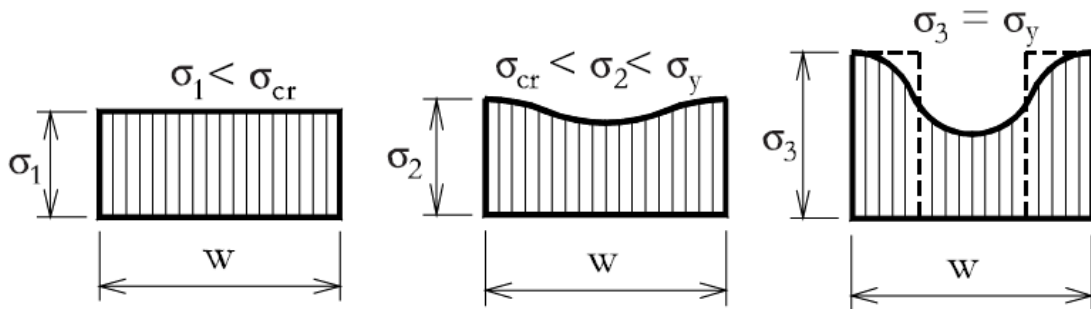


Figure 2-6 Evolution de la distribution des contraintes lors du chargement d'un élément raidi

2.3.2 Le concept de largeur efficace

Le concept de largeur efficace est un concept « élémentaire ». Chaque partie plane constituant un élément de structure est traitée de manière isolée. Autrement dit, les profils en acier formés à froid sont modélisés comme formés d'un ensemble de plaques liées le long de leurs intersections et chaque liaison est vue comme un appui. Il y'a lieu de noter que, dans l'étude de la stabilité élastique des structures à parois minces, un bord longitudinal d'un élément plan appuyé est qualifié de « raidi ». Dans le cas où le bord est libre (ou insuffisamment appuyé), il est qualifié de « non raidi ».

Dans une analyse type « largeur efficace », les différentes parois constituant une section transversale doivent être modélisées en fonction des conditions aux limites des bords. Le Tableau 2-1 résume les différents types de parois et les modèles appropriés. Trois types de parois peuvent être distingués :

- (i) Parois internes : le cas des éléments plans ayant leurs deux bords longitudinaux appuyés,
- (ii) Parois en console : le cas où l'un des deux bords est libre ou « insuffisamment appuyé », et
- (iii) Parois avec raidisseurs (de bord ou intermédiaire) longitudinaux.

À l'échelle d'un élément de structure, le calcul des largeurs efficaces pour tenir compte de l'instabilité locale concerne les parois internes et en console, ou plus précisément les parois susceptibles de se déformer en mode local. D'une manière générale, les effets du flambement local sont pris en compte en utilisant les caractéristiques de la section transversale efficace, calculées sur la base des largeurs efficaces. Le calcul des largeurs efficaces se fait en supposant que la charge est supportée par une largeur fictive b . La distribution des contraintes est, donc, considérée non uniforme à travers la largeur de l'élément, comme représentée dans la Figure 2-7. Dans ce cas-là largeur effective est soumise à une contrainte uniformément répartie σ_{max} ; σ_{max} est égale à la contrainte au bord de la plaque. Le calcul de la charge post-critique d'un élément plan raidi se ramène à déterminer une largeur efficace b . Les équations de Winter permettant le calcul des largeurs efficaces, telles qu'elles sont décrites dans l'EC3, sont résumées dans ce qui suit.

Pour une plaque dont l'aire de la section brute égale à A_c , l'aire efficace de la zone comprimée est définie par :

$$A_{c,eff} = \rho A_c \quad (2.1)$$

où ρ est le coefficient réducteur pour le voilement de plaque.

Le coefficient réducteur ρ peut être déterminé comme suit :

- Parois comprimées internes :

$$\rho = 1.0 \quad \text{pour } \bar{\lambda}_p \leq 0.5 + \sqrt{0.085 - 0.055\psi} \quad (2.2a)$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1.0 \quad \text{pour } \bar{\lambda}_p > 0.5 + \sqrt{0.085 - 0.055\psi} \quad (2.2b)$$

- Parois comprimées en console :

$$\rho = 1.0 \quad \text{pour } \bar{\lambda}_p \leq 0.748 \quad (2.3a)$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.188}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1.0 \quad \text{pour } \bar{\lambda}_p > 0.748 \quad (2.3b)$$

$$\text{avec } \bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{\bar{b}/t}{28.4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} \quad (2.4)$$

ψ est le rapport de contraintes,

\bar{b} est la largeur appropriée de la paroi étudiée,

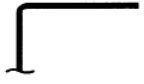
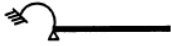


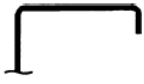
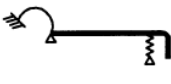
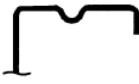

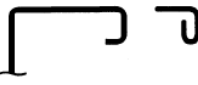
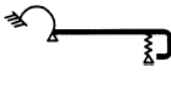


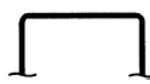


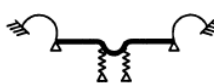




k_σ est le coefficient de voilement correspondant au rapport de contraintes ψ et aux conditions limites,

σ_{cr} est la contrainte critique du voilement,

t est l'épaisseur,

$$\text{et } \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y[N/mm^2]}}$$

Tableau 2-1 Modélisation des parois d'une section transversale [4]

Type de paroi	Modèle	Type de paroi	Modèle
			
			
			
			
			

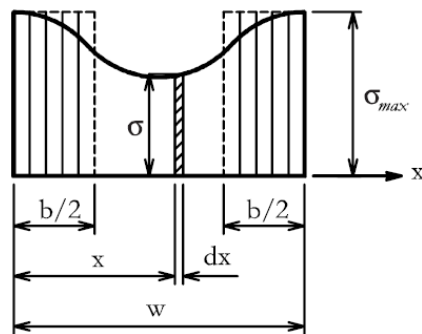


Figure 2-7 Largeur efficace d'un élément plan raidi uniformément comprimé

Pour les éléments de structure susceptibles de se déformer en mode distorsionnel⁴, une extension du concept de la largeur efficace est utilisée pour tenir compte des effets de ce type de flambage. D’abord, les considérations supplémentaires sont suggérées concernant les parois comportant des raidisseurs de bord ou intermédiaires ou les plaques nervurées formées à froid. Dans le cas d’une section en C, le sous-ensemble semelle-raideur est traité à part, on parle alors du troisième type de paroi. Le principe est le suivant : une paroi comprimée munie d’un raidisseur de bord est modélisée comme une barre comprimée avec un maintien partiel continu. Cela veut dire qu’un raidisseur de bord est modélisé comme un ressort. La rigidité du ressort dépend des conditions aux limites et de la rigidité de flexion des parois adjacentes. La rigidité du ressort associé à un raidisseur est déterminée en appliquant une charge unitaire par unité de longueur u , comme illustré dans la Figure 2-8.

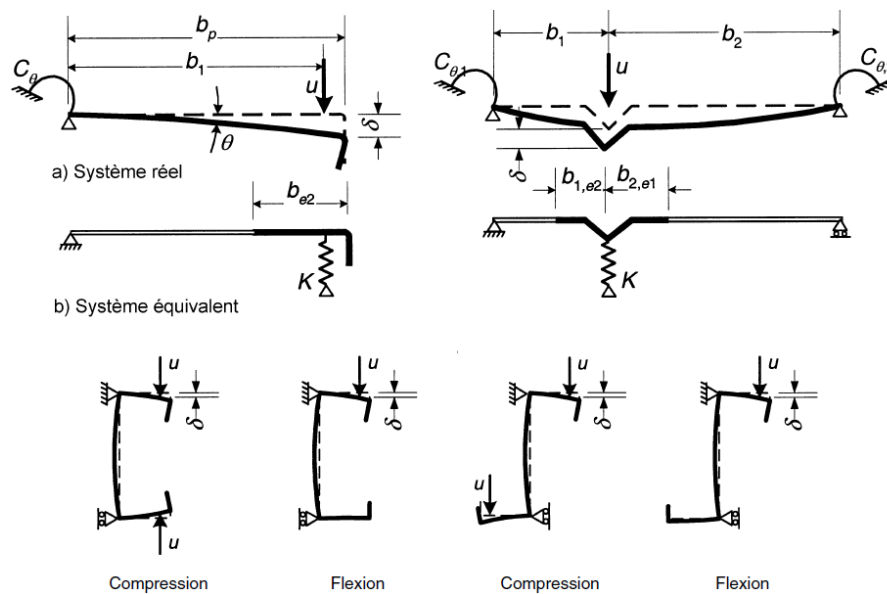


Figure 2-8 Détermination de la rigidité du ressort.

La rigidité K du ressort, par unité de longueur, peut être déterminée à partir de :

$$K = u/\delta \tag{2.5}$$

δ est la flèche du raidisseur sous l’effet de la charge unitaire u agissant au centre de gravité de sa section efficace. Dans ce cas de figure, les calculs des propriétés efficaces vis-à-vis de l’instabilité distorsionnelle concernent les parties efficaces du raidisseur c_p augmentées de la partie efficace adjacente de la paroi plane b_p avec une épaisseur réduite t_{red} correspondant à un coefficient de réduction χ_d pour la résistance au flambement par distorsion (flambement par flexion du raidisseur), comme indiqué dans la Figure 2-8.

⁴ Dans l’EC3, l’instabilité distorsionnelle est désignée par « flambement par distorsion »

Les différentes étapes de détermination des caractéristiques de la section efficace du sous-ensemble semelle-raideur peuvent être résumées comme suit : D'abord, on considère que le raidisseur confère un maintien total, autrement dit en prenant pour hypothèse que la paroi b_p est une paroi comprimée interne. La valeur initiale de largeur efficace du raidisseur c_{eff} est déterminée de la façon suivante :

$$c_{eff} = \rho b_{p,c} \quad (2.6)$$

avec ρ obtenu par l'équation 2.2, en utilisant toutefois une valeur du coefficient de flambement k_σ donnée par les expressions suivantes :

$$\text{Si } b_{p,c}/b_p \leq 0.35 \quad k_\sigma = 0.5 \quad (2.7a)$$

$$\text{Si } 0.35 < b_{p,c}/b_p \leq 0.6 \quad k_\sigma = 0.5 + 0.83 \sqrt[3]{\left(\frac{b_{p,c}}{b_p} - 0.35\right)^2} \quad (2.7b)$$

L'étape suivante consiste à déterminer le coefficient de réduction χ_d pour le flambement par distorsion (flambement par flexion du raidisseur) en tenant compte du maintien élastique continu. Le coefficient de réduction χ_d dépend de l'élancement réduit $\bar{\lambda}_d$ obtenu de la façon suivante :

$$\chi_d = 1 \quad \text{si } \bar{\lambda}_d \leq 0.65 \quad (2.8a)$$

$$\chi_d = 1.45 - 0.723 \bar{\lambda}_d \quad \text{si } 0.65 < \bar{\lambda}_d < 1.38 \quad (2.8b)$$

$$\chi_d = \frac{0.66}{\bar{\lambda}_d} \quad \text{si } \bar{\lambda}_d \geq 1.38 \quad (2.8c)$$

où :

$$\bar{\lambda}_d = \sqrt{f_{yb}/\sigma_{cr,s}} \quad (2.8d)$$

La contrainte critique élastique pour le(s) raidisseur(s) $\sigma_{cr,s}$ est définie par :

$$\sigma_{cr,s} = \frac{2\sqrt{KEI_s}}{A_s} \quad (2.9)$$

où

I_s est le moment d'inertie de la section efficace du raidisseur, pris égal à celui de son aire efficace A_s par rapport à l'axe neutre a-a de sa section efficace (voir Figure 2.9).

A_s est l'aire de la section transversale efficace du raidisseur de bord définie par $A_s = t(b_{e2} + c_{eff})$,

E est le module de Young,

K est la rigidité du ressort par unité de longueur.

La rigidité du ressort est définie, pour la semelle 1, par

$$K_1 = \frac{Et^3}{4(1-\nu^2)} \frac{1}{b_1^2 h_w + b_1^3 + 0.5b_1 b_2 h_w k_f} \quad (2.10)$$

avec

b_1 est la distance entre la jonction âme-semelle et le centre de gravité de l'aire efficace du raidisseur de bord de la semelle 1 (y compris la partie efficace b_{e2} de la semelle, voir Figure 2.9),

b_2 est la distance entre la jonction âme-semelle et le centre de gravité de l'aire efficace du raidisseur de bord de la semelle 2 (y compris la partie efficace de la semelle),

h_w est la hauteur d'âme,

k_f est un paramètre qui dépend du type de chargement. $k_f = 0$ si la semelle 2 est tendue (par exemple pour une poutre soumise à une flexion par rapport à l'axe y-y), ou

$k_f = \frac{A_{S2}}{A_{S1}}$ si la semelle 2 est également comprimée (par exemple pour une poutre soumise à une compression axiale), ceci dit que $k_f = 1$ pour une section symétrique comprimée.

A_{S1} et A_{S2} sont les aires efficaces des raidisseurs de bord (y compris la partie efficace b_{e2} de la semelle, voir Figure 2-9, de la semelle 1 et de la semelle 2 respectivement).

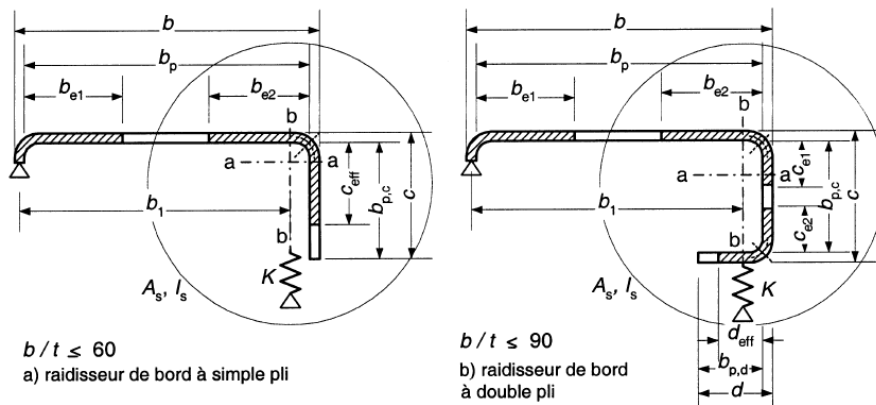


Figure 2-9 Raidisseur de bord

Il est à noter que la valeur de χ_d peut être affinée par itération en calculant la largeur efficace avec une contrainte de compression réduite $\sigma_{com,Ed,i} = \chi_d f_{yb} / \gamma_{M0}$, avec χ_d obtenue par l'itération précédente. Les itérations s'arrêtent lorsque $\chi_{d,n} = \chi_{d(n-1)}$ mais avec $\chi_d \leq \chi_{d(n-1)}$. La Figure 2-10 présente un exemple d'une section en C fléchie. La section efficace à adopter concerne donc toutes les parties comprimées et les caractéristiques efficaces du raidisseur doivent être déterminées en tenant compte d'une aire efficace réduite $A_{S,red}$ calculée sur la base d'une épaisseur réduite $t_{red} = t A_{S,red} / A_S$ pour toutes les parois incluses dans A_S .

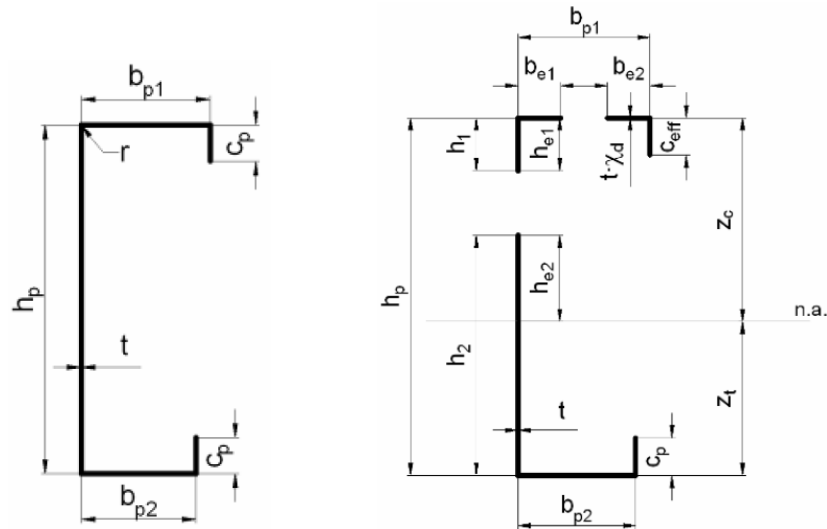


Figure 2-10 Largeurs et épaisseurs efficaces de section en C fléchée

Il est clair que la procédure basée sur le concept de largeur efficace est extrêmement longue et complexe, comme le démontre le nombre d'étapes à suivre pour le calcul des parties efficaces. Cette démarche devient plus complexe notamment pour l'étude des sections comportant des parois munies d'un ou plusieurs raidisseur(s) intermédiaires ou les plaques nervurées avec raidisseurs intermédiaires. De plus, cette approche traite chaque élément (ou paroi) de la section entière indépendamment, l'interaction qui existe entre les parois est donc ignorée. Pour surmonter ces difficultés, une nouvelle méthode, appelée la méthode de résistance directe, a été développée par Schafer et Pekoz [21], et elle est présentée ci-après.

2.3.3 La méthode de résistance directe (DSM)

La méthode de résistance directe est une extension de l'utilisation des courbes de résistance des colonnes sujette à des ruines par instabilités globales, avec une application aux instabilités locales et distorsionnelles [6]. Les courbes de résistance de la DSM utilisent la section entière de l'élément, les calculs des largeurs/sections efficaces sont donc évités. De plus, elles prennent en compte explicitement, d'une part, les interactions entre les éléments plans d'une section transversale (par exemple, entre l'âme et la semelle), et d'autre part, les interactions entre les modes ; deux phénomènes ignorés dans la méthode de la largeur efficace⁵. L'introduction de ces phénomènes d'interactions a été possible en utilisant les solutions des analyses d'instabilité élastique au lieu d'utiliser les solutions classiques faites pour chaque élément individuel : un avantage certain surtout quand les sections étudiées deviennent plus complexes (notamment avec des bords additionnels et/ou des raidisseurs

⁵ En fait, le concept de largeur efficace tient compte d'un seul type d'interaction entre les modes, à savoir l'interaction entre le mode local (L) et le mode global (G), les autres types d'interactions sont ignorés, par exemple la rupture par mode couplé LD ou DG.

intermédiaires). La DSM permet une conception économique, tout comme la méthode de la largeur efficace, puisqu'elle tient compte de la réserve post-critique.

Théoriquement, cette approche est basée sur la même hypothèse utilisée par la méthode de la largeur efficace : la charge ultime est déterminée en fonction des charges élastiques d'instabilité et les propriétés du matériau. Dans la Figure 2-11, les courbes de résistance obtenues pour l'instabilité locale et distorsionnelle dans le cas de la compression et de la flexion sont présentées en fonction de l'élancement λ qui se rapporte à l'élancement en mode local ou distorsionnel. Dans ce cas de figure, trois types de comportements peuvent être distingués en fonction de l'élancement des éléments de structure. Pour les colonnes (ou poutres) non élancées, avec un élancement $\lambda < 1$, P_{cr} (ou M_{cr}) est très grand(e) devant P_y (ou M_y); cela veut dire que la section transversale est stable et entièrement efficace. Ainsi, la résistance (ou le moment) nominal(e) P_n (ou M_n) est égale à la charge (ou moment) de plastification P_y (ou M_y) de l'élément de structure. Les éléments de structure légèrement plus élancés se comportent de manière anélastique, avec $P_{cr} < P_n < P_y$ pour le cas des colonnes et $M_{cr} < M_n < M_y$ pour le cas des poutres. Les éléments de structure à paroi mince élancée se comportent principalement de manière élastique avec une réserve post-critique, ce qui implique que $P_n > P_{cr}$ pour le cas colonnes et $M_n > M_{cr}$ pour le cas des poutres. La Figure 2-11 montre également que pour des élancements distorsionnel et local égaux, le mode distorsionnel possède une réserve post-critique réduite par rapport à celle du voilement. La réserve post-critique est d'autant plus prononcée que l'élément est élancé. Cela est vrai pour les deux types de chargement considérés.

Les courbes de résistance de la DSM ont été calibrées par des données expérimentales, ainsi que par des résultats de la MBF. Ces courbes, qui s'ajustent aux résultats expérimentaux pour les colonnes et les poutres de la Figure 2-11, peuvent être exprimées comme suit :

- **Cas de la compression :**

La résistance nominale, P_n , est le minimum entre P_{ne} , $P_{n\lambda}$ et P_{nd} . Ces dernières sont les charges nominales globale, locale et distorsionnelle, respectivement, et elles sont définies ci-après.

Instabilité globale (Instabilité flexionnelle, torsionnelle ou flexionnelle-torsionnelle)

La résistance nominale P_{ne} vis-à-vis des différents types d'instabilités globales (flexionnelle, torsionnelle et flexionnelle-torsionnelle) est :

$$\text{Si } \lambda_c \leq 1.5 \rightarrow P_{ne} = (0.658 \lambda_c^2) P_y \quad (2.11a)$$

$$\text{Si } \lambda_c > 1.5 \rightarrow P_{ne} = \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) P_y \quad (2.11b)$$

Où

$$\lambda_c = \sqrt{P_y / P_{cre}} \quad (2.11c)$$

$$P_y = A_g f_y \quad (2.11d)$$

P_{cre} est la charge critique minimale des trois charges critiques élastiques des modes d'instabilités globaux (flexionnel, torsionnel et flexionnel-torsionnel).

Instabilité locale :

La résistance nominale $P_{n\lambda}$ pour l'instabilité locale est

$$\text{Si } \lambda_l \leq 0.776 \rightarrow P_{n\lambda} = P_{ne} \quad (2.12a)$$

$$\text{Si } \lambda_l > 0.776 \rightarrow P_{n\lambda} = \left[1 - 0.15 \left(\frac{P_{crl}}{P_{ne}} \right)^{0.4} \right] \left(\frac{P_{crl}}{P_{ne}} \right)^{0.4} P_{ne} \quad (2.12b)$$

Où

$$\lambda_l = \sqrt{P_{ne}/P_{crl}} \quad (2.12c)$$

P_{crl} est la charge critique élastique du mode local. P_{ne} est définie par l'équation 2.11.

Instabilité distorsionnelle :

La résistance nominale P_{nd} pour le mode distorsionnel est :

$$\text{Si } \lambda_d \leq 0.561 \rightarrow P_{nd} = P_y \quad (2.13a)$$

$$\text{Si } \lambda_d > 0.561 \rightarrow P_{nd} = \left[1 - 0.25 \left(\frac{P_{cra}}{P_y} \right)^{0.6} \right] \left(\frac{P_{cra}}{P_y} \right)^{0.6} P_y \quad (2.13b)$$

Où

$$\lambda_d = \sqrt{P_y/P_{cra}} \quad (2.13c)$$

P_{cra} est la charge critique élastique du mode distorsionnel. P_y est définie par l'équation 2.11d.

• **Cas de la flexion :**

Le moment nominal, M_n , est le minimum entre M_{ne} , M_{nl} et M_{nd} . Ces derniers sont les moments nominaux global, local et distorsionnel, respectivement. Ils sont définis ci-après :

Instabilité globale (Instabilité latérale-torsionnelle) :

Le moment nominal M_{ne} de l'instabilité globale vis-à-vis de l'instabilité latérale-torsionnelle est :

$$\text{Pour } M_{cre} < 0.56M_y \rightarrow M_{ne} = M_{cre} \quad (2.14a)$$

$$\text{Pour } 2.78M_y \geq M_{cre} \geq 0.56M_y \rightarrow M_{ne} = \frac{10}{9} M_y \left(1 - \frac{10M_y}{36M_{cre}} \right) \quad (2.14b)$$

$$\text{Pour } M_{cre} > 2.78M_y \rightarrow M_{ne} = M_y \quad (2.14c)$$

Où

$$M_y = S_y f_y \quad (2.14d)$$

S_y est le moment statique par rapport à la fibre extrême comprimée.

M_{ne} est le moment critique élastique de l'instabilité globale.

Instabilité locale :

Le moment nominal $M_{n\lambda}$ pour l'instabilité locale est

$$\text{Si } \lambda_l \leq 0.776 \rightarrow M_{n\lambda} = M_{ne} \quad (2.15a)$$

$$\text{Si } \lambda_l > 0.776 \rightarrow M_{n\lambda} = \left[1 - 0.15 \left(\frac{M_{crl}}{M_{ne}} \right)^{0.4} \right] \left(\frac{M_{crl}}{M_{ne}} \right)^{0.4} M_{ne} \quad (2.15b)$$

Où

$$\lambda_l = \sqrt{M_{ne}/M_{crl}} \quad (2.15c)$$

M_{crl} est le moment critique élastique du mode local. M_{ne} est définie dans l'équation 2.14.

Instabilité distorsionnelle :

Le moment nominal M_{nd} pour le mode distorsionnel est :

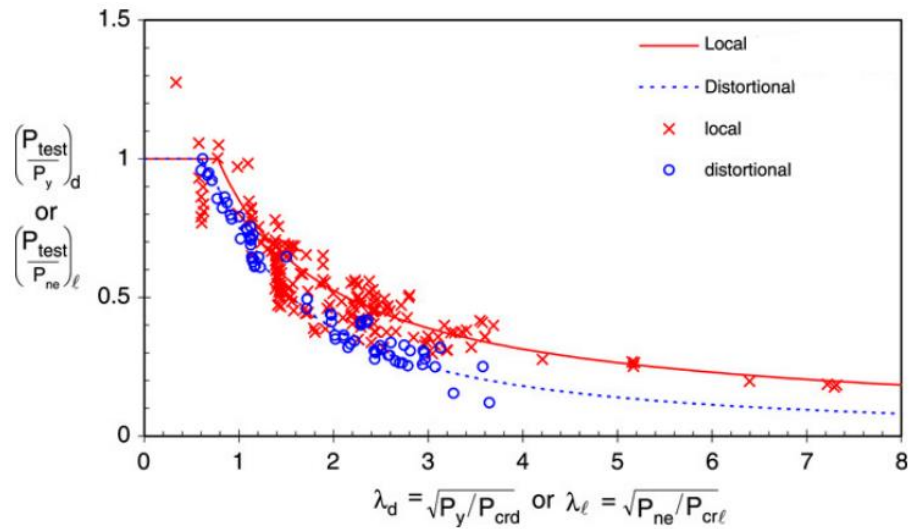
$$\text{Si } \lambda_d \leq 0.673 \rightarrow M_{nd} = M_y \quad (2.16a)$$

$$\text{Si } \lambda_d > 0.673 \rightarrow M_{nd} = \left[1 - 0.22 \left(\frac{M_{cra}}{M_y} \right)^{0.5} \right] \left(\frac{M_{cra}}{M_y} \right)^{0.5} M_y \quad (2.16b)$$

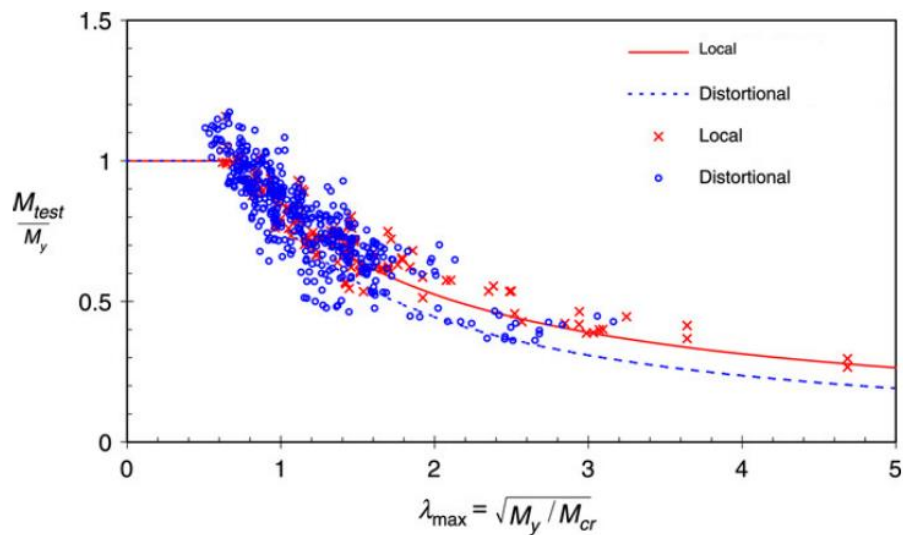
Où

$$\lambda_d = \sqrt{M_y/M_{cra}} \quad (2.16c)$$

M_{cra} est le moment critique élastique du mode distorsionnel. M_y est défini par l'équation 2.14d.



(a)



(b)

Figure 2-11 Courbes de résistance pour les instabilités locale et distorsionnelle (a) cas de la compression (b) cas de la flexion [22].

Les courbes de résistance de la DSM ont été calibrées par une grande quantité de résultats expérimentaux. [6] ont prouvé que cette approche peut être utilisée pour une grande variété de formes de sections transversales, à savoir (a) des montants de rayonnages de stockage (b) des montants de rayonnages de stockage avec raidisseurs additionnels (c) des colonnes à section en forme de « chapeau » et (d) des profils en C avec un raidisseur d'âme. Ils ont prouvé également que cette méthode est fiable, précise et surtout beaucoup plus simple que les méthodes classiques basées sur la méthode de la largeur efficace.

Les dix premières années de développement de la DSM (1998–2008) ont été largement axées sur les éléments de structure prismatiques soumis à un chargement unique (compression ou flexion) et ont été menées par un petit nombre de groupe de chercheurs [22]. En 2004, elle a été annexée aux nouvelles règles nord-américaines pour la conception des éléments structuraux en aciers formés à froid comme méthode de conception alternative pour la détermination des forces axiales et flexionnelles nominales des éléments en AFF [7].

Au cours des dix dernières années, le champ d'applications des solutions basées sur la DSM et le nombre de chercheurs qui contribuent à son développement se sont largement étendus. L'intérêt qu'elle occupe actuellement comme méthode alternative efficace aux méthodes de conception conventionnelles peut être reflété par le nombre d'articles publiés par an sur cette méthode : il est passé de 10 publications en 2008 à plus de 50 publications en 2018⁶. Dans cette période, les progrès enregistrés concernent, d'une part, la détermination de la résistance des éléments de structure soumis au cisaillement, à la torsion et aux charges combinées, et d'autre part, l'étude des éléments de structures (colonnes et poutres) perforés. On parle alors de nouvelles extensions, ou plus précisément de nouvelles courbes de conception. Ces courbes de conception ont été codifiées dans la version de 2012 des règlements nord-américaine [8].

Dans la dernière version du code nord-américain [9], deux applications importantes sont introduites. D'abord, une méthode alternative de dimensionnement des colonnes composées⁷ est proposée. Les colonnes composées sont une solution très intéressante pour augmenter la rigidité d'un élément de structure. Elles sont formées de deux ou plusieurs éléments principaux parallèles interconnectés par des diagonales ou des étrésillons. La méthode de la résistance directe qui évite justement de décomposer les sections et les étudie dans leur globalité présente un avantage majeur qui simplifie grandement le dimensionnement de ce type de structure. Il est important de rappeler que dans les approches conventionnelles [4][1], l'étude de la stabilité des colonnes composées doit être faite pour chaque élément principal à part, en prenant comme longueur la distance séparant des étrésillons. On suppose ainsi implicitement que les points de connexion sont des appuis pour les membrures. Ensuite, il faudrait décomposer la section composée en ses membrures élémentaires, puis décomposer les différentes membrures en éléments plans individuels pour pouvoir procéder à une analyse de type « largeur efficace ». Dans le cas où les éléments principaux possèdent des formes compliquées telles que celles retenues pour les colonnes formées à froid de nouvelle génération, on peut avancer que la tâche est grandement simplifiée en utilisant la DSM. La deuxième extension importante dans l'actuelle version du code nord-américaine concerne l'étude des éléments de structure soumis à des températures élevées. Il est important de noter que ces deux applications n'apparaissent pas encore dans aucun autre code.

⁶ Source : Base de données de Scopus (Elsevier)

⁷ Built-up columns and beams, en anglais

Actuellement, la recherche sur la DSM s'oriente vers [23] :

- L'élargissement du champ d'applicabilité de la DSM (notamment, concernant les limites géométriques),
- Les colonnes et les poutres composées,
- Le comportement des PFF sous chargement thermique,
- Comportement des colonnes et des poutres sous chargement cyclique,
- Effet des perforations (ou des trous) dans le cas des poutres
- L'interaction entre les modes (LD, DG et LDG) dans le cas de la compression et la flexion,
- L'interaction entre les modes pour les éléments de structure soumis à la torsion et au cisaillement,
- L'écrasement, l'enfoncement local ou le flambement d'une âme soumise à une charge transversale concentrée⁸,
- Optimisation des éléments individuels ou dans les familles de formes
- ...etc.

En outre, une excellente revue bibliographique a été publiée très récemment dans la prestigieuse revue « Thin-Walled Structures » par le Professeur B.W. Schafer, le fondateur de la DSM et l'un des grands spécialistes de l'instabilité des structures à parois minces à l'occasion du vingtième anniversaire de la DSM [24]. Schafer a présenté un résumé actualisé de l'état de codification et de la recherche sur la DSM, mettant en lumière les recherches les plus récentes.

Les travaux de recherche accomplis, la grande variété des problèmes structurels traités et les domaines de recherche qui restent relativement inexplorés reflètent, d'un côté, l'intérêt que suscite la méthode de résistance directe dans l'étude et la conception des profilés formés à froid, mais surtout sa puissance et sa polyvalence. D'autre part, l'application de la DSM dans le dimensionnement des profilés formés à froid nécessite l'utilisation d'outils numériques fiables permettant l'analyse de l'instabilité des structures à parois minces, notamment le calcul des charges critiques élastiques et les modes correspondants. Dans ce qui suit, nous présentons une synthèse des principales méthodes numériques utilisées dans l'identification modale, des méthodes conventionnelles de l'analyse de la stabilité élastique des structures à parois minces jusqu'aux méthodes les plus élaborées d'identification modale.

⁸ Web crippling, en anglais

2.4 La méthode des bandes finies classique : Un outil important dans l'étude de la stabilité des profilés formés à froid

D'une manière générale, les méthodes numériques sont imposées comme l'outil le plus important dans l'analyse du comportement des structures à parois minces. La méthode des éléments finis est sans doute la méthode la plus puissante et la plus générale de toutes les méthodes utilisées dans l'analyse de la stabilité de ce type de structure. D'ailleurs, elle reste la méthode la plus utilisée dans les analyses non linéaires (non-linéarités géométrique et matérielle). Plusieurs logiciels très performants sont commercialisés, on peut citer à titre d'exemple : ABAQUS, ADINA et ANSYS. Il faut néanmoins noter que les fonctions d'interpolation polynomiales utilisées par cette méthode exigent un maillage relativement fin afin d'avoir une précision raisonnable. Cela implique un nombre de degrés de liberté important, et donc, un temps d'analyse beaucoup plus long.

La méthode des bandes finies conventionnelle (MBF) est une variante économique de la méthode des éléments finis. Au cours de ces trois dernières décennies, elle s'est imposée comme un moyen simple et efficace pour étudier l'ensemble des modes d'instabilité de ce type de structure soumis à des contraintes longitudinales. L'utilisation intensive de cette méthode pour étudier la stabilité des profils en aciers formés à froid est due à G. J. Hancock et ses collaborateurs. D'ailleurs, les travaux de Hancock établis par la MBF sont à l'origine de la classification actuelle des modes d'instabilité en trois catégories et qui est retenue par tous les règlements de dimensionnement des profilés en aciers formés à froid. L'arrivée de la DSM a donné plus d'intérêt à cette méthode. L'annexe du règlement américain [7] présentant la DSM reconnaît à la MBF la faculté de donner des solutions précises avec un minimum d'effort et de temps, et recommande son utilisation, malgré ses limites. Au fil des années, elle est devenue un outil indispensable aux ingénieurs pour dimensionner les structures en profilés formés à froid et elle a été utilisée dans le calibrage/validation des principales méthodes de calcul manuel et de la DSM. Elle a également servi pour la validation de la théorie des poutres généralisées (GBT⁹).

La Figure 2-12 présente des résultats typiques de la MBF conventionnelle. Une analyse type « bandes finies » consiste à tracer, pour chaque section transversale, la courbe donnant le facteur de charge critique λ_{cr} , en fonction de la longueur de la demi-onde, α . Plusieurs formes de courbes peuvent être obtenues. En fonction de la géométrie de la section et le type de chargement, elles peuvent présenter un ou deux minima locaux avant une partie strictement décroissante. L'exemple donné dans la Figure 2-12 présente deux minima. L'observation des formes d'instabilité associées montre qu'il s'agit d'une instabilité locale et d'une instabilité distorsionnelle, respectivement.

La MBF conventionnelle présente un intérêt pratique très important par rapport aux autres méthodes numériques utilisées pour faire des analyses de stabilité élastique (par exemple par la MEF ou la MSBF). En fait, la supériorité de cette méthode provient de la

⁹ Generalized Beam Theory, en anglais

propriété d'orthogonalité de ces fonctions de déplacement harmoniques qu'elle utilise. En effet, en forçant l'élément de structure à se déformer en une seule demi-onde ($m=1$), on élimine automatiquement tous les modes orthogonaux à $m=1$. Bien que, cette astuce mathématique n'est possible que pour le cas simplement appuyé, elle permet de réduire considérablement la base de recherche des modes propres et rend plus facile l'exploitation des résultats.

Dans les analyses type « éléments finis » ou « splines bandes finies » la même forme d'instabilité est obtenue plusieurs fois, pour différents nombres de demi-ondes. C'est-à-dire que le résultat utile pour caractériser l'un des trois types d'instabilité de base est répété « inutilement » plusieurs fois au point d'arriver à masquer les autres instabilités. À titre d'exemple, si la charge critique du mode local est au-dessous de la charge critique du mode distorsionnel, on est obligé d'inspecter visuellement une vingtaine (ou plus) de modes avant de trouver le premier mode distorsionnel recherché. Cela est dû principalement au fait que ce type de méthode donne l'enveloppe inférieure des modes d'instabilité pour toutes les demi-ondes. Pis, l'identification de tous ses résultats se fait par inspection visuelle. Ainsi la difficulté de la tâche est évidente et l'intérêt de la propriété de l'orthogonalité devient avéré. Ceci met également en exergue tout l'intérêt pratique de développer des procédures automatiques de classification des modes d'instabilité produits par ces méthodes numériques plus générale que la MBF.

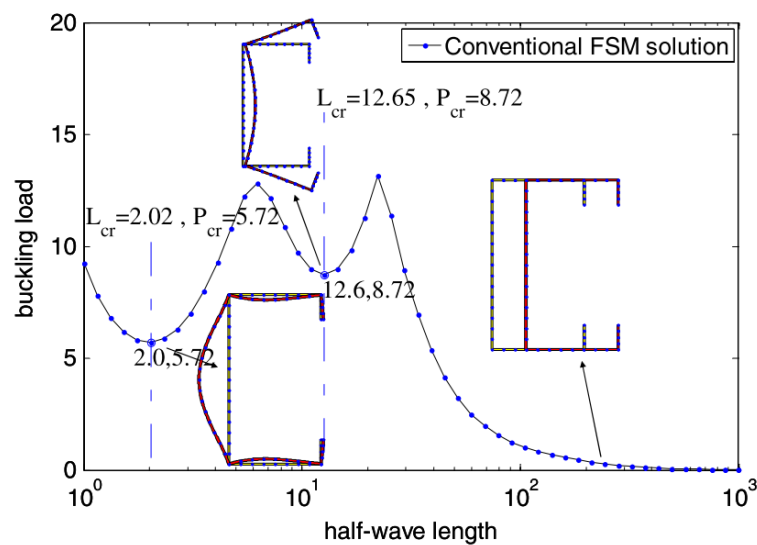


Figure 2-12 Courbe de signature et identification des charges critiques : Résultat typique de la MBF

Deux logiciels très populaires proposent des solutions par cette méthode, à savoir : CUFISM et THIN-WALL. Le logiciel CUFISM est offert gratuitement par le concepteur de la DSM, Professeur B. W. Schafer, et cela dans le but de promouvoir et faciliter l'utilisation de la DSM. Cet outil est téléchargeable sur (<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm>) en deux versions, exécutable et open source. Toutefois, THIN-WALL est un logiciel commercial développé par G. Hancock et ses collaborateurs et propose une solution par la

MBF. Sa dernière version (THIN-WALL 2) prend en charge le cas des sections soumises à des efforts de cisaillement et/ou des charges localisées [25].

2.5 L'identification visuelle des modes purs d'instabilité

2.5.1 Règles pratiques

Bien que les méthodes numériques pour l'analyse de la stabilité élastique soient assez générales que les méthodes analytiques, l'identification explicite de la charge critique associée à un mode pur d'instabilité, exigée dans la DSM, n'est pas toujours évidente. Le problème est posé même pour des sections de formes transversales simples avec des dimensions typiques.

D'abord, cela est dû au fait que les résultats d'une analyse type MBF (ou MEF) sont les valeurs des plus petits multiplicateurs de charges critiques (les valeurs propres) et les formes déformées associées (les vecteurs propres). Même pour une analyse typique, la densité du maillage nécessaire, ainsi que le nombre de valeurs et vecteurs propres calculés produisent une quantité énorme de résultats qui devrait être examinée d'une façon ou d'une autre afin d'en déduire les charges critiques associées aux différents types d'instabilité de base, à savoir l'instabilité locale, distorsionnelle et globale.

Ensuite, l'identification manuelle (ou plus précisément, l'identification visuelle) des modes purs d'instabilité exige le recours à certains nombres de règles pratiques [1]. Ces règles pratiques sont très utiles dans l'étude du comportement élastique des profils formés à froid. D'ailleurs, elles peuvent être considérées comme le seul moyen général permettant l'identification des modes purs d'instabilité parmi les résultats d'une analyse par la MEF qui est évidemment la méthode numérique la plus générale.

- La classification des modes d'instabilité dépend de la façon dont les lignes d'intersections sont définies. D'une manière générale, seules les lignes d'intersections formant la section transversale devraient être considérées entant que lignes d'intersections efficaces, et ceci indépendamment de l'angle relatif des parois adjacentes. Autrement dit, on ne considère comme lignes d'intersections efficaces que celles communes à deux parois non coplanaires. Cette définition est largement acceptée par la communauté scientifique.
- En ce qui concerne la forme déformée de la section transversale, les définitions « phénoménologiques » rappelées dans la section 2.2 sont fondamentalement acceptées.
- Il est recommandé de calculer et tracer les forces critiques et les formes d'instabilité en fonction de la longueur de demi-onde, on parle alors d'une courbe de signature¹⁰.

¹⁰ Cette option est possible uniquement pour le cas simplement appuyé

Cette option permet d'éviter la multiplicité des valeurs propres associée aux instabilités développant différents nombres de demi-ondes. La quantité des résultats à analyser visuellement est ainsi réduite ce qui simplifie significativement l'identification des modes d'instabilité. La MBF possède cette attrayante capacité. D'ailleurs, c'est pour cette raison qu'elle est devenue populaire dans le domaine de la stabilité élastique des structures à parois minces.

- Une fois la courbe de signature tracée, l'identification des modes purs d'instabilité se fait visuellement. Dans la Figure 2-12, une courbe de signature typique est présentée. Cette courbe possède deux minima à des longueurs de demi-ondes relativement petites et moyennes, puis à une certaine longueur elle tend asymptotiquement vers zéro. Les formes déformées associées aux charges critiques obtenues aident à identifier les modes purs recherchés. Il est clair que le mode associé au premier minimum est un mode local, par contre le mode associé au deuxième minimum est un mode distorsionnel. Les deux charges critiques correspondantes à ces deux minima sont les charges critiques à retenir comme « *inputs* » pour la DSM, et notamment pour le calcul de la capacité portante de l'élément.

Dans certains cas pratiques, la courbe de signature possède, plus ou moins, deux minima locaux. Dans d'autres cas, elle possède deux minima, mais les formes déformées correspondantes ne sont pas identifiées comme mode local ou distorsionnel pur. Ces cas de figure sont courants, et il est difficile d'en identifier les forces critiques requises dans la procédure de dimensionnement. Les règles supplémentaires suivantes peuvent être appliquées :

- Le mode local devrait être associé à une longueur de demi-onde inférieure à la plus grande dimension caractéristique de la section transversale.
- Le mode distorsionnel devrait être associé à une longueur de demi-onde beaucoup plus grande que la plus grande dimension caractéristique de la section transversale.
- La réalisation de plusieurs analyses de stabilité avec une section transversale légèrement modifiée peut aider à définir les longueurs où se produit l'instabilité locale ou distorsionnelle.
- La modélisation appropriée des conditions d'appuis peut éliminer certains modes gênants et permettre ainsi l'identification des charges critiques recherchées.
- L'analyse visuelle des formes déformées obtenues par une analyse élastique de stabilité est la base de l'identification des modes purs d'instabilité, notamment le mode local, distorsionnel et global.

2.5.2 L'incertitude dans l'identification des modes purs d'instabilité

L'utilisation d'une méthode d'identification modale basée sur les règles pratiques décrites ci-dessus n'est pas une démarche automatique [26]. Dans ce qui suit, nous présentons cinq exemples numériques démontrant que la détermination des charges critiques associées à l'instabilité locale et distorsionnelle n'est pas évidente même si les sections étudiées sont des sections simples avec dimensions typiques. Nous montrons qu'il s'agit plutôt d'une démarche subjective qui dépend de l'appréciation du concepteur. Les exemples illustratifs présentés dans cette section sont étudiés par Ádány dans un rapport de recherche [10] et ils ont été discutés davantage par [26].

