



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID - TLEMCCEN**

# THÈSE

Présentée à :

FACULTE DES SCIENCES – DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité: *Probabilités Statistiques*

Par :

Mme. Kada Kloucha Meryem  
Ep. Billami

Sur le thème

---

## **Prévision d'un processus autorégressif fonctionnel via les sous espaces clos**

---

Soutenue publiquement à Tlemcen devant le jury composé de :

Mr Dib Hacem	Professeur	Université de Tlemcen	Président
Mr MOURID Tahar	Professeur	Université de Tlemcen	Directeur de thèse
Mr Bosq Denis	Professeur	Université Paris 6	Invité
Mr Dejehiche Boualem	Professeur	Ecole Polytechnique Royale KTH Stockholm	Examineur
Mr Labbas Ahmed	Maître de Conférences A	Université de Tlemcen	Examineur
Mr MADANI Fethi	Maître de Conférences A	Université de Saida	Examineur

*Laboratoire de statistiques et modélisations aléatoires, UABB,  
13000 Tlemcen - Algérie*

# *Remerciements*

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse, Monsieur MOURID, pour toute son aide, je suis ravie d'avoir travaillé à sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement Messieurs DIB H., LABBAS A., MADANI F. pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse

Je remercie également Messieurs : DEJEHICHE B., et BOSQ D. pour l'honneur qu'il m'a fait d'être dans mon jury de thèse.

Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai partagé mes études et notamment ces années de thèse.

Je remercie particulièrement Messieurs : ALLAM A. et BOUKHARI K. pour leurs conseils et leurs soutiens.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Généralités</b>	<b>9</b>
2.1	Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un . . . . .	9
2.1.1	Définition d'un ARH(1) . . . . .	9
2.1.2	Estimation des opérateurs de covariance $C_X$ et $D_{X_0, X_1}$ . . .	10
2.1.3	Estimation des éléments propres . . . . .	13
2.2	Processus autorégressif AR(1) dans $C_{[0,1]}$ . . . . .	15
2.2.1	Introduction . . . . .	15
2.2.2	Résultats de Bosq [7] . . . . .	16
2.2.3	Résultats de Pumo [35] . . . . .	18
2.2.4	Résultats de Mokhtari [29] . . . . .	21
2.3	Sous espace clos et transformations linéaires mesurables . . . . .	22
2.3.1	Noations et Définitions . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Prévision d'un processus autoregressif d'ordre un</b>	<b>25</b>
3.1	Prévision d'un processus AR à valeurs dans $C_{[0,1]}$ . . . . .	25
3.1.1	Vecteurs propres de $C_X$ connus . . . . .	26
3.1.2	Vecteurs propres de $C_X$ inconnus . . . . .	27
3.2	Prediction d'un processus Autoregressive Hilbertien . . . . .	32
3.2.1	Vecteurs propres de $C_X$ connus . . . . .	33
3.2.2	Vecteurs propres de $C_X$ inconnus . . . . .	35
3.2.3	Borne Exponentielle du Prédicteur . . . . .	38
3.2.4	Prévision d'un ARC par plongement . . . . .	41
3.3	Projection sur les sous–espaces Clos et les espace autoreproduisants	43
<b>4</b>	<b>Simulations Numériques et Exemples</b>	<b>45</b>
4.1	simulation . . . . .	45
4.1.1	Introduction . . . . .	45
4.1.2	Simulation du bruit blanc . . . . .	46
4.1.3	Simulation d'un ARH(1) . . . . .	46

4.1.4	Calcul du prédicteur BLP . . . . .	47
4.2	Exemples . . . . .	53
4.2.1	Exemple de la température d'el Niño . . . . .	53
4.2.2	Prévision de la température à Nottingham . . . . .	55
4.2.3	Exemple de la température à Alger . . . . .	57
4.2.4	Exemple de la concentration atmosphérique de CO2 . . . . .	58
4.2.5	Consommation de l'énergie électrique de la Société des Ciments de Benisaf . . . . .	59
4.2.6	Conclusion . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>63</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Dans de nombreux domaines ( sciences et techniques ) les données se presentent comme des réalisations de de courbes fonctionnelles. En terme de statistiques cela s'interprète par un vecteur de grande dimension. Ces données peuvent tout à fait être décrites par des courbes aléatoires et considérées comme des échantillons d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace fonctionnel. Parmi les modèles fonctionnels utilisés nous citons la classe de processus Autorégressive fonctionnels. Cette classe a été largement étudié dans le monographe de Bosq [7]). elle a été utilisé par la suite par de nombreux auteurs dans la modélisation et la prévision de processus aléatoires à temps continu. Diverses applications ont été réalisées avec succès dans plusieurs domaines : la prévision de la consommation d'électricité, le trafic routier, la température d'El-Niño, l'électrocardiogramme, la prévision du nombre annuel de passagers dans les Chemins de Fer Français et la prédiction des niveaux de pollution atmosphérique (voir Bosq [7]). Pour les données environnementales on peut citer Omatu et al. [33] : la prédiction des niveaux de concentration de polluants dans la pollution atmosphérique avec le filtre de Bucy-Kalman. Nous rappelons la définition d'un processus Autorégressif Hilbertien réel d'ordre 1 ARH(1). Soit  $(H, \mathcal{H})$  un espace de Hilbert séparable réel muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{H}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\| \cdot \|$  sont le produit scalaire et sa norme. On note par  $\mathcal{L}(H)$  l'espace des operateurs linéaires bornés définis sur  $H$  à valeurs dans  $H$ , muni de la norme usuelle  $\| \cdot \|_{\mathcal{L}}$ . Une suite de variables aléatoires  $\varepsilon = (\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  à valeurs dans l'espace de Hilbert  $H$  (H-variables) indépendentes et identiquement distribuées (i.i.d.) et telles que :  $0 < E\|\varepsilon_0\|^2 = \sigma^2 < \infty$ ,  $E\varepsilon_0 = 0$  est dite un H-bruit blanc fort. Une suite  $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  de H-variables aléatoires est un Processus Autorégressif Hilbertien d'ordre 1 (ARH(1)) d'opérateur  $\rho$ , de bruit blanc fort  $\varepsilon$  s'il vérifie :

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

où  $\varepsilon = (\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  est un  $H$ -bruit blanc fort, et  $\rho \in \mathcal{L}$ . Si il existe un entier  $j_0 \geq 1$  tel que  $\|\rho^{j_0}\|_{\mathcal{L}} < 1$ , alors cette dernière équation admet une unique solution stationnaire donnée par :

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j(\varepsilon_{n-j}), n \in \mathbb{Z}$$

où la série converge dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et presque sûrement.

Dans cette thèse nous nous intéressons à la prédiction de la v.a.  $X_{n+1}$  quand on a observé un échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  du processus (1.1). Bosq et Mourid (2013) ont étudié la détermination de la meilleure approximation linéaire  $\lambda(X)$  d'une variable aléatoire  $Y$ , sachant  $X$ , lorsque  $X$  et  $Y$  sont à valeurs dans un espace de Hilbert réel séparable  $H$ . Cela revient à la minimisation suivante :

$$\min E\|Y - l(X)\|^2$$

où le minimum porte sur  $l$  un opérateur linéaire agissant sur  $H$ . La difficulté vient du fait que la solution est, en général, un opérateur linéaire non continu et non défini partout. Le problème peut alors se traiter de la façon suivante : on se place dans l'espace de Hilbert  $L^2(H)$  des variables aléatoires Hilbertiennes de norme de carré intégrable et on cherche à déterminer la projection orthogonale de  $Y$  sur le sous espace clos  $G(X)$  engendré par  $X$  introduit par Fortet (1995). La solution est alors une transformation linéaire mesurable (TLM) introduite par Mandelbaum (1984). Bosq et Mourid (2013) ont obtenu ainsi une forme explicite de  $\lambda(X)$ , sous forme directe, ou en utilisant une base orthonormale de  $G(X)$ . Des formes explicites de  $\lambda(X)$  sont données dans le cas où  $(X, Y)$  est un vecteur Gaussien. Les éléments primordiaux dans cette détermination sont les sous espaces clos  $G(X)$  engendré par  $X$  introduit par Fortet (1995) et les transformations linéaires mesurables (TLM) de Mandelbaum (1984).

Rappelons que si  $L_H^2 = L_H^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \{Z : \Omega \rightarrow H / E\|Z\|^2 < \infty\}$  est l'espace de Hilbert des v.a. de second ordre muni du produit scalaire  $\langle Z_1, Z_2 \rangle = E\langle Z_1, Z_2 \rangle$ ,  $Z_1, Z_2 \in L_H^2$  alors pour une va  $Y \in L_H^2$  à valeurs dans  $H$ , le sous espace clos  $G(Y)$  engendré par  $Y$  est défini par  $G(Y) = \overline{\text{span}}\{l(Y) / l \in \mathcal{L}(H)\}$ . De plus si  $Z \in G(Y)$ , alors il existe une transformation linéaire mesurable (TLM)  $\lambda_Z$  telle que  $Z = \lambda_Z(Y)$ . Dans le cas gaussien, la TLM  $\lambda_Z$  est la projection orthogonale (noté par  $\prod(Y)$ ) sur le sous espace clos. D'autre part, si le processus est un ARH(1) défini par (1.1), alors la projection orthogonale de  $X_{n+1}$  sur le sous espace clos  $G(X_n)$  est donnée par

$$\prod(X_{n+1}) = E(X_{n+1}/X_n) = \rho(X_n) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle C_{X_0, X_1}(v_i) \quad (1.2)$$

où  $(\lambda_i, v_i)$  sont les éléments propres de  $C_X$ . Notre but dans ce travail est de construire des prédicteurs de  $\rho(X_n)$  par des approximations de (1.2) pour des processus AR fonctionnels à valeurs dans  $C_{[0,1]}$  (qui est l'espace des fonctions continues définies sur  $[0, 1]$ ) puis à valeurs dans un espace de Hilbert séparable  $H$ . Pour construire des approximations de (1.2) nous considérons que le processus  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  (1.1) est à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ . Par la suite on considère le plongement continu de l'espace  $C_{[0,1]}$  dans l'espace  $H = L^2_{[0,1]}$  des fonctions de carré intégrables définies sur  $[0, 1]$  muni du produit scalaire usuel et de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Nous décrivons les premiers résultats obtenus sur les prédicteurs (notés BLP) construits en utilisant (1.2). Nous utilisons la formule du prédicteur BLP (1.2) (établie dans le cas des processus AR à valeurs dans un espace de Hilbert  $H$ ) pour des processus AR à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ . La théorie des prédicteurs BLP pour des processus AR à valeurs dans un espace de Banach reste à étudier.

Soit  $(\lambda_i, v_i)_{i \geq 1}$  les éléments propres de  $C_X$ ,  $(\lambda_{in})_{i \geq 1}$  les valeurs propres de l'opérateur  $C_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_i$ . L'opérateur empirique  $D_n$  de  $C_{X_0, X_1}$  est défini par  $D_n(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, x \rangle X_{i+1}$ ,  $x \in H$ .

Dans cette étude nous séparons deux cas :

### 1er Cas. Vecteurs propres de $C_X$ connus

Dans ce cas le prédicteur BLP de  $X_{n+1}$  est donné :

$$\widehat{\rho(X_n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_i \rangle \langle X_j, v_i \rangle X_{j+1}, \quad (1.3)$$

où  $k_n \rightarrow \infty$ . Nous imposons les conditions suivantes :

$$\mathbf{A}_1 : \quad (i) \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > \dots > 0, \\ (ii) \quad \lambda_{1n} > \lambda_{2n} > \dots > \lambda_{k_n n} \text{ p.s.}$$

Ce premier résultat donne la convergence presque sûre du prédicteur BLP de  $X_{n+1}$  (1.3).

**Théorème 1.** *Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  un processus à valeurs dans  $C_{[0,1]}$  (1.1). Supposons que  $A_1$ ,  $\|X_0\|_\infty \leq M$ ,  $M > 0$  et  $\frac{N_n k_n}{\lambda_{k_n}^2} = o\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}}$  p.s. où  $N_n := \|X_n\|_\infty$ ,  $n \geq 1$  et  $k_n \rightarrow \infty$  et  $n \rightarrow \infty$ . Alors,  $\|\widehat{\rho(X_n)} - \rho(X_n)\|_\infty \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$  p.s.*

Pour le deuxième cas nous avons :

### 2eme Cas. Vecteurs propres de $C_X$ inconnus

On note  $(\lambda_{jn}, v_{jn})_{j \geq 1}$  les éléments propres de l'opérateur  $C_n$ . On définit le prédicteur BLP de  $X_{n+1}$  par :

$$\widetilde{\rho(X_n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_{in} \rangle \langle X_j, v_{in} \rangle X_{j+1}, \quad (1.4)$$

D'abord nous établissons une borne exponentielle pour les vecteurs propres  $(v_{in})$  :

*Sous certaines conditions nous avons pour tout  $\eta > 0$  et  $n > n_0$  :*

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty > \eta \right) \leq \gamma_1(\eta) \exp \left( -\gamma_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 \left( \sum_{i=1}^{k_n} a_i \right)^{-2} \right) \quad (1.5)$$

où  $v'_i = \text{sgn} \langle v_{in}, v_i \rangle v_i$ ,  $\gamma_1(\eta) > 0$ ,  $\gamma_2(\eta) > 0$ ,  $a_1 = 2\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$  et  $a_j = 2\sqrt{2} \max[(\lambda_{j-1} - \lambda_j)^{-1}, (\lambda_j - \lambda_{j+1})^{-1}]$ , pour  $j \geq 2$ .

De plus, si  $\frac{n\lambda_{k_n}^2}{(\sum_{i=1}^{k_n} a_i)^2 \log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , alors  $\sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty \rightarrow 0$  p.s.

Ce résultat nous permettra par la suite d'obtenir la borne exponentielle et la convergence presque sûre du prédicteur (1.4).

**Théorème 2.** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  un processus à valeurs dans  $C_{[0,1]}$  (1.1). Sous certaines conditions nous avons pour tout  $\eta > 0$  et  $n > n_1$

$$\mathbb{P}(\|\widetilde{\rho(X_n)} - \rho(X_n)\|_\infty \geq \eta) \leq d_1(\eta) \exp \left( -d_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 \left( \sum_{j=1}^{k_n} a_j \right)^{-2} \right),$$

où  $d_1(\eta) > 0$ ,  $d_2(\eta) > 0$  et  $a_j$  sont donnés ci dessus. De plus, si  $\frac{n\lambda_{k_n}^2}{(\sum_{j=1}^{k_n} a_j)^2 \log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

$\infty$ , alors  $\|\widetilde{\rho(X_n)} - \rho(X_n)\|_\infty \rightarrow 0$  p.s.

Par la suite nous étendons ces résultats aux processus ARH(1) à valeurs dans un espace de Hilbert et puis nous traitons de nouveau la prédiction d'un processus ARC(1) à valeurs dans l'espace  $C_{[0,1]}$  par plongement dans l'espace de Hilbert  $L^2_{[0,1]}$ .

La thèse comporte 4 chapitres.

Dans le Chapitre 2 nous introduisons la classe des processus autorégressifs ARH en suivant la monographie de Bosq. Nous présentons les résultats d'estimation des éléments propres de l'opérateur de covariance et les théorèmes de convergence connus sur les processus AR Hilbertiens. Par la suite nous rappelons les résultats de Pumo de Bosq et de Mokhtari et Mourid sur la prédiction des processus ARC(1) quand l'opérateur  $\rho$  de (1.1) est un opérateur à noyau.

Dans le Chapitre 3, nous présentons nos résultats obtenus sur la prédiction des processus ARC(1). Nous étudions la prévision d'un processus autorégressif à valeurs dans  $C_{[0,1]}$  vérifiant (1.1) où l'opérateur  $\rho$  n'est pas nécessairement à noyau. Nous généralisons ainsi les résultats obtenus par (Pumo 1998 [35]) et (Mokhtari et Mourid 2008 [30]) en donnant des bornes exponentielles et des convergences presque sûres.

Dans le Chapitre 4 nous présentons les simulations numériques. Nous illustrons le comportement du prédicteur BLP par des simulations numériques. Nous présentons plusieurs cas en variant les paramètres du prédicteur BLP. Les simulations



concordent avec les résultats de convergence presque sûre. Par la suite nous appliquons le prédicteur BLP étudié au cas de la serie El-Niño et nous comparons avec les autres méthodes de prédiction qui existent dans la littérature statistique.

**Publication**

1. M. Kada Kloucha and T. Mourid. Best linear predictor of a  $C_{[0,1]}$ -valued functional autoregressive process. *Statistics and Probability Letters* 150 (2019) 114–120.
2. M. Kada Kloucha and T. Mourid. Best linear Prediction of a Functional Autoregressive Processes. *Soumis 2018*.

# Chapitre 2

## Généralités

On observe la trajectoire d'un processus  $X = (X(t); t \in \mathbb{R}^+)$  à temps continu, sur des intervalles successifs d'une longueur donnée  $\delta$ , non nécessairement disjoints et on s'intéresse à prévoir l'évolution globale future du processus sur un intervalle de même longueur. Ceci est le problème de prédiction classique d'un élément fonctionnel  $X_{n+1}$ , à partir des éléments  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (morceaux de trajectoire). Ce type de modèle est utilisé dans des études statistiques où des relations linéaires sont envisagées entre des observations considérées comme des éléments aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert (consommation d'électricité, nombre de voyageurs,...). Nous présentons la définition d'un autorégressif d'ordre 1 à valeur dans un espace de Hilbert ARH(1) qui fournit un modèle mathématique décrivant des relations entre des observations et ouvrant un champ très vaste pour les applications.

### 2.1 Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un

#### 2.1.1 Définition d'un ARH(1)

Soit  $(H, \mathfrak{B}_H)$  un espace de Hilbert séparable muni de sa tribu Borélienne.

Le produit scalaire et la norme de  $H$  sont notés respectivement par  $\langle \cdot, \cdot \rangle; \|\cdot\|$ .

On considère une suite  $(\varepsilon_i, i \in \mathbb{Z})$  de variables aléatoires à valeurs dans  $H$ , définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes et de même loi et telle que :

$$\sigma^2 = E\|\varepsilon_i\|^2 < +\infty \text{ et } E(\varepsilon_i) = 0.$$

$(\varepsilon_i)_i$  est dit  $H$ -bruit blanc.

Soit d'autre part,  $\rho$  un opérateur linéaire borné de  $H$  dans  $H$  tel que  $\exists j_0 \geq 1$   
 $\|\rho^{j_0}\|_L < 1$ .