2.5.2.1 Exemple (a)

Le premier exemple traite une section en C standard (sans raidisseurs intermédiaires). La hauteur de l'âme est de 200 mm, les deux semelles sont identiques avec une largeur de 50 mm, les raidisseurs de bord sont à 90° par rapport aux semelles avec 20 mm de longueur. L'épaisseur est de 1,5 mm. On note que toutes les dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes.

La courbe de signature obtenue par une analyse de stabilité est montrée dans la Figure 2-13, tandis que la Figure 2-14 présente certaines formes déformées, pour différentes longueurs de demi-onde. Il est important de souligner que les longueurs des demi-ondes sont définies par une échelle logarithmique et elles sont réparties uniformément afin de couvrir tout le domaine de longueur d'intérêt pratique.

D'abord, dans Figure 2-13, la courbe de signature ne possède qu'un minimum à une longueur d'environ 150mm. Les formes déformées de la Figure 2-14 démontrent que ce minimum appartient à un mode local, puisque les formes déformées correspondant à des longueurs inférieures à 150 mm ne présentent pas de translation des lignes d'intersection.

D'autre part, la courbe de signature ne possède aucun minimum distorsionnel. Bien qu'il existe un changement du comportement autour de 250 mm, mais il n'est pas évident qu'elle est la charge critique qui devrait être choisie pour caractériser l'instabilité distorsionnelle. De plus, et en observant l'allure de la courbe de signature, il est clair que les modes d'instabilité associés aux longueurs de demi-ondes variant de 250 mm à 1500 mm sont des modes couplés. On peut avancer que les formes déformées de 250 mm à 440 mm semblent être des modes couplés L-D, par contre, les formes déformées de 772 mm à 1357 mm semblent être des modes couplés D-G (puisque les instabilités observées montrent un certain déplacement en mode rigide).

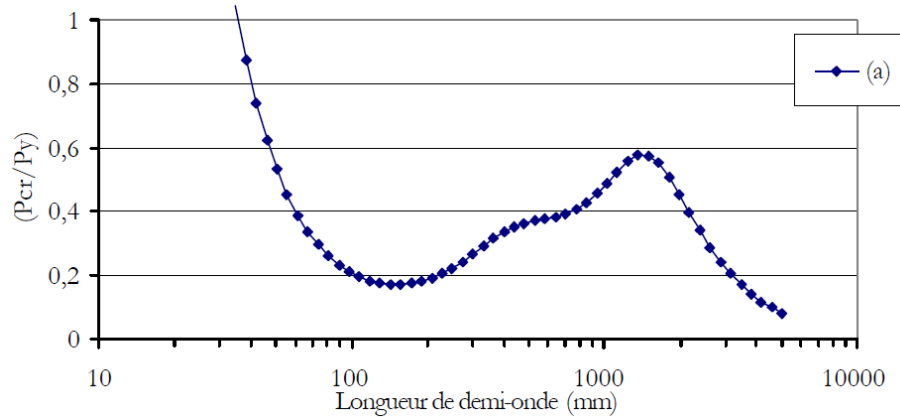


Figure 2-13 Forces critiques de l'exemple (a) [10].

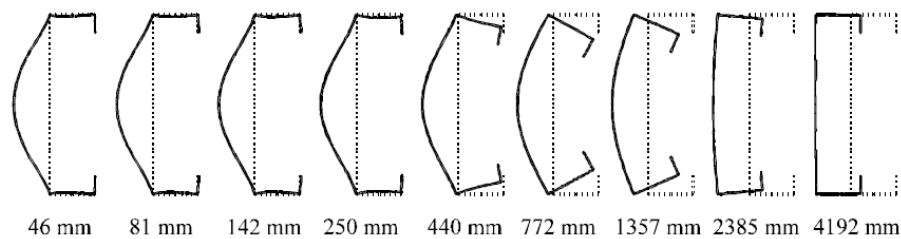


Figure 2-14 Sections déformées de l'exemple (a) à différentes longueurs de demi-ondes [10].

2.5.2.2 Exemple (b)

Le deuxième exemple présente les résultats d'une analyse de stabilité élastique d'une section en C avec raidisseur intermédiaire (sous forme de v) au niveau de l'âme. Les dimensions caractéristiques de la section sont essentiellement identiques à celles de l'exemple (a), seulement on note la présence d'un raidisseur triangulaire au milieu de l'âme d'une hauteur de 20 mm avec une largeur, mesurée perpendiculairement à l'âme, de 4 mm.

Les figures 2.15 et 2.16 présentent la courbe de signature, ainsi que, quelques formes déformées de la section étudiée. D'abord, la courbe de signature de cet exemple ne possède qu'un seul minimum autour de 250 mm. Cette longueur de demi-onde est plus grande que les largeurs caractéristiques de la section. De ce fait, et malgré qu'il soit le premier minimum, il est probable qu'il appartient à une instabilité distorsionnelle plutôt qu'à une instabilité locale. Cette conclusion est logique puisque les lignes d'intersections du raidisseur intermédiaire doivent être considérées comme efficaces. Dans ce cas de figure, une instabilité locale doit apparaître à une longueur de demi-onde beaucoup plus petite (environ 90 mm). Si on observe les formes déformées, on peut avancer qu'aucun mode local pur n'existe pour cet exemple.

D'autre part, il est important de souligner que le mode associé à la charge critique minimale (le mode à 250 mm) est un mode couplé. On peut y voir le voilement des parois planes de l'âme et des semelles couplé avec le déplacement du raidisseur intermédiaire de l'âme et du raidisseur de bord des semelles, on parle alors d'un mode couplé LD. Pour des

longueurs d’onde plus importantes, le voilement des parois planes disparaît, mais on observe l’introduction d’une translation globale couplée avec le mode distorsionnel. Il s’agit donc d’un mode couplé DG. En effet, on est devant un exemple où l’inspection visuelle échoue à identifier avec certitude les modes purs se produisant à des longueurs d’onde courte à intermédiaire, et cela malgré l’existence des minima locaux dans la courbe de signature.

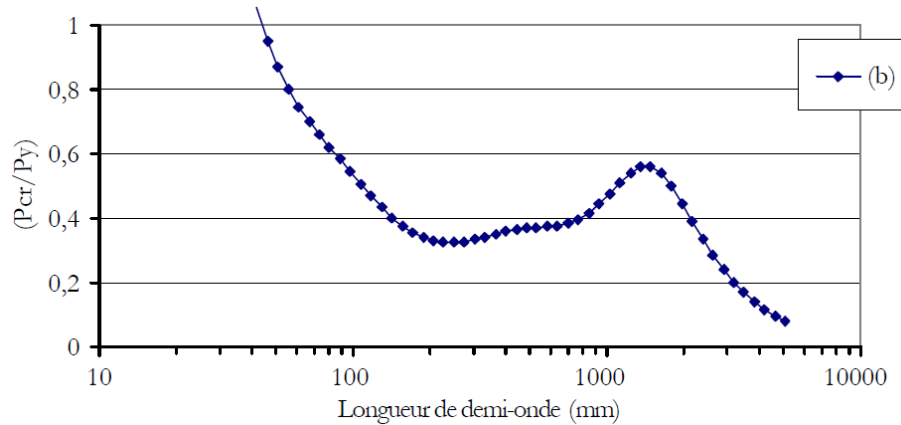


Figure 2-15 Forces critiques de l'exemple (b) [10].

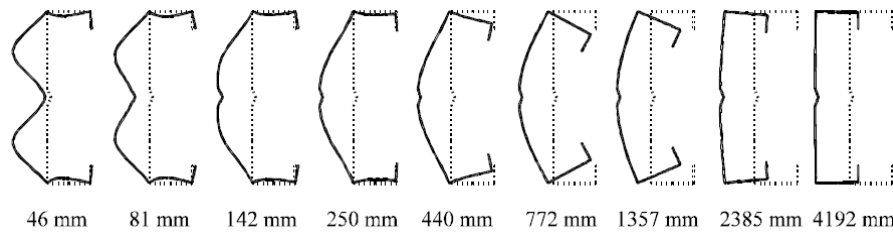


Figure 2-16 Sections déformées de l'exemple (b) à différentes longueurs de demi-ondes [10].

2.5.2.3 Exemple (c)

Le troisième exemple est presque identique à l'exemple (b), seule la dimension du raidisseur de l'âme a été changée légèrement. La largeur du raidisseur mesurée perpendiculairement est maintenant de 5 mm au lieu de 4 mm. Les charges critiques sont présentées dans la Figure 2-17 en fonction de la longueur de demi-onde, alors que la Figure 2-18 montre les formes déformées pour neuf longueurs d'onde.

La courbe de signature de cet exemple présente deux minima locaux, un à environ 300 mm, et l'autre à environ 600 mm. Ces deux longueurs sont sensiblement plus grandes que les largeurs caractéristiques de la section, ainsi, les deux minima devraient correspondre à un mode distorsionnel. Cette conclusion est confirmée par les formes déformées, néanmoins, il reste difficile, encore une fois, de trancher sur la charge critique à retenir pour le mode distorsionnel, puisque les modes associés à ces minima sont des modes couplés.

D'autre part, les formes déformées à de petites longueurs montrent bien l'existence d'une instabilité locale, malgré que la courbe de signature de l'exemple étudié ne présente pas de minimum local. Dans ce cas de figure, l'instabilité locale ne peut être négligée, car il est possible que la rupture de l'élément de structure soit en mode local malgré que les charges critiques associées sont assez élevées. Cela est dû principalement au fait que la charge de rupture d'un élément de structure ne dépend pas seulement des charges critiques des modes purs d'instabilité, mais aussi du comportement post-critique, ainsi que, de l'élanement.

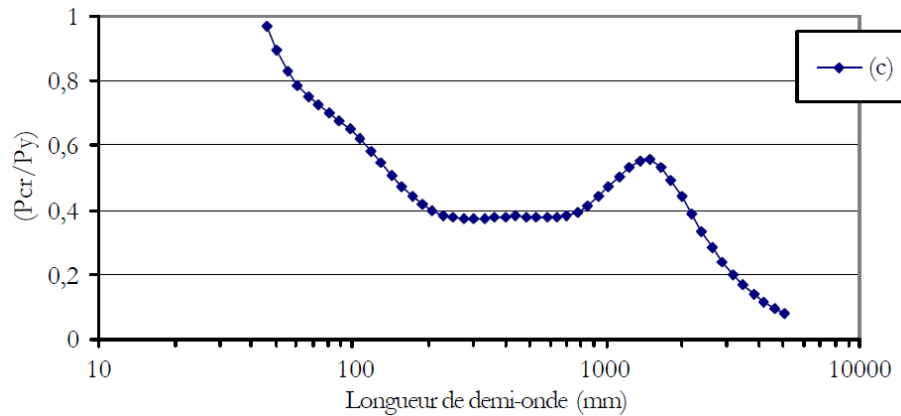


Figure 2-17 Forces critiques de l'exemple (c) [10]

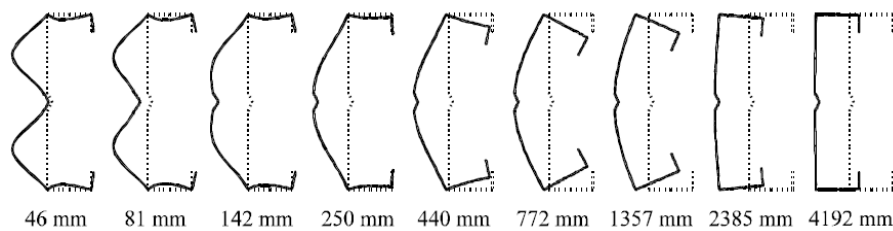


Figure 2-18 Sections déformées de l'exemple (c) à différentes longueurs de demi-ondes [10]

2.5.2.4 Exemple (d)

L'exemple suivant est légèrement différent des deux exemples précédents. La largeur du raidisseur de l'âme, mesurée perpendiculairement, a été augmentée de 1 mm, soit donc une largeur totale de 6 mm.

Les forces critiques sont présentées dans la Figure 2-19, alors que la Figure 2-20 présente neuf formes déformées pour différentes longueurs de demi-onde. Une fois de plus, le mode local existe pour ce type de section, mais il n'existe aucune charge minimale qui lui soit associée. De plus, et malgré l'existence d'un minimum autour de 640 mm, l'existence du mode distorsionnel pur est incertaine, puisque les formes déformées associées montrent bien que le mode associé est un mode couplé DG.

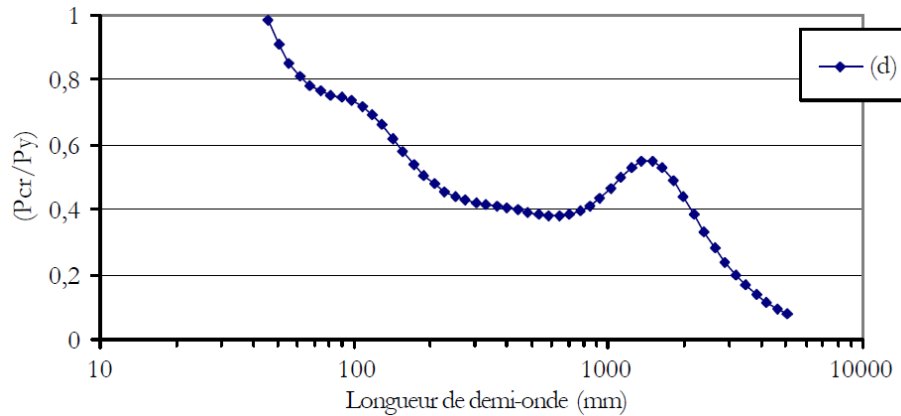


Figure 2-19 Forces critiques de l'exemple (d) [10]

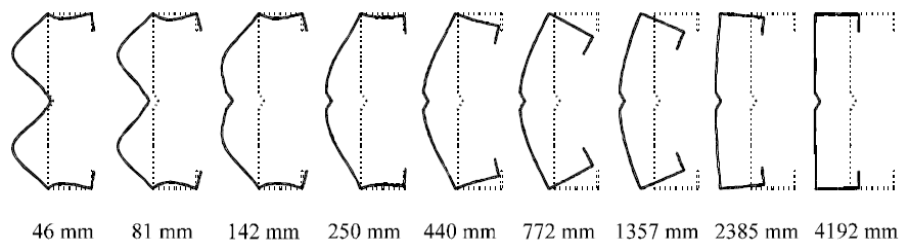


Figure 2-20 Sections déformées de l'exemple (d) à différentes longueurs de demi-ondes [10]

2.5.2.5 Exemple (e)

Le dernier exemple est aussi très similaire aux exemples (b) (c) et (d), ses principales dimensions étant identiques. La largeur du raidisseur de l'âme devient 4,5 mm, alors que l'épaisseur des parois est réduite à 0,75 mm.

Les figures 2.21 et 2.22 présentent la variation des charges critiques en fonction de la longueur de demi-onde, ainsi que, les formes déformées à différentes longueurs, respectivement. La réponse de l'élément de structure est principalement identique à celle des trois exemples précédents. Seule différence, la courbe de signature possède trois minima locaux. Il est clair que le premier correspond à un mode local pur, par contre le deuxième et le troisième sont des modes couplés, local-distorsionnel et distorsionnel-global, respectivement. L'identification du mode distorsionnel pur est encore une fois incertaine.

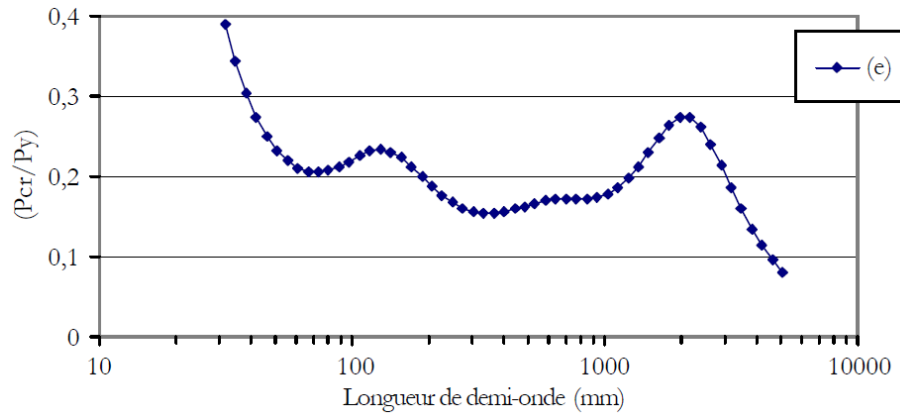


Figure 2-21 Forces critiques de l'exemple (e) [10]

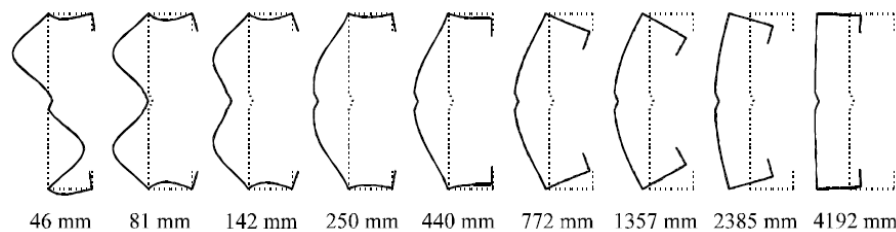


Figure 2-22 Sections déformées de l'exemple (e) à différentes longueurs de demi-ondes [10]

2.5.2.6 Discussion

Dans les exemples présentés ci-dessus, plusieurs cas de figure ont été discutés :

- Le cas où la charge critique minimale de la courbe de signature ne correspond pas à un mode pur d'instabilité,
- Le cas où la courbe de signature ne possède qu'un seul minimum local (soit local ou distorsionnel),
- Le cas où la courbe de signature possède plusieurs minimums locaux pour le même type d'instabilité,
- Le cas où le premier minimum local n'appartient pas à un mode local.

Bien que les exemples présentés dans cette section couvrent essentiellement des sections de formes simples avec des dimensions typiques, l'existence d'une grande incertitude dans la procédure d'identification modale basée sur l'inspection visuelle est évidente. Ces résultats montrent également que la caractérisation des charges critiques locales et distorsionnelles n'est pas une tâche simple et le recours aux différentes règles d'identification visuelle ne peut répondre au besoin très important d'identification des modes d'instabilité. Ce besoin devient beaucoup plus important dans le cas des sections transversales moins conventionnelles avec des raidisseurs de bord ou intermédiaires.

2.6 Décomposition et identification modale : Un nouvel outil dans la compréhension et la conception des profils formés à froid

2.6.1 Introduction

Comme il a été souligné dans la section 2.5.2 de ce chapitre, il existe une grande incertitude dans la classification des modes d'instabilité des profils à parois minces. Cela est dû au fait que l'approche conventionnelle de classification des modes d'instabilité, rappelée dans la section 2.5.1, est basée sur des définitions phénoménologiques. Bien qu'elle fonctionne relativement bien pour des sections conventionnelles, telles que les sections en C ou en Z, elle ne peut pas être utilisée pour identifier les modes d'instabilité des sections transversales complexes, notamment celles qui présentent des raidisseurs intermédiaires ou de bords.

L'ambiguïté et la difficulté de la classification des modes d'instabilité par les méthodes numériques conventionnelles ont poussé les chercheurs à développer une technique alternative d'identification modale. Il s'agit d'une technique basée sur des définitions mécaniques, plutôt que des définitions phénoménologiques. Dans ce contexte, [11], [12] ont proposé une nouvelle variante de la MBF, la méthode des bandes finies contrainte¹¹ (MBFc), qui permet de classer automatiquement les différents types d'instabilité. L'idée fondamentale est d'introduire des critères mécaniques qui permettent l'identification et le calcul des modes purs d'instabilité. De cette façon, la MBF est contrainte à forcer l'apparition des modes purs d'instabilité.

Cette section rappelle le principe de la MBFc, les définitions mécaniques qu'elle utilise et ses différentes formulations (de la version originale aux formulations les plus récentes). Quelques exemples d'application seront également présentés afin de mettre en exergue tout l'intérêt pratique d'utiliser la MBFc, plutôt que des méthodes conventionnelles, pour faire des analyses de stabilité élastiques. L'applicabilité de la MBFc dans la démarche réglementaire, notamment la DSM, est également discutée. Nous terminerons cette section par présenter une revue de littérature relative aux différentes techniques alternatives de séparation des modes d'instabilité développées dans le but de lever certaines insuffisances de la MBFc.

2.6.2 Principe

En 2006, Ádány et Schafer ont proposé une nouvelle méthode de classification « automatique » des modes d'instabilité basée sur une analyse de stabilité élastique type « bandes finies » [11], [12]. D'une manière générale, deux applications sont possibles : (i) la décomposition modale et (ii) l'identification modale. La décomposition modale permet le calcul des charges (ou moments) critiques liées aux modes purs d'instabilité, ou plus précisément, elle consiste en la séparation de l'espace général des déformations couvert par

¹¹ The constrained finite strip method, en anglais

la méthode des bandes finies en des sous-espaces utiles, à savoir l'espace L, D, G et O. Par contre, l'identification modale donne la contribution de chacun des modes purs dans un mode général d'instabilité (un mode associé à une charge critique de la courbe de signature), on parle généralement de « diagramme de participations modales ».

L'idée fondamentale de cette technique est d'utiliser des critères mécaniques qui forcent le calcul des modes purs d'instabilité. Ces critères mécaniques sont introduits sous forme d'équations de contrainte qui décrivent une classe particulière d'instabilité. Par la suite, l'équation de stabilité de la MBF conventionnelle est contrainte à la classe d'instabilité choisie et l'analyse est exécutée. De cette façon, l'élément de structure est « contraint » à se déformer en modes purs d'instabilité. Ainsi, les charges critiques associées aux modes purs d'instabilité sont directement calculées. C'est pour cette raison qu'ils ont baptisé cette méthode « la méthode des bandes finies contrainte (MBFc) », pour « The constrained finite strip method (cFSM) », en anglais.

Dans l'approche de décomposition modale proposée par Ádány et Schafer, trois critères mécaniques sont utilisés pour définir les quatre modes de base :

- Critère #1 : Hypothèse de Valsov (i) les distorsions membranaires sont nulles ($\gamma_{xy} = 0$) (ii) les déformations membranaires transversales sont nulles ($\epsilon_x = 0$) et (iii) les déplacements longitudinaux varient linéairement suivant x, par rapport à une paroi plane ($v = f(x)$),
- Critère #2 : Les déformations longitudinales sont non nulles ($\epsilon_y \neq 0$),
- Critère #3 : Distorsion de la section transversale ($\kappa_x = 0$).

En appliquant les trois critères mécaniques énumérés ci-haut sur un modèle bandes finies, les champs de déplacement généraux de la MBF sont contraints à ne donner que les champs de déplacements correspondants aux modes d'instabilité choisis. Les conditions à vérifier pour chaque type d'instabilité sont résumées dans le Tableau 2-2. D'un point de vue pratique, les hypothèses mécaniques utilisées concernent les déplacements transversaux (U, W et Θ) et les déplacements longitudinaux (ou de gauchissement) (V). Seulement, il est important de souligner que les formes déformées de l'espace GD sont exprimées en fonction des DDL de gauchissement, autrement dit, l'ensemble des DDL du modèle sont reliés aux DDL de gauchissement. Par contre, les formes déformées de l'espace L sont exprimées exclusivement par les déplacements transversaux (U et W), les déplacements de gauchissements (V) sont nuls. D'autre part, et puisqu'à ce jour, il n'existe aucune définition mécanique qui permet de forcer les modes D directement, les modes de l'espace D sont définis comme les modes de l'espace GD qui ne sont pas dans l'espace G. Autrement dit, les modes sont déduits par orthogonalité aux modes G dans le sous-espace GD. On note que la MBFc de Ádány et Schafer est une méthode de décomposition modale complète. Autrement dit, l'union des quatre espaces de déformation décomposés, c'est-à-dire, les espaces L, D, G et O, donne l'espace de déformation générale de la méthode des bandes finies.

Tableau 2-2 Critères mécaniques utilisés dans la MBFc pour les 4 classes d'instabilité

Critères mécaniques	G	D	L	ST
Critère#1 : Hypothèse de Vlasov : (i) $\gamma_{xy} = \mathbf{0}$ (ii) $\varepsilon_x = \mathbf{0}$ et (iii) v varient linéairement suivant x	Oui	Oui	Oui	Non
Critère#2 : Déformations membranaires longitudinales $\varepsilon_y \neq \mathbf{0}$	Oui	Oui	Non	-
Critère#3 : Distorsion de la section transversale : $\kappa_x = \mathbf{0}$	Oui	Non	-	-

La formulation de la MBFc d'Ádány et Schafer a été présentée dans [11], [12] pour le cas des éléments prismatiques ayant des sections transversales à connexions simples, celles dont les lignes d'intersection sont communes à, au maximum, deux parois planes, comme les sections en U, C, Σ . Les sections ouvertes à connexions multiples, en forme de E ou de T par exemple, ont été traités dans [27].

En 2010, l'équipe de Schafer a étendu le domaine d'application de la MBFc à d'autres types de conditions aux limites [28] [29]. Au total, cinq types de conditions aux limites ont été considérés : (i) simplement appuyé (ii) biencasté (iii) encasté-simplement appuyé (iv) encasté-libre et (v) encasté-guidé. Cela a été possible par l'utilisation des fonctions d'interpolations longitudinales de Azhari et al. [30]. En fait, la simple fonction d'interpolation harmonique de la MBF conventionnelle a été remplacée par une fonction d'interpolation appropriée selon les conditions d'appui.

La formulation de la MBFc pour les sections transversales arbitraires (y compris celles qui présentent des parties fermées) a été exposée dans [13][14]. Cette extension a été possible en introduisant une nouvelle définition plus rigoureuse des modes de cisaillement [31]. Certes, les modes de cisaillement peuvent être négligés dans certains cas pratiques, notamment pour les sections ouvertes, mais ils sont importants dans le cas des sections fermées. À titre d'exemple, il est impossible d'avoir le mode torsionnel-flexionnel d'une section fermée soumise à la flexion en appliquant les hypothèses de la GBT rappelées dans le Tableau 2-2 (notamment celle qui concerne le cisaillement, γ_{xy}). Actuellement, ces modes sont explicitement définis dans la nouvelle formulation de la MBFc¹². D'une manière générale, la démarche utilisée consiste à garder les caractéristiques générales de la méthode des bandes finies conventionnelle, à savoir la construction des matrices globales de rigidité et de stabilité par assemblage de matrices élémentaires, et d'introduire des critères mécaniques pour forcer le modèle bandes finies à se déformer en mode pur d'instabilité (p.

¹² Dans cette thèse, nous proposerons également une technique originale permettant de forcer la torsion des sections fermées et elle est exposée dans le chapitre 5.

ex., en mode local ou en mode global). On note que seul le cas simplement appuyé a été considéré dans cette nouvelle formulation générale.

En utilisant des critères mécaniques, il est possible également de calculer les modes d'instabilité individuellement en résolvant un problème « contraint » de valeur propre qui est obtenu en utilisant la procédure décrite ci-dessus. À titre illustratif, la Figure 2-23 présente les modes individuels d'une section en C. La signification physique de ces modes peut être facilement identifiée. Les quatre modes L1, L2, L3 et L4 correspondent aux quatre instabilités locales. Les deux modes D1 et D2 correspondent aux deux instabilités distorsionnelles, symétrique et dissymétrique, respectivement. Tandis que, les quatre modes globaux correspondent à : (i) l'instabilité axiale (G0) (ii) les deux instabilités flexionnelles autour des deux axes principaux (G1 et G2), et (iii) l'instabilité torsionnelle (G3). Il nous semble utile de souligner que les formes déformées de ces quatre modes globaux n'engendrent aucune déformation de la section transversale. Ainsi, ils correspondent parfaitement à la définition conventionnelle des modes globaux qui sont caractérisés par un déplacement en mode rigide de la section transversale. Néanmoins, traditionnellement seulement trois modes globaux sont définis par le déplacement en mode rigide de la section transversale, or, au sens de la MBFc, il est possible de forcer le mode axial (G0) qui est un mode théoriquement possible, seulement il n'a aucune importance pratique. Il est important de souligner également que les modes globaux ne se produisent d'une manière découplée que si la section transversale est doublement symétrique. Dans ce cas de figure, les charges critiques des modes purs d'instabilité de la MBF coïncident parfaitement avec les charges critiques des modes individuels obtenues par la MBFc.

Avant de présenter quelques exemples d'applications de la MBFc, nous pensons qu'il est utile de souligner que (i) la MBFc utilise les mêmes hypothèses employées par la GBT pour forcer l'espace GD, tandis que pour le mode local (L) et les autres modes (O) de nouvelles définitions sont proposées (ii) dans la MBF les déplacements sont exprimés par le produit du vecteur des déplacements nodaux et les fonctions d'interpolation. Les déplacements modaux (ou bien, les modes d'instabilité) sont donc des fonctions et non pas des vecteurs. De ce fait, il serait plus précis de parler d'espaces de fonctions, plutôt que d'espaces vectoriels. Ainsi, un sous-espace appartenant à un mode pur de déformation est défini par un espace vectoriel.

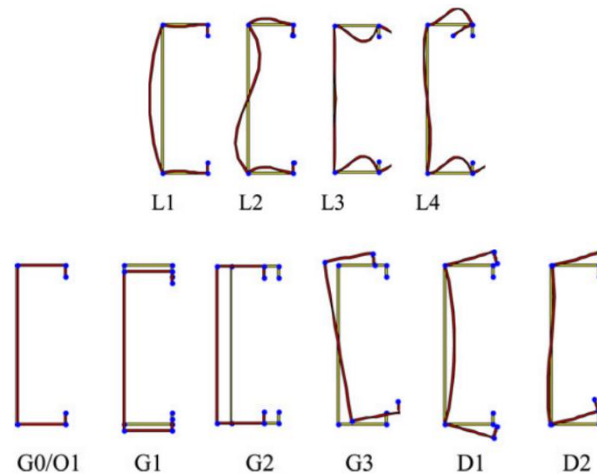


Figure 2-23 Modes individuels d'une section en C obtenus par la MBFc

2.6.3 Exemples d'application de la MBFc

Un premier exemple d'application de la MBFc est donné dans la Figure 2-24. Les résultats de l'analyse de stabilité élastique d'une colonne en C simplement appuyée sont présentés avec des résultats de décomposition modale (Figure 2-24a) et des résultats d'identification modale (Figure 2-24b). La décomposition modale (Figure 2-24a) fournit des solutions en mode pur d'instabilité. En fait, elles sont représentées par les trois courbes distinctes qui donnent les charges critiques associées aux trois instabilités de base. Elles ont été calculées par la MBFc qui permet justement de séparer chaque type d'instabilité.

Il est évident que la courbe de signature de la MBF coïncide parfaitement avec la courbe du mode local pur et la courbe du mode global pur pour les petites et les grandes longueurs d'instabilité, respectivement. Pour des longueurs d'instabilité intermédiaires, il y a également une bonne concordance entre la courbe de signature et celle du mode distorsionnel pur. Ce résultat est naturel puisque la courbe de signature de la MBF devrait couvrir de manière continue les résultats de la MBFc. Autrement dit, les résultats de la MBF peuvent être vus comme une enveloppe inférieure des résultats de la MBFc incluant les différents types d'instabilité de base.

En observant davantage ces résultats, on peut constater que seul l'espace D se sépare de manière significative de la solution conventionnelle. Cette différence peut être expliquée aisément en exploitant les résultats d'identification modale (Figure 2-24b). Il ne s'agit pas d'un mode distorsionnel pur, mais plutôt d'un mode couplé local — distorsionnel. Dans cet exemple, l'identification modale est mise à l'échelle par le facteur de charge afin qu'elle puisse être visualisée avec la courbe de signature. Ainsi, les différents types de couplage possibles (LD, GD ou bien LDG) en fonction de la longueur de la demi-onde sont visualisés directement. Les résultats de décomposition et d'identification modale peuvent être exploités autrement, en utilisant ce qu'on appelle « Les diagrammes de participations modales ». Deux exemples additionnels sont présentés et discutés afin d'illustrer les avantages de ce type de résultats et, surtout, d'expliquer comment cette

technique de classification « automatique » peut nous aider à comprendre les résultats d'une analyse de stabilité dans les structures à parois minces.

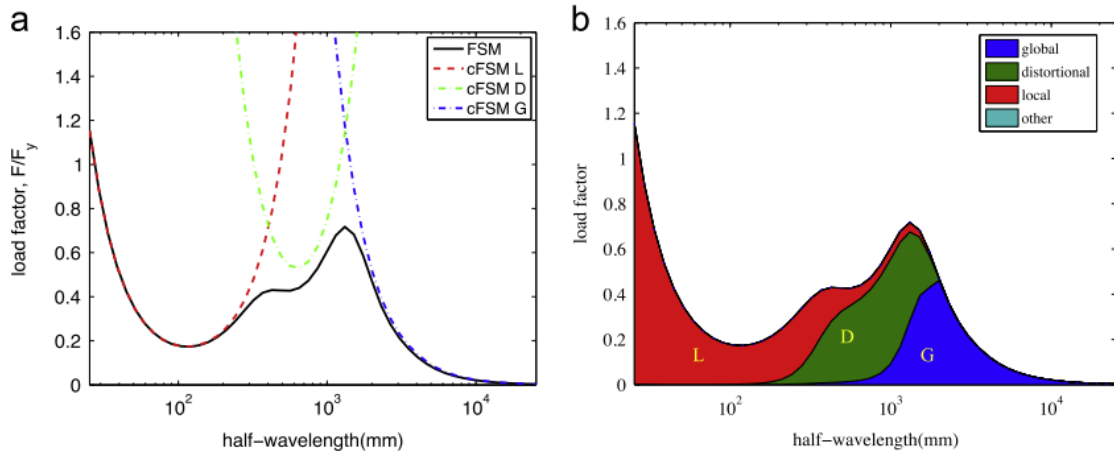


Figure 2-24 Décomposition et identification modale d'une colonne simplement appuyée : (a) décomposition modale et (b) identification modale [32].

Les résultats additionnels de classification modale présentés ici concernent les exemples (a) et (e) traités ci-dessus dans la section 2.5.2 et ils ont été étudiés par Djafour dans sa thèse [26]. On rappelle que le premier exemple est une section en C simple, tandis que le deuxième est une section en C avec un raidisseur d'âme. Les dimensions des deux sections analysées sont données dans la section 2.5.2. La Figure 2-25 et la Figure 2-26 présentent les forces critiques des modes purs d'instabilité et les contributions modales respectives en fonction de la longueur de la demi-onde d'instabilité. La courbe de signature de la MBF est, aussi, présentée. Les formes déformées correspondantes sont celles données dans la section 2.5.2.

En observant ces résultats, les commentaires suivants peuvent être avancés. Les deux exemples choisis sont différents, mais ils présentent des tendances semblables. D'abord, la contribution des modes locaux est à pratiquement 100% pour des petites longueurs d'instabilité puis elle décroît vers zéro en fonction de la longueur d'instabilité. La tendance de participation des modes globaux est l'inverse de celle des modes locaux. Elle croît strictement de 0 à 100% en fonction de la longueur d'instabilité. De leur côté, les modes distorsionnels ont une contribution importante uniquement pour des longueurs d'instabilité intermédiaires. La contribution des autres modes est négligeable pour les deux cas étudiés.

Concernant les résultats de l'exemple (a), et comme il a été souligné dans l'exemple précédent, la forte interaction entre les modes locaux et distorsionnels est, certainement, la cause d'absence d'un minimum distorsionnel dans la courbe de signature. Cette interaction est reflétée par une contribution du mode local de 25% et une contribution du mode distorsionnel pur n'excédant pas les 60%. Il est important de souligner que l'interaction entre les différents modes peut également être observée au voisinage des longueurs d'instabilité où les courbes des modes purs se coupent, on parle ici de zones d'interaction.

Ce phénomène concerne les zones d'interaction LD, DG et même LG. Le dernier cas de figure est observé quand les charges critiques associées aux modes distorsionnels sont très importantes devant celles des modes locaux. L'interaction entre les modes se manifeste par une chute des charges (ou moments) critiques obtenues par la MBF. Dans ces zones d'interaction, les charges critiques obtenues sont, donc, au-dessous des charges critiques des modes purs d'instabilité. D'autre part, le premier minimum de l'exemple (e) correspond à la charge critique du mode local. Les deux autres minima correspondent à des modes distorsionnels selon les résultats de décomposition et d'identification modale obtenus par la MBFc.

Dans le cas des conditions d'appui autres que le cas simplement appuyé, les fonctions d'interpolations ne possèdent pas la même propriété d'orthogonalité connue dans le cas où l'élément est simplement appuyé. Dans ce cas de figure, la démarche de calcul des charges critiques d'instabilité, ou bien de tracer la courbe de signature, est modifiée. Au lieu de varier la longueur de la demi-onde, on introduit la longueur physique et on explore les modes supérieurs tel que pratiquer dans les analyses de la stabilité élastique par la FEM. Dans ce cas, et au lieu de décomposer la solution générale en modes purs d'instabilité et tracer la courbe de signature, on utilise l'identification modale. Il s'agit d'identifier au moyen de facteurs de participation modaux les contributions des modes purs, ou bien les pourcentages de participation des modes purs, dans une déformée donnée.

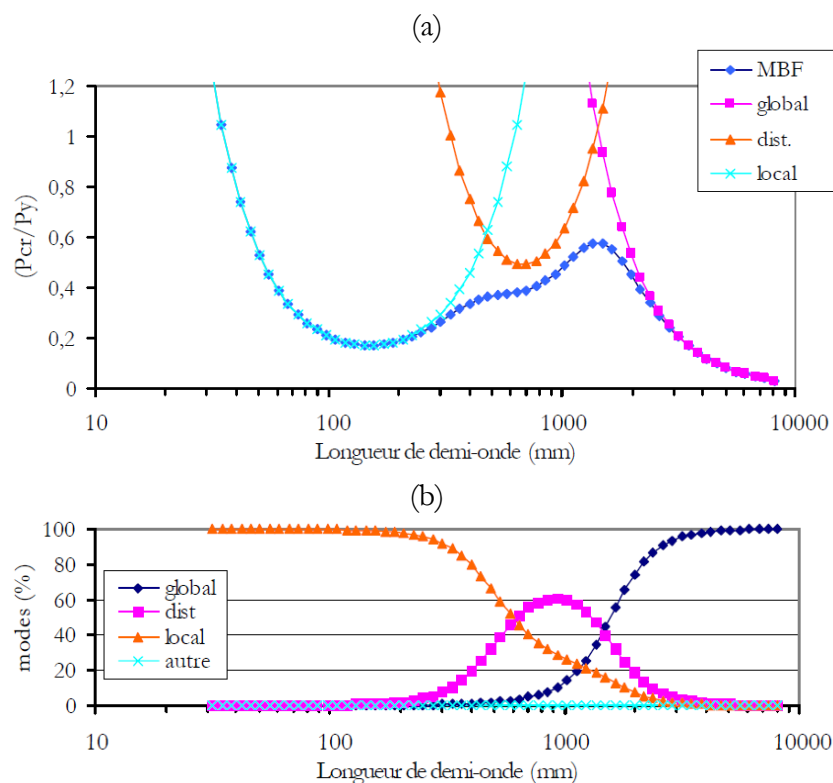


Figure 2-25 (a) Décomposition et (b) identification modales de l'exemple (a) [26].

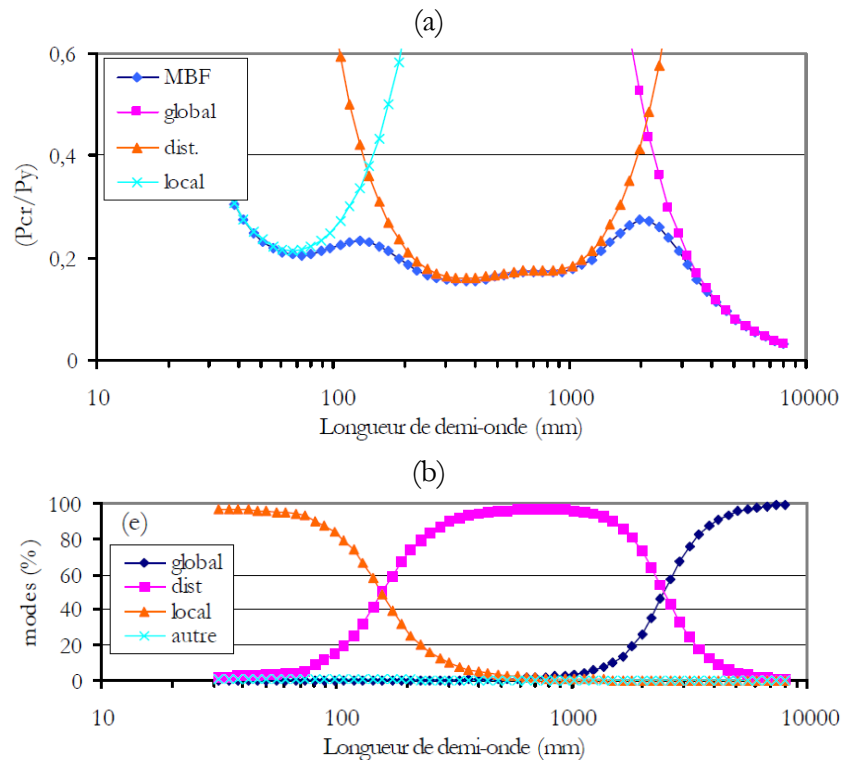


Figure 2-26 (a) Décomposition et (b) identification modale de l'exemple (e) [26].

À titre d'exemple, la Figure 2-27 donne les pourcentages de participation des modes purs pour une colonne bi-encastée. Les 50 premiers modes sont étudiés où il est possible d'identifier les déformées où les modes locaux, distorsionnels ou globaux sont dominants. En plus, il est possible de distinguer les modes d'instabilités avec un faible couplage (ex. mode#1) de ceux avec un fort couplage (ex. mode#8). Il est intéressant de souligner que la solution de la MBF_c est très sensible au choix de la base modale, du procédé d'orthogonalisation, et de la méthode de normalisation [33]. Cette sensibilité concerne essentiellement l'espace O (ou plus précisément, le mode de cisaillement (S) et l'extension transversale (I)). Une série d'exemples sont fournis dans la référence [33] pour démontrer l'impact du choix de la base modale, des méthodes d'orthogonalisation et de normalisation suivie par des recommandations pratiques.

Enfin, la principale conclusion est que la MBF_c fournit des informations très utiles permettant de comprendre le comportement des profils formés à froid, notamment dans les cas où la MBF conventionnelle échoue. Les exemples présentés dans cette section sont des exemples très fréquents dans la pratique, ainsi, la capacité de la MBF_c à traiter ce type de problème constitue l'un de ses principaux avantages.

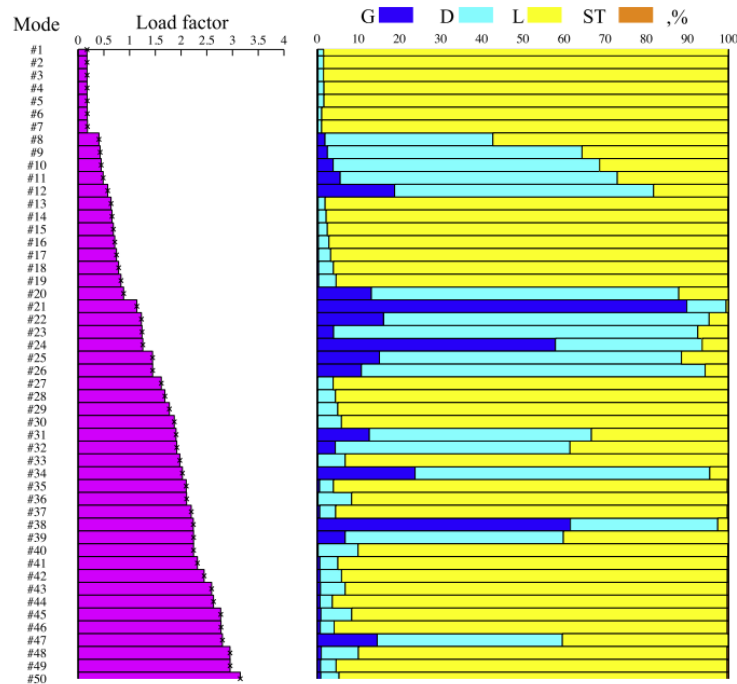


Figure 2-27 Identification modale d'une colonne bi-encastée (avec $L=2450$ mm).

2.6.4 Applicabilité de la MBFc dans la procédure de dimensionnement des PFF

Dans la section précédente, nous avons démontré comment la MBFc peut aider à comprendre le comportement et les modes d'instabilité des structures à parois minces. Toutefois, l'avantage de calculer les charges de flambement critiques des modes purs d'instabilité (c'est-à-dire l'instabilité locale, distorsionnelle et/ou globale) ne peut pas être employé immédiatement dans la conception des éléments de structures en acier formé à froid, à savoir dans la méthode de la résistance directe (DSM). Cela est dû au fait que les méthodes permettant la décomposition modale ne fournissent pas la même solution que la MBF conventionnelle. Ceci est important, car la MBF a été utilisée pour calibrer les formules de la DSM.

Les différences entre les résultats de la MBF et la MBFc sont principalement dues à l'effet des coins arrondis et du couplage de mode. Les éléments formés à froid sont toujours produits avec des coins arrondis. La MBF peut manipuler directement les angles par un modèle géométrique approprié, alors que la décomposition modale n'est possible que si les angles sont considérés comme vifs. D'autre part, un mode de flambement pur obtenu par la MBF peut présenter une faible interaction avec un ou plusieurs modes. D'ailleurs, un mode d'instabilité est considéré comme pur même s'il présente une interaction de 20%, comme seuil maximal [34]. Ainsi, les charges critiques associées aux modes purs sont, forcément, différentes à celles obtenues par la MBFc. L'interaction entre les modes de flambement est naturellement incluse dans les résultats de la MBF conventionnelle, mais elle est exclue intentionnellement dans la MBFc.

Une autre source de différence entre la MBF et MBFc est liée aux critères mécaniques utilisés pour forcer l'espace GD. L'application de ces critères sur un modèle bandes finies engendre une modification dans la rigidité de l'élément de structure. Dans la MBFc, les équations de contraintes provoquent une augmentation de la rigidité, et par conséquent, les charges critiques distorsionnelles et globales obtenues sont légèrement supérieures aux charges critiques obtenues par la MBF [12].

Dans ce contexte, deux approches ont été proposées dans la littérature permettant l'utilisation des résultats de décomposition modale calculés par la MBFc dans la conception des structures en aciers formés à froid, et notamment la DSM : (i) « La MBF à longueur de flambement critique de la MBFc » [35] et (ii) « MBFc avec des facteurs de correction » [36].

Dans la première approche, il est recommandé d'utiliser un modèle MBFc avec des coins vifs et de calculer les modes purs pour trouver les longueurs critiques des deux modes concernés, à savoir le mode local et distorsionnel, puis utiliser ces longueurs critiques dans une analyse type MBF en utilisant un modèle à coins arrondis pour trouver les charges élastiques recherchées. Les charges élastiques obtenues sont ensuite utilisées dans la DSM pour la prédiction de la résistance de l'élément. L'approche de Li Z. et Schafer B.W. est basée essentiellement sur des observations faites sur les positions des charges critiques des modes purs d'instabilité (notamment, le mode local et distorsionnel) obtenues par la MBF et MBFc. Les longueurs critiques obtenues par ces deux méthodes coïncident malgré l'utilisation de deux modèles différents – à titre illustratif, voir un exemple dans la Figure 2-28.

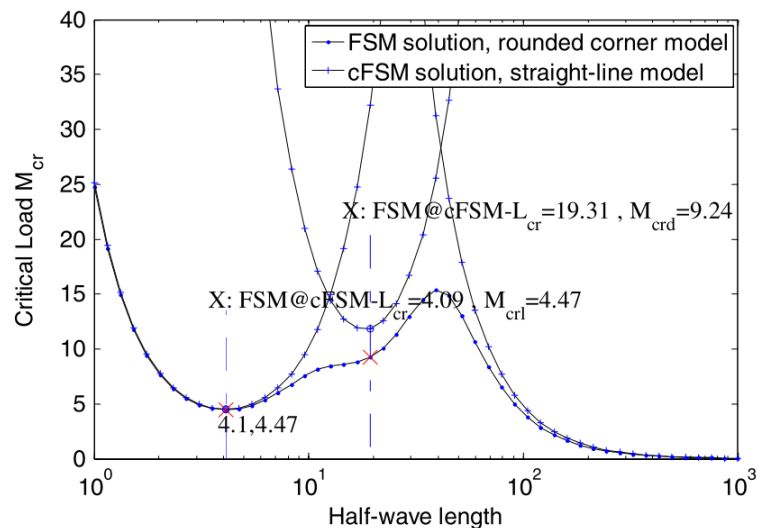


Figure 2-28 Courbe de signature et choix des moments critiques [34]

Dans la deuxième approche, c'est-à-dire « la MBFc avec facteurs de correction », c'est les charges critiques des modes purs d'instabilité obtenues par la MBFc qui sont utilisées dans la procédure de dimensionnement. Le modèle utilisé dans la MBFc est un modèle avec des coins vifs et l'effet des angles arrondis et la différence entre MBF et MBFc sont introduits par des facteurs de correction empiriques. Les charges critiques élastiques corrigées sont ensuite utilisées dans la DSM pour la prédiction de la résistance de l'élément. Beregszászi et Ádány [36] ont montré que la modélisation des coins, ainsi que les différences entre la MBF et la MBFc entraînent des différences généralement faibles, mais non négligeables. La démarche proposée couvre essentiellement les formes de sections présentées dans la Figure 2-29, tandis que les intervalles des dimensions retenues sont donnés au Tableau 2-3.

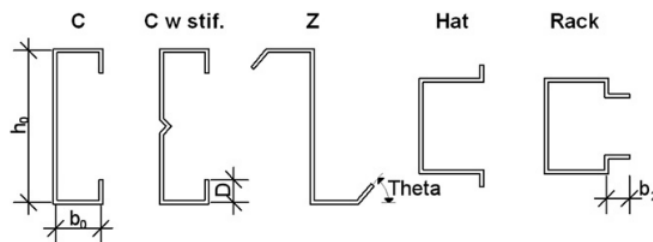


Figure 2-29 Formes de sections couvertes par la procédure proposée : section en C, section en C avec raidisseur d'âme, section en Z, section en chapeau (Omégas) et les montants des rayonnages.

Tableau 2-3 Les dimensions retenues dans l'approche de [36].

Type de section	Type de chargement : Compression pure			Type de chargement : Flexion pure		
	h	b ₀ /t	D/t	h	b ₀ /t	D/t
C	100 – 460 mm	20 – 160	6 – 34	40 – 320 mm	10 – 70	5 – 34
C avec raid.	100 – 460 mm	20 – 160	6 – 33	100 – 340 mm	20 – 55	14 – 17
Z	t x (40 – 130) mm	10 – 60	4 – 36	40 – 320 mm	10 – 70	10 – 16
Oméga	t x (20 – 50) mm	20 – 44	D = b ₀ x 0.13	–	–	–
Montant de rayonnage	t x (20 – 50) mm	10 – 20	5 – 8	–	–	–

Les différentes étapes d'utilisation de cette approche peuvent être résumées comme suit :

Etape 1. Modéliser la section transversale avec des angles vifs.

Etape 2. Calculer le module de section élastique des poutres ou la section transversale des colonnes, puis considérons l'effet des coins arrondis respectivement, comme suit :

$$W_{el} = \frac{\bar{W}_{el}}{k_{c,W}} \tag{2.17a}$$

où

$$A = \frac{\bar{A}}{k_{c,A}} \quad (2.17b)$$

Avec

- W_{el} est le module de section élastique à utiliser dans la prédiction de la capacité portante,
- \bar{W}_{el} est le module de section élastique calculé avec des coins vifs,
- $k_{c,W}$ est un facteur de modification,
- A est l'aire de la section transversale à utiliser dans la prédiction de la capacité portante,
- \bar{A} est l'aire de la section transversale calculée avec des coins vifs,
- $k_{c,A}$ est un facteur de modification,

Etape 3. Calculer les contraintes critiques pour le flambement local en utilisant la MBFc, puis considérer l'effet des coins arrondis et de l'effet de couplage de mode comme suit :

$$\sigma_{cr L} = \frac{\bar{\sigma}_{cr L}}{k_{c,L} \times k_{m,L}} \quad (2.17c)$$

Avec

- $\sigma_{cr L}$ est la contrainte critique pour le flambement local à utiliser dans la prédiction de la capacité portante,
- $\bar{\sigma}_{cr L}$ est la contrainte critique calculée pour le mode local utilisant la MBFc,
- $k_{c,L}$ et $k_{m,L}$ sont des facteurs de modification.

Etape 4. Calculer les contraintes critiques pour le flambement distorsionnel en utilisant la MBFc, puis considérer l'effet des coins arrondis et de l'effet de couplage de mode comme suit:

$$\sigma_{cr D} = \frac{\bar{\sigma}_{cr D}}{k_{c,D} \times k_{m,D}} \quad (2.17d)$$

Avec

- $\sigma_{cr D}$ est la contrainte critique pour le flambement distorsionnel à utiliser dans la prédiction de la capacité portante,
- $\bar{\sigma}_{cr D}$ est la contrainte critique calculée pour le mode distorsionnel utilisant la MBFc,
- $k_{c,D}$ et $k_{m,D}$ sont des facteurs de modification.

Etape 5. Ensuite, la capacité portante est calculée en utilisant les formules modifiées de la DSM suivantes :

Cas de la flexion :

$$M_{nl} = \begin{cases} \left(1 - \frac{0.15}{\lambda_l^{0.8}}\right) \frac{1}{\lambda_l^{0.8}} f_y W_{el} & \text{si } \lambda_l > 0.776 \\ f_y W_{el} & \text{si } \lambda_l \leq 0.776 \end{cases} \quad (2.17e)$$

$$M_{nd} = \begin{cases} \left(1 - \frac{0.22}{\lambda_d}\right) \frac{1}{\lambda_d} f_y W_{el} & \text{si } \lambda_d > 0.673 \\ f_y W_{el} & \text{si } \lambda_d \leq 0.673 \end{cases} \quad (2.17f)$$

Les élancements sont définis par : $\lambda_l = \sqrt{f_y/\sigma_{crl}}$ et $\lambda_d = \sqrt{f_y/\sigma_{crd}}$.

Le moment nominal, M_n , est le minimum entre M_{nl} et M_{nd} .

Cas de la compression :

$$P_{nl} = \begin{cases} \left(1 - \frac{0.15}{\lambda_l^{0.8}}\right) \frac{1}{\lambda_l^{0.8}} f_y A & \text{si } \lambda_l > 0.776 \\ f_y A & \text{si } \lambda_l \leq 0.776 \end{cases} \quad (2.17g)$$

$$P_{nd} = \begin{cases} \left(1 - \frac{0.25}{\lambda_l^{1.2}}\right) \frac{1}{\lambda_l^{1.2}} f_y A & \text{si } \lambda_l > 0.561 \\ f_y A & \text{si } \lambda_l \leq 0.561 \end{cases} \quad (2.17h)$$

Les élancements sont définis comme ceux du cas de la flexion.

La charge nominale, P_n , est le minimum entre P_{nl} et P_{nd} .

Une autre possibilité est d'utiliser les équations originales de la DSM, présentées dans la section 2.3.3. Dans ce cas, le moment de plastification et les moments critiques doivent d'être modifiés comme suit :

$$M_y = \frac{\bar{W}_{el}}{k_{c,W}} \times f_y \quad (2.17i)$$

$$M_{crl} = \frac{\bar{\sigma}_{crL}}{k_{c,L} \times k_{m,L}} \times \frac{\bar{W}_{el}}{k_{c,W}} \quad (2.17j)$$

$$M_{crd} = \frac{\bar{\sigma}_{crD}}{k_{c,D} \times k_{m,D}} \times \frac{\bar{W}_{el}}{k_{c,W}} \quad (2.17k)$$

Pour le cas de la compression, la charge de plastification et les charges critiques sont déterminées par :

$$N_y = \frac{\bar{A}}{k_{c,A}} \times f_y \quad (2.17l)$$

$$P_{crl} = \frac{\bar{\sigma}_{crL}}{k_{c,L} \times k_{m,L}} \times \frac{\bar{A}}{k_{c,A}} \quad (2.17m)$$

$$P_{crd} = \frac{\bar{\sigma}_{crD}}{k_{c,D} \times k_{m,D}} \times \frac{\bar{A}}{k_{c,A}} \quad (2.17n)$$

Les différents facteurs de correction utilisés dans l'équation 2.17 sont résumés dans le Tableau 2-4 et Tableau 2-5 pour le cas des éléments de structures soumis à la compression et à la flexion, respectivement. Il est à noter que seules les instabilités locale et distorsionnelle ont été considérées dans cette recherche. L'instabilité globale est supposée

empêchée par des conditions aux limites appropriées. De ce fait, dans le calcul de la capacité portante, le moment résistant M_{ne} (ou P_{ne}) peut être supposé égal au moment de plastification M_y (ou P_y). Enfin, l'approche de décomposition modale proposée dans cette thèse nécessite également le recours à ce genre de méthode afin d'être utilisée dans la DSM. Une discussion sur l'applicabilité de ces deux approches sera donnée à la fin du Chapitre 5 avec des recommandations d'utilisation.

Tableau 2-4 Facteurs de correction : Cas des éléments soumis à une compression uniforme [36]

Type de section	$k_{c,A}$	$k_{c,L}$	$k_{c,D}$	$k_{m,L}$	$k_{m,D}$
C	1.02	0.99	0.98	1.01	1.08
C avec raid.	1.02	0.97	0.99	1.01	1.07
Z	1.01	0.97	1.00	1.00	1.08
Oméga	1.03	0.99	0.97	1.04	1.06
Montant de rayonnage	1.04	0.97	1.03	1.03	1.06

Tableau 2-5 Facteurs de correction : Cas des éléments soumis à une flexion pure [36]

Type de section	$k_{c,W}$	$k_{c,L}$	$k_{c,D}$	$k_{m,L}$	$k_{m,D}$
C	1.04	0.97	0.98	1.01	1.13
C avec raid.	1.03	0.97	0.98	1.00	1.13
Z	1.02	0.97	0.98	1.01	1.06

2.6.5 Autres travaux de recherches sur la décomposition modale

Dans la section 2.6.2, nous avons présenté l'ensemble des travaux de recherches basés sur la MBFc réalisés par Ádány et ses collaborateurs. Dans cette section, nous présentons une revue de littérature complémentaire qui intègre les principaux travaux de recherche réalisés par d'autres équipes de recherche. L'objectif principal de ces travaux était soit de simplifier la démarche de dérivation des matrices de contrainte qui est la clé de voûte de la MBFc, ou bien d'étendre son champ d'application. C'est justement dans ce contexte que s'inscrit l'objectif de cette thèse qui est de développer une approche de décomposition modale basée sur la méthode des splines bandes finies (MSBF). La justification du choix de la MSBF sera discutée dans la section 3.2 du Chapitre 3, par contre la formulation de l'approche développée sera présentée dans le Chapitre 4. Les exemples de validation et d'utilisation seront discutés plus loin dans le Chapitre 5.

D'abord, [37] ont proposé une nouvelle formulation de la matrice de contrainte du sous-espace GD. La définition utilisée est basée sur deux hypothèses mécaniques ($\chi_y =$

$\chi_{xy} = 0$ et $\varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$) en remplacement des 4 critères mécaniques utilisés par [11], [12] — voir la section 2.6.2. Le résultat est une matrice de contrainte qui permet de relier tous les DDL transversaux (U, V et Θ), ainsi que, les V des nœuds non déterminants¹³ aux DDL de gauchissement V des nœuds déterminants¹⁴. La dérivation de cette matrice dans la MBFc originale d'Ádány et Schafer était une tâche très ardue. D'ailleurs, l'exposé de la démarche d'Ádány et Schafer a constitué le principal sujet d'un article d'une vingtaine de pages [11] ! La nouvelle formulation de [37] est beaucoup plus simple, mais surtout beaucoup plus générale, puisqu'elle est utilisée pour lever l'une des limites de la MBFc originale : l'étude des éléments prismatiques avec section transversale arbitraire, y compris celle qui présente des parties fermées [38]. C'est cette définition qu'on va utiliser plus loin dans le chapitre 4 pour dériver la matrice de contrainte de l'espace GD dans le contexte de la méthode des splines bandes finies. On note également qu'une nouvelle technique originale de décomposition de l'espace GD (séparer les modes globaux des modes distorsionnels) basée sur l'orthogonalité sera proposée. Par ailleurs, pour les autres espaces, à savoir l'espace L et O, les définitions originales d'Ádány et Schafer seront utilisées.

[39] a proposé une nouvelle approche de décomposition modale où aucune définition mécanique n'a été utilisée pour forcer les modes purs d'instabilité. Cette approche est basée sur la méthode des bandes finies et elle repose sur la polarisation des énergies de déformations. Autrement dit, un mode d'instabilité est identifié en comparant les énergies de déformation flexionnelle et membranaire dans les parois. À titre d'exemple, si l'énergie flexionnelle domine dans une paroi, on est devant un voilement local. L'autre cas extrême concerne les modes globaux où c'est l'énergie membranaire qui doit dominer. L'avantage majeur de cette approche est qu'elle peut être utilisée pour étudier les sections transversales arbitraires sans aucune modification dans la méthodologie de base. Ainsi, les sections ouvertes ramifiées ou non, les sections fermées contenant des parties ouvertes ou non peuvent facilement être analysées.

Plusieurs chercheurs ont essayé d'appliquer la technique de décomposition modale à la méthode des éléments finis. M. Casafont et ses collaborateurs sont les premiers qui ont proposé une technique de décomposition modale basée sur cette méthode [17], [40]. En fait, il s'agit d'une technique combinée FEM-GBT implémentée dans le code commercial d'éléments finis ANSYS. La procédure de contrainte proposée comprend deux étapes. La première étape se fait à l'aide de la GBT et elle consiste à calculer les modes purs de déformation¹⁵ recherchés¹⁶. Ensuite, dans la deuxième étape, les matrices de contrainte obtenues sont appliquées au modèle EF (type coque) afin de le contraindre à se déformer en mode purs d'instabilité. [41] ont développé une technique similaire, mais qui utilise les

¹³ On parle des V des nœuds secondaires

¹⁴ On parle des V des nœuds principaux

¹⁵ Dans le contexte de la GBT, on parle de modes fondamentaux calculés par une analyse de la section transversale

¹⁶ Ou plus précisément, les matrices de contrainte définissant les modes purs d'instabilité

fonctions de déplacements modaux de la MBFc. Cette technique a été utilisée pour étudier le comportement post-critique non linéaire des PFF.

Un autre travail de recherche très intéressant, et qui mérite d'être cité, a été proposé par [42] et [18]. Les modes fondamentaux de la GBT ont été utilisés pour contraindre un modèle EF. L'applicabilité de cette approche est beaucoup plus générale que celle proposée par M. Casafont et al., d'ailleurs, elle ne présente aucune restriction concernant la forme de la section transversale¹⁷, le type de chargement ou les conditions aux limites. Ce genre de technique suscite toujours l'intérêt des chercheurs. Très récemment, [43], [44] ont proposé une formulation similaire à celle de M. Casafont et qui combine la méthode des splines bandes finies à la GBT. Ces techniques combinées qui utilisent les matrices de contrainte dérivées de la GBT (ou autre) pour identifier les modes d'instabilité ou pour calculer les charges critiques des modes purs d'instabilité, semblent fonctionner, mais elles sont loin d'être employées par les utilisateurs potentiels.

D'autre part, Ádány et ses collaborateurs continuent de pousser les techniques de décomposition modale plus loin. Très récemment, ils ont réussi de les appliquer à la MEF. La méthode développée a été baptisée, la méthode des éléments finis contrainte, pour « The constrained finite element method (cFEM) », en anglais. D'abord, un nouveau modèle type « plaque » a été défini [45][16], puis, appliqué à des analyses linéaires de stabilité élastique des structures à parois minces. Les exemples traités couvrent des conditions aux limites et des charges générales [15][46]. La cFEM a été également utilisée dans des problèmes d'identification modale pour étudier une large gamme de problèmes structurels, y compris les profilés avec trous ou section transversale variable, voir même avec des éléments de renforcement¹⁸ [47].

Enfin, il est important de souligner que les approches de décomposition modale fondées sur la théorie des poutres généralisée¹⁹ (GBT) sont intentionnellement exclues de cette revue de littérature. La GBT est la première méthode possédant l'attrayante capacité de pouvoir classer les modes d'instabilité automatiquement [48]. Les travaux de l'équipe du Professeur D. Camotim basés sur cette méthode continuent d'être une source d'inspiration pour la communauté scientifique. Seulement, nous avons décidé de ne cibler que les approches implémentées dans les méthodes numériques utilisant des modèles « type plaque », à savoir la MBF, la MEF ou les méthodes combinées FEM-GBT (ou la MBFc). Ces méthodes sont similaires à la méthode des splines bandes finies ce qui va nous aider, d'abord, à mieux cerner la démarche de décomposition modale, puis à développer notre approche originale de décomposition modale basée sur cette méthode. Les similitudes et les différences de notre approche avec les méthodes de littérature seront discutées plus loin dans le chapitre 4 quand nous présenterons notre approche de décomposition modale. Par

¹⁷ y compris les sections circulaires ou celle qui présente des coins arrondis

¹⁸ Stiffened section, en anglais

¹⁹ La théorie des poutres généralisée (GBT) est une théorie de barre à parois minces qui (i) tient compte des déformations locales et qui (ii) fournit une représentation avantageuse du champ de déformation, sous la forme d'une combinaison de déformations de base de la section transversale

ailleurs, les lecteurs intéressés par la GBT pourront se référer à l'article de [49], où une excellente présentation de cette méthode est fournie avec les différentes formulations et l'ensemble du domaine de son application.

2.7 Conclusion

Pour résumer, dans ce chapitre, nous avons commencé par rappeler les problèmes d'instabilités liés aux éléments de structure à paroi mince, notamment l'identification des modes purs d'instabilité qui sont à l'origine du développement des différentes méthodes de décomposition modale. Nous avons ensuite présenté les travaux de recherches basés sur la méthode des bandes finies contrainte en insistant sur son principe, ses hypothèses et ses différentes formulations. Puis, nous avons présenté les différentes approches permettant son utilisation dans la conception des structures en profilés formés à froid, c'est-à-dire la méthode de la résistance directe. Nous avons terminé ce chapitre par une synthèse bibliographique en abordant la plupart des techniques existantes de décomposition modale, notamment celles implémentées dans le contexte de la MBF, MSBF ou MEF.

Dans le chapitre suivant, nous allons rappeler les critères recherchés dans une méthode de décomposition modale, d'une manière générale, puis nous présenterons les motivations qui nous ont amené à développer la nouvelle « splines bandes finies contraintes ». Cela avant de présenter les fondements théoriques de la méthode des splines bandes finies conventionnelle nécessaires pour la formulation de notre démarche originale de décomposition modale qui sera présentée plus loin dans le chapitre 4.

Chapitre 3

La méthode des splines bandes fines conventionnelle

3.1 Introduction

La méthode des splines bandes fines a été introduite pour l'analyse des plaques minces élastiques et des coques dans les années quatre-vingt par Fan [50]. Elle fut ensuite efficacement utilisée pour étudier la stabilité linéaire et non linéaire des structures à parois minces. Dans cette thèse, nous développerons une nouvelle version de cette méthode qui doit permettre de fournir les charges critiques des modes purs d'instabilité et les modes correspondants. Le développement de la nouvelle « splines bandes fines contrainte¹ », vise à améliorer les performances de cette méthode en vue de son utilisation d'une manière d'abord plus efficace puis, plus générale dans la nouvelle méthode de conception des profilés formés à froid : la DSM ou méthode de la résistance directe.

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler les critères recherchés dans une méthode de décomposition modale, d'une manière générale, puis nous présenterons les motivations qui nous ont amené à développer la nouvelle « splines bandes fines contrainte ». Ensuite, nous présenterons une synthèse bibliographique sur les différents travaux de recherches basés sur la méthode des splines bandes fines. Les évolutions théoriques qu'elle a connues, les tendances théoriques et ses différentes applications y sont brièvement évoquées. Nous y exposerons ensuite les éléments de base de la méthode des splines bandes fines conventionnelle. En dernier lieu, nous présenterons notre premier logiciel d'étude de la stabilité élastique basé sur cette méthode, développé il y a plus de dix ans [51]. Ce logiciel a été baptisé SHEBA, pour « SHEll Bucking Analysis » en anglais. Une nouvelle version sera développée et validée dans le cadre de cette thèse. Seul un exemple illustratif sera présenté dans ce chapitre dont le but est de montrer la particularité des résultats type « splines bandes fines » en comparaison avec ceux de la MBF et la GBT.

¹ The constrained spline Finite Strip Method (csFSM), en anglais

L'ensemble des résultats de validation de la version originale de SHEBA peuvent être trouvés dans [51].

3.2 Justification du choix de la méthode des splines bandes finies

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré que la question d'identification modale n'est pas une question « purement » théorique. Dans la méthode de résistance directe (DSM), qui est une nouvelle approche de dimensionnement des profilés formés à froid, la capacité portante nominale d'un élément de structure est déterminée en fonction des forces critiques élastiques des trois instabilités de base : locale, distorsionnelle et globale. L'évaluation de ces charges critiques peut être faite à l'aide des méthodes conventionnelles d'analyse de stabilité élastique, à savoir la MBF, la MSBF ou la MEF. La MBF conventionnelle est très bien intégrée à la démarche de la DSM. En fait, elle permet des analyses efficaces de la stabilité élastique des structures à paroi mince, seulement l'identification des charges critiques associées aux modes purs d'instabilité obtenus par l'analyse linéaire de stabilité n'est pas évidente. L'identification des modes locaux et distorsionnels purs et le calcul des charges critiques correspondantes posent plus de problèmes, puisqu'il est relativement simple de calculer les charges critiques des modes globaux pour la plupart des cas pratiques.

Les méthodes spécialisées permettant l'identification automatique des modes d'instabilité ont simplifié énormément le travail d'identification. La méthode des bandes finies contrainte (MBFc), qui est l'une des méthodes qui possèdent cette attrayante capacité, permet la séparation de l'espace général des déformations couvert par la MBF en des sous-espaces utiles. Ainsi, les efforts critiques liés aux modes purs d'instabilité sont directement calculés. Les charges critiques des modes purs fournies par cette méthode ne peuvent pas être utilisées directement dans la DSM, comme souligné dans la section 2.6.4 du Chapitre 2. Des chercheurs se sont penchés sur la question et des approches permettant l'utilisation des résultats de décomposition modale calculés par la MBFc dans la DSM existent et semblent fonctionner.

Au-delà des questions d'applicabilité de la MBFc dans la DSM, la MBFc reste un outil très important dans la compréhension du comportement et des modes d'instabilité des structures à parois minces. Néanmoins, la MBF et sa version améliorée (la MBFc) ont une applicabilité limitée², comme souligné dans la section 2.6.2 du Chapitre 2. En fait, elles fonctionnent uniquement pour des problèmes structurels standards : des éléments structuraux individuels à parois minces, des conditions aux limites longitudinales et chargements standards (flexion et/ou compression dans le plan de la bande exclusivement). D'ailleurs, une grande partie des problèmes structurels introduits dans les deux dernières versions du code américain [8], [9] ne peuvent pas être étudiés par la MBF ou la MBFc. À

² Les lecteurs intéressés par la cFSM, d'une manière générale, peuvent également consulter l'excellente revue réalisée par Schafer et ses collaborateurs sur les différentes applications et travaux de recherches basés sur cette méthode, publiée dans la revue « Thin-Walled Structures » [32].

titre d'exemple, on peut citer le problème de détermination de la résistance des éléments de structure soumis au cisaillement ou aux charges combinées, l'étude des éléments de structure présentant des conditions aux limites non standard ou des perforations, le traitement du problème des colonnes (ou des poutres) composées...etc. (voir la section 2.3.3 pour plus de détails).

Divers travaux de recherches ont tenté de lever certaines insuffisances de la MBFc, notamment par des approches combinées MEF-MBFc [41], MEF-GBT [17] ou MSBF-GBT [43], mais il est clair qu'elles sont loin d'être à la portée des utilisateurs potentiels. La grande variété des problèmes structurels traités par la DSM et les domaines de recherches qui restent relativement inexplorés³ montrent que la question du calcul et d'identification explicite de la charge critique liée à un mode pur d'instabilité donné n'est toujours pas entièrement résolue. Autrement dit, la DSM a besoin toujours d'outils fiables et efficaces permettant l'étude de la stabilité élastique des colonnes et des poutres formées à froid.

Avant de présenter en détail l'objectif de cette thèse, qui est le développement d'une technique de décomposition modale basée sur la méthode des splines bandes finies, nous allons exposer les critères recherchés dans une méthode de décomposition modale d'une manière générale, puis les motivations qui nous ont amenés à développer « la méthode des splines bandes finies contrainte ».

Alors, une méthode de décomposition modale générale devrait être capable de calculer les charges critiques des modes purs d'instabilité individuellement et en interaction, et cela pour :

- Des éléments de structure avec des sections transversales arbitraires (avec présence ou non des parties fermées),
- Des éléments de structure avec des conditions aux limites générales (conventionnelles ou non),
- Des éléments de structure soumis à des contraintes conventionnelles ou non (compression, flexion, cisaillement...etc.),
- Et d'une manière plus générale, traiter des configurations non conventionnelles (à titre d'exemple, des éléments de structures soumis à des contraintes irrégulières ou avec présence des trous).
- Il est important, aussi, qu'elle soit capable de décomposer des solutions de stabilité élastique caractérisées par des ondulations non harmoniques, ou bien celles qui présentent des instabilités couplées avec différents nombres de demi-ondes pour chaque type de stabilité. À titre d'exemple, un mode couplé LD d'une section en C avec 6 demi-ondes locales au niveau de l'âme et 3 demi-ondes distorsionnelles au niveau des deux semelles). On note qu'il est impossible d'avoir ce type de résultat par la MBF.

³ Voir la section 2.3.3 pour plus de détails

D'autre part, une méthode de décomposition générale doit être basée sur des définitions mécaniques claires et non ambiguës, notamment pour les principaux types d'instabilités. Sur la base de ces résultats, il serait possible de développer une méthode de classification des modes d'instabilité. Autrement dit, il serait possible de quantifier la contribution de chacun des modes purs d'un mode d'instabilité général résultant d'un calcul par une des méthodes numériques, on parle alors d'une méthode d'identification modale automatique.

La méthode qui pourrait satisfaire les critères énumérés ci-dessus, ou à la limite qui permettrait de lever certaines limites des méthodes de décomposition modale disponibles, doit certainement être basée sur une méthode numérique, un logiciel est donc nécessaire. Le logiciel à développer doit être facile à utiliser, et en même temps, à entretenir, comme le logiciel disponible basé sur la MBF (CUFSM). D'autre part, il doit rester à la portée des ingénieurs en vue de son utilisation dans la DSM. D'ailleurs, le véritable regain d'intérêt qu'a connu la méthode des bandes finies avec l'arrivée de la DSM est dû à Schafer et son programme CUFSM qui a été mis gratuitement à la disposition des chercheurs et des ingénieurs afin de promouvoir l'utilisation de la DSM. Durant cette dernière décennie, la MBF s'est imposée comme moyen simple et efficace pour étudier l'ensemble des modes d'instabilité des profilés formés à froid. Actuellement, elle bénéficie du privilège d'être nommément citée dans le code américain [1], [8], [9].

La méthode des éléments finis est sans doute la méthode numérique la plus puissante dont on dispose. Une approche de décomposition modale basée sur cette méthode devrait satisfaire les critères d'applicabilité énumérés ci-haut. D'ailleurs, c'est ce qu'a fait Ádány [15], [16], [45]–[47] très récemment, en développant la méthode des éléments finis contrainte (cFEM). Néanmoins, la formulation de cette méthode est très compliquée, en plus, elle exige des modèles très élaborés, assez compliqués à préparer et des moyens de calcul onéreux. En fait, nous n'imaginons pas qu'elle soit disponible ou assez connue par les utilisateurs potentiels, à la limite dans un avenir prévisible.

La méthode des splines bandes finies conventionnelle est une variante de la méthode des bandes finies qui nous semble capable de répondre aux objectifs fixés. D'ailleurs, elle peut être considérée comme une alternative intéressante à la FEM du fait qu'elle simplifie énormément l'analyse de la stabilité des structures à parois minces. En fait, elle a l'énorme avantage, grâce au type particulier de ses fonctions d'interpolations (B3-splines), de permettre la modélisation d'une grande variété de conditions aux limites (longitudinales, transversales ou des appuis intermédiaires...etc.), ainsi qu'un chargement arbitraire (elle prend en compte un chargement longitudinal, transversal et de cisaillement...etc.). Cette méthode a été utilisée dans une large gamme de problèmes structurels et elle est continuellement modernisée afin d'améliorer ses performances (voir la section 3.3 pour plus de détails).

Dans cette thèse, nous proposerons également une nouvelle version de cette méthode qui doit permettre la décomposition modale. La méthode développée est censée, d'une part, lever certaines insuffisances de la MBF_c, et d'autre part, préserver la simplicité, l'efficacité et la souplesse recherchées dans une méthode numérique pour le calcul des

charges critiques des modes purs d'instabilité et l'identification d'un mode général. La formulation des différentes matrices de contrainte, qui est une étape cruciale dans les démarches de décomposition modale, utilise également des critères mécaniques simples et surtout beaucoup plus général et efficace. La nouvelle « splines bandes finies contrainte » est implantée dans SHEBA. Le développement de ce logiciel vise à améliorer les performances de la méthode des splines bandes finies en vue de son utilisation d'une manière d'abord plus efficace, puis plus générale dans la nouvelle méthode de conception des profilés formés à froid : la DSM ou méthode de la résistance directe.

3.3 Travaux de recherches basés sur la méthode des splines bandes finies

Lau et Hancock [52] sont les premiers qui ont utilisé cette méthode pour étudier le flambement des plaques minces et des structures à parois minces soumises à des contraintes de compression longitudinale et transversale et aux cisaillements en considérant diverses conditions aux limites. Les mêmes auteurs l'ont utilisé pour étudier le flambement inélastique d'éléments structuraux à parois minces et de plaques en considérant une relation contrainte-déformation non linéaire, l'écrouissage et les contraintes résiduelles [20]. [53] ont formulé une analyse élastique non linéaire, basée sur la méthode des splines bandes finies, afin d'étudier les comportements post-critiques des trois modes d'instabilité (c.-à-d., local, distorsionnel et global) en tenant compte des imperfections géométriques, des chargements arbitraires et des conditions aux limites complexes. Le comportement linéaire et non linéaire d'éléments à paroi mince en intégrant une réponse non linéaire qui tient compte de la réserve post-critique du voilement et du comportement plastique a été étudié par Hancock et al. [54]. Le domaine couvert par cette étude est celui des modes locaux, distorsionnels et globaux ; ceci a été réalisé au moyen de la méthode des splines bandes finies ainsi que de la méthode des bandes finies conventionnelle.

La méthode des splines bandes finies a été utilisée également pour étudier les structures à parois minces avec trous rectangulaires et appuis intermédiaires [55]. Madasamy et al., ont utilisé des fonctions B3-splines à intervalles inégaux dans la direction longitudinale, ce qui a permis un raffinement sélectif du maillage afin d'améliorer l'exactitude de la solution à l'endroit des effets discrets⁴. Une méthode simplifiée pour l'inclusion de supports externes et internes dans la MSBF a été proposée par Vrcelj et al., [56]. Dans cet article, une technique simple permettant de supprimer le besoin de splines modifiées a été présentée. La même équipe de recherche, dirigée par Bradford, a utilisé les polynômes de Legendre et des fonctions splines modifiées pour analyser la stabilité et les vibrations libres des plaques et des poutres à paroi mince [57]. Ces modifications ont amélioré considérablement les performances de la MSBF par rapport à celles de la méthode conventionnelle.

⁴ Dans cette étude, les effets discrets sont les ouvertures

[26] a développé une méthode combinée MSBF-MEF permettant l'étude de la stabilité élastique des colonnes et des poutres composées. L'effet discret des diagonales et étrésoillons a été pris en compte grâce au type particulier de ses fonctions d'interpolations (B3-splines). Par ailleurs, un élément fini « poutre » a été introduit afin de pouvoir modéliser les étrésoillons et les diagonales.

[58] sont les premiers qui ont introduit « la méthode des splines bandes finies isoparamétriques » pour l'analyse de vibration libre et de la stabilité des coques. Cette technique a été utilisée, plus tard, par Eccher et al. pour l'analyse de la stabilité élastique en considérant la non-linéarité géométrique des structures à parois minces perforées [59][60]. Récemment, Yao et Rasmussen [61] [62] ont présenté la formulation de la méthode des splines bandes finies isoparamétriques pour une analyse non linéaire (matérielle et géométrique) des structures à parois minces. Des modèles de matériaux inélastiques ont été utilisés pour la prédiction du comportement post-élastique des structures en acier à parois minces perforées. Cette méthode a été utilisée par Lotfi et al., [63] pour étudier le comportement inélastique de l'instabilité locale observé dans les plaques minces effilées⁵ avec et sans supports intermédiaires. La MSBF a été intensivement utilisée par Hancock et ses collaborateurs pour étudier la stabilité élastique des profilés formés à froid soumis aux cisaillements — sections en C avec raidisseurs intermédiaires — voir la référence [64], à titre d'exemple.

3.4 La méthode des splines bandes finies : la théorie

3.4.1 La fonction spline

La fonction spline a été introduite par Schoenberg pour résoudre certains problèmes d'ajustement de courbe⁶. Les classes de fonction type « spline » possèdent de nombreuses propriétés structurelles ainsi que d'excellentes puissances d'approximation. Elles sont faciles à évaluer et à manipuler dans un ordinateur. Le principal inconvénient de ce type de polynômes est que leurs classes sont relativement inflexibles. Afin d'éliminer les oscillations sévères qui apparaissent souvent dans les fonctions polynomiales relativement inflexibles dans des intervalles plus grands, des polynômes de faible degré ont été utilisés pour diviser l'intervalle en plus petits morceaux conduisant à des fonctions polynomiales par morceaux. Les fonctions de type « spline » maintiennent la flexibilité des polynômes par morceaux tout en assurant un certain degré de souplesse. Un autre intérêt de cette fonction d'interpolation réside dans le caractère localisé de la fonction d'interpolation qui y est employée.

Les fonctions B-splines à intervalles inégaux de n'importe quel ordre peuvent être dérivées des fonctions B-splines normalisées comme une solution élémentaire de l'équation de Green :

⁵ Skew thin thickness-tapered plates, en anglais

⁶ Fitting, en anglais

$$G_{k(y;y_i)} = (y - y_i)^{k-1} = \begin{cases} (y - y_i)^{k-1}, & \text{pour } y \geq y_i \\ 0, & \text{pour } y < y_i \end{cases} \quad (3.1)$$

$$B_{i,k} = \frac{(-1)^k [y_1, \dots, y_{i+k}] G_{k(y;y_i)}}{(y_{i+k} - y)} \quad (3.2)$$

où k est un entier positif fixe et y est une séquence de nombre réel.

À partir de l'expression générale ci-dessus, la B3-spline cubique comme représentée sur la Figure 3.1 peut être définie par :

$$\phi_i(y) = \begin{cases} A_i(y - y_{i-2})^3, & y \in [y_{i-2}, y_{i-1}] \\ A_i(y - y_{i-2})^3 + C_i(y - y_{i-1})^3, & y \in [y_{i-1}, y_i] \\ B_i(y_{i+2} - y)^3 + D_i(y_{i+1} - y)^3, & y \in [y_i, y_{i+1}] \\ B_i(y_{i+2} - y)^3, & y \in [y_{i+1}, y_{i+2}] \end{cases} \quad (3.3)$$

Où

$$A_i = \frac{1}{(y_{i+1} + y_{i-2})(y_i - y_{i-2})(y_{i-1} - y_{i-2})}$$

$$B_i = \frac{1}{(y_{i+2} - y_{i-1})(y_{i+2} - y_i)(y_{i-2} - y_{i+1})}$$

$$C_i = \frac{-(y_{i+2} - y_{i-2})}{(y_{i+2} - y_{i-1})(y_{i+1} - y_{i-1})(y_i - y_{i-1})(y_{i-1} - y_{i-2})}$$

$$D_i = \frac{-(y_{i+2} - y_{i-2})}{(y_{i+1} - y_{i-2})(y_{i+1} - y_{i-1})(y_{i+1} - y_i)(y_{i+2} - y_{i+1})}$$

L'expression générale de B3-spline se réduit à l'expression simple suivante pour B3-spline à intervalles égaux représentés sur Figure 3.1.

$$\phi_i(y) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (y - y_{i-2})^3, & y \in [y_{i-2}, y_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(y - y_{i-1}) + 3h(y - y_{i-1})^2 - 3(y - y_{i-1})^3, & y \in [y_{i-1}, y_i] \\ h^3 + 3h^2(y_{i+1} - y) + 3h(y_{i+1} - y)^2 - 3(y_{i+1} - y)^3, & y \in [y_i, y_{i+1}] \\ (y_{i+2} - y)^3, & y \in [y_{i+1}, y_{i+2}] \end{cases} \quad (3.4)$$

Afin d'incorporer les conditions aux limites appropriées à la fonction spline, trois splines locales doivent être modifiées à chaque limite. Afin de simplifier l'expression spline modifiée, les trois nœuds de section adjacents à la limite doivent être d'espacement égal, comme le montre la Fig.3.1(c). La fonction B3-spline et ses dérivées sont utilisées pour satisfaire les conditions aux limites longitudinales et intermédiaires. Il y a lieu de noter que la fonction B3-spline a une continuité C^2 , alors que les polynômes cubiques de Lagrange et de Hermite ont seulement une continuité C^1 et C^0 , respectivement.

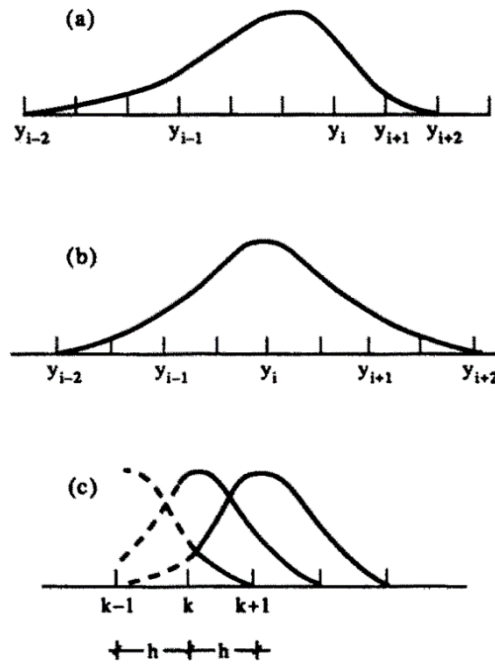


Figure 3-1 B3-spline à intervalles (a) inégaux et (b) égaux (c) les trois sections splines concernées par les conditions aux limites – la limite est k .

3.4.2 Champ de déplacement

Pour représenter la variation des déplacements dans le sens longitudinal de la section, des fonctions splines sont utilisées. Le déplacement est pris comme la superposition de $(m+3)$ splines locales.

$$f(Z) = \sum_{k=-1}^{m+1} \alpha_k \phi_k(Z) \tag{3.5}$$

où $\phi_k(Z)$ est une fonction spline locale. La figure 3.2(a) présente une fonction B3-spline, à espacement constant, alors que la figure 3.2(b) présente sa combinaison linéaire. Les coefficients α_k sont les inconnues de la méthode des splines bandes finies ; en d'autres termes se sont les degrés de liberté du modèle splines bandes finies et qui peuvent être vues comme « amplitudes des fonctions spline ».

L'utilisation de la fonction B3-spline à intervalles égaux implique la division de la longueur L de la section en m intervalles de longueur $h=L/m$, en utilisant $m+3$ sections nodales numérotées de -1 à $m+1$. Les deux sections nodales situées en dehors de la longueur sont ajoutées afin d'avoir le même nombre de degrés de liberté pour toutes les sections nodales situées à l'intérieur du domaine. Il y'a lieu de préciser qu'une fonction B3-spline locale n'est non nulle que sur quatre intervalles (voir Figure 3.2(a)) et qu'elle possède une continuité C^2 . En fait, c'est la combinaison linéaire des fonctions splines qui permet à cette méthode de s'adapter parfaitement à des effets localisés (par exemple, une force localisée ou un appui intermédiaire).

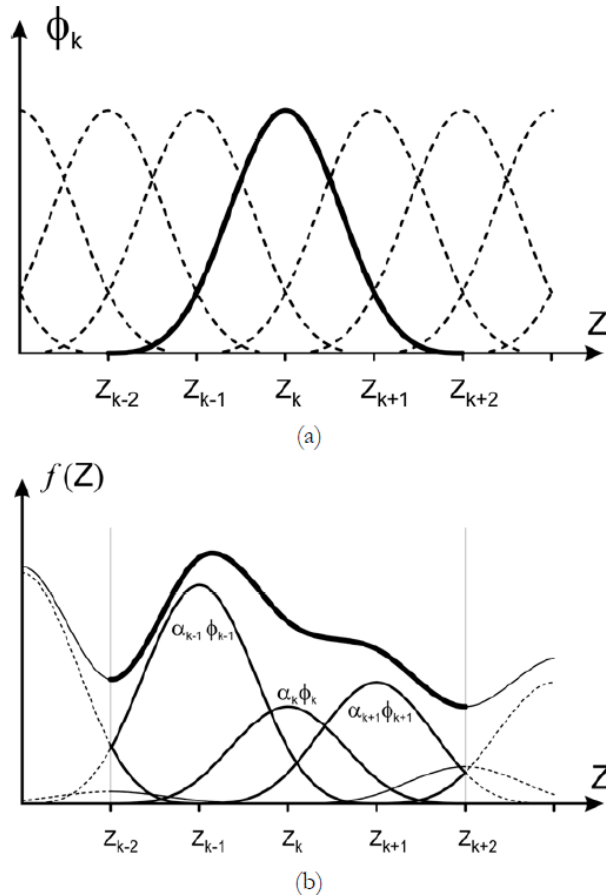


Figure 3-2 (a) Une fonction B3-spline à intervalles égaux et (b) une combinaison linéaire de B3-splines.

3.4.3 Modélisation – Fonctions d'interpolation

Dans la méthode des splines bandes finies, les sections à parois minces sont discrétisées en bandes longitudinales en utilisant n lignes nodales. Ces lignes nodales sont parallèles à la direction de l'interpolation spline, c.-à-d. parallèles à l'axe des y (voir Figure 3.3), et ont toutes la même longueur L . Dans ce travail, la fonction B3-spline à intervalles égaux est utilisée. Cela implique la division des lignes nodales en m intervalles en utilisant $m+3$ sections nodales numérotées de -1 à $m+1$ (voir Figure 3.4). Les deux sections situées en dehors de la longueur sont nécessaires pour définir totalement le champ de déplacement. Les degrés de liberté par section nodale, k , sont au nombre de 4, et ils sont notés u_k, v_k, w_k et θ_k . Le nombre total des inconnues dans une modélisation par splines bandes finies d'une structure à parois minces est donc égal à $4n(m+3)$.