On dira que  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est un processus autorégressif d'ordre(1) à valeurs dans

$H$  (noté par  $ARH(1)$ ), associé à  $\rho$  et  $(\varepsilon_i)_i$  si :

$$X_i = \rho X_{i-1} + \varepsilon_i \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1)$$

Pour les variables aléatoires Hilbertiennes, les opérateurs de covariance et de covariance croisée sur  $H$  sont définis par :

$$C_{X_0}(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_0). \quad (2.2)$$

$$C_{X_0 X_1}(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_1). \quad (2.3)$$

Pour un  $ARH(1)$  on a

$$C_{X_0 X_1} = \rho C_{X_0}$$

**Proposition 2.1.1** [7] Si  $(X_i)$  est un  $ARH(1)$  associé à  $\rho$  et  $(\varepsilon_i)$  on a :

$$E(X_0) = 0 \quad (2.4)$$

$$C_{X_0} = \rho C_{X_0} \rho + C_\varepsilon \quad (2.5)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i C_\varepsilon \rho^i \quad (2.6)$$

$$C_{X_0, X_{-k}} = C_{X_0} \rho^k, k = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

$$C_{X_{-k}, X_0} = \rho^k C_{X_0}, k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Pour la preuve de cette proposition voir [7]

Dans la suite on note

$$C = C_{X_0}, \quad D = C_{X_0 X_1}$$

### 2.1.2 Estimation des opérateurs de covariance $C_X$ et $D_{X_0 X_1}$

Rappelons d'abord qu'un opérateur linéaire  $T$  sur un espace de Hilbert séparable  $(H, \|\cdot\|)$  est de Hilbert Schmidt si :

$$\|T\|_S^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \|T e_i\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle T e_i, e_j \rangle_H^2 < \infty,$$

où  $(e_i, i \in \mathbb{N})$  est une base Hilbertienne dans  $H$ . L'espace  $S$  des opérateurs aléatoires de Hilbert Schmidt sur  $H$  est un espace de Hilbert pour le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  suivant : si  $T_1, T_2 \in S$

$$\langle T_1, T_2 \rangle_S = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle T_1, e_i \rangle_H \langle T_2, e_j \rangle_H$$

Les opérateurs  $C(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_0)$  et  $D(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_1)$  sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt. En fait si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires Hilbertiennes du second ordre, alors  $C_{XY}$  est un opérateur de Hilbert Schmidt car

$$\begin{aligned} \sum_j \|C_{XY}(v_j)\|^2 &= \sum_j \sum_l \langle C_{XY}(v_j), v_l \rangle^2 \\ &= \sum_j \sum_l (E\langle X, v_j \rangle \langle Y, v_l \rangle)^2 \\ &\leq \sum_j \sum_l E\langle X, v_j \rangle^2 E\langle Y, v_l \rangle^2 \\ &\leq E\|X\|^2 E\|Y\|^2 < \infty \end{aligned}$$

où  $(v_j)$  est une base orthonormale de  $H$ . Leurs normes de Hilbert Schmidt sont respectivement :

$$\begin{aligned} \|C\|_S &= \left( \sum_{jl} |E(\langle X_0, v_j \rangle \langle X_0, v_l \rangle)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|D\|_S &= \left( \sum_{jl} |E(\langle X_0, v_j \rangle \langle X_1, v_l \rangle)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Un estimateur naturel de  $D$  est l'opérateur de la covariance empirique, noté  $D_n$

$$D_n(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, x \rangle X_{i+1}, \quad x \in H. \quad (2.9)$$

Cet opérateur est de rang fini et donc de Hilbert Schmidt. De façon analogue on définit un estimateur de  $C$  par :

$$C_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_i, \quad x \in H \quad (2.10)$$

On l'appelle opérateur de la covariance croisée empirique de  $X_0, X_1$ . Il est de Hilbert Schmidt. On montre que  $C_n$  est un estimateur symétrique sans biais de  $C$ . On introduit les hypothèses suivantes :

$$\mathbf{H}_1 : \bullet \mathbb{P}(\lambda_{1n} > \lambda_{2n} > \dots > \lambda_{nn} > 0) = 1 \quad (2.11)$$

$$\bullet \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0. \quad (2.12)$$

Les résultats suivants sont donnés dans [7] :

**Proposition 2.1.2** [7] Sous l'hypothèse  $H_1$  :

$$E \|C_n - C\|_S^2 \leq \frac{A}{n} \quad (2.13)$$

où  $A = E \|X_0\|^4 \left[1 + 4 \|\rho\|^2 (1 - \|\rho\|^2)^{-1}\right]$ . De plus on a :

$$\|C_n - C\|_S \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

**Proposition 2.1.3** [7] Pour  $n \geq 2$

$$E \|D_n - D\|_S^2 = E \|D_n^* - D^*\|_S^2 \leq \frac{B}{n-1} \quad (2.14)$$

où  $B = 2E \|X_0\|^2 E \|\varepsilon_0\|^2 + 2A$  et  $A$  est défini dans la proposition 2.1.2. De plus on a :

$$\|D_n - D\|_S = \|D_n^* - D^*\|_S \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

**Proposition 2.1.4** [7] Sous l'hypothèse  $H_1$  et si  $\|X_0\|$  est bornée alors, pour tout  $\eta > 0$

$$\mathbb{P}(\|C_n - C\|_S \geq \eta) \leq 4 \exp\left(-\frac{n\eta^2}{\alpha_1 + \beta_1\eta}\right)$$

avec  $\alpha_1, \beta_1$  des constantes positives dépendent de  $\rho$  et de  $\mathbb{P}_{\varepsilon_0}$

**Corollaire 2.1.1** [7]

$$\|C_n - C\|_S = o\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s$$

**Proposition 2.1.5** [7] Sous l'hypothèse  $H_1$  et si  $\|X_0\|$  est bornée alors, pour tout  $\eta > 0$

$$\mathbb{P}(\|D_n - D\|_S \geq \eta) \leq 8 \exp\left(-\frac{n\eta^2}{\gamma + \delta\eta}\right)$$

avec  $\gamma, \delta$  des constante positives dépendent de  $\rho$  et de  $\mathbb{P}_{\varepsilon_0}$  par conséquent

$$\|D_n - D\|_S = o\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s$$

**Proposition 2.1.6** [7] Sous l'hypothèse  $H_1$ ,  $\forall \beta > \frac{1}{2}$ , pourn assez grand on a

$$n^{\frac{1}{4}} (\log n)^{-\beta} \|C_n - C\|_S \longrightarrow 0 \quad p.s \quad (2.15)$$

**Corollaire 2.1.2** [7] Soit  $X$  un ARH(1) associé à un opérateur  $\rho$  de Hilbert-Schmidt et un  $H$ -bruit-blanc  $\varepsilon$ , tel que  $E\|X_0\|^4 < \infty$ . Alors

$$\|C_n - C\|_{\mathcal{N}} \longrightarrow 0 \text{ p.s}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 \longrightarrow E\|X_0\|^2.$$

### 2.1.3 Estimation des éléments propres

Soit  $(\lambda_{in}, v_{in})$  les éléments propres de  $C_n$  tels que

$$C_n v_{in} = \lambda_{in} v_{in} \quad i = 1, 2, \dots$$

Alors des estimateurs naturels de  $\lambda_i$  et  $v_i$  sont respectivement  $\lambda_{in}$  et  $v_{in}$  [7].

**Proposition 2.1.7** [7] Pour tout entier positif  $i$  nous avons.

$$|\lambda_{in} - \lambda_i| \leq \|C_n - C\|_{\mathcal{E}} \quad (2.16)$$

et si  $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\|v_{1n} - v'_1\| \leq a_1 \|C_n - C\|_{\mathcal{E}} \quad (2.17)$$

où  $a_1 = 2\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ , et si pour un  $i > 1$ ,  $\lambda_{i-1} > \lambda_i > \lambda_{i+1}$  alors

$$\|v_{in} - v'_i\| \leq a_i \|C_n - C\|_{\mathcal{E}}, \quad (2.18)$$

où  $a_i = 2\sqrt{2} [\min(\lambda_{i-1} - \lambda_i, \lambda_i - \lambda_{i+1})]^{-1}$ . Ici  $v'_i = (\text{sgn}\langle v_{in}, v_i \rangle) v_i$ ,  $i \geq 1$ ,

**Proposition 2.1.8** [7] Soit l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  et  $\|X_0\|$  borné, nous avons :

$$\sup_{i \geq 1} |\lambda_{in} - \lambda_i| \leq \|C_n - C\|_{\mathcal{E}} \leq \|C_n - C\|_S$$

et

$$\sup_{i \geq 1} |\lambda_{in} - \lambda_i| = o\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \text{ p.s}$$

**Lemme 2.1.1** [7] Soit  $X$  un ARH(1) tel que  $E\|X_0\|^4 < \infty$  et  $\rho$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Sous l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  et la condition

$$\sum_{i=1}^{k_n} a_i = o\left(n^{\frac{1}{4}(\log n)^{-\beta}}\right),$$

pour certains  $\beta > 0$ , alors

$$\sum_{i > k_n} \|\rho(v_{in})\|^2 \longrightarrow 0 \text{ p.s.}$$

**Lemme 2.1.2** [7] *X un ARH(1), nous avons*

$$\|D_n(v_{in})\| \leq 2\lambda_{in}^{1/2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i\| \right)^{\frac{1}{2}}, n \geq 2, j \geq 1. \quad (2.19)$$



## 2.2 Processus autorégressif AR(1) dans $C_{[0,1]}$

### 2.2.1 Introduction

Dans cette partie on définit le processus autorégressif d'ordre un  $ARC(1)$  dans l'espace  $C_{[0,1]}$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$ . Les opérateurs  $C$  et  $C_n$ , du processus  $ARC(1)$  sont définis comme des opérateurs sur  $L^2$ . Ainsi on utilise leurs éléments propres pour construire les estimateurs de  $\rho$ . Dans cette partie nous rappelons les résultats de Pumo, Bosq et Mokhtari.

### Notations et Conditions

Soient  $r$  une fonction noyau à deux variables définie sur  $[0, 1]^2$ , continue et symétrique et  $\rho$  l'opérateur intégral de noyau  $r$ . Ainsi il s'écrit de la façon suivante :

$$\rho(f)(\cdot) = \int_0^1 r(x, \cdot) f(x) dx \quad (2.20)$$

et on suppose que

$$\sup_{x, y \in [0, 1]} |r(x, y)| < 1.$$

Cette condition est notée  $G_1$ .

On appelle un processus  $ARC(1)$  la suite de v.a.  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ , telle que

$$X_i = \rho(X_{i-1}) + \varepsilon_i; i \in \mathbb{Z}$$

où  $\rho$  est un opérateur défini par (2.20) et  $(\varepsilon_i)$  est un C-bruit blanc.

Supposons que nous avons les observations  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  d'un processus  $ARC(1)$ . Nous posons le problème de la prévision de  $X_{n+1}$ . Un prédicteur naturel de  $X_{n+1}$  est

$$\widehat{X}_{n+1} = E(X_{n+1}/X_n) = \rho(X_n).$$

Soient  $c, c_n, d, d_n, d^*, d_n^*$  définis par :

$$c(s, t) = E(X_0(s)X_0(t)) \quad ; \quad c_n(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i(s)X_i(t)) \quad (2.21)$$

$$d(s, t) = E(X_0(s)X_1(t)) \quad ; \quad d_n(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i(s)X_{i+1}(t)) \quad (2.22)$$

$$d^*(s, t) = E(X_1(s)X_0(t)) \quad ; \quad d_n^*(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1}(s)X_i(t)) \quad (2.23)$$

$$o \quad s, t \in [0, 1]. \quad (2.24)$$

Qui sont définis car  $E\|X_i\|^2 < +\infty$ .

Maintenant, nous rappelons la condition  $(\mathbf{L}_\alpha)$  ([7] Chap.6. page 169)

$$|X_n(t) - X_n(s)| \leq M_n |t - s|^\alpha; \quad s, t \in [0, 1], n \in \mathbb{Z}, \quad (2.25)$$

où  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $M_n$  une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie par :

$$M_n = \sup_{s \neq t} \frac{|X_n(t) - X_n(s)|}{|t - s|^\alpha}. \quad (2.26)$$

Par la suite, nous supposerons que la suite  $(M_n)$  associée au processus  $ARC(1)$  est équadistribuée et que  $V = E(M_0^2) < \infty$ .

### 2.2.2 Résultats de Bosq [7]

Nous rappelons des résultats de Bosq [7]

**Proposition 2.2.1** [7] *Si on considère un processus centré  $(Y_i, i \in \mathbb{Z})$  géométriquement  $\alpha$ -mélangeant, de coefficients de mélangeance  $\alpha(n) \leq bq^n$ , vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

$$\exists m, M \text{ tq } 0 < m \leq E(Y_i^2) \leq M, i \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

$$E|Y_i|^k \leq M^{k-2} k! E(Y_i^2), k \geq 3, i \in \mathbb{Z}. \quad (2.28)$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq (2\sqrt{n} + \eta_1) \exp\left(-\eta_2 \frac{\varepsilon^2}{5 + \varepsilon} \sqrt{n}\right) + \eta_3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) n \exp\left(-\log \frac{1}{q} \sqrt{n}\right). \quad (2.29)$$

$$\text{où } S_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \eta_1 = 3 + \frac{1}{M}, \quad \eta_2 = \frac{1}{10} M, \quad \eta_3 = 11 \left(\sqrt{2M} \frac{5}{2} \left(1 + \frac{4}{5\sqrt{m}}\right)\right)^{\frac{2}{5}}.$$

Si le processus est stationnaire les conditions se réduisent à

$$0 < E(Y^2) \leq M < +\infty \quad E|Y|^k \leq M^{k-2} k! E(Y^2), \quad k \geq 3.$$

**Proposition 2.2.2** [7] *Soit  $X$  un  $ARC(1)$  borné, alors*

$$\mathbb{P}(|c_n(s, t) - c(s, t)| \geq \eta) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\eta^2}{\gamma + \delta\eta}\right), \quad \eta > 0,$$

avec  $\gamma > 0$  et  $\delta > 0$  ne dépendent que de  $\rho$  et  $P_X$ .

Si de plus la condition  $(\mathbf{L}_\alpha)$  (2.25) est vérifiée avec  $M_0$  bornée, alors

$$\mathbb{P}(\|c_n(s, t) - c(s, t)\| \geq \eta) \leq d\eta^{-\frac{2}{\alpha}} \exp\left(-\frac{n\eta^2}{4\gamma + 2\delta\eta}\right),$$

où  $d = 4\|X_0\|_\infty \|M_0\|_\infty$ .

**Estimation d'un ARC(1)**

On considère un processus ARC(1)  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ , et on suppose que l'opérateur  $\rho$  est à noyau  $r(\cdot, \cdot)$  qui satisfait  $\|r(\cdot, \cdot)\|_{C_0^2} < 1$ . Sous les conditions  $\mathbf{H}_1$  (2.11), on définit l'estimateur  $\rho_n$  de  $\rho$  par

$$\rho_n(x) = \tilde{\pi}^{k_n} D_n \tilde{C}_n^{-1} \tilde{\Pi}^{k_n}(x), x \in C_{[0,1]} \quad (2.30)$$

$$\text{où } k_n \longrightarrow \infty, \tilde{C}_n = \tilde{\Pi}^{k_n} C_n, \quad (2.31)$$

$$\text{et } \tilde{\Pi}^{k_n}(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \langle x, v_{jn} \rangle v_{jn}, x \in C_{[0,1]} \quad (2.32)$$

On a le résultat suivant :

**Lemme 2.2.1** [7]

$$\|v_{in} - v'_i\|_{C_0} \leq \lambda_{in}^{-1} \|c_n - c\|_{C_0^2} + \|c\|_{C_0^2} \lambda_{in}^{-1} \|v_{in} - v'_i\|_{L^2} + \lambda_{in}^{-1} |\lambda_{in} - \lambda_i| \|v'_i\|_{C_0}. \quad (2.33)$$

Nous notons la condition  $\mathbf{G}$  suivante :

$$(a) \quad v = \sup_{j \geq 1} \|v_j\|_{\infty} < \infty \quad (2.34)$$

$$(b) \quad \sup_{x \in C_{[0,1]}, \|x\|_{\infty} \leq 1} \left\| \rho(x) - \sum_{j=1}^k \langle \rho(x), v_j \rangle v_j \right\|_{\infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (2.35)$$

Nous avons les résultats suivants [7] :

**Lemme 2.2.2** [7] *Sous l'hypothèse  $\mathbf{G}$  et si*

$$\sum_{j=1}^{k_n} \|v_{jn} - v'_j\|_{\infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad p.s.,$$

alors

$$\sup_{x \in C_{[0,1]}, \|x\|_{\infty} \leq 1} \left\| \rho(x) - \sum_{j=1}^{k_n} \langle \rho(x), v_{jn} \rangle v_{jn} \right\|_{\infty} \xrightarrow{k_n \rightarrow \infty} 0 \quad p.s.$$

**Théorème 2.2.1** [7] *Soit  $X$  un processus ARC(1), sous les hypothèses  $\mathbf{H}_1$  (2.11),  $\mathbf{G}_1$  (2.20) et  $\mathbf{L}_\alpha$  (2.25), on a*

$$\mathbb{P} \left( \|\rho_n - \rho\|_{\mathcal{L}(C_{[0,1]})} \geq \eta \right) \leq d_1(\eta) \exp \left( -d_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 \left( \sum_1^{k_n} a_j \right)^{-2} \right),$$

où  $d_1(\eta)$  et  $d_2(\eta)$  sont des constantes positives.

Donc, si

$$\frac{n\lambda_{k_n}^2}{\log n \left( \sum_1^{k_n} a_j \right)^2} \longrightarrow \infty,$$

on a

$$\|\rho_n - \rho\|_{\mathfrak{L}(C[0,1])} \longrightarrow 0 \text{ p.s.}$$

### 2.2.3 Résultats de Pumo [35]

Dans cette section nous rappelons une partie de la thèse de Pumo qui traite la convergence en probabilité du prédicteur  $\tilde{X}_{n+1}(\cdot)$ .

#### Introduction et notations

Soit un processus autorégressif d'ordre un  $ARC(1)$  dans l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$ .

Les opérateurs  $C$  et  $C_n$ , du processus  $ARC(1)$  sont définis comme des opérateurs de  $L^2$ . On utilise les éléments propres des opérateurs empiriques pour construire un estimateur de  $\rho$

Sous certaines conditions, un opérateur linéaire compact de  $C_{[0,1]}$  est de la forme intégrale :

$$\rho(f)(\cdot) = \int_0^1 r(x, \cdot) f(x) dx.$$

En supposant que les vecteurs propres de l'opérateur  $C_X$  sont connus, on peut construire un estimateur  $r_{n,k_n}$  basé sur ces vecteurs propres qui converge en probabilité vers  $r$ , sous des conditions analogues de la Section 2.4.1 [35] avec une hypothèse sur la majoration de la norme sup des vecteurs propres de  $C$ . Ceci donnera la convergence en probabilité du prédicteur  $\tilde{X}_{n+1}(\cdot) = \int_0^1 r_{n,k_n}(x, \cdot) X_n(x) dx$  vers  $\check{X}_{n+1}(\cdot) = \int_0^1 r(x, \cdot) X_n(x) dx$  pour la norme sup.

Pour le problème général de l'estimation de  $r$ , on considère cette fois le sous-espace des fonctions Lipschitziennes d'ordre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Sous l'hypothèse que le processus soit géométriquement  $\alpha$ -mélangeant on montre que le prédicteur converge presque sûrement vers  $\check{X}_{n+1}$  à la vitesse  $\exp(-n^{1/6})$ .

En utilisant ce dernier résultat on montre avec un estimateur  $\hat{r}_{n,k_n}$  de  $r$  que le prédicteur  $\hat{X}_{n+1}(\cdot) = \int_0^1 \hat{r}_{n,k_n}(x, \cdot) X_n(x) dx$  converge presque sûrement vers  $\check{X}_{n+1}$  à la vitesse  $\exp(-n^{1/7})$ . Par la suite Pumo considère la norme Lipschitzienne des fonctions et montre que le prédicteur  $\hat{X}_{n+1}$  converge en probabilité vers  $\check{X}_{n+1}$ .

Nous présentons les résultats de Pumo [35].