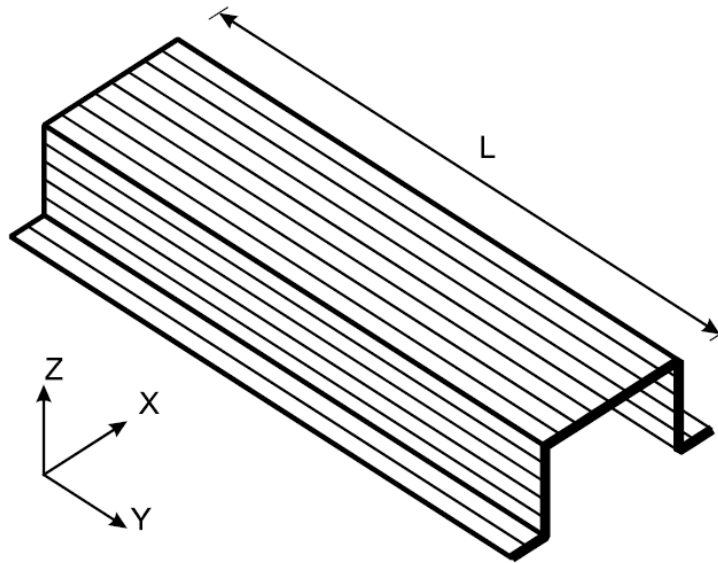


Figure 3-3 Modélisation en bandes d'une structure à parois minces.

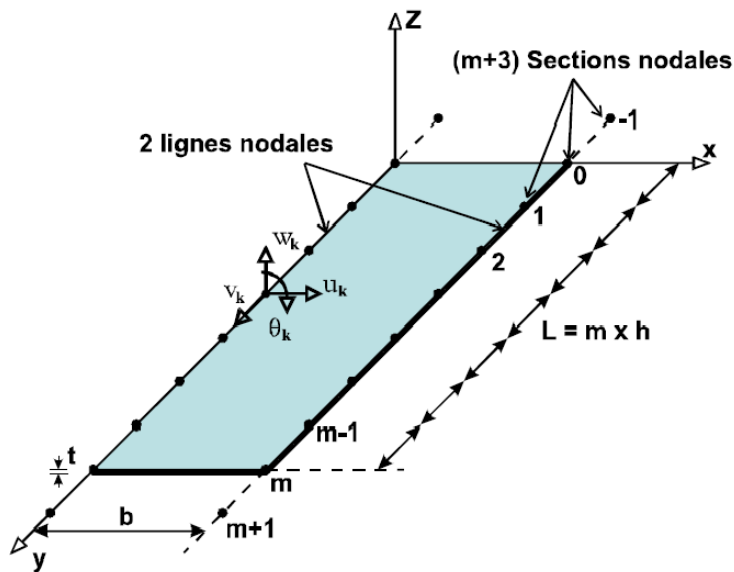


Figure 3-4 Une B3-spline bande finie typique.

Le vecteur de degrés de liberté d'une ligne nodale q contient 4 vecteurs, un par type de déplacement :

$$\mathbf{d}_q = [\mathbf{u}_q^T \mathbf{v}_q^T \mathbf{w}_q^T \boldsymbol{\theta}_q^T]^T \quad (3.6)$$

Chaque vecteur contient $m+3$ composantes qui sont les amplitudes du déplacement au niveau des sections nodales de la ligne q . Par exemple, le vecteur \mathbf{u}_q est défini par :

$$\mathbf{u}_q = \langle u_{-1} \ u_0 \ \dots \ u_k \ \dots \ u_m \ u_{m+1} \rangle^T \quad (3.7)$$

Les autres vecteurs sont définis de la même manière.

Dans la méthode des splines bandes finies, le vecteur total des champs de déplacement \mathbf{u} d'une bande finie est approché par interpolation des degrés de liberté, \mathbf{d} , des deux lignes nodales, i et j , qui forment la bande, soit

$$\mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{d}=[\mathbf{N}_{uv} \ \mathbf{N}_w][\mathbf{d}_{uv}^T \ \mathbf{d}_{w\theta}^T]^T \quad (3.8)$$

\mathbf{N} est la matrice des fonctions d'interpolation.

Le vecteur \mathbf{d} est partitionné en partie membranaire et flexionnelle. Explicitement cela donne :

$$\mathbf{d}=[\mathbf{d}_{uv}^T \ | \ \mathbf{d}_{w\theta}^T]=[\mathbf{u}_i^T \ \mathbf{v}_i^T \ \mathbf{u}_j^T \ \mathbf{v}_j^T \ | \ \mathbf{w}_i^T \ \boldsymbol{\theta}_i^T \ \mathbf{w}_j^T \ \boldsymbol{\theta}_j^T] \quad (3.9)$$

Les déplacements membranaires, c.-à-d. les déplacements dans le plan de la bande, sont approchés par des interpolations linéaires dans le sens transversal et par des interpolations B3-splines dans le sens longitudinal.

$$\mathbf{u}=[N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{ui} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\psi}_{uj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v}=[N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{vi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\psi}_{vj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_j \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Quant au déplacement flexionnel, c.-à-d. le déplacement perpendiculaire au plan de la bande, il est approché par un polynôme cubique dans le sens transversal et par des interpolations B3-splines dans le sens longitudinal.

$$\mathbf{w}=[N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{wi} & & & \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\psi}_{\theta i} & & \\ & & \boldsymbol{\psi}_{wj} & \\ \mathbf{0} & & & \boldsymbol{\psi}_{\theta j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{w}_j \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Les paramètres N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 et N_6 sont les fonctions d'interpolation transversales et $\boldsymbol{\psi}_{ui}, \boldsymbol{\psi}_{vi}, \boldsymbol{\psi}_{wi}, \boldsymbol{\psi}_{\theta i}, \boldsymbol{\psi}_{uj}, \boldsymbol{\psi}_{vj}, \boldsymbol{\psi}_{wi}$ et $\boldsymbol{\psi}_{\theta j}$ sont les fonctions d'interpolation B3-splines. Les expressions des fonctions d'interpolation transversales sont données par :

$$N_1=1-\bar{x}$$

$$N_2=\bar{x}$$

$$N_3=1-3\bar{x}^2+2\bar{x}^3$$

$$N_4=x(1-2\bar{x}+\bar{x}^2)$$

$$N_5=3\bar{x}^2-2\bar{x}^3$$

$$N_6=x(\bar{x}^2-\bar{x})$$

Où $\bar{x} = x/b$ et b désigne la largeur de la bande. Il est à noter que les fonctions B3-splines sont des vecteurs lignes et chacun d'eux est composé de $(m + 3)$ B3-splines locales. Un exemple est donné dans l'équation (3.13) pour le cas du DDL u du nœud i .

$$\Psi_{ui} = [\bar{\Psi}_{-1}^{ui} \quad \bar{\Psi}_0^{ui} \quad \bar{\Psi}_1^{ui} \quad \psi_2^{ui} \quad \psi_k \quad \psi_{nm-2}^{ui} \quad \bar{\Psi}_{nm-1}^{ui} \quad \bar{\Psi}_{nm}^{ui} \quad \bar{\Psi}_{nm+1}^{ui}] \quad (3.13)$$

Pour tenir compte des différentes conditions aux limites dans le sens longitudinal (soit à $y=0$ et $y=L$), il y a lieu de modifier les fonctions B3-splines locales au niveau des trois sections nodales extérieures. Pour chaque type de conditions aux limites, la modification des trois B3-splines s'opère sur chacune des deux limites comme indiqué dans le Tableau 3.1.

Tableau 3-1 Les B3-splines modifiées vérifiant les conditions aux limites.

Type de conditions aux limites	B3-splines modifiées		
	$\bar{\psi}_{-1}$	$\bar{\psi}_0$	$\bar{\psi}_{+1}$
Libre	ψ_{-1}	$\psi_0 - 4\psi_{-1}$	$\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_0 + \psi_1$
Simplement appuyé	Éliminée	$\psi_0 - 4\psi_{-1}$	$\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_0 + \psi_1$
Encastré	Éliminée	Éliminée	$\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_0 + \psi_1$

3.4.4 Matrices de rigidité

La démarche de dérivation des matrices de rigidité est identique à celle de la méthode des bandes finies conventionnelle ou encore de la méthode des éléments finis. Les déformations dans une bande spline sont décomposées en deux parties, membranaire et flexionnelle. Les déformations membranaires, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, sont celles du plan moyen de la bande et respectent les hypothèses d'un état de contrainte plane. Quant aux déformations flexionnelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_f$, elles correspondent à la théorie de flexion des plaques minces de Kirchoff et sont par conséquent nulles au niveau du plan moyen et ne dépendent que de la flèche v .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T = \mathbf{N}'_{uv} \mathbf{d}_{uv} = \mathbf{B}_m \mathbf{d}_{uv} \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T = \mathbf{N}''_w \mathbf{d}_{w\theta} = \mathbf{B}_f \mathbf{d}_{w\theta} \quad (3.16)$$

Le vecteur de déformations est relié au vecteur de déplacements par : $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}$. Les déformations sont donc exprimées en fonction de dérivées des fonctions d'interpolation, \mathbf{N} , et des déplacements nodaux, \mathbf{d} . La matrice de rigidité est dérivée en écrivant l'énergie

potentielle de déformation et en considérant une loi de comportement élastique linéaire orthotrope : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (3.17)$$

Où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_z E_1 & 0 \\ \nu_x E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \text{ avec } E_1 = \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_z}, E_2 = \frac{E_z}{1-\nu_x \nu_z} \text{ et } \nu_z E_x = \nu_x E_z \quad (3.18)$$

Les constantes, E_x et E_z , sont les modules d'élasticité et ν_x et ν_z sont les coefficients de poisson, suivant les deux directions principales x et z , respectivement ; G est le module de cisaillement.

Les comportements membranaire et flexionnel sont découplés. C'est la raison pour laquelle les sous-matrices de rigidité correspondantes sont déterminées séparément. La matrice de rigidité de la bande spline prend la forme suivante :

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{em} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ef} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Avec

$$\mathbf{k}_{em} = \int \mathbf{B}_m^T \mathbf{E} \mathbf{B}_m dV \text{ et } \mathbf{k}_{ef} = \int \mathbf{B}_f^T \mathbf{E} \mathbf{B}_f dV$$

Les expressions détaillées se trouvent, entre autres, dans l'article de Lau et collab. [52] ou bien dans les travaux de Boumechra [65].

3.4.5 Matrices de rigidité géométrique

La méthode des splines bandes finies permet de traiter, en plus d'un chargement de compression longitudinale, un chargement de compression transversale et un cisaillement dans le plan de la bande (voir Figure 3.5). Les matrices de rigidité géométrique, ou bien de stabilité, sont formulées pour chaque état de contrainte appliqué à une bande spline. Dans ce travail, seule une compression longitudinale uniforme (σ_y) qui peut varier linéairement suivant la largeur de la bande est considérée. La matrice de rigidité géométrique, ou de stabilité, correspondante est calculée en considérant l'énergie potentielle additionnelle due à ces forces en parcourant le déplacement, suivant y , des extrémités longitudinales causé par la partie non linéaire de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_y$:

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^L \int_0^b \lambda \sigma_y \left(\left(\frac{\partial u^2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w^2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v^2}{\partial z} \right) \right) d_x d_y d_z \quad (3.20)$$

$$\text{Avec } \sigma_y = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{b}$$

On peut écrire alors

$$W = -\frac{1}{2} t \int_0^L \int_0^b \lambda (\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{b}) \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} \right\} d_x d_y \quad (3.21)$$

En tenant compte des équations (3.10) (3.11) et (3.12), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = [N] \frac{\partial [\phi]}{\partial z} \{\delta\} \quad (3.22)$$

Avec :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_M] & [0] \\ [0] & [N_F] \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} [\phi_M] & [0] \\ [0] & [\phi_F] \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

En remplaçant l'équation (3.22) dans l'équation (3.21), le travail W s'écrit comme suit :

$$W = -\frac{1}{2} t \lambda \int_0^L \int_0^b (\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{b}) \{\delta\}^T \frac{\partial}{\partial z} [\phi]^T [N]^T [N] \frac{\partial [\phi]}{\partial z} [\delta] d_x d_y \quad (3.25)$$

L'énergie potentielle est la somme de l'énergie de déformation et du travail des états de contraintes appliqués sur la bande spline. Dans notre cas elle s'écrit :

$$V = U + W = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} d_x d_z - \frac{1}{2} t \lambda \int_0^L \int_0^b (\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{b}) \{\delta\}^T \frac{\partial}{\partial z} [\phi]^T [N]^T [N] \frac{\partial [\phi]}{\partial z} [\delta] d_x d_y \quad (3.26)$$

En introduisant le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale, on arrive à une définition formelle de la matrice de rigidité géométrique, \mathbf{k}_g :

$$\mathbf{k}_g = t \int_0^L \int_0^b (\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{b}) \frac{\partial}{\partial z} [\phi]^T [N]^T [N] \frac{\partial [\phi]}{\partial z} [\delta] d_x d_y \quad (3.27)$$

D'une manière similaire à la matrice de rigidité, il est possible de calculer les matrices de rigidité géométrique membranaire, \mathbf{k}_{gm} , et flexionnelle, \mathbf{k}_{gf} , séparément.

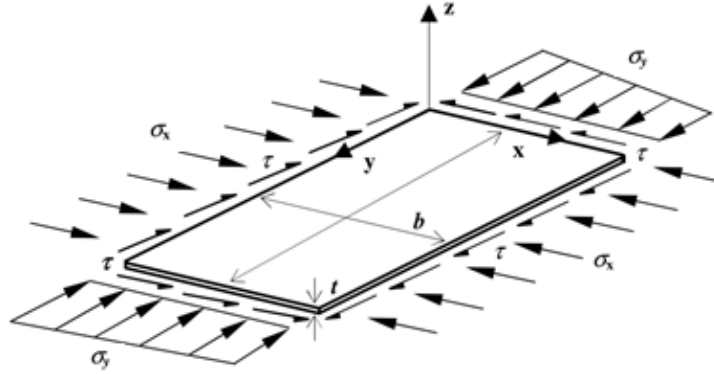


Figure 3-5 Chargement de base sur une B3-spline bande finie.

3.4.6 Transformation et assemblage

Avant de les assembler, les matrices locales de rigidité et de stabilité doivent être transformées du repère local de la bande spline vers un repère global. Dans la méthode des splines bandes finies, les bandes ne peuvent se déformer qu'autour de l'axe longitudinal y . Les axes locaux y et global Y doivent donc rester parallèles.

L'orientation d'une bande s quelconque par rapport à un repère global est définie par un seul angle $\alpha^{(s)}$, l'angle entre les axes local x et global X . Ainsi, les 4 degrés de liberté locaux, $[u_i^k \ v_i^k \ w_i^k \ \theta_i^k]$, d'une section nodale k de cette bande s sont reliés aux quatre degrés de liberté globaux de cette section nodale, $[U_i^k \ V_i^k \ W_i^k \ \Theta_i^k]$, par :

$$\begin{Bmatrix} u_i^k \\ w_i^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha^{(s)} & \sin \alpha^{(s)} \\ -\sin \alpha^{(s)} & \cos \alpha^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^k \\ W_i^k \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

et

$$\begin{Bmatrix} v_i^k \\ \theta_i^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i^k \\ \Theta_i^k \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

En écrivant les équations (3.28) et (3.29) pour les $(m+3) \times 2$ DDL de la bande, on arrive à relier tous les DDL locaux, $\mathbf{d}^{(s)}$, de la bande s à ses DDL globaux, $\mathbf{D}^{(s)}$.

$$\mathbf{d}^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)} \mathbf{D}^{(s)} \quad (3.30)$$

Les matrices de rigidité et de stabilité de la bande (s) exprimées dans le repère global peuvent être calculées par transformation des matrices locales :

$$\mathbf{K}_e^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_e^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad (3.31)$$

Et

$$\mathbf{K}_g^{(s)} = \mathbf{\Gamma}^{(s)T} \mathbf{k}_g^{(s)} \mathbf{\Gamma}^{(s)} \quad (3.32)$$

A la fin, les matrices de rigidité et de stabilité d'une structure à parois minces constituée de ns bandes s'obtiennent par assemblage des matrices globales élémentaires de toutes les bandes :

$$\mathbf{K}_E = \sum_{s=1}^{ns} \mathbf{K}_e^{(s)} \quad (3.33)$$

et

$$\mathbf{K}_G = \sum_{s=1}^{ns} \mathbf{K}_G^{(s)} \quad (3.34)$$

3.4.7 Solution de l'équation de la stabilité

En fait, il consiste à chercher un chargement multiple du chargement de référence qui est appliqué aux bandes splines de façon à avoir l'équilibre. Le problème classique de stabilité s'écrit comme suivant :

$$[\mathbf{K}_E - \lambda \mathbf{K}_G] \Lambda = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

La solution de cette équation donne des couples de valeurs et vecteurs propres (λ, Λ) . La valeur propre λ_p multipliée par le chargement de référence définit un chargement qui provoque l'instabilité de la structure selon une forme décrite par le vecteur propre Λ_p . On distingue la plus petite valeur de λ , notée λ_{cr} . Il s'agit de ce qu'on appelle la charge critique d'instabilité, c'est-à-dire qu'elle définit la plus petite charge proportionnelle au chargement appliqué qui provoque une instabilité de l'élément étudié. C'est la seule instabilité à avoir un sens physique, les autres instabilités ne peuvent pas avoir lieu physiquement, car l'élément étudié perd son équilibre dès l'attente de λ_{cr} . Le mode critique associé est défini par Λ_{cr} .

3.5 Le programme élaboré

3.5.1 Une nouvelle version de SHEBA

La méthode des splines bandes finies est qualifiée dans la littérature de semi-analytique. Cette méthode permet de traiter les structures à parois minces avec des conditions aux limites arbitraires et chargement quelconque. Le premier programme que nous avons développé a été écrit dans le cadre d'un projet de fin d'études [51]. L'objectif était de développer une nouvelle version de SHEBA [66], un programme informatique développé en langage pascal pour l'étude de la stabilité élastique des colonnes composées. SHEBA, pour SHell Buckling Analysis en anglais, a été développé cette fois-ci en langage Matlab. Il intègre un pré processeur, un processeur et un postprocesseur dans une interface utilisateur très conviviale : boutons poussoir avec des fonctions d'appel, menus déroulants, sauvegardes des outputs, sorties graphiques sur imprimante...etc.

Les Figures 3.6 et 3.7 montrent les interfaces de la première version du logiciel SHEBA (Version 1.1) dans la phase du pré et post traitement, respectivement. Dans la

phase prétraitement, nous retrouvons les données nécessaires à la modélisation d'un élément de structure par la méthode des splines bandes finies, à savoir : les matériaux, les coordonnées des nœuds, les connexions, les conditions aux limites, le chargement et les longueurs physiques à considérer dans l'analyse. Dans le post-traitement, on trouve, bien sûr, la courbe donnant la relation entre le facteur de charge critique et la longueur physique. Il y'a également la possibilité de voir la forme de la section déformée (en 2D ou 3D) pour une longueur physique, section nodale et mode donnée, que l'utilisateur a la possibilité de choisir. La Figure 3.8 montre le préprocesseur de la deuxième version de SHEBA (Version 1.2) dédiée à l'analyse de colonnes composées, plus précisément, des colonnes à étrésillons. Dans cette thèse, une nouvelle version de SHEBA sera développée. Elle intègre une nouvelle version de la méthode des splines bandes qui permet la décomposition modale : le calcul des charges critiques des modes purs d'instabilité. La formulation proposée est simple et efficace et elle préserve la souplesse de la méthode des splines bandes comme méthode générale. Les détails de formulation sont présentés dans le Chapitre 4, tandis que, les exemples de validation et d'utilisation de la nouvelle splines bandes finies contrainte seront exposés dans le Chapitre 5.

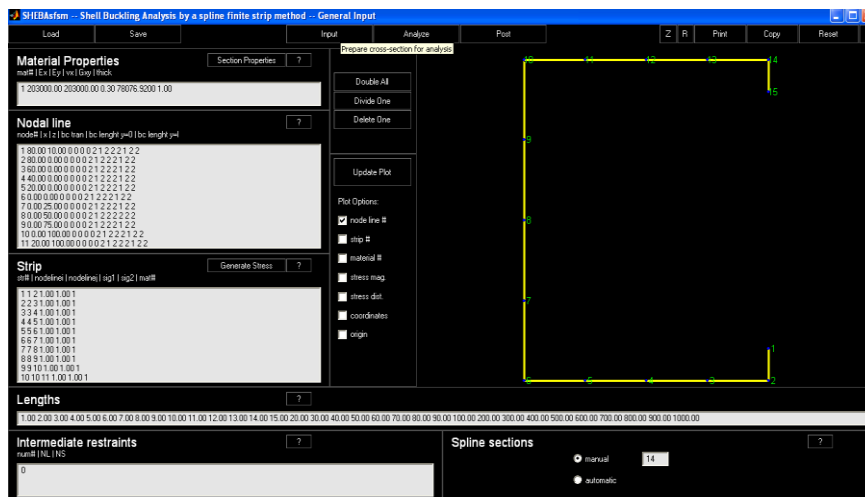


Figure 3-6 Interface du logiciel SHEBA (Version 1.1): Prétraitement

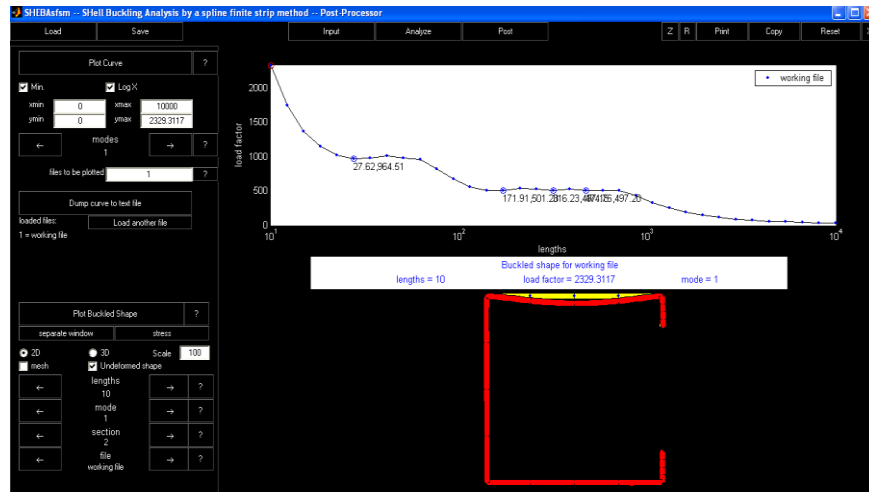


Figure 3-7 Interface du logiciel SHEBA (Version 1.1): Post-traitement

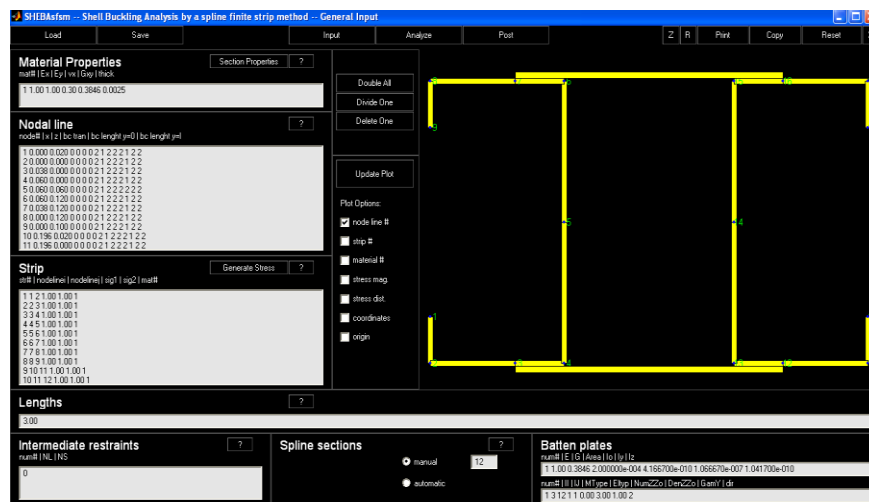


Figure 3-8 Interface du logiciel SHEBA (Version 1.2): Le préprocesseur

3.5.2 Exemple numérique

3.5.2.1 La colonne étudiée et sa modélisation

Bien qu'une grande variété de conditions aux limites puisse être modélisée dans la méthode des splines bandes finies, l'exemple traité ici est supposé simplement appuyé. En fait, l'objectif principal de cette section est de présenter la nature des résultats « type splines bandes finies » et de comprendre leurs particularités en comparant avec la méthode des bandes finies conventionnelle et/ou de la GBT. Plus de détail sur la modélisation des différentes conditions aux limites, ainsi qu'une série d'exemples de validation peuvent être trouvés dans [51].

Le profilé considéré, baptisé « CS1 », est une colonne ayant une section transversale en forme de C doublement symétrique (voir Figure 3.9). La section est modélisée avec des angles vifs et l'âme et les deux semelles sont discrétisées en 4 bandes, alors que, les deux

raidisseurs de bords sont modélisés avec une seule bande. Ceci donne un total de 14 bandes et 15 lignes nodales. La longueur L de la colonne est divisée en 22 intervalles, ce qui implique l'utilisation de 25 sections nodales. Quant aux propriétés mécaniques, la colonne est constituée d'un matériau élastique linéaire de module de Young $E=210$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu=0.3$.

Le nombre de DDL avant l'application des conditions aux limites est 1500 ($= 4 \times 15 \times (22 + 3)$). Dans le modèle MSBF, les conditions d'appuis simples aux extrémités $Y=0$ et $Y=L$ sont réalisées en bloquant les U , W et Θ de toutes les lignes nodales et en laissant les V libres. Afin d'éviter des problèmes numériques⁷, un seul V , d'un nœud quelconque, doit être aussi bloqué. Cela implique la fixation de 91 DDL ce qui donne un total de 1409 DDL actifs.

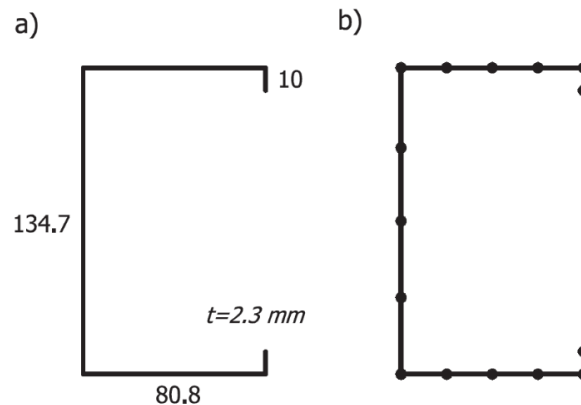


Figure 3-9 Géométrie de la section en C baptisée « CS1 » (a) avec son maillage MSBF (b).

3.5.2.2 Résultats et commentaires

Les Figures 3.10 et 3.11 présentent les résultats de la méthode des splines bandes finies lorsque l'équation (3.35) est résolue pour différentes longueurs physiques, L . Sur la figure 3.10, la courbe « spline FSM » montre les forces critiques du premier mode en utilisant la méthode des splines bandes finies conventionnelle. Cette courbe présente trois zones distinctes, et elles correspondent à des voilements avec un nombre de demi-ondes variant de 1 à 2, à des instabilités distorsionnelles avec un nombre de demi-ondes variant de 1 à 4 et à une instabilité globale (mode couplé flexionnel-torsionnel) avec une seule demi-onde.

La courbe « GBT » présente les résultats basés sur la théorie des poutres généralisées [67] où plusieurs demi-ondes ont été incluses dans les analyses, tandis que la courbe « FSM » présente la fameuse « courbe de signature » obtenue par la MBF [68]. Cette dernière a été popularisée par Hancock et elle donne la contrainte critique de flambement en fonction de la longueur de la demi-onde de flambement, contrairement à la spline FSM.

⁷ Plus précisément, afin d'assurer la stabilité du système d'équations

Cela veut dire que la FSM a la capacité de forcer l'élément de structure à se déformer en une seule demi-onde sinusoïdale. D'ailleurs, c'est cette capacité qui a permis l'organisation (ou la classification) actuelle des différents phénomènes d'instabilité en trois catégories : locale (L), distorsionnelle (D) et globale (G). Il y'a lieu de noter que cette classification est retenue dans tous les règlements de dimensionnement des profilés en acier formés à froid.

Quelques formes déformées sont fournies dans la Figure 3.11 pour des colonnes avec des longueurs physiques L égales à 109, 1390 et 5000 mm, et ils sont généralement connus comme mode local, distorsionnel et global (flexion-torsion), respectivement.

Les solutions « spline FSM » coïncident avec les résultats de la GBT qui peuvent présenter n'importe quel nombre de demi-ondes et peuvent combiner tous les modes de déformation. La courbe de flambement de la FSM (avec une seule demi-onde et qui combine tous les modes de déformations) coïncide également avec celle de la « spline FSM ». Les courbes « spline FSM » et « FSM » ne diffèrent que pour $16 < L < 25 \text{ cm}$ et $60 < L < 180 \text{ cm}$. Dans ces plages de longueurs, le flambement de la colonne se produit en développant 2 demi-ondes des modes locaux et 2 à 4 demi-ondes des modes distorsionnels, respectivement. En général, si le modèle FSM a les mêmes conditions aux limites que le modèle spline FSM, l'enveloppe de la solution « FSM » avec plusieurs demi-ondes coïncide parfaitement avec la solution « spline FSM ».

Il est à noter que certaines différences entre FSM et spline FSM peuvent être observées. En particulier, la spline FSM peut fournir la capacité de produire un flambage en mode mixte, par exemple, un mode avec un flambement de distorsion de longueur d'onde (ou global) plus long et un flambage local de courte longueur d'onde. Un tel résultat est commun dans les résultats de flambement type FEM, mais il est impossible dans la FSM [69].

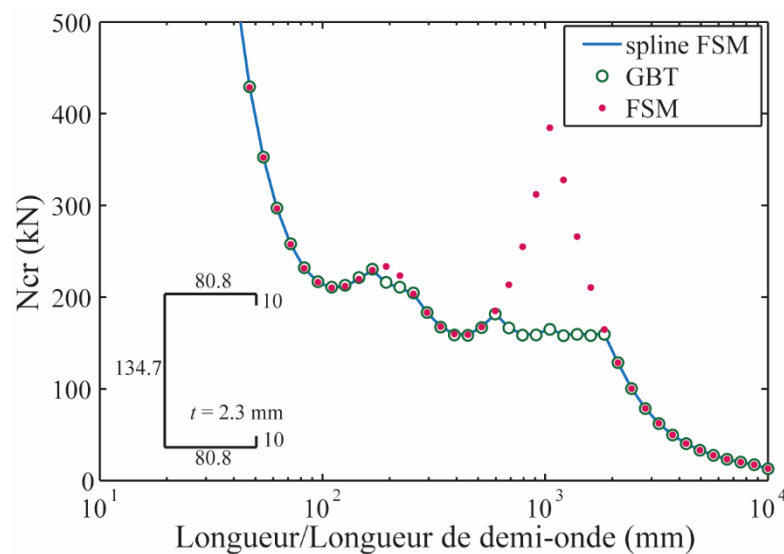


Figure 3-10 Les courbes de flambement du premier mode de l'exemple CS1.

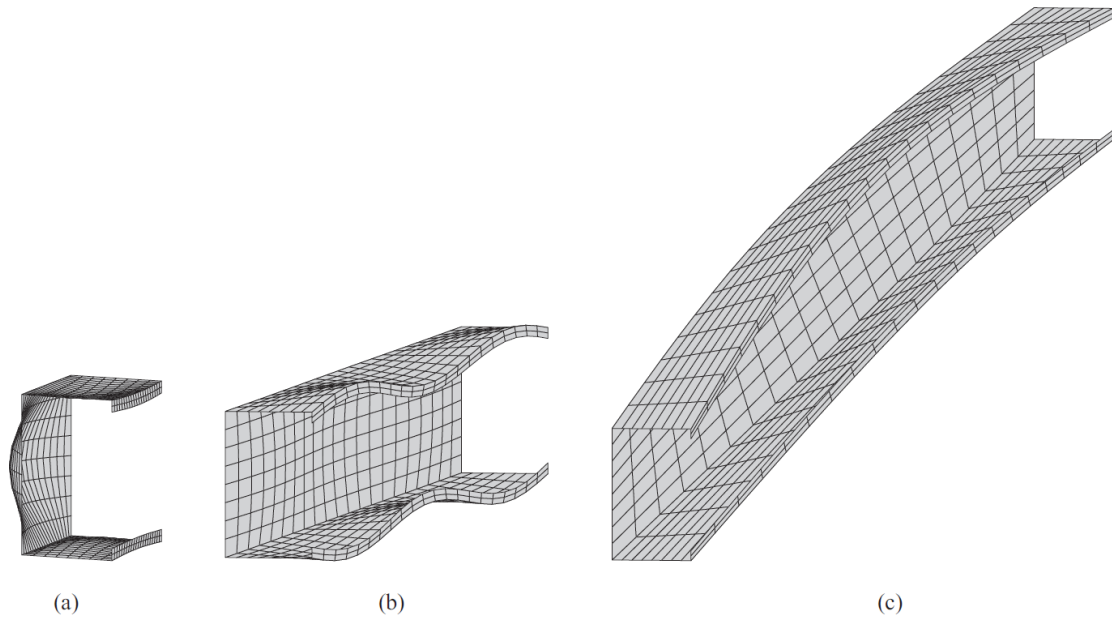


Figure 3-11 Formes déformées de la section « CS1 » soumise à une compression uniforme à différentes longueurs physiques (a) $L=109\text{mm}$ (b) $L=1390\text{mm}$ et (c) $L=5000\text{mm}$.

3.6 Conclusion

La MSBF conventionnelle ainsi que le programme développé nous ont beaucoup renseignés sur les méthodes de calcul numérique de l'analyse de l'instabilité élastique des structures à parois minces et sur les différents types d'instabilité.

Cette expérience nous a permis de comprendre la philosophie utilisée dans les nouvelles techniques développées récemment pour l'identification et la classification des modes d'instabilité. Elle nous a également servi à développer des techniques de classification alternatives plus générales et plus puissantes.

Après avoir rappelé les principes de la méthode des splines bandes finies suivis d'une présentation de l'outil numérique développé, dans le chapitre suivant, nous allons présenter la procédure de dérivation des différentes matrices de contrainte qui permet de classer automatiquement les modes d'instabilité dans le contexte de la MSBF : la méthode des splines bandes finies contrainte (MSBFc).

Chapitre 4

La méthode des splines bandes finies contrainte : Dérivation

4.1 Introduction

Les méthodes conventionnelles, et plus particulièrement la méthode des bandes finies occupe un statut particulier dans le domaine de l'analyse de la stabilité élastique des structures à parois minces. Néanmoins, son utilisation dans la procédure de dimensionnement pose parfois quelques problèmes. Dans le Chapitre 2, nous avons démontré que des complications peuvent avoir lieu même pour des sections simples avec des dimensions typiques. Nous avons également relevé certaines insuffisances dans les méthodes de décomposition modale de la littérature, notamment dans les travaux de recherches sur la décomposition modale basés sur la méthode des bandes finies contrainte. Le besoin d'une méthode de classification automatique des résultats des analyses numériques de la stabilité élastique reste toujours d'actualité.

Dans ce chapitre, nous exposerons notre nouvelle technique de décomposition modale basée sur la méthode des splines bandes finies. Le choix de la méthode des splines bandes finies a été fait afin de lever certaines insuffisances de la MBFc. Nous commencerons alors par rappeler le principe des méthodes de décomposition. Ensuite, les matrices de contrainte définissant les quatre grandes catégories de modes (c.-à-d. local, distorsionnel, global et autres) sont dérivées dans le contexte de la MSBF. Les définitions mécaniques utilisées et les détails de formulations sont également discutés. Une attention particulière est donnée à la dérivation de la matrice de contrainte de l'espace GD, puisque c'est l'espace qui pose traditionnellement plus de problèmes. Les définitions mécaniques utilisées sont indépendantes de la méthode utilisée, ainsi que du modèle numérique. Nous pensons qu'il sera possible de l'étendre aux méthodes numériques plus générales, à savoir la méthode des éléments finis.

4.2 Principe

Comme dans l'approche de décomposition modale basée sur la méthode des bandes finies, l'idée principale de la méthode des splines bandes finies contrainte est de définir des matrices de contrainte \mathbf{R}_M pour chacune des classes M des modes de flambement. Ces matrices sont définies mécaniquement et elles sont utilisées pour classer les instabilités en quatre grandes catégories de modes, à savoir : (i) globale (G) (ii) Distorsionnelle (D) (iii) locale (L) et (iv) autres (O). Un modèle splines bandes finies est contrainte à une classe d'instabilité, M , via

$$\Delta = \mathbf{R}_M \Delta_M \quad (4.1)$$

Ces matrices de contrainte définissent la relation entre les degrés de liberté du modèle splines bandes finies, Δ , et ceux qui correspondent à la classe des modes de flambement Δ_M . Le vecteur Δ contient tous les degrés de liberté globaux du modèle splines bandes finies, noté m , par contre Δ_M est un vecteur, de taille m_M , qui définit un champ de déformation réduit qui satisfait les critères correspondants à une classe de flambement M . La dimension de la matrice de contrainte \mathbf{R}_M est donc égale à $(m \times m_M)$. Il est important de noter que la matrice \mathbf{R}_M peut être considérée comme une base vectorielle pour la classe de modes M et chaque colonne peut être considérée comme un « *mode individuel* » dans l'espace M .

Ainsi, la matrice \mathbf{R}_M peut être appliquée à un mode d'instabilité ou à un champ de déplacement Φ , l'Éq. (4.1) devient

$$\Phi = \mathbf{R}_M \Phi_M \quad (4.2)$$

Cette dernière peut être utilisée dans le problème propre de la stabilité. En reportant l'équation (4.2) dans l'équation (3.35) et en prémultipliant par \mathbf{R}_M^T , on obtient :

$$\mathbf{K}_{E,M} \Phi_M = \mathbf{K}_{G,M} \Phi_M \Lambda_M \quad (4.3)$$

où $\mathbf{K}_{E,M}$ et $\mathbf{K}_{G,M}$ sont, respectivement, la matrice de rigidité et la matrice de stabilité du problème contraint de la méthode des splines bandes finies, et elles sont définies par $\mathbf{K}_{E,M} = \mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_E \mathbf{R}_M$ et $\mathbf{K}_{G,M} = \mathbf{R}_M^T \mathbf{K}_G \mathbf{R}_M$.

Il est à noter que ces matrices ont une dimension réduite de $(m_M \times m_M)$. Ainsi, l'application des équations de contrainte résulte en une réduction de la dimension du problème propre de la stabilité à résoudre. Λ_M et Φ_M sont, respectivement, les valeurs et les vecteurs propres obtenus en résolvant un problème contraint à un espace M . Dans ce chapitre, les matrices de contrainte définissant les quatre grandes catégories de modes (c.-à-d. local, distorsionnel, global et autres) sont dérivées dans le contexte de la MSBF. Les définitions mécaniques et les détails de formulations sont également discutés.

4.3 Dérivation de \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D

4.3.1 Introduction

Afin de forcer l'espace D et G, la pratique standard consiste à former \mathbf{R}_{GD} , la matrice de contrainte de l'espace combiné GD, puis, \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D les matrices de contrainte des modes purs globaux et distorsionnels, respectivement. Il convient de mentionner que des critères mécaniques sont utilisés pour dériver les matrices \mathbf{R}_{GD} et \mathbf{R}_G , tandis que des conditions d'orthogonalité sont utilisées pour dériver \mathbf{R}_D . De plus, la mise en œuvre des critères mécaniques est faite en utilisant des procédures communes dans la FEM plutôt que celle de la MBFc / GBT. Les détails de formulation des matrices de contrainte qui permettent de forcer l'espace GD et les deux sous-espaces G et D sont exposés ci-après.

4.3.2 Dérivation de \mathbf{R}_{GD}

4.3.2.1 Introduction

Pour définir l'espace GD, deux hypothèses ont été utilisées [70]: (i) Flexion cylindrique des plaques, et (ii) Déformations transversales et distorsions membranaires négligeables. En fait, il s'agit d'une définition simplifiée, et surtout, d'une définition indépendante du modèle numérique et d'une manière générale de la méthode numérique d'analyse. Les principales particularités de cette définition par rapport à celle utilisée dans la MBFc originale d'Ádány et Schafer concernent le critère#1-(iii) sur la variation linéaire du \mathbf{v} suivant x qui a été jugé superflue, ainsi que le critère#2 concernant les déformations membranaires longitudinales, dont l'implémentation a été jugée très complexe, et qui a été remplacé par celui de la flexion cylindrique¹. De plus, cette définition n'utilise aucune classification particulière des nœuds et aucune numérotation particulière n'est exigée. La numérotation des nœuds, la numérotation des éléments, la modélisation des caractéristiques géométriques et mécaniques...etc. sont donc laissées libres, ce qui permet à la MBFc de préserver toute sa flexibilité entant que méthode numérique. Un autre point fort de cette définition est qu'il n'est plus nécessaire de recourir à la distinction entre les sections à connexions simples de celles à connexions multiples, puisqu'une seule formulation est utilisée pour traiter des formes de section arbitraires [38]. Il s'agit donc d'une définition beaucoup plus souple, générale et efficace qui a amélioré ostensiblement la flexibilité de la MBFc. Cependant, la démarche même de la classification des modes purs d'instabilité n'a pas changé. Elle repose sur les mêmes principes utilisés par la GBT et la MBFc qui sont les principales approches capables d'isoler les modes purs d'instabilité.

¹ Voir section 2.6.2, pour plus de détails sur les critères mécaniques utilisés dans la cFSM originale d'Ádány et Schafer.

L'implémentation de ces deux critères mécaniques dans le contexte de la méthode des splines bandes finies, et donc la dérivation de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} , nécessite quatre grandes étapes :

- Etape 1. Calculer la matrice de rigidité élastique modifiée qui tient compte de l'hypothèse de flexion cylindrique des plaques, \mathbf{K}_E^{GD} , c'est-à-dire l'hypothèse #1.
- Etape 2. Calculer la matrice de contrainte pour les degrés de liberté membranaires, \mathbf{C}_{ek} , en utilisant l'hypothèse #2. Cette deuxième hypothèse force les déformations membranaires transversales et les distorsions membranaires à être négligeables dans tout le modèle MSBF.
- Etape 3. Appliquer la matrice \mathbf{C}_{ek} à la matrice de rigidité globale modifiée \mathbf{K}_E^{GD} , en utilisant une procédure de multiplicateurs de Lagrange.
- Etape 4. Calculer \mathbf{R}_{GD} en utilisant sa définition : elle doit donner une relation entre le vecteur Δ , contenant tous les degrés de liberté du modèle MSBF, et les déplacements de gauchissement, \mathbf{V} . Cela est possible en imposant les degrés de liberté de gauchissement, \mathbf{V} , comme un chargement cinématique et puis, calculer les degrés de liberté résultants.

Dans ce qui suit, ces quatre étapes sont détaillées afin de dériver la matrice de contrainte de l'espace combiné GD pour le cas des éléments prismatiques avec sections transversales quelconque (ou arbitraire).

4.3.2.2 La matrice de rigidité élastique dans l'espace GD : \mathbf{K}_E^{GD}

La première hypothèse qui doit être vérifiée dans le sous-espace GD est que toute flexion d'une paroi plane de la section est de type « flexion cylindrique des plaques ». Cette hypothèse vient du fait que dans le sous-espace GD, les instabilités distorsionnelle et globale se produisent à des longueurs de demi-onde, L , beaucoup plus grandes que la dimension caractéristique de la section, b . La conséquence directe de cette hypothèse est que, dans le repère local de la bande, les courbures χ_y et χ_{xy} sont négligeables devant χ_x . Ainsi, la première hypothèse à imposer s'écrit :

$$\chi_y = \chi_{xy} = 0 \quad (4.4)$$

Les déformations flexionnelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_f$, définies par l'équation (3.16) deviennent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_F^{GD} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T = \left\{-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \ 0 \ 0\right\}^T \quad (4.5)$$

En utilisant l'équation (3.12), les déformations flexionnelles $\boldsymbol{\varepsilon}_F^{GD}$, peuvent être calculées à partir de w et reliées aux degrés de liberté flexionnels par

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f^{GD} = \mathbf{B}_f^{GD} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{w}_j \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Où \mathbf{B}_f^{GD} représente les déformations flexionnelles exprimées en fonction de dérivées des fonctions d'interpolation obtenue par une dérivation appropriée de l'équation (3.16) en utilisant l'équation (4.5).

Comme la matrice de rigidité d'une bande spline conventionnelle est formée d'une sous-matrice membranaire et d'une autre flexionnelle (voir la section 3.4.5 du chapitre Chapitre 3), les déplacements membranaires (u et v) et le déplacement flexionnel (w) sont découplés. Elles peuvent donc être calculées séparément (voir l'équation 3.19). Dans notre cas, la sous-matrice de rigidité flexionnelle d'une bande spline dans le cas de la flexion cylindrique est calculée par :

$$\mathbf{k}_{eF} = \int \mathbf{B}_F^{GD T} \mathbf{D}_F \mathbf{B}_F^{GD} dV \quad (4.7)$$

En faisant les substitutions adéquates et en effectuant les intégrations nécessaires, on obtient la matrice de rigidité élastique élémentaire modifiée dans le repère local de la bande.

Pour résumer, jusqu'ici nous avons modifié la matrice de rigidité d'une bande spline, ou plus précisément sa sous-matrice correspondante au comportement flexionnel, qui tient compte de l'hypothèse #1, c'est-à-dire l'hypothèse de la flexion cylindrique des plaques. La prochaine étape dans l'approche développée est de transformer les matrices de rigidité élastiques élémentaires modifiées, du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales, en utilisant l'équation (3.31). Ensuite, on procède à leur assemblage en utilisant l'équation (3.33) pour obtenir la matrice de rigidité élastique du modèle splines bandes finies qui tient compte de l'hypothèse #1, c'est-à-dire, la matrice de rigidité élastique \mathbf{K}_E^{GD} dans l'espace GD .

4.3.2.3 La matrice de contrainte pour les DDL membranaires

La deuxième hypothèse à formuler est celle qui concerne les déformations membranaires d'une bande spline :

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x = 0 \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = 0 \quad (4.9)$$

Ces deux conditions peuvent être exprimées en termes de fonctions splines des degrés de liberté membranaires, c'est-à-dire $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i$ et \mathbf{v}_j . La substitution des équations 3.10 et 3.11 dans les équations 4.8 et 4.9, donnent

$$\boldsymbol{\psi}_{ui}(y) \mathbf{u}_i = \boldsymbol{\psi}_{uj}(y) \mathbf{u}_j \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\psi}'_{ui}(y) \mathbf{u}_i = \frac{1}{b} (\boldsymbol{\psi}_{vi}(y) \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\psi}_{vj}(y) \mathbf{v}_j) \quad (4.11)$$

Où $(.)'(y) \equiv \partial(.)/\partial y$ et les vecteurs $\boldsymbol{\psi}_{ui}$, $\boldsymbol{\psi}_{uj}$, $\boldsymbol{\psi}_{vi}$ et $\boldsymbol{\psi}_{vj}$ sont les représentations splines des degrés de liberté membranaire \mathbf{u} et \mathbf{v} des lignes nodales i et j , respectivement.

Les polynômes donnés dans les équations (4.10) et (4.11) sont des polynômes de degré 3 et des polynômes de degré 2. En assimilant les coefficients des monômes, trois équations concernant les DDL \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j , peuvent être écrites pour toute valeur de y (ou au moins pour chacune des $nm + 1$ sections nodales). Le système d'équations linéaires résultant sous une forme compacte est

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_i = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}_j \quad (4.12)$$

Ce système est un système surdéterminé pour lequel, au moins, une solution peut être trouvée :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{B}_1 \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}_j) = \mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_i}^{(s)} \mathbf{v}_i + \mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_j}^{(s)} \mathbf{v}_j \quad (4.13)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_i}^{(s)}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_j}^{(s)}$ sont les matrices de contrainte des DDL membranaires de la bande (s) dans son système de coordonnées local. Il est important de souligner que le nombre des équations de contrainte dans $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_i}^{(s)}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_j}^{(s)}$ dépend du type des conditions aux limites appliquées à la bande et concerne tous les \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i and \mathbf{v}_j actifs. Plus précisément, le nombre de lignes dans $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_i}^{(s)}$ est égal au nombre de \mathbf{u}_i actifs / libres et le nombre de colonnes est égal aux \mathbf{v}_i libres. $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_j}^{(s)}$ est définie de la même manière et donne la relation entre les \mathbf{u}_i et les \mathbf{v}_j .

À titre d'exemple, si une bande est encastrée dans ces deux extrémités, tous les DDL des quatre sections nodales extérieures (deux à chaque extrémité) doivent être bloqués. Cela veut dire que, cette bande a $8 \times (nm-1)$ DDL actifs. Ces DDL sont associés aux sections nodales variant de $k = 1$ à $k = nm-1$. Dans ce cas, l'équation (4.18) signifie que les $(nm-1)$ \mathbf{u}_i and \mathbf{u}_j , sont exprimés en fonction des $(nm-1)$ DDL de gauchissement et ne sont plus effectifs. Au lieu des $8 \times (nm-1)$ DDL actifs initiaux nous n'avons plus que $(6 \times (nm-1))$ indépendants. Par conséquent, la dimension de $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_i}^{(s)}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_j}^{(s)}$ est $((nm-1) \times (nm-1))$.

En sélectionnant correctement les fonctions de déplacement longitudinales de l'équation (4.13), les matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_i}^{(s)}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}_j}^{(s)}$ peuvent être dérivées pour les différents cas de conditions aux limites. Dans cette thèse, les dérivations sont effectuées numériquement, et quatre types de conditions aux limites standards ont été pris en compte : (i) Simplement appuyée – Simplement appuyée (SS) (ii) Encastré – Libre (CF) (iii) Encastré – Simplement appuyée (CS) (iv) et Encastré – Encastré (CC).

Il convient de noter que la condition sur les déformations membranaires transversales (c'est-à-dire $\boldsymbol{\varepsilon}_x = \mathbf{0}$) est vérifiée pour toutes les conditions aux limites considérées. Cependant, la seconde condition mécanique, c'est-à-dire $\boldsymbol{\gamma}_{xy} = \mathbf{0}$, n'est pas toujours satisfaite. Plus précisément, c'est en particulier le cas quand des conditions aux limites mixtes sont imposées aux DDL \mathbf{u} et \mathbf{v} . C'est le cas d'un élément de structure avec

une extrémité simplement appuyée (par exemple, cas d'un élément de structure S-S ou C-S) où les conditions aux limites appliquées aux DDL \mathbf{u} et \mathbf{v} ne sont pas identiques. Pour mettre en œuvre la MSBFc, l'idée était de rechercher une solution approximative de sorte que la condition sur les distorsions membranaires ($\gamma_{xy} = 0$) est vérifiée dans toute la bande, sauf à proximité des conditions aux limites. L'impact d'une telle simplification se limitera aux trois intervalles extérieurs et un nombre raisonnable d'intervalles réduira évidemment l'impact d'une telle approximation dans une zone suffisamment petite.

Les équations de contrainte doivent être appliquées au modèle MSBF dans le système de coordonnées global et chaque bande a deux systèmes d'équations de contrainte (un système par nœud). Par conséquent, pour tous les DDL d'une bande spline, la transformation du repère local au repère global donne les deux systèmes d'équations suivants qui fournissent une relation entre les DDL transversaux globaux, $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{W}_i$ et \mathbf{W}_j , et les DDL longitudinaux globaux, \mathbf{V}_i et \mathbf{V}_j , des deux lignes nodales i et j .

$$\mathbf{U}_i \cos \alpha + \mathbf{W}_i \sin \alpha = \mathbf{R}_{\mathbf{uwi-vi}}^{(s)} \mathbf{V}_i + \mathbf{R}_{\mathbf{uwi-vj}}^{(s)} \mathbf{V}_j \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{U}_j \cos \alpha + \mathbf{W}_j \sin \alpha = \mathbf{R}_{\mathbf{uwj-vi}}^{(s)} \mathbf{V}_i + \mathbf{R}_{\mathbf{uwj-vj}}^{(s)} \mathbf{V}_j \quad (4.14b)$$

où $\mathbf{cos} \alpha$ et $\mathbf{sin} \alpha$ sont des matrices diagonales définies par $\mathbf{cos} \alpha = \mathit{diag}(\mathbf{cos} \alpha, \mathbf{cos} \alpha, \dots)$ et $\mathbf{sin} \alpha = \mathit{diag}(\mathbf{sin} \alpha, \mathbf{sin} \alpha, \dots)$, avec α est l'angle définissant l'orientation de la bande.

Afin d'appliquer l'hypothèse #2 sur l'ensemble du modèle MSBF, il est nécessaire d'écrire ces deux systèmes d'équations de contrainte (Éq. 4.14) pour l'ensemble des bandes splines composant le modèle splines bandes finies dans le repère global de la structure. Les équations de contrainte de l'équation 4.14 sont écrites sur la base d'une boucle sur les nœuds du modèle MSBF. Cela implique que pour chaque nœud i , un système d'équations est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\left[\mathbf{cos} \alpha \quad \mathbf{R}_{\mathbf{uwi-vi}}^{(s)} \quad \mathbf{sin} \alpha \quad \mathbf{R}_{\mathbf{uwi-vj}}^{(s)} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_j \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

L'équation (4.15) peut être réécrite sous une forme étendue pour concerner tous les DDL actifs du modèle splines bandes finies :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{GD}}^{(1)} \Delta^{(1)} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

La matrice $\mathbf{H}_{\mathbf{GD}}^{(1)}$ contient le premier système d'équations de contrainte, c'est-à-dire les équations de contrainte après la première transformation. Par conséquent, le nombre de lignes dans cette matrice est égal au nombre de \mathbf{U} libres et le nombre de colonnes est égal au nombre de tous les DDL libres du modèle MSBF.

En considérant successivement les nm nœuds du modèle MSBF, une matrice de transformation \mathbf{H} , intégrant toutes les contraintes à appliquer sur les ns bandes splines est obtenue.

$$\mathbf{H} \Delta = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

Il y'a lieu de noter que le nombre des matrices de transformation dans la matrice \mathbf{H} est égal au nombre de connexions, nc , dans le modèle MSBF. nc est égal à deux fois le nombre de bandes ($2 \times ns$) du moment que chaque bande apporte deux systèmes d'équations de contrainte. Autrement dit, chaque connexion apporte un système d'équations entre les DDL. Cela signifie, qu'après chaque transformation, $\mathbf{H}_{GD}^{(n)}$, des DDL transversaux ne sont plus effectifs et doivent être éliminés ou réduits.

Jusqu'ici, les relations entre les DDL transversaux $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \mathbf{W}_i$ et \mathbf{W}_j et les déplacements de gauchissement \mathbf{V}_i and \mathbf{V}_j ont été obtenues (voir l'équation 4.17). Afin de ne conserver que les informations utiles, les DDL à éliminer doivent être identifiés en fonction de l'orientation de la bande et le type de connexion du nœud. Dans cette thèse, la procédure de sélection des DDL à éliminer est similaire à celle proposée par Djafour et collab. [38] et elle est résumée ci-après.

L'idée principale est basée sur le fait que, pour chaque nœud i , on doit écrire autant d'équations de contrainte et d'éliminer autant de degrés de liberté que de bandes qui lui sont connectées. La décision d'éliminer ou de garder un DDL dépend de l'orientation des bandes, du nombre de connexions et des degrés de liberté (libres ou bloqués) [38][71]. Les différentes situations sont regroupées en deux familles de sections : (i) sections à connexions simples (voir la Figure 4.1(a et c1)) et (ii) sections à connexions multiples (voir la Figure 4.1(b, c2 et d)). Le Tableau 4.1 résume les différentes situations possibles ainsi que les DDL à éliminer. La procédure est expliquée ci-après dans le contexte de la méthode des splines bandes finies pour un nœud i et une section nodale k .

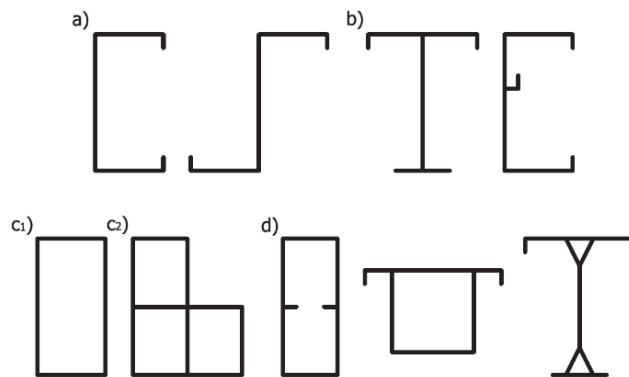


Figure 4-1 Les différentes familles de sections traitées.

Tableau 4-1 Résumé des différentes situations possibles [71].

Nombre de bandes connectées	Illustration	DDL à éliminer
1		U_i ou W_i
2 (coplanaires)		$(U_i$ ou $W_i)$ et V_i
2 (non coplanaires)		U_i et W_i
3		U_i, W_i et V_i
$nc > 3$		U_i, W_i, V_i et $(nc - 3)$ V_S des nœuds voisins (V_j et V_k dans l'exemple)

• **Sections à connexions simples :**

Ce cas concerne les sections transversales ouvertes et fermées non ramifiées. Trois situations différentes peuvent être distinguées (voir la Figure 4.1(a et c1)) :

- Situation 1. Le nœud i est connecté à un seul nœud j ,
- Situation 2. Le nœud i est connecté à deux nœuds, j et k , par deux bandes ayant des directions différentes : bande non coplanaire, et finalement
- Situation 3. Le nœud i est connecté à deux nœuds, j et k , par deux bandes ayant les mêmes directions (un angle avec $\pm\pi$) : bande coplanaire.

La procédure d'élimination est limitée aux DDL du nœud i courant et elle est expliquée pour les DDL associés à une section nodale centrale k .

- Situation 1 : Si une seule bande est connectée à un nœud i , cas des nœuds externes, le DDL à réduire doit être U_i^k ou W_i^k selon l'orientation de la bande. Le DDL à éliminer est celui dont la direction est plus proche de l'axe x local. Cette préférence est plutôt une précaution pour éviter les singularités possibles qui seraient causées par la réduction d'une DDL presque perpendiculaire à l'axe x local.
- Situation 2 : Si un nœud i est connecté à deux nœuds, j et k , par deux bandes non coplanaires $S1$ et $S2$ (des bandes ayant des directions différentes), les deux DDL à éliminer sont U_i^k et W_i^k .
- Situation 3 : Dans le cas de bandes coplanaires, le déplacement de gauchissement V_i^k n'est pas indépendant. Les DDL de gauchissement des nœuds secondaires — ou nœuds intermédiaires — sont obtenus par interpolation linéaire des DDL de gauchissement de nœuds principaux. Cela vient du fait que : (i) les déplacements membranaires varient linéairement dans la direction transversale et (ii) les

déformations transversales et les distorsions membranaires sont négligeables. De ce fait, le déplacement de gauchissement V_i^k du nœud secondaire i peut être déduit de ceux des nœuds principaux, et donc, il doit être éliminé. Le second DDL à éliminer peut être U_i^k ou W_i^k selon l'orientation des bandes, comme expliqué ci-dessus pour le cas d'un nœud connecté à une bande.

- **Sections à connexions multiples :**

Pour ce qui est des sections à connexions multiples, ça veut dire des éléments prismatiques avec des branches et/ou parties fermées (voir la Figure 4.1(b, c2 et d)), deux situations différentes peuvent être distinguées :

Situation 4. Le nœud i est connecté à 3 nœuds, j , k , et l , par trois bandes, et

Situation 5. Le nœud i est connecté à plus de 3 nœuds.

La procédure d'élimination est expliquée, dans ce qui suit, pour un nœud i courant et pour les DDL associés à une section nodale centrale k .

- Situation 4 : si le nœud i est connecté à 3 nœuds, j , k et l , par 3 bandes notées, s_1 , s_2 et s_3 , trois systèmes d'équations de contrainte sont calculés par l'équation 4.20. Maintenant, si au moins deux bandes ont des directions différentes l'équation (4.20) peut être résolue pour les trois degrés de liberté du nœud i , qui sont alors les trois degrés de liberté à éliminer U_i^k , W_i^k et V_i^k .
- Situation 5 : c'est le cas où le nombre de bandes connectées à un nœud i est supérieur à 3 ($n_c > 3$). Dans cette situation, n_c degrés de liberté doivent être réduits : les trois degrés de liberté du nœud i et $(n_c - 3)$ degrés de liberté de gauchissement de nœuds voisins. La décision s'étend, donc, au-delà de DDL du nœud i , où il est nécessaire de rechercher et de trouver, au niveau des nœuds qui lui sont connectés, des degrés de liberté de gauchissement libres. Il est important de noter que (i) le choix des degrés de liberté à éliminer n'est pas unique et (ii) il faut laisser le traitement de ce type de nœud à la fin de la procédure, une fois que les situations plus simples ont été traitées.

- **Résumé**

Cette stratégie de sélection des DDL à éliminer permet de traiter les différentes situations d'une manière automatique, et surtout d'éviter les différents couplages possibles. Le résultat principal de cette section peut être résumé comme suit :

- Parmi les m DDL qui forment le vecteur Δ (tous les DDL libres / actifs du modèle spline), un ensemble de Δ_e DDL ne sont plus effectifs et ils sont réduits, car ils peuvent être déduits des Δ_k DDL restants.
- Les DDL à éliminer sont : (i) U et W des nœuds principaux (ii) quelques U et W des nœuds intermédiaires (en fonction de l'orientation des bandes) et (iii) les V des nœuds secondaires.

- Les degrés de liberté retenus sont les V des nœuds principaux et quelques U et W des nœuds secondaires (en fonction de l'orientation des bandes).

Il est important de signaler que pour faire face à des conditions aux limites non identiques imposées aux degrés de liberté u et v d'un nœud i (par exemple, le cas d'un élément de structure simplement appuyée (SS) ou Encastré-Simplement appuyée (CS)), tous les V externes des nœuds secondaires doivent être conservés.

Cela peut être résumé dans l'équation suivante dans laquelle l'équation (4.17) est partitionnée comme suit :

$$\Delta = [\mathbf{H}_e \quad \mathbf{H}_k] \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Ce qui donne

$$\Delta_e = -\mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{H}_k \Delta_k = \mathbf{C}_{ek} \Delta_k \quad (4.19)$$

Ayant la matrice \mathbf{C}_{ek} , la suite de la procédure, c'est-à-dire les étapes 3 et 4, est brièvement présentée ci-après.

4.3.2.4 Applications de la matrice de contrainte pour les degrés de liberté membranaires à la matrice de rigidité globale \mathbf{K}_E^{GD}

Dans la section précédente, \mathbf{C}_{ek} (c'est-à-dire la matrice qui incorpore les équations de contrainte suite à l'application de l'hypothèse #2 sur tous les DDL membranaires de toutes les bandes formant la structure à parois minces) est dérivée. L'étape suivante est de dériver, \mathbf{K}_k , la matrice de rigidité du modèle splines bandes finies et qui tient compte des deux hypothèses de l'espace GD (c'est-à-dire $\chi_y = \chi_{xy} = 0$ et $\varepsilon_x = \gamma_{xy} = 0$). Premièrement, la matrice est partitionnée en 4 sous matrices en regroupant, d'une part, les DDL à éliminer et d'autre part, les DDL à conserver.

$$\mathbf{K}_E^{GD} \Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^{ee} & \mathbf{K}_E^{ek} \\ \mathbf{K}_E^{ke} & \mathbf{K}_E^{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

En utilisant la procédure standard des multiplicateurs de Lagrange, l'équation (4.19) est appliquée à l'équation 4.20 et on obtient

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_E^{kk} + \mathbf{K}_E^{ke} \mathbf{C}_{ek} + \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ek} + \mathbf{C}_{ek}^T \mathbf{K}_E^{ee} \mathbf{C}_{ek} \quad (4.21)$$

\mathbf{K}_k est une matrice carrée de dimension égale au nombre de degrés de liberté gardés, Δ_k .

4.3.2.5 Dérivation de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD}

Dans la MSBFC, \mathbf{R}_{GD} est la matrice de contrainte qui définit l'espace GD. Elle permet de relier tous les degrés de liberté du modèle spline bandes finies aux degrés de liberté de gauchissement effectifs \mathbf{V}_k . Le vecteur \mathbf{V}_k contient tous les \mathbf{V} des nœuds principaux plus tous les \mathbf{V} associés avec les sections nodales extérieures (c'est-à-dire les \mathbf{V} libres associés avec la section nodale $k = -1$ et $k = m + 3$).

$$\Delta = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{V}_k \quad (4.22)$$

Ensuite, les DDL de gauchissement, \mathbf{V}_k , sont imposés comme chargement cinématique, et les DDL résultants sont calculés. En réarrangeant les DDL, la matrice \mathbf{K}_k et le vecteur Δ_k peuvent être réécrits comme suit

$$\mathbf{K}_k \Delta_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k^{VV} & \mathbf{K}_k^{V\Delta} \\ \mathbf{K}_k^{\Delta V} & \mathbf{K}_k^{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_k \\ \Delta_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_k \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

On note que les forces \mathbf{F}_k associées aux DDL longitudinaux sont les réactions « inconnues » résultant des charges cinématiques appliquées ; les forces restantes doivent être nulles.

La deuxième équation de l'équation (4.23) donne

$$\Delta_u = \left[-\mathbf{K}_k^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_k^{\Delta V} \right] \mathbf{V}_k \quad (4.24)$$

L'équation (4.24) peut être étendue par une matrice d'identité \mathbf{I}_{V_k} ayant la dimension de \mathbf{V}_k pour concerner tous les DDL de Δ_k .

$$\Delta_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_k \\ \Delta_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{V_k} \\ -\mathbf{K}_k^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_k^{\Delta V} \end{bmatrix} \mathbf{V}_k \quad (4.25)$$

De même, l'équation (4.19) peut être étendue par une matrice identité \mathbf{I}_{Δ_k} ayant la dimension de Δ_k afin de concerner tous les DDL de Δ .

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ek} \\ \mathbf{I}_{\Delta_k} \end{bmatrix} \Delta_k \quad (4.26)$$

Finalement, la substitution de l'équation (4.25) dans l'équation (4.26) donne la matrice requise dans l'équation (4.22).

$$\mathbf{R}_{GD} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ek} \\ \mathbf{I}_{\Delta_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{V_k} \\ -\mathbf{K}_k^{\Delta\Delta^{-1}} \mathbf{K}_k^{\Delta V} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

4.3.3 Décomposition de l'espace GD

4.3.3.1 Introduction

Dans la section précédente, les différentes étapes de dérivation de la matrice de contrainte \mathbf{R}_{GD} sont présentées. Cependant, \mathbf{R}_{GD} seul n'est pas en mesure de séparer les deux sous-espaces G et D. Ainsi, des considérations supplémentaires doivent être introduites. Dans le contexte de la MBFc [11], [12], l'idée était de chercher une base pouvant être utilisée pour décrire toute déformation de l'espace GD, et dans laquelle le système de vecteurs de base pour l'espace G et D peut être séparé. Le système des vecteurs de base des modes G est d'abord défini par 4 types de déplacement de la section transversale rigide, à savoir: (i) une translation longitudinale (ii) les deux translations transversales, et (iii) la rotation le long de l'axe longitudinal de l'élément (voir Figure 4.2). Ensuite, les vecteurs de base des modes D sont générés de sorte qu'ils complètent l'espace GD en utilisant des conditions d'orthogonalité. Une autre façon de forcer les espaces G et D est d'utiliser la distribution des déplacements de gauchissement² des modes individuels dérivée d'une analyse par la théorie des poutres généralisée [43]. Cette méthode permet le calcul de modes D individuels sans utiliser les conditions d'orthogonalité : un avantage certain. L'approche suivie dans ce travail pour séparer l'espace G de D est légèrement différente que celle présentée dans la littérature. Cette nouvelle technique originale de décomposition de l'espace GD est discutée en détail ci-après.

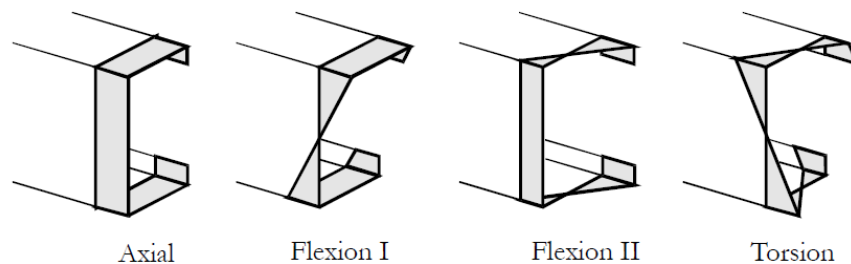


Figure 4-2 Distribution des déplacements de gauchissement pour les modes globaux des sections ouvertes obtenues par la MBFc de [11], [12].

4.3.3.2 Dérivation de \mathbf{R}_G

Dans une instabilité globale, toutes les déformations transversales sont exclues [72]. Cela signifie que les DDL transversaux (c'est-à-dire les deux translations transversales U et W et la rotation Θ autour de l'axe longitudinal de l'élément) sont reliés entre eux par des équations de contrainte. Pour chaque nœud i du modèle MSBF, les translations transversales pour toute valeur de $y = Y$ peuvent être écrites comme suit :

² The warping distribution, en anglais

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i = \mathbf{U}_m - (z_i - z_m) \cdot \boldsymbol{\Theta}_m \\ \mathbf{W}_i = \mathbf{W}_m + (x_i - x_m) \cdot \boldsymbol{\Theta}_m \end{cases} \quad (4.28)$$

où \mathbf{U}_i et \mathbf{W}_i sont les déplacements transversaux dans le repère global de la section du nœud i , et \mathbf{U}_m , \mathbf{W}_m et $\boldsymbol{\Theta}_m$ sont les déplacements transversaux dans le repère global de la section d'un nœud maître m . x_i et z_i sont les coordonnées du nœud i , et x_m et z_m sont les coordonnées du nœud maître m . Notez que le nœud maître m peut être n'importe quel nœud du modèle MSBF.

De plus, la rotation de tout nœud i doit être égale à la rotation du nœud maître m , qui est une conséquence directe d'un déplacement de la section transversale en mode rigide. Ainsi, pour chaque nœud i :

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\Theta}_m \quad (4.29)$$

Ces relations peuvent être exprimées en fonction des fonctions B3-splines. Ainsi, on aura les équations de contrainte sur les déplacements transversaux d'un nœud i :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i = \mathbf{R}_{\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_m}^{(i)} \mathbf{U}_m - (z_i - z_m) \mathbf{R}_{\mathbf{U}_i - \boldsymbol{\Theta}_m}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_m \\ \mathbf{W}_i = \mathbf{R}_{\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_m}^{(i)} \mathbf{W}_m + (x_i - x_m) \mathbf{R}_{\mathbf{W}_i - \boldsymbol{\Theta}_m}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_m \\ \boldsymbol{\Theta}_i = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\Theta}_i - \boldsymbol{\Theta}_m}^{(i)} \boldsymbol{\Theta}_m \end{cases} \quad (4.30)$$

En sélectionnant correctement les fonctions longitudinales, les équations de contrainte dans l'Éq. (4.30) peuvent être dérivées pour tous les types des conditions aux limites standard. On note que dans toutes les conditions aux limites considérées, des conditions aux limites identiques sont appliquées aux DDL \mathbf{U} , \mathbf{W} et $\boldsymbol{\Theta}$. Par conséquent, les matrices de contraintes dans l'Éq. (4.30) peuvent être réduites à des matrices identités.

En considérant successivement les nn nœuds du modèle MSBF, on peut obtenir une matrice de transformation, $\mathbf{C}_{\mathbf{e}_k, \mathbf{G}}$, intégrant toutes les équations de contrainte apportées par tous les nœuds.

$$\mathbf{H}_G^{(1)} \mathbf{H}_G^{(2)} \dots \mathbf{H}_G^{(nn)} \Delta = \mathbf{C}_{\mathbf{e}_k, \mathbf{G}} \Delta \quad (4.31)$$

Il convient de noter que chaque transformation apporte un système d'équations entre le nœud i et le nœud maître m (c'est-à-dire, $\mathbf{H}_G^{(n)}$). Cela signifie qu'après chaque transformation, les DDL transversaux, \mathbf{U}_i et \mathbf{W}_i , et la rotation $\boldsymbol{\Theta}_i$, ne sont plus effectifs et peuvent être réduits.

La principale conclusion à tirer de cette section est que, parmi les m DDL qui forment le vecteur Δ (tous les DDL libres / actifs du modèle spline), un ensemble de $\Delta_{\mathbf{e}}^{\mathbf{G}}$ DDL ne sont plus effectifs et ils sont réduits, car ils peuvent être déduits des $\Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{G}}$ DDL restants. Les DDL retenus sont les déplacements transversaux du nœud maître m (c'est-à-dire \mathbf{U}_m , \mathbf{W}_m et $\boldsymbol{\Theta}_m$) et tous les \mathbf{V} . Le résultat peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \Delta_e^G \\ \Delta_k^G \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ek}^G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_V \end{bmatrix} \Delta_k^G \quad (4.32)$$

\mathbf{I}_V est une matrice identité ayant la dimension du vecteur V .

La dérivation de la distribution des déplacements longitudinaux (fonctions de gauchissement) pour les modes globaux nécessite d'autres considérations. Ayant la matrice \mathbf{C}_{ek}^G , le reste de la procédure est similaire à celle utilisée pour dériver la matrice \mathbf{R}_{GD} . Pour rappel, elle consiste à appliquer la matrice de contrainte pour les DDL membranaires, \mathbf{C}_{ek}^G , à la matrice de rigidité globale modifiée, \mathbf{K}_E^{GD} , en utilisant une procédure de multiplicateurs de Lagrange. Ensuite, la matrice \mathbf{R}_G est dérivée : elle doit donner une relation entre le vecteur Δ , contenant tous les DDL du modèle MSBF, et les déplacements de gauchissements, V_k . L'idée est d'imposer les DDL de gauchissement, V_k , comme chargement cinématique et de calculer les DDL résultants. En conséquence, les modes globaux sont complètement définis par les déplacements de gauchissement, V_k .

Avec la matrice \mathbf{R}_G définie, les modes globaux de flambement peuvent être calculés en utilisant Éq. (4.3). Les vecteurs propres résultants, Φ_G , sont des modes de flambement qui satisfont les critères mécaniques des modes globaux.

4.3.3.3 Dérivation de \mathbf{R}_D

La matrice Φ_G peut également être interprétée comme une base vectorielle de l'espace G, et donc, elle peut être utilisée pour dériver la base vectorielle, \mathbf{H}_D , de l'espace D. Cela est possible en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions de gauchissements. Cette propriété, qui est d'ailleurs bien connue de la littérature, se traduit par le fait que les fonctions de gauchissement des modes distorsionnels sont orthogonales à celles qui définissent les modes globaux. Autrement dit, les modes D peuvent être déduits par orthogonalité aux modes G dans le sous-espace GD.

Dans notre méthode, l'orthogonalité est définie par rapport à la matrice de rigidité élastique modifiée $\mathbf{K}_{E,GD}$ de taille réduite :

$$\mathbf{H}_D^T \mathbf{K}_{E,GD} \Phi_G = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

Puisque les deux matrices $\mathbf{K}_{E,GD}$ et Φ_G sont connues, la base vectorielle de l'espace D peut être obtenue par l'équation (4.33).

Finalement, ayant la base \mathbf{H}_D définie, la matrice de contrainte \mathbf{R}_D qu'on cherche, peut être définie par

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_{GD} \mathbf{H}_D \quad (4.34)$$

Il est à noter que la base vectorielle de l'espace D, obtenue par l'approche proposée, dépend du nombre de vecteurs propres considéré dans l'équation 4.33. Au-delà de cette remarque, un nombre limité de vecteurs propres de l'espace G sont nécessaires pour

capturer la solution de l'instabilité distorsionnelle. Cela sera démontré dans le chapitre suivant avec des exemples numériques.

4.4 Dérivation de \mathbf{R}_L

La dérivation de la matrice \mathbf{R}_L est une procédure simple et peut être obtenue par l'application des critères définissant les modes L. Deux critères sont utilisés pour forcer les modes L [27] :

- Critère #1 : Hypothèse de « Valsov » – (a) $\gamma_{xy} = 0$, les distorsions membranaires sont nulles (b) $\varepsilon_x = 0$, les déformations membranaires transversales sont nulles (c) les déplacements longitudinaux, v , varient linéairement suivant x , à l'intérieur d'une paroi plane.
- Critère #2 : Les déplacements de gauchissement – (a) $v \neq 0$, c.-à-d., le déplacement longitudinal n'est pas constamment égal à zéro le long d'une paroi plane (b) la section transversale est en équilibre.

Premièrement, les modes L doivent répondre aux exigences du critère #1, ce qui se traduit par une relation stricte entre les déplacements nodaux longitudinaux (gauchissement) des nœuds principaux et les déplacements nodaux transversaux des nœuds principaux internes, comme formulé dans l'équation 4.9.

De plus, le critère #2 ne doit pas être vérifié, cela signifie que : (i) tous les déplacements de gauchissement sont nuls et (ii) la section transversale peut ne pas être en équilibre. De la première condition, et compte tenu de l'Éq. (4.9), tous les déplacements transversaux (U et W) des nœuds principaux internes sont nuls. De plus, compte tenu du critère # 1 (a), les u (déplacements locaux) doivent être nuls pour toutes les bandes, c'est-à-dire qu'aucune déformation membranaire transversale n'est autorisée. En conséquence, la translation des nœuds autres que les nœuds principaux internes est limitée à la direction de w locale, c'est-à-dire le déplacement perpendiculaire à l'élément (ou la paroi) donné(e).

Comme aucune autre restriction n'est donnée pour les modes L, tous les déplacements qui ne sont pas exclus par les conditions présentées ci-dessus sont libres. Les déplacements libres comprennent :

- (i). Les translations dans la direction de w local des nœuds principaux externes,
- (ii). Les translations dans la direction de w local des nœuds secondaires, et
- (iii). Les rotations de tous les nœuds.

Tous les autres déplacements sont nuls. Une manière pratique pour avoir la matrice \mathbf{R}_L définie est d'appliquer des fonctions de base — type FEM — avec un déplacement unitaire à un nœud et zéros à tous les autres nœuds.

En pratique, \mathbf{R}_L est composée de plusieurs sous-matrices et elle est définie comme suit

$$\mathbf{R}_L = [\mathbf{R}_{L,U_m}^T \ \mathbf{R}_{L,U_s}^T \ \mathbf{R}_{L,V_m}^T \ \mathbf{R}_{L,V_s}^T \ \mathbf{R}_{L,W_m}^T \ \mathbf{R}_{L,W_s}^T \ \mathbf{R}_{L,\Theta}^T]^T \quad (4.35)$$

Les seules sous matrices ayant des éléments non nuls sont \mathbf{R}_{L,U_s} , \mathbf{R}_{L,W_s} et $\mathbf{R}_{L,\Theta}$, les autres sont nuls par définition.

$$\mathbf{R}_{L,U_m} = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{L,V_m} = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{L,V_s} = \mathbf{0}, \mathbf{R}_{L,W_m} = \mathbf{0}$$

Les sous-matrices non nulles de \mathbf{R}_L sont définies comme suit :

$$\mathbf{R}_{L,U_s} = [\mathbf{S}]$$

$$\mathbf{R}_{L,W_s} = [\mathbf{C}]$$

$$\mathbf{R}_{L,\Theta} = [\mathbf{I}]$$

Où \mathbf{S} et \mathbf{C} sont des matrices diagonales et peuvent être exprimés par $\mathbf{S} = \text{diag}(-\sin \alpha_1, -\sin \alpha_2, \dots)$ et $\mathbf{C} = \text{diag}(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots)$, α_i est l'angle définissant l'orientation de la bande par rapport à un nœud i donné. \mathbf{I} est une matrice identité. Les tailles de ces matrices dépendent du modèle splines bandes finies et elles sont égales aux DDL libres associés à chacun des déplacements en question (Us, Ws ou Θ).

4.5 Dérivation de \mathbf{R}_O

Les modes O^3 , ou les modes autres que les modes L, D et G restant dans la base vectorielle, sont des modes qui ne satisfont pas le critère #1, c'est-à-dire les déformations qui ne respectent pas les hypothèses de « Vlasov » [27]. Cela signifie que :

- (i) les déformations membranaires transversales (ϵ_x) et / ou les distorsions membranaires (γ_{xy}) dans le plan de la bande ne sont pas nulles, et
- (ii) une distribution non linéaire des déplacements longitudinaux entre deux nœuds principaux est autorisée.

Ce dernier critère est fortement lié à l'existence des distorsions non nulles dans le plan. Ainsi, les déformations dans l'espace O présentent soit une extension (ou un raccourcissement) transversale, soit un cisaillement (une distorsion) dans le plan (ce qui provoque généralement des distributions des déplacements longitudinaux — de gauchissement — non linéaires entre les nœuds principaux). De ce fait, il est donc possible de décomposer l'espace O en deux sous-espaces, à savoir : des instabilités de cisaillement (S) et des instabilités avec des extensions transversales (I).

Mathématiquement, les deux matrices de contrainte correspondantes peuvent être obtenues de manière similaire à celle présentée pour l'espace L (voir la section 4.2.3). En

³ pour Others, en anglais

appliquant des fonctions de base – type FEM, les modes de cisaillement sont obtenus en appliquant un déplacement v unitaire à un nœud et des zéros à tous les autres nœuds. Par contre, les modes avec des extensions transversales sont obtenus en appliquant un u unitaire à un nœud et des zéros à tous les autres nœuds.

Les deux bases vectorielles ainsi obtenues peuvent être rassemblées dans une matrice de contrainte. On obtient alors :

$$\mathbf{R}_{ST/O} = [\mathbf{R}_T \mathbf{R}_S] \quad (4.36)$$

Il est important de signaler que, en appliquant cette base vectorielle, l'espace O résultant peut chevaucher avec d'autres sous-espaces (par exemple avec le mode L), un inconvénient certain.

Une deuxième approche est également possible. Néanmoins, elle est plus mathématique et conduit à des modes de déformation qui contiennent une extension (ou un raccourcissement) transversale et un cisaillement dans le plan. La particularité de cette approche est que l'espace O obtenu ne se chevauche pas avec les autres sous-espaces (G , D et L). Cette deuxième approche nécessite la définition de vecteurs de base qui se trouvent dans l'espace $GDLO$, mais qui sont hors l'espace GDL . Nous cherchons donc un système de base de l'espace nul de l'espace GDL . Cette approche utilise la propriété, très connue, de l'orthogonalité des vecteurs propres. Les modes O sont déduits par orthogonalité aux modes GDL dans l'espace $GDLO$. Autrement dit, la procédure consiste à définir une base GDL et à calculer une base des modes O qui lui soit orthogonale.

Pour pouvoir accomplir cette tâche, il faut une définition de l'orthogonalité pour les fonctions représentées. Bien que divers critères d'orthogonalité soient possibles, un critère simple et significatif est de définir l'orthogonalité par rapport à la matrice de rigidité \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{R}_O \mathbf{K}_e \mathbf{R}_{GDL} = \mathbf{0} \quad (4.37)$$

Les matrices \mathbf{K}_e et \mathbf{R}_{GDL} sont connues, la matrice de contrainte \mathbf{R}_O est définie par l'équation 4.37. On note que \mathbf{R}_O n'est pas unique, c'est-à-dire qu'il existe un nombre infini de matrices \mathbf{R}_O satisfaisant le critère d'orthogonalité. Il est important de noter que ces modes d'instabilités théoriquement existent, mais ils n'avaient aucune importance pratique. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas présenté des résultats numériques les concernant.

4.6 Conclusion

Ce chapitre est un exposé de la méthode développée. Les matrices de contrainte des quatre espaces de base (L, D, G et O) permettant la séparation de l'espace générale de la méthode des splines bandes finies ont été formulées pour (i) des sections transversales arbitraires, y compris celles qui présentent des parties fermées et (ii) des conditions aux limites standard (S-S, S-C, F-C et C-C). Les fondements théoriques, les définitions mécaniques, les particularités de la méthode des splines bandes finies contrainte et les défis rencontrés sont également discutés.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter une série d'exemples d'utilisation et de validation de la nouvelle « splines bandes finies contrainte ». Les exemples traités couvrent essentiellement des formes de section arbitraire, ainsi que, quatre conditions aux limites standard (S-S, S-C, F-C et C-C). Une attention particulière est donnée à la résolution du problème de la torsion des sections fermées. Des solutions alternatives de décomposition modale seront également présentées et discutées à la fin du chapitre 5.

Chapitre 5

La méthode des splines bandes finies contrainte : Applications

5.1 Introduction

Les méthodes de décomposition modale (tel que la MBFc ou la GBT) reposent sur la dérivation des matrices de contrainte \mathbf{R}_M définissant les différentes catégories de modes d'instabilité (c.-à-d., L, D, G et/ou ST). Dans le chapitre précédant nous avons proposé une procédure originale de dérivation des matrices de contrainte dans le contexte de la méthode des splines bandes finies. Une attention particulière a été accordée à l'espace GD, l'espace le plus problématique dans le sens où les charges critiques associées sont très difficiles à calculer.

D'une manière générale, les techniques de dérivation proposées utilisent des procédures numériques générales, couramment utilisées dans la méthode des éléments finis, et cela afin de préserver la flexibilité de la méthode des splines bandes finies comme méthode numérique (notamment, dans la numérotation des nœuds, la numérotation des éléments...etc.). En outre, les définitions mécaniques des instabilités de base utilisées sont indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle. La nouvelle technique de séparation proposée est implémentée dans SHEBA, notre outil numérique d'analyse de la stabilité élastique des profilés formés à froid basé sur la méthode des splines bandes finies (voir la section 3.3). Ainsi, une nouvelle version de SHEBA est sur le point d'être achevée (voir Figure 5-1 et Figure 5-2). L'interface utilisateur permet à l'utilisateur de choisir le type d'analyse (conventionnelle ou avec contrainte). La Figure 5-2 montre les résultats obtenus par la MSBFc quand on force un élément de structure à se déformer en mode L et GD.

Dans ce chapitre, quelques exemples d'utilisation et de validation de la MSBFc dans l'analyse de la stabilité élastique des structures à parois minces seront présentés. Les sections choisies couvrent essentiellement des formes de section arbitraire, ainsi que, quatre conditions aux limites standard (c.-à-d., SS, CF, CS et CC). Une attention particulière est donnée à la résolution du problème de la torsion des sections fermées : une question d'un

intérêt pratique très important. Les exemples traités vont nous servir également à démontrer l'applicabilité de notre technique de séparation des modes purs d'instabilité. Nous terminerons ce chapitre par une discussion sur l'applicabilité de la nouvelle MSBFc dans le dimensionnement des profilés formés à froid, plus précisément dans la DSM.

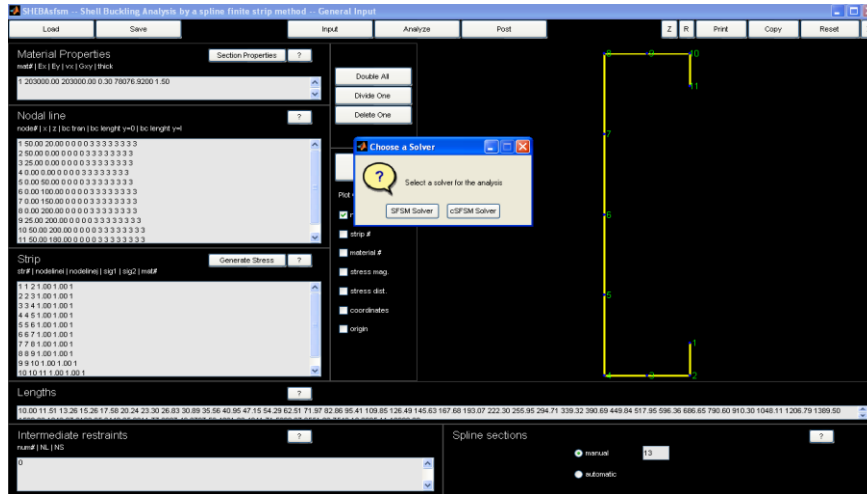


Figure 5-1 Interface du logiciel SHEBA (Version 2.1) : Un nouveau processeur.

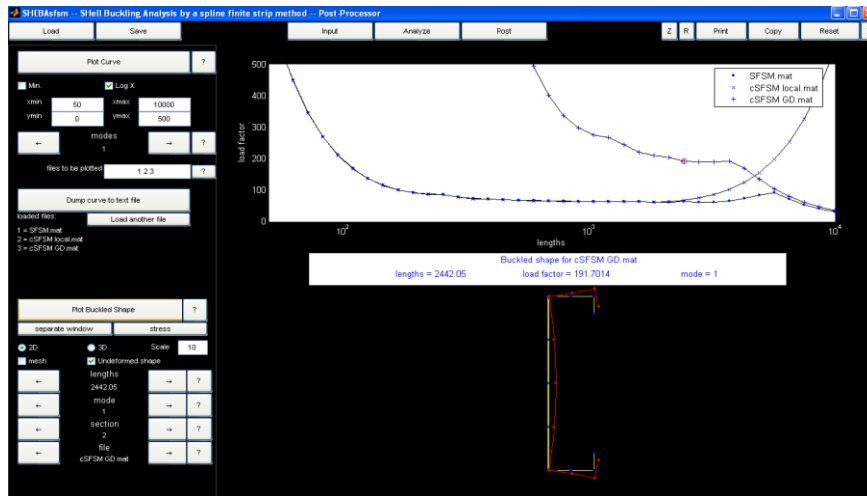


Figure 5-2 Interface du logiciel SHEBA (Version 2.1): Le postprocesseur.

5.2 Un premier exemple de validation : Section en C

Le premier exemple de validation est la section en C baptisée « CS1 » considérée dans le Chapitre 3 – section 3.5.2. La discrétisation de la section transversale utilisée est identique à celle présentée auparavant, soit donc un total de 1409 DDL actifs. Le modèle splines bandes finies possède 9 nœuds secondaires, car ils sont communs à deux bandes coplanaires et à 6 nœuds principaux. Ainsi, la dimension de la matrice de contrainte du sous-espace \mathbf{R}_{GD} , calculée en utilisant Éq. (4. 27), est (1409 x 167).

Selon la procédure développée, les 167 degrés de liberté actifs sont les degrés de liberté de gauchissement des nœuds principaux centraux (ou bien, les V centraux loin des conditions aux limites)($138 = 6 \times (22 + 1)$), plus les degrés de liberté actifs des nœuds externes de tous les nœuds ($29 = (2 \times 15) - 1$). Notez que cette section a 6 modes de déformations fondamentales de type distorsionnel et global. Les formes d'instabilité correspondantes sont présentées sur la Figure 5-3. En utilisant la matrice \mathbf{R}_{GD} et selon la procédure de la MSBFc, les charges critiques de l'espace GD peuvent être obtenues en résolvant le problème de valeurs et vecteurs propres réduit défini par Éq. (4.3).