Supposons maintenant que les  $(X_i; i \in \mathbb{Z})$  sont Lipschitziennes d'ordre  $\alpha$  i.e :

$$|X_i(x) - X_i(y)| \leq L(\omega)|x - y|^\alpha, \alpha > 0, i \in \mathbb{Z}$$

Avec cette hypothèse on a  $\forall x \in [0, 1]$  :

$$|X_i(x)| \leq |X_i(x) - X_i(0)| + |X_i(0)| \quad (2.36)$$

$$\leq L(\omega) + |X_i(0)|. \quad (2.37)$$

On suppose aussi que le processus  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est géométriquement  $\alpha$ -mélangeant et que les coefficients de mélangeance vérifient l'inégalité :

$$\alpha(n) \leq bq^n \text{ où } b > 0, 0 < q < 1.$$

Nous nous intéresserons à deux processus réels,  $(|X_i(0)|)$  et  $(X_i(x)X_i(y), x, y \in [0, 1])$ . Faisons les hypothèses suivantes :

**H** :  $\exists m(0), M(0) > 0$  and  $m(s, t), M(s, t)$  deux constantes dependent de  $s$  et  $t$  tel que

- $0 < m(0) \leq E(X_0^2(0)) \leq M(0) < +\infty$
- $E|X_0^k(0)| \leq M^{k-2}(0)k!E(X_0^2)$ ,  $k \geq 3$
- $\forall s, t \in [0, 1]; 0 < m(s, t) \leq E(X_0^2(s)X_0^2(t)) \leq M(s, t) < +\infty$
- $\forall s, t \in [0, 1]; E|X_0(s)X_0(t)|^k \leq M^{k-2}(s, t)k!E(X_0^2(x)X_0^2(t))$ ,  $k \geq 3$

Remarquons que la première relation est vérifiée automatiquement parceque  $X_0$  est du second ordre, d'autre par on a  $E\|X_0\|^4 < +\infty$  et donc

$E(X_0^2(x)X_0^2(y)) < +\infty$  pour tout  $x$  et  $y$  fixe. D'où les deux conditions à vérifier sont la deuxième et la quatrième appelées conditions de Cramer.

Pour les deux types de suites centrées on est sous les conditions du résultat annoncé. Ajoutons enfin que pour  $\varepsilon < 1$ , l'inégalité (2.29) devient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq (2\sqrt{n} + \eta_1) \exp(-\eta_2\varepsilon^2\sqrt{n}) + \eta_3\frac{1}{\varepsilon}n \exp\left(-\log\frac{1}{q}\sqrt{n}\right).$$

où  $\eta_2 = \frac{\eta_2}{6}$ ,  $\eta_3 = 2\eta_3$ .

Nous avons l'inégalité exponentielle suivante :

**Proposition 2.2.3** [35] *Si les fonctions aléatoires  $(X_i)$  sont Lipschitziennes d'ordre  $\alpha$ , si le processus  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  est géométriquement  $\alpha$ -mélangeant, et si les conditions H (2.2.3) sont vérifiées, alors pour  $\varepsilon \leq 1$ , pour tout  $n > 0$  et  $0 < \beta < \frac{1}{4}$*

$$\mathbb{P}(\|c_n - c\|_\infty > \varepsilon) \leq (2\sqrt{n} + \eta_1) \exp(-\eta_2\varepsilon^2\sqrt{n}) + \exp\left(-\eta_2\varepsilon^2 16^{-2}n^{\frac{1}{2-2\beta}}\right) + \eta_3\frac{1}{\varepsilon}(1 + n^\beta)n \exp\left(-\log\frac{1}{q}\sqrt{n}\right) + \eta_4 \exp(-n^\beta).$$

où  $\eta_4 = E(\exp(L(\omega)))$ . Un tel résultat est vrai aussi pour  $\|d_n^* - d^*\|_C$ . On suppose donc que  $E(\exp(L(\omega))) < +\infty$ .

Concernant les vecteurs propres de l'opérateur  $C_n$  nous donnons les résultats suivants :

Soient  $(\lambda_{in}, v_{in}, i \in \mathbb{N}^*)$  les éléments propres de l'opérateur  $C_n$ . Supposons que le processus est géométriquement  $\alpha$ -mélangeant, Lipschitzien d'ordre  $\alpha$  avec  $E(\exp(L(\omega))) < +\infty$  et borné. Supposons de plus que les conditions **H** (2.2.3) sont satisfaites.

On rappelle les hypothèses suivantes :

$$\mathbf{H}_1 : \bullet \mathbb{P}(\lambda_{1n} > \lambda_{2n} > \dots > \lambda_{nn} > 0) = 1 \quad (2.38)$$

$$\bullet \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0. \quad (2.39)$$

$$\mathbf{H}'_1 : \lambda_j = ar^j; a > 0, 0 < r < 1, j \in \mathbb{N}^*. \quad (2.40)$$

Nous avons :

**Proposition 2.2.4** [35] *Sous  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}'_1$  est si  $k_n = o(\log n)$  et pour  $n > n_{\gamma_1}$  on a*

$$\sup_{1 \leq i \leq k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty \rightarrow 0 \quad p.s.$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|v_{in} - v'_i\|_\infty > \varepsilon) &\leq A_1 \exp(-A_2 n^{r_1}) + A_3 \exp(-A_4 \varepsilon^2 n^{\frac{1}{6}-2\eta}) \\ &+ A_5 \frac{1}{\varepsilon^2} \exp(-A_6 n^{\frac{1}{6}-\eta}) \end{aligned}$$

où  $A_i, i = 1, 6$ , sont des constantes positives et  $\eta > 0, \frac{1}{6} < \gamma_1 < \frac{1}{4}$  qui peuvent être choisies convenablement.

**Théorème 2.2.2** [35] *Soit  $(X_i, i \in \mathbb{Z})$  un processus  $ARC(1)$  géométriquement  $\alpha$ -mélangeant et borné vérifiant les hypothèses  $H'_1$  et  $H_1$ . Supposons que les trajectoires  $X_i$  sont Lipschitziennes d'ordre  $\alpha$  et vérifient les hypothèses  $H$ . De plus on suppose que la série de Fourier de  $r$  converge uniformément et absolument. Si  $M(k_n) = O(\log n)$ ;  $M'(k_n) = O(\log n)$  et si  $k_n = o(\log n)$  alors pour  $n > n_{\gamma_1}$*

$$\mathbb{P}\left(\|\widehat{X}_{n+1} - \check{X}_{n+1}\|_\infty > \varepsilon\right) \leq B_1 \exp(-B_2 n^{1/7})$$

d'où

$$\|\widehat{X}_{n+1} - \check{X}_{n+1}\| \rightarrow 0 \quad p.s.$$

### 2.2.4 Résultats de Mokhtari [29]

Soit  $(Y(t), t \in \mathbb{R})$  un processus à temps continu admettant une représentation autorégressive dans l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , ( $ARC$ ). En posant  $X_{n+1}(t) = Y(n+t), t \in [0, 1]$ . Les auteurs considèrent la prévision d'un processus  $ARC$  dans l'espace  $C_{[0,\delta]}$ , en appliquant la méthode de Parzen qui utilise la projection sur des espaces à noyau autoreproduisant pour déterminer le meilleur prédicteur linéaire sans biais  $BLUP$   $X_{n+1}^*(t)$  de  $X_{n+1}(t)$  pour  $t \in [0, 1]$ . Pour l'existence du prédicteur  $BLUP$  voir [29].

#### Prédicteur BLUP continu

Soit  $(X_n)$  un processus autorégressif  $ARC(1)$ . En disposant de  $n$  observations  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , on considère les quantités  $c, c_n, d, d_n, d^*, d_n^*$  définies par (2.21). Dans cette partie les auteurs utilisent l'observation complète de la trajectoire  $X_n$ . On note la fonction de covariance

$$K^{i,j}(s, t) = E(X_i(s)X_j(t)), \quad \forall i, j \geq 1, \quad \forall s, t \in [0, 1]$$

et par  $c(s, t) = E(X_0(s)X_0(t))$ .

Le prédicteur  $BLUP$  continu  $X_{n+1}^{**}(s)$  basé sur la trajectoire  $X_n$  est donné par : ([29] chap II)

$$X_{n+1}^{**}(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} \int_0^1 d^*(s, t)v_i(t)dt \int_0^1 X_n(t)v_i(t)dt \quad (2.41)$$

où  $(\lambda_i, v_i)$  sont les éléments propres de l'opérateur  $C$  et donc de  $c(s, t)$ .

Par la suite ils construisent des estimations de  $X_{n+1}^{**}(s), s \in [0, 1]$  suivant deux cas.

#### Vecteurs propres de l'opérateur de covariance $C_X$ connus

Soient  $(\lambda_i, v_i)_{i \geq 1}$  les éléments propres de  $C$ ,  $(\lambda_{in})_{i \geq 1}$  les valeurs propres de  $C_n$ .

On suppose que les  $(v_i)$  sont connus et les  $(\lambda_i)$  sont estimées à partir des  $\lambda_{in}$ . On définit le prédicteur :

$$\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{in}} \int_0^1 d^*(s, t)v_i(t)dt \int_0^1 X_n(t)v_i(t)dt \quad (2.42)$$

et

$$R_n = \left\| \widehat{X}_{n+1}^{**}(\cdot) - \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \int_0^1 d^*(\cdot, t)v_i(t)dt \int_0^1 X_n(t)v_i(t)dt \right\|_2$$

### Vecteurs propres de l'opérateur de covariance $C_X$ inconnus

Soient  $(\lambda_{in}, v_{in})_{i \geq 1}$  les éléments propres de  $C_n$ . Supposons que le processus est géométriquement  $\alpha$ -mélangeant borné, Lipschitzien d'ordre  $\alpha$  avec  $E(e^{L(\omega)}) < \infty$ . Supposons de plus que

$$\|v_{in}\|_\infty \leq M_i^*, \quad M'(k_n) = \max_{1 \leq i \leq k_n} M_i',$$

$$M^*(k_n) = \max_{1 \leq i \leq k_n} M_i^* \text{ et } \widehat{M}(k_n) = \max(M^*(k_n), M'(k_n)).$$

Supposons enfin que la condition **H** (2.2.3) est satisfaite.

Le prédicteur BLUP continu  $\widehat{X}_{n+1}^{**}(s)$ , dans ce cas, est donné par :

$$\widehat{X}_{n+1}^{**}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{in}} \int_0^1 d^*(s, t) v_{in}(t) dt \int_0^1 X_n(t) v_{in}(t) dt \quad (2.43)$$

Nous avons les résultats suivants :

**Théorème 2.2.3** [29] *Sous l'hypothèse **H**<sub>1</sub> (2.11),  $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ,*

$$k_n^3 N_{n-1}^2 n^{-1} \lambda_{k_n}^{-4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$k_n^3 N_{n-1}^2 n^{-1} \lambda_{k_n}^{-2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

où  $N_i := \|X_i\|_2$  on a :

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ en probabilité} \quad (2.44)$$

**Théorème 2.2.4** [29] *Supposons que le processus  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  vérifie les hypothèses  $H, H_1, H'_1$  ((2.2.3), (2.11) et (2.40)), et que  $\|X_i\|_\infty \leq M_i$ , où  $M_i > 0$ ,  $k_n = o(\log n)$  et  $M'(k_n) = O(\log n)$ , alors :*

$$\left\| \widehat{X}_{n+1}^{**} - X_{n+1}^{**} \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ en probabilité} \quad (2.45)$$

## 2.3 Sous espace clos et transformations linéaires mesurables

Dans cette section nous rappelons les résultats de Bosq et Mourid [10] et Bosq [11], donnant la forme explicite du prédicteur *BLP* obtenu par la projection orthogonale de  $X_{n+1}$  sur le sous-espace clos engendré par  $X_n$ .



### 2.3.1 Notions et Définitions

Soit  $(\Omega, A, P)$  un espace probabilisé et  $H$  un espace de Hilbert réel séparable muni de sa norme  $\|\cdot\|$ , de son produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de sa tribu borélienne  $B_H$ , on pose  $L_H^2 = L_H^2(\Omega, A, P) = \{Z : \Omega \rightarrow H; E\|Z\|^2 < \infty\}$  muni du produit scalaire

$$(Z_1, Z_2) = E\langle Z_1, Z_2 \rangle; Z_1, Z_2 \in L_H^2$$

On supposera que  $L_H^2$  est séparable.

**Définition 2.3.1** *Le sous-espace clos engendré par une variable aléatoire  $Y : \Omega \rightarrow H$  est défini par*

$$G(Y) = \overline{\text{sp}}\{l(Y); l \in L\}$$

où  $Y \in L_H^2$ ;  $E(Y) = 0$  et  $L = L(H, H)$  est l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur  $H$ .

**Proposition 2.3.1** [11]  $\forall Z \in G(Y); \exists (l_n)_n$  une suite d'éléments de  $L$  tq

$$E\|Z - l_n(Y)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } l_n(Y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Z \text{ p.s.}$$

Par conséquent, il existe une transformation linéaire mesurable (TLM) au sens de Mandelbaum [28]  $\lambda_Z$  tq  $Z = \lambda_Z(Y)$ .

Pour déterminer la projection orthogonale dans le cas Gaussien, on considère le développement spectral de l'opérateur de covariance de  $X$

$$C_X = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i v_i \otimes v_i$$

où  $\lambda_i > 0$   $\sum \lambda_i < \infty$  et  $(v_i)_i$  est un système orthonormal dans  $H$ .

La proposition suivante explicite la projection orthogonale de  $Y$  sur  $G(X)$  dans le cas Gaussien :

**Proposition 2.3.2** [11] *Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  un AR(1) standard à valeurs dans  $H$  alors*

$$\begin{aligned} \Pi^{X_n}(X_{n+1}) &= E(X_{n+1}/X_n) = \lambda_0(X_n) \text{ avec} \\ \lambda_0(X_n) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle D(v_i). \end{aligned}$$

Dans le cas général Bosq [11] donne Le meilleur prédicteur linéaire de  $X_{n+1}$  par projection orthogonale sur  $G(X_n)$  :

$$\rho(X_n) = \lambda_0(X_n) = \sum_{i \in I, j \in J} \gamma_{ij} (v_i \otimes v_j)(X_n)$$

avec  $(v_i, i \in I)$  sont les vecteurs propres de  $C_n$  et  $\gamma_{ij} = \frac{E(\langle X_n, v_i \rangle \langle X_n, v_j \rangle)}{E(\langle X_n, v_i \rangle^2)}$ .



# Chapitre 3

## Prévision d'un processus autoregressif d'ordre un via les sous espace clos

### 3.1 Prévision d'un processus AR à valeurs dans $C_{[0,1]}$

Dans cette partie, nous étudions la prévision d'un processus autorégressif à valeurs dans  $C_{[0,1]}$  vérifiant la condition (2.1), où  $C_{[0,1]}$  est l'espace des fonctions continues définies sur  $[0, 1]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et l'opérateur  $\rho$  n'est pas nécessairement à noyau ce qu'il améliore les résultats obtenus par (Pumo 1998 [35]) et (Mokhtari et Mourid 2008 [30]).

Nous considérons des prédicteurs de  $\rho(X_n)$  par des approximations de (1.2) pour des processus AR fonctionnels à valeurs dans  $C_{[0,1]}$  puis à valeurs dans un espace de Hilbert séparable  $H$ . Par la suite on considère le plongement continu de l'espace  $C_{[0,1]}$  dans l'espace  $H = L^2_{[0,1]}$  des fonctions de carré intégrables définies sur  $[0, 1]$  muni du produit scalaire usuel et de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Nous décrivons les premiers résultats obtenus sur les prédicteurs (notés BLP) construits en utilisant (1.2). Nous utilisons la formule du prédicteur BLP (1.2) ( établie dans le cas des processus AR à valeurs dans un espace de Hilbert  $H$ ) pour des processus AR à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ . La théorie des prédicteurs BLP pour des processus AR à valeurs dans un espace de Banach reste à étudier. Soient  $(\lambda_j, v_j)$ ,  $j > 1$  les éléments propres de  $C_X$  tel que  $v = \sup \|v_i\|_\infty < +\infty$ ,  $(\lambda_{jn}, v_{jn})$ ,  $j > 1$  les éléments propres de  $C_n$ .

### 3.1.1 Vecteurs propres de $C_X$ connus

Soient  $(\lambda_j, v_j)_{j \geq 1}$  les éléments propres de  $C_X$  et  $(\lambda_{jn})_{j \geq 1}$  les valeurs propres de  $C_n$ . On suppose que les  $(v_j)$  sont connus et les  $(\lambda_j)$  sont estimées à partir des  $(\lambda_{jn})$ .

À partir des résultats de la proposition 2.3.2 de Bosq et Mourid [10] nous pouvons donner la forme explicite du prédicteur de  $X_{n+1}$  :

$$\widehat{\rho(X_n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_i \rangle \langle X_j, v_i \rangle X_{j+1} \quad (3.1)$$

avec  $k_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Le théorème suivant montre la convergence presque sûre du prédicteur  $\widehat{\rho(X_n)}$  (3.1).

**Théorème 3.1.1** *Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  un autorégressif à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ . Sous l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  (2.11),  $\|X_0\|_\infty \leq M$ , ( $M > 0$ ) et*

$$\frac{N_n k_n}{\lambda_{k_n}^2} = o\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad p.s.$$

avec  $N_n = \|X_n\|_\infty$  et  $k_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ .

On a

$$\|\widehat{\rho(X_n)} - \rho(X_n)\|_\infty \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad p.s..$$

#### Preuve

Rappelons que

$$\rho(X_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle D(v_i),$$

et

$$\widehat{\rho(X_n)} = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_i \rangle D_n(v_i).$$

donc

$$\begin{aligned} \|\rho(X_n) - \widehat{\rho(X_n)}\|_\infty &= \left\| \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle D(v_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{k_n} \left( \frac{D(v_i)}{\lambda_i} - \frac{D_n(v_i)}{\lambda_{in}} \right) \langle X_n, v_i \rangle \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \left\| \left( \frac{D(v_i)}{\lambda_i} - \frac{D_n(v_i)}{\lambda_{in}} \right) \langle X_n, v_i \rangle \right\|_\infty + R_n^* \end{aligned}$$

où le reste de la série précédente

$$R_n^* = \left\| \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle D(v_i) \right\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ p.s.}$$

On note par

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{k_n} \left\| \left( \frac{D(v_i)}{\lambda_i} - \frac{D_n(v_i)}{\lambda_{in}} \right) \langle X_n, v_i \rangle \right\|_{\infty}.$$

On a

$$\begin{aligned} \alpha_n &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \left\| \frac{1}{\lambda_i} (D(v_i) - D_n(v_i)) + \left( \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{in}} \right) D_n(v_i) \right\|_{\infty} \|X_n\|_{\infty} \|v_i\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} N_n M \left( \frac{1}{\lambda_i} \|D - D_n\|_{\mathcal{L}} \|v_i\|_{\infty} + \left( \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{in}} \right) \|D_n\|_{\mathcal{L}} \|v_i\|_{\infty} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} N_n M^2 \left( \frac{1}{\lambda_i} \|D - D_n\|_{\mathcal{L}} + \frac{|\lambda_{in} - \lambda_i|}{|\lambda_i \lambda_{in}|} (\|D - D_n\|_{\mathcal{L}} + \|D\|_{\mathcal{L}}) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} N_n M^2 \left( \left( \frac{1}{\lambda_i} + \frac{|\lambda_{in} - \lambda_i|}{|\lambda_i \lambda_{in}|} \right) \|D - D_n\|_{\mathcal{L}} + \frac{|\lambda_{in} - \lambda_i|}{|\lambda_i \lambda_{in}|} \|D\|_{\mathcal{L}} \right) \\ &\leq \frac{N_n M^2 k_n}{\lambda_{kn}} \left( \left( 1 + \frac{1}{\lambda_{kn}} \sup |\lambda_{in} - \lambda_i| \right) \|D - D_n\|_{\mathcal{L}} + \frac{d}{\lambda_{kn}} \sup |\lambda_{in} - \lambda_i| \right) \\ &\leq \frac{N_n M^2 k_n}{\lambda_{kn}} \left( \|D - D_n\|_S + \frac{1}{\lambda_{kn}} \|C - C_n\|_S \|D - D_n\|_S + \frac{d}{\lambda_{kn}} \|C - C_n\|_S \right). \end{aligned}$$

En utilisant les propositions 2.1.2, 2.1.3 , nous avons presque sûrement pour  $n$  assez grand

$$\alpha_n \leq C_1 \frac{N_n k_n}{\lambda_{kn}} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} + C_2 \frac{N_n k_n}{\lambda_{kn}^2} \left( \frac{\log n}{n} \right) + C_3 \frac{N_n k_n}{\lambda_{kn}^2} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et sous la condition du théorème, les dernières limites tendent presque sûrement vers zéro. D'où, le résultat souhaité. ■

### 3.1.2 Vecteurs propres de $C_X$ inconnus

Soient  $(\lambda_{in}, v_{in})_{i \geq 1}$  les éléments propres de l'opérateur de la covariance empirique  $C_n$ . Dans cette partie , on définit le prédicteur  $\widetilde{\rho}(X_n)$  de  $X_{n+1}$  par :

$$\widetilde{\rho}(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_{in} \rangle \langle X_j, v_{in} \rangle X_{j+1} \quad (3.2)$$

avec  $k_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Nous introduisons la condition de Holder (Bosq, 2000 p.169) :

$\mathbf{A}_2$  :

$$|X_n(t) - X_n(s)| \leq M_n |t - s|^\alpha, 0 \leq s, t \leq 1, \alpha \in ]0, 1] \quad (3.3)$$

$$\text{où } M_n \text{ est une v.a. bornée.} \quad (3.4)$$

La proposition suivante établit une borne exponentielle pour les vecteurs propres  $(v_{in})_{i \geq 1}$ .