Afin de valider la procédure développée, la longueur physique a été variée de 10 à 10 000mm. Les résultats obtenus sont illustrés à la Figure 5-4. La courbe « csFSM GD » donne les charges critiques du premier mode GD obtenu par la « MSBF contrainte ». À titre de comparaison, la courbe « spline FSM » qui fournit les charges critiques associées au premier mode obtenues par la résolution de l'équation (3.35) est également présentée. Il est évident que la « MSBF contrainte » a réussi à supprimer les modes locaux associés aux faibles longueurs physiques, ces modes sont naturellement inclus dans une analyse type MSBF. D'autre part, on peut observer que la « MSBF contrainte » donne des valeurs critiques légèrement plus élevées que celles de la MSBF conventionnelle. Ce problème est principalement dû à « l'effet de raidissement artificiel de la restriction de l'extension transversale¹ » qui se produit dans les modes GD pour un coefficient de Poisson non nul. Un problème similaire est constaté lorsqu'on travaille avec la MBFc - une discussion complète sur ce problème peut être trouvée dans [12].

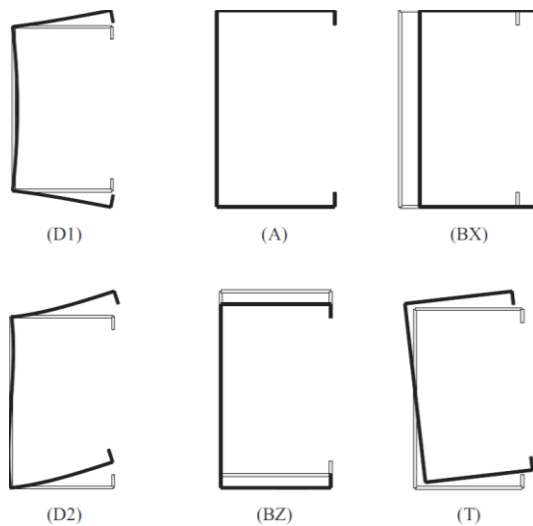


Figure 5-3 Modes fondamentaux d'instabilité de l'exemple CS1 : espace GD.

De plus, la Figure 5-4 permet de comparer les résultats de la procédure de contrainte basée sur la MSBF aux résultats de la MBFc [68] et de la GBT [67]. Notez que les analyses de la MBFc et GBT sont effectuées en considérant multiple demi-onde pour chaque longueur physique. Les résultats obtenus correspondent, donc, aux modes d'instabilité qui

¹ The artificial stiffening effect of restrained transverse extension, en anglais.

peuvent présenter n'importe quel nombre de demi-ondes et combinent tous les modes de déformation de l'espace GD. Les résultats obtenus par la « MSBF contrainte » coïncident parfaitement avec ceux de la MBFc. En comparaison avec les valeurs de la GBT, on peut observer que la « MSBF contrainte » surestime les charges critiques de l'espace GD. Ceci est dû à l'effet, mentionné auparavant, des équations de contrainte sur la rigidité de l'élément. Les résultats de la « MSBF contrainte » (ou MBFc) et GBT ne coïncident que lorsque le coefficient de Poisson est supposé égal à zéro. Comme on peut le voir sur la Figure 5-5, les différences entre les résultats de la MSBFc et GBT sont assez faibles en supposant $\nu = 0$. Les petites différences observées pour les petites longueurs sont dues à la manière dont la cinématique de déformation (plus précisément, la relation déformation-déplacement) décrite par les contraintes longitudinales de second ordre est modélisée dans la GBT et la MSBF. Ces commentaires sont conformes à des conclusions précédentes sur des comparaisons entre la GBT et la MBFc [73]. Ces résultats valident la méthode proposée pour le cas des sections ouvertes à simples connexions.

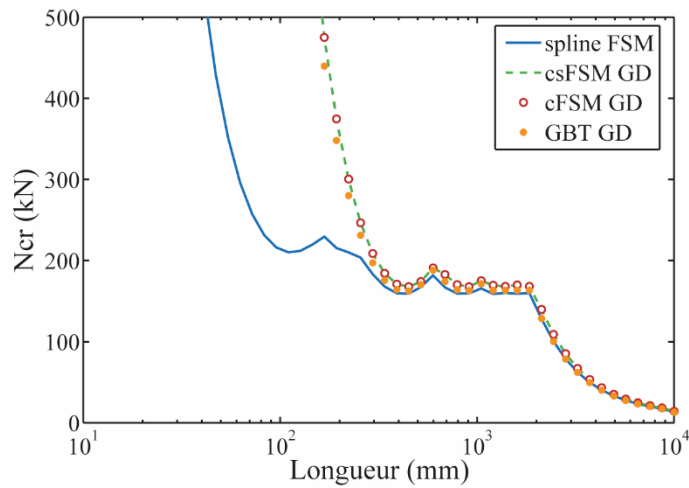


Figure 5-4 Forces critiques du premier mode de l'exemple CS1 : espace GD.

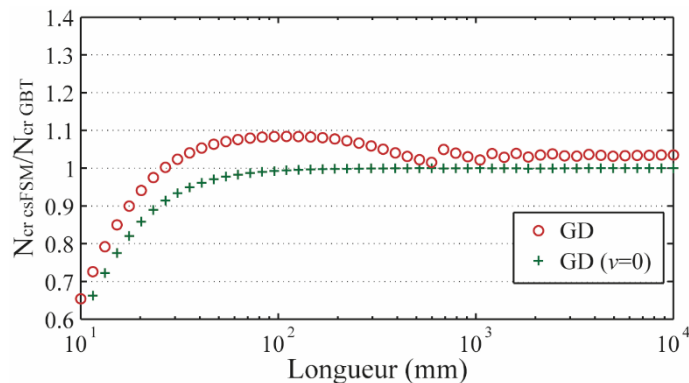


Figure 5-5 MSBF contrainte vs GBT : le premier mode GD.

5.3 Algorithme d'optimisation du modèle splines bandes finies

5.3.1 Introduction

Avant de présenter le reste des exemples numériques, il est important de souligner que les charges critiques des modes purs d'instabilité, c.-à-d., mode local, distorsionnel et global, sont très sensibles au maillage du modèle spline bandes finies. Un maillage adéquat (un nombre de nœuds secondaires, ainsi que de sections splines ou d'intervalles) pour chaque classe d'instabilité est nécessaire, et ce afin d'obtenir des résultats numériques acceptables. Dans cette section, et avant de commencer le processus de validation pour différentes formes de sections, on présente un algorithme qui optimise automatiquement le nombre de nœuds intermédiaires et le nombre de sections splines à considérer dans les analyses types « splines bandes finies contrainte » selon l'instabilité étudiée. Cet algorithme d'optimisation a été implanté dans la nouvelle version de SHEBA (Version 2.1) qui intègre la décomposition modale. La mise en place d'un tel algorithme d'optimisation dans une telle méthode réduira le nombre de degrés de liberté pris en compte dans les analyses, ainsi, le temps de calcul sera considérablement réduit [74].

5.3.2 Optimisation du nombre des nœuds de la section transversale

Tout d'abord, compte tenu des procédures de dérivation de la matrice \mathbf{R}_{GD} , présentées dans le Chapitre 4, l'espace GD est complètement et uniquement défini par des déplacements de gauchissement des nœuds principaux seuls. Par conséquent, les nœuds intermédiaires dans une section transversale n'ont aucun rôle et le modèle SBF contrainte peut être considéré comme l'assemblage de bandes principales² pour le calcul des charges critiques des modes globaux et des modes distorsionnels.

Par contre, pour l'instabilité locale ou de voilement, des nœuds intermédiaires (ou secondaires) sont nécessaires pour obtenir des résultats acceptables. La sensibilité des charges critiques des modes locaux aux modèles splines bandes finies est étudiée par une étude de sensibilité. La précision du modèle SBF contrainte est vérifiée en comparant les résultats des analyses de la MSBF contrainte aux résultats du programme GBTUL2.0 [67]. L'exemple de la section en C « CS1 » simplement appuyé présenté dans section 5.2 est utilisé dans la présente investigation. La géométrie et les dimensions de la section transversale sont représentées sur la Figure 3-9. Les analyses de MSBF contrainte ont été effectuées en utilisant les trois configurations représentées sur la Figure 5-6. La vérification des résultats de la MSBF contrainte a été effectuée en tenant compte des dix premiers modes.

La Figure 5-7 montre le rapport entre les charges critiques des modes locaux de la MSBF contrainte et les charges obtenues par GBTUL2.0. On peut conclure qu'au moins quinze nœuds sont nécessaires pour obtenir des résultats acceptables pour la première demi-onde locale. Cependant, on observe que, pour les moyens et les grandes longueurs (plus d'une demi-onde), seuls quelques nœuds par paroi plane peuvent être considérés pour

² Une bande principale est constituée d'une plaque entre deux nœuds principaux

obtenir des valeurs précises. Cela veut dire qu'il est possible d'optimiser le nombre de nœuds par paroi plane dans les zones avec des longueurs physiques moyens à grandes, et qui nécessitent moins de nœuds pour obtenir des charges locales précises.

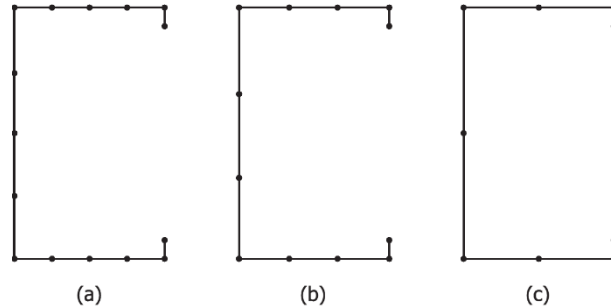


Figure 5-6 Les trois configurations considérées pour étudier la sensibilité des charges critiques des modes locaux aux nombres des nœuds.

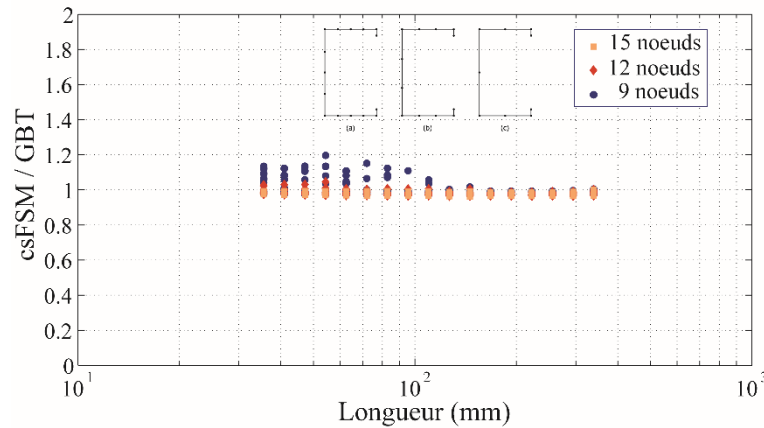


Figure 5-7 Instabilité locale : Sensibilité des résultats de la MSBF contrainte / nombre de nœuds considérés.

5.3.3 Optimisation du nombre des sections nodales (ou sections splines) par demi-onde

L'optimisation du nombre des sections nodales considérées dans un modèle MSBF contrainte est également prise en compte dans l'algorithme développé. L'idée est d'utiliser le nombre de sections splines par demi-onde nécessaire pour avoir des résultats corrects à n'importe quelle longueur physique L . Le nombre de sections nodales nécessaires à une longueur L sera donc égal à $(L/L_{cr, m} \times \text{le nombre des sections nodales par demi-onde du mode } m \text{ en question})$. On note que cette optimisation ne concerne que les modes locaux et distorsionnels, puisque l'instabilité globale couvre toute la longueur physique et donc un minimum de sections splines donne des résultats très satisfaisants.

Une analyse de sensibilité a été réalisée afin de définir le nombre de sections nodales par demi-onde nécessaire pour la détermination des charges critiques des modes locaux et distorsionnels. Dans ce cadre, la section en C (voir Figure 3-9) est analysée avec différents

nombre de sections nodales par demi-onde. La Figure 5-8 et Figure 5-9 montrent les rapports entre les charges obtenues par la MSBF contrainte et les charges obtenues au moyen de la GBTUL 2.0 [67] pour les deux instabilités locales et distorsionnelles, respectivement.

En se basant sur les résultats obtenus, le nombre de sections nodales peut être réduit à deux par demi-onde pour les dix premiers modes locaux avec une faible dégradation des résultats (Figure 5-8). Cependant, pour l'instabilité distorsionnelle, quatre sections nodales par demi-onde sont largement suffisantes pour avoir des résultats acceptables (Figure 5-9). Ainsi, le nombre d'intervalles à considérer dans une analyse type « MSBF contrainte » est égal à $(L/L_{crL} \times (2-1))$ et $(L/L_{crD} \times (4-1))$ pour l'instabilité locale et distorsionnelle, respectivement. Il y'a lieu de rappeler que les charges critiques associées aux instabilités globales nécessitent un minimum d'intervalles pour obtenir des résultats précis.

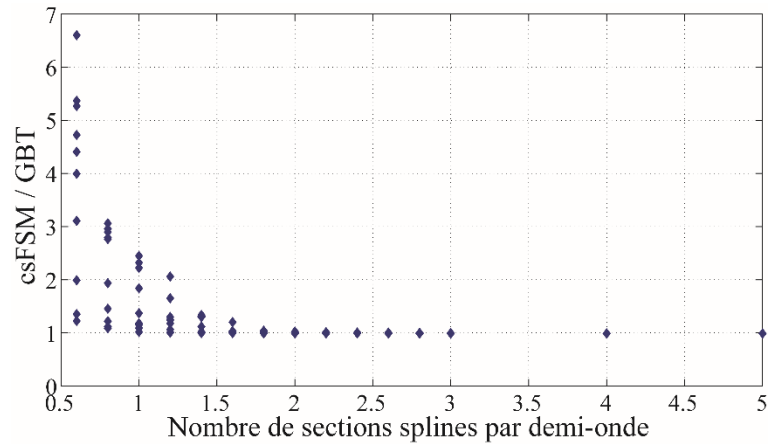


Figure 5-8 Instabilité locale : Sensibilité des résultats de la MSBF contrainte / nombre de sections nodales considérées.

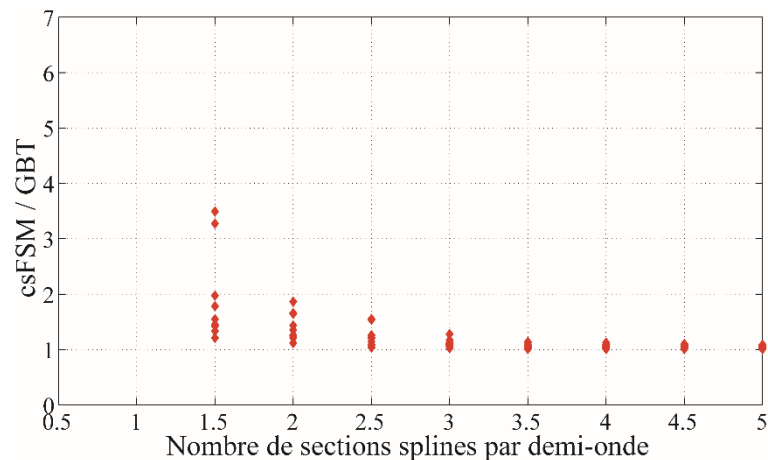


Figure 5-9 Instabilité distorsionnelle : Sensibilité des résultats de la MSBF contrainte / nombre de sections nodales considérées.

5.4 Résultats de l'espace L et GD

5.4.1 Section en I soumise à une flexion

Le deuxième exemple illustratif est une poutre de section en I simplement appuyée avec des semelles raidies inégales. La poutre est soumise à une flexion pure autour de l'axe fort d'inertie. Les dimensions de la section transversale sont indiquées sur la Figure 5-10 (a) (toutes les dimensions sont mesurées au niveau des lignes médianes et des angles vifs ont été considérés). Le maillage du modèle splines bandes finies (Figure 5-10(b)) utilise 16 bandes, 17 nœuds et la longueur est divisée en 21 intervalles (en utilisant $(21 + 3)$ sections nodales) qui donnent un total de 1529 DDL actifs. Sept nœuds sont des nœuds secondaires puisqu'ils sont communs à deux bandes coplanaires. Deux nœuds sont connectés à trois bandes, ce qui permet de classer cette section comme « section ouverte ramifiée ». Notez que le maillage utilisé pour les analyses type MSBF contrainte est généré automatiquement selon l'algorithme présenté dans la section précédente. Par conséquent, pour calculer les modes locaux, seize bandes sont considérées pour les petites longueurs et moins de bandes pour les grandes longueurs. Cependant, pour les modes GD, un maillage grossier avec un minimum de bandes est considéré. Le nombre d'intervalles considérés dans la MSBFc est déterminé en fonction de L_{cr} et de la longueur physique L et il est égal à $(\text{mode } L / L_{crL} \times 1)$ et $(L / L_{crD} \times 3)$ pour les modes locaux et distorsionnels, respectivement.

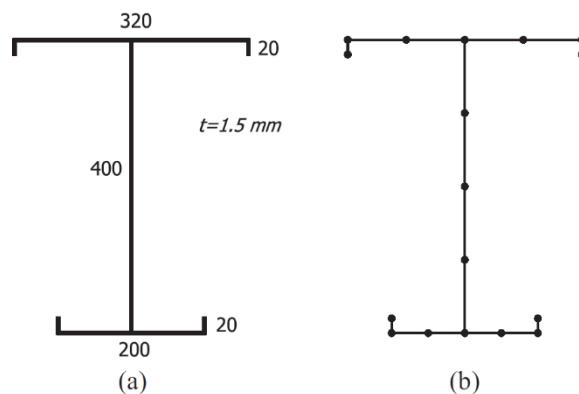


Figure 5-10 (a) Géométrie de la section en I étudiée avec (b) son maillage MSBF.

Des analyses de stabilité élastique ont été effectuées en faisant varier la longueur physique de 50 à 50 000 mm. Les résultats sont présentés sur la Figure 5-11 et la Figure 5-12. Sur la Figure 5-11, la courbe « spline FSM » fournit les moments critiques associés au premier mode en utilisant la méthode des splines bandes finies conventionnelle. La courbe « csFSM L » correspond aux moments critiques du premier mode local et ont été obtenus en utilisant la matrice de contrainte \mathbf{R}_L , dérivée par l'équation 4.35. « csFSM GD » est le premier mode combiné GD calculé par la MSBFc. La courbe de stabilité présente trois zones distinctes, et elles correspondent à des voilements avec un nombre de demi-ondes variant de 1 à 6, à des instabilités distorsionnelles avec un nombre de demi-ondes variant de 1 à 11 et à une instabilité globale (mode couplé flexionnel-torsionnel) avec une seule demi-onde. La Figure 5-12 montre des formes déformées à différentes longueurs physiques.

Il est évident que la MSBFc a décomposé avec succès la solution de la méthode des splines bandes finies classique de la section étudiée en modes « purs » L et GD.

Afin de valider ces résultats, la Figure 5-11 montre également plusieurs valeurs de M_{cr} obtenues par des analyses type bandes finies contrainte (avec une seule demi-onde incluse). Ces analyses ont été effectuées à l'aide du CUFSM 4.05. Une fois de plus, il existe une parfaite coïncidence entre les résultats de la MSBFc et les résultats de la MBFc. Il ne diffère que pour $22,6 < L < 100$ cm (mode local avec un nombre de demi-ondes variant de 2 à 6) et $244 < L < 1950$ cm (mode distorsionnel avec un nombre de demi-ondes variant de 2 à 11). Cela valide la méthode proposée pour le cas des sections ouvertes ramifiées.

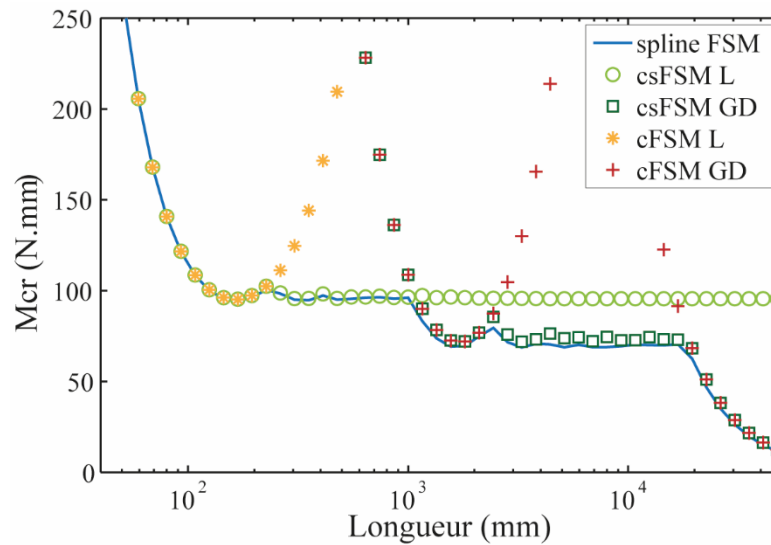


Figure 5-11 Les courbes de stabilité du premier mode de la section en I et leurs décompositions en modes purs L et GD.

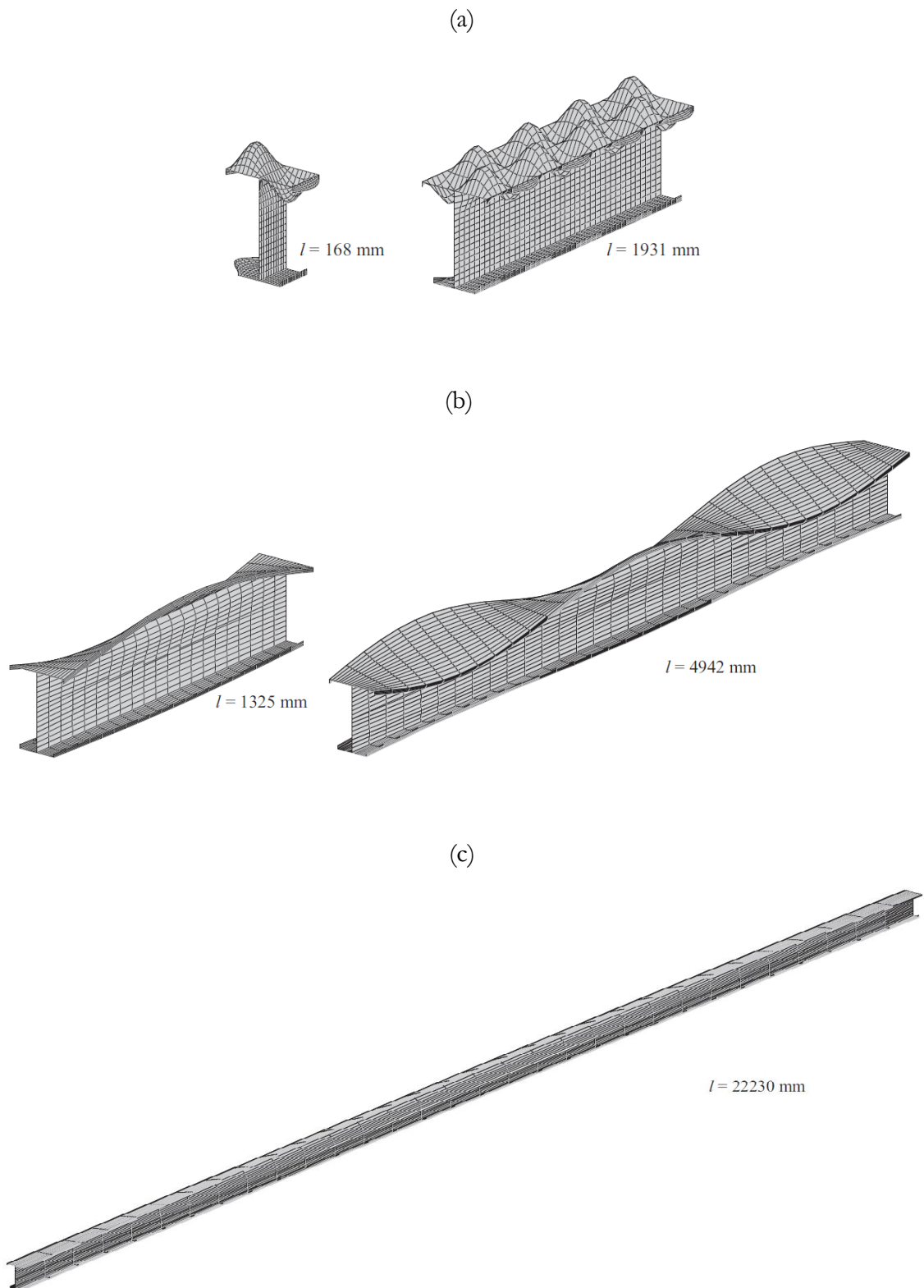


Figure 5-12 Formes déformées de la section en I soumise à une flexion pure à différentes longueurs physiques.

5.4.2 Section transversale avec des branches et des parties fermées

Le troisième exemple illustratif dans ce chapitre est une colonne à section transversale formée d'une partie fermée et ayant des branches. Sa géométrie et ses dimensions sont représentées sur la Figure 5-13(a). La section transversale est modélisée, pour les analyses type MSBF, avec des angles vifs et en utilisant 3 bandes pour les parois de la partie fermée et en 2 bandes par paroi des parties ouvertes. Le nombre total de bandes considérées dans le modèle MSBF est de 20 (voir Figure 5-13(b)). Notez que, parmi les huit nœuds principaux, il y a deux nœuds communs à trois bandes. Cela signifie que, selon la procédure présentée dans la section 4.3.2, il n'y a que six nœuds avec des DDL de gauchissement efficaces. D'autre part, la longueur physique est divisée en 39 intervalles (en utilisant $(39+3)$ sections nodales), ce qui donne un total de 3239 DDL actifs.

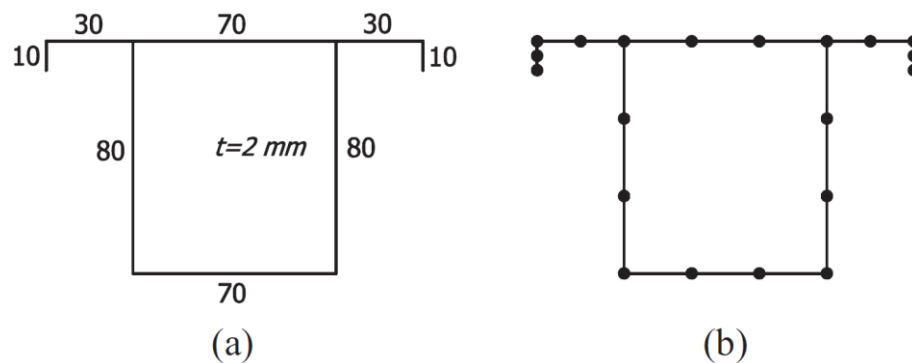


Figure 5-13 (a) Section transversale mono symétrique à une cellule avec des branches et une partie fermée avec (b) son maillage MSBF.

Pour l'exemple numérique en considération, le modèle MSBFc est généré automatiquement. Cela signifie que le logiciel développé optimise automatiquement le nombre de nœuds et d'intervalles considérés dans les différentes analyses pour le mode L et le mode combiné GD, ce qui va réduire considérablement le temps de calcul.

La Figure 5-14 donne des charges critiques en fonction de la longueur physique. Cinq courbes y sont représentées et correspondent à: (i) le premier mode de stabilité résultant d'une analyse de flambement par la MSBF conventionnelle (spline FSM) (ii) le premier mode pur "local" (csFSM L) et (iii) le premier mode pur "GD" (csFSM GD) obtenus par la MSBF contrainte développée (iv) le premier mode pur "local" (cFSM L) et (v) le premier mode pur "GD" (cFSM GD) obtenus par la MBFc de Djafour et collab. [38]. On note qu'une seule demi-onde est incluse dans les analyses type bandes finies contrainte. Les déformées correspondantes à ces modes d'instabilité sont représentées sur la Figure 5-15.

Il est évident que les enveloppes des modes purs d'instabilité calculées coïncident avec la courbe de la méthode des splines bandes finies. D'un autre côté, la MSBFc a décomposé la solution conventionnelle de la méthode des splines bandes finies en modes «purs», dans ce cas les modes L et GD, et les charges critiques correspondantes coïncident

parfaitement avec ceux de la MBFc. Cela valide la méthode proposée pour le calcul des modes purs de flambement des sections à parois minces ouvertes et/ou fermées avec branches.

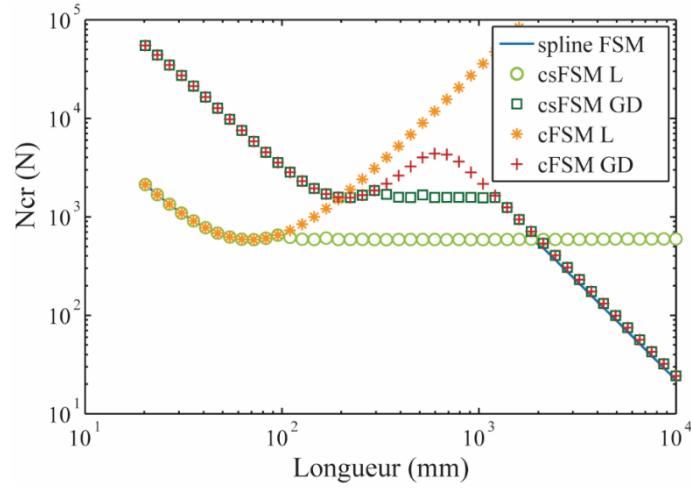


Figure 5-14 Les courbes de stabilité du premier mode de la section monosymétrique à 1 cellule et leurs décompositions en modes purs L et GD.

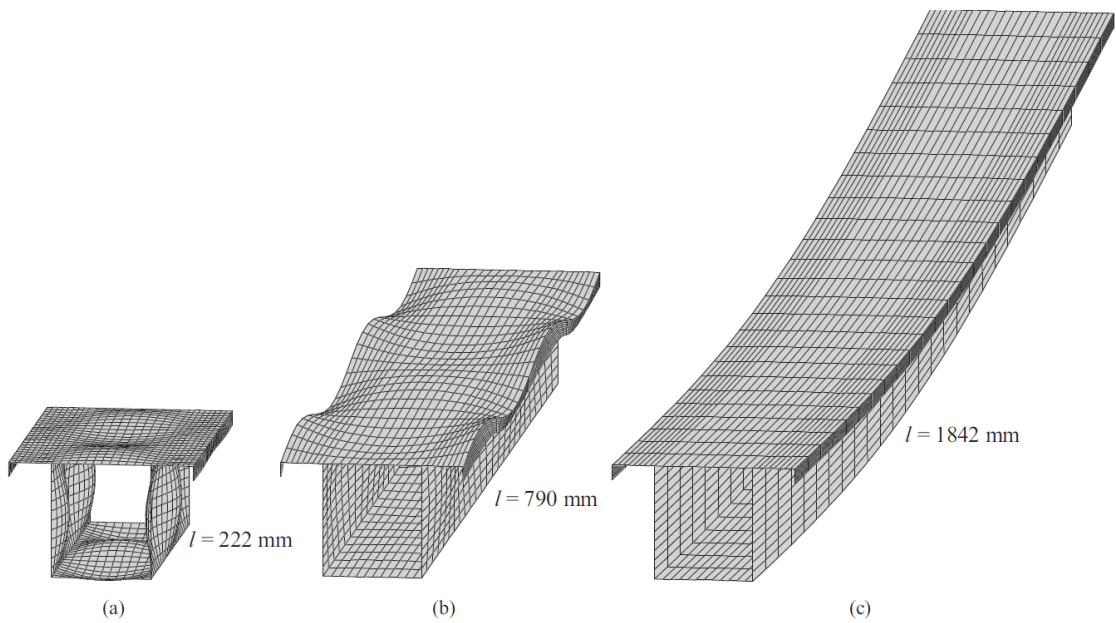


Figure 5-15 Formes déformées de l'élément traité soumis à une compression uniforme à différentes longueurs physiques.

5.4.3 Section fermée ramifiée

Le quatrième exemple dans ce chapitre est une colonne simplement appuyée à section fermée ramifiée constituée de trois cellules. Cet exemple a été traité par Djafour et al. [38]. Les dimensions de la section transversale sont indiquées sur la Figure 5-16(a) (toutes les dimensions sont mesurées des lignes moyennes de la section transversale). Sa forme est une section à 3 cellules asymétrique formée par 10 éléments planes. Le modèle SBF utilise 28 nœuds et 30 bandes (3 bandes par paroi plane) comme indiqué sur la Figure 5-16(b). On note que, parmi les huit nœuds principaux, deux nœuds sont communs à trois bandes et un nœud est connecté à quatre bandes. Ceci dit, selon la procédure présentée dans le chapitre précédent, il n'y a que 4 nœuds avec des degrés de liberté de gauchissement efficaces. Pour cet exemple, les analyses type MSBF ont été réalisées en utilisant 33 intervalles, ce qui donne un total de 3863 DDL actifs, cependant, les analyses type MSBF contrainte sont effectuées avec un maillage optimisé selon l'algorithme présenté à la section 5.3.

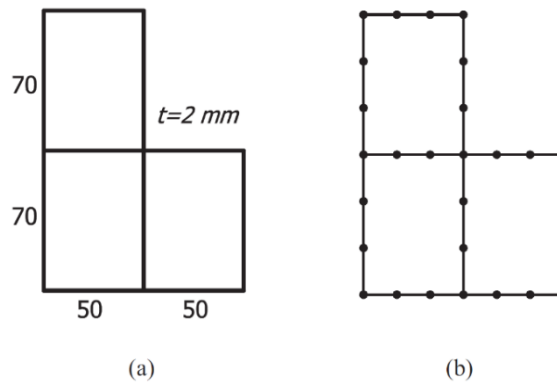


Figure 5-16 (a) Section transversale asymétrique à 3 cellules et (b) sa modélisation MSBF.

La Figure 5-17 et la Figure 5-18 montrent les résultats numériques concernant le comportement de flambement de la colonne à 3 cellules. Les courbes représentées sur la Figure 5-17 fournissent la variation des charges critiques en fonction de la longueur L . La courbe (spline FSM) correspond aux charges de flambement du premier mode lorsqu'on utilise la méthode des splines bandes finies originale. La solution obtenue combine tous les modes de déformation avec n'importe quel nombre de demi-ondes. Les courbes (csFSM L) et (csFSM GD) sont les premiers modes L et GD obtenus en utilisant la MSBFc développée. Les courbes (cFSM L) et (cFSM GD) sont les premiers modes L et GD obtenus par la MBFfc développée dans [38]. Les déformées correspondantes aux différents modes purs de flambement sont représentées dans la Figure 5-18. Une fois de plus, il est clair que la MSBFc a décomposé avec succès la solution conventionnelle en modes «purs» d'instabilité et que les charges de flambement pures correspondantes coïncident parfaitement avec les résultats de la MBFfc. Ceci valide la méthode proposée pour la décomposition des modes d'instabilité des sections à parois minces fermées avec des branches (ou à connexions multiples).

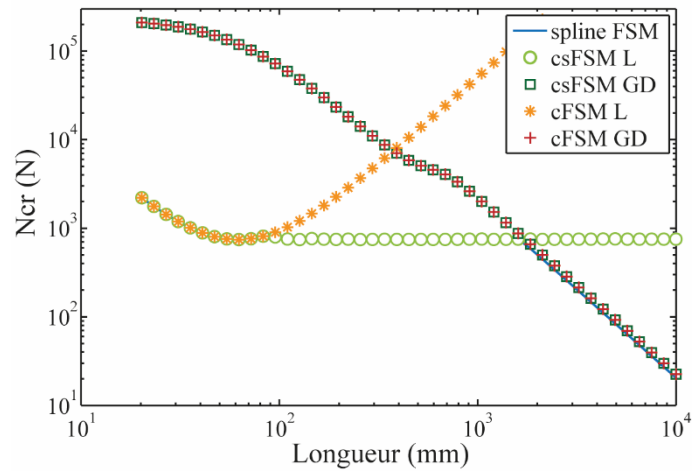


Figure 5-17 La courbe de stabilité du premier mode de la section asymétrique à 3 cellules et sa décomposition en modes purs L et GD.

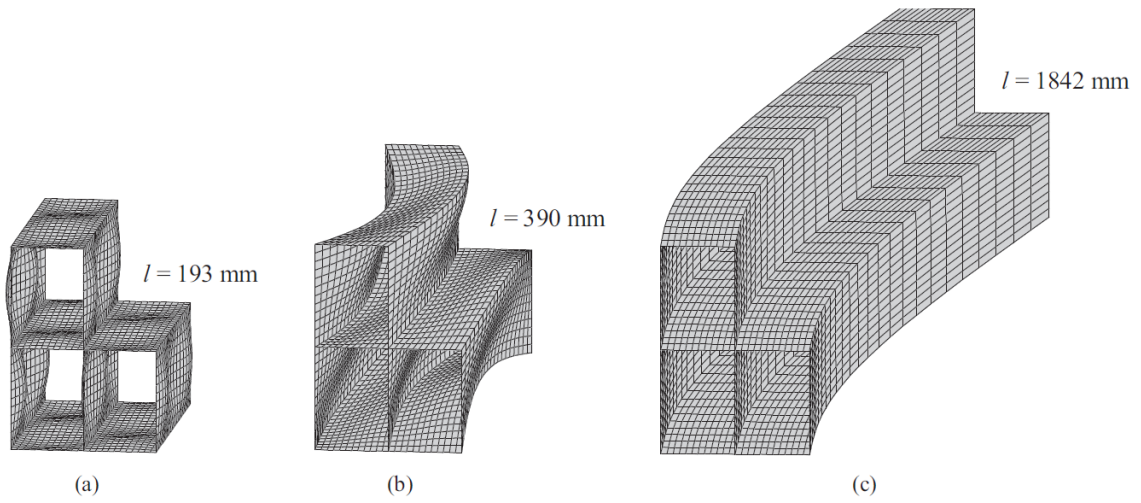


Figure 5-18 Formes déformées de l'exemple traité soumis à une compression uniforme à différentes longueurs physiques.

5.5 Décomposition de l'espace GD

5.5.1 Introduction

Dans les exemples présentés jusqu'ici, nous avons validé les résultats de notre approche de décomposition modale basée sur la méthode des splines bandes finies pour les deux espaces L et GD. Des formes de section générales sont considérées afin de valider les procédures de dérivation des matrices de contrainte \mathbf{R}_{GD} et \mathbf{R}_L , exposées dans les sections 4.3.2 et 4.4 du Chapitre 4, respectivement. En outre, d'autres résultats de validation peuvent être trouvés dans [75], [76].

L'objectif de cette section est triple. D'abord, valider la décomposition de l'espace GD, et donc les procédures de dérivation des matrices de contrainte \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_D , en exposant les défis et les difficultés rencontrées. Ensuite, l'approche proposée sera appliquée à différents types de condition aux limites, puisque dans les exemples traités auparavant seul le cas simplement appuyé a été considéré. Enfin, nous allons présenter une nouvelle technique originale permettant de forcer le mode torsionnel des sections fermées.

5.5.2 Trois sections en C additionnelles : Section CS2, CS3 et CS4

Dans cette section, les résultats de la MSBFc seront comparés à ceux de la MBFc associés aux modes distorsionnels et globaux purs (voir la section 4.3.3 du Chapitre 4). Trois sections supplémentaires ont été considérées ; et elles sont représentées sur la Figure 5-19. Ces exemples ont été extraites d'articles publiés par des chercheurs spécialistes de laGBT et la MBFc: la section « CS2 » a été analysée par Dinis et al. dans [77]; la section « CS3 » par Silvestre et Camotim dans [78]; et la section « CS4 » a été extraite d'un article d'Ádány et Schafer [12]. Les constantes E et ν sont également données dans la Figure 5-19. Les extrémités longitudinales sont supposées simplement appuyées.

Rappelons que, dans la section 4.3.3.3 du Chapitre 4, le mode D est défini comme l'espace nul de l'espace G par rapport à la matrice de rigidité élastique réduite du modèle splines bandes finies contrainte à l'espace GD (c'est-à-dire, $\mathbf{K}_{E,GD}$). Pour les exemples traités dans cette section, les solutions des instabilités distorsionnelle et globale sont complètement et uniquement définies par les déplacements de gauchissement des nœuds principaux, puisqu'aucun nœud secondaire n'a été introduit dans le modèle splines bandes finies. Toutefois, le nombre d'intervalles dans la direction longitudinale a une influence importante sur les charges critiques. Dans cette étude, un maillage longitudinal régulier, avec trois intervalles par demi-onde distorsionnelle, a été utilisé pour obtenir des résultats précis. Ces considérations réduiront considérablement le temps de calcul. On note que les valeurs propres de la base D sont évaluées dans l'Éq. (4.33) en considérant 10% des valeurs propres de la base G. Pour les calculs MBFc, CUF_{SM4.05} est utilisé [68] et les contraintes critiques sont calculées en considérant multiple demi-onde pour chaque longueur physique.

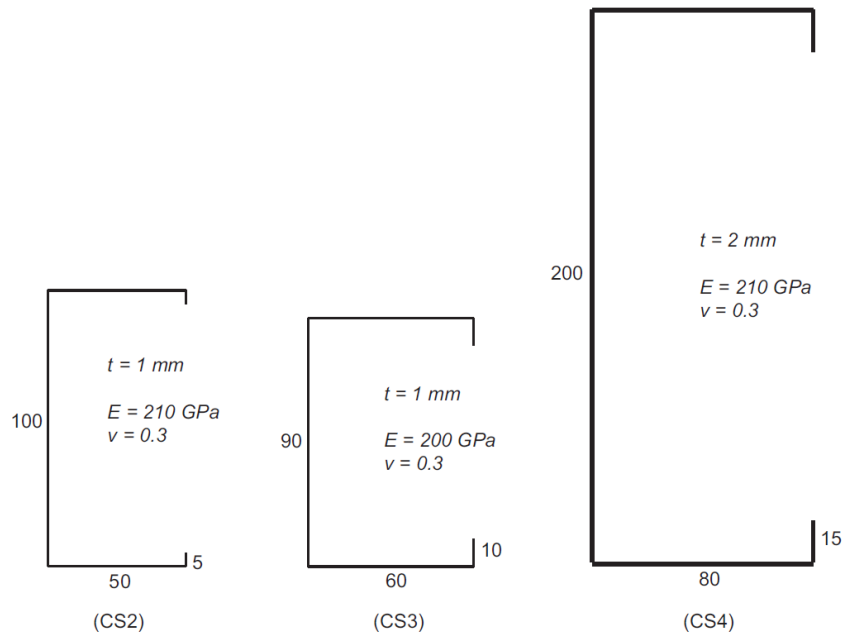


Figure 5-19 Trois sections en C additionnelles, baptisées CS2, CS3 et CS4.

Les courbes des forces critiques des modes purs sont données sur la Figure 5-20, Figure 5-21 et Figure 5-22 pour les sections CS2, CS3 et CS4, respectivement. Comme on peut le constater, les sections choisies ont des réponses différentes de l'un par rapport à l'autre et les résultats obtenus par ces deux méthodes de décomposition modales sont identiques. Il faut néanmoins signaler que des différences non négligeables sont observées pour les petites longueurs et dans le cas du mode global. Cela est clairement la conséquence de la définition de l'espace G appliquée, et qui n'impose aucune forme prédéfinie pour le mode de flexion (les deux modes de flexion selon les deux axes principaux) et le mode de torsion, comme suggéré dans la méthode des bandes finies contrainte [11], [12]. Tous ces modes, dites individuels, nécessitent un certain point de référence auquel ils sont supposés être affectés. Ce point de référence est le centre de masse pour les modes flexionnels d'instabilité, alors que c'est le centre de cisaillement de la section transversale pour le mode de torsion. La définition du mode G, proposée dans la section 4.3.3.2 du Chapitre 4, dépend donc de la géométrie de la section transversale ; mais plus la longueur physique est importante, plus l'effet de la définition du mode G est petit. Néanmoins, la méthode proposée peut approcher avec précision les charges critiques des modes distorsionnels et globaux des éléments de structure avec longueur physique d'intérêt pratique, comme il est typique dans les analyses de stabilité élastique par la méthode des splines bandes finies. D'autre part, il est à noter que l'approche utilisée par la MBFc (ou la GBT) permet de séparer les différents modes distorsionnels. À titre d'exemple, une section en C possède deux modes distorsionnels individuels et la MBFc sépare les modes distorsionnels symétriques des modes asymétriques, on parle donc de modes distorsionnels individuels. La solution de la MBFc est en fait composée de deux courbes : celle associée à l'instabilité symétrique et celle associée à l'instabilité asymétrique. En revanche, l'approche de décomposition modale proposée dans cette thèse fournit une seule courbe enveloppe pour tous les modes distorsionnels et ne permet pas cette distinction. Il s'agit d'un aspect qui reste en suspens et qui nécessite une investigation complémentaire, néanmoins, et d'un

point de vue pratique, la solution proposée fournit les inputs nécessaires à la procédure réglementaire.

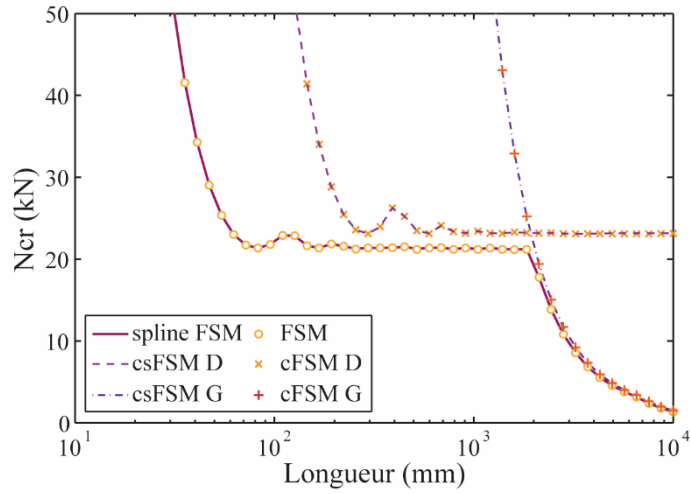


Figure 5-20 Charges critiques de la section CS2 : Mode 1 distorsionnel et global.

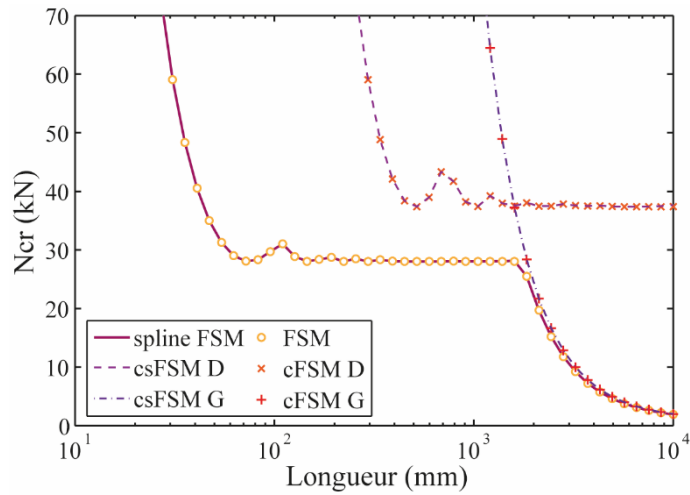


Figure 5-21 Charges critiques de la section CS3 : Mode 1 distorsionnel et global.

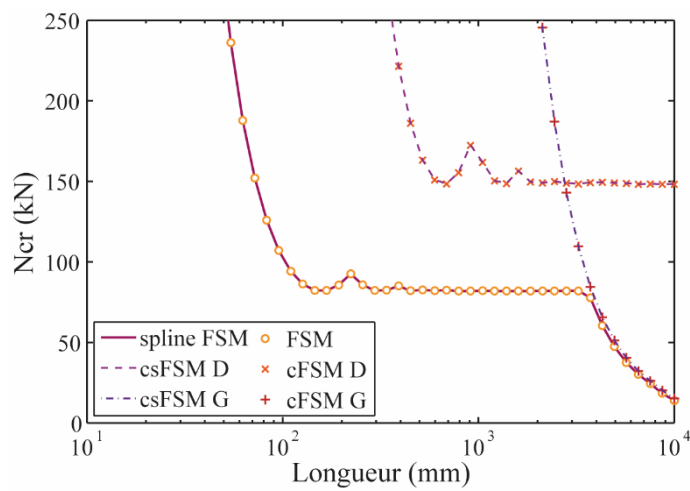


Figure 5-22 Charges critiques de la section CS4 : Mode 1 distorsionnel et global.

5.5.3 Section creuse rectangulaire (RHS)

5.5.3.1 Introduction

La méthode de décomposition modale proposée dans cette thèse est présentée dans cette section à l'aide d'une analyse de stabilité élastique d'une section creuse rectangulaire (RHS). Cet exemple a été analysé par Gonçalves et al. dans [48] en utilisant la GBT. La section transversale est présentée sur la Figure 5-23. (On note que les dimensions sont mesurées au niveau des lignes moyennes et que des angles vifs ont été considérés).

Afin de simplifier la comparaison entre la MSBFc et la GBT, le coefficient de Poisson est supposé nul dans tous les exemples traités, ainsi, les constantes considérées sont les suivantes : $E = 200 \text{ GPa}$, $G = 100 \text{ GPa}$ et $\nu = 0$. Cela va permettre l'étude des différences entre ces deux méthodes autres que les différences causées par l'effet de raidissement artificiel de l'extension transversale restreinte (plan médian) qui se produit dans les modes G et D pour des coefficients de Poisson non nuls³.

Les analyses type splines bandes finies conventionnelle ont été accomplies en utilisant un maillage raffiné : chaque élément plan est divisé en quatre bandes. En ce qui concerne la direction longitudinale, 25 intervalles ont été utilisés. La discrétisation de section transversale introduite dans les analyses type spline bandes finies contrainte a été réalisées avec un modèle grossier, c'est-à-dire, une seule bande par élément plan. La discrétisation longitudinale est régulière ; 3 intervalles par demi-onde distorsionnelle sont considérés pour les différentes longueurs physiques⁴.

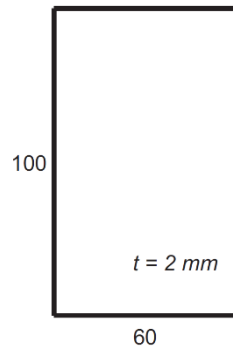


Figure 5-23 Section creuse rectangulaire (RHS) étudiée : Géométrie et dimensions.

³ Les équations de contrainte provoquent une augmentation de la rigidité de l'élément, voir la section 5.2.1 pour plus de détails

⁴ Voir la section 5.3 ou bien (Djelil et al., 2015b) pour avoir plus de détail sur l'algorithme d'optimisation du modèle SBFc développé dans cette thèse.

5.5.3.2 Torsion des sections fermées

La Figure 5-24 représente les configurations de l'ensemble des modes de déformation fondamentaux dans l'espace GD. Il s'agit de :

- (i) mode distorsionnel (D),
- (ii) mode axial (A),
- (iii) flexion selon l'axe mineur (BX),
- (iv) flexion selon l'axe majeur (BZ) et
- (v) mode de torsion (T).

Il est important de noter que la torsion (sans distorsion de la section transversale) n'apparaît pas parmi les résultats de cet exemple dans l'espace GD, puisque les distorsions membranaires (γ_{xy}) ne peuvent pas être négligées dans les sections fermées soumises à la torsion. Dans l'approche de décomposition modale développée dans cette thèse, les modes de déformation des sous-espaces G et D (obtenus à partir des deux hypothèses sur la flexion cylindrique des plaques et les déformations membranaires transversales et de cisaillement) sont complétés par un mode de torsion pour les sections fermées, c'est-à-dire un mode de flambement qui n'est pas conforme à l'hypothèse de Vlasov sur les déformations de cisaillement membranaires ($\gamma_{xy} = 0$).

Le mode torsionnel des sections fermées est caractérisé par des déplacements de gauchissement nuls. De plus, la section transversale reste inchangée et subit une rotation en mode rigide [13]. Ce mode particulier peut être approximé en appliquant une rotation unitaire sur la section transversale – en mode rigide – par rapport au centre de cisaillement. Pour chaque nœud i du modèle splines bandes finies, les DDL des déplacements transversaux (U, W et Θ) peuvent être déterminés comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i = -(z_i - z_{sc}) \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{W}_i = (x_i - x_{sc}) \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{\Theta}_i = \mathbf{I} \end{cases} \quad (5.1)$$

où \mathbf{U}_i , \mathbf{W}_i et $\mathbf{\Theta}_i$ sont les déplacements transversaux dans le repère global du nœud i , x_i et z_i sont les coordonnées globales du nœud i , et x_{sc} et z_{sc} sont les coordonnées globales du centre de cisaillement de la section transversale. \mathbf{I} est une matrice identité de dimension égale au nombre de sections splines associées aux DDL transversaux actifs. On rappelle que les éléments nuls de la base vectorielle recherchée sont ceux des déplacements de gauchissement (c'est-à-dire les \mathbf{V}).

En considérant successivement les nn nœuds du modèle splines bandes finies, la matrice de contrainte requise qui force le mode torsionnel pour les sections fermées est obtenue (c'est-à-dire, la matrice $\mathbf{R}_{G,T}$) par :

$$\mathbf{R}_{G,T} = [\mathbf{H}_{G,T}^{(1)} \ \mathbf{H}_{G,T}^{(2)} \ \dots \ \mathbf{H}_{G,T}^{(nn)}] \quad (5.2)$$

Ayant $\mathbf{R}_{G,T}$ et selon la procédure présentée au paragraphe 4.2, les charges critiques des modes de torsion peuvent être obtenues à partir du problème de valeur propre réduit

défini par Éq. (4.3). On note que le nombre de vecteurs de la base vectorielle $\mathbf{R}_{\mathbf{G},\mathbf{T}}$ dépend du type de conditions aux limites appliqué et il est égal au nombre de sections splines associées aux DDL transversaux libres / actifs. Par exemple, dans le cas d'un élément de structure avec deux extrémités encastées, le modèle a $(nm - 1)$ vecteurs définissant le mode torsionnel. Il est clair qu'il s'agit d'une formulation très simple et efficace. Les résultats de validation seront présentés ci-après.

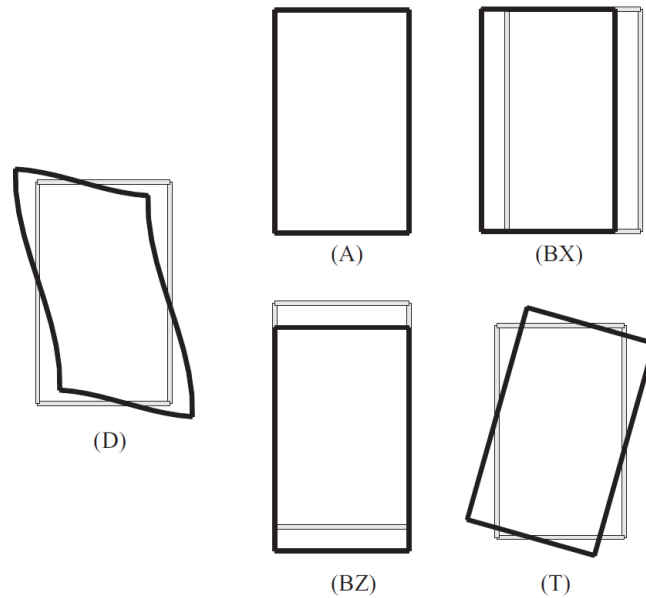


Figure 5-24 Modes fondamentaux d'instabilité de la section étudiée (RHS) dans l'espace GD.

5.5.3.3 Exemples de validation

Dans cette section, on traite, d'abord, le cas d'une section fermée soumise à une compression et à une flexion pure simplement appuyée, puis on présente les solutions de notre approche de décomposition modale pour des conditions aux limites plus générales. Les charges critiques sont calculées et présentées en deux options : (i) en courbe de mode conventionnel (c.-à-d., solution avec interaction entre les modes purs d'instabilité), ainsi que (ii) en courbes de modes purs (c.-à-d., les solutions du mode distorsionnel pur et les 3 modes globaux purs). Chaque colonne (ou poutre), des courbes de flambement sont obtenues pour une large fourchette de longueurs physique ($10 \leq L \leq 10\,000\text{mm}$). Afin de valider l'approche proposée, les résultats de la MSBFc seront comparés à ceux de la MBFc de Djafour et al. [37], ainsi que de la GBT [67].

a. Cas d'un élément comprimé simplement appuyé

Tout d'abord, un problème de colonne simplement appuyée est considérée et présenté. Les forces critiques sont comparées sur les Figure 5-25, Figure 5-26 et Figure 5-27. La Figure 5-28 montre les formes déformées du premier mode local et global obtenues par la méthode des splines bandes finies conventionnelle. Notons que dans la Figure 5-25 une échelle semi-logarithmique est utilisée, alors que dans la Figure 5-26 et la Figure 5-27

l'échelle est doublement logarithmique. Dans la Figure 5-25, le premier mode conventionnel est tracé (c'est-à-dire, les charges critiques calculées sans décomposition modale). La courbe des forces critiques obtenue par la méthode des splines bandes finies ne présente que deux zones distinctes, correspondant à une instabilité locale avec un nombre de demi-ondes qui varie entre 1 et 22 et un mode global flexionnel (suivant l'axe faible d'inertie) avec une seule demi-onde – voir Figure 5-28.

Les solutions en mode pur d'instabilité sont comparées dans la Figure 5-26 et la Figure 5-27 pour le premier mode distorsionnel et trois modes globaux purs, respectivement. Les modes globaux inclus sont :

- (i) flexion selon l'axe mineur (BX),
- (ii) flexion selon l'axe majeur (BZ) et
- (iii) la torsion (T).

Notez que les courbes "csFSM BX" et "csFSM BZ" sont le premier mode et le deuxième mode de l'espace G. Comme on peut le constater, les charges critiques obtenues au moyen de la méthode des bandes finies contrainte (cFSM) [37] (avec une seule demi-onde) coïncident pratiquement avec celles obtenues par la méthode des splines bandes finies contrainte (csFSM); cependant, elles ne coïncident que pour les charges critiques associées à un nombre de demi-ondes différent de 1. De plus, les différences entre les résultats de la MSBFc et la GBT sont assez faibles, dans la plupart des cas négligeables. Des différences non négligeables sont observées seulement pour les très courtes longueurs. Ces différences sont principalement causées par la modélisation des déformations du second ordre dans la théorie des plaques (MSBF) et la théorie des poutres généralisées (GBT) [73]. Ces résultats valident la méthode de décomposition modale proposée pour l'étude des sections fermées à paroi mince soumises à une compression uniforme et simplement appuyée.

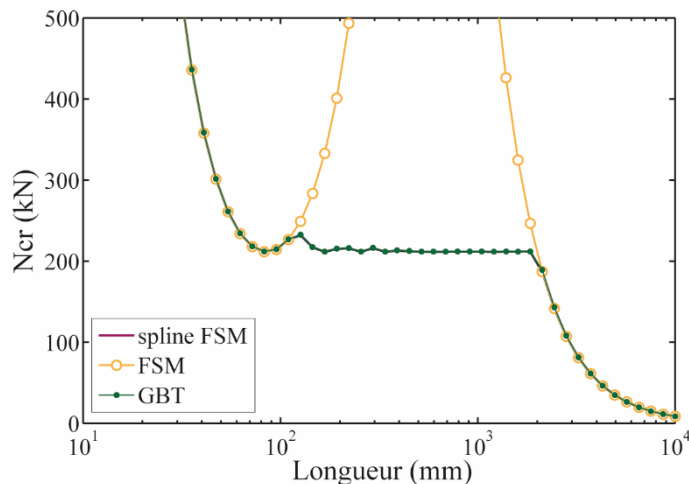


Figure 5-25 Forces critiques du premier mode de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme obtenues en considérant l'interaction entre les modes purs.

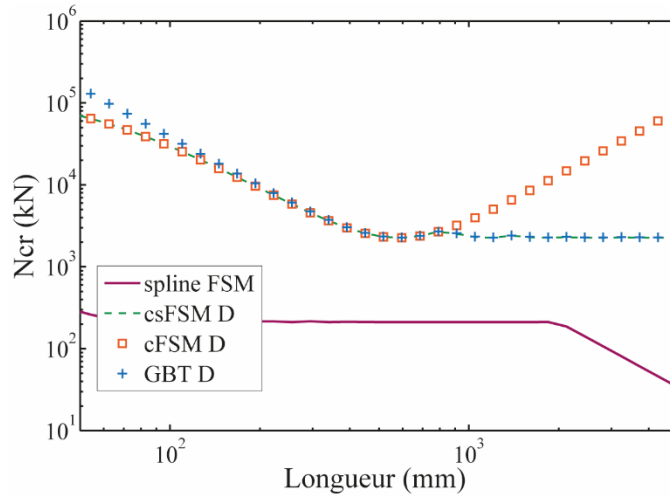


Figure 5-26 Forces critiques du premier mode distorsionnel de l'exemple étudié (RHS).

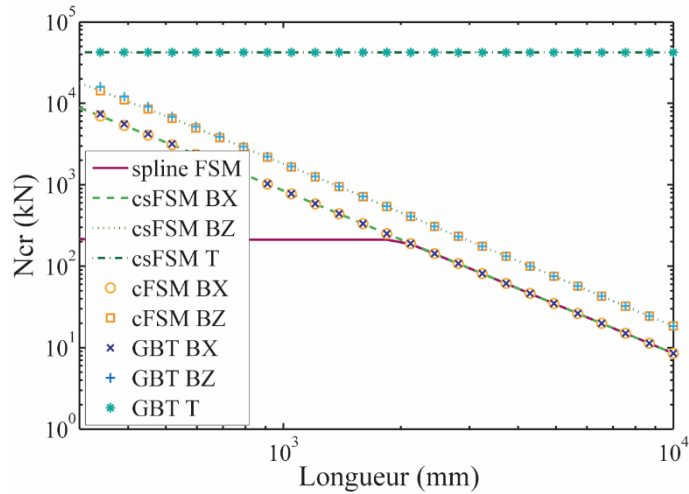


Figure 5-27 Forces critiques des modes globaux de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme.

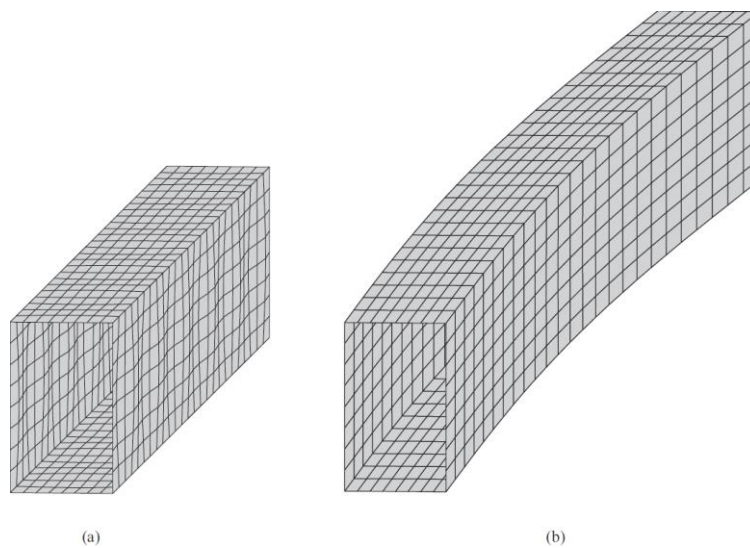


Figure 5-28 Formes déformées de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme à différentes longueurs physiques: (a) $L=1$ m (b) $L=2$ m.

b. Cas d'un élément fléchi simplement appuyé

Dans de nombreuses applications, le mode torsionnel des sections fermées ne participe jamais au flambement des colonnes. Ceci est dû à la rigidité élevée en torsion des sections fermées. Cependant, dans certains cas, le mode torsionnel est d'une importance cruciale, par exemple, dans le cas des poutres à section fermée soumises à un mode couplé flexion-torsion. Dans la Figure 5-29 et la Figure 5-30, les moments critiques de la section fermée étudiée auparavant (voir la Figure 5-23) soumise à une flexion autour de l'axe x sont donnés. Comme on peut le constater, la section se déforme en mode local pour les longueurs courtes à intermédiaires et en mode couplé flexion-torsion pour les grandes longueurs. D'autre part, la Figure 5-31 montre les moments obtenus par la MSBFc. Dans ce cas, deux modes globaux (BX+T) doivent être combinés pour produire le mode couplé flexionnel-torsionnel, pour les grandes longueurs, obtenu par la méthode des splines bandes finies conventionnelle. Parallèlement, ces résultats sont comparés aux moments critiques de la GBT obtenus avec la même combinaison de mode individuel (BX+T) sur la Figure 5-31. Il est évident que la méthode proposée produit les mêmes résultats que ceux de la GBT. Il est à noter que dans cet exemple, le mode distorsionnel (D) existe; cependant, les forces critiques associées sont très élevées et, c'est la raison pour laquelle, la courbe « csFSM D » n'apparaît pas sur la Figure 5-31.

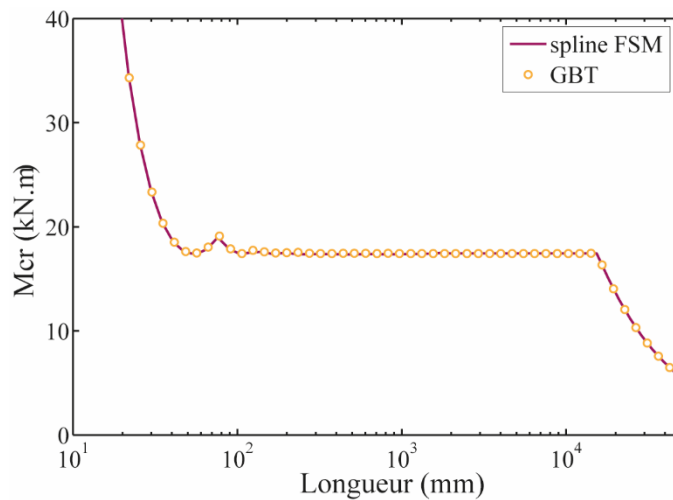


Figure 5-29 Moments critiques du premier mode de l'exemple étudié (RHS) soumis à une flexion pure obtenus en considérant l'interaction entre les modes purs.

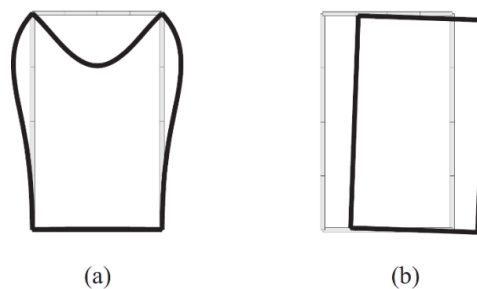


Figure 5-30 Formes déformées de l'exemple étudié (RHS) soumis à une flexion à différentes longueurs physiques: (a) $L=1$ m (b) $L=20$ m.

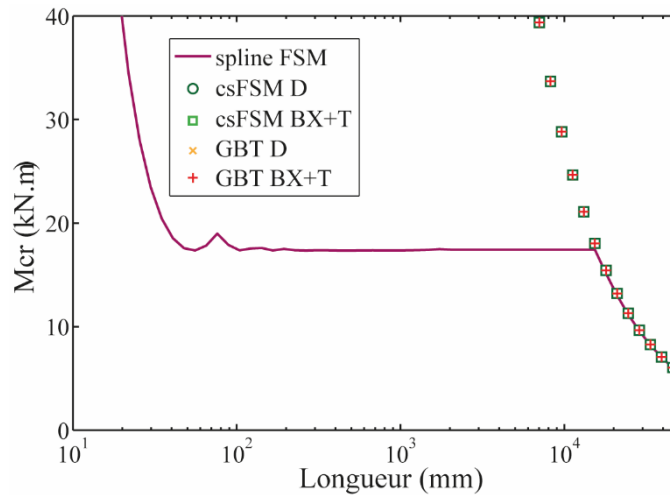


Figure 5-31 Moments critiques des modes purs de l'exemple étudié (RHS) soumis à une flexion pure.

c. Applications avec des conditions aux limites standard

Jusqu'ici, tous les calculs étaient effectués en considérant les conditions aux limites comme simplement appuyées dans les deux extrémités de l'élément (SS). Dans ce qui suit, la section creuse rectangulaire (voir Figure 5-23) sera analysée avec trois types de conditions aux limites additionnelles, à savoir: Encastré-Libre (CF), Encastré-Simplement appuyée (CS) et Encastré- Encastré (CC). Pour modéliser un appui encastré (C), tous les DDL des deux sections nodales extérieures, d'une extrémité, doivent être bloqués, alors que pour l'extrémité libre (F), tous les DDL associés aux trois sections nodales extérieures doivent être laissés libres. Pour rappel, dans le cas d'un appui simple (S), les u , w et θ de toutes les lignes nodales doivent être modélisés comme articulés, par contre, les v doivent être gardés libres. Notez que toutes les conditions aux limites considérées sont basées sur les mêmes fonctions B3-splines modifiées données dans Eqs. (3.13) et le Tableau 3-1[50].

Le but de cette section est de montrer que la MSBFc proposée peut facilement être appliquée à des sections transversales avec diverses conditions aux limites. La procédure développée reste inchangée, comme il a été expliqué dans le Chapitre 4. La seule différence est dans les matrices de contrainte appliquées aux DDL membranaires des bandes définies par l'équation (4.13).

Les analyses de type MSBF ou MSBFc ont été effectuées en utilisant des modèles similaires à ceux exposés dans l'exemple précédent. Les différentes formulations de la MBF c existantes ne peuvent traiter ce genre de problème ; à savoir les sections fermées avec conditions aux limites générales. De ce fait, la validation a été effectuée en comparant les résultats de la MSBFc avec ceux donnés par la GBT [67]. Les analyses effectuées par la GBT ont été réalisées par GBTUL_{2.0} en utilisant la solution numérique, puisque la solution analytique n'est disponible que pour le cas simplement appuyé (SS). Cette option implique une discrétisation longitudinale de l'élément fini « poutre ». Le nombre d'éléments finis a un

effet important sur la solution, ainsi, 30 éléments finis « poutre » ont été utilisés pour toutes les longueurs physiques.

Pour l'exemple numérique en question, les charges critiques sont calculées en considérant les deux solutions suivantes :

- (i) solution avec interaction entre les modes purs d'instabilité (sans décomposition modale).
- (ii) solution en modes purs d'instabilité, plus précisément, la solution du mode distorsionnel pur et les 3 modes globaux purs. Concernant les modes globaux, les trois modes suivants sont considérés : la flexion suivant l'axe mineur (BX), la flexion suivant l'axe majeur (BZ), et la torsion (T).

Les forces critiques sont comparées sur les Figure 5-32, Figure 5-33 et Figure 5-34 pour les cas CF, CS et CC, respectivement. Il est clair que les résultats des modes purs d'instabilité, calculés en utilisant la méthode développée, coïncident parfaitement avec les courbes de la GBT pour toutes les conditions aux limites considérées et pour les quatre modes représentés. Les petites différences observées pour les petites longueurs sont dues, comme il a été expliqué auparavant, à la différence de modélisation de la relation cinématique (déformation-déplacement) relative aux extensions longitudinales. Cela valide la méthode de décomposition modale proposée pour le cas des sections à paroi mince modélisées avec des conditions aux limites standard. Notez que la méthode proposée ne peut pas être appliquée directement pour le cas des sections avec des conditions aux limites non standard (par exemple, dans le cas où des conditions aux limites non identiques sont appliquées aux u (ou w) des nœuds i et j) ou dans le cas de poutres avec appuis intermédiaires. Une procédure alternative est en cours de développement pour résoudre ce problème.

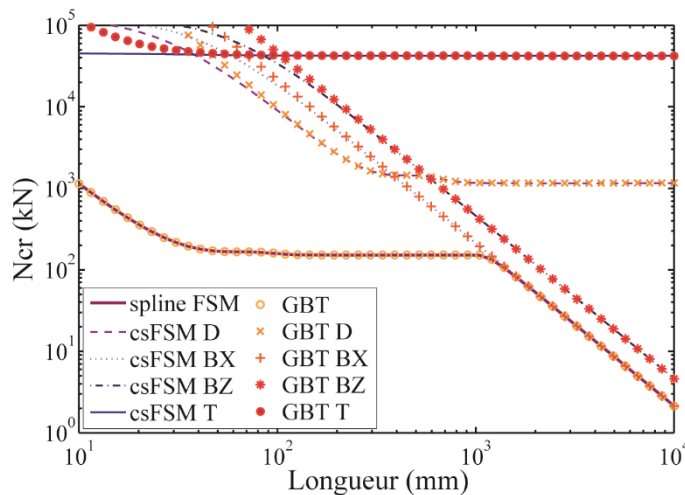


Figure 5-32 Forces critiques de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme : Cas d'un élément Encastré-Libre (CF).

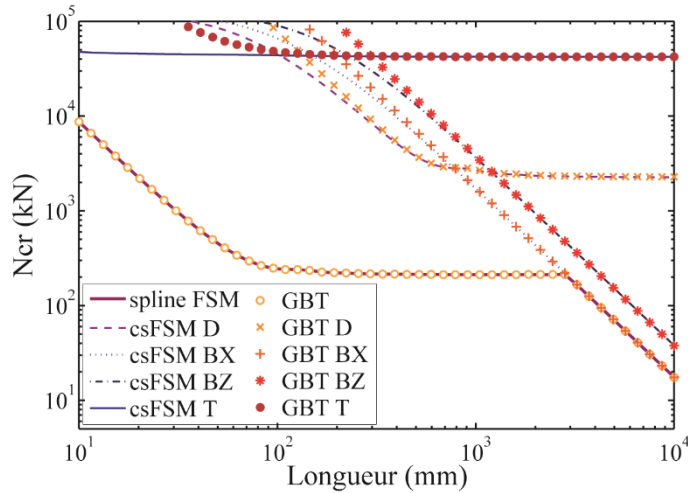


Figure 5-33 Forces critiques de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme : Cas d'un élément Encasturé-Appuyé (CS).

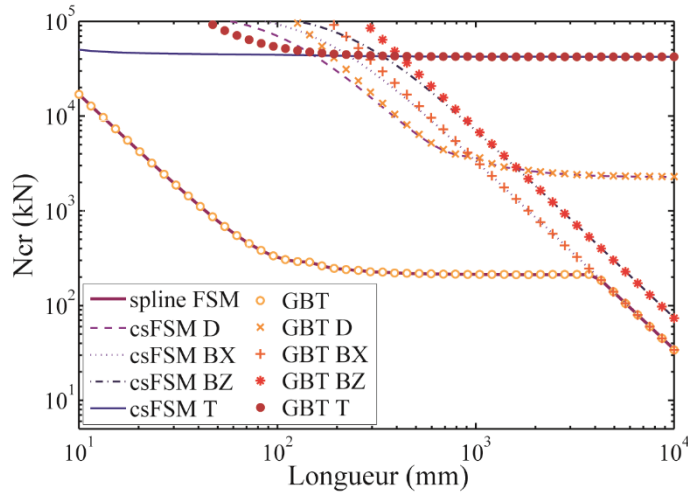


Figure 5-34 Forces critiques de l'exemple étudié (RHS) soumis à une compression uniforme : Cas d'un élément Encasturé-Encasturé (CC).

5.5.4 Calcul des modes globaux individuels

Dans cette section, on propose une solution originale pour forcer les modes globaux individuels [79]. Mais avant, on va valider la définition du mode G pour le cas des modes supérieurs. Deux exemples sont considérés :

- (i) Une section en section C (CS4 étudiée dans la section 5.5.2) et
- (ii) Une section sigma (baptisée, CS5).

Ces exemples sont examinés par Ádány et collab. dans [12]. La forme et les dimensions de la section (CS5) sont illustrées à la Figure 5-35. (Remarque : les dimensions correspondent à la ligne médiane et des angles vifs sont utilisés). Les données du matériau considérées sont les suivantes : $E = 210 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,3$. Les éléments étudiés sont simplement supportés et soumis à une compression uniforme. Les analyses type « splines

bandes finies » ont été effectuées à l'aide d'un maillage raffiné, tandis que la discrétisation de section transversale introduite dans les analyses type « splines bandes finies contrainte » est réalisée avec un modèle grossier, c'est-à-dire avec une seule bande dans les différents parois. Dans le sens longitudinal, 22 intervalles (utilisant $(22 + 3)$ sections nodales) sont utilisés.

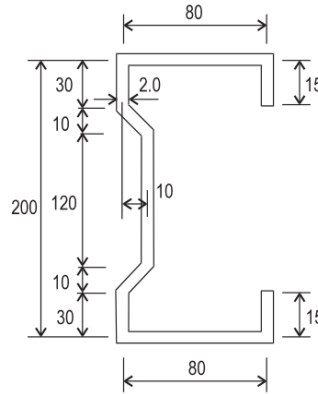


Figure 5-35 Section en sigma (CS5) étudiée : Géométrie et dimensions.

En utilisant la matrice \mathbf{R}_G obtenue au moyen de la procédure présentée à la section 4.3.3.2, les charges de flambement de l'espace G peuvent être obtenues à partir du problème à valeur propre réduit défini par l'équation 4.3. Afin de valider cette définition simplifiée de l'espace G pour le cas des modes supérieurs, la section transversale CS4 est analysée avec une longueur physique d'élément variant de 10 à 10 000 mm. Les modes sélectionnés sont les modes 1, 2 et 7. Les résultats de flambement sont illustrés sur la Figure 5-36. Sur la Figure 5-36 (a), les solutions type « splines bandes finies » (Charges critiques calculées avec et sans décomposition modale) sont comparées aux résultats de la MBFc d'Ádány obtenus par CUFMS 4.05 [68]. La Figure 5-36(b) présente quelques formes déformées obtenues par la méthode des splines bandes finies contrainte. Il est évident que la MSBFc a supprimé avec succès les modes locaux de faible longueur et les modes distorsionnels de longueur intermédiaire ; ces modes sont naturellement inclus dans une analyse type « splines bandes finies ». Il est à noter que la MSBFc donne des valeurs critiques légèrement supérieures à celles de la méthode des splines bandes finies conventionnelle. Ce problème est dû à l'effet de raidissement artificiel de l'extension transversale retenue qui se produit dans les modes G pour un facteur de poisson non nul. Un problème similaire se pose quand on travaille avec la MBFc — voir [73] pour plus de détails.

De plus, la Figure 5-36 permet de comparer les résultats de la MSBFc aux résultats de la MBFc. Il y'a lieu de noter que pour les calculs de type « bandes finies contrainte », une demi-onde unique est prise en compte. Comme on peut l'observer, la définition proposée peut être utilisée pour approcher les charges critiques obtenues par la MBFc. Il est important de noter que les différences non négligeables ne sont observées que pour les longueurs physiques courtes ($<100\text{mm}$). Ceci est clairement dû à la définition de flambement global appliquée qui ne permet de forcer aucune forme prédéfinie pour les modes de flexion et de torsion, comme suggéré dans le modèle MBFc [11], [12]. Les modes globaux nécessitent un point de référence auquel ils sont supposés être affectés. Ce point de référence est le centre de masse pour les modes de flexion et le centre de cisaillement de

la section pour le mode de torsion. La définition du mode G, proposée dans la section 4.3.3.2, est une définition géométriquement dépendante, mais elle peut être utilisée pour approximer avec précision les forces critiques des modes globaux purs pour le cas des éléments avec des longueurs physiques présentant un intérêt pratique.

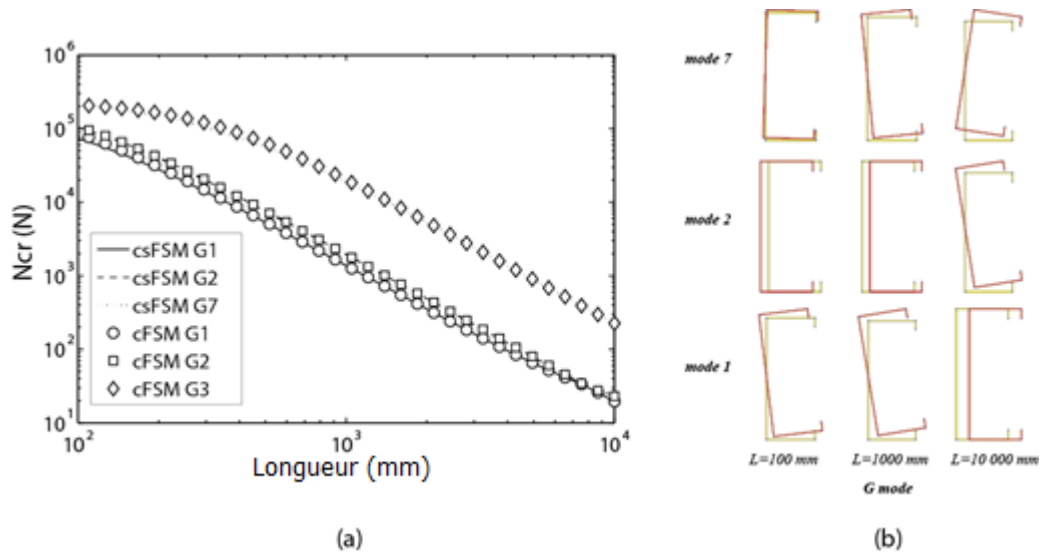
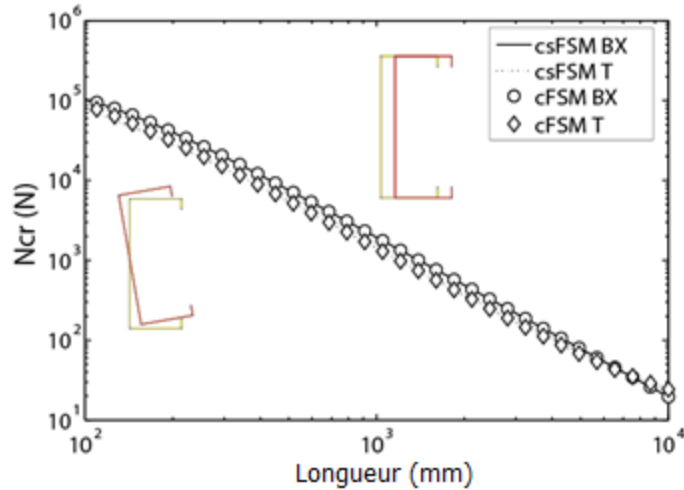


Figure 5-36 Charges critiques de la section CS4 comprimée simplement appuyée : (a) spline FSM vs MSBFc (b) quelques formes déformées sélectionnées.

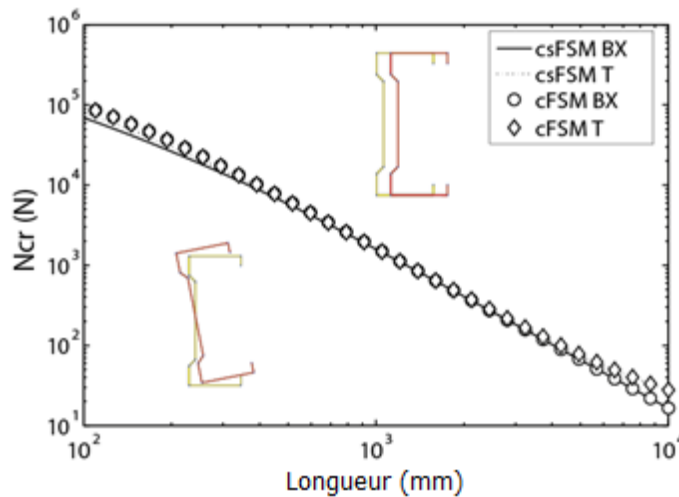
La démarche proposée dans la section 4.3.3.2 pour dériver la matrice \mathbf{R}_G peut également être utilisée pour forcer l'élément à se déformer en mode de flambement global individuel (par exemple, forcer l'élément à se déformer en mode de flexion suivant l'axe mineur (BX) ou en mode de torsion (T)). L'idée est d'appliquer des déplacements unitaires (U, W et/ou Θ , selon le cas étudié) sur une section transversale rigide. La déformation en mode rigide est assurée par des équations de contrainte type « diaphragme » où les déplacements de la section transversale sont reliés entre eux par des équations de contrainte. Cela suggère que les 3 modes individuels globaux sont déterminés par (i) les deux translations transversales autour de deux axes non parallèles et (ii) la rotation le long de l'axe longitudinal du membre. Ensuite, les déplacements longitudinaux – ou de gauchissements – des modes G individuels que nous recherchons peuvent être obtenus de la même manière que la procédure présentée dans la section 4.3.3.2. En fait, nous ne modifions que la matrice de transformation $\mathbf{C}_{e\mathbf{k},G}$, intégrant toutes les équations de contrainte à appliquer sur les U, W et Θ . Notez que la dérivation de la distribution de gauchissement des deux modes de flexion est un processus simple, alors que dans le cas du mode de torsion, elle nécessite le calcul du centre de cisaillement, ce qui est une tâche relativement compliquée. Des formules utiles sont données dans l'annexe A de l'EC3 [4].

Les charges critiques obtenues par la méthode proposée sont comparées aux modes individuels obtenus par la MBFfc [68]. Sur la Figure 5-37, les charges critiques des deux colonnes considérées sont comparées. Les charges critiques sont calculées en considérant (i) le mode de flexion pur autour de l'axe mineur de flexion (BX), ainsi que, des solutions

de flambement en torsion pure (T). Comme on peut le constater, les différences entre les résultats de MSBFc et de MBFc sont relativement faibles, à l'exception de très courtes longueurs de flambage pour lesquelles on observe des différences non négligeables.



(a)



(b)

Figure 5-37 Charges critiques des modes individuels (BX et T) : (a) la section CS4 et (b) la section CS5.

Un mode de flambement global individuel (ou un mode global combiné) peut être approché également en appliquant directement une base nodale au problème de valeur propre réduit défini par l'équation 4.3, soit donc une base similaire à celle utilisée pour le cas de l'instabilité locale. Ainsi, les étapes n° 2 et n° 3 nécessaires à l'application du deuxième critère (c'est-à-dire les déformations possibles de la section transversale sont négligeables)

peuvent être supprimées⁵. Cela simplifie énormément la procédure de dérivation de la matrice \mathbf{R}_G .

À titre d'exemple, pour forcer l'élément à se déformer en flexion pure suivant l'axe de l'inertie faible, la matrice $\mathbf{R}_{G,BX}$ peut être définie comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{\Theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ek,u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_m \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{G,BX} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_m \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

où $\mathbf{C}_{ek,u}$ est une matrice de transformation qui intègre les équations de contrainte appliquées aux \mathbf{U} et \mathbf{I} est une matrice identité ayant la dimension des \mathbf{V} libres/actifs. Les matrices de contrainte pour forcer le mode de flexion selon l'axe fort de l'inertie ou de torsion peuvent être dérivées de la même manière. Il est à rappeler que le mode de torsion des sections fermées est caractérisé par des déplacements de gauchissement nuls. Dans ce cas, seules les équations de contrainte appliquées aux DDL transversaux sont introduites dans l'équation (5.3).

En utilisant cette procédure simplifiée, la Figure 5-38 montre les résultats numériques obtenus en analysant la section fermée (RHS) de la section 5.5.3. La courbe obtenue est baptisée (csFSM Opt # 2). Il est aussi possible de comparer les résultats obtenus avec les résultats de la procédure présentée dans la section 4.3.3.2 (csFSM Opt # 1) et avec la GBT [67]. Les modes globaux inclus dans les analyses sont les suivants: (i) flexion suivant l'axe faible de l'inertie (ii) flexion suivant l'axe fort de l'inertie et (iii) mode de torsion. Comme on peut le constater, la méthode proposée peut approximer avec précision les modes de flambement globaux individuels de la colonne (RHS) considérée.

Les différences non négligeables observées pour les longueurs de flambement courtes à intermédiaires sont principalement dues au fait que les vecteurs de la base G sont définis par les déplacements transversaux et longitudinaux. Ainsi, et comme on peut le voir sur la Figure 5-39, les modes G de la définition proposée coïncident avec l'espace (G + S) de la GBT. Cela ne pose aucun problème puisque, du point de vue pratique, il est recommandé de combiner les deux espaces G and S pour mieux approcher la solution conventionnelle (sans décomposition modale), notamment pour le cas réel avec un ν différent de zéro. L'avantage principal de cette option est qu'elle permet de calculer les modes de flambement globaux même pour les éléments avec une section transversale arbitraire, y compris le mode de torsion des sections transversales fermées (avec ou sans branches).

⁵ Voir la procédure récapitulée dans la section 4.3.3.2

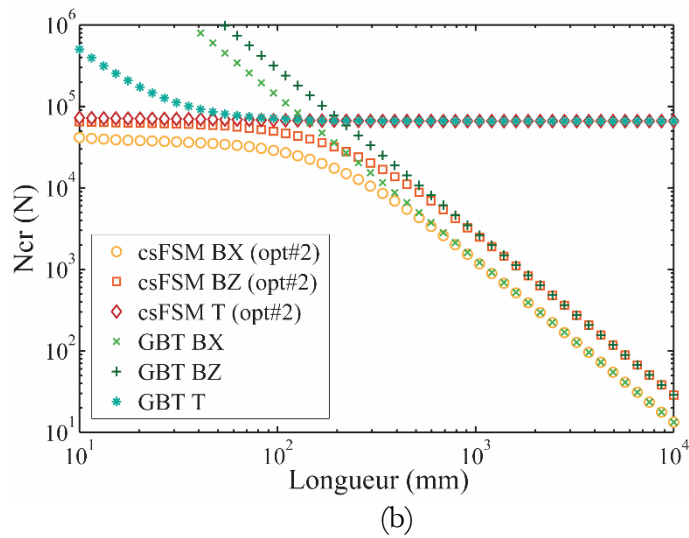
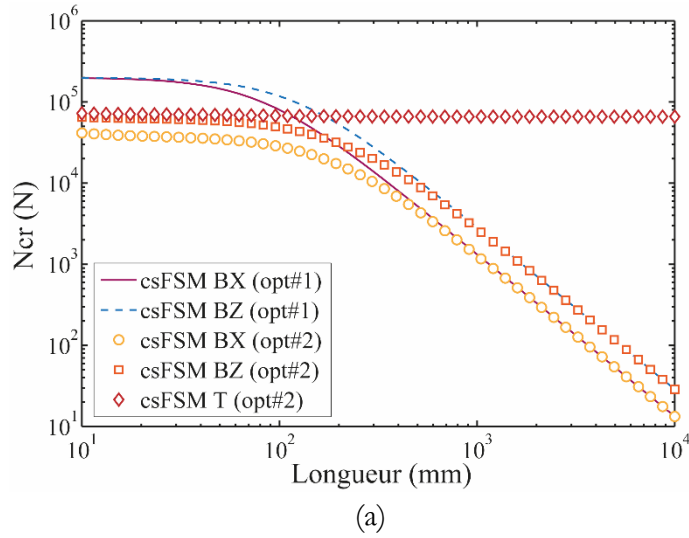


Figure 5-38 Charges critiques des modes individuels (BX, BZ et T) de la section fermée (RHS): (a) MSBFc (opt#1) vs MSBFc (opt#2) (b) MSBFc (opt#2) vs GBT.

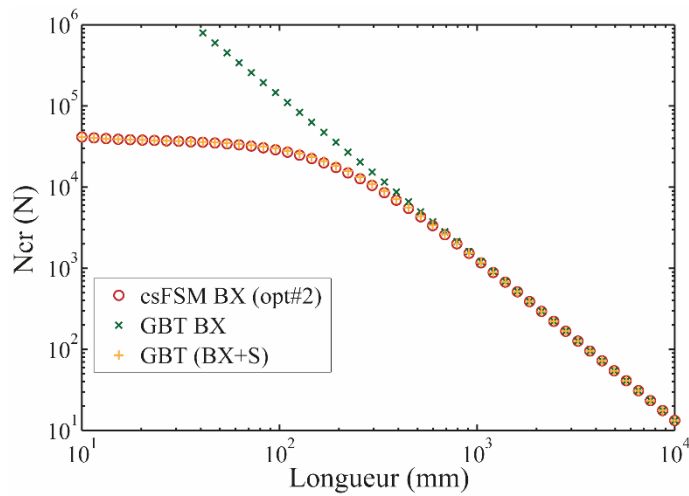


Figure 5-39 Charges critiques du mode individuel (BX) de la section fermée (RHS): MSBFc (opt#2) vs GBT.