**Proposition 3.1.1** *Sous les hypothèses  $H_1$  (2.11),  $A_1$ (3.3) et  $\|X_0\|_\infty \leq M$ , ( $M > 0$ ). Pour tout  $\eta > 0$  et  $n > n_0$ , on a*

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty > \eta \right) \leq \gamma_1(\eta) \exp \left( -\gamma_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 \left( \sum_{i=1}^{k_n} a_i \right)^{-2} \right)$$

avec  $v'_i = \text{sgn} \langle v_{in}, v_i \rangle v_i$ ,  $\gamma_1(\eta) > 0$ ,  $\gamma_2(\eta) > 0$ ,  $a_1 = 2\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda - 2)^{-1}$  et

$$a_i = 2\sqrt{2} \max((\lambda_{i-1} - \lambda_i), (\lambda_i - \lambda_{i+1})), \forall i \geq 2.$$

De plus, si  $\frac{n \lambda_{k_n}^2}{(\sum_{i=1}^{k_n} a_i)^2 \log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , alors

$$\sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s}$$

### Preuve

Par le lemme 2.2.1 on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_{in}^{-1} \|c_n - c\|_{C_0^2} + \sum_{i=1}^{k_n} \|c\|_\infty \lambda_{in}^{-1} \|v_{in} - v'_i\|_2 \\ &+ \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_{in}^{-1} |\lambda_{in} - \lambda_i| \|v'_i\|_\infty \\ &\leq \lambda_{k_n}^{-1} k_n \|c_n - c\|_\infty + \lambda_{k_n}^{-1} \|c\|_\infty \sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_2 \\ &+ \lambda_{k_n}^{-1} k_n v \sup_i |\lambda_{in} - \lambda_i| \end{aligned}$$

avec  $c(s, t) = E(X_0(s)X_0(t))$  et  $c_n(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(s)X_i(t)$ .

Ensuite, pour tout  $\eta > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty > \eta\right) &\leq \mathbb{P}(\|c_n - c\|_\infty > \eta_1) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_2 > \eta_2\right) \\ &+ \mathbb{P}(\sup_i |\lambda_{in} - \lambda_i| > \eta_3). \end{aligned}$$

où  $\eta_1 = \frac{\eta \lambda_{k_n}}{3k_n}$ ,  $\eta_2 = \frac{\eta \lambda_{k_n}}{3\|c\|_\infty}$  et  $\eta_3 = \frac{\eta \lambda_{k_n}}{k_n v}$ .

Maintenant, nous appliquons Proposition 2.2.2, Proposition 2.1.4 et Lemme 2.1.7 pour fournir la borne suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty > \eta\right) &\leq d(\eta_1)^{\frac{-2}{\alpha}} \exp\left(\frac{-n^2 \eta^2 \lambda_{k_n}^2}{9k_n^2 (4\alpha_1 + 2\beta_1 \eta_1)}\right) \\ &+ 4 \exp\left(\frac{-n \eta^2 \lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\right)^{-2}}{9\|c\|_{C_0}^2} (\alpha_2 + \beta_2 \eta_2)\right) \\ &+ 4 \exp\left(\frac{-n \eta^2 \lambda_{k_n}^2}{k_n^2 v^2} (\alpha_3 + \beta_3 \eta_3)\right). \end{aligned}$$

Puisque  $\lambda_i \downarrow 0$  et  $\sum \lambda_i < \infty$  on a,

$k_n \lambda_{k_n} \leq 1$  pour  $n$  assez grand, et  $\frac{1}{(\sum a_i)^2} < \lambda_{k_n}^2$ .

Finalement on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_\infty > \eta\right) \leq \gamma_1(\eta) \exp\left(-\gamma_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\right)^{-2}\right)$$

où  $\gamma_1(\eta) > 0$  et  $\gamma_2(\eta) > 0$ . Ainsi, nous avons la borne désirée. ■

Cette proposition nous a aidés dans ce qui suit à démontrer la convergence presque sûre du prédicteur  $\widetilde{\rho}(X_n)$  (3.2).

**Théorème 3.1.2** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  un processus autoregressif d'ordre 1, borné, à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ . Sous les hypothèses  $\mathbf{H}_1$  (2.11),  $\mathbf{A}_1$  (3.3), nous avons, pour tout  $\eta > 0$  et  $n > n_1$

$$\mathbb{P}(\|\widetilde{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\|_\infty \geq \eta) \leq d_1(\eta) \exp\left(-d_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{j=1}^{k_n} a_j\right)^{-2}\right),$$

où  $d_1(\eta) > 0$ ,  $d_2(\eta) > 0$  et  $(a_j)$  sont définis dans Proposition 3.1.1.

De plus, si on a  $\frac{n \lambda_{k_n}^2}{(\sum_{j=1}^{k_n} a_j)^2 \log n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ , alors

$$\|\widetilde{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

**Preuve** Nous avons

$$\widetilde{\rho}(X_n) = \rho\left(\widetilde{\Pi}_{k_n}(X_n)\right) = \sum_{i=1}^{k_n} \langle X_n, v_{in} \rangle \rho(v_{in}) = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_{in} \rangle D_n(v_{in}).$$

Nous introduisons les quantités suivantes (similaire à la preuve de Théorème 8.7 dans [7]) :

$$\begin{aligned} \rho^*(X_n) &:= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_{in} \rangle D_n(v_{in}), & \widetilde{\widetilde{\rho}}(X_n) &:= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v'_i \rangle D_n(v_{in}), \\ \widetilde{\widetilde{\rho}}^*(X_n) &= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v'_i \rangle D_n(v'_i), & \text{où } v'_j &:= \text{sgn}\langle v_{jn}, v_j \rangle v_j, \\ \rho_{k_n}(X_n) &:= \rho(\Pi^{k_n}(X_n)) = \sum_{i=1}^{k_n} \langle X_n, v'_i \rangle \rho(v'_i), & \widetilde{\widetilde{\rho}}_{k_n}(X_n) &= \sum_{i=1}^{k_n} \langle X_n, v_{in} \rangle \rho(v_{in}). \end{aligned}$$

De plus, nous notons par  $a_n(X_n) = \sum_{i=1}^4 a_{ni}(X_n)$ , avec

$$\begin{aligned} a_{n1}(X_n) &= \widetilde{\widetilde{\rho}}(X_n) - \rho^*(X_n), & a_{n2}(X_n) &= \rho^*(X_n) - \widetilde{\widetilde{\rho}}_{k_n}(X_n), \\ a_{n3}(X_n) &= \widetilde{\widetilde{\rho}}_{k_n}(X_n) - \widetilde{\widetilde{\rho}}^*(X_n), & a_{n4}(X_n) &= \widetilde{\widetilde{\rho}}^*(X_n) - \rho_{k_n}(X_n), \end{aligned}$$

$$b_n(X_n) = \rho_{k_n}(X_n) - \widetilde{\widetilde{\rho}}_{k_n}(X_n) \text{ et } c_n(X_n) = \widetilde{\widetilde{\rho}}_{k_n}(X_n) - \rho(X_n).$$

On obtient

$$\left\| \rho(X_n) - \widetilde{\widetilde{\rho}}(X_n) \right\|_{\infty} \leq \|a_n(X_n)\|_{\infty} + \|b_n(X_n)\|_{\infty} + \|c_n(X_n)\|_{\infty}. \quad (3.5)$$

1. Pour le premier terme  $a_n(X_n)$ , on écrit

$$\|a_{n1}(X_n)\|_2 \leq \sum_{i=1}^{k_n} \frac{|\lambda_{in} - \lambda_i|}{|\lambda_{in} \lambda_i|} |\langle X_n, v_{in} \rangle| \|D_n(v_{in})\|_2. \quad (3.6)$$

En utilisant Lemme 2.1.2, Proposition 2.1.5, Corollaire 2.1.1 et  $\|X_n\|_{\infty} \leq M$ , on a

$$\|a_{n1}(X_n)\|_2 \leq 2\lambda_{k_n}^{-1} \lambda_{k_n n}^{-\frac{1}{2}} \|C_n - C\|_{\mathcal{L}} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} k_n^{\frac{1}{2}} M. \quad (3.7)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\|a_{n1}(X_n)\|_{\infty} \geq \eta) &\leq \mathbf{P}\left(\|a_{n1}(X_n)\|_2 \geq \eta, \|C_n - C\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{\lambda_{k_n}}{2}\right) \\ &+ \mathbf{P}\left(\|a_{n1}(X_n)\|_2 \geq \eta, \|C_n - C\|_{\mathcal{L}} < \frac{\lambda_{k_n}}{2}\right). \end{aligned}$$



Puisque  $\|C_n - C\|_{\mathcal{L}} < \frac{\lambda_{k_n}}{2}$  implique  $\lambda_{k_n n} > \frac{\lambda_{k_n}}{2}$ , nous arrivons à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|a_{n1}(X_n)\|_{\infty} \geq \eta) &\leq \mathbb{P}\left(2\sqrt{2}k_n^{\frac{1}{2}}M\lambda_{k_n}^{-\frac{3}{2}}\|C_n - C\|_{\mathcal{L}} > \eta\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(\|C_n - C\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{\lambda_{k_n}}{2}\right). \end{aligned}$$

Selon la proposition 2.1.4 et  $k_n\lambda_{k_n} \leq 1$ , on obtient, pour  $n$  assez grand, la borne suivante :

$$\mathbb{P}(\|a_{n1}(X_n)\|_{\infty} \geq \eta) \leq 8 \exp(-c_1 n \lambda_{k_n}^4) \quad \text{où } c_1 > 0. \quad (3.8)$$

Pour le terme  $a_{n2}(X_n)$ , on écrit

$$\|a_{n2}(X_n)\|_{\infty} \leq \|D_n\|_{\mathcal{L}} \lambda_{k_n}^{-1} M \sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\|_{\infty}.$$

D'où, par Proposition 3.1.1, on obtient pour  $c_2 > 0$  et  $c_3 > 0$

$$\mathbb{P}(\|a_{n2}(X_n)\|_{\infty} \geq \eta) \leq c_2 \exp\left(-c_3 n \lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\right)^{-2}\right). \quad (3.9)$$

Ensuite pour le terme  $a_{n3}(X_n)$ , similaire à ci-dessus, nous obtenons pour  $c_4 > 0$  et  $c_5 > 0$

$$\mathbb{P}(\|a_{n3}(X_n)\|_{\infty} \geq \eta) \leq c_4 \exp\left(-c_5 n \lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\right)^{-2}\right). \quad (3.10)$$

Maintenant, pour le dernier terme  $a_{n4}(X_n)$ , nous avons

$$\|a_{n4}(X_n)\|_{\infty} = \left\| \sum_{i=1}^{k_n} (D_n - D)(v'_i) \lambda_i^{-1} \langle X_n, v_i \rangle \right\|_{\infty} \quad (3.11)$$

$$\leq k_n \lambda_{k_n}^{-1} M \|D_n - D\|_{\mathcal{L}}. \quad (3.12)$$

En utilisant la proposition 2.1.5, on obtient pour  $c_6 > 0$  et  $c_7 > 0$

$$\mathbb{P}(\|a_{n4}(X_n)\|_{\infty} \geq \eta) \leq c_6 \exp(-c_7 n \lambda_{k_n}^2). \quad (3.13)$$

Regroupant les résultats (3.8), (3.9), (3.10) et (3.12), on en déduit pour  $\gamma_1(\eta) > 0$  et  $\gamma_2(\eta) > 0$  la borne suivante

$$\mathbb{P}(\|a_n(X_n)\|_{\infty} \geq \eta) \leq \gamma_1(\eta) \exp\left(-\gamma_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\right)^{-2}\right). \quad (3.14)$$

2. Pour le terme  $b_n(X_n)$ , on écrit

$$\begin{aligned} \|b_n(X_n)\|_\infty &= \left\| \sum_{i=1}^{k_n} \langle X_n, v'_i - v_{in} \rangle \rho(v'_i) - \langle X_n, v_{in} \rangle \rho(v_{in} - v'_i) \right\|_\infty \\ &\leq M(v+1) \sum_{i=1}^{k_n} \|v'_i - v_{in}\|_\infty. \end{aligned}$$

Utilisant Proposition 3.1.1, on obtient pour  $\gamma_3 > 0$  et  $\gamma_4 > 0$

$$\mathbb{P}(\|b_n(X_n)\|_\infty \geq \eta) \leq \gamma_3(\eta) \exp\left(-\gamma_4(\eta)n\lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\right)^{-2}\right). \quad (3.15)$$

3. Finalement, pour le terme  $c_n(X_n)$ , on a

$$\begin{aligned} \|c_n(X_n)\|_\infty &\leq \left\| \sum_{i=1}^{k_n} \langle \rho(X_n), v_{in} \rangle (v_{in} - v'_i) + \sum_{i=1}^{k_n} \langle \rho(X_n), v_{in} - v'_i \rangle v'_i \right\|_\infty \\ &+ \left\| \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \langle \rho(X_n), v'_i \rangle v'_i \right\|_\infty \leq M(v+1) \sum_{i=1}^{k_n} \|v_{in} - v'_i\| + R_n^*. \end{aligned}$$

où le reste  $R_n^*$  satisfait  $R_n^* \leq M \left( \sum_{i>k_n} \|\rho(v'_i)\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

D'autre part  $\exists \eta > 0$  tel que si  $n \geq n_\eta$ ,  $\sum_{i>k_n+1} \|\rho(v'_i)\|^2 < \frac{\eta^2}{4}$ , donc Proposition 3.1.1 donne

$$\mathbb{P}(\|c_n(X_n)\|_\infty \geq \eta) \leq \gamma_5(\eta) \exp\left(-\gamma_6(\eta)n\lambda_{k_n}^2 \left(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\right)^{-2}\right) \quad (3.16)$$

où  $\gamma_5(\eta) > 0$  et  $\gamma_6(\eta) > 0$ .

Regroupant les bornes (3.14), (3.15), (3.16), on obtient le résultat désiré. ■

**Exemple 1.** Les valeurs propres  $\lambda_j = ar^j$ ,  $j \geq 1$ ,  $a > 0$ ,  $0 < r < 1$ , satisfont aux conditions du théorème 3.1.2 avec  $k_n = o(\log n)$ .

## 3.2 Prediction d'un processus Autoregressive Hilbertien

Soient  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , un espace de probabilité complet,  $(H, \mathfrak{B}_H)$  l'espace de Hilbert séparable muni de la norme  $\|\cdot\|$  et du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Notons par  $\mathfrak{L}(H)$

### 3.2. PREDICTION D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIVE HILBERTIEN 33

l'espace des opérateurs linéaires bornés définis de  $H$  dans  $H$ , et  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  la norme usuelle des opérateurs linéaires bornés.

Considérons une suite  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  de v.a. à valeurs dans  $H$ , définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{E}(\varepsilon_n) = 0$  et  $0 < \sigma^2 = \|\varepsilon_n\|^2 < +\infty$ , nous dirons qu'une telle suite est un  $H$ -bruit blanc.

Soit  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  un processus autorégressif hilbertien d'ordre 1  $ARH(1)$  satisfait la condition (2.1), avec  $\rho$  un opérateur de Hilbert Schmidt tel que :

$$\exists j_0 \geq 1 / \|\rho^{j_0}\|_{\mathcal{L}} < 1.$$

#### 3.2.1 Vecteurs propres de $C_X$ connus

On suppose que les  $(v_i)$  sont connus et les  $(\lambda_i)$  sont estimées à partir des  $(\lambda_{in})$ .

Nous rappelons l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  :

$$\bullet \mathbb{P}(\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n} > 0) = 1, \quad (3.17)$$

$$\bullet \lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0. \quad (3.18)$$

Le résultat suivant fournit la convergence presque sûre du prédicteur  $\widehat{\rho(X_n)}$  (3.1) :

**Théorème 3.2.1** Soit  $X = (X_n; n \in \mathbb{Z})$  un processus  $ARH(1)$  vérifie l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$ ,  $\|X_0\| < \infty$  et

$$\frac{N_n k_n}{\lambda_{k_n}^2} = o\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

avec  $N_n := \|X_n\|$  et  $k_n \rightarrow \infty$  p.s quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors

$$\|\widehat{\rho(X_n)} - \rho(X_n)\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ p.s..}$$

#### Preuve

Avec les notations du Chapitre I, on a  $D = \rho C$  et on peut écrire

$$\rho(X_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle D(v_i) \in H, \text{ avec } D = E(\langle X_0, \cdot \rangle X_1).$$

donc le terme du reste  $R_n^*$  de la dernière série convergente satisfait :

$$R_n^* = \left\| \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle D(v_i) \right\| \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Soit

$$R_n = \left\| \widehat{\rho(X_n)} - \rho(X_n) \right\|.$$

Utilisant maintenant les définitions du prédicteur  $\widehat{\rho}(X_n)$  et  $D_n$  données par les formules (3.1) et (2.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} R_n &= \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_i \rangle D(v_i) - \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_i \rangle D_n(v_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \left\| \langle X_n, v_i \rangle D(v_i) - \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_i \rangle D_n(v_i) \right\| + R_n^* \\ &\leq \|X_n\| \|v_i\| \sum_{i=1}^{k_n} \left\| \frac{1}{\lambda_i} D(v_i) - \frac{1}{\lambda_{in}} D_n(v_i) \right\| + R_n^* \end{aligned}$$

puisque  $N_n = \|X_n\|$  et  $\|v_i\| = 1$ , nous obtenons :

$$R_n \leq N_n \sum_{i=1}^{k_n} \left\| \frac{1}{\lambda_i} (D - D_n)(v_i) + \left( \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{in}} \right) D_n(v_i) \right\| + R_n^*$$

d'autre part, en utilisant Propositions 2.1.8 et Proposition 2.1.5 (Théorème 4.4 et Théorème 4.8. [7]) avec  $\|\cdot\|_S$  est la norme de Hilbert-Schmidt, nous avons :

$$\begin{aligned} \|D_n - D\|_S &= \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ p.s} \\ \sup_i |\lambda_{in} - \lambda_i| &= \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ p.s} \end{aligned}$$

Donc

$$\|D_n(v_i) - D(v_i)\| \leq \|D_n - D\|_{\mathcal{L}} \|v_i\| \leq \|D_n - D\|_S$$

et

$$\|D_n(v_i)\| \leq \|D_n(v_i) - D(v_i)\| + \|D(v_i)\| \leq \|v_i\| (\|D_n - D\|_S + \|D\|_{\mathcal{L}})$$

### 3.2. PREDICTION D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIVE HILBERTIEN 35

Alors nous pouvons déduire presque sûrement que pour  $C_i > 0, i = 1, 2, 3$  :

$$\begin{aligned}
R_n &\leq N_n \left\{ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \|D - D_n\|_{\mathcal{L}} + \sup |\lambda_{in} - \lambda_i| \left( \frac{1}{\lambda_i \lambda_{in}} \right) \|D_n\|_{\mathcal{L}} \right\} + R_n^* \\
&\leq N_n \left\{ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} C_1 \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{\lambda_i \lambda_{in}} \right) C_2 \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \|D_n\|_{\mathcal{L}} \right\} + R_n^* \\
&\leq \frac{C_3 N_n k_n}{\lambda_{k_n} \lambda_{k_n n}} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \{ \lambda_{k_n n} + \|D_n\|_{\mathcal{L}} \} + R_n^* \\
&\leq \frac{C_3 N_n k_n}{\lambda_{k_n} \lambda_{k_n n}} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \{ \lambda_{k_n n} + \|D_n - D\|_{\mathcal{L}} + \|D\|_{\mathcal{L}} \} + R_n^* \\
&\leq \frac{C_3 N_n k_n}{\lambda_{k_n} \lambda_{k_n n}} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \lambda_{k_n n} + C_2 \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} + d \right\} + R_n^*
\end{aligned}$$

En appliquant Proposition 2.1.6 et condition (3.19), nous avons presque sûrement  $\|C_n - C\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{\lambda_{k_n}}{2}$  pour  $n$  assez grand.

Par conséquent

$\lambda_{k_n n} \geq \lambda_{k_n} - \|C_n - C\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{\lambda_{k_n}}{2}$ . Presque sûrement pour  $n$  assez grand.

Par suite

$$R_n \leq \frac{C_3 N_n k_n}{\lambda_{k_n}^2} \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \lambda_{k_n} + C_2 \left( \frac{\log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} + d \right\} + R_n^*.$$

Sous la condition du théorème, la dernière borne tend vers zéro presque sûrement.

■

#### Exemple 2.

Les valeurs propres  $\lambda_i = ai^{-\delta}, i \geq 1$ , avec  $a > 0, \delta > 1, N_n = N > 0$  (ou  $N_n \leq a \log n$  ou bien  $N_n \leq bn^\gamma, 0 < \gamma < 1/4$ ), satisfaire les conditions du théorème avec  $k_n = [n^v], v < \frac{1}{8\delta}$ .

### 3.2.2 Vecteurs propres de $C_X$ inconnus

Maintenant supposons que les  $(v_j)_{j \geq 1}$  sont inconnus, et qu'ils sont estim e par les  $(v_{j n})_{j \geq 1}$ . On note par  $\mathbf{H}_2$  l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{H}_2 : \lambda_{k_n}^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} a_j = \mathcal{O}\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(\log n)^\beta}\right) \text{ p.s.} \quad (3.20)$$

$$\text{où } a_1 = 2\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}, \quad (3.21)$$

$$a_j = 2\sqrt{2} \max [(\lambda_{j-1} - \lambda_j)^{-1}, (\lambda_j - \lambda_{j+1})^{-1}], j \geq 2. \quad (3.22)$$

Le théorème suivant démontre la convergence presque sûre du prédicteur  $\widetilde{\rho}(X_n)$  (3.2)

**Théorème 3.2.2** *Sous les hypothèses  $\mathbf{H}_1$  (2.11),  $\mathbf{H}_2$  (3.20), pour tout  $M > 0$ , on a*

$$\sup_{\|X_n\| < M} \|\widetilde{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}$$

**Preuve**

La preuve suit les étapes de la preuve du Théorème 8.7 [7] dont nous avons omis certains détails. nous avons

$$\widetilde{\rho}(X_n) = \rho\left(\widetilde{\Pi}_{k_n}(X_n)\right) = \sum_{i=1}^{k_n} \langle X_n, v_{in} \rangle \rho(v_{in}) = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X_n, v_{in} \rangle D_n(v_{in}).$$

Nous introduisons les quantités suivantes

$$\begin{aligned} \rho^*(X_n) &:= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v_{in} \rangle D_n(v_{in}), \quad \widetilde{\rho}(X_n) := \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v'_i \rangle D_n(v_{in}), \\ \widetilde{\rho}^*(X_n) &:= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \langle X_n, v'_i \rangle D_n(v'_i), \quad v'_j := \text{sgn}\langle v_{jn}, v_j \rangle v_j, \\ \rho_{k_n}(X_n) &:= \rho(\Pi^{k_n}(X_n)) := \sum_{i=1}^{k_n} \langle X_n, v_i \rangle \rho(v_i), \quad \widehat{\rho}(X_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \langle X_n, v_{in} \rangle \rho(v_{in}). \end{aligned}$$

On note aussi par :  $a_n(x) = \sum_{i=1}^4 a_{ni}(x)$  où

$$\begin{aligned} a_{n1}(x) &= \left\| \widetilde{\rho}(x) - \rho^*(x) \right\|, \quad a_{n2}(x) = \left\| \rho^*(x) - \widetilde{\rho}(x) \right\|, \\ a_{n3}(x) &= \left\| \widetilde{\rho}(x) - \widetilde{\rho}^*(x) \right\|, \quad a_{n4}(x) = \left\| \widetilde{\rho}^*(x) - \rho_{k_n}(x) \right\|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(x) &= \left\| \rho_{k_n}(x) - \widehat{\rho}(x) \right\|, \quad c_n(x) = \left\| \widehat{\rho}(x) - \rho(x) \right\|, \\ \alpha_n &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|a_n(x)\|, \quad \beta_n = \sup_{\|x\| \leq 1} \|b_n(x)\|, \quad \gamma_n = \sup_{\|x\| \leq 1} \|c_n(x)\|. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\left\| \rho(x) - \widetilde{\rho}(x) \right\| \leq \|a_n(x)\| + \|b_n(x)\| + \|c_n(x)\|$$

**1. Montrons que  $\alpha_{ni} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|a_{ni}(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  p.s. pour  $i = 1, \dots, 4$ .**

On a

$$\|a_{n1}(x)\| \leq \sum_{i=1}^{k_n} \frac{|\lambda_{in} - \lambda_i|}{|\lambda_{in} \lambda_i|} |\langle x, v_{in} \rangle| \|D_n(v_{in})\|.$$

### 3.2. PREDICTION D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIVE HILBERTIEN 37

En utilisant Lemme 2.1.2 , Proposition 2.1.5 et Corollaire 2.1.1 , on a

$$\alpha_{n1} \leq 2\sqrt{2}\lambda_{k_n}^{-\frac{3}{2}} \|C_n - C\|_{\mathcal{L}} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{i=1}^{k_n} |\langle x, v_{in} \rangle|$$

d'où  $\alpha_{n1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  p.s.

Pour  $\alpha_{n2}$  utilisant les mêmes arguments que ci-dessus et du Lemme 2.1.7 [7] on obtient pour n assez grand :

$$\alpha_{n2} \leq \sqrt{6} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{1}{2}} \lambda_{k_n}^{-1} \left( \sum_{i=1}^{k_n} a_i \right) \|C_n - C\|_{\mathcal{L}}$$

donc  $\alpha_{n2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  p.s.

Pour  $\alpha_{n3}$  on obtient

$$\alpha_{n3} \leq \|D_n\|_{\mathcal{L}} \lambda_{k_n}^{-1} k_n^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^{k_n} a_j \right) \|C_n - C\|_{\mathcal{L}}$$

Corollaire 2.1.2 et Proposition 2.1.6 nous donnent  $\alpha_{n3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  p.s.

Pour  $\alpha_{n4}$  nous avons comme ci-dessus

$$\alpha_{n4} \leq \|D_n - D\|_{\mathcal{L}} \left\| \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{\lambda_i} \langle x, v'_i \rangle v'_i \right\| \leq \|D_n - D\|_{\mathcal{L}} \lambda_{k_n}^{-1}$$

d'où  $\alpha_{n4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  p.s. donc  $a_n(x) \rightarrow 0$  p.s.

2. Pour  $\beta_n$  nous pouvons écrire

$$\beta_n^2 \leq 2 \left[ \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \|\rho(v_{in})\|^2 + \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \|\rho(v_i)\|^2 \right]$$

et du Lemme 2.1.1 [7] la dernière borne tend vers zero p.s.

3. Pour  $\gamma_n$  on a

$$\gamma_n \leq \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \|\rho(v_{in})\|^2$$

et la dernière borne tend vers zero p.s.

donc si  $\|X_n\| \leq M$  nous obtenons

$$R_n := \left\| \rho(X_n) - \widetilde{\rho(X_n)} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}$$

ce qui donne le résultat final . ■

#### Example 3.

Les valeurs propres  $\lambda_i = ai^{-\delta}$ ,  $i \geq 1$ , où  $a > 0$ ,  $\delta > 1$ , satisfaire les conditions du théorème avec  $k_n = \log n$ .

### 3.2.3 Borne Exponentielle du Prédicteur

**Proposition 3.2.1** *Sous les mêmes conditions du Théorème 3.2.1 et  $\|X_n\| \leq M, \forall n$ . Alors  $\forall \eta > 0, \exists n_0(\eta, \rho, C_X, (k_n)) \in \mathbb{Z}$  tel que si  $n \geq n_0$ , nous avons*

$$\mathbb{P}(\|\widehat{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\| \geq \eta) \leq c_1 \exp(-c_2 n \lambda_{k_n}^2)$$

où  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  dépendent seulement de  $\eta$  et  $P_X$ . De plus, si  $\frac{n \lambda_{k_n}^2}{\log n} \rightarrow \infty$ , alors

$$\|\widehat{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}$$

#### Preuve

La preuve suit les étapes de la preuve du Théorème 8.6 [7]. Pour tout  $\eta > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|\widehat{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\| \geq \eta) &= \mathbb{P}\left(\left\|\widehat{\rho}(X_n) - \Pi^{k_n} \rho(X_n) \Pi^{k_n} + \Pi^{k_n} \rho(X_n) \Pi^{k_n} - \rho(X_n)\right\| \geq \eta\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left\|\widehat{\rho}(X_n) - \Pi^{k_n} \rho(X_n) \Pi^{k_n}\right\| \geq \frac{\eta}{2}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\|\Pi^{k_n} \rho(X_n) \Pi^{k_n} - \rho(X_n)\right\| \geq \frac{\eta}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous considérons le second terme ci-dessus. Du Théorème 3.2.1 pour  $n$  assez grand, nous avons

$$\left\|\Pi^{k_n} \rho(X_n) \Pi^{k_n} - \rho(X_n)\right\| < \frac{\eta}{2}.$$

Reste à étudier le premier terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\|\widehat{\rho}(X_n) - \Pi^{k_n} \rho(X_n) \Pi^{k_n}\right\| \geq \frac{\eta}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(\left\|\Pi^{k_n} D_n \left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{\langle X_n, v_j \rangle v_j}{\lambda_{j_n}}\right) - \Pi^{k_n} D \left(\sum_{j=1}^{k_n} \frac{\langle X_n, v_j \rangle v_j}{\lambda_j}\right)\right\| \geq \frac{\eta}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\|\Pi^{k_n} D_n(\widehat{V}_n) - \Pi^{k_n} D_n(V_n)\right\| \geq \frac{\eta}{2}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left\|\Pi^{k_n} D_n(V_n) - \Pi^{k_n} D(V_n)\right\| \geq \frac{\eta}{2}\right) \end{aligned}$$

où  $\widehat{V}_n = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{\langle X_n, v_j \rangle v_j}{\lambda_{j_n}}$  et  $V_n = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{\langle X_n, v_j \rangle v_j}{\lambda_j}$ . Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\|\widehat{\rho}(X_n) - \Pi^{k_n} \rho(X_n) \Pi^{k_n}\right\| \geq \frac{\eta}{2}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\|D_n\| \|\widehat{V}_n - V_n\| \geq \frac{\eta}{4}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\|D_n - D\|_{\mathcal{L}} \|V_n\| \geq \frac{\eta}{4}\right) \end{aligned}$$



### 3.2. PREDICTION D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIVE HILBERTIEN 39

En suite on peut déduire que

$$\mathbb{P} \left( \left\| \widehat{\rho}(X_n) - \rho(X_n) \right\| \geq \eta \right) \leq \mathbb{P} \left( \frac{\|C_n - C\|_{\mathcal{L}}}{\inf \lambda_{jn}} \|D_n\| \geq \lambda_{k_n} \frac{\eta}{4M} \right) \quad (3.23)$$

$$+ \mathbb{P} \left( \|D_n - D\|_{\mathcal{L}} \geq \lambda_{k_n} \frac{\eta}{4M} \right) \quad (3.24)$$

$$:= p_1 + p_2. \quad (3.25)$$

En utilisant la Proposition 2.1.5 , nous avons la borne suivante pour le terme  $p_2$

$$\mathbb{P} \left( \|D_n - D\|_{\mathcal{L}} \geq \lambda_{k_n} \frac{\eta}{4M} \right) \leq 8 \exp \left( - \frac{n \lambda_{k_n}^2 \eta^2}{16M^2 (\alpha_1 + \beta_1 \lambda_{k_n} \frac{\eta}{4M})} \right) = 8 \exp(-n \lambda_{k_n}^2 K_1)$$

avec  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  deux constante positives dépendent seulement de  $\rho$  et de  $\mathbb{P}_{\varepsilon_0}$ . Pour le premier terme  $p_1$  on obtient par Proposition 2.1.4 pour  $n$  assez grand , la borne suivante

$$p_1 \leq 4 \exp \left( - \frac{n \frac{\eta^2 \lambda_{k_n}^4}{64M^2 d^2}}{\alpha_2 + \beta_2 \frac{\eta \lambda_{k_n}^2}{8Md}} \right) + 4 \exp \left( -n \frac{\lambda_{k_n}^2}{4(\alpha_1 + \beta_1 \frac{\lambda_{k_n}}{2})} \right) \leq 4 \exp(-n \lambda_{k_n}^2 K_2)$$

avec  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  deux constantes positives dépendent seulement de  $\rho$  et de  $\mathbb{P}_{\varepsilon_0}$ .

En regroupant les deux résultats 3.2.3 , 3.2.3 , nous obtenons la borne exponentielle, et par suite, nous avons la convergence p.s. ■

**Proposition 3.2.2** *Sous les même conditions du Théorème 3.2.2 et si  $\|X_n\| \leq M, \forall n$ .*

*Alors  $\forall \eta > 0, \exists n_\eta$  tel que si  $n \geq n_\eta$ , on a*

$$\mathbb{P}(\|\widetilde{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\| \geq \eta) \leq c_1(\eta) \exp(-c_2(\eta)n \lambda_{k_n}^2 (\sum_{j=1}^{k_n} a_j)^{-2})$$

avec  $c_1(\eta)$  et  $c_2(\eta)$  des constantes positives.

Si de plus

$$\frac{(n \lambda_{k_n}^2)}{(\sum_{j=1}^{k_n} a_j)^2 \log n} \rightarrow \infty,$$

Alors

$$\|\widetilde{\rho}(X_n) - \rho(X_n)\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}$$

**Preuve**

La preuve suit les étapes de la preuve du Théorème 8.8 [7], nous écrivons

$$\widetilde{\rho}(X_n) - \rho(X_n) = A_n(X_n) + B_n(X_n)$$

avec

$$A_n(X_n) = \widetilde{\rho}(X_n) - \rho(X_n) - \rho(\widetilde{\Pi}^{k_n}(X_n)) + \rho\widetilde{\Pi}^{k_n}(X_n) \text{ et } B_n(X_n) = \rho(\widetilde{\Pi}^{k_n}(X_n)) - \rho\widetilde{\Pi}^{k_n}(X_n)$$

Puisque  $\widetilde{\rho}(X_n) - \rho(\widetilde{\Pi}^{k_n}(X_n)) = 0$ , nous avons

$$\|A_n(X_n)\| \leq M \left( \sum_{j>k_n} \|\rho(v_{jn})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Utilisons maintenant, les majorations (8.62) et (8.63) dans le livre de D.Bosq [7] p.219 on a

$$\sum_{j>k_n} \|\rho(v_{jn})\|^2 \leq \sum_{j>k_n} \|\rho(v'_j)\|^2 + 2 \|\rho\|_{\mathcal{L}}^2 \left( \sum_{j=1}^{k_n} a_j \right) \|C_n - C\|_{\mathcal{L}}$$

D'où  $\forall \eta > 0$ , il existe un entier  $n_\eta$  tel que

$$\mathbf{P} \left( \left( \sum_{j>k_n} \|\rho(v_{jn})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \eta \right) \leq \mathbf{P} \left( \|\rho\|_{\mathcal{L}}^2 \left( \sum_{j=1}^{k_n} a_j \right) \|C_n - C\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{\eta^2}{4} \right)$$

qui donne par Proposition 2.1.4 et pour  $n$  assez grand et  $c > 0$  dépend de  $\eta$  :

$$\mathbf{P} (\|A_n(X_n)\| \geq \eta) \leq 4 \exp \left( -cn \left( \sum_{j=1}^{k_n} a_j \right)^{-2} \right).$$

Maintenant

$$B_n(X_n) = a_n(X_n) + b_n(X_n),$$

avec  $a_n(x)$  et  $b_n(x)$  sont définies dans la preuve du théorème 3.2.2. on obtient à nouveau à partir de la Proposition 2.1.4 et Proposition 2.1.5 :

$$\mathbf{P} (\|B_n(X_n)\| \geq \eta) = c_1 \exp \left( -c_2 n \lambda_{k_n}^2 \left( \sum_{j=1}^{k_n} a_j \right)^{-2} \right)$$

avec  $c_1, c_2$  sont des constantes positives. ■

### 3.2.4 Prévision d'un ARC par plongement

Un autre point de vue pour prédire un processus autoregressive à valeurs dans  $C_{[0,1]}$  en utilisant les derniers résultats de prédiction sur l'espace de Hilbert qui ont été évalué le processus (voir [7] Chap 8 ou [26] Chap. 2) :

nous avons plongé l'espace des fonctions continues  $C_{[0,1]}$  dans  $L^2_{[0,1]}$  l'espace des fonctions des carr es intégrables munis de son produit scalaire usuel et de norme  $\|\cdot\|_2$ , et considérant le processus  $(X'_n)$  à valeurs dans  $L^2_{[0,1]}$  définie par :

$$X'_n := \sum_{j \geq 1} \langle X_n, e_j \rangle_H e_j, \quad \epsilon'_n := \sum_{j \geq 1} \langle \epsilon_n, e_j \rangle_H e_j, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Les variables aléatoires  $X'_n$  et  $\epsilon'_n, n \in \mathbb{Z}$ , représente les plongements de  $X_n$  and  $\epsilon_n, n \in \mathbb{Z}$  respectivement.