5.6 Une approche alternative de décomposition de l'espace D

Comme nous l'avons présenté dans le Chapitre 4, la MSBFc, comme la MBFc, utilise des critères mécaniques pour séparer les modes locaux (L) des modes du sous-espace GD (modes globaux et distorsionnels). Cependant, nous avons fait appel à la condition d'orthogonalité pour séparer les modes D des modes G. La procédure consiste à définir une base des modes G, puis calculer une base d'un espace vectoriel qui lui soit orthogonale. La base vectorielle trouvée est la base des modes D recherchée. Autrement dit, il n'existe aucune approche directe qui permet de forcer les modes D. L'approche utilisée est une combinaison astucieuse de critères mécaniques et des conditions d'orthogonalité. Les modes D sont déduits par orthogonalité aux modes G (définies mécaniquement) dans le sous-espace GD.

L'idée que nous avons eue pour séparer l'espace D est d'utiliser le même principe, mais autrement. D'abord, cette technique est basée essentiellement sur le calcul des bases vectorielles qui posent le moins de problèmes, à savoir la base vectorielle de l'espace L et la base vectorielle de l'espace G. La dérivation de la matrice \mathbf{R}_L est une procédure simple et peut être obtenue par une application directe des critères mécaniques définissant les modes L, ou plus précisément par une simple application des fonctions unitaires de base — type FEM — définies dans l'équation 4.35. Pour avoir la matrice de contrainte de l'espace G, il est possible, soit d'utiliser la technique proposée dans la section 4.3.3.2, ou bien d'utiliser tout simplement une base nodale similaire à celle utilisée pour le mode local définie par l'équation 5.3. En utilisant cette deuxième option, la procédure de dérivation de \mathbf{R}_G se trouve grandement simplifiée et surtout plus générale, puisqu'elle peut être utilisée pour calculer la base vectorielle de l'espace G pour n'importe quelle forme de section, y compris les sections avec parties fermées (avec ou sans branches).

Le reste de la procédure consiste à chercher une base vectorielle qui se trouve dans l'espace GDLO, mais qui est hors l'espace LG. Autrement dit, les modes D sont déduits par orthogonalité aux modes LG dans l'espace GDLO. L'orthogonalité peut être définie par rapport à la matrice de rigidité \mathbf{K}_e par :

$$\mathbf{R}_D \mathbf{K}_e \mathbf{H}_{GL} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Les matrices \mathbf{K}_e et \mathbf{H}_{GL} sont connues, la matrice de contrainte \mathbf{R}_D est définie par l'équation 5.4. La définition de l'espace D proposée est de même nature que celle donnée par la MBFc ou la GBT. Elle utilise la propriété très connue de l'orthogonalité des vecteurs propres, seulement la base vectorielle trouvée couvre les modes D et O. Ce problème peut être négligé puisque les charges associées aux modes autres que les modes L, D et G n'ont aucune importance pratique, et les charges critiques qui lui sont associées sont très élevées et participent rarement au comportement des structures à paroi mince. Sinon, il est possible de définir la base vectorielle de l'espace O en utilisant l'Éq. 4.36, puis déduire les modes D par orthogonalité aux modes LGO dans l'espace GDLO. Les premiers résultats de cette approche sont très prometteurs [74], seulement il reste à vérifier la sensibilité de la base vectorielle de l'espace D au nombre de vecteurs propres considéré dans la base \mathbf{H}_{GL} , la base vectorielle de l'espace LG. Une étude de sensibilité est donc nécessaire afin de définir le

nombre de vecteurs propres de l'espace L et G nécessaire pour capturer la solution de l'instabilité distorsionnelle. Ce travail n'a pas été finalisé dans le cadre de cette thèse, mais il fera l'objet d'un autre travail de recherche. Enfin, il nous semble opportun de noter que la démarche de décomposition modale discutée ici est une démarche automatique et il est possible de l'utiliser avec n'importe quelle méthode numérique (y compris la MEF) pour le calcul des modes purs d'instabilité.

5.7 Discussion sur l'applicabilité de la MSBFc dans la procédure de dimensionnement des PFF

Comme nous l'avons souligné dans la section 2.6.4 du Chapitre 2, l'avantage de calculer les charges de flambement critiques des modes purs d'instabilité (c'est-à-dire l'instabilité locale, distorsionnelle et/ou globale) ne peut pas être employé directement dans la conception des éléments de structures en acier formé à froid. En fait, les méthodes de décomposition modale et notamment la MBF_c ne fournissent pas la même solution que la MBF conventionnelle. Ce détail est très important, car la MBF a été utilisée pour calibrer les formules de la DSM. Les différences entre les résultats de la MBF et la MBF contrainte sont principalement dues à l'effet des coins arrondis, le couplage de mode et aux critères mécaniques utilisés pour forcer l'espace GD. Dans la section susmentionnée, nous avons également présenté les différentes approches permettant l'utilisation de la MBF_c dans la DSM. Ces approches exigent des résultats de stabilité élastique en forçant l'élément de structure à se déformer en une seule demi-onde⁶. En fait, il s'agit d'une technique astucieuse servant à simplifier l'identification de la longueur critique et la charge critique associées aux modes purs d'instabilité, puisque dans ce cas de figure la MBF contrainte donne toujours les deux minima recherchés.

La formulation proposée basée sur la méthode des splines bandes finies ne peut imposer des contraintes sur le nombre de demi-ondes de flambement dans la direction longitudinale. Cela veut dire que la méthode développée ne peut fournir la courbe de signature – la courbe donnant la variation de la charge critique en fonction de la longueur de la demi-onde ($m=1$). En fait, cette particularité est partagée avec la méthode des éléments finis et elle est due à la nature polynomiale des fonctions splines utilisées pour approcher le champ de déplacement de la section transversale. Dans ce contexte, il est important de souligner que la solution de la MSBF (ou MEF) n'est en réalité que l'enveloppe de la solution de la MBF obtenue en considérant plusieurs demi-ondes et en intégrant les modes supérieurs – soit l'enveloppe inférieure des résultats de la méthode des bandes finies présentés dans la Figure 5-40 (b)⁷. Autrement dit, les résultats de la MSBF (ou la MSBF_c) peuvent être obtenus par une simple translation de la solution de la MBF (ou la MBF_c).

⁶ On parle de courbe de signature que pour le cas simplement appuyé, il s'agit donc d'un seul type de condition aux limites parmi d'autres.

⁷ Ces résultats ont été obtenus en considérant, chaque fois, un nombre différent de demi-onde dans l'analyse type MBF

Ainsi, les charges critiques et les longueurs critiques des modes purs d'instabilité recherchées peuvent être facilement identifiées sans recours à la courbe de signature. De plus, et pour des applications plus générales, l'identification des modes purs d'instabilité se fait en introduisant les conditions aux limites réelles et en calculant les charges critiques pour une longueur physique⁸, puis on explore les modes supérieures afin d'en déduire les forces critiques associées aux différents modes purs d'instabilité. Cette démarche peut être également utilisée pour le cas d'un élément simplement appuyé, et donc, d'un point de vue pratique, il est possible d'identifier les charges critiques recherchées sans tracer la signature des résultats à différentes longueurs. Compte tenu de ce qui précède, on peut avancer que cette particularité ne peut être considérée comme inconvénient. De plus, puisque la MBF_c et la MSBF_c donnent des solutions très similaires, comme discuté auparavant, les résultats de la MSBF_c peuvent être également utilisés dans la conception des éléments en acier formés à froid, notamment dans la DSM.

Il est également important de souligner que l'approche « La MBF à la longueur de flambement de la MBF_c » ne peut pas être utilisée avec la MSBF_c, car elle nécessite des analyses en deux étapes (solutions en mode pur et conventionnelle), où les deux analyses doivent être effectuées en forçant une seule demi-onde. La méthodologie recommandée permettant l'utilisation de la MSBF_c pour la prédiction de la capacité portante d'un élément de structure consiste à effectuer une analyse en modes purs pour trouver les charges (ou les moments) de flambement élastique critique, puis appliquer les facteurs de corrections proposés dans [36], rappelée dans la section 2.6.4. Cette méthodologie peut être appliquée à toutes les familles de sections présélectionnées par les spécifications de la DSM.

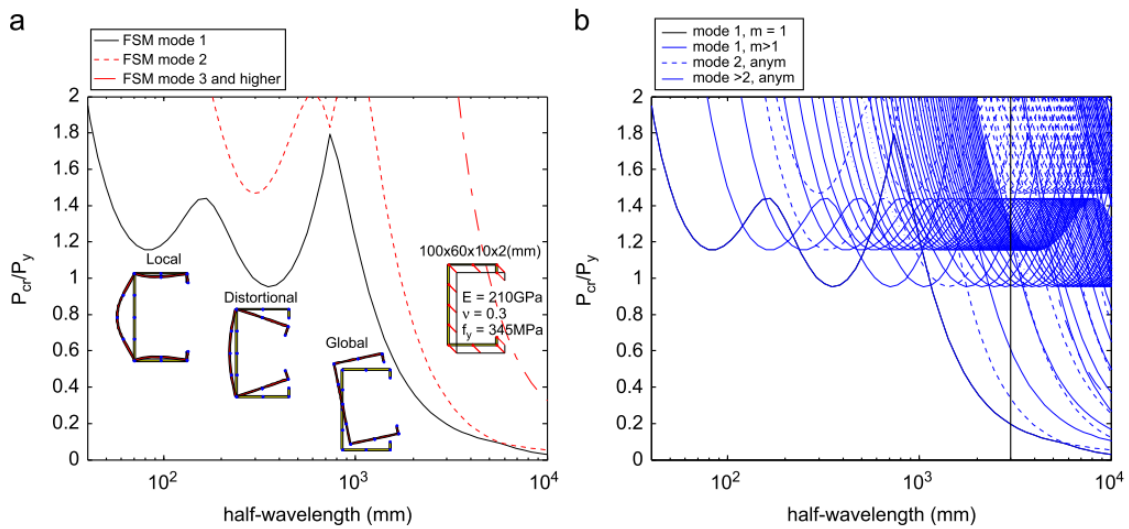


Figure 5-40 Résultats type « MBF » en considérant des modes supérieurs et un nombre de demi-ondes $m > 1$: (a) modes supérieurs avec $m=1$ et (b) modes supérieurs avec un nombre de demi-ondes $m > 1$ [80].

⁸ Ou plutôt la longueur effective de flambement

5.8 Un nouvel outil de conception des PFF basé sur la MSBFc

Le but majeur de tous les travaux de recherche menés sur la question d'identification modale est de calculer les charges critiques élastiques des 3 modes purs d'instabilité pour les utiliser comme input dans la DSM afin d'évaluer la résistance nominale de l'élément de structure. Dans cette thèse nous avons proposé une méthode alternative de décomposition modale basée sur la méthode des splines bandes finies. Bien que nous nous sommes limités dans ce travail à des problèmes structurels basiques, mais nous pensons que l'extension de l'approche développée à d'autres applications structurelles reste possible puisque fondamentalement la méthode des splines bandes finies a un champ d'application beaucoup plus large que celui de la méthode des bandes finies conventionnelle. D'ailleurs, elle est vue comme une alternative très intéressante à la méthode des éléments finis. Dans ce contexte, il serait également possible d'aller plus loin en proposant une méthode réglementaire basée sur la méthode de la résistance directe (DSM) spécifique à de nouvelles applications.

Mais avant d'en arriver là, c'est-à-dire à traiter des problèmes structurels non conventionnels par la nouvelle splines bandes finies contrainte, nous avons eu l'idée de développer un logiciel de conception des profilés formés à froid basé sur la DSM. L'objectif principal de ce travail est de promouvoir l'utilisation de la nouvelle splines bandes finies contrainte par les utilisateurs potentiels. Le logiciel développé est conçu non seulement de manière à regrouper l'ensemble des étapes de calcul de la résistance nominale d'un élément de structure dans un seul endroit, mais aussi à simplifier davantage la démarche réglementaire. Dans ce qui suit, nous présenterons, d'abord, le logiciel de conception développé, puis nous discuterons brièvement la démarche réglementaire implantée.

D'abord, le logiciel « pour ingénieur » conçu a été développé en langage MATLAB et il intègre un préprocesseur et un postprocesseur avec une interface utilisateur très conviviale et qui présente des qualités ergonomiques très intéressantes (bouton poussoir, bouton radio, menus déroulants, graphisme, sorties et entrées par fichier de données en *.dat ou *.txt, sorties graphiques sur imprimante ...etc.). Le préprocesseur permet à l'utilisateur de modéliser la section transversale et d'introduire les conditions aux limites, les charges et la longueur réelle de l'élément de structure. Le logiciel développé possède des générateurs automatiques de modèles et charges qui facilitent énormément l'introduction des données - voir la Figure 5-41. Ensuite, et grâce à l'algorithme d'optimisation du modèle splines bandes finies présenté dans la section 5.3, le logiciel développé trouve automatiquement le bon modèle pour la longueur physique donnée et pour chaque type d'instabilité (local, distorsionnel et global). Notre procédure de décomposition modale, présentée dans le Chapitre 4, est ensuite utilisée pour séparer les modes purs d'instabilité, et les charges critiques qui lui sont associées sont, ainsi, calculées. Les valeurs trouvées sont données dans la fenêtre du postprocesseur – voir Figure 5-42. Le reste de la procédure consiste à introduire les facteurs de correction de [36](voir Tableau 2-4 et Tableau 2-5 présentés dans la section 2.6.4) afin de corriger les charges élastiques trouvées, puis, on enchaîne directement avec le calcul automatique de la capacité portante de l'élément en utilisant les formules de la DSM rappelées dans la section 2.3.3.

Il est important de souligner que la démarche de conception implantée présente un aspect pratique très intéressant puisqu'elle n'exige le calcul des charges critiques des modes purs d'instabilité que pour la longueur réelle de l'élément de structure avec les conditions aux limites réelles. Cela vient du fait que P_{crl} et P_{crd} deviennent pratiquement constantes pour un nombre de demi-ondes $m \geq 3$ (voir 5.7 section 5.7 ci-dessus, pour plus de détails). Cette condition est généralement automatiquement vérifiée pour le mode local, car la longueur de la demi-onde du voilement est beaucoup plus petite que les longueurs réelles des éléments de structures (poteaux et poutre). Il faudra cependant vérifier cette condition pour le cas distorsionnel pour s'assurer que l'on a atteint le palier et on évite, ainsi, de refaire le calcul pour d'autres longueurs. Si la longueur réelle de l'élément de structure fait au moins trois fois la dimension caractéristique de la section transversale, un seul calcul — effectué à la longueur réelle avec les CL réelles — suffira à donner P_{crl} , P_{crd} et les 3 P_{cre} de l'élément de structure. Par conséquent, on n'a plus besoin de tracer la signature des résultats à différentes longueurs. En fait, il n'est nécessaire de calculer les charges critiques élastiques des 3 modes purs d'instabilité que pour une seule longueur : la longueur effective (peu importe le nombre de demi-ondes). Le temps de calcul sera celui nécessaire pour une longueur, et donc, on n'a plus besoin de répéter les calculs à différentes longueurs et refaire à chaque fois le maillage. Cela fait du logiciel développé un outil pas coûteux et très pratique. Le logiciel développé est sur le point d'être achevé. Une fois finalisé, une version gratuite sera mise en ligne afin qu'elle reste à la portée des ingénieurs en vue de son utilisation dans la DSM. D'autre part, il nous semble opportun de noter que l'applicabilité de l'outil développé couvre l'ensemble des sections transversales traitées par la DSM, seulement elle est limitée au cas simplement appuyé, faute de coefficient de correction. Il serait donc intéressant de les déterminer dans d'autres travaux de recherches pour des cas plus générales.

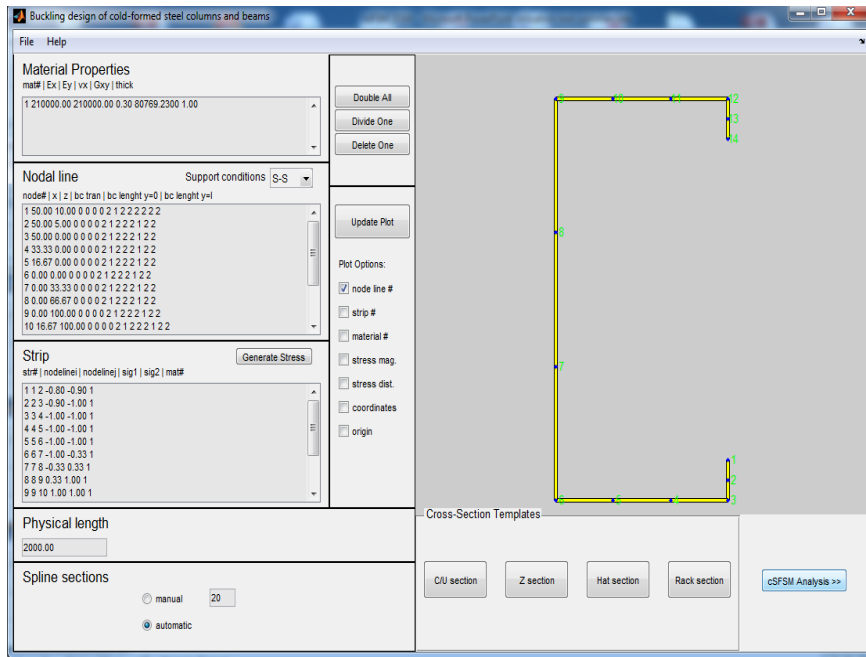


Figure 5-41 Interface de l'application permettant la conception des PFF (Version 1.1) : Le préprocesseur.

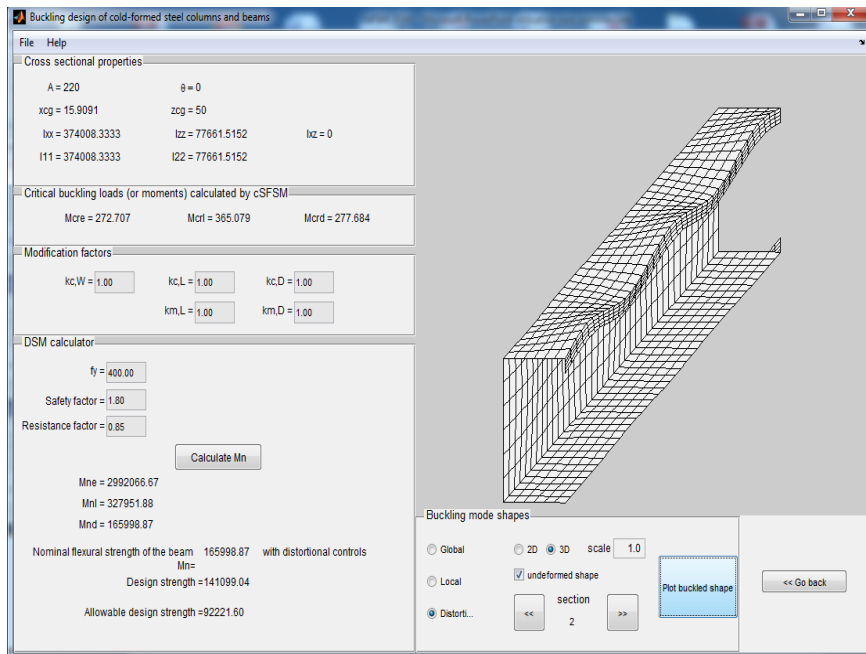


Figure 5-42 Interface de l'application permettant la conception des PFF (Version 1.1) : Le postprocesseur.

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons démontré que notre approche de décomposition modale fonctionne pour n'importe qu'elles formes de sections y compris celles qui présentent des parties fermées et/ou des branches. Des résultats numériques de charges (ou moments) critiques pour différents sous-espaces (L, GD, D et G) ont été présentés. Nous avons également démontré que l'extension de l'approche proposée à d'autres types de conditions aux limites (autre que le cas simplement appuyé) peut se faire par un simple changement des matrices de contrainte du mode d'instabilité recherché.

Aussi, il est important de souligner que, jusqu'ici, la contribution essentielle de ce travail réside dans le choix des définitions mécaniques et leurs implémentations dans le contexte de la méthode des splines bandes finies. En fait, il s'agit d'une formulation lisible qui n'utilise aucune classification particulière des nœuds (ou des éléments), ainsi elle préserve donc la flexibilité de la méthode des splines bandes finies.

De plus, l'utilisation des définitions mécaniques indépendantes de la méthode numérique d'analyse et du modèle va nous permettre, d'une part, de proposer une technique alternative de décomposition modale basée sur la condition d'orthogonalité et qui nous semble aisément extensible aux méthodes numériques générales (notamment, la MEF), et d'autre part, de proposer une solution rationnelle pour le calcul des modes globaux individuels et plus particulièrement la torsion des sections fermées : il s'agit d'un problème d'intérêt pratique très important.

Dans ce chapitre, nous avons également proposé un logiciel de conception des profilés formés à froid basé sur la MSBFc et la DSM. L'objectif principal était de promouvoir l'utilisation de la nouvelle splines bandes finies contrainte par les utilisateurs potentiels. Le logiciel développé intègre toutes les étapes de calcul de la résistance nominale d'un élément de structure dans un seul outil en utilisant une démarche réglementaire simplifiée, ce qui fait du logiciel développé un outil pas couteux et très pratique.

Conclusions générales

Dans le dimensionnement des éléments de structure en profilés formés à froid, trois modes fondamentaux doivent être pris en compte : le mode local (L), le mode distorsionnel (D) et le mode global (G). Les charges critiques élastiques associées à ces modes de ruine sont des données importantes dans les règlements modernes de dimensionnement de ce type de structure, car les capacités portantes nominales en dépendent. Cependant, leur détermination n'est pas toujours évidente, surtout lorsqu'il s'agit de sections de nouvelle génération à formes complexes (avec présence de plusieurs raidisseurs de bord et intermédiaires). Le recours à des méthodes numériques spécialisées permettant la décomposition modale (GBT, MBFc, MBFc-GBT, MBFc-MEF,...etc.) devient alors une nécessité.

Toutefois, les approches existantes ne sont ni assez générales ni suffisamment disponibles. En fait, elles fonctionnent uniquement pour des problèmes structurels standards. D'ailleurs, une grande partie des problèmes structurels introduits dans les deux dernières versions du code américain ne peuvent être étudiés par la méthode des bandes finies contrainte (MBFc) ou la théorie des poutres généralisées (GBT). La grande variété des problèmes structurels considérés dans la méthode de résistance directe (DSM) et les domaines de recherches qui restent relativement inexplorés font que la question d'identification explicite des modes purs d'instabilités n'est toujours pas entièrement résolue. Autrement dit, la DSM a besoin toujours d'outils rationnels, fiables et pratiques permettant l'estimation des charges critiques élastiques des instabilités de base.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons alors proposé une nouvelle technique de décomposition modale. La méthode proposée est basée sur la méthode des splines bandes finies (MSBF). Nous avons choisi cette méthode, car elle est très bien intégrée dans l'analyse de la stabilité élastique des structures à parois minces. En effet, elle permet des analyses efficaces de la stabilité élastique d'une large gamme de problèmes structurels, et elle a même été considérée comme une alternative intéressante à la MEF. La MSBF simplifie énormément ce type d'analyse et à notre connaissance, nous sommes les premiers à proposer une telle technique intégrée totalement dans cette méthode. En fait, la méthode proposée est une nouvelle version de la MSBF qui est capable d'isoler automatiquement les types d'instabilité.

En se basant sur des critères mécaniques, les champs de déplacement généraux de la MSBF sont contraints à ne donner que les champs de déplacement correspondant aux modes d'instabilité recherchés. Ces critères sont introduits au moyen de matrices de contrainte qui sont la clé de voûte de toutes les méthodes spécialisées susceptibles d'être utilisées pour évaluer les charges critiques des modes de base. Dans ce travail, les critères mécaniques retenus sont indépendants de la méthode numérique d'analyse et du modèle. Le résultat est une formulation générale qui manipule aisément les conditions aux limites, mais surtout qui fonctionne pour n'importe quelles formes de sections (y compris celles qui présentent des parties fermées et/ou des branches). La formulation proposée traite également le problème de la torsion des sections fermées qui est une question de grande importance pratique.

Une série d'exemples d'utilisation et de validation de la nouvelle « splines bandes finies contrainte » ont été présentés. Les exemples traités couvrent essentiellement : (i) les trois modes fondamentaux, à savoir le mode local (L), le mode distorsionnel (D) et le mode global (G), (ii) des formes de sections arbitraires (iii) quatre conditions aux limites standards (c.-à-d., SS, CF, CS et CC), ainsi que (iv) deux types de chargement (compression et flexion pure). En outre, des techniques alternatives de séparation des deux sous-espaces les plus problématiques, c.-à-d., l'espace (D) et l'espace (G), ont été également présentées et discutées. Les résultats obtenus prouvent que l'approche développée permet d'estimer correctement les charges (moments) critiques des modes purs d'instabilité.

D'une manière générale, la méthode que nous avons proposée lève certaines des insuffisances de la méthode des bandes finies contrainte (MBFc). Nous avons entre autres pu étudier des sections fermées, ce qui est impossible par la MBFc et par la plupart des solutions existantes. La formulation proposée nous semble aisément extensible aux méthodes numériques générales, notamment la MEF. Il serait intéressant donc de la mettre en œuvre dans d'autres travaux de recherche.

Dans cette thèse, nous avons également proposé un logiciel de conception des profilés formés à froid basé sur la MSBF contrainte et la DSM. L'objectif principal était de promouvoir l'utilisation de la nouvelle splines bandes finies contrainte par les utilisateurs potentiels. Le logiciel développé intègre toutes les étapes de calcul de la résistance nominale d'un élément de structure, mais il utilise également une démarche réglementaire simplifiée, ce qui fait du logiciel développé un outil pas couteux et très pratique.

Perspectives

Dans cette thèse, nous avons entrevu plusieurs idées que nous n'avons pas développées. Une première idée concerne l'extension de la procédure développée à d'autres applications plus générales. Nous citons à titre d'exemple, l'étude des éléments de structure avec (i) des conditions aux limites non standards avec la présence d'appuis intermédiaires et (ii) d'autres types de chargement (transversal ou de cisaillement). Il y'a lieu de noter que la démarche présentée dans cette thèse ne peut pas être directement utilisée dans le cas des éléments de structure avec des conditions aux limites non standards. En effet, un amendement dans la formulation des matrices de contrainte est nécessaire.

La deuxième perspective est relative à l'extension de la procédure de classification des instabilités de base que nous avons proposée à une méthode plus générale. En effet, les définitions mécaniques et les techniques d'implantation utilisées semblent être aisément extensibles à la méthode des éléments finis.

Références

- [1] AISI, “North American Specification (NAS) for the Design of Cold-formed Steel Structural Members (AISI-S100),” 2007.
- [2] AS/NZS, “Standards of Australia and Standards of New Zealand, Cold-formed Steel Structures, AS/NZS 4600, first edition,” Sydney-Wellington, 1996.
- [3] AS/NZS, “Cold-formed Steel Structures. AS/NZS 4600, second edition,” Sydney-Wellington, 2005.
- [4] CEN, “Eurocode 3, EN 1993-1-3, General rules, Supplementary Rules for Cold-formed Members and Sheeting,” 2006.
- [5] CEN, “Eurocode 3, EN 1993-1-5, Design of steel structures : Plated structural elements,” 2007.
- [6] B. W. Schafer and T. Peköz, “Direct Strength Prediction of Cold-Formed Steel Members using Numerical Elastic Buckling Solutions,” in *Fourteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, 1998, pp. 69–76.
- [7] AISI, “North American Specification for the Design of Cold-formed Steel Structural Members,” Washington DC, USA, 2004.
- [8] AISI, “North American Standard for Cold-Formed Steel Framing – Lateral Design 2007 Edition with Supplement No. 1,” 2012.
- [9] AISI, “North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, AISI S100-16,” Washington DC, 2016.
- [10] S. Ádány, “Buckling Mode Classification of Members With Open Thin - Walled Cross - Sections By Using the Finite Strip Method,” 2004.
- [11] S. Ádány and B. W. Schafer, “Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Derivation,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 44, pp. 563–584, 2006.
- [12] S. Ádány and B. W. Schafer, “Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 44, pp. 585–600, 2006.
- [13] S. Ádány and B. W. Schafer, “Generalized constrained finite strip method for thin-walled members with arbitrary cross-section: Primary modes,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 84, pp. 150–169, 2014.
- [14] S. Ádány and B. W. Schafer, “Generalized constrained finite strip method for thin-walled members with arbitrary cross-section: Secondary modes, orthogonality, examples,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 84, pp. 123–133, 2014.
- [15] S. Ádány, D. Visy, and R. Nagy, “Constrained shell Finite Element Method, Part 2: application to linear buckling analysis of thin-walled members,” *Thin-Walled Struct.*, 2017.
- [16] S. Ádány, “Constrained shell Finite Element Method for thin-walled members, Part 1: Constraints for a single band of finite elements,” *Thin-Walled Struct.*, 2017.
- [17] M. Casafont, F. Marimon, M. Pastor, and M. Ferrer, “Linear buckling analysis of thin-walled members combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method,” *Comput. Struct.*, vol. 89, no. 21–22, pp. 1982–2000, 2011.
- [18] M. Nedelcu and H. L. Cucu, “Buckling modes identification from FEA of thin-walled members using only GBT cross-sectional deformation modes,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 81, pp. 150–158, 2014.
- [19] M. Djelil, N. Djafour, M. Matallah, and M. Djafour, “Constrained spline Finite Strip Method for thin-walled members with open and closed cross-sections,” *Thin Walled Struct.*, vol. 132, pp. 302–315, 2018.
- [20] S. C. W. Lau and G. J. Hancock, “Inelastic buckling analyses of beams, columns and plates using the spline finite strip method,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 7, no. 3–4, pp. 213–238, 1989.
- [21] B. W. Schafer and T. Peköz, “The behavior and design of longitudinally stiffened thin-walled compression elements,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 27, no. 1, pp. 65–78, 1997.
- [22] B. W. Schafer, “Review: The Direct Strength Method of cold-formed steel member design,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 64, no. 7–8, pp. 766–778, 2008.
- [23] D. Camotim, P. B. Dinis, and A. D. Martins, “Direct strength method - a general approach for the

- design of cold-formed steel structures,” in *Recent Trends in Cold-Formed Steel Construction*, 2016, pp. 69–105.
- [24] B. W. Schafer, “Advances in the Direct Strength Method of cold-formed steel design,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 140, no. March, pp. 533–541, 2019.
- [25] V. V. Nguyen, G. J. Hancock, and C. H. Pham, “DEVELOPMENT OF THE THIN-WALL-2 PROGRAM FOR BUCKLING ANALYSIS OF THIN-WALLED SECTIONS,” in *Eighth International Conference on ADVANCES IN STEEL STRUCTURES*, 2015, pp. 1–20.
- [26] M. Djafour, “Etude de la Stabilité Distorsionnelle des Profils en Acier Formés à Froid,” Université de Tlemcen, 2007.
- [27] S. Ádány and B. W. Schafer, “A full modal decomposition of thin-walled , single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 64, pp. 12–29, 2008.
- [28] Z. Li and B. W. Schafer, “Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods,” in *Proceedings of the Twentieth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures - Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Design and Construction*, 2010.
- [29] Z. Li and B. W. Schafer, “Constrained Finite Strip Method for Thin-Walled Members with General End Boundary Conditions,” *J. Eng. Mech.*, vol. 139, no. 11, pp. 1566–1576, 2013.
- [30] M. a. Bradford and M. Azhari, “Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method,” *Comput. Struct.*, vol. 56, no. 1, pp. 75–83, 1995.
- [31] S. Ádány, “Decomposition of in-plane shear in thin-walled members,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 73, pp. 27–38, 2013.
- [32] Z. Li, J. C. Batista Abreu, J. Leng, S. Ádány, and B. W. Schafer, “Review: Constrained finite strip method developments and applications in cold-formed steel design,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 81, pp. 2–18, 2014.
- [33] Z. Li, M. T. Hanna, S. Ádány, and B. W. Schafer, “Impact of basis, orthogonalization, and normalization on the constrained Finite Strip Method for stability solutions of open thin-walled members,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 49, no. 9, pp. 1108–1122, 2011.
- [34] Z. Li and B. W. Schafer, “Application of the finite strip method in cold-formed steel member design,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 66, no. 8–9, pp. 971–980, 2010.
- [35] Z. Li and B. W. Schafer, “Application of the finite strip method in cold-formed steel member design,” *J. Constr. Steel Res.*, vol. 66, no. 8–9, pp. 971–980, 2010.
- [36] Z. Beregszászi and S. Ádány, “Application of the constrained finite strip method for the buckling design of cold-formed steel columns and beams via the direct strength method,” *Comput. Struct.*, vol. 89, pp. 2020–2027, 2011.
- [37] M. Djafour, N. Djafour, A. Megnounif, and D. E. Kerdal, “A constrained finite strip method for open and closed cross-section members,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 48, no. 12, pp. 955–965, 2010.
- [38] N. Djafour, M. Djafour, A. Megnounif, M. Matallah, and D. Zendagui, “A constrained finite strip method for prismatic members with branches and / or closed parts,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 61, pp. 42–48, 2012.
- [39] J. Becque, “A new approach to modal decomposition of buckled shapes,” *Structures*, vol. 4, pp. 2–12, 2015.
- [40] M. Casafont, F. Marimon, and M. M. Pastor, “Calculation of pure distortional elastic buckling loads of members subjected to compression via the finite element method,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 47, pp. 701–729, 2009.
- [41] Z. Li, S. Adany, and B. W. Schafer, “Modal identification for shell finite element models of thin-walled members in nonlinear collapse analysis,” *Thin Walled Struct.*, vol. 67, pp. 15–24, 2013.
- [42] M. Nedelcu, “GBT-based buckling mode decomposition from finite element analysis of thin-walled members,” *Thin-Walled Struct.*, 2012.
- [43] S. S. Ajeesh and S. A. Jayachandran, “A constrained spline finite strip method for the mode decomposition of cold-formed steel sections using GBT principles,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 113, pp. 83–93, 2017.
- [44] S. S. Ajeesh and S. A. Jayachandran, “Identification of buckling modes in generalized spline finite strip analysis of cold-formed steel members,” *Thin Walled Struct.*, vol. 119, pp. 593–602, 2017.

- [45] S. Ádány, “Shell element for constrained finite element analysis of thin-walled structural members,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 105, pp. 135–146, 2016.
- [46] S. Ádány, “Constrained shell finite element method for thin-walled members with holes,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 121, no. August, pp. 41–56, 2017.
- [47] S. Ádány, “Modal identification of thin-walled members by using the constrained finite element method,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 140, no. March, pp. 31–42, 2019.
- [48] R. Gonçalves and D. Camotim, “GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns,” *Comput. Struct.*, vol. 82, no. 17–19, pp. 1473–1484, 2004.
- [49] R. Bebbiano, C. Basaglia, D. Camotim, and R. Gonçalves, “GBT buckling analysis of generally loaded thin-walled members with arbitrary flat-walled cross-sections,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 123, no. August 2017, pp. 11–24, 2018.
- [50] S. C. Fan, “Spline finite strip in structural analysis,” University of Hong Kong, 1982.
- [51] M. Djelil and S. Bellifa, “Elaboration d’un logiciel pour l’analyse de la stabilité élastique des structures à parois minces,” Université de Tlemcen, 2007.
- [52] S. C. W. Lau and G. J. Hancock, “Buckling of thin-flat-walled structures by a spline finite strip method,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 4, pp. 269–294, 1986.
- [53] Y. B. Kwon and G. J. Hancock, “A nonlinear elastic spline finite strip analysis for thin-walled sections,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 12, no. 4, pp. 295–319, 1991.
- [54] G. J. Hancock, A. J. Davids, P. W. Key, S. C. W. Lau, and K. J. R. Rasmussen, “Recent Developments in the Buckling and Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structural Members,” *Thin-walled Struct.*, vol. 9, no. 1990, pp. 309–338, 2006.
- [55] C. M. Madasamy and V. Kalyanaraman, “Analysis of plated structures with rectangular cutouts and internal supports using the spline finite strip method,” *Comput. Struct.*, vol. 52, no. 2, pp. 277–286, 1994.
- [56] Z. Vrcelj and M. A. Bradford, “A simple method for the inclusion of external and internal supports in the spline finite strip method (SFSM) of buckling analysis,” *Comput. Struct.*, vol. 86, no. 6, pp. 529–544, 2008.
- [57] Z. Vrcelj and M. a. Bradford, “On using Legendre polynomials and amended spline transformations in the SFSM for buckling and free vibrations of plates and thin-walled beams,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 48, no. 10–11, pp. 798–805, 2010.
- [58] F. T. K. Au and Y. K. Cheung, “Free vibration and stability analysis of shells by the isoparametric spline finite strip method,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 24, no. 1, pp. 53–82, 1996.
- [59] G. Eccher, K. J. R. Rasmussen, and R. Zandonini, “Elastic buckling analysis of perforated thin-walled structures by the isoparametric spline finite strip method,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 46, no. 2, pp. 165–191, 2008.
- [60] G. Eccher, K. J. R. Rasmussen, and R. Zandonini, “Geometric nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled structures,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 47, pp. 219–232, 2009.
- [61] Z. Yao and K. J. R. Rasmussen, “Material and geometric nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled steel structures - Analytical developments,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 49, no. 11, pp. 1359–1373, 2011.
- [62] Z. Yao and K. J. R. Rasmussen, “Material and geometric nonlinear isoparametric spline finite strip analysis of perforated thin-walled steel structures - Numerical investigations,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 49, no. 11, pp. 1374–1391, 2011.
- [63] S. Lotfi, M. Azhari, and a. Heidarpour, “Inelastic initial local buckling of skew thin thickness-tapered plates with and without intermediate supports using the isoparametric spline finite strip method,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 49, no. 11, pp. 1475–1482, 2011.
- [64] C. H. Pham and G. J. Hancock, “Elastic buckling of cold-formed channel sections in shear,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 61, pp. 22–26, 2012.
- [65] N. Boumechra, “Etude du raidissage longitudinal d’un panneau métallique soumis à une compression, flexion ou cisaillement par la méthode des splines bandes finies,” USTO, 1994.
- [66] M. Djafour, A. Megnounif, and D. E. Kerdal, “Elastic stability of built-up columns using the spline finite strip method,” in *6th International Colloquium on stability and ductility of steel structures SDSS’99, 9-11 Septembre 1999*, 1999, pp. 477–484.
- [67] R. Bebbiano, D. Camotim, and R. Gonçalves, “GBTUL, Buckling and vibration analysis of thin-walled

- members.” DECivil/IST. Technical University of Lisbon, 2013.
- [68] B. W. Schafer, “CUFSM: Elastic Buckling Analysis of Thin-Walled Members by Finite Strip Analysis.” 2012.
- [69] B. W. Schafer, Z. Li, and C. D. Moen, “Computational modeling of cold-formed steel,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 48, no. 10–11, pp. 23–25, 2010.
- [70] M. Djelil, N. Djafour, M. Matallah, and M. Djafour, “Constrained spline Finite Strip Method for thin-walled members with open and closed cross-sections,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 132, pp. 302–315, 2018.
- [71] N. Djafour, “Proposition d’une méthode de classification des modes d’instabilité des colonnes en acier formées à froid,” Université de Tlemcen, 2015.
- [72] S. Ádány and D. Visy, “Global buckling of thin-walled simply supported columns: Numerical studies,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 54, pp. 82–93, 2012.
- [73] S. Ádány, N. Silvestre, B. W. Schafer, and D. Camotim, “GBT and cFSM: Two modal approaches to the buckling analysis of unbranched thin-walled members,” *Adv. Steel Constr.*, vol. 5, no. 2, pp. 195–223, 2009.
- [74] M. Djelil and M. Djafour, “Elastic buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using SHEBA,” in *La 1ère Conférence Internationale de la Construction Métalliques et Mixte CICOMM’15*, 2015, pp. 57–66.
- [75] M. Djafour, H. Dib, M. Djelil, N. Djafour, M. Matallah, and D. Zendagui, “Buckling mode decomposition of thin-walled members using a constrained spline finite strip method,” in *The 6th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, 2012, pp. 467–74.
- [76] M. Djelil and M. Djafour, “Calculation of the L and GD Elastic Buckling Loads of Cold-Formed Steel Members with Arbitrary Cross-Sections via the constrained spline Finite Strip Method,” in *13th Arab Structural Engineering Conference, University of Blida 1, DECEMBER 13-15, 2015*, pp. 1–8.
- [77] P. B. Dinis, D. Camotim, and N. Silvestre, “FEM-based analysis of the local-plate/distortional mode interaction in cold-formed steel lipped channel columns,” *Comput. Struct.*, no. 85, pp. 1461–1474, 2007.
- [78] N. Silvestre and D. Camotim, “Distortional buckling formulae for cold-formed steel C-and Z-section members: Part II - Validation and application,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 42, pp. 1599–1629, 2004.
- [79] M. Djelil and M. Djafour, “Constrained spline Finite Strip Method for thin-walled members with arbitrary cross-section : Demonstrative examples on the global modes,” in *CICOMM’18*, 2018, pp. 387–396.
- [80] B. W. Schafer, Z. Li, and C. D. Moen, “Computational modeling of cold-formed steel,” *Thin-Walled Structures*. 2010.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الرسالة هو تقديم طريقة رقمية جديدة تسمى (constrained spline Finite Strip Method). تسمح هذه الطريقة بالتصنيف التلقائي لأنماط الانبعاج لحساب حملاتها المرنة باستعمال أسلوب الشرائط المحدودة من نوع (Splines Bandes Finies). تركز هذه الطريقة على مصفوفات لتعريف مختلف أنواع الانبعاج حيث تم عرض تعريفات سهلة لأنواع الانبعاج مستقلة عن الطريقة و عن النموذج الرقمي. كما أن الطريقة المقترحة تحافظ على سهولة التعامل مع الشرائط و خصوصياتها و كذا ترقيم العقد مما جعلها تسمح بدراسة الأعمدة و روافد الحديد المشكل على البارد من مختلف الأشكال، فهي تستطيع دراسة حتى الأشكال المغلقة. من أجل التحقق من صحة المنهج المقترح، تم إجراء عدة اختبارات لدراسة العناصر الهيكلية الخاضعة لمختلف أنواع الضغوط. النتائج المتحصل عليها مماثلة لتلك المتحصل عليها من مختلف الطرق الرقمية المتوفرة (GBT و cFSM). تناقش الدراسة أيضا بعض الجوانب العلمية لكيفية عزل مختلف أنواع الانبعاج و كذا قابلية استعمال هذه التقنية في تحديد حمولة الأعمدة روافد الحديد المشكل على البارد باستخدام طريقة (DSM).

الكلمات المفتاحية: الانبعاج، الحديد المشكل على البارد، أسلوب الشرائط المحدودة من نوع Splines مع الإرغام التصنيف التلقائي لأنماط الانبعاج.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'introduire « la méthode des splines bandes finies contrainte ». L'approche proposée est une nouvelle version de la méthode des splines bandes finies qui permet le classement automatique des principaux modes de flambement des éléments de structures à parois minces. En utilisant certaines hypothèses mécaniques, le modèle spline bande finies est contraint à forcer l'apparition d'un mode d'instabilité spécifique, par exemple forcer l'élément de structure à se déformer en mode local ou en mode distorsionnel. Les différentes matrices de contrainte définissant les trois instabilités de base (Local, distorsionnel et global) sont formulées dans le contexte de la méthode des splines bandes finies pour le cas des structures à parois minces avec une forme arbitraire et des conditions aux limites standard. Ainsi, l'équation de stabilité de la méthode des splines bandes finies est contrainte à la classe d'instabilité choisie et l'analyse est ensuite exécutée. Afin de valider l'approche proposée, plusieurs exemples numériques de décomposition modale sont présentés pour des éléments de structure soumis à des contraintes de compression ou de flexion. Les résultats obtenus prouvent que l'approche développée permet d'estimer correctement les charges (moments) critiques des modes purs d'instabilité. Certains aspects pratiques sur la façon de contraindre un modèle splines bandes finies sont également discutés avec l'applicabilité de la nouvelle technique de décomposition modale dans la procédure de conception des éléments en acier formés à froid.

Mots clés : Profilés formés à froid, Stabilité, Décomposition modale, Splines bandes finies, Splines bandes finies contrainte.

Abstract

The present work aims at introducing the constrained spline Finite Strip Method. The proposed approach is basically a spline Finite Strip Method (spline FSM) that allows the modal decomposition. Similarly to the constrained Finite Strip Method (cFSM), some mechanical assumptions are made in order to constrain the general spline FSM model to buckle in specific modes, for example to enforce the member to buckle in the local- plate mode, or distortional mode. The constraint matrices that define the local (L), distortional (D) and global (G) modes for thin-walled members with arbitrary cross-section are derived in the context of the spline FSM. The implementation of the mechanical criteria is done by using FEM procedure rather than the cFSM one. Moreover, some practical aspects on how to constrain a spline FSM model are also discussed, including how to force the torsional mode of closed cross-sections. Numerical examples of modal decomposition are provided for a column - beam problem, with standard boundary conditions. The critical buckling loads obtained are found to be in good agreement with those calculated via the cFSM and the Generalized Beam Theory (GBT). A discussion on the applicability of csFSM in cold- formed steel member design is also given.

Keywords : Cold-formed steel, stability, modal decomposition, spline Finite Strip Method, constrained spline Finite Strip Method.