Nous avons besoin de la condition suivante pour déterminer la prédiction de  $X_n$  dans ce nouvel espace de fonction :

#### Condition H :

L'opérateur  $\rho$  est un opérateur linéaire borné,  $\rho'$  est un opérateur défini dans  $L^2_{[0,1]}$  tel que

$$\|\rho^{j_0}\|_{\mathcal{L}} < 1 \text{ pour tout } j_0 \in \mathbb{N}^*. \quad (3.26)$$

Il est clair que si  $\rho$  est à noyau la **condition H** est satisfaite et  $\rho'$  est aussi un opérateur à noyau avec le même noyau.

Maintenant le processus  $(X'_n, n \in \mathbb{Z})$  satisfait

$$X'_{n+1} = \rho' X'_n + \epsilon'_{n+1} \quad (3.27)$$

Nous pouvons appliquer les résultats pr ed cidents sur la prédiction d'un processus AR à valeurs dans  $H$ . Premièrement nous définissons le prédicteur de  $X'_{n+1}$  dans le cas où les vecteurs propres de l'opérateur de covariance  $C_X$  sont connus par la formule suivante :

$$\widehat{\rho'(X'_n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X'_n, v_i \rangle \langle X'_j, v_i \rangle X'_{j+1} \quad (3.28)$$

Nous avons le résultat suivant :

**Proposition 3.2.3** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  un processus autorégressif à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ . Sous la **Condition H** et les hypothèses du théorème 3.2.1 On a :

$$\|\widehat{\rho'(X'_n)} - \rho'(X'_n)\|_2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}$$

**Preuve** Nous pouvons observer que les deux processus  $(X_n)$  et  $(X'_n)$  ont le même opérateur de covariance  $C_X$  qui est défini sur l'espace  $L^2_{[0,1]}$ . Donc on peut appliquer le théorème 3.2.1 au processus  $(X'_n)$  et donc le résultat voulu suit. ■

De même lorsque les vecteurs propres de l'opérateur de covariance  $C_X$  sont inconnus, nous définissons le prédicteur de  $X'_{n+1}$ , par :

$$\widetilde{\rho'}(X'_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_{in}} \langle X'_n, v_{in} \rangle \langle X'_j, v_{in} \rangle X'_{j+1}. \quad (3.29)$$

**Proposition 3.2.4** Sous la **Condition H** 3.26 et les hypothèses du théorème 3.2.2,  $\forall M > 0$  on a :

$$\sup_{\|X'_n\| < M} \|\widetilde{\rho'}(X'_n) - \rho'(X'_n)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad p.s..$$

**Preuve** De même, nous pouvons appliquer le théorème 3.2.2 au processus  $(X'_n)$ . ■

Dans le cas d'un processus autorégressif à valeurs dans  $C_{[0,1]}$ , pour le prédicteur (3.28) nous avons

**Corollaire 3.2.1** sous les hypothèses de la Proposition 3.2.1 on a

$$\mathbb{P}(\|\widehat{\rho'}(X'_n) - \rho'(X'_n)\|_2 \geq \eta) \leq d_1 \exp(-d_2 n \lambda_{k_n}^2)$$

avec  $d_1 > 0$  et  $d_2 > 0$  dépendent seulement de  $\eta$  et  $\mathbb{P}_X$ .

Si de plus  $\frac{n \lambda_{k_n}^2}{\log n} \rightarrow \infty$ , alors

$$\|\widehat{\rho'}(X'_n) - \rho'(X'_n)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad p.s..$$

pour le prédicteur (3.29) nous avons :

**Corollaire 3.2.2** sous les hypothèses de la Proposition 3.2.2 on a

$$\mathbb{P}(\|\widetilde{\rho'}(X'_n) - \rho'(X'_n)\|_2 \geq \eta) \leq d_1(\eta) \exp(-d_2(\eta) n \lambda_{k_n}^2 (\sum_{j=1}^{k_n} a_j)^{-2})$$

avec  $d_1(\eta)$  et  $d_2(\eta)$  deux constantes positives.

Si de plus  $\frac{(n \lambda_{k_n}^2)}{(\sum_{j=1}^{k_n} a_j)^2 \log n} \rightarrow \infty$ , alors

$$\|\widetilde{\rho'}(X'_n) - \rho'(X'_n)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad p.s..$$

**Preuves**

Les preuves des deux corollaires sont des conséquences des résultats de Proposition 3.2.1 et Proposition 3.2.2 sur le processus  $X'_n$ . ■

### 3.3 Relation entre projection sur les sous-espaces Clos et les espace autoreproduisants

À la lumière des résultats précédents sur la prédiction via un sous-espace Clos, nous pouvons interpréter les résultats de prédiction de Parzen [34] établis dans le contexte d'un espace autoreproduisant. Effectivement, soient  $C_{[a,b]}$  l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$ ,  $Z = (Z_t, t \in [a, b])$  une variable aléatoire à valeurs dans  $C_{[a,b]}$ . Le but est de prédire le processus aléatoire  $Z$  sur la base des observations  $Y = (Y_s, s \in [a, b])$ .

Nous donnons la forme explicite suivante du prédicteur BLUP du processus  $Z_t$  en fonction des observations  $Y$  [34] : ( $\forall t \in [a, b]$ )

$$Z^*(t) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \langle Y, v_i \rangle_{L^2} C_{ZY} v_i(t)$$

où  $(\lambda_i, v_i)$  sont les éléments propres de l'opérateur  $C_Y$ . D'après les résultats du chapitre III, nous pouvons avoir directement pour tout  $t \in [a, b]$  :

$$Z^*(t) = \Pi^Y(Z)(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \langle Y, v_i \rangle_{L^2} C_{ZY} v_i(t)$$

Donc les formules données par Parzen dans l'espace  $C_{[a,b]}$  coïncident avec celles obtenues par Bosq ([10], [11]) dans le cas d'un espace de Hilbert. D'autres formes de prédicteurs apparaissent également dans un contexte fonctionnel (par exemple Régression, etc..) et ont des formes très proches de celles données par Bosq ([10], [11]) ( voir Yao, Muller et Wang [41], Crambes et Mass [12] ).

Dans le cas général, Bosq [11] montre que pour deux processus Hilbertiens  $Y$  et  $Z$  de  $L^2$  et si  $C_{ZY} = l_0 C_Y$  avec  $l_0 \in \mathfrak{L}(H, H)$ , nous avons la même formule du BLP :

$$Z^* = \Pi^Y(Z) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \langle Y, v_i \rangle_{L^2} C_{ZY}(v_i).$$

**Dans le cas gaussien**

$$\begin{aligned} Z^* &= \langle \rho_Z, Y \rangle_K = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b \rho_Z(t) v_i(t) dt \int_a^b Y(t) v_i(t) dt \\ &= \langle \rho_Z, Y \rangle_K = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \langle Y, v_i \rangle_{L^2} \langle E(ZY(t)), v_i \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \langle Y, v_i \rangle_{L^2} C_{ZY} v_i(t) = \Pi^Y(Z_t). \end{aligned}$$

**Dans le cas général** sous l'hypothèse

$$C_{ZY} = l_0 C_Y \text{ avec } l_0 \in \mathfrak{L}(H, H)$$

$$Z^* = \Pi^Y(Z_t).$$

même démonstration car sous cette hypothèse  $\Pi^Y(Z) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \langle Y, v_i \rangle_{L^2} C_{ZY}(v_i)$ .



# Chapitre 4

## Simulations Numériques et Exemples

### 4.1 simulation

#### 4.1.1 Introduction

Pour simuler des trajectoires d'un processus AR fonctionnel et calculer le prédicteur BLP, nous utilisons le travail exécuté par [2] en utilisant le logiciel R version 4.12.2. et la bibliothèque *far* développée par J.Damons et S.Guillas [14]. Nous nous inspirons de l'exemple de simulation d'un processus ARH(1) [14] et [2] qui permet de simuler un bruit blanc dans l'espace  $H$  en utilisant les fonctions propres

$$v_i(t) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi t\right), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

de l'opérateur de covariance du mouvement brownien. Pour simuler notre processus et prédicteur nous spécifions le modèle particulier. Plus précisément, nous considérons un opérateur  $\rho$  à noyau de convolution  $K$  paire périodique de norme  $L^2$  inférieure à 1. Les exemples de fonction  $K$  considérés sont :

$$K(t) = \frac{1}{10^2} \cos(t), \quad K(t) = \frac{1}{10^3} t^2, \quad K(t) = \frac{1}{10^2} t^2 \cos(t).$$

Nous simulons  $n + 1$  observations d'un processus ARH(1) qui seront nécessaires pour calculer le prédicteur BLP et qui sont comparés à la  $n + 1$  ième observation.

### 4.1.2 Simulation du bruit blanc

Nous utiliserons le développement de Karhunen-Loève sur  $[0, T]$  du mouvement Brownien suivant :

$$W_u = \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{2TY_i} \frac{\sin[(i - \frac{1}{2})\frac{\pi u}{T}]}{\pi(i - \frac{1}{2})}$$

où les variables aléatoires  $(Y_i)_i$  sont i.i.d de loi  $N(0, 1)$  qui va nous permettre de définir un bruit blanc  $(\varepsilon_n(t), n = 0, 1, \dots, t \in [0, \delta])$  par :

$$\varepsilon_n(\omega) = W_{n+s}(\omega) - W_n(\omega), s \in [0, \delta].$$

défini sur l'intervalle  $[0, \delta]$ . Pour la simulation, on aura une approximation de la somme infinie par une somme finie comme dans [36].

### 4.1.3 Simulation d'un ARH(1)

Pour la simulation d'un ARH(1) on prend comme valeur initiale la valeur  $X_0 = 0$  et  $(\varepsilon_n)$  est le bruit blanc dans la base de Karhunen Loève ensuite, nous effectuons un changement de base pour ce bruit blanc en utilisant la fonction `BaseK2BaseC` (du Package `far`) pour avoir l'écriture de  $(\varepsilon_n)$  dans la base canonique et nous posons  $X_1 = \varepsilon_1$  Soient  $(X_i^j)$   $j = 1, \dots, m$  ( $m$  étant le nombre de points de discrétisation) les coordonnées de  $X_i$  dans la base canonique  $i = 1, \dots, n$ .

Nous avons :

$$X_{i+1}^j = \text{convolve}(10^{-2}K, X_i^j) + \varepsilon_{i+1}^j, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Cette formule nous permet de générer un échantillon d'observations de taille  $n$  du processus.

Nous présentons ci-dessous les simulations d'un processus  $ARH(1)$  sur des intervalles successifs. La figure suivante (Fig. 4.1) présente la simulation de  $n = 100$  (resp. 150) trajectoires successives d'un processus  $ARH(1)$ , chaque trajectoire est calculée en  $m = 25$  (resp. 50) points de discrétisation de l'intervalle  $[0, 1]$ .



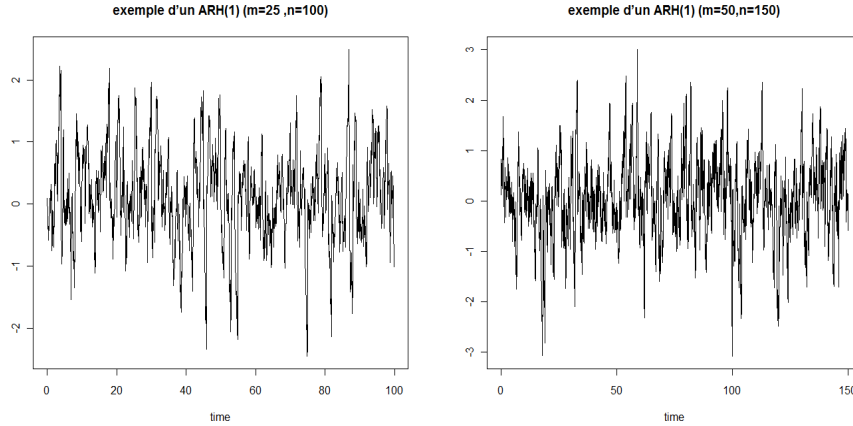


FIGURE 4.1 –

#### 4.1.4 Calcul du prédicteur BLP

Nous utilisons les  $n$  observations du processus pour prédire la  $(n + 1)^{\text{ième}}$  trajectoire du processus.

À partir des observations  $X_i(t_j)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ), en utilisant la formule (3.1) dans le cas où les vecteurs de l'opérateur de covariance seraient connus (respectivement la formule (3.2) dans le cas où ils sont inconnus), on peut calculer le prédicteur BLP  $\widehat{X}_{n+1}(t_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , aux points  $t_j$ , en fonction des  $k$  premières valeurs propres.

Nous allons calculer le prédicteur BLP pour différentes valeurs de  $k$  et nous vérifions l'effet de ces dernières sur les erreurs quadratiques  $MSE$  et les erreurs relatives  $RMAE$  sur des exemples de simulation.

La qualité d'un prédicteur  $\widehat{X}_{n+1}$  calculé aux points  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , pour prévoir  $X_{n+1}$  est mesurée par les erreurs quadratiques  $MSE$  et relatives absolues  $RMAE$  définies par :

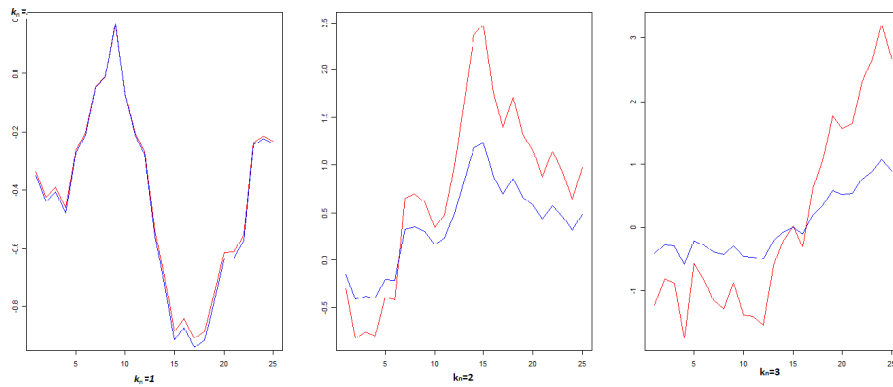
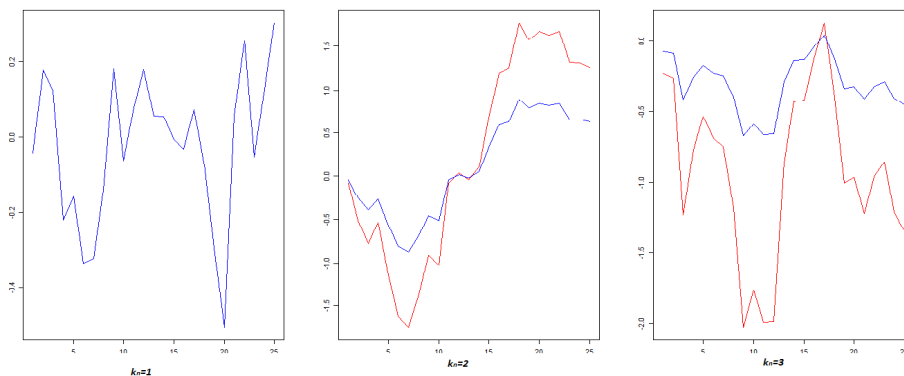
$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\widehat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|^2$$

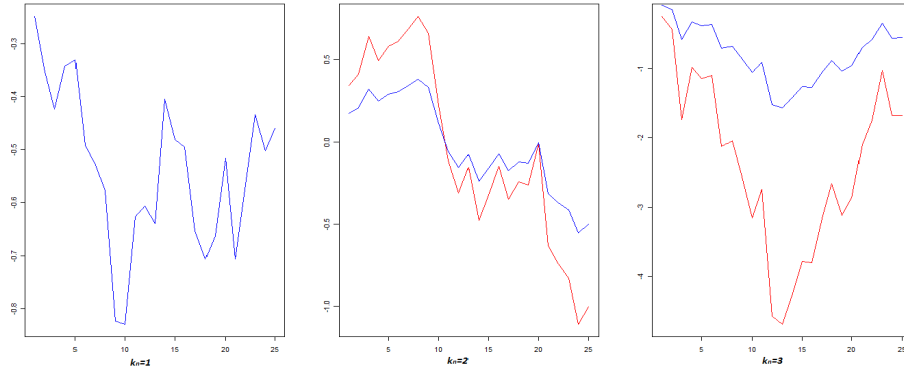
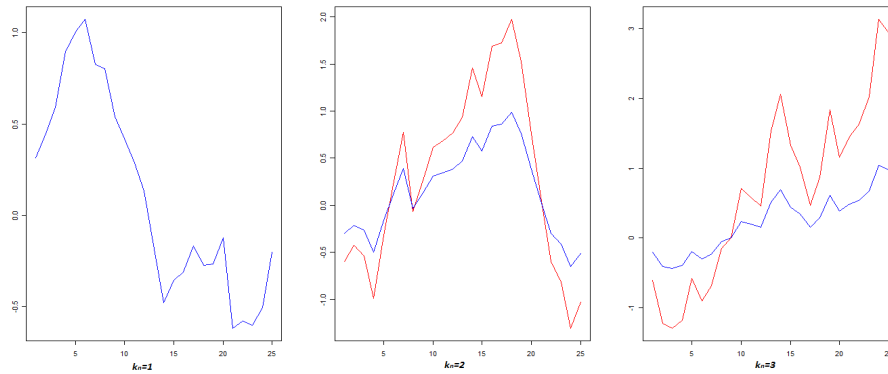
$$RMAE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(|\widehat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|)}{|X_{n+1}(t_i)|}$$

#### Les vecteurs propres de l'opérateur de covariance $C_{X_0}$ sont connus

Quand les vecteurs propres de l'opérateur de covariance  $C_{X_0}$  sont connus, le prédicteur BLP  $\widehat{X}_{n+1} = \widehat{\rho}(X_n)$  donnée par la formule (3.1) avec les vecteurs propres de  $C_{X_0}$  sont ceux du Mouvement Brownien. Les figures ( Fig. 4.2, Fig.

4.3, Fig. 4.4, Fig. 4.5) représentent le prédicteur BLP (trait rouge) de la 50<sup>e</sup> (resp. 70<sup>e</sup>, 100<sup>e</sup>, 150<sup>e</sup>) trajectoire (trait noir) Pour chaque valeur de  $n$ , nous associons trois graphiques correspondant au nombre  $k_n$  de vecteurs propres connus  $k_n = 1, 2, 3$ .

FIGURE 4.2 – ( $n=50$ )FIGURE 4.3 – ( $n=70$ )

FIGURE 4.4 – ( $n=100$ )FIGURE 4.5 – ( $n=150$ )

Dans le Tableau 4.1 , nous donnons la moyenne des erreurs quadratiques et relatives pour 30 réplifications du processus pour différentes valeurs de  $n = 50, 70, 100, 150$  pour  $k_n = 1, 2, 3$ . Nous remarquons que les erreurs croient avec  $k_n$

$k_n$	Erreurs	$n = 50$	$n = 70$	$n = 100$	$n = 150$
1	MSE	$2,64 \cdot 10^{-10}$	$6,7 \cdot 10^{-11}$	$1,57 \cdot 10^{-10}$	$2,62 \cdot 10^{-12}$
	RMAE	$1,44 \cdot 10^{-5}$	$4,27 \cdot 10^{-6}$	$4,23 \cdot 10^{-6}$	$2,90 \cdot 10^{-6}$
2	MSE	0,5296	0,4163	0,4756	0,6205
	RMAE	0,9999968	1,000009	1,000002	1,000002
3	MSE	1,787227	2,299064	2,947584	1,4802
	RMAE	1,999981	1,99992	2,00004	1,999999

TABLE 4.1 –

Nous pouvons observer des très petites valeurs des deux erreurs. elles augmentent avec le nombre  $k_n$  de vecteurs propres connus. Les deux erreurs se stabilisent à partir de  $k_n = 3$ .

### Les vecteurs propres de l'opérateur de covariance $C_{X_0}$ inconnus

Lorsque les vecteurs propres de l'opérateur de covariance  $C_{X_0}$  sont inconnus, le prédicteur BLP  $\widetilde{\rho}(X_n)$  est calculé à partir de la formule (3.2), où nous estimons les vecteurs propres de  $C_{X_0}$  par les vecteurs propres de l'opérateur de covariance empirique  $C_n$ .

Les figures ( Fig. 4.6, Fig. 4.7, Fig. 4.8, Fig. 4.9) représentent le prédicteur BLP (trait bleu) de la 50<sup>e</sup> (resp. 70<sup>e</sup>, 100<sup>e</sup>, 150<sup>e</sup>) trajectoire (trait noir) Pour chaque valeur de  $n$ , nous associons trois graphiques correspondant au nombre  $k_n$  de vecteurs propres inconnus  $k_n = 1, 2, 3$ .

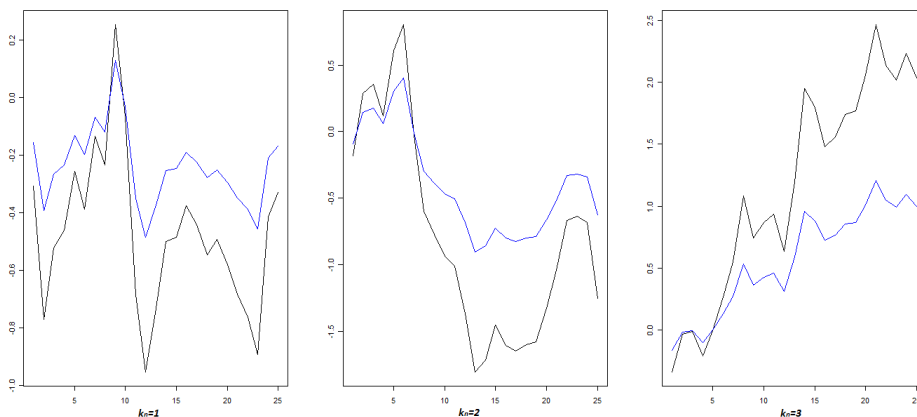


FIGURE 4.6 – (n=50)

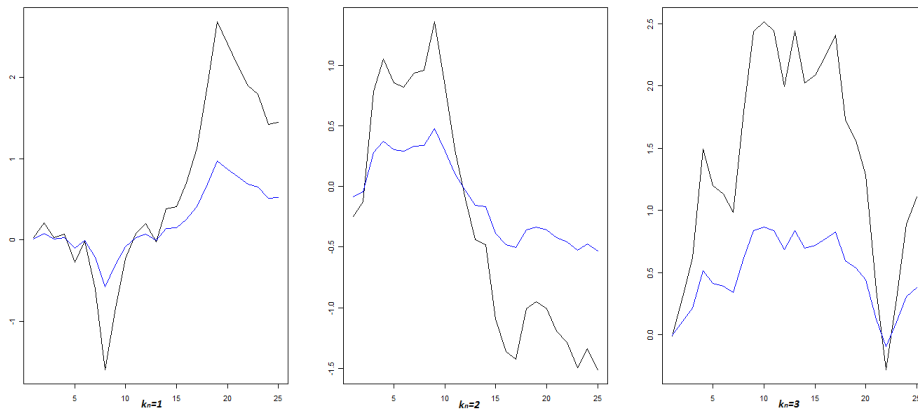


FIGURE 4.7 – (n=70)

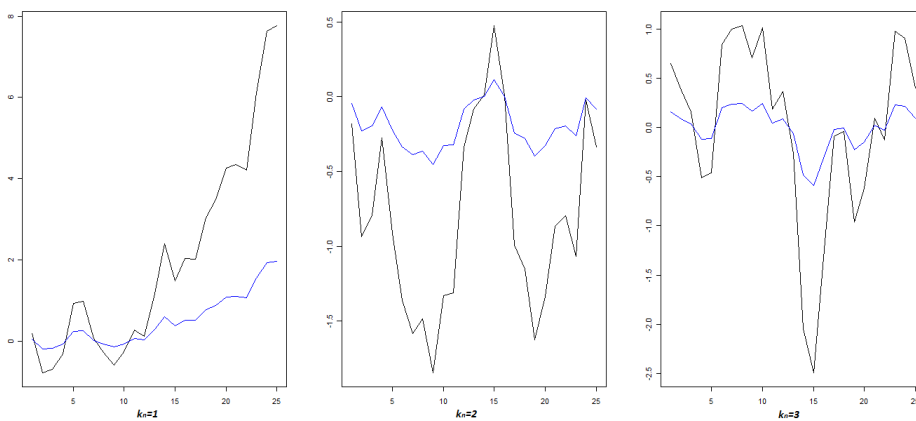
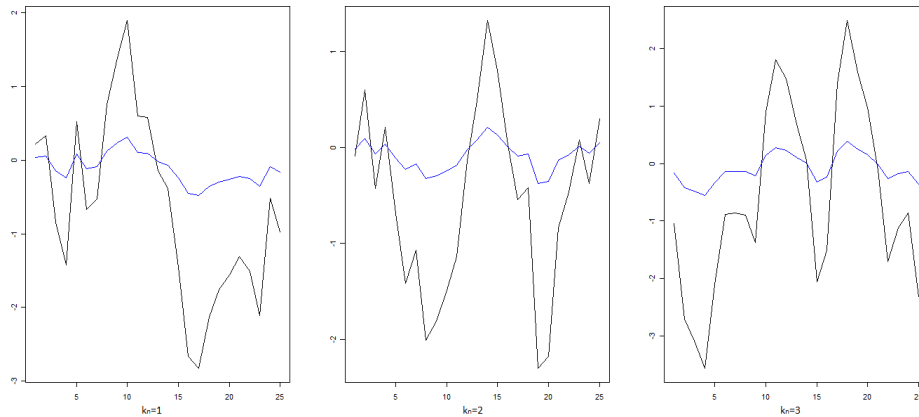


FIGURE 4.8 – (n=100)

FIGURE 4.9 – ( $n=150$ )

$k_n$	Erreurs	$n = 50$	$n = 70$	$n = 100$	$n = 150$
1	MSE	0,5518531	1,224839	5,71466	10,73617
	RMAE	0,9599968	1,759994	2,959982	4,959991
2	MSE	0,6220678	1,293026	8,134934	12,88795
	RMAE	0,9990693	1,832623	3,082396	5,165581
3	MSE	0,6182169	1,798392	5,468652	15,99396
	RMAE	1,041696	1,911694	3,216333	5,390318

TABLE 4.2 –

Dans le tableau 4.2, nous pouvons observer de très petites valeurs des deux erreurs. Elles augmentent avec le nombre  $k_n$  de vecteurs propres estimés. Il y a un minimum dans les valeurs des deux erreurs lorsque  $k_n = 1$  (on peut expliquer cela par les conditions sur  $k_n$  dans les théorèmes (3.2.1 et 3.2.2)).

**Conclusion** Nous pouvons conclure que pour un échantillon fini, le comportement des prédicteurs BLP (dans les deux cas) fonctionne bien avec de très petites erreurs relatives RMAE.

## 4.2 Exemples

### 4.2.1 Exemple de la température d'el Niño

Nous considérons la série chronologique décrivant le phénomène climatologique ENSO qui résulte des interactions entre l'atmosphère et l'océan au dessus de l'Océan Pacifique tropical. Le phénomène EL Niño (EN) est la composante océan dans ENSO tandis que Southern Oscillation (SO) est la composante atmosphère . Un index mesurant la variabilité d'EL Niño est fourni par les températures à la surface de l'océan ramenées à une moyenne observée dans le domaine Niño-1 ( $5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 150^{\circ}W - 90^{\circ}W$ ). Des valeurs moyennes mensuelles sont enregistrées depuis le mois de Janvier 1950 à Juin 2007 par des centres nationaux de la prévision environnementale aux États-Unis. La série chronologique de cet index montre des variations inter-annuelles marquées et superposées à une composante saisonnière forte. Cette série a été analysée par beaucoup d'auteurs (voir par exemple [3], [5], [29]).

Nous considérons les données historiques de la température d'el Niño (site web [//www.cpc.ncep.noaa.gov/products/analysis\\_monitoring/sacoches/ensoyears.shtml](http://www.cpc.ncep.noaa.gov/products/analysis_monitoring/sacoches/ensoyears.shtml)). Pour comparer la performance de notre prédicteur BLP avec les autres méthodes de prédiction existant dans la littérature (voir [2],[3]), on considère la prédiction de l'année de référence 2006.

Nous utilisons la formule (3.2) avec  $k_n = 1$ .

Fig. 4.10 représente la variation de la température (EL Niño )de 1950 à 2006.

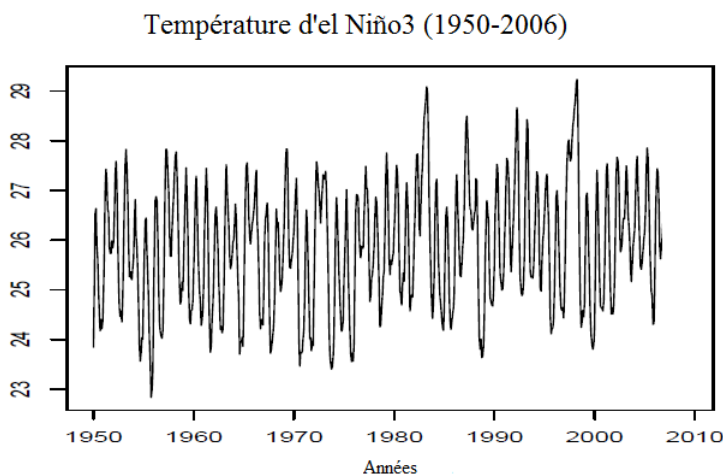


FIGURE 4.10 – Température d'el Nino (1950 – 2006)

La figure suivante Fig. 4.10 montre le comportement du prédicteur BLP  $\widetilde{\rho}(X_{56})$

(trait noir) calculé en fonction des 55 observations de la température d'el Niño3 pendant la période 1950 – 2005 (où la période est l'année) et la trajectoire  $X_{56}$  (trait bleu) de la température d'el Niño au cours de l'année 2006.

Nous obtenons pour les deux erreurs :  $MSE = 0.4848164$  et  $RMAE = 0.02065329$

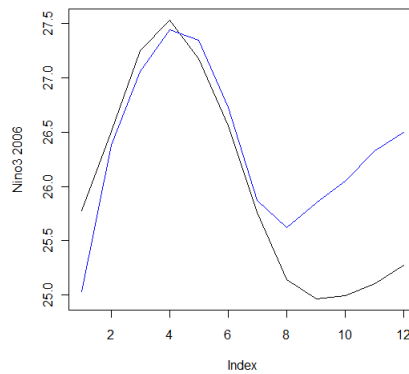


FIGURE 4.11 – Prédicteur BLP année 2006

Le tableau 4.3 donne les valeurs de l'erreur RMAE associées aux différentes méthodes de prévision [5].

Méthodes de prévision	RMAE
Climatologie	2,5%
Sarima	3,7%
Kernel	2,3%
Functional Kernel	2,2%
Smooth FAR(1)	2,3%
Smooth FAR(1) with q=p=12	2,4%
Local FAR(1)	2,2%
BLUP discret	1,4%
BLUP continu	2,25%
Predicteur sieves	2,46%
Predicteur sieves 2017	2,07%
BLP predicteur	2,06%

TABLE 4.3 –



Nous remarquons que le prédicteur BLP donne une erreur assez faible.

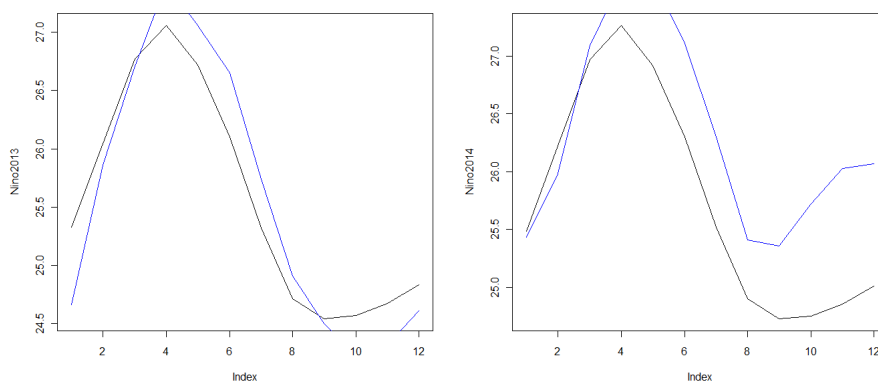


FIGURE 4.12 – Prédicteur BLP années 2013-2014

Nous obtenons pour les deux erreurs :

el Nino3 2013 :  $MSE = 0.1279$  et  $RMAE = 0.0122$ .

el Nino3 2014 :  $MSE = 0.5137$  et  $RMAE = 0.0237$ .

On peut également observer que le prédicteur BLP fonctionne très bien avec très petites erreurs relatives RMAE.

#### 4.2.2 Prédiction de la température à Nottingham

Nous appliquons aussi la projection sur les sous espaces clos sur la série historique des relevés de la température à Nottingham (température moyenne mensuelle au château de Nottingham de Janvier 1920 et arrêtée en 1939) disponible dans la série Nottem de la bibliothèque de MASSE de S-PLUS. Nous utilisons les observations de la période 1920 – 1938 pour calculer le prédicteur BLP de la température de l'année 1939 et nous présentons les erreurs RMAE des différentes méthodes de prévision disponibles (voir [3]).

**Tableau 4.4** : Erreur RMAE de prévision de différentes méthodes de la température de l'année 1939 à Nottingham

Méthodes de prévision	RMAE
Wavelet-Kernel	30%
Sarima	31%
SS(Spline Smoothing)	28%
BLUP discret	2,95%
BLUP continu	2,96%
Predicteur sieves	2,95%
Predicteur sieves 2017	6,09%
BLP predicteur	3,20%

TABLE 4.4 –

Nous remarquons que le prédicteur BLP donne une RMAE comparable à celles données par BLUP continu et le prédicteur sieve.

La figure 4.13 représente la température à Nottingham de 1920 au 1939, figure 4.14 représente la température de l'année 1939 à Nottingham et sa prévision BLP.

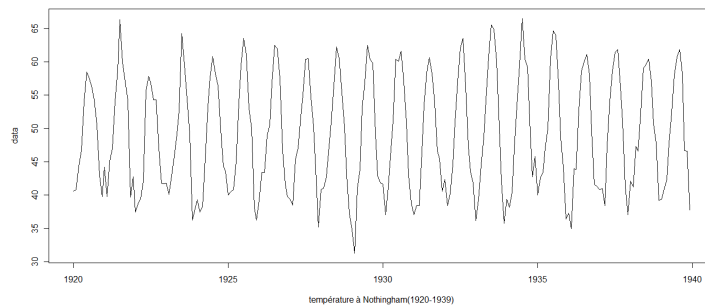


FIGURE 4.13 – Température à Nottingham 1920-1939

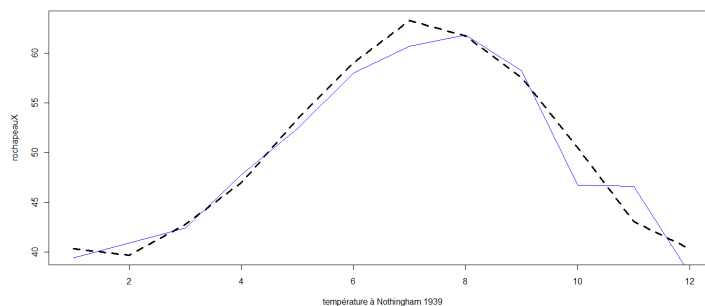


FIGURE 4.14 – Prédicteur BLP année 1939

### 4.2.3 Exemple de la température à Alger

Dans cette partie, nous présentons des résultats de prévision de la température moyenne à Alger pour l'année 2004. Figure 4.15 représente la variation de la température à Alger durant la période 1970 – 2004.

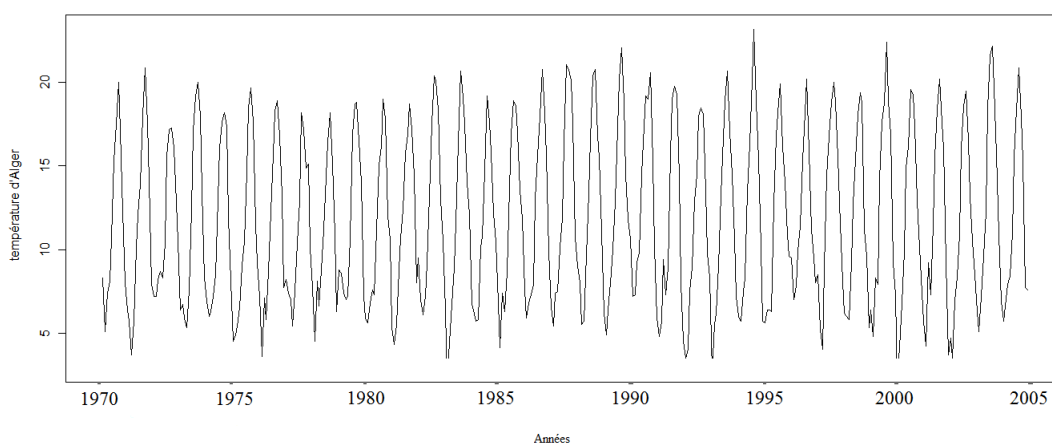


FIGURE 4.15 – Température d' Alger (1970 – 2004)

Figure 4.16 représente la température moyenne de l'année 2004 à Alger et le prédicteur BLP.

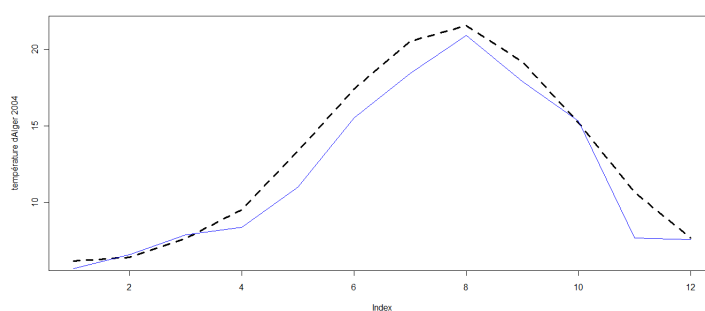


FIGURE 4.16 – Prédicteur BLP année 2004

Dans le **Tableau 4.5** : nous donnons les erreurs RMAE des différentes méthodes de prévision, disponibles, de la température moyenne à Alger pour l'année 2004 (voir [3], [6] et [31]).

Méthodes de prévision	RMAE
BLUP discret	0,140
BLUP continu	0,075
Predicteur sieves	0,073
Predicteur sieves 2017	0,184
BLP predicteur	0,103

TABLE 4.5 –

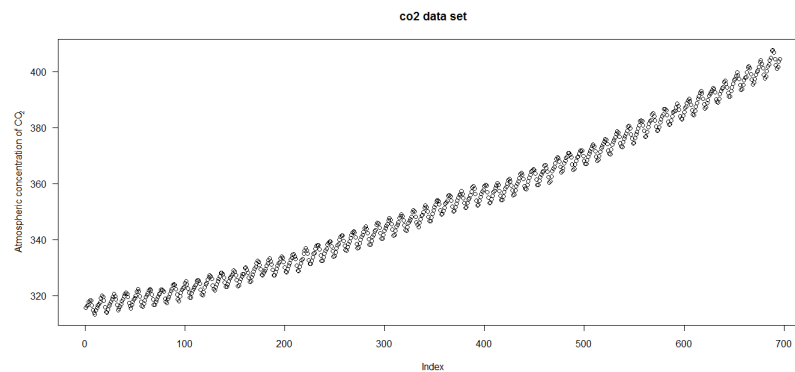
Nous remarquons dans cet exemple que le prédicteur BLP donne , aussi, des résultats comparables à celles obtenus par les autres méthodes.

#### 4.2.4 Exemple de la concentration atmosphérique de CO<sub>2</sub>

Nous considérons les données de mesure de la concentration de CO<sub>2</sub> (unité : ppm = parties par millions) dans l'atmosphère pendant la période de 1959 à 2015 disponible sur le site web :

<http://cdiac.esd.ornl.gov/pub/maunaloa-co2/maunaloa.co2>.

La figure suivante montre une nette augmentation des émissions de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère et puis un signe de réchauffement climatique.

FIGURE 4.17 – concentration atmosphérique de CO<sub>2</sub> (1959 – 2015)

La figure suivante (Fig. 4.19) montre le prédicteur de BLP (trait noir) et la concentration atmosphérique de CO<sub>2</sub> de l'année 2015 (trait bleu).

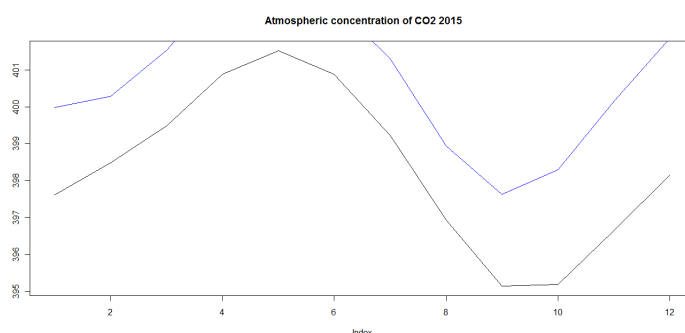


FIGURE 4.18 – Prédicteur BLP année 2015

$$\text{MSE}=4.53846; \text{RMAE}=0.005383$$

Le prédicteur BLP de la concentration de CO2 dans l'atmosphère en 2015 donne une petite erreur RMAE de  $0,53 \cdot 10^{-2}$  et montre une bonne tendance de la trajectoire réelle en tant qu'affichages graphiques.

#### 4.2.5 Consommation de l'énergie électrique de la Société des Ciments de Benisaf

Nous considérons les données de mesure de la consommation de l'énergie électrique de la Société des Ciments de BeniSaf (S.CI.BS) Wilaya de AIN TEMOUCHENT (c'est un client alimenté en électricité haute tension 60000 Volts par la société Gestionnaire Réseau de Transport d'électricité (G.R.T.E) filiale de SONELGAZ, sa source d'alimentation est depuis un Poste 220000/60000 Volts qui se trouve à AMIR ABELKADER sur la route National N35A.)

des données de puissance en mégawatt sont observés par un compteur d'électricité tout les 10 minute pendant la période de 11/02/2018(00h00) j'usqu' au 30/06/2018 (23H50).

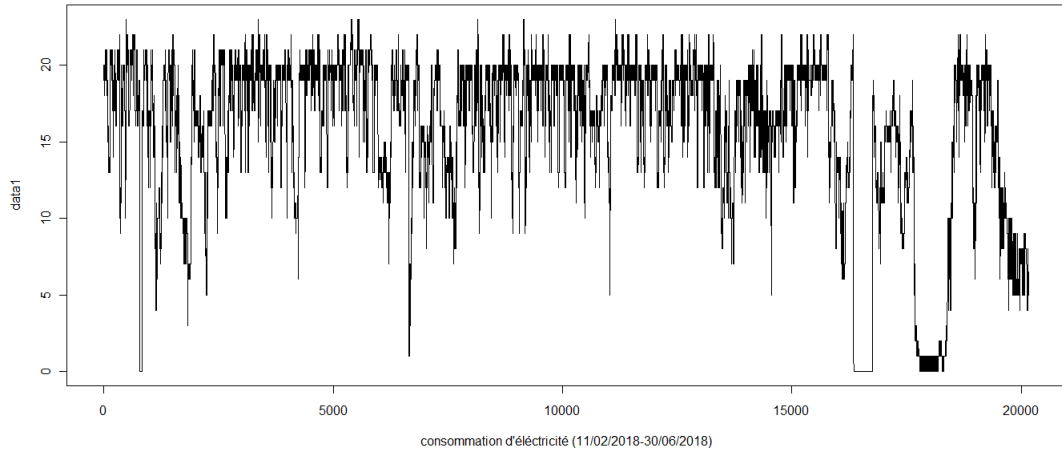


FIGURE 4.19 – Consommation de l'énergie électrique de S.CI.BS (11/02/2018 – 30/06/2018)

La figure suivante (Fig. 4.20) montre le prédicteur de BLP (trait noir) et la consommation de l'énergie électrique de la journée de 30/06/2018 (trait bleu).

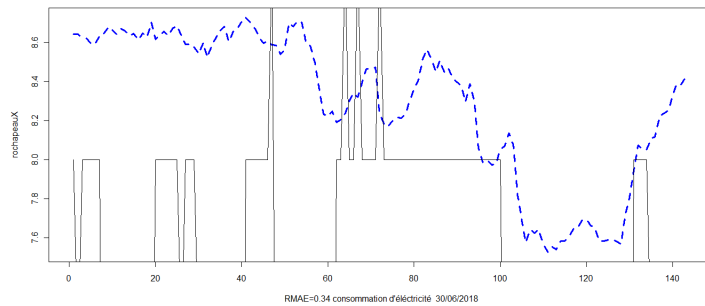


FIGURE 4.20 – Prédicteur BLP de la journée 30/06/2018

RMAE=0.34 et MSE=5.17.

Le prédicteur BLP de la consommation de l'énergie électrique de la journée donne des petites erreurs RMAE=0.34 et MSE=5.17 .

### **4.2.6 Conclusion**

Dans cette étude nous avons comparé notre méthode de prévision BLP avec plusieurs méthodes de prévision disponibles dans la littérature (voir, par exemple [2], [3], [31] ) sur la base de leurs erreurs relatives moyenne RMAE. Pour le prédicteur BLP nous obtenons, en général, des erreurs RMAE assez faibles et comparables à ceux des autres méthodes, ce qui donne dans certains cas un léger avantage de cette méthode.





# Chapitre 5

## Conclusion générale

Nous avons utilisé les prédicteurs BLP pour la prévision d'un ARC puis d'un ARH(1). Dans les deux cas nous avons démontré la convergence presque sûre des prédicteurs et nous avons établi les bornes exponentielles pour chaque cas. Nous avons utilisé le plongement de l'espace  $C_{[0,1]}$  dans  $L^2(H)$  pour étudier la prédiction d'une nouvelle variable (plongement d'un processus ARC). Nous avons également traité la relation entre projections sur les sous espaces Clos et sur les espaces autoreproduisants, où nous avons remarqué que les deux formules coïncident. Nous avons présenté des études de simulations d'un processus AR en utilisant le logiciel R version 2.12.2 et en suivant le tableau des erreurs des différentes approches de prévisions donnée par Antoniadis et al. [2]. Les résultats obtenus confirment les résultats théoriques où les erreurs relatives RMAE de prédiction sont très faibles. Des applications réelles ont été considérées telles que la prévision du phénomène météorologique El Niño, la température au château de Nottingham, température à Alger, concentration atmosphérique de CO<sub>2</sub> et consommation de l'énergie électrique de la Société des Ciments de BeniSaf (S.CI.BS), avec des erreurs relatives de prévision très faibles comparativement à celles obtenues par d'autres méthodes de prévision.

Les résultats de convergence des prédicteurs BLP ont été obtenus dans le cadre d'un ARH(1) ou dans le cas Gaussien.

Ce travail ouvre la voie à différentes perspectives :

1. Le problème des vitesses de convergences des prédicteurs n'a pas été abordé dans ce travail.
2. L'étude des erreurs quadratiques des prédicteurs BLP.
3. Problème d'optimalité concernant le nombre des valeurs propres  $k_n$  dans la formule du prédicteur BLP.
4. La théorie des prédicteurs BLP pour des processus AR à valeurs dans un espace de Banach est un problème ouvert.



# Bibliographie

- [1] Allam, A. and Mourid, T. Geometric Absolute regularity of Banach space autoregressive processes. *Statistics and Probability Letters* 60 (2002) p. 241-252.
- [2] Antoniadis, A., and E. Paparoditis and T. Sapatinas. A functional wavelet-kernel approach for time series prediction, *journal of the royal Statistical Society. Series B*, vol.68, no. 5, pp. 837-857, 2006.
- [3] Bensmain, N. *Prévision par la méthode des seives d'un processus autorégressif Hilbertien*. Thèse de Doctorat Sciences. Université Abou Bekr Belkaid. 2008.
- [4] Bensmain, N. Prédiction des processus AR Hilbertien via la méthode des seives. Simulations et exemples , *Ann. ISUP*, 2013, 57, 3, 103-115.
- [5] Berhoune, K. and Bensmain, N. 2018. Sieves estimator of functional autoregressive process. *Statistics and Probability Letters* 135, pp 60-69.
- [6] Berhoune, K. *Sieves estimator of functional autoregressive process*. Thèse de Doctorat Sciences. Université Abou Bekr Belkaid. 2018.
- [7] Bosq, D. *Linear Processes in Function Spaces Theory and Applications*. Lecture Notes in Statistics 149. Springer.2000
- [8] Bosq, D. General Linear Processes in Hilbert Spaces and Prediction, *Journal of Statistical Planning and Inference* 137(3) · 2007
- [9] Bosq, D. and D. Blanke. *Inference and Prediction in Large dimension*. Wiley-Dunod 2007
- [10] Bosq D. and Mourid, T. Une note sur les sous espaces clos Gaussiens *Ann. ISUP*, 2013, 57, 3, 103-115.
- [11] Bosq, D. Computing the best linear predictor in Hilbert space. Application to general linear processes. *J.Multivariate Analysis*, 2014, 124, 436-450.
- [12] Crambes, C. and A. Mas. Asymptotics of prediction in functional linear regression with functional outputs, *Bernoulli*. Volume 19, Number 5B (2013), 2627-2651.

- [13] Cuevas, A. and M. Febrero and R Fraiman. Linear functional regression. The case of fixed design and functional response. *Canad J. Statist.* 30 285-300. (2002) MR 1926066.
- [14] Damon, J. and S. Gillas. *Modelization for Functional AutoRegressive processes*. The far Package Version : 0.6-2 License :LGPL-2.1 version 2.4.1 logiciel R, 2005.
- [15] Fan, J. and S-K. Lin (1998). Tests of significance when data are curves. *J. Amer. Statist.Assoc.*93 1007\_1021. MR 1649196
- [16] Ferraty, F. and P. Vieu. *Nonparametric Functional Data Analysis :Theory and Practice*. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [17] Ferraty, F. Wenceslao Gonzalez-Manteiga, Adela Martinez-Calvo and P. Vieu. Presmoothing Functional Linearreg Ression *Statistica Sinica* 22 (2012), 69-94
- [18] Forni, M., M. Hallin, M. Lippi, L. Reichlin, The generalized dynamic factor model : one-sided estimation and forecasting, *J. Amer. Statist. Assoc.* 100 (471) (2005) 830-840.
- [19] Fortet, R. *Vecteurs, fonctions et distributions aléatoires dans les espaces de-Hilbert*. Hermes. Paris. (1995)
- [20] Hays, S., H. Shen and J.Z. Huang, Functional dynamic factor models with application to yieldcurve forecasting, *The Annals of Applied Statistics*.
- [21] He, G., H.-G. Muller and J;-L. Wang (2000). Extending correlation and regression from multivariate to functional data. In *Asymptotics in Statistics and Probability (M. L. Puri, ed.)* 197-210. VSP, Leiden.
- [22] Kargin, V., A. Onatski, Curve forecasting by functional autoregression, *J. Multivariate Anal.* 99 (10) (2008) 2508-2526.
- [23] S. Hormann and P. Kokoszka. Weakly dependent functional data, *The Annals of statistics*, vol.38, no. 3, pp.1845-1884, 2010.
- [24] Horvá th, L. and P. Kokoszka, *inference for functional data with Application*, Springer, New York, NY, USA, 2012.
- [25] Kokoszka, P. *Dependent Functional Data International Scholarly Research Network ISRN Vol 2012*.
- [26] Labbas, A. *Estimations et Prévision d'un Processus Banachique*.Thèse de Doctorat d'Etat. Université Abou Bekr Belkaid. 2004.
- [27] Loges, W. Estimation of Parameters for Hilbert Space-Valued Partially Observable Stochastic Processes. *J. Multivariate Anal.* 20(1986) 161-174.
- [28] Mandelbaum, A. Linear estimators and measurable linear transformations on Hilbert space, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verwandte Geb.* 65 (3) (1984) 385-397.

- [29] Mokhtari, F. and Mourid, T. Prévision des processus ARC(1) via le prédicteur de Parzen. Exemples et simulations, *Pub.Inst.Stat.Univ.Paris, LIII, fasc. 1-2, 2008, 81-90.*
- [30] Mokhtari, F. and Mourid, T. Prediction of continuous time autoregressive processes via the Reproducing Kernel spaces. *Statistical Inference for Stochastic Processes 6 : 247-266. 2003.*
- [31] Mokhtari, F. *Prevision par une méthode de Parzen d'un Processus   temps continu admettant une représentation autor egressive.* Thèse de Doctorat Université Abou Bekr Belkaid. 2008.
- [32] Mourid, T. *Contribution à la statistique des processus autorégressifs   temps continu.* Thèse de Doctorat Es Sciences. Université Paris 6. 1995.
- [33] Omatu, S., H. Nagamine, T. Soeda. Optimal filter for a discrete-time distributed parameter system and its application to environmental data processing. *In Application of Information and Control Systems, Vol.III.2nd International. Conf. Inform.Sci. Systems, Patras,Greece. 1979.*
- [34] Parzen, E. A New Approach to the Synthesis of Optimal Smoothing and Prediction Systems. *Permission from Mathematical Optimization Techniques, University of California Press, Berkeley, Calif, 1963, pp.75-108*
- [35] Pumo, B. *Prevision d'un Processus autorégressif   temps continu.* Thèse de Doctorat Université Paris 6 1993.
- [36] Pumo, B. *Prediction of Continuous Time Processes by  $C[0, 1]$ -Valued Autoregressive Processes,* Statistical Inference for Stochastic Processes . 1998.
- [37] Ramsay, J.O. and B.W., Silverman, *Functional Data Analysis,* Springer, New York, NY, USA, 2005.
- [38] Ramsay, J.O. and B.W., Silverman, *Applied Functional Data Analysis,* Springer, New York, NY, USA, 2002.
- [39] Rice, J. and B. W.Silverman, (1991). Estimating the mean and covariance structure nonparametrically when the data are curves. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 53 233-243. MR1094283*
- [40] Ruiz-Medina,M.D., R. Salmeron, J.M. Angulo, Kalman filtering from POP-based diagonalisation of ARH(1), *Comput. Statist. Data Anal. 51 (10) (2007) 4994-5008.*
- [41] Yao, F., H-G., Muller and J.-L. Wang(2005). Functional data analysis for sparse longitudinal data. *J. Amer. Statist. Assoc. 100 577-590. MR2160561*
- [42] Yao, F., H.-G. Muller, and J.-L. Wang. Functional linear regression analysis for longitudinal data, *Ann. Statist Volume 33, Number 6 (2005), 2873-2903.*

**Résumé** : Nous considérons le meilleur prédicteur linéaire (BLP) d'un processus autorégressif fonctionnel construit par la projection orthogonale sur des sous espaces clos introduit par R. Fortet (1995). Cette approche est utilisée directement pour la prédiction de cette classe de processus. Nous montrons des convergences presque sûre et nous établissons des bornes exponentielles pour les prédicteurs BLP. Nous améliorons des résultats existant dans la littérature. Nos conditions portent essentiellement sur le taux de décroissance des valeurs propres de l'opérateur de covariance du processus.

Nous illustrons la performance des prédicteurs BLP par une étude de simulations numériques et par des exemples réels de climatologie et de consommation de l'énergie électrique. Nous comparons nos résultats avec ceux des autres méthodes de prédiction existant dans la littérature statistique. Les résultats obtenus corroborent les résultats théoriques.

**Mots clés**: Processus autorégressif fonctionnel - Prédicteur BLP - Transformations linéaires mesurables - Opérateur de covariance - Simulation.

**Abstract** : We consider the Best Linear Predictor (BLP) of Functional Autoregressive Processes built with orthogonal projection on linearly closed subspaces introduced by R. Fortet (1995). This approach directly focuses on the prediction of this class of processes and we show almost sure convergence and exponential bounds for the predictors BLP. Then we improve the existing results in the literature. We give the almost sure convergence of the predictors BLP for  $C[0;1]$ -valued autoregressive process when it ruled by a bounded linear operator. Our conditions essentially carry on the decay rate of the eigenvalues of the covariance operator of the process. We illustrate the finite sample performance of the BLP predictors by a simulation study and through real examples from climatology and consumption of electrical energy. We compare with others prediction methods existing in the literature and enlighten on the link between the convergence rates of BLP predictors and the presence of the first eigenvalues of the covariance operator.

**Keywords**: Functional Autoregressive Processes - Best Linear Predictor – Measurable-linear transformations - Covariance operator - Simulation.

**ملخص** : في هذه الأطروحة ، نهتم بأفضل تنبؤ خطي BLP لانحدار ذاتي في فضاء الدوال المستمرة المعين بالاسقاط العمودي على المساحات الفرعية المقدمه من طرف R. Fortet (1995) . هذا المنهج يركز مباشرة على التنبؤ بهذه الفئة من الهوال . نعرض نتائج حول التقارب الأكد تقريبا لهذا التقدير ، نشرى حدودا أسية للتنبؤ ونحسن بذلك النتائج عن التقارب باتخاذ طرق أخرى الموجودة في المراجع . فرضياتنا تركز على معدل الانخفاض للقيم الذاتية لمشغل التباين. نوضح أداء تنبؤات BLP من خلال دراسة محاكاة ومن خلال أمثلة حقيقية لعلم المناخ واستهلاك الطاقة الكهربائية. قارنا نتائجنا مع نتائج أساليب التنبؤ الأخرى الموجودة في المراجع. النتائج التي تم الحصول عليها تؤكد النتائج النظرية.

**الكلمات الرئيسية** : انحدار ذاتي في فضاء الدوال المستمرة - أفضل تنبؤ خطي - التحولات الخطية القابلة للقياس - مشغل التباين - المحاكاة